

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.30

PART 1

Six issues per year

DUBNA 1999

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 30

ВЫПУСК 1

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1999

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы **Е.К.Аксенова**, тел. (09621) 65-165

Э.В.Ивашкевич

©ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1999

РАДИАЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИСТЕМ ИЗ ЛЕГКИХ КВАРКОВ

О.А.Займидорога

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлены экспериментальные доказательства существования резонансных состояний систем из легких кварков, проявляющихся как резонансы с разной массой. Их характерным свойством является существование различных энергетических состояний для данного спина и четности. Такие резонансы в $\pi\pi\pi$ -системе, рожденные дифракционно, являются радиальными возбуждениями систем из легких кварков.

The experimental evidence of resonances, peculiar properties of which are the existence of various energy states for given spin-parity has been presented. These resonances in $(\pi\pi\pi)$ -system, diffractively produced, are mostly the radial-excited states of light quarks.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты, выполненные на ускорителе 70 ГэВ в Серпухове, привели к обнаружению радиальных дифракционно-возбужденных бозонных резонансов в $\pi\pi\pi$ - и в $K\pi\pi$ -системах. Впервые был экспериментально изучен спектр возбуждения кварковой структуры взаимодействующего мезона как по орбитальному, так и по радиальному квантовому числу в системе легких кварков [1—3].

Взаимодействия мезонов с ядрами при высоких энергиях с определенной вероятностью приводят к событиям такого типа, когда в результате дифракционной диссоциации падающего мезона на ядре как целом рождается тяжелая бозонная система, а ядро остается в основном состоянии. Такое изменение состояния характеризуется тем, что бозонная система имеет непрерывный спектр состояний, насыщаемый как образованием резонансов, так и продуктами диссоциации в нерезонансную систему.

Открытие дифракционных процессов в неупругих сильных взаимодействиях элементарных частиц и эффекта когерентности амплитуд явилось прямой иллюстрацией фундаментальных идей квантовой механики. Экспериментальные и теоретические исследования [4,5] позволили установить следующие основные свойства этих процессов:

- а) сечения этих процессов не зависят от энергии (или слабо зависят при факторе $\lg S$);
- б) сечения взаимодействия частицы и античастицы равны;
- в) дифференциальное сечение имеет пик в переднем конусе;
- г) обменные процессы характеризуются квантовыми числами вакуума в t -канале;

д) происходит сужение дифракционного конуса с ростом энергии падающей частицы в адрон-адронных процессах дифракционной диссоциации.

Процессы неупругой дифракционной диссоциации адронов на ядрах еще слабо изучены; в них, несмотря на большое изменение массы бозонной системы, ядро остается в основном состоянии, т.е. процесс взаимодействия происходит когерентно, и рожденная система частиц для малых передач импульса сохраняет квантовые числа налетающей частицы, а спин и четность конечного состояния определяются механизмом обменного процесса. Вследствие этого ценным свойством изучения дифракционно образуемых резонансных систем является возможность однозначного определения спина и четности конечного состояния.

Из-за большой передачи энергии рожденной системе (порядка нескольких ГэВ) при малых переданных 4-импульсах ($\sim 0,01$ (ГэВ/с)²) исследование этих процессов представляет уникальную возможность изучения возбужденных состояний дифракционно образуемых систем, т.е. исследования спектра уровней возбуждения составной структуры взаимодействующей элементарной частицы как по орбитальному моменту, так и по главному квантовому числу. Кроме того, исследование процессов когерентного рождения состояний на ядерных мишенях дает возможность определить полное сечение поглощения нестабильных систем нуклонов в различных состояниях по спину и четности. Высокая степень когерентности волн приводит к усилению рождения резонансных структур в дифракционных процессах, а строгие правила отбора — к сильной поляризации в конечном состоянии, способствующей однозначному определению углового момента и четности резонансов. Важные сведения могут быть получены также о механизме процессов дифракции при высоких энергиях.

Изучение спектроскопии уровней возбуждения составной структуры как по орбитальному, так и по радиальному квантовому числу необходимо для понимания структуры межкварковых сил.

Существование радиальных возбуждений является еще одним подтверждением реальности кварков, помимо известных фактов рождения струй и глубоконеупругих процессов. Для тяжелых кварков частицы «пси» и «ипсилон» в экспериментах на ускорителях наблюдаются в различных энергетических состояниях как частицы с разной массой. Такой энергетический спектр аналогичен атомному спектру: он свидетельствует о существовании

квантовых уровней связанной системы. Каждый из этих энергетических уровней должен представлять собой различные степени возбуждения и различные комбинации спинов составляющих и их орбитального момента. Подобные спектры позволяют объяснить поведение цветных сил на межкварковых расстояниях.

Потенциальная кварковая модель предсказывает существование адронов с одинаковыми квантовыми числами и с различающимся числом узлов (нулей) радиальной волновой функции $q\bar{q}$ -системы. Эти состояния являются радиальными возбуждениями. Решение уравнения Шредингера для радиальной части волновой функции кварк-антикварковой системы определяет энергетические уровни системы. Так, например, в случае сферически-симметричного потенциала $q\bar{q}$ -взаимодействия для каждого значения орбитального момента существует бесконечное число нулей радиальной волновой функции, которым соответствуют энергии $E_r = \frac{\hbar^2}{2m} K^2 u_r^2$, где $u_r = 0, 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число. Радиальное и главное квантовое число n связаны соотношением $n = u_r + l + 1$.

Впервые радиальные возбуждения были установлены для кваркония из тяжелых кварков ($c\bar{c}$) — семейство J/Ψ -мезонов, а впоследствии для ($b\bar{b}$)-систем — семейство ипсилон-мезонов.

В отличие от тяжелых мезонов, для легких мезонов, состоящих из u -, d -, s -кварков, информация о надежно экспериментально установленных радиальных состояниях более скудная. Детальная информация о радиальных состояниях наряду с орбитальными состояниями позволит получить сведения о строении спин-орбитальной связи в кварковой системе. Уже полученные данные свидетельствуют о том, что эта связь устроена не так, как в атомах, а особым образом. Она не похожа ни на LS - и ни на JJ -связь.

Простая геометрическая картина дифракционного рассеяния тесно связана с составной структурой адронов. Пространственно-временное описание дифракционного рассеяния при высоких энергиях позволяет выразить амплитуду рассеяния через распределение партонов внутри адронов. КХД с асимптотической свободой наиболее адекватна описанию процессов с большой передачей импульса — глубоконеупругих процессов. В дополнение к этим процессам дифракционные процессы характеризуются малыми 4-передачами импульса и большими передачами энергии составной системе. Применение КХД к этим процессам встречает серьезную проблему, связанную с большими межкварковыми расстояниями и цветовым пленением кварков и глюонов.

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА ДИФРАКЦИОННОЙ ДИССОЦИИАЦИИ

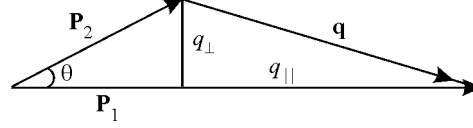
Сразу после открытия [6,7] процессы дифракции адронов стали играть исключительно важную роль в физике высоких энергий. Подобно тому, как изучение проблемы двух тел рассматривалось как инструмент для изучения многих тел, так и процессы дифракционного рассеяния рассматриваются как средство изучения механизма упругих и неупругих процессов при высоких энергиях, вследствие того факта, что эти неупругие процессы по свойствам подобны упругому рассеянию. В процессах дифракции элементарных частиц ярко проявляются волновые свойства сталкивающихся частиц и размеры области их сильного взаимодействия. В формализме Редже дифракционный процесс идет через обмен вакуумным полюсом, и он должен доминировать при высоких энергиях, так как сечение процесса не зависит от энергии падающей частицы.

Дифракционная диссоциация адронов усиливает образование резонансов, удовлетворяющих определенным правилам отбора. При взаимодействиях на ядрах, несмотря на огромную передачу энергии (в несколько ГэВ) рожденной системе, ядро получает отдачу как целое и остается в основном состоянии. Такие процессы называются когерентными, и в этом случае ядро играет роль бесструктурной системы нуклонов, амплитуда процесса есть сумма амплитуд процессов на отдельных нуклонах. Поскольку состояние ядра не изменяется, то между падающим адроном и ядром возможен обмен состояниями с квантовыми числами вакуума (померон) или ω -мезоном. В случае обмена помероном дифракционно рожденная система сохраняет, кроме спина и четности, все дискретные квантовые числа налетающего адрона (заряд, барионное число, странность, зарядовую и G -четность и изоспин). В случае обмена ω -реджеоном сохраняются те же квантовые числа, кроме C - и G -четностей. Вследствие этих свойств изучение процессов дифракции адронов на ядрах позволяет проводить исследования структуры самого ядра и его возбужденных состояний.

Кинематика процессов дифракции. Из минимального требования когерентности процесса ядро должно взаимодействовать с налетающим адроном как целое, нежели как группа независимых нуклонов. Из этого следует, что нуклоны ядра не могут получить большую отдачу в процессе взаимодействия. В противном случае это ведет к процессам развала ядра. Следовательно, передача импульса и энергии ядру как целому происходит таким образом, что ядерные силы способны сохранить целостность ядра.

В неупругих дифракционных процессах изменение масс частиц происходит на сотни МэВ и несколько ГэВ, в то время как ядро получает не более ~ 10 МэВ. Вследствие этого обстоятельства релятивистская частица подобна фотону, так как ее масса не важна.

Пусть падающая частица с 4-импульсом $(\mathbf{P}_1, E_1)$ взаимодействует с ядром, и образующаяся система частиц имеет 4-импульс $(\mathbf{P}_2, E_2)$. Переданный ядру импульс $\mathbf{q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ удобно разложить на параллельную $q_{\parallel}$ и перпендикулярную $q_{\perp}$ компоненты. Тогда $q_{\perp} = P_2 \sin \theta$, и для переднего направления



$$-t' = P_2^2 \sin^2 \theta \simeq P_2^2 \theta^2; \quad q_{\parallel} = P_1 - P_2 \cos \theta.$$

Если пренебречь кинетической энергией ядра отдачи, то из закона сохранения следует, что

$$P_2 = (P_1^2 + m_1^2 - m_2^2)^{1/2}, \quad q_{\parallel} = P_1 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{P_1^2}} \right).$$

Разложив в ряд Тейлора и взяв только два члена ряда, будем иметь

$$q_{\parallel}^0 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1} \quad \text{и} \quad t_{\parallel}^0 = \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1} \right)^2,$$

т.е. продольная составляющая 4-мерной передачи, определяющая минимальную передачу импульса для рождения массы m_2 , зависит только от импульса падающей частицы и не зависит от массы ядра, и ее величина уменьшается с ростом энергии. Величина $t_{\min}$ с поправкой на энергию ядра отдачи равна

$$t_{\min} = t_{\parallel}^0 \left(1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{MP_1} \right),$$

где M — масса ядра, и с учетом следующего члена разложения в ряд получаем:

$$t_{\min} = \left(1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1^2} \right) t_{\parallel}^0.$$

Величины поправок существенны для импульсов менее 5 ГэВ/с. Для $P_1 = 40$ ГэВ/с эти поправки составляют величину 10^{-7} , в то время как $t_{\parallel}^0 = 1,5 \cdot 10^{-4} (\text{ГэВ/с})^2$ для массы $m_2 = 1$ ГэВ/с².

Оценим величину кинетической энергии ядра в неупругом дифракционном процессе $a + b \rightarrow c + b'$. Четырехмерная передача $t_{a \rightarrow c} = t_{b \rightarrow b'} = ({}^4P_a - {}^4P_c)^2 = ({}^4P_b - {}^4P_{b'})^2$ и $t = t' + t_{\min}$, где $-t' = q_{\perp}^2$, $-t_{\min} = q_{\parallel}^2$. Передаваемый ядру 4-импульс $t = 2MT$, где M — масса ядра, а T — его кинетическая энергия, или $t = P_{\text{я}}^2$. Таким образом, в когерентной области для ядра Be $T = 2$ МэВ, для ядра Pb $T = 20$ кэВ и для протонной мишени — 10 МэВ.

Заметим, что в дифракционных процессах электророждения резонансов вместо массы m_1 в выражении для $t_{\parallel}^0$ будет квадрат 4-мерного импульса виртуальной частицы.

Таким образом, при высоких энергиях в когерентных процессах практически сохраняется энергетический баланс для быстрых частиц. В тех процессах, где существенны эффекты возбуждения ядра и энергия отдачи,

$$q_{\parallel} \simeq \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1} + \frac{t}{2M} + E_{\text{возб}}.$$

Когерентность. Понятие когерентности в квантовой механике применяется в разных аспектах и имеет широкий диапазон применения. Что касается рассматриваемых нами процессов дифракции сильновзаимодействующих частиц на ядрах, то конечное состояние является результатом взаимодействия с одиночным нуклоном ядра, и имеется A (число нуклонов ядра) различных амплитуд T_k , ведущих к конечному состоянию. Если условия процесса дифракции удовлетворены и конечное состояние ядра известно, то рожденная система есть результат сильной интерференции между разными амплитудами, т.е. процесс происходит когерентно. Эта интерференция может быть как конструктивной, так и деструктивной. Каждая амплитуда T_k на отдельном нуклоне может состоять из двух членов: одного постоянного члена, который одинаков для всех нуклонов, и члена, меняющего свой знак в зависимости от того, что K есть протон или нейтрон, и направления спина нуклона вверх или вниз. Постоянный член является когерентной частью T_k , и амплитуды отдельных нуклонов складываются конструктивно, давая член $AT^{\text{ког}}$ с увеличением в амплитуде, характерным для когерентного процесса, в то время как члены с переменным спином на протоне и нейтроне дают деструктивную интерференцию и сокращаются. В когерентном случае амплитуды должны быть суммированы перед тем, как возвести их в квадрат. Однако в квантовой механике амплитуды всегда должны быть суммированы до получения сечения процесса. Часто несущественно, одна ли амплитуда важна, или сумма амплитуд по многим состояниям получена таким образом, что интерференционные эффекты между разными амплитудами сокращают-

ся, так что порядок суммирования амплитуд и возведения в степень неважен.

К примеру, рассмотрим переход, в котором ядро из основного состояния переходит в одночастичное возбужденное состояние (или имеет группу нуклонов в возбужденном состоянии). В этом случае существенно взаимодействие с одним нуклоном (или с группой). Эффект сокращения амплитуд будет иметь место для когерентных амплитуд при относительно больших передаваемых импульсах, когда ядро разваливается, и будет наблюдаться указанный переход при суммировании по многим конечным состояниям ядра, и ядро для этого перехода представляет собой сумму невзаимодействующих нуклонов. Для когерентного процесса существенным является эффект интерференции между амплитудами дифракции на разных нуклонах ядра.

Физической характеристикой когерентности процесса является не аддитивность амплитуд, а то обстоятельство, что ядро взаимодействует как целое. Если ядро не взаимодействует как целое, то переход в определенные квантовые состояния происходит при сложении амплитуд от различных нуклонов и эффективно является некогерентным процессом, так как суммирование проводится по многим конечным состояниям, между амплитудами которых нет эффекта интерференции.

Амплитуда процесса на i -м нуклоне имеет вид

$$T_k = T^{\text{ког}} + T_1 \sigma(i) + T_2 I(i) + T_3 \sigma(i) I(i) \quad (1)$$

и зависит от координат падающей частицы и нуклонов; $\sigma(i)$ и $I(i)$ — спин и изоспиновые операторы.

Переход из начального состояния в конечное есть сумма членов:

$$\sum_i^A \langle f | T_i | K \rangle.$$

Для перехода ядра в одночастичное возбужденное состояние (или групп нуклонов) только амплитуда T_3 существенна, а для перехода в основное состояние важна только $T^{\text{ког}}$. Для ядер с приблизительно равным числом протонов и нейтронов член $T_2 I(i)$ при суммировании по ядру обращается в нуль. Для ядер со спином нуль сумма членов $T_1 \sigma(i)$ обращается в нуль и, естественно, $T_3 \sigma(i) I(i)$. При неполной компенсации спинов вклад в амплитуду процесса составляет малую величину $\sim S/A$. Таким образом, только не зависящие от спина и изоспина амплитуды дают вклад в когерентный процесс. Другие амплитуды не дают интерференционных членов при суммировании по ядру, и к тому же амплитуды, зависящие от спина и изоспина, дают состояния ядра, отличные от основного.

Это обстоятельство приводит к определенным правилам отбора состояний и к механизму селекции, которые будут рассмотрены ниже. Нам осталось сформулировать условие когерентности процесса.

Ядра являются протяженными объектами, и амплитуды от нуклонов в разных точках имеют различные фазы. Суммирование по разным точкам дает осциллирующий фазовый фактор, который сильно подавляет полную амплитуду. Разность фаз между двумя точками, разделенными величиной x , равна $(K - K')x$, где K, K' — волновые векторы, и фазовый фактор есть $\exp(iqx)$, где $q = K - K'$. Большая величина разности фаз из-за большой передачи импульса q или больших расстояний между нуклонами ядра приводит к тому, что амплитуды в этих точках будут не в фазе и произойдет полная потеря когерентности. Условием когерентности всех нуклонов ядра является требование: $qR \lesssim 1$, R — радиус ядра. При данной энергии пучка и данном ядре значения масс когерентно-рожденных систем определяются этим условием. Так, для рождения на нулевом угле это условие приобретает вид $q_{\parallel} R \leq 1$ или $\frac{m_2^2 - m_1^2}{2P} R \lesssim 1$, и область когерентно рожденных масс определяется радиусом ядра:

$$m_{\text{рез}} = \sqrt{2P/R},$$

где $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1,1f$,

$$m_{\text{рез}} \cong \frac{\sqrt{2P}}{A^{1/6}}.$$

Например, при энергии 40 ГэВ/с, область когерентно рожденных состояний на ядре углерода ($R_c = 3,2$ фм) простирается до $2,2 \text{ ГэВ/с}^2$, в то время как для ядра свинца $R_{\text{pb}} = 6,3$ фм) до $1,5 \text{ ГэВ/с}^2$. Отсюда видно, что при желании исследовать область больших масс ($> 2 \text{ ГэВ/с}^2$) условие для их когерентного рождения выполняется только для легчайших ядер (дейтерий, гелий). Эффект подавления высоких значений масс рожденных систем в когерентных процессах четко наблюдается в эксперименте в распределениях по массам для разных ядер.

В теоретических описаниях когерентных процессов некогерентность учитывается как эффект подавления процесса формфактором ядра. Так, сечение когерентного рождения на ядре имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt'} = \frac{d\sigma_N}{dt'} A^2 |F(t')|^2,$$

где $d\sigma_N/dt'$ — когерентное рождение на нуклоне, а $F(t')$ — ядерный формфактор. В простейшем виде $|F(t')|^2 = 1 - tR^2/5$, и для $qR = 1$ $F^2 = 0,8$, а для $qR = 2$ $F^2 = 0,15$, т.е. сечение процесса для больших масс падает в 7 раз.

Правила отбора. Рассмотрим когерентный процесс $a + x \rightarrow b + x$, в котором ядро x переходит в основное состояние со спином $S_x = 0$ и изоспином $I_x = 0$. Если состояние b есть резонанс, то что можно сказать о его квантовых числах? Очевидно, что b имеет тот же изоспин, что и a , так как ядро не изменило квантовые числа и имеет $I_x = 0$ и тот же заряд, что и a , и все аддитивные квантовые числа те же, что и у a . Дифференциальное сечение когерентного процесса имеет пик при нулевом угле, а это означает, что система b в основном образуется в состоянии с той же спиральностью, что и a , так как ядро со спином $S_x = 0$ не может дать вклад в азимутальный угловой момент. Для падающих π - и K -мезонов образуются бозонные резонансы с $j_z = 0$, а для падающих нуклонов образуется N^* только с $j_z = +1/2$. Таким образом, возникает сильная поляризация конечного состояния, которая вместе со знанием угловых характеристик распада резонансов позволяет определить угловой момент и четность резонансов. Если падающая частица имеет нулевой спин, то спин конечного бозона есть J , и матричный элемент этого процесса может быть построен из тензора с индексами J , представляющими спин бозона. Так как имеются два вектора $\mathbf{K}_a$ и $\mathbf{K}_b$, падающей частицы и конечного бозона, которые параллельны для переднего конуса, тензор для спина бозона при $\theta \cong 0^\circ$ имеет вид $K_a K_b K_J$. Четность его равна $(-1)^J$ и четность бозона $(-1) \times$ четность a . Таким образом, бозон имеет четность $P = P_a(-1)^J$, что соответствует состояниям «натуральной» серии обмена.

Для π - и K -мезонов резонансы рождаются в угле $\theta \simeq 0^\circ$ в серии $J^P = 0^-, 1^+, 2^- \dots$ («ненатуральная» серия).

При рождении a_1 -мезона (1^+) π -мезоном, матричный элемент имеет вид $K\epsilon_{a_1}$, где ϵ_{a_1} — вектор поляризации a_1 -мезона.

Неколлинеарность векторов K_a и K_b дает возможность построить псевдовектор, разрешающий рождение резонансов натуральной серии в угле, не равном нулю. Заметим, что когерентные процессы $\pi \rightarrow 2\pi$, $\pi \rightarrow 4\pi$ на нулевом угле запрещены. Например, при рождении ρ -мезона ($J^P = 1^-$) π -мезонами матричный элемент $K_a K_b \epsilon_\rho$ (ϵ_ρ — поляризация ρ) равен нулю при рождении вперед [8,9]. К сожалению, эти правила селекции не работают

столь четко для падающих частиц со спином (γ -квант, нуклон). В этом случае рожденная система для данного спина будет иметь оба состояния по четности.

Суммируя сказанное, подчеркнем, что для падающих π - и K -мезонов в процессах дифракции в конечном состоянии рождается бозонная система, принадлежащая серии («ненатуральной») по спину и четности $0^-, 1^+, \dots$, а рождение бозонных систем «натуральной» серии ($0^+, 1^-$) в переднем конусе сильно подавлено. Так как требование когерентности отбирает только те обменные процессы, которые имеют изоспин, равный нулю, то это представляет возможность исследовать практически чистые механизмы обмена. Так, в реакции рождения ρ -мезона на ядре $\pi + A \rightarrow \rho + A$ возможен только ω -обмен, хотя на нуклоне разрешены обмены π , ω , a_1 и a_2 -мезонами.

Селекция механизма обмена. Рассмотрим несколько подробнее, какие ограничения возникают на механизмы обмена. Для процессов на свободном нуклоне все четыре члена в операторе T_k работают (1). На ядрах для переходов в определенное конечное состояние это не так. Член $T_2 I(i)$ имеет разные знаки для протонов и нейтронов, так как $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и стремится к нулю при суммировании по i . Аналогично ведут себя и члены, содержащие $\sigma(i)$. В действительности, если ядро имеет $I_3 = 0$ и находится в основном состоянии, то по теореме Вигнера — Эккарта члены T_2 и T_3 есть векторы в изоспиновом пространстве и не могут давать вклад в основное состояние. Подобно этому и члены с $\sigma(i)$ не могут давать вклад в основное состояние со спином $J_A = 0$.

Даже если ядро имеет несколько больше нейтронов, чем протонов, и спин ядра не точно равен нулю, то этим вкладом можно эффективно пренебречь, так как когерентный вклад существенно превышает вклад от группы нуклонов, к тому же их вклад $\sim S/A$. Члены T_1 , T_2 и T_3 приводят к вкладам с обменом изоспином, например, π -обмен описывает член T_3 , а члены с $\sigma(i)$ дают магнитную или γ_5 -связь. Это дает возможность заключить, что в дифракционных когерентных процессах обмены изоспином и «ненатуральной» серией по спину-четности запрещены. К примеру, ρ -обмен не может быть ответствен за когерентное образование a_1 -мезона на ядрах, и π -обмен невозможен в процессах $\gamma \rightarrow \rho$.

Если основное состояние ядра имеет $I = 0, J^P = 0^+$, то амплитуда $T^{\text{ког}}$ вызывает переходы к состоянию ядра с $I = 0$ и $J^P = 0^+, 1^-$. Амплитуда T_2

ведет к тем же состояниям, но с $I = 1$, а амплитуды T_2 и T_3 — к состояниям ядра с $I = 0$ и $I = 1$ соответственно и к $J^P = 0^-, 1^+, \dots$. Вследствие этих свойств исследование процессов дифракции на ядрах позволяет проводить исследования самого ядра и возбуждения определенных состояний при надлежащем выборе механизмов обмена [10]. В частности, при возбуждении гигантского дипольного возбуждения когерентная сумма $\sum_i^A Z_i I_3(i)$ имеет большую величину, и оператор T_2 в этом случае дает главный вклад и соответствует р-обмену, запрещенному для других процессов возбуждения. Подобно этому для сверхтяжелых ядер, где наблюдаются изотопические аналоговые состояния, являющиеся изотопическим партнером основного ядра, возможны процессы дифракции с зарядовой перезарядкой, запрещенные для ядер, не имеющих этих свойств.

Суммируя свойства процессов дифракции π - и K -мезонов на ядрах при переходах ядра в основное состояние с эффективным спином, равным нулю, отметим, что по сравнению с начальной частицей бозонная система в конечном состоянии имеет: 1) тот же самый спин, 2) ту же самую спиральность, 3) серию по спину и четности преимущественно $J^P = 0^-, 1^+, 2^-, \dots$, конечной системы и максимум сечения в переднем конусе, 4) все дискретные квантовые числа (заряд, странность, ...) одинаковые.

В обмене преимущественно: 1) изоспин равен нулю и 2) натуральная серия $0^+, 1^-, 2^+$.

В конечном состоянии:

1. Бозонная система имеет сильную поляризацию и специфичные свойства распада, что позволяет надежно и однозначно определить угловой момент и четность состояния.
2. Малый вклад некогерентных процессов под дифракционным пиком.
3. Отсутствие вклада амплитуд с переворотом спина.

Исследование эксклюзивных процессов дифракции на ядрах привлекательно с многих точек зрения: из-за правил отбора и механизма селекции в когерентных процессах происходит усиление рождения резонансных состояний, принадлежащих серии $0^-, 1^+, \dots$, а сильная интерференция парциальных амплитуд позволяет определить квантовые числа резонансов.

Процессы дифракции адронов находят удовлетворительное описание в теории многократного рассеяния [11—13] в объяснении экспериментальных данных как по упругому, так и по квазиупругому рассеянию частиц высоких энергий ядрами.

Возбуждение внутренней структуры. Привлекательным свойством дифракции адронов является возбуждение внутренних динамических струк-

тур налетающей частицы как по орбитальному, так и по главному квантовому числу. Такая возможность возникает из-за большой передачи энергии составной системе при малом переданном импульсе, а также из-за ограниченного набора состояний по спину и четности в конечном состоянии.

Прежде всего, рассмотрим процесс дифракции на сложной составной системе, предполагая, что падающая частица несоставная и взаимодействие между конститuentами осуществляется в виде двухчастичного потенциала

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_A) = \sum_i^A V(\mathbf{a} - \mathbf{b}_i),$$

где a — координата падающей частицы, а b_i — поперечная координата конститuenta относительно центра масс сложной системы. Тогда фазовый сдвиг $\chi(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots) = \sum_i^A \chi(\mathbf{a} - \mathbf{b}_i)$, и можно написать амплитуду дифракции на уровне составляющих системы:

$$F(q) = \langle \Psi' | \frac{i}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \left[1 - \prod_i^A (1 - P_i(\mathbf{a} - \mathbf{b}_i)) \right] | \Psi \rangle,$$

где $P_i(b) = 1 - e^{i\chi_i(b)}$ есть профильная функция каждого конститuenta. Таким образом, сразу можно получить амплитуду упругого рассеяния. Что же касается неупругой дифракции, то необходимо знание взаимодействия конститuentов на больших расстояниях. Теория многократных столкновений на уровне конститuentов дает возможность виртуального возбуждения сложной системы. В действительности эйкональные фазы в оптическом подходе и в подходе, указанном выше, связаны соотношением

$$e^{i\chi_{\text{опт}}(a)} = \langle e^{i\chi(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_A)} \rangle_i,$$

где i определяет начальное состояние конститuentов, описываемое их функцией основного состояния. Разлагая в ряд, имеем

$$\chi_{\text{опт}}(a) = \langle \chi(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_A) \rangle_i + \frac{i}{2} \left\{ \langle \chi^2(\mathbf{a}, \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n) \rangle_i - \langle \chi(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \rangle^2 \right\}.$$

Это соотношение показывает, что если элементарная эйкональная фаза действительна, то мнимая часть оптической фазы определяется внутренним возбуждением составной системы. Важным результатом в исследовании явления дифракции было открытие дифракционного возбуждения адронов в состоянии с большой массой [14].

Что касается возбуждения внутренней структуры налетающей частицы при ее диссоциации, то составные и дуально-резонансные модели адронов предсказывают существование состояний с одинаковыми квантовыми, но с разными радиальными числами. В кварковой модели эти состояния характеризуются различным числом узлов радиальных волновых функций $(q\bar{q})$ -системы, и состояния с отличным от нуля числом узлов принято называть радиальным возбуждением. Радиальные возбуждения крайне чувствительны к соотношению между короткодействующей частью кваркового взаимодействия и взаимодействия, обеспечивающего конфайнмент.

Возбуждение составной структуры такой бозонной системы, какой является π -мезон, представляет важное значение для исследования свойств динамики легких кварков.

Экспериментальное обнаружение радиальных возбуждений π -мезона непосредственно свидетельствовало бы о составном характере π -мезона. В этом смысле роль радиальных возбужденных состояний у пиона имеет особое значение по сравнению с другими состояниями, сложными по своей спиновой и кварковой структуре. Экспериментальные данные указывают, что массами u - и d -кварков (u - и d -кварки составляют пион) можно пренебречь, и в этом случае лагранжиан взаимодействия приближенно инвариантен относительно независимого вращения левых и правых компонент u - и d -кварков. Киральная симметрия предсказывает вырождение спектра частиц по четности, что реально не наблюдается.

Однако киральный подход со спонтанным нарушением этой симметрии хорошо объясняет экспериментальные данные по рассеянию элементарных частиц [15]. Объяснение спонтанного нарушения киральной симметрии сводится к тому, что низшее состояние, или вакуум, неинвариантно относительно преобразования киральной группы, несмотря на то, что лагранжиан взаимодействия инвариантен относительно γ_5 -вращений. Как результат этого, в вакууме появляется среднее кварковое поле ($\langle q\bar{q} \rangle \neq 0$, в то время как $\langle \bar{q}\gamma_5 q \rangle = 0$). Такое нарушение строгой симметрии лагранжиана ведет к появлению голдстоуновских, почти безмассовых частиц, которые отождествляют с π -мезонами.

Как следствие, радиально-возбужденные состояния π -мезона есть результат квантовых флуктуаций кваркового поля в вакууме, и эти состояния необходимо учитывать в лагранжиане взаимодействия.

Сходимость парциального разложения дифракционной амплитуды.

Полное сечение процесса дифракции, выраженное через сумму парциальных сечений, имеет смысл, если парциальный ряд сходится. Для доказательства этого оценим вклад в дифракцию состояний с большими моментами. Рассмотрим процесс упругой дифракции.

При умеренных энергиях полное сечение приблизительно равно неупругому сечению, это позволяет упругое рассеяние рассматривать как теневое, обусловленное «поглощением» входящей частицы [16]. Так как амплитуда упругой дифракции почти полностью мнимая и дифференциальное сечение имеет острый пик при малых t , то

$$T(S, t) = 2iq\sqrt{S}e^{bt/2} = 8\pi\sqrt{S} \sum_L (2L+1)P_L(x)T_L(S), \quad (2)$$

где T_L — парциальная амплитуда, $x = \cos \theta = 1 + \frac{t}{2q^2}$. Для малых θ полином Лежандра $P_L(x)$ может быть аппроксимирован функцией Бесселя:

$$P_L(x) = P_L\left(1 + \frac{t}{2q^2}\right) \simeq J_0\left(\frac{L}{q}\sqrt{-t}\right),$$

где $L/q = \rho$ — прицельный параметр. Так как для больших L состояний много, то суммирование заменим на интегрирование по L :

$$T(S, t) \simeq 8\pi\sqrt{S} \int_0^\infty 2LdL J_0\left(\frac{L}{q}\sqrt{-t}\right) T(L, S) = 16\pi\sqrt{S} \int_0^\infty \rho d\rho J_0(\rho\sqrt{-t}) q^2 T(\rho, S).$$

Пользуясь обратным преобразованием и соотношением (2), получим амплитуду $T(\rho, S)$:

$$16\pi\sqrt{S}q^2 T(\rho, S) = 2iq\sqrt{S}\sigma_{\text{полн}} \frac{1}{b} e^{-\rho^2/2b},$$

$$T(\rho, S) = \frac{i\sigma_{\text{полн}}}{8\pi qb} \exp(-\rho^2/2b),$$

$$T_L(S) \simeq \frac{i\sigma_{\text{полн}}}{8\pi qb} \exp(-L^2/2q^2b).$$

Из этих соотношений можно определить коэффициент неупругости η_L для парциальной волны с моментом L :

$$\eta_L \equiv S_L = 1 + 2iqT_L = 1 - \frac{\sigma_{\text{полн}}}{4\pi b} \exp(-L^2/2q^2b).$$

Отсюда непосредственно видно, что для $L = \infty$ $\eta_L = 1$, что соответствует отсутствию рассеяния, в то время как $L = 0$ дает максимальное значение неупругости $\eta_0 = 1 - \frac{\sigma_{\text{полн}}}{4\pi b}$. Из этого рассмотрения видно, что в процесс

дифракции дают вклад малые L , а вклад больших $L \sim e^{-L^2}$ экспоненциально падает. Ряд парциальных амплитуд процесса дифракции мезонов существенно быстрее сходится, чем в процессе рассеяния, где реализуется π -мезонный обмен ($\sim e^{-L/q}$).

Экспериментальный фон исследований. В процессе дифракции $\pi \rightarrow 3\pi$ интенсивно рождается резонанс $a_1(1^+) \rightarrow \rho\pi$, и большой вклад дает нерезонансное рождение $(\rho\pi)$ -системы в соответствии с механизмом Дрелла — Декка — Хида [17—19], получившее название «механизм Декка» и существенно затрудняющее наблюдение резонансных состояний в парциальных волнах $0^-, 1^+, 2^-$ и т.п. Вплоть до 1977 г. в экспериментах не были установлены резонансные свойства состояний a_1 и a_3 . В опытах [20] на ускорителе ИФВЭ в Серпухове в процессе $\pi^- + P \rightarrow 3\pi + P$ наблюдалось лишь широкое усиление в S -волновом канале $(\rho\pi)$ -системы для $J^P = 1^+$. Дополнительный анализ показал [21], что это состояние имеет нерезонансную природу, и это объясняется нерезонансным механизмом Декка. В анализе этих данных использовалась неунитарная изобарная модель и предполагалось, что 3π -вершина независима от NN -вершины, что позволяло отделить события с рождением резонанса N^* в нижней вершине. В этих же исследованиях было установлено волновое содержание дифракционно-рожденной 3π -системы, которое насыщается состояниями $0^-P, 1^+S, 1^+D, 2^-P, 2^+D, 3^+D$ для $(\rho\pi)$ -системы и $0^-S, 1^+P$ и 2^-D для $(\epsilon\pi)$ -системы. Результаты этих исследований доказали резонансные свойства a_2 -мезона, в то время как фаза волны 1^+S (a_1) показывала малые изменения относительно волн $0^-S, 1^+P$ и 2^-P . Унитарные коррекции изобарной модели не изменили этих заключений [21]. Аналогичные заключения были получены и в работах [22, 23]. В работе [24] продемонстрировано, что малое изменение фазы может быть вследствие разницы в фазах между декковской амплитудой и амплитудой прямого резонансного образования a_1 , а также из-за большой неупругости каналов $\rho\pi, \epsilon\pi$ и K^*K вследствие перерассеяния. И, наконец, в работах [25,26] был выполнен анализ с $\pi\pi$ -параметризацией фазы упругого S -рассеяния, с амплитудой, обладающей аналитичностью и унитарностью, а также с включением амплитуды Декка с перерассеянием и прямым резонансным образованием a_1 . В этой работе было показано, что данные [23] совместимы с резонансом в волне 1^+S при массе (1300 ± 150) МэВ и $\Gamma = (400 \pm 100)$ МэВ. Что касается волны 0^-S , то как изменение фазы, так и интенсивность не проявляли резонансных свойств. Следует заметить, что радиальные состояния π -мезона не были предсказаны теоретически.

В исследованиях на ядрах [26] были получены новые данные, которые с большой очевидностью свидетельствовали о резонансных свойствах a_1 -мезона при массе $1,1 \text{ ГэВ}/c^2$, а движение фазы парциальной волны 0^-S составляло лишь 40° . В работах [27] по образованию 3π -системы в заднюю полусферу наблюдался пик при массе 1040 МэВ , но неизвестно его волновое содержание. Анализ по $SU(3)$ -симметрии [28] показал, что установленные свойства $f_1(1285)$ и $f_1(1420)$ вместе с a_1 -мезоном с массой 1100 МэВ не могут составить нонет $J^{PC} = 1^{++}$, что, в свою очередь, указывает на то, что экспериментальные массы a_1 -мезона далеки от положения полюса на втором римановом листе. В работах [29,30], выполненных на большой статистике, и в результате парциально-волнового анализа данных были найдены резонансные свойства a_1 -мезона (1^+) при массе $(1240 \pm 40) \text{ МэВ}$ и во второй работе $(1280 \pm 20) \text{ МэВ}$ с шириной $\Gamma = 300 \text{ МэВ}$. В анализе был использован тот же метод, что и в работе [24], т.е. амплитуда содержала нерезонансный вклад, вклад перерасеяния и прямое резонансное образование. Непосредственно данные анализа, однако, не свидетельствовали о резонансном характере из-за сильного вклада нерезонансного механизма. Волна 0^-S изменяла свою фазу менее чем на 40° .

3. ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Исследование процессов когерентного образования мезонных систем π - и K -мезонов при энергиях 25 и 40 ГэВ было осуществлено с помощью магнитного спектрометра [30] ОИЯИ на ускорителе 70 ГэВ в Серпухове в сотрудничестве с институтами физики в Милане и Болонье и Европейским центром ядерных исследований (ЦЕРН). В качестве мишеней были использованы Be , C , Si , Ti , Cu , Ag , Ta и Pb для изучения процессов

$$\pi^- + A \rightarrow \pi^- + \pi^- + \pi^+ + A, \quad (3)$$

$$K^- + A \rightarrow K^- + \pi^- + \pi^+ + A. \quad (4)$$

Полное число событий (3) после удовлетворения критериев отбора составило 153359 для всех масс и передач 3π -системы. Так как ошибка в эффективной массе 3π -системы составляет $34 \text{ МэВ}/c^2$ для $M_{3\pi} = 1,8 \text{ ГэВ}/c^2$, то интервал по 3π -массе был выбран равным 40 МэВ , что позволяет иметь $4000 \div 50000$ событий на этот интервал. Парциально-волновой анализ

(ПВА) позволяет определить интенсивность и относительную фазу каждого состояния по спине и четности 3π -системы. ПВА был выполнен для:

а) когерентного набора событий, характеризующегося тем, что в него входили события всех ядер с $t' \leq t'^*$, где t'^* — 4-передача — выбиралась несколько меньше положения первого дифракционного минимума в сечении. Так, для ядер Be и C $t'^* \leq 0,04$ (ГэВ/с)², для Al и Si $t'^* \leq 0,03$ (ГэВ/с)², Ti и Cu $\leq 0,02$ (ГэВ/с)², Ag, Ta и Pb $\leq 0,01$ (ГэВ/с)² в интервале масс системы $(0,8 \div 2,2)$ ГэВ/с². Число событий равно 110900. Некогерентный вклад в эти события составил, соответственно, 6 % для Be и 2 % для Pb;

б) каждого ядра отдельно с целью определения А-зависимости поведения парциальных волн;

в) некогерентного набора событий с $t'^* < t' < 0,5$ (ГэВ/с)² для всех ядер вместе;

г) разных интервалов по t' для групп легких ядер Be + C, и тяжелых ядер Ag + Ta + Pb для интервалов масс 3π -системы $0,9 \div 1,2$, $1,2 \div 1,5$ и $1,5 \div 1,8$ ГэВ/с².

Результаты ПВА будут сравниваться с данными, полученными на протонной мишени [30] эксперимента, выполненного в ЦЕРН.

Использование ядерных мишеней имеет ряд преимуществ по сравнению с протонными:

1) отсутствуют неоднозначности анализа, обусловленные образованием резонанса N^* на протонной мишени;

2) малый вклад некогерентных процессов и высокая степень когерентности волн дают надежное измерение относительных фаз;

3) из-за малости переданного 4-импульса можно ожидать малого вклада амплитуд с переверотом спина 3π -системы;

4) вследствие большого наклона дифракционного конуса когерентные события на ядрах сосредоточены в области малых передач, где хорошо выполняются правила селекции по спине и четности, что приводит к необходимости учета небольшого числа волн.

Следствием этого является возможность осуществления надежного и однозначного анализа образуемых систем по спине и четности и изучения резонансного рождения. Следует отметить, что вклад состояний с возбуждением ядра мал. К тому же величина возбуждения для случая отбора когерентных событий мала. Легко видеть, что энергия ядра Be для $t'^* \leq 0,04$ (ГэВ/с)² составляет ≤ 2 МэВ, а для ядра Pb при $t'^* \leq 0,01$ (ГэВ/с)² энергия ≤ 20 кэВ. Для легких ядер энергия недостаточна для возбуждения ядерных уровней, а для тяжелых ядер энергия меньше энергии вибра-

ционных уровней. Вклад их в амплитуду исследуемого процесса мал, к тому же их сечение ведет себя как $t'e^{-Bt'}$ и стремится к нулю при малых t' .

Общие характеристики исследуемого процесса. Из анализа массовых спектров и угловых распределений могут быть установлены общие характеристики исследуемого процесса. При этом нас будут интересовать те характеристики, которые важны для парциально-волнового анализа 3π -состояния. Массовый спектр $M_{3\pi}$ (рис. 1) непосредственно не свидетельствует об образовании резонансов и характеризуется усилением в области $1,2 \text{ ГэВ}/c^2$,

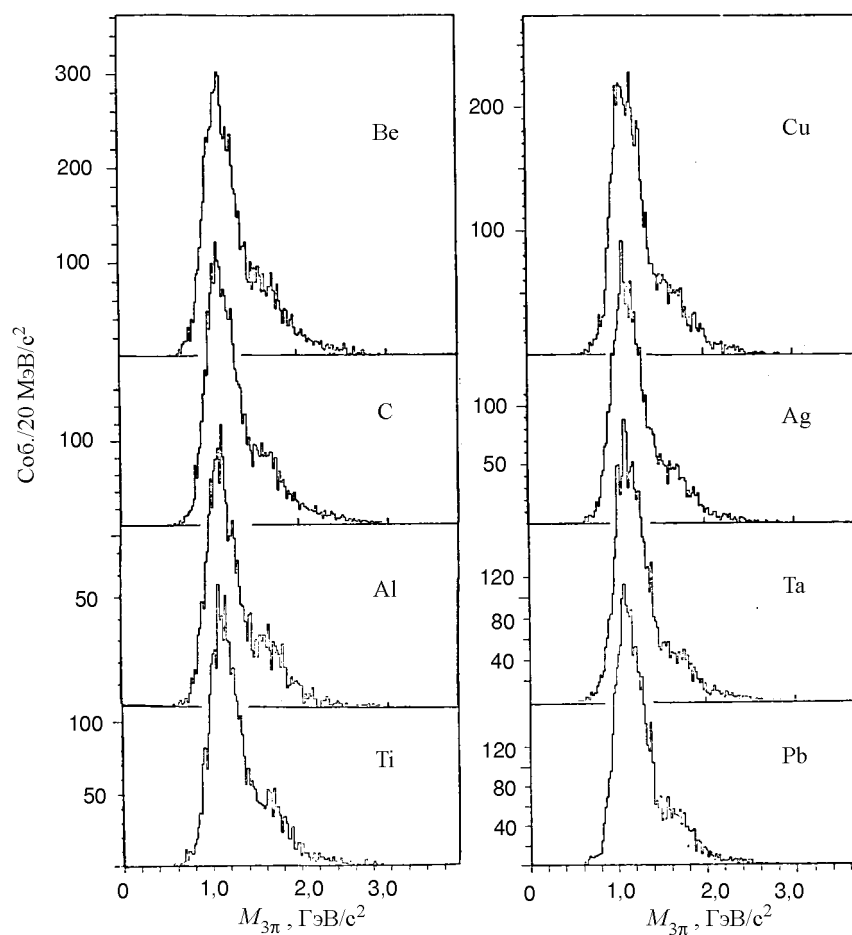


Рис.1. Спектры масс 3π -системы для разных ядер

где возможно образование $a_1(1260)$, и в области $1,6 \text{ ГэВ}/c^2$, где дает вклад $\pi_2(1670)$.

Анализ угловых распределений показал, что распад ρ^0 -мезона происходит с испусканием π^+ -мезона в заднюю полусферу, а при распаде ϵ -мезона — в переднюю полусферу. До массы $M_{3\pi} = 1,05 \text{ ГэВ}/c^2$ вклад S -волны в $\pi^+\pi^-$ является доминирующим.

Вследствие этого параметризация S -состояния дипионной системы была сделана как с ϵ -резонансом ($J^P = 0^+$, $M_\epsilon = 0,77 \text{ ГэВ}$, $\Gamma_\epsilon = 0,4 \text{ ГэВ}$), так и с фазой упругого $\pi\pi$ -рассеяния [31].

Угловые распределения π^+ в системе покоя пары $\pi^+\pi^-$ свидетельствуют о преимущественном испускании π^+ -мезона в плоскости, перпендикулярной спину ρ^0 -мезона, т.е. ρ^0 -мезон в сильной степени поляризован.

Вклад дипионных резонансных состояний отчетливо виден при отборе событий по фейнмановской переменной для всех масс 3π -системы при $x_F \geq 0,8$, где $x = P_{\parallel} / P_{\parallel \text{max}}$ быстрого π^- -мезона. В области больших масс $m_{2\pi}$ виден суммарный сигнал от $f_2(1270)$ - и $f_0(1300)$ -мезона. Характер угловых распределений при такой селекции свидетельствует о сильной поляризации как дипионных резонансных состояний, так и резонансных состояний в 3π -системе.

Анализ спинового содержания конечного состояния. Для полного описания процесса (3) необходимо $3n - 3$ переменных, где n — число частиц в конечном состоянии. В случае $n = 4$ необходимо 9 переменных. Такими переменными для процессов $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + b'$ могут быть:

$S = ({}^4P_a + {}^4P_b)^2$ — полная энергия системы центра масс,

${}^4P_a, {}^4P_b$ — 4-векторы,

t — 4-передача,

ϕ_p — азимутальный угол ориентации плоскости рождения,

$M_{3\pi}^2$ — квадрат инвариантной массы 3π -системы,

s_1 — квадрат инвариантной массы $\pi_2\pi_3$,

s_2 — квадрат инвариантной массы $\pi_1\pi_3$,

θ, ϕ, γ — углы Эйлера, определяющие ориентацию трех мезонов в системе покоя 3π -системы.

Для неполяризованной мишени матричный элемент процесса не зависит от азимутального угла ϕ_p , и остается восемь переменных, описывающих

процесс. Переменные $s, t, M_{3\pi}$ описывают рождение 3π -системы, а $s_1, s_2, \theta, \gamma, \phi$ описывают распад 3π -системы. Переменные Далица s_1 и s_2 полностью определяют энергию трех мезонов в системе покоя 3π -системы. Выбор углов θ, γ, ϕ определяет пространственную ориентацию тройки мезонов относительно данного выбора пространственных осей. В качестве таких углов выбраны углы Эйлера в системе покоя 3π -системы (так называемая система Готфрида — Джексона) [32,33]. В этой системе координат характеристики процесса наиболее четко видны; к тому же некоторые свойства обменного процесса могут быть установлены на основании свойств угловых распределений. На рис. 2 показана диаграмма процесса $a + b \rightarrow c + d$, где e — частица обмена и три системы координат: центра масс (a), спиральная система (b) и система Готфрида — Джексона ($в$). В системе ГД импульсы обменной и падающей частиц равны и противоположно направлены. Если обменная частица имеет спин, равный нулю, то плоскость распада системы c должна обладать вращательной симметрией относительно их импульса. В спиральной системе импульсы частицы e и резонанса c равны и одинаково направлены в отличие от системы покоя падающей частицы, показанной на рис. 2; и снова для нулевого спина обменной частицы должна существовать симметрия плоскости распада резонанса относительно общего момента. Этот азимутальный угол есть угол Треймана — Янга. Как видно, азимуталь-

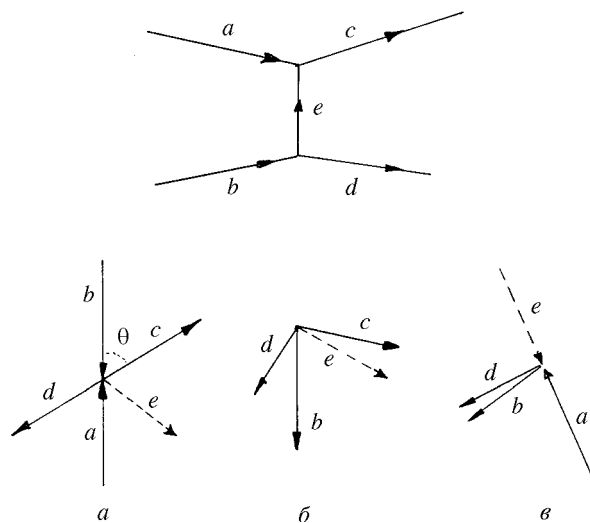


Рис.2. Диаграммы дифракционного процесса

ный угол вращения плоскости распада в системе ГД имеет тот же смысл с углом Треймана — Янга.

Для больших спинов обменной частицы связь спина с угловым распределением распада не доказана аналитически. Из сохранения четности и углового момента следуют только ограничения на величину относительного орбитального момента: $|J_c - J_e| \leq L \leq |J_c + J_e|$. Так, для рождения резонансов, принадлежащих ненатуральной серии по четности $L = J_e (0^-, 1^+ \dots)$, это накладывает условие на элементы матрицы плотности. При $J_c > J_e$ в матрице плотности ненулевые члены будут только в том случае, когда $J_c^z \leq J_e$, и для амплитуд с $J^z = 0$ ненулевые члены только те, когда $(J_e + L + J)$ — четное.

При одной и той же энергии падающей частицы угол поворота спиральной системы и системы ГД зависит только от величины передачи. Для интересующих нас процессов, идущих, в основном, при малых передачах, этот угол составляет величину $\sim 3,5^\circ (\arctg P/q_{\parallel})$, и при переходе из одной системы в другую важны эффекты релятивистского поворота спина, так как спиральность системы является лоренц-инвариантной величиной. В исследуемом процессе есть две идентичные частицы, для описания конечного состояния которых существуют два набора углов Эйлера. Принятым выбором углов Эйлера является набор углов θ и ϕ π^+ -мезона, задающих ориентацию плоскости распада, а угол γ дает ориентацию плоскости, содержащую импульсы двух отрицательных мезонов относительно направления π^+ -мезона. При этом ось z выбрана вдоль импульса падающей частицы в системе 3π -покоя, а ось $y = \mathbf{p}_{\text{отд}} \times \mathbf{p}_{\pi^-}$ есть нормаль к плоскости рождения. При фиксированной энергии падающего пучка в области масс 3π -системы и малого интервала t -передач имеем, таким образом, пять переменных, описывающих процесс $(s_1, s_2, \theta, \gamma, \phi)$.

Метод парциально-волнового анализа. Мощный метод парциально-волнового анализа был развит группой Иллинойского университета [38,39] для анализа процесса дифракционного рождения $\pi^+\pi^-\pi^-$ -системы на водородной мишени. Для данной спиральности протона 3π -система с массой $M_{3\pi}$ и 4-передачей t' рождается в состоянии с полным угловым моментом J^P и магнитным квантовым числом $M = J_z$. В дальнейшем образованное состояние $J^P M$ рассматривается как состоящее из промежуточного дипионного состояния со спином j и магнитным числом m и с орбитальным моментом l «холостого» π^- -мезона. Дипион распадается на два пиона, и угловое распределение пиона в системе покоя дипиона определяется состоянием $|jm\rangle$.

Состояние свободной частицы $|p\lambda ms\rangle$ полностью определяется ее массой m , спином s , импульсом p и спиральностью λ .

В спиральном представлении амплитуда процесса $\pi^- + A \rightarrow 3\pi + A'$ может быть записана в виде

$$f_{\Lambda\lambda_A\lambda_{A'}}^J = \langle P_{3\pi}\Lambda, P_{A'}\lambda_{A'} | T | P_{\pi^-}, P_A\lambda_A \rangle,$$

где J, Λ — спин и спиральность 3π -системы; $\lambda_A, \lambda_{A'}$ — спиральности начального и конечного состояний ядра. Все импульсы даны в спиральной системе. Для определения амплитуды в t -канале необходимо перейти в систему Готфрида — Джексона, в которой осью квантования является направление падающего π^- -мезона в 3π -системе покоя. Для перехода необходимо повернуть ось квантования в спиральной системе на угол $\beta(t)$ вокруг нормали к плоскости рождения до направления падающего мезона:

$$F_{M_{\Lambda}\lambda_A\lambda_{A'}}^J = \sum_{\Lambda} d_{M\Lambda}^J(\beta) f_{\Lambda\lambda_A\lambda_{A'}}^J.$$

Теперь нам необходимо задать полный набор состояний по спину, четности 3π -системы, спину, четности, орбитальному моменту дипиона и пиона с тем, чтобы сделать парциально-волновое разложение состояния 3π . Так как на опыте измеряются импульсы частиц, а в теоретическом выражении амплитуда представлена в угловых переменных, то необходимо установить связь этих базисов. Набор переменных $\{p_1 p_2 p_3 m_1 m_2 m_3\}$, где p, m — импульсы и массы частиц, эквивалентен набору $\{P_{123} M_{123} \phi \vartheta M_{13} \psi\}$, где P_{123} — импульс 3π -системы в с.ц.м., M_{123} — инвариантная 3π -масса, ϕ, ϑ — азимутальный и полярный углы дипиона ($\pi^+\pi^-$) в системе покоя 3π -системы (система ГД), M_{13} — инвариантная масса дипиона, ψ и χ — азимутальный и полярный углы частицы π^+ в $\pi^+\pi^-$ -системе покоя. В системе ГД ось z направлена по импульсу пучка $\mathbf{z} = \mathbf{p}_{\pi^-}$, а нормаль к плоскости рождения $\mathbf{y} = \mathbf{p}_{\text{отд}} \times \mathbf{z}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{z}$, тогда $\cos \vartheta = \mathbf{p}_{\pi^+\pi^-} \cdot \mathbf{z}$, а ϕ — азимутальный угол $\pi^+\pi^-$ в 3π -системе покоя. Для определения углов ψ и χ нужно перейти в систему покоя частиц ($\pi^+\pi^-$). В этом случае $\cos \chi = -\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_3$.

В представлении углового момента, пользуясь свойствами квантово-механического волчка, можно связать состояние 3π -системы $|P_{123} M_{123} \phi \vartheta M_{13} \psi \chi\rangle$ с угловыми моментами $|P_{123} \Lambda M_{13} j \lambda\rangle$, где Λ, J — спиральность и спин 3π -системы, j, λ — спин и спиральность ($\pi^+\pi^-$)-системы.

$$\begin{aligned} & \langle P_{123} M_{123} \phi \vartheta M_{13} \psi \chi | P_{123} \Lambda(JM_{123}) M_{13} j \lambda \rangle = \\ & = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\phi, \vartheta, 0) D_{\lambda 0}^{j*}(\psi, \chi, 0), \end{aligned}$$

при этом следует воспользоваться связью двух состояний с одинаковыми квантовыми числами, но имеющими различную ориентацию:

$$|M, knu\rangle = \sum_{M'} D_{MM'}(knu) |M'\rangle.$$

Амплитуда процесса в состоянии определенного углового момента будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_{\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^p} &= \sum_{J\Lambda j\lambda} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\phi, \vartheta, 0) D_{\lambda 0}^{j*}(\psi, \chi, 0) \times \\ &\times \langle P_{123} \Lambda(JM_{123}) M_{13} j \lambda, P_A \lambda_{A'} | T | P_{\pi} P_A \lambda_A \rangle. \end{aligned}$$

Если теперь амплитуду процесса выразить через состояние определенного относительного углового момента l между дипионом ($\pi^+ \pi^-$) и холостым π^- и перейти от углов ϕ, ϑ для дипиона к углам ϕ, θ, γ , где ϕ, θ — азимутальный и полярный углы π^+ в 3π -системе покоя, а угол γ определяет направление проекции π^- на плоскость, перпендикулярную направлению π^+ , то в этом случае амплитуда будет иметь вид

$$F_{\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^p} = \sum_{JM\nu} \sqrt{2J+1} D_{M\nu}^{J*}(\phi, \theta, \gamma) \sum_{lj} h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^p lj} G_{\nu}^{J^p lj}(s_1 s_2 M_{123}),$$

где ν — спиральность $\pi^+ \pi^-$ -системы, амплитуда h ответственна за рождение системы в данном квантовом состоянии, а G — за распад.

Так как сечение процесса есть квадрат этой амплитуды, то мы можем ввести матрицу плотности

$$\rho_{J^p M J'^p M'}^{ll' jj'}(s, t, M_{3\pi}, s_2) = \sum_{\lambda_A \lambda_{A'}} h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^p lj} (h_{\Lambda' \lambda'_{A'} \lambda'_{A'}}^{J'^p l' j'})^*.$$

Требование сохранения четности и инвариантности относительно вращений позволяет выразить матрицу плотности через состояния оператора отражения $Y = e^{-i\pi J_y} P$. Для неполяризованного начального состояния амплитуда h и матрица плотности могут быть выражены не через $|J^p M\rangle$, которые есть состояния определенного спина, четности и проекции спина,

а через их линейную комбинацию, содержащую состояния разной четности и оператора вращений.

Тогда состояние $|J^P M\rangle$ с определенной четностью будет иметь вид

$$|J^P M \eta\rangle = C_M \left[|J^P M\rangle + \eta \epsilon(-1)^M |J^P -M\rangle \right],$$

где η — собственное значение оператора отражения и $\eta = \pm 1$, $\epsilon = (-1)^{J+j+l}$, $C_M = \sqrt{1/2}$ для $M \neq 0$ и $C_M = 1/2$ для $M = 0$. Как показано в работе [40], такое представление матрицы плотности имеет то преимущество, что состояния с $M = 0$ и $\eta = +1$ соответствуют естественному обмену, в то время как состояния с $\eta = -1$ соответствуют неестественному обмену четностями. Для состояний с $M = 1$ вклад ведет себя как $1/S$. Амплитуду для состояний с $M \neq 0$ принято называть амплитудой с переворотом спина. Амплитуда рождения h принимает вид:

$$h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j \eta} = C_M \left[h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j} + \eta \epsilon(-1)^M h_{-M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j} \right],$$

и матрица плотности для определенного состояния четности будет

$$\rho_{J^P M \eta J^P M' \eta}^{ll' jj'} = \sum_{\lambda_A \lambda_{A'}} h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j \eta} (h_{M'\lambda_{A'} \lambda_A}^{J^P l' j' \eta})^*.$$

Суммирование по $\lambda_A \lambda_{A'}$ отражает факт неполяризованного начального состояния, и непосредственно видно, что ρ -матрица диагональна относительно η . Связь ρ -матрицы с состоянием $|J^P M\rangle$ имеет вид

$$\rho_{J^P M \eta J^P M' \eta}^{ll' jj'} = 2C_M C_{M'} \left[\rho_{J^P M J^P M'}^{ll' jj'} + \eta \epsilon(-1)^{M'} \rho_{J^P M J^P M'-M'}^{ll' jj'} \right].$$

Заметим, что эта, так называемая расширенная ρ -матрица зависит от $l, l', j, j', s, t, M_{123}$ и s_2 , т.е. зависит от переменных далитц-распределений, и она описывает рождение 3π -системы с массой $M_{3\pi}$ в состоянии $J^P M \eta$, состоящей из дипиона с определенной массой, спином j и угловым моментом l относительно холостого мезона.

Простое рассмотрение структуры этой матрицы, полученной в общем виде без каких-либо предположений, показывает, что число элементов этой матрицы даже для малых значений J и l необычайно велико. Так, для $J \leq 1$ число комплексных параметров составляет 5×5 . Для $J \leq 3$ число параметров 29×29 с учетом состояний с разными J и четностью. Требование четности и эрмитовости состояний оставляет только действительные зна-

чения параметров. Таким образом, необходимо ввести упрощающие предположения.

Чтобы уменьшить число параметров, сделаны два основных предположения [39].

Первое основано на доказательстве, проведенном Ватсоном [41], что описание рождения двухчастичного резонанса адекватно описанию сильного двухчастичного взаимодействия в конечном состоянии. Это позволяет факторизовать двухчастичный вклад и представить амплитуду в виде

$$F_{\lambda_A \lambda_{A'}} = \sum_{j(\pi^-\pi^+)=0}^{j_{\max}} + \sum_{j(\pi^-\pi^+)=0}^{j_{\max}} + \sum_{j(\pi^-\pi^-)=0}^{j_{\max}}.$$

Это так называемое изобарное приближение. Оно имеет также экспериментальное подтверждение. Как мы видели, в угловых распределениях и массовых спектрах $m_{2\pi}$ преимущественный вклад дает S -состояние $\pi^+\pi^-$ -системы, ρ - и f -сигналы. Парциально-волновой анализ процессов $\pi \rightarrow 2\pi$ [36] показал, что S , P , D -волн достаточно, чтобы описать данные. Это позволяет ограничиться $j_{\max} \leq 2$, однако включение высших состояний также возможно. Второе предположение основано на разложении полной амплитуды $h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}$ для данной моды распада на амплитуду рождения данного состояния и его распада. Для этого амплитуду представим в виде

$$h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j m \eta}(s, t, M_{123}, M_{12}) = \bar{h}_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j m \eta}(s, t, M_{123}) BW^{jn}(M_n),$$

где n — мода состояния, BW — функция Брейта — Вигнера для спина j -дипиона. В этом случае амплитуда $\bar{h}$ не зависит от далитцевских переменных и имеет вид

$$\bar{h}_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j m \eta}(s, t, M_{3\pi}) = T_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P \eta}(s, t, M_{3\pi}) \mathcal{M}^{J^P l j n}(s, t, M_{3\pi}),$$

где T — амплитуда рождения 3π -системы в состоянии $J^P M \eta$, а $\mathcal{M}$ — матричный элемент распада. Видно, что T не зависит от индексов l, j, n , а $\mathcal{M}$ не зависит от спиральностей $\lambda_A, \lambda_{A'}$.

Это предположение позволяет определить сокращенную матрицу плотности рождения:

$$\bar{\rho}_{J^P M \eta J'^P M' \eta}(s, t, M_{3\pi}) = \sum_{\lambda_A \lambda_{A'}} T_{M \lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P \eta} \left(T_{M' \lambda'_A \lambda'_{A'}}^{J'^P \eta} \right)^*.$$

Искомые параметрами являются элементы $\bar{\rho}$ -матрицы и комплексные параметры матричного элемента распада $\mathcal{M}$. Так как матричный элемент $\mathcal{M}$ для каждого J^P -состояния один и тот же, то это позволяет с помощью нормализации состояний сделать его константой и находить только комплексные параметры для разных состояний ($l j n$) для данного состояния J^P . Тем самым определим относительную фазу состояний, соответствующих данному J^P . В результате, например, для $J^P = 1^+$ вместо 25 параметров необходимо найти 9 элементов $\bar{\rho}$ -матрицы и 4 параметра $\mathcal{M}$, что дает 13 параметров. Для спина $J^P = 3^+$, соответственно, получим 42 параметра для случая отсутствия состояний с разными M . Зависимость параметров от переменных s, t и $M_{3\pi}$ может быть получена при определении их в малом интервале переменных при достаточной статистике и разрешении. В действительности интервал не так уж мал, поэтому необходимо усреднять в каждом интервале по переменным t и $M_{3\pi}$.

Таким образом, сечение процесса $\pi \rightarrow 3\pi$ равно

$$W(t, M_{3\pi}, s_1, s_2, \varphi, \theta, \gamma) = \sum_{\substack{J^P M \eta \\ J'^P M' \eta}} \mathcal{M}^{J^P M \eta} \bar{\rho}_{J^P M \eta} \left(\mathcal{M}^{J'^P M' \eta} \right)^*.$$

Структура амплитуды распада. Рассмотрим подробнее структуру амплитуды распада. Распад происходит через дипионное состояние ($\pi^+ \pi^-$) со спином j и орбитальным моментом l холостого π^- относительно дипиона. Разрешенные значения l определяются законом сохранения углового момента и четности:

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{j}, \quad P = (-1)^{l+j+1},$$

так что для $J=0$ и $l=J$ $P=(-1)^{J+1}$ ($\epsilon\pi$); для $J=1$, $l=J+1$ $P=(-1)^{J+1}$ ($\rho\pi$). Связь матричного элемента распада с орбитальным моментом l имеет вид

$$\mathcal{M}^{J^P M \eta} = \sum_{l j} C^{J^P l j} \mathcal{M}^{J^P M \eta l j}.$$

Пользуясь свойствами сохранения четности и инвариантностью вращений, получаем

$$\mathcal{M}^{J^p M \eta} = C_M \left[\mathcal{M}^{J^p M} + \eta \varepsilon_f (-1)^M \mathcal{M}^{J^p - M} \right].$$

Для получения амплитуды распада $\mathcal{M}^{J^p M}$ в явном виде рассмотрим два последовательных распада: $(3\pi) \rightarrow \pi^+ + (\pi^- \pi^-)$ и $(\pi^- \pi^-) \rightarrow \pi^- + \pi^-$, характеризующихся амплитудами $A1$ и $A2$ соответственно. Тогда

$$\mathcal{M}^{J^p M} = \sum_v \langle \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 | A2 | \mathbf{P}_{12} v \rangle B(P_{12}) \langle \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_{12} v | A1 | J^p M \rangle,$$

где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{\pi^- 1}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{\pi^- 2}$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_{\pi^+}$, $\mathbf{P}_{12} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$, v — спиральность $(\pi^- \pi^-)$ -системы, $B(P_{12})$ — оператор распространения $(\pi^- \pi^-)$ -системы. Амплитуда $\langle \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_{12} v | A1 | J^p M \rangle$ описывает распад $3\pi \rightarrow P_3 + (P_1 + P_2)$ для состояния $J^p M$, и амплитуда $\langle \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 v | A2 | \mathbf{P}_{12} v \rangle$ описывает распад $\mathbf{P}_{12} \rightarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Если теперь амплитуду $\mathcal{M}$ выразим через состояния определенного J , $J_z = M$ и спиральности $(\pi^- \pi^-)$ -системы, то непосредственно выделим угловую зависимость амплитуды распада и далитц-амплитуду:

$$\mathcal{M}^{J^p M} = \sum_v \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} D_{Mv}^{J*}(\varphi, \theta, \gamma) G_v^{J^p}(s_1, s_2),$$

где G_v — далитцевская амплитуда. Пользуясь соотношениями симметрии

$$D_{Mv}^{J*}(\varphi, \theta, \gamma) = (-1)^{M-v} D_{-M-v}^J(\varphi, \theta, \gamma)$$

и

$$G_{-v}^{J^p} = \varepsilon_f (-1)^v G_v^{J^p}, \quad \varepsilon_f = P(-1)^{J+1},$$

окончательно имеем

$$\mathcal{M}^{J^p M \eta} = C_M \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} \sum_v \left[D_{Mv}^{J*}(\varphi, \theta, \gamma) + \eta D_{Mv}^J(\varphi, \theta, \gamma) \right] G_v^{J^p}(s_1, s_2),$$

где $C_M = 1/2$ для $M=0$ и $C_M = 1/\sqrt{2}$ для $M \neq 0$. Таким образом, амплитуда распада выражена через далитцевскую амплитуду $(\pi^- \pi^-)$ -системы.

Амплитуда G_v может быть выражена в терминах состояний $(\pi^+ \pi^-)$ -системы. В этой системе, как известно, присутствуют дипионные резонансы

$\varepsilon(j^P = 0^+)$ и $\rho(j^P = 1^-)$ и т.д. Так как два отрицательных π -мезона неразличимы, то амплитуда должна быть симметрична при перестановке координат отрицательных π -мезонов (бозе-симметризация). Поэтому

$$G_v^{J^P}(s_1, s_2) = G_v^{J^P}(s_1 s_2 \pi_1^-) + G_v^{J^P}(s_1 s_2 \pi_2^-).$$

Теперь запишем сечение процесса $\pi \rightarrow 3\pi$ в полном виде:

$$W(t, M_{3\pi}, s_1, s_2, \varphi, \theta, \gamma) = \sum_{\substack{J^P M \eta l j n \\ J'^P M' \eta' l' j' n'}} \mathcal{M}^{J^P M \eta l j n} C^{J^P l j n} \times \\ \times \bar{\rho}_{J^P M \eta J'^P M' \eta'} \left(C^{J'^P l' j' n'} \mathcal{M}^{J'^P M' \eta' l' j' n'} \right)^*,$$

где $\bar{\rho}$ — сокращенная матрица плотности. Для $\mathcal{M}$ с учетом второго предположения имеем

$$\mathcal{M}^{J^P M \eta l j n} = \sum_v \sqrt{2J+1} C_M \left[D_{Mv}^{J*}(\varphi, \theta, \gamma) + \eta D_{Mv}^J(\varphi, \theta, \gamma) \right] BW^{jn} P^l \times \\ \times q^j G_v^{J^P l j n} FT(t) \left[\frac{1}{M_{3\pi}} \int \sum_v |G_v^{J^P l j n}(s_1 s_2 M_{3\pi}) P^l BW^{jn} q^j|^2 ds_1 ds_2 \right]^{1/2},$$

при этом мы учли нормировку состояний и усреднение по интервалу t и $M_{3\pi}$.

Обсудим некоторые свойства этого сечения.

1. Вследствие ортогональности матриц вращения D_{Mv}^J невозможна интерференция состояний с разными J и M .

2. Из-за свойств далитц-амплитуд $G_v = \varepsilon(-1)^V G_{-v}$ состояния с разной четностью не интерферируют.

3. Интерференция состояний с одинаковыми $J^P M \eta$ возможна только для разных n , т.е. для разных каналов. Состояния $0^- S$ ($\varepsilon\pi$), $0^- P$ ($\rho\pi$) будут интерферировать так же, как состояния $1^+ S$ ($\rho\pi$) и $1^+ P$ ($\varepsilon\pi$). Для одинаковых n возможна интерференция только с разными l (т.е. для $1 + S$ - и $1 + D$ -волн). Заметим, что характер интерференции для неодинаковых частиц в конечном состоянии (например, $K\pi\pi$ -система) будет иметь другие свойства.

4. Факт интерференции состояний с разной модой распада для одинаковых частиц обусловлен бозе-симметризацией амплитуды. Это обстоятельство имеет определяющее значение для возможности измерения реальной и

мнимой частей элементов матриц плотности и автоматически устраняет непрерывную неоднозначность решения, т.е. непрерывный набор параметров, удовлетворяющих сечению. Вследствие этого второе предположение для одинаковых частиц в конечном состоянии применяется для уменьшения числа параметров. Для неодинаковых частиц ($K\pi\pi$) это предположение имеет существенное значение. Допустим, что этого предположения нет для одинаковых частиц. Тогда сечение процесса будет выражено через расширенную матрицу, а это значит, что для каждого состояния дипионной системы будет существовать своя матрица плотности, и элементы матрицы плотности будут определяться с точностью до функции, зависящей от массы дипиона и не зависящей от спиновых индексов. В результате будет существовать непрерывный набор параметров, удовлетворяющих сечению. Поведение сечения в зависимости от инвариантной массы конечного состояния может приводить к исчезновению этой неопределенности в том случае, когда произведения двух дипионных пропагаторов $BW^j(BW^{j'})^*$ будут различаться во всем интервале исследуемых масс. В случае узких резонансов такого различия нет, так как $BW^j(BW^{j'})^*$ практически константа. Вторая проблема, возникающая в случае отказа от второго предположения, состоит в том, что мнимая часть матрицы плотности не во всем диапазоне переменных может быть измерена. Дело в том, что в выражении для сечения две величины: расширенная матрица плотности и функция Брейта — Вигнера являются комплексными, более того, функции Брейта — Вигнера входят как произведение

$$BW^j(BW^{j'})^* = |BW^j| \cdot |BW^{j'}|^* \exp[i(\varphi - \varphi')].$$

Вследствие этого необходимо проверять, действительно ли $\cos(\varphi - \varphi')$ и $\sin(\varphi - \varphi')$ не являются нулями по всему далитц-распределению. В этой области переменных, где $\sin(\varphi - \varphi')$ обращается в нуль, неизмерима мнимая часть матрицы плотности. Опять для узких резонансов величина $BW \cdot BW^*$ становится реальной, и возникает принципиальная невозможность измерения мнимой части. Таким образом, чтобы избежать указанных трудностей, следует применить указанное предположение.

5. Другое важное свойство состоит в том, что парциальные волны с одним спином, четностью и $M; J^P M$, но с различными l и j дипиона, являются когерентными. Степень когерентности можно определить следующим образом:

$$K_{ab} = \frac{|\rho_{ab}|}{(\rho_{aa} \cdot \rho_{bb})^{1/2}} \in (0, 1),$$

где a, b есть набор квантовых чисел $J^P M \eta l j$ и $J'^P M' \eta' l' j'$. Диагональные члены ρ_{aa}, ρ_{bb} дают интенсивность амплитуд, а недиагональный определяется относительной фазой двух амплитуд. Для чистых квантово-механических состояний $K_{ab} \equiv 1$.

Это означает, что относительная фаза двух состояний есть разность фаз амплитуд a и b . Существенное отличие фактора K_{ab} от единицы ($\ll 0,5$) приводит к тому, что интерпретация фаз становится более сложной.

Таким образом, оба приближения существенны и позволяют устранить неопределенности, обеспечить единственность решения и уменьшить число параметров.

Со сделанными приближениями связаны и недостатки изложенного метода.

1. Парциальное разложение состояния $|J^P M\rangle$ в три свободных мезона не рассматривается. Для компенсации в какой-то степени этого недостатка в амплитуду добавлен свободный член, не зависящий от спиновых индексов и вследствие этого не интерферирующий с другими амплитудами, пропорциональный вкладу трехмезонного фазового пространства. Большая интенсивность этого члена может свидетельствовать о недостаточном наборе волн для описания данных, некорректной t - и $M_{3\pi}$ -зависимости парциальных волн в данном интервале переменных, слишком широком интервале переменных и сильном усреднении амплитуд по большому интервалу.

2. Парциально-волновой метод позволяет определить относительную фазу двух амплитуд и их зависимость от массы 3π -системы, но не абсолютную фазу; а индивидуальная фаза образования входит в нормировку. Этим неупругий процесс отличается от процесса упругого рассеяния, где используется метод фазового анализа, который содержит сведения как о рассеянной волне, так и о нерассеянной волне, определяющей абсолютную фазу. Поэтому, чтобы результаты парциально-волнового анализа представить в виде диаграмм Аргана, необходимо определить абсолютную фазу для каждого значения $M_{3\pi}$, так как только относительная фаза известна, а абсолютная фаза является свободным параметром для всех волн. Это может быть сделано, если применить K -матричный формализм или метод паде-аппроксимантов [42], который использует всю информацию об относительных фазах и интенсивностях волн в широком интервале масс $M_{3\pi}$. Вообще говоря [43], можно ожидать, что абсолютная фаза сильнее зависит от 4-передачи, чем от массы $M_{3\pi}$. Слабую зависимость от массы экспериментально подтверждает поведение модуля недиагонального элемента расширенной ρ -матрицы, фаза которого есть разность фаз между двумя амплитудами рождения

$\varphi_{ab} = \arg(\rho)$, где $ab \in J^P M \eta l j$. Модуль этого элемента, нормированный на соответствующие диагональные члены этих амплитуд, дает фактор когерентности, который, как увидим ниже, монотонно уменьшается с ростом $M_{3\pi}$. Этот факт, собственно, и является экспериментальным обоснованием введения сокращенной $\bar{\rho}$ -матрицы $\rho = c \bar{\rho} c^*$, а относительная фаза $\varphi_a - \varphi_b$ определяется из $cc^* = |c| \cdot |c^*| \exp i\Delta\varphi$, т.е. для данного $|J^P M\rangle$ и разных мод распада $\bar{\rho}$ -матрица одна.

3. Как было показано в ряде работ [44—46], второе приближение приводит к тому, что 3π -состояние не удовлетворяет условию унитарности. Вследствие этого авторами работы [22] была получена система унитарных уравнений, решение которых позволило получить набор 3π -состояний, удовлетворяющих как трехчастичной унитарности, так и двухчастичной. Уравнения трехчастичной унитарности получены в форме уравнений Гайтлера, связывающих T -матрицу трехчастичного рассеяния с реальной K -матрицей [45]. Решение этих уравнений по методу Фаддеева позволило унитаризовать матричный элемент. Таким образом, трехчастичная амплитуда может быть представлена как сумма двухчастичных вкладов. Унитарность двухчастичной амплитуды получена из требования правильного порогового поведения амплитуды в соответствии с теоремой Ватсона [41].

Унитарность состояний. Для $3\pi \rightarrow 3\pi$ -рассеяния S -матрица может быть выражена через лоренц-инвариантную T -матрицу:

$$S_{ij} = \delta_{ij} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} - p_{j1} - p_{j2} - p_{j3}) \frac{T_{ij}}{2^3 \sqrt{E_{i1} E_{i2} E_{i3} E_{j1} E_{j2} E_{j3}}}.$$

Так как условие унитарности для S -матрицы есть $\sum_k S_{ik} S_{jk}^* = \delta_{ij}$, то уравнение унитарности для T -матрицы, если использовать инвариантность относительно обращения времени и сохранение четности, имеет вид: $\text{Im } T_{ij} = (T_{ij} - T_{ij}^*) / 2i$. T -матрица описывает переход трех частиц в начальном состоянии в три частицы в конечном состоянии. Выразим оба состояния, как начальное, так и конечное, через состояние π_1 и дипион $\pi_2 \pi_3$. Начальное состояние имеет переменные $s_1, \Omega_1, \bar{\Omega}_1$, где $\sqrt{s_1}$ — масса пиона; Ω_1 — угол ориентации: полярный и азимутальный дипиона в 3π -системе покоя; $\bar{\Omega}_1$ — углы ориентации в системе покоя дипиона. Переменные конечного состояния будут $s'_1, \Omega'_1, \bar{\Omega}'_1$ соответственно. Тогда T -матрица может быть выражена через парциальные амплитуды и функции углового момента:

$$T = \sum_J \sum_{lj} \sum_{l'j'} T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) \sum_M Z_{l'j'}^{JM}(\Omega'_1 \bar{\Omega}'_1) Z_{lj}^{JM*}(\Omega_1 \bar{\Omega}_1),$$

где

$$Z_{lj}^{JM} = \sum_{MlMj} \langle JM | ljM_l M_j \rangle Y_l^{Ml}(\Omega_1) Y_j^{Mj}(\bar{\Omega}_1).$$

Подставляя выражение для T -матрицы в уравнение унитарности, получим парциальное разложение

$$\text{Im } T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) = \sum_{l''j''} d(\sqrt{s''_1}) T_{l'j'l''j''}^J(s'_1 s''_1) \rho T_{lj'l''j''}^J(s''_1 s_1),$$

где $\rho = \frac{2}{(4\pi)^5} \frac{p''_1 q''_1}{M_{3\pi}}$, p_1 — относительный импульс дипиона и q_1 —

импульс пиона в системе покоя дипиона. T -матрица может быть выражена через соответствующую реальную K -матрицу: $T = K + iK\rho T$. Так как $T = T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) = T_{lj'l'j}^J(s_1 s'_1)$, то соотношение унитарности принимает вид

$$\begin{aligned} T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) &= K_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) + \\ &+ i \sum_{l''j''} \int_{2m\pi}^{M_{3\pi} - m_\pi} d(\sqrt{s''_1}) K_{l'j'l''j''}^J(s'_1 s''_1) \rho T_{lj'l''j''}^J(s''_1 s_1). \end{aligned}$$

Решение этого интегрального уравнения по методу Фаддеева позволило сделать унитаризацию матричного элемента $\mathcal{M}^{J^P M}$, который был получен в форме $\mathcal{M} = R_{lj}(s_1 M_{3\pi}) Z_{lj}^{JM} + (1 \rightarrow 2)$, где R — функция Брейта — Вигнера, Z — функция углового момента. K -матрицу представим как сумму двухчастичных K -матриц с третьей частицей-спектатором. Таким образом, трехчастичные резонансные состояния, распадающиеся в три мезона, не будут включены. Такая унитаризация состояний соответствует экспериментальным данным, в которых наблюдаются трехчастичные резонансы в системе дипион + пион. T -матрица имеет вид $T = T_1 + T_2 + T_3$, где матрицы соответствуют взаимодействию частиц $\pi_2 \pi_3$, $\pi_1 \pi_3$ и $\pi_1 \pi_2$. Это позволяет T -матрицу выразить через двухчастичную матрицу t :

$$T_1 = t_1 + it_1 \rho (T_2 + T_3),$$

$$T_2 = t_2 + it_2 \rho (T_1 + T_3),$$

$$T_3 = t_3 + it_3 \rho(T_1 + T_2),$$

$$t_i = (1 - iK_i \rho)^{-1} K_i.$$

Если пренебречь взаимодействием двух одинаковых мезонов ($T_3 = 0$) и ввести оператор перехода от состояния $(\pi_1 \pi_3) \pi_2$ к $(\pi_2 \pi_3) \pi_1 - a_{12}$, то будем иметь одно уравнение:

$$T_1 = t_1 + it_1 \rho a_{12} T_2.$$

Если умножить справа это уравнение на $|\psi_i\rangle$, то получим матричный элемент распада: $P_1 = R_1 + it_1 \rho a_{12} P_2$, где R_1 — функция Брейта — Вигнера. Подставляя явный вид t_1 , имеем

$$P_a(s_1) = R_a(s_1) + i e^{i\delta_a} \sin \delta_a \sum_b a_{12} P_b(s_2),$$

где δ_a — фазовые сдвиги $(\pi\pi)$ -рассеяния; a, b — угловые моменты пар (lj) . Учитывая, наконец, изоспиновую структуру и пренебрегая вкладом состояний с изоспином больше двух, окончательно имеем два уравнения:

$$P_a^0 = R_a^0 + it_a^0 \rho a_{12} \left[\frac{2}{3} P_b^0 + \frac{4}{3} P_b^1 \right],$$

$$P_a^1 = R_a^1 + it_a^1 \rho a_{12} \left[P_b^0 + P_b^1 \right],$$

для изоспина, равного нулю и единице соответственно. Число параметров при фиксированных данных остается тем же.

Таким образом, матричный элемент распада принимает вид $\mathcal{M}^{JM} = P_{lj} Z_{lj}^{JM}$, при этом P_{lj} — аналитическая функция дипионной массы. Что касается двухчастичной унитарности, то необходимо показать, что двухчастичный элемент имеет правильное пороговое поведение. Неунитарный матричный элемент содержит член $R_a(s_1) + \sum_b a_{12} R_b(s_2)$, где второй член появляется из-за бозе-симметрии амплитуды. Первый член — функция Брейта — Вигнера — имеет правильное пороговое поведение. Действительно,

$$R_a(s_1) = \frac{P^l q^j}{M_R^2 - s - iM_R \Gamma} = \frac{P^l q^j}{M_R \Gamma} \sin \delta e^{i\delta} = e^{i\delta} q^j r_a(s_1),$$

где $r_a(s_1)$ — аналитическая функция без особенностей при пороге $s_1 = 4m_\pi^2$. Двигаясь вокруг особенности $s_1 = 4m_\pi^2$ и приняв во внимание $q \rightarrow -q$, $\delta \rightarrow -\delta$, получим, что $R_a(s_1) \rightarrow (-1)^j e^{-i\delta} q^j r_a(s_1)$. Это свойство и специальная форма R_a , требуемая теоремой Ватсона, доказывает унитарность. Второй член не удовлетворяет этому условию. Если использовать унитарные состояния, то получим $P_a(s_1) + \sum_b a_{12} P_b(s_2) = R_a(s_1) + e^{i\delta} \cos \delta_a \sum_b a_{12} P_b(s_2)$, и оба члена имеют необходимую форму и удовлетворяют теореме Ватсона [41]. Решение унитарных уравнений было сделано численно.

Анализ унитарных поправок показал [38], что полное число событий для состояний 0^- , 1^+ , 2^- , 3^+ не изменяется. Число событий в состояниях 1^+S и 1^+P увеличивается, и избыток событий компенсируется за счет отрицательной интерференции состояний для случая $\pi\pi$ -параметризации дипионной амплитуды, а для ϵ -параметризации интерференция положительна. Для 0^-S - и 0^-P -состояний интерференция положительна и мала в обоих случаях. Учет унитарных перераспределений приводит к тому, что для $\pi\pi$ -параметризации в состоянии 1^+ из $\rho\pi$ -системы больше образуется ($\epsilon\pi$), что находит отражение в величине интерференционного члена. Форма интенсивностей волн не претерпевает изменений. Относительные фазы основных волн 0^- , 1^+ и 2^- показывают такое же поведение, что и для неунитарной амплитуды, хотя сами фазы претерпевают сдвиги. Можно отметить, что их ход становится менее монотонным. Вклады и фазы высших спинов идентичны. Для унитарной амплитуды функция максимального правдоподобия принимает несколько меньшие значения — на 10-15 единиц. Таким образом, анализ унитарных поправок показал, что вклад этих поправок существен для волны 1^+ , мал для 0^- и ничтожен для высших спинов.

Фит данных. Для определения комплексных параметров канала $C^{J^P I_j}$, реальных и мнимых частей элементов матрицы плотности использован обобщенный метод максимума правдоподобия [44]. Функция, которая максимизировалась, имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^N \ln W(\tau) - N \int W(\tau) A(\tau, x) d\tau + \sum_{i=1}^N \ln A(\tau, x),$$

где $\tau \in t, M_{3\pi}, s_1, s_2, \phi, \theta, \gamma; N$ — число событий, $A(\tau, x)$ — аксептанс спектрометра, $x \in XYZ\Phi$ — координаты вершины события и азимутальный угол события относительно оси пучка.

Произведение $W(\tau)A(\tau, x)$ есть вероятность найти событие в пространстве (τ, x) . Величина $A(\tau, x)$ для каждого события рассчитывается с помощью метода Монте-Карло, при этом событие удовлетворяет триггеру с учетом эффективности регистрации спектрометра и топологии события. Для событий, использованных в анализе, вероятность найти событие в (τ, x) есть

$$\int W A d\tau = 1 \quad \text{или} \quad \sum C C^* \rho \int m m^* A d\tau = 1,$$

где

$$d\tau = \sum_i \frac{N_i}{N} \int d\phi d\cos\theta d\gamma ds_1 ds_2 \frac{dM_{3\pi}}{M_{3\pi}} dt,$$

так что процедура нормализации определяет нормализованную матрицу плотности $\rho / \int W A d\tau$.

Таким образом, число событий с данным набором квантовых чисел $J^P M \eta l j$ и модой n есть

$$N |C^{J^P l j n}|^2 \rho_{J^P M \eta J'^P M' \eta'}.$$

Основной особенностью фита данных является то обстоятельство, что элементы матрицы плотности в процессе фита не могут изменяться произвольно, а должны удовлетворять определенному требованию. Это требование состоит в том, что вероятность найти событие должна быть положительной, т. е. ρ -матрица должна быть положительно определена

$$|\rho_{J_1^{P_1} M_1 \eta_1 J_2^{P_2} M_2 \eta_2}|^2 \leq \rho_{J_1^{P_1} M_1 \eta_1 J_1^{P_1} M_1 \eta_1} \times \rho_{J_2^{P_2} M_2 \eta_2 J_2^{P_2} M_2 \eta_2}.$$

Однако это условие нелинейно и, в свою очередь, имеет трудности применения. Любую эрмитову матрицу (в нашем случае ρ -матрицу) можно описать ее N собственными значениями λ и N нормализованными собственными векторами ϑ , т.е. любая эрмитова матрица может быть диагонализирована унитарной матрицей, образованной из ее собственных векторов:

$$\rho_{ij} \equiv \lambda_1 \vartheta_i^1 \vartheta_j^{1*} + \dots + \lambda_N \vartheta_i^N \vartheta_j^{N*}.$$

В этом случае условие положительно-определенной ρ -матрицы обеспечивается требованием, чтобы любое собственное значение $\lambda > 0$. Это условие накладывается на каждом шаге фита.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОГО АНАЛИЗА

Определение набора парциальных волн, необходимых для описания данных, представляет собой итерационный процесс, так как даже при достаточно скромном ограничении величиной спина 3π -системы J , орбитального момента дипиона относительно пиона l и магнитного числа $M(J \leq 2, l \leq 2)$ необходимо 36 парциальных волн. Для 3π -системы и неполяризованной мишени ранг ρ -матрицы равен 4, что соответствует амплитуде с переворотом спина и без переворота, и для двух значений $\eta \pm 1$ оператора отражения. Вследствие этого вкладом волн меньше 1% с фактором когерентности $> 0,6$ пренебрегали в окончательном фите данных. Вклад волн с $\eta = -1$ был найден чрезвычайно малым и составлял менее 1%. Вклад волн с переворотом спина, для которых $M \geq 1$, оказался малым, за исключением нескольких волн, поэтому для обозначения 3π -состояния примем $J^P l$, имея в виду, что $M\eta = 0^+$. Набор волн для описания данных существенно зависит от области масс 3π -системы. Состояние 1^+ является доминирующим в области масс $\leq 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$, в которой дает основной вклад рождение a_1 -резонанса. В области масс $> 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ основной вклад дает состояние 2^- (π_2 -резонанс).

В качестве дипионных резонансов были использованы 1^- (ρ -мезон) и 2^+ (f -мезон). Что касается S -состояния дипионной системы, то ее параметризация была сделана как с ε -резонансом ($m_\varepsilon = 0,77 \text{ ГэВ}/c^2$, $\Gamma_\varepsilon = 0,4 \text{ ГэВ}$), так и с фазой $\pi^+\pi^-$ - и $\pi^0\pi^0$ -рассеяния [44]. Различная параметризация S -дипионной системы, главным образом, влияет на интенсивность интерференции между волнами 1^+S и 1^+P и практически не влияет на волны 0^-S , 0^-P , где интерференция очень слабая. Использование фазы упругого $\pi^+\pi^-$ -рассеяния или $\pi^0\pi^0$ -рассеяния дает одинаковый результат, поэтому будем приводить результаты с одной из них, в частности, с фазой $\pi^+\pi^-$ -рассеяния. На рис.3 приведены интенсивности волн 0^-S , 0^-P и 1^+S для различных параметризаций. Интенсивность 0^-S -волны, как видно, не зависит от параметризации, в то время как интенсивность волны 1^+S для $\pi\pi$ -параметризации больше ε -параметризации, и интерференция имеет разные знаки. Так, для ε -параметризации интерференция большая и отрицательная в области порога ρ -системы, в области больше $1 \text{ ГэВ}/c^2$ становится положительной, а для $\pi\pi$ -параметризации — везде малая и отрицательная. ε -параметризация систематически дает большую величину функции максимального правдоподобия.

Результатом анализа являются относительные фазы волн и матрица плотности. Рассмотрим интерпретацию относительных фаз. Ясно, что если

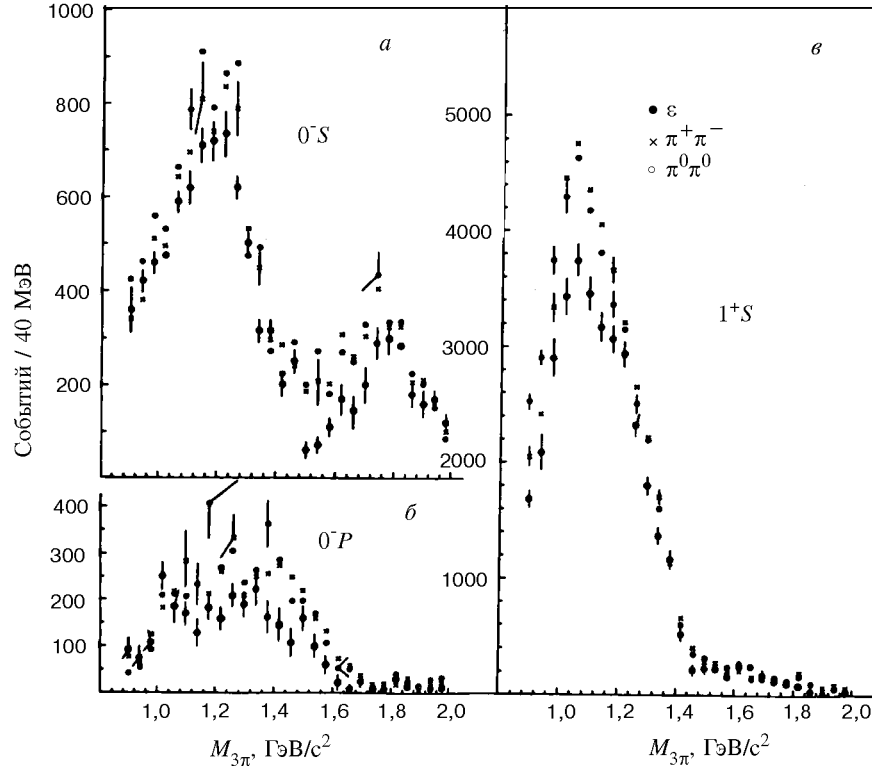


Рис.3. Интенсивность волн 0^-S ; 0^-P и 1^+S для трех параметризаций дипионной амплитуды

волны когерентны, то относительная фаза двух нерезонансных волн не будет изменяться в зависимости от массы системы. Для резонансных волн, но и достаточно широких резонансов, относительная фаза также не будет изменяться. Присутствие резонансного состояния в одной из волн дает сильное движение относительной фазы (изменение на 180° на ширине резонанса). Существенно сложнее интерпретировать ход относительной фазы в случае присутствия нерезонансного фона в парциальной волне. Как показано в работе [45], скорость изменения резонансной фазы может сильно замедляться вблизи фоновой фазы, и ход относительной фазы может принимать ступенчатый характер. Присутствие нескольких фоновых вкладов сильно усложняет интерпретацию поведения относительной фазы.

Вследствие этого для визуализации резонансного поведения парциальных волн желательно найти опорную волну, которая когерентна с другими волнами и фаза которой слабо меняется в диапазоне 3π -масс. Присутствие резонанса в данной парциальной волне устанавливается на основании всей совокупности результатов, т.е. принимается во внимание поведение относительно фаз и относительно других волн. В качестве такой опорной волны рассматривалась волна 0^-P ($\rho\pi$), которая имеет медленно меняющийся сигнал в широком интервале масс. Другим кандидатом была волна 2^-P ($\rho\pi$), но она ведет себя некогерентно в области масс до $1,16 \text{ ГэВ}/c^2$. В интервале $1,16 \div 1,40 \text{ ГэВ}/c^2$ фаза 0^-P медленно растет относительно 2^-P ($\sim 30^\circ$). Другой проверкой качества опорной волны является наблюдение резонансного характера хорошо установленного a_2 -резонанса, волна которого 2^+D1^+ ($\rho\pi$) относительно 0^-P имеет явное резонансное поведение. Фактор когерентности этих волн составляет величину 0,7.

В табл.1 представлены вклады основных волн для трех интервалов масс и групп ядер, но одного и того же диапазона передач ($t' \leq 0,01 \text{ (ГэВ}/c^2)$). Из рис.4, где приведен процентный вклад волн, видно, что вклад 0^- и 2^- систематически уменьшается с атомным номером мишени, в то время как амплитуда 1^+ увеличивается.

Таблица 1. Вклады основных волн для разных интервалов масс и групп ядер

$J^P l$	Be + C	Al + Si	Ti + Cu	Ag + Ta + Pb
$0,9 < M_{3\pi} < 1,2 \text{ ГэВ}/c^2$				
0^-S	$12,5 \pm 1,2$	$12,5 \pm 0,7$	$11,2 \pm 1,6$	$9,6 \pm 1,0$
0^-P	$3,4 \pm 0,8$	$2,3 \pm 0,3$	$2,9 \pm 0,7$	$2,0 \pm 0,4$
0^-	$17,8 \pm 1,7$	$16,4 \pm 0,9$	$15,8 \pm 2,1$	$12,8 \pm 1,3$
1^+S	$64,4 \pm 3,4$	$64,8 \pm 1,5$	$68,8 \pm 3,6$	$66,9 \pm 2,3$
1^+P	$10,0 \pm 1,2$	$10,4 \pm 0,6$	$8,2 \pm 1,2$	$9,8 \pm 0,8$
1^+D	—	—	—	—
1^+	$78,5 \pm 2,3$	$80,9 \pm 1,1$	$82,1 \pm 2,8$	$85,3 \pm 1,8$
2^-P	$4,0 \pm 1,5$	$3,0 \pm 0,7$	$2,5 \pm 1,3$	$2,1 \pm 1,0$
2^-S	—	—	—	—
2^-	—	—	—	—

$J^P l$	Be + C	Al + Si	Ti + Cu	Ag + Ta + Pb
$1,2 < M_{3\pi} < 1,5 \text{ ГэВ}/c^2$				
$0^- S$	$17,3 \pm 2,2$	$14,4 \pm 1,0$	$13,5 \pm 2,2$	$9,4 \pm 1,3$
$0^- P$	$5,6 \pm 1,0$	$5,4 \pm 0,5$	$3,0 \pm 0,9$	$3,8 \pm 0,7$
0^-	$23,1 \pm 2,7$	$21,0 \pm 1,3$	$16,9 \pm 2,6$	$13,7 \pm 1,7$
$1^+ S$	$38,3 \pm 3,1$	$37,5 \pm 1,3$	$43,7 \pm 3,1$	$50,9 \pm 2,0$
$1^+ P$	$10,7 \pm 1,7$	$13,1 \pm 0,8$	$11,5 \pm 1,6$	$10,6 \pm 1,0$
$1^+ D$	$3,5 \pm 0,8$	$3,1 \pm 0,3$	$4,4 \pm 1,0$	$4,3 \pm 0,6$
1^+	$62,7 \pm 3,2$	$66,8 \pm 1,5$	$73,1 \pm 3,3$	$79,7 \pm 2,2$
$2^- P$	$9,5 \pm 1,8$	$7,9 \pm 0,8$	$7,0 \pm 1,7$	$3,4 \pm 0,9$
$2^- S$	$7,9 \pm 1,3$	$4,3 \pm 0,5$	$3,9 \pm 1,2$	$2,3 \pm 0,6$
2^-	$13,5 \pm 1,9$	$11,3 \pm 1,0$	$9,9 \pm 2,1$	$5,0 \pm 1,2$
$1,5 < M_{3\pi} < 1,8 \text{ ГэВ}/c^2$				
$0^- S$	$8,0 \pm 3,1$	$10,5 \pm 1,6$	$13,8 \pm 4,5$	$13,3 \pm 2,8$
$0^- P$	$5,8 \pm 2,9$	$2,1 \pm 0,6$	$1,8 \pm 1,3$	$2,3 \pm 1,1$
0^-	$14,6 \pm 4,0$	$13,2 \pm 2,0$	$16,0 \pm 5,2$	$15,9 \pm 3,3$
$1^+ S$	$13,5 \pm 2,8$	$15,0 \pm 1,4$	$12,1 \pm 3,2$	$14,9 \pm 2,3$
$1^+ P$	$13,3 \pm 2,6$	$17,2 \pm 1,3$	$13,3 \pm 2,9$	$14,0 \pm 2,0$
$1^+ D$	$11,1 \pm 2,3$	$12,6 \pm 1,0$	$14,6 \pm 2,8$	$16,2 \pm 2,0$
1^+	$45,4 \pm 4,6$	$52,2 \pm 2,2$	$46,7 \pm 5,5$	$53,1 \pm 3,7$
$2^- P$	$16,6 \pm 3,1$	$12,2 \pm 1,3$	$10,0 \pm 2,8$	$10,0 \pm 2,0$
$2^- S$	$30,2 \pm 3,0$	$28,0 \pm 1,4$	$32,1 \pm 3,5$	$26,1 \pm 2,3$
2^-	$39,9 \pm 3,9$	$34,5 \pm 1,7$	$37,2 \pm 4,2$	$31,1 \pm 2,8$

Это обстоятельство непосредственно свидетельствует об A -зависимости вклада парциальных волн, обусловленных разным поглощением в ядре. С этой целью сечение когерентного образования различных парциальных волн, проинтегрированное по t' вплоть до $0,01 \text{ (ГэВ}/c)^2$, было профитировано с помощью формул теории многократного рассеяния. На рис.4 показано поведение парциального сечения образования волн 0^- , 1^+ , 2^- и полное сечение в диапазоне $1 \div 1,2 \text{ ГэВ}/c^2$.

Сечения поглощения волн 0^- и 2^- в пределах ошибок совпадают с сечением поглощения мезона нуклоном (24 мб), а сечение поглощения состояния 1^+ значительно меньше и составляет 15 мб. Как видно, поглощение парциальных волн в разных квантовых состояниях различно.

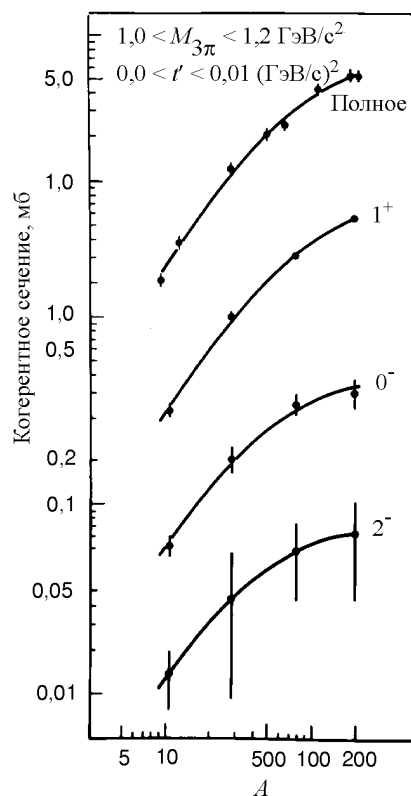


Рис. 4. Полное сечение рождения 0^- , 1^+ , 2^- -состояний

Для того чтобы изучить вопрос о вкладе амплитуд с переворотом спина в поглощение данной парциальной волны, был исследован вклад волн с $M \neq 1$. Отметим, что волны с $M > 1$ дают ничтожно малый вклад.

Парциально-волновой анализ был проведен для двух групп легких $\text{Be} + \text{C}$ и тяжелых ядер $\text{Ag} + \text{Ta} + \text{Pb}$ в широкой области масс для трех диапазонов $0,9 \div 1,2$; $1,2 \div 1,5$ и $1,5 \div 1,8$ $\text{ГэВ}/\text{с}^2$. В области малых t' вклад амплитуд составляет несколько процентов и имеет тенденцию к увеличению с ростом t' .

Так как состояние 1^+ доминирует в области масс $< 1,5$ $\text{ГэВ}/\text{с}^2$, то относительный вклад амплитуды 1^+1^+ , как следует из этих данных, составляет несколько процентов, т.е. состояние 1^+ практически рождается в чистом квантовом состоянии. Что касается волны 2^- , то даже для малых t' относительный вклад состояний 2^-1^+ заметен и достигает 30%.

Таким образом, на основании исследования t' - и A -зависимости вклада парциальных волн можно сделать следующие заключения.

а) Доминирующий вклад дают состояния 0^- , 1^+ , 2^- , которые рождаются за счет обмена натуральной серии по четности $P = P_\pi(-1)^J$, а вклад обмена ненатуральной серии ничтожно мал.

б) Вклад состояний со значением $\eta = -1$ оператора отражений ничтожно мал во всей области 3π -масс.

в) В t -канале когерентно образованная система имеет преимущественно минимальное значение третьей компоненты спина $M = 0$, которое разрешено для обмена ряда натуральной четности.

г) Отсутствие состояний с $\eta = -1$ и амплитуд с переворотом спина делает ранг ρ -матрицы не более 2, и высокая когерентность между волнами

обеспечивает надежное определение относительных фаз между различными парциальными волнами.

д) Вклад состояний 1^+ и 0^- имеет разное поведение с изменением атомного номера мишени, при этом вклад состояния 0^- не зависит от атомной массы мишени, а для состояния 1^+ растет.

е) Поглощение состояния 1^+ в ядерной материи меньше, чем поглощение состояний 0^- и 2^- , т.е. поглощение в ядре различных спиновых состояний разное.

Резонансные свойства состояния $J^P LM\eta = 1^+ L0^+$, $a_1(1260)$ -мезон.

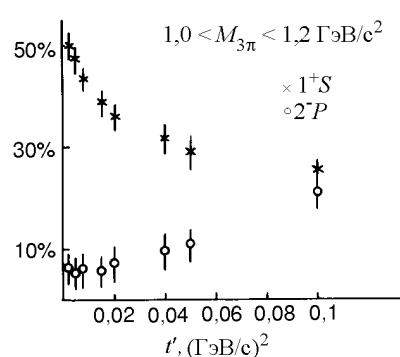
Проблема существования $a_1(1260)$ -резонанса относится к одному из давних вопросов в мезонной спектроскопии [45,47]: существует или нет этот резонанс с квантовыми числами 1^+ в канале распада на $\rho\pi$ -систему? В кварковой модели это состояние есть P -волна в qq -системе $I^G = 1^-, J^P = 1^+$. Положительный по G -четности партнер a_1 -мезона, $b_1(1235)$ -мезон надежно установлен [47]. $b_1(1235)$ -мезон не рождается в дифракционных процессах (так как $G = +1$) и распадается по каналу $\omega\pi$. Трудности установления резонансных свойств $a_1(1260)$ -мезона в дифракционных процессах в основном связаны с тем, что падающий π -мезон диссоциирует в $\rho\pi$ -систему в соответствии с механизмом Дрелла, Декка, Хиида [49,48] и заселяет преимущественно 1^+S ($\rho\pi$)-волну. Вследствие этого большое число работ [51—54] по исследованию дифракции на водородной мишени не показывали существенного изменения фазы 1^+S -волны относительно других волн. Это интерпретировалось как указание против существования a_1 -мезона.

Только исследования с большой статистикой на ядерных мишенях [45] и водородной мишени [50,49] позволили получить достоверные сведения о резонансе a_1 .

Исследование резонансных свойств состояния 1^+ основано на волновом анализе данных в когерентной области, а также на t' - и A -зависимости относительных фаз.

В области масс 3π -системы $\leq 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ набор волн следующий: 0^-S , 0^-P , 1^+S , 1^+P , 2^-P , 2^-P1 , 2^+D1 , кроме того, с $M_{3\pi} = 1,12 \text{ ГэВ}/c^2$ включалась волна $1^+D(\rho\pi)$.

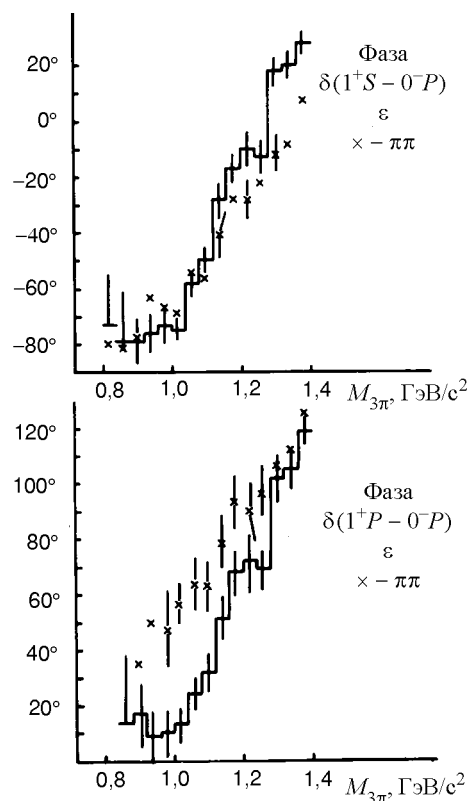
Сигнал 0^-P значительно превышает волну 2^+D1 . Волна 2^- в этой области содержит большой вклад амплитуды 2^-P1 . t' -зависимость амплитуд 1^+S и 2^-P для интервала масс $1 \div 1,2 \text{ ГэВ}/c^2$ показана на рис.5. Наклон амплитуды 1^+S и высокая когерентность прямо связаны с дифракционным

Рис.5. t' -зависимость 1^+S и 2^-P парциальных волн

механизмом рождения, в то время как волна 2^-P имеет слабую когерентность и рождается недифракционно в области масс меньше $1,2 \text{ ГэВ}/c^2$. Относительные фазы волн $\delta(1^+S - 0^-P)$, $\delta(1^+P - 0^-P)$, $\delta(1^+S - 0^-S)$ приведены на рис.6,7 для $\pi\pi$ -параметризации и ϵ -параметризации. 1^+S изменяется на 110° и 90° относительно 0^-P для двух параметризаций. Фаза 1^+S

относительно 1^+P постоянная и составляет 90° во всей области масс, в то время как относительная фаза $\delta(1^+P - 0^-P)$ показывает сильное изменение на ширине a_1 -пика. Это обстоятельство свидетельствует о резонансном поведении двух волн, как 1^+S , так и 1^+P . Так как эти два состояния принадлежат одному и тому же $J^P = 1^+$, то следовало бы ожидать, что их относительная фаза будет равна 0° или 180° . Их относительная фаза зависит от параметризации дипионной амплитуды: для ϵ она составляет 90° , а для $\pi\pi$ — -120° .

Хотя волны 1^+S и 1^+P могут принадлежать одному и тому же резонансу, но массовый спектр волны 1^+P не имеет резонансного вида и не описывается функцией Брейта — Вигнера. Фаза 1^+S -состояния относительно 0^-S пос-

Рис.6. Фазы волн 1^+S и 1^+P относительно волны 0^-P для ϵ - и $\pi\pi$ -параметризаций

тоянна по области масс и равна -150° , а волна 0^-S относительно 0^-P , как будет приведено ниже (рис.14), имеет сильное изменение фазы, что свидетельствует в пользу существования резонансных состояний в двух волнах 1^+S и 0^-S .

Для того чтобы понять поведение относительной фазы $\delta(1^+S - 0^-P)$ в области масс $0,8 \div 1,4$ ГэВ/с², было предпринято изучение A - и t' -зависимостей этой фазы. Полное изменение фазы $\delta(1^+S - 0^-P)$ увеличивается с ростом атомного номера мишени, составляя 70° для легких и $\sim 130^\circ$ для тяжелых. Для легких ядер поведение разности фаз $\delta(1^+S - 0^-P)$ одинаково как в когерентной, так и в некогерентной области, в то время как для тяжелых ядер эта фаза сильно меняется в области малых t' , а для больших t' изменение фазы имеет ту же величину, что и для легких ядер. Здесь целесообразно провести сравнение с данными, полученными на водородной мишени при $64 \div 93$ ГэВ [30], и с данными на ядерных мишенях при 15 ГэВ [26]. Для водородной мишени изменение фаз составляет лишь 65° и совпадает с движением фазы $(1^+S - 0^-P)$ для легких ядер, а также с изменением фазы в некогерентной области. Авторы [30] для получения сведений о резонансном характере 1^+S -состояния привлекли расчеты по нерезонансной модели Декка.

Для определения параметров резонанса в состоянии 1^+S был сделан анализ массового спектра 1^+S в ϵ -параметризации по формуле Брейта — Вигнера в предположении нерезонансного вклада механизма Декка. Так как массовый спектр 1^+S зависит от параметризации дипионной амплитуды, то

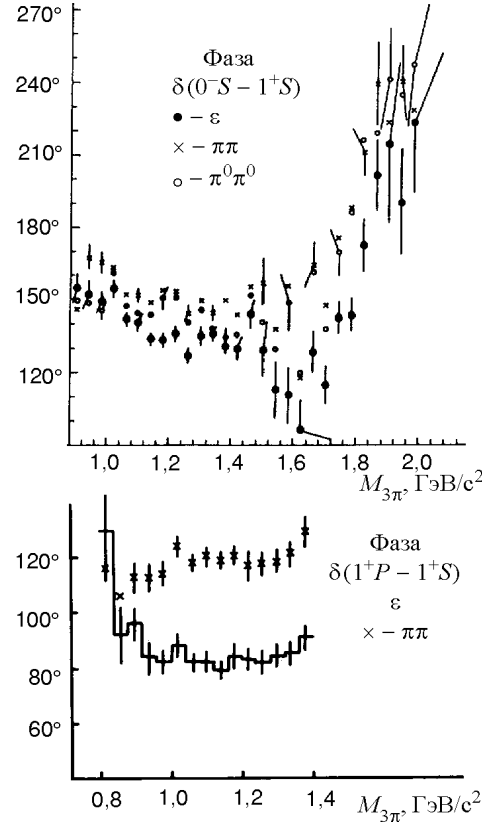


Рис.7. Относительные фазы $(0^-S - 1^+S)$ и $(1^+P - 1^+S)$

тем самым будут получены предварительные данные. Более аккуратный анализ с целью определения резонансных параметров дан ниже.

Массовый спектр 1^+ может быть описан выражением:

$$N_{1^+S} = A \exp(-BM^2) + C \frac{M_0 \Gamma}{(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2 \Gamma^2},$$

где первый член есть нерезонансный вклад, а второй член — релятивистская формула Брейта — Вигнера, в которой M_0 — резонансная масса,

$\Gamma = \Gamma_0 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2l+1} \frac{M_0}{M}$, q — импульс дипиона в 3π -системе покоя, q_0 — тот же импульс для резонанса, l — орбитальный момент в системе рп. На основании этого описания резонансный вклад составляет 29% в состоянии 1^+S . Масса и ширина резонанса

$$M_{a_1} = (1,264 \pm 0,006) \text{ ГэВ}/c^2, \quad \Gamma_{a_1} = (244 \pm 14) \text{ МэВ}.$$

На основании изложенного можно сделать заключения.

а) Поведение относительной фазы волны 1^+S и массовый спектр непосредственно свидетельствуют о резонансе в волне 1^+S (рп) с квантовыми числами $a_1(1260)$ -резонанса $I^G J^P = 1^- 1^+$. Что касается волны 1^+P , то большая разница фаз ($1^+P - 1^+S$), зависящая от параметризации дипионной амплитуды, по-видимому, указывает на значительный нерезонансный вклад в эту волну. Вклад резонанса в волне 1^+P мал.

б) Когерентный механизм усиливает образование a_1 -резонанса при малых t' .

в) Увеличение разности фаз состояний 1^+S и 0^-P с увеличением атомной массы ядра для малых t' свидетельствует об усилении селективирующей способности ядра и увеличении резонансного рождения.

г) Изменение относительной фазы ($1^+S - 0^-P$) на легких ядрах и водородной мишени сравнимо, в то время как на тяжелых ядрах движение фазы систематически увеличивается с ростом A . В некогерентной области на ядрах движение относительной фазы сопоставимо с данными на водороде. Таким образом, проявление резонансных свойств a_1 -сигнала сильно зависит от атомной массы ядра мишени. Так как ядро, как мы видели, по-разному поглощает состояния с разными значениями спина и четности, и эффект поглощения увеличивается с ростом атомной массы, то большее проявление резонансных свойств данного состояния, по-видимому, обусловлено тем, что ядерное поглощение в данном J^P -состоянии приводит к подавлению

вклада механизма, который нормально дает вклад в это состояние. Другими словами, нерезонансное состояние в данном J^P может сильнее поглощаться в ядерной материи, чем резонансное. Такая возможность рассматривалась в работах [55,60]. Вследствие этого малость сечения поглощения a_1 -мезона и увеличение выхода с ростом атомной массы ядра, по-видимому, указывает на то, что в процессе дифракционного рождения a_1 -резонанса на ядрах включается дополнительный механизм. Этот механизм может быть двух-этапным, вследствие того, что в адрон-ядерном дифракционном рассеянии рожденная система, прежде чем достигнуть конечного состояния, в течение переходного времени может существовать в другом состоянии и, взаимодействуя с нуклоном, переходить в конечное состояние, например, $\pi \rightarrow \pi' \rightarrow a_1$. Пространственно-временная картина этого процесса такова, что в системе в конечном состоянии остается малый шанс провзаимодействовать в ядерной материи. Этим можно объяснить малость сечения поглощения системы в конечном состоянии. Такая возможность рассматривалась в ряде теоретических работ [58,57]. Ясно, что вклад этого механизма зависит от импульса падающей частицы и передачи, и для доказательства его истинности необходимы экспериментальные данные на ядрах при нескольких значениях падающего пучка.

Заметим, что эти свойства рождения a_1 -резонанса не могут быть объяснены, если принять во внимание электромагнитное рождение a_1 -резонанса в кулоновском поле тяжелого ядра. Прямой вклад электромагнитного рождения сосредоточен в области чрезвычайно малых передач $t' \leq 10^{-4} (\text{ГэВ}/c)^2$, полное сечение мало и на тяжелых ядрах равно 0,5 мб [57] (если принять $\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma} = 250 \text{ кэВ}$). К тому же из-за разной поляризации a_1 -состояния в ядерном и электромагнитном рождении интерференция между ними невозможна.

В свете указанных свойств a_1 -резонанса теперь могут быть поняты многочисленные экспериментальные попытки обнаружения резонансных свойств 1^+ -состояния. Наблюдаемый пик в массовом спектре при $1050 \text{ МэВ}/c^2$ во многих работах принимался за значение массы a_1 -резонанса. Однако ход фазы волны не дает явного подтверждения резонанса при $1,05 \text{ ГэВ}/c^2$. Пик в спектре масс в значительной мере обусловлен вкладом механизма Декка с нерезонансным рождением $\pi\pi$ -системы.

Резонансные свойства состояния $J^P L M \eta = 0^- S 0^+$. $\pi(1300)$ - и $\pi(1770)$ -мезоны [1,2]. Значительный интерес представляет вклад состояния 0^- , имеющего все квантовые числа π -мезона. Вклад этого состояния составляет

21% в области масс $1 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$. Массовый спектр 0^-S -волны в области масс $0,8 \div 2 \text{ ГэВ}/c^2$ представлен на рис.8 для ϵ -параметризации дипионной амплитуды. Как видно из табл.1, различная параметризация не влияет на интенсивность волны 0^-S , как и на характер интерференции 0^-SP . Интерференция между волнами 0^-S и 0^-P мала и положительна.

Относительная фаза $\delta(0^-S - 0^-P)$ изменяется на 85° и 75° для ϵ - и $(\pi\pi)$ -параметризаций соответственно. Относительная фаза $\delta(0^-S - 1^+S)$ в этой же области масс постоянна и равна 150° (рис.7). Так как a_1 есть резонанс, то характер изменения относительной фазы $\delta(0^-S - 0^-P)$ и $\delta(0^-S - 1^+S)$ свидетельствует о резонансе в волне 0^-S [1,2]. В отличие от волны 1^+S это состояние не показывает A -зависимости фазы $\delta(0^-S - 0^-P)$. Таким образом, свойства 0^-S -состояния не изменяются с атомной массой мишени, и эти свойства подобны поведению π -мезона.

Описание массового спектра волны 0^-S по релятивистской формуле Брейта — Вигнера с медленно меняющимся экспоненциальным фоном в области масс $0,8 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ позволило получить предварительные данные о положении и ширине резонанса:

$$M_{0^-S} = (1,205 \pm 0,07) \text{ ГэВ}/c^2, \quad \Gamma_{0^-S} = (0,32 \pm 0,035) \text{ ГэВ}.$$

Вопрос о положении резонанса мы рассмотрим подробнее ниже. Из сравнения изменения хода относительной фазы $\delta(0^-S - 0^-P)$ на ядерной и водородной мишенях видно, что на водородной мишени изменение фазы составляет $\sim 40^\circ$, и в области

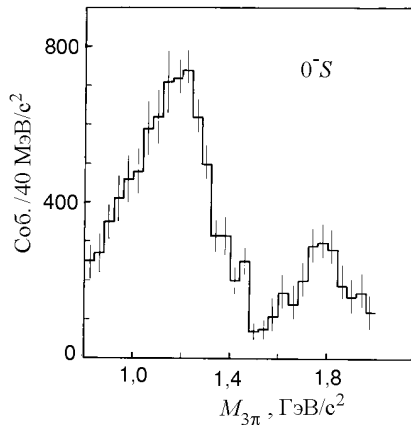


Рис.8. Спектр 0^-S парциальной волны

$M_{3\pi} < 1,1 \text{ ГэВ}/c^2$ относительная фаза на ядерной мишени существенно (на 50° — 60°) меньше фазы на водороде. Следует заметить, что ход фазы претерпевает скачок в области масс $\sim 1,16 \text{ ГэВ}/c^2$, т.е. в той области, где ход фазы на водороде пересекается с ходом фазы на ядерных мишенях. Такой скачок имеется и в фазе $\delta(1^+S - 0^-P)$. Истинное движение фазы $\delta(0^-S - 0^-P)$ значительно больше, чем 85° . Фаза волны 0^-P не совсем постоянна. Ее фаза относитель-

но волны 2^-P увеличивается на $\sim 30^\circ$ в области масс $1,1 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ и продолжает расти в области масс $1,4 \div 1,6 \text{ ГэВ}/c^2$ относительно волны 1^+S также на $\sim 30^\circ$. Таким образом, значительное изменение относительной фазы $\delta(0^-S - 0^-P)$ в области $0,8 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$, постоянство фазы волны 0^-S относительно резонансной волны 1^+S в этой же области масс, а также брейт-вигнеровская форма массового спектра непосредственно свидетельствуют о наблюдении резонанса 0^- в системе $(\pi^+\pi^-)_s + \pi^-$ с квантовыми числами пиона.

В области масс $M_{3\pi} > 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$, как видно из массового спектра 0^-S -волны (рис.8), в спектре масс присутствует пик, имеющий брейт-вигнеровскую форму для всех параметризаций дипионной амплитуды. Так как сигнал волны 0^-P становится малым в области $M_{3\pi} > 1,6 \text{ ГэВ}/c^2$, то в этой области волна 1^+S является опорной. На рис.7 показано поведение фазы $\delta(0^-S - 1^+S)$ в области масс $1,4 \div 2 \text{ ГэВ}/c^2$. Изменение фазы составляет $\sim 120^\circ$ в этой области. Это состояние, так же, как и первое состояние, имеет квантовые числа пиона [61,60]. Его масса и ширина получены при описании массового спектра брейт-вигнеровской формулой с вкладом фона — полиномом второй степени. При этом $M_{0^-S} = (1,77 \pm 0,03) \text{ ГэВ}/c^2$ и $\Gamma_{0^-S} = (0,31 \pm 0,05) \text{ ГэВ}$ для всех трех параметризаций дипиона. Оба состояния в волне 0^-S , имеющие квантовые числа пиона и распадающиеся по сильному каналу ($\epsilon\pi$), в рамках кварковой модели представляют собой возбужденные по радиальному числу состояния qq' -системы и называются π' и π'' . Сечение их образования равно*

$$\sigma_{\pi \rightarrow \pi(1300)} = 54 \text{ мкб/нуклон},$$

$$\sigma_{\pi \rightarrow \pi(1770)} = 11 \text{ мкб/нуклон}.$$

Определение параметров резонансов с помощью метода паде-аппроксимации. Теперь мы обратимся к вопросу об установлении положения резонансов и их ширин. Различная параметризация дипионной амплитуды и вклад нерезонансного рождения приводят к тому, что массовый спектр волны не описывается чистой резонансной формулой Брейта — Вигнера, и такой анализ становится модельно-зависимым. К тому же, в таком анализе не используется вся информация об интенсивностях и относительных фазах результатов парциально-волнового анализа в данном интервале масс.

*Величина погрешности в сечении составляет 7 и 12 % соответственно.

Для этих целей — определения резонансных параметров — применяется метод паде-аппроксимантов [42], в котором используется вся имеющаяся экспериментальная информация об интенсивностях и фазах. В противоположность брейт-вигнеровскому анализу этот метод не зависит от предположения о числе резонансов в данной парциальной волне, о постоянстве опорной волны. Кроме того, брейт-вигнеровская форма массового спектра может соответствовать резонансу в амплитуде F^2 , но ту же зависимость дает и комплексно-сопряженная амплитуда $\bar{F}^2$ без полюса в амплитуде.

Парциальная волна может быть представлена в форме

$$F_k = |F_k| \exp(i\delta_k), \quad k = 1, 2,$$

$F_1 = F_{1^+S}$ и $F_2 = F_{0^-P}$; интенсивность парциальных волн $|F_1|^2$ и $|F_2|^2$, их относительная фаза $\phi = \delta_1 - \delta_2$.

В методе, основанном на паде-аппроксимации аналитической комплексной функции, используется интерполяция Коши [62] для аналитической функции, экспериментально определенной для конечного числа значений функции. Аппроксимант парциальной волны может быть сконструирован следующим образом [63]:

$$f_i(x_i) \Rightarrow \tilde{f}(z) = \frac{P_N(z, f_i(x_i))}{Q_M(z, f_i(x_i))}.$$

Исследование особенностей полиномов P_N и Q_M позволяет найти нули и полюсы парциальной волны. Для лучшего описания данных используется метод минимизации средних квадратов, при этом свободными (искомыми) параметрами являются сами функции $f(x)$. Новый аппроксимант, полученный таким образом, есть паде-аппроксимант парциальной волны:

$$F_{J^P} = |a_{J^P}| \prod_{i=1}^n \frac{W - W_{z_i}^{J^P}}{W - W_{p_i}^{J^P}},$$

где a_{J^P} — комплексная константа, которая может быть определена с точностью до фазы из-за незнания индивидуальных фаз: W_{z_i} и W_{p_i} — значения массы $M_{3\pi}$, при которой амплитуда имеет нуль и полюс в комплексной энергетической плоскости.

Паде-аппроксимант парциальной волны сходится к функции Йоста с нулями для физических энергий, обусловленных резонансным или связанным состояниями. Таким образом, анализ сходимости паде-серии позволяет

получить информацию о существовании стабильных полюсов в нижней части комплексной энергетической плоскости. Истинный резонанс есть стабильный полюс, для которого $\text{Im } W_p < 0$, постоянен с увеличением степени аппроксиманта.

Для построения паде-аппроксимантов для произведения и отношения двух парциальных волн, имеющих одну и ту же относительную фазу, имеем

$$F_\alpha \bar{F}_\beta = |F_\alpha| |\bar{F}_\beta| e^{i\Phi} = A \prod_{i=1}^n \frac{W - W_{z_i}^\alpha}{W - W_{p_i}^\alpha} \frac{W - \bar{W}_{z_i}^\beta}{W - \bar{W}_{p_i}^\beta}$$

и

$$\frac{F_\alpha}{F_\beta} = \left| \frac{F_\alpha}{F_\beta} \right| e^{i\Phi} = B \prod_{i=1}^n \frac{W - W_{z_i}^\alpha}{W - W_{p_i}^\alpha} \frac{W - \bar{W}_{p_i}^\beta}{W - \bar{W}_{z_i}^\beta}.$$

Комплексные константы A и B определяют α_{J^P} .

Массовые спектры парциальных волн 1^+S , 0^-S и 0^-P и их взаимные относительные фазы были использованы для построения паде-аппроксимантов для ε - и $\pi\pi$ -параметризаций. Начальные параметры паде-аппроксимантов найдены для каждой пары волн. На втором этапе найденные параметры полиномов для каждой парциальной волны использованы как начальные параметры для поиска стабильных полюсов в совместном описании данных, как интенсивностей волн 1^+S , 0^-S , так и их относительных фаз. На рис.9 показаны интенсивности волн и их относительные фазы, а также результат описания с помощью паде-аппроксимантов, отличающихся степенью полиномов. Специально [59] было исследовано влияние фона на результат поиска нулей и полюсов амплитуд. Экспоненциальный нерезонансный фон в парциальной волне ведет к увеличению степени полиномов, оставляя стабильным положение полюсов в пределах двух стандартных отклонений. Результаты определения положения и полуширин стабильных полюсов в волнах $1^+S(a_1)$ и 0^-S получены для различных типов паде-описания и двух параметризаций. Положение и ширина резонанса в 1^+S -волне нечувствительны к параметризации, но проявляют чувствительность к фоновому члену, в то время как для 0^-S -резонанса учет фона ведет к некоторому увеличению его ширины. Для резонанса 0^-S был проделан также совместный фит массового спектра и фазы независимым образом. Результаты суммированы ниже [64—66]:

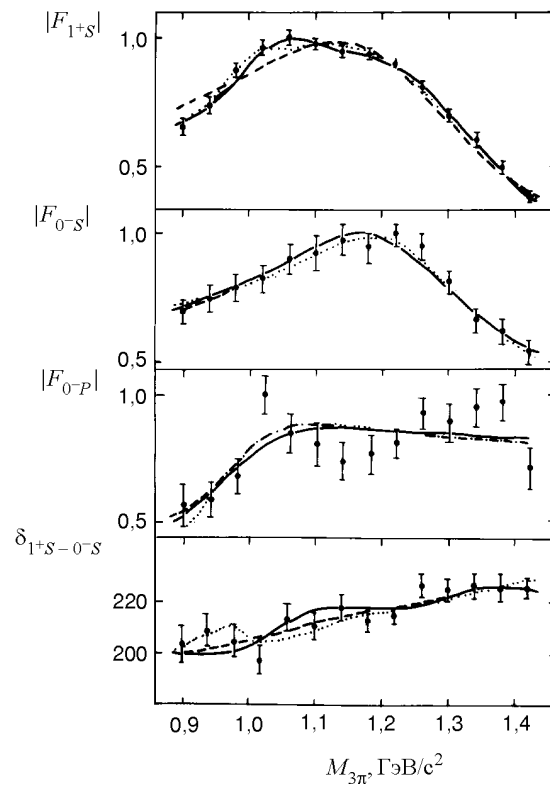


Рис.9. Описание интенсивностей и фаз с помощью паде-полиномов

$$M_{a_1} = (1255 \pm 23) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{a_1} = (292 \pm 40) \text{ МэВ},$$

сечение рождения $\sigma_{\pi \rightarrow a_1} = (430 \pm 27) \text{ мкб/нуклон}$,

$$M_{\pi(1300)} = (1240 \pm 30) \text{ МэВ}, \quad \Gamma = (360 \pm 120) \text{ МэВ},$$

сечение $\sigma_{\pi \rightarrow \pi'} = (54 \pm 3,7) \text{ мкб/нуклон}$,

$$M_{\pi(1770)} = (1770 \pm 30) \text{ МэВ}, \quad \Gamma = (310 \pm 50) \text{ МэВ},$$

$\sigma = (11 \pm 1,32) \text{ мкб/нуклон}$.

Из данных нельзя исключить возможность распада $\pi(1300) \rightarrow \rho\pi$. Если этот распад существует, то вклад его чрезвычайно мал. Что касается $\pi(1770)$, то его распад идет только в состояние $(\epsilon\pi)$.

Состояние $J^{PLM}\eta = 2^-L0^+$. $\pi_2(1600)$ -резонанс. В области масс 3π -системы $> 1,4$ ГэВ/с² вклад состояния 2^- доминирует. До недавнего времени проблема существования π_2 -резонанса не была разрешена в экспериментах [23,50] вследствие недостаточного разрешения и статистики. Анализ данных эксперимента на водородной мишени с большой статистикой позволил только в последнее время установить его основные свойства. Данные эксперимента непосредственно свидетельствуют о дифракционном образовании 2^- -состояния, распадающегося по трем каналам $2^-S(f_2\pi)$, $2^-P(\rho\pi)$, $2^-D(\epsilon\pi)$ [66,70]. Наиболее интенсивным каналом является 2^-S . На рис.10 представлены интенсивности каналов 2^-S , 2^-P и 2^-D и фазы относительно волны 1^+S , они имеют резонансную форму при $\sim 1,65$ ГэВ/с². Волна 2^-P имеет сильный вклад фона. В этой области масс волна 2^-P имеет малый вклад спин-флиповой амплитуды $2^-P1^+(\rho\pi)$. Вклад волны

$2^-S1(f_2\pi)$ также мал. Форма массовых спектров не зависит от вида параметризации дипионной амплитуды, а интерференция между волнами мала. Три волны 2^-S , 2^-P и 2^-D относительно 1^+S показывают существенное изменение относительной фазы. Максимальное изменение фазы для трех волн находится при массе 1,65 ГэВ/с². Фазы волн 2^-S , 2^-P , 2^-D относительно волны 0^-S также претерпевают заметное изменение и только в области масс, близких $\pi(1770)$ -резонансу, относительные фазы выходят на плато. Взаимные относительные фазы 2^-S относительно 2^-P и 2^-D составляют малую величину и

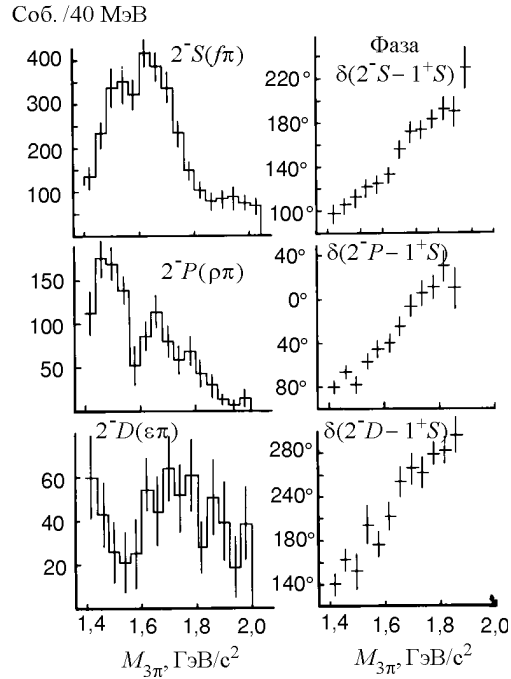


Рис.10. Интенсивности волн 2^- и их фазы

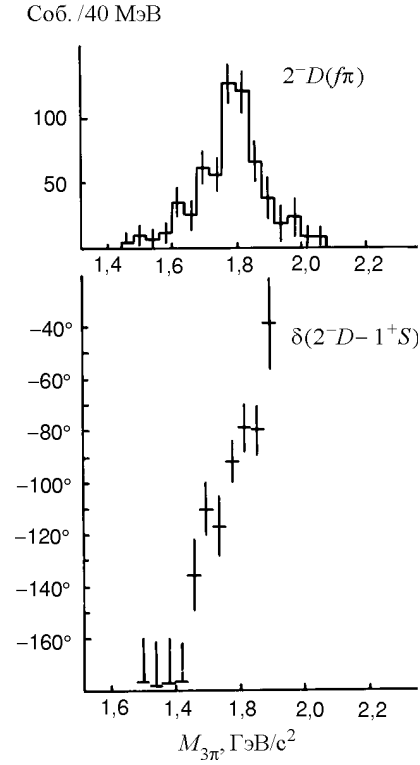


Рис.11. Интенсивность и фаза волны $2^-D(f_2\pi)$

нарастать только с $M_{3\pi} = 1,65 \text{ ГэВ}/c^2$, и максимальный ход соответствует $1,85 \text{ ГэВ}/c^2$. До области масс $1,7 \text{ ГэВ}/c^2$ относительная фаза постоянна и составляет 70° , и в области больших масс, как видно в двух параметризациях, относительная фаза $\delta(2^-S - 2^-D(f_2\pi))$ падает, что обусловлено изменением фазы волны $2^-D(f_2\pi)$. Таким образом, поведение интенсивности и фазы волны $2^-D(f_2\pi)$ указывает на присутствие резонансного состояния в этой волне с массой $\sim 1,85 \text{ ГэВ}/c^2$. Подобные свойства этого состояния наблюдались также в работе [30]. Авторами этой работы на основании совместного описания всех состояний 2^-S , 2^-P , $2^-D(\epsilon\pi)$ и $2^-D(f_2\pi)$ сделан вывод о том, что волна содержит резонансы с массами $\sim 1,7 \text{ ГэВ}/c^2$ и $2,15 \text{ ГэВ}/c^2$. Наблюдаемое поведение интенсивности и фазы волны

согласуются с представлением, что π_2 -мезон связан с тремя каналами. Движение фазы волны 2^-S относительно 1^+S составляет $\sim 120^\circ$ для двух параметризаций дипионной амплитуды. Аналогичное поведение имеют фазы волн 2^-P и 2^-D .

Значительное изменение относительных фаз волн 2^- как относительно волны 1^+S , так и 0^-S , а также малая величина взаимных фаз свидетельствуют о резонансном характере этих волн и об их связи с состоянием 2^- .

Для $M_{3\pi} > 1,6 \text{ ГэВ}/c^2$ заметный вклад дает состояние $2^-D(f_2\pi)$. Волна $2^-D(f_2\pi)$ имеет характерный пик в области масс $\sim 1,85 \text{ ГэВ}/c^2$ (рис.11), ее фаза относительно 1^+S приведена на рис.11. Фаза этой волны начинает

$2^-D(f_2\pi)$ объясняется за счет эффекта интерференции между волнами $2^-S(f_2\pi)$ и $2^-D(f_2\pi)$. Данные работы [66] находятся в согласии с выводами работы [30].

Состояние с бóльшей массой $\sim 2,15$ ГэВ/с² является возбужденным состоянием π_2 -резонанса, а состояние с меньшей массой $1,6 \div 1,7$ ГэВ/с² — четвертым каналом распада состояния 2^- .

Для определения резонансных параметров $\pi_2(1600)$ -состояния осуществлено описание данных с помощью паде-аппроксимантов. Первый шаг состоял в совместном описании интенсивностей и фаз каждой из волн 2^- -состояния и волн 1^+S и 0^-S в интервале масс $1,4 \div 2,2$ ГэВ/с², а также в интервале масс $0,8 \div 2,2$ ГэВ/с². Следующий шаг состоял в совместном описании трех каналов 2^-S -, 2^-P - и 2^-D ($\epsilon\pi$)-состояний 2^- .

Резонансные параметры π_2 -состояния:

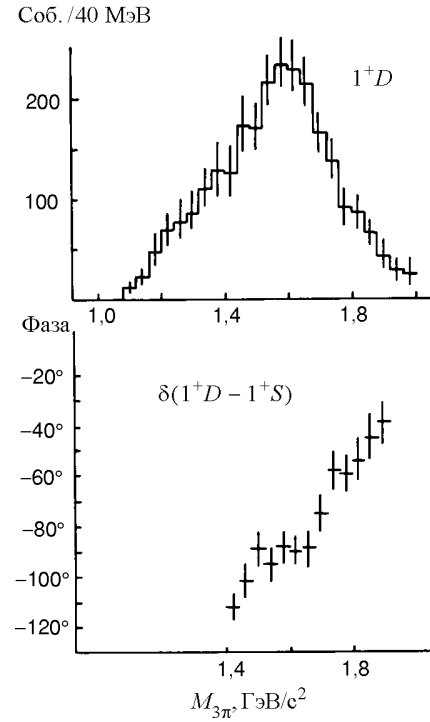
$$M_{2^-S} = (1624 \pm 21) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{2^-S} = (304 \pm 22) \text{ МэВ},$$

$$M_{2^-P} = (1622 \pm 35) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{2^-P} = (404 \pm 108) \text{ МэВ},$$

$$M_{2^-D(\epsilon\pi)} = (1693 \pm 28) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{2^-D} = (303 \pm 90) \text{ МэВ}.$$

Сечение образования состояния 2^- составляет $\sigma_{\pi \rightarrow \pi_2} = (37 \pm 5)$ мкб/нуклон, а соотношение каналов 60, 30 и 10% соответственно для 2^-S -, 2^-P - и 2^-D -состояний.

Состояние $J^{PLM}\eta = 1^+D0^+$. Амплитуда 1^+S для масс $> 1,4$ ГэВ/с² быстро падает и не имеет резонансного поведения в области больших масс. Волна $1^+D(\rho\pi)$ в области масс $< 1,4$ ГэВ/с² имеет малый сигнал ($\sim 3\%$ от сигнала 1^+S), а в области больших масс растет и имеет пик в районе $\sim 1,7$ ГэВ/с². Интенсивность 1^+D -волны и ее фаза относительно 1^+S -волны показаны на рис.12. Ее фаза изменяется на 90° в диапазоне масс $1,4 \div 1,9$ ГэВ/с². Фаза 1^+D -волны относительно 0^-S -волны показывает изменение в начале интервала масс на $40^\circ \div 50^\circ$, после этого выходит на константу, так как обе волны резонируют, а в области более $1,8$ ГэВ/с² наблюдается движение фазы 0^-S . Характер изменения относительной фазы указывает на резонансное поведение 1^+D -амплитуды. Интенсивность волны 1^+D достигает своего максимального вклада $\sim 11\%$ в области масс

Рис.12. Интенсивность и фаза 1^+D -волны

$1,5 \div 1,9 \text{ ГэВ/с}^2$. Описание паде-аппроксимантами этих данных позволяет извлечь параметры этого состояния:

$$M_{1^+D} = (1,67 \pm 0,07) \text{ ГэВ/с}^2,$$

$$\Gamma_{1^+D} = (0,3 \pm 0,1) \text{ ГэВ/с}^2.$$

Эти результаты находятся в удовлетворительном согласии с данными работ [30,26] на ядерных мишенях и водороде. С точки зрения кварковой модели это состояние может являться радиально-возбужденным состоянием $a_1(1260)$ -резонанса.

$$\text{Состояние } J^P L M \eta = 2^+ P 1^+.$$

Амплитуда волны $2^+ P 1(f_2\pi)$ в области больших масс показывает некоторую структуру с центром в области $1,75 \text{ ГэВ/с}^2$. Интенсивность ее мала, а значительное ($\sim 140^\circ$) движение ее фазы относительно 1^+S свидетельствует о резонансе. Этот результат только указывает на возможное существование второго состояния 2^+ , подобно a_2 -мезону в области малых масс.

Состояние $J^P L M \eta = 3^+ L 0^+$. Как показано на рис.13, вклад волн со спином 3^+ показывает бесструктурное поведение. Измерение их относительных фаз представляет проблему, так как эти волны имеют малую когерентность с другими волнами. Уменьшение вклада этих состояний по сравнению со спином 2, точно так же, как вклад волн со спином 2 существенно меньше состояний со спином 1, как раз показывает, что в процессах дифракции основной вклад дают относительно малые орбитальные моменты. Характер поведения вклада больших моментов не противоречит экспоненциальному ослаблению вклада больших орбитальных моментов.

Таким образом, парциально-волновой анализ оказался мощным методом для определения вклада состояний с различными состояниями спина и четности. Проведенный анализ позволил установить резонансную природу a_1 - и π_2 -резонансов и получить указания на существование радиально-воз-

бужденных состояний a'_1 и π'_2 . При этом установлен неизвестный ранее эффект усиления проявления a_1 -резонанса на фоне нерезонансного образования системы ($\rho\pi$) с увеличением атомной массы ядра мишени.

Наиболее важный результат анализа дифракционного образования 3π -системы состоит в наблюдении двух резонансных состояний с массами 1,24 и 1,77 ГэВ/с² с квантовыми числами пиона. Эти резонансы, являясь радиальными возбуждениями пиона, служат прямым доказательством его кварковой структуры. Существование радиальных возбуждений динамических составных структур с необходимостью приводит к расширению теории унитарной симметрии, где, помимо вращательных степеней свободы составной системы, необходимо учитывать и колебательные степени свободы [70].

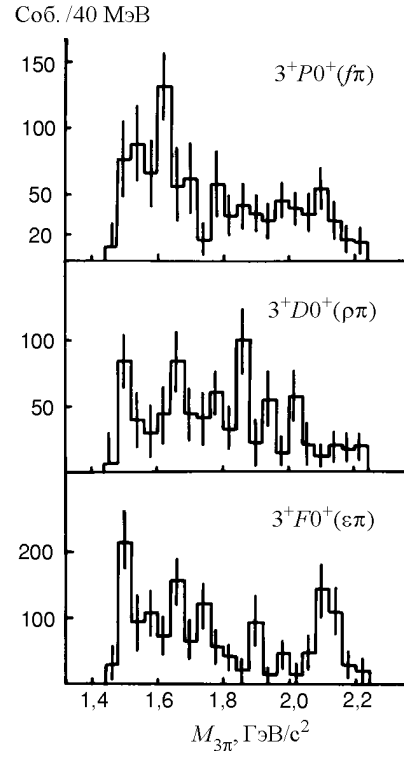


Рис.13. Интенсивность волн 3^+

Таблица 2. Бозонные резонансные состояния, наблюдаемые в процессе $\pi \rightarrow 3\pi$

Состояние	J^P	Масса, МэВ/с ²	Ширина, МэВ	Канал распада	Доля распада, %
$\pi(1300)$	0^-	1240	360	$(\pi^+\pi^-)_s + \pi^-$	100
$\pi(1770)$	0^-	1770	360	$(\pi^+\pi^-)_s + \pi^-$	100
a_1	1^+	1255	292	$\rho\pi$	98
a_1^1	1^+	1670	300	$\rho\pi$	100
$\pi_2(1600)$	2^-	1624	304	$f_2\pi$	60
		1622	404	$\rho\pi$	30
		1693	330	$\epsilon\pi$	10
π_2^1	2^-	2150	300	$f_2\pi$	
A_2	2^+	1320	100	$\rho\pi$	
A_2^1	2^+	1750		$f_2\pi$	

Другой возможной интерпретацией радиальных состояний π -мезона является когерентное образование этих резонансов при туннелировании π -мезона высокой энергии в ядерной материи. Эффект резонансного образования при малой диссипации в процессе туннелирования мезона может объяснить когерентное, но не дифракционное рождение $\pi(1300)$ и $\pi(1700)$, по сравнению с когерентным и дифракционным рождением $a_1(1260)$ и $\pi_2(1600)$, а также независимость фазы $\pi(1300)$ и постоянство его выхода от атомного номера ядра. Фаза же резонансов $a_1(1260)$ и $\pi_2(1600)$ и их выход сильно зависят от атомного номера ядра. Для разделения этих альтернатив необходимы детальные экспериментальные исследования.

5. НЕРЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ И ВОПРОСЫ МЕЗОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Трудность наблюдения резонансов в процессах дифракции мезонов заключается в наличии большого фона динамического происхождения, описываемого моделью Дрелла — Хиита — Декка [17,18], чаще называемой моделью Декка. В оригинальной формулировке модели предполагается, что в системе центра масс $\rho\pi$ -система рождается вперед из-за дифракционного характера πN -рассеяния, и ρ -мезон также испускается в переднем направлении из-за пионного обмена. Нерезонансное рождение $\rho\pi$ -системы вблизи $1,1 \text{ ГэВ}/c^2$ во многих экспериментах принималось за рождение $a_1(1260)$ -резонанса. Вклад нерезонансного процесса в сечение может достигнуть 70—80%. С целью описания экспериментальных данных по этой модели необходимо учесть эффекты ядерного перерасеяния и перерасеяния в конечном состоянии, а также прямое рождение резонансных состояний. Теоретические расчеты этих процессов были сделаны в работах [67—69].

Полюсная диаграмма Декка и ее амплитуда есть произведение трех факторов: амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния, реджизованного пионного пропагатора и π -ядерной амплитуды. Для $\pi\pi$ -амплитуды использовались результаты фазового анализа, и амплитуда вычислялась для энергии и углов, определенных по кинематике на массовой поверхности. Пионный пропагатор содержал также реджевскую фазу $\exp\left(-i \frac{\pi}{2} \alpha(t)\right)$. Мезон-ядерная амплитуда была глауберовского типа.

Расчет диаграмм осуществлялся с применением метода Монте-Карло. Результатом расчета являлся вес данного события, пропорциональный квадрату матричного элемента. Сумма всех весов определяла сечение процесса. При этом усредненная амплитуда по интервалу масс и угловым переменным

распада описывала дифференциальное сечение процесса на ядре. После этого результаты расчета событий представляли собой вход для программы парциально-волнового анализа, и определялось волновое содержание и изменение относительных фаз. Результаты волнового анализа по модели сравнивались с данными эксперимента [1—3]. Конкретно расчеты выполнялись для ядра меди в области масс $0,8 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ и области передач $0,004 \div 0,006 \text{ (ГэВ}/c)^2$. Первым шагом в этих расчетах являлся расчет диаграмм с полюсным графиком (а) и с учетом ядерных перерасеяний (б, в).

Амплитуда процесса для графиков (а) + (б) + (в) имеет вид

$$A = T + C_{\rho\pi}(T_1 + T_2),$$

где T — амплитуда полюсного графика, T_1, T_2 — амплитуды графиков перерасеяния. Параметр $C_{\rho\pi}$ эффективно учитывает ρA -перерасеяние. Этот параметр определялся по тому, как описывалось дифференциальное сечение на ядре по положению минимума и соотношению сечений в первых двух максимумах. Удовлетворительное согласие было найдено для $C_{\rho\pi} = 0,8$ [68].

Амплитуда T может быть представлена в виде

$$T = A_{\pi A}(S_{\pi A}, q^2) A_{\pi\pi}(S_{\pi\pi}, t') \frac{F(t_\pi, S_{3\pi})}{t_\pi - \mu^2},$$

где $A_{\pi A}$ и $A_{\pi\pi}$ — амплитуды πA - и $\pi\pi$ -рассеяния, F — формфактор, учитывающий поправки к амплитудам для кинематики вне массовой поверхности:

$$F = \exp \{ [R^2 + \alpha'_\pi \ln S_{3\pi}/S_0 - i\pi\alpha'_\pi/2] (t_\pi - \mu^2) \},$$

где $S_0 = 1 \text{ ГэВ}^2$, $\alpha'_\pi = 0,7 \text{ ГэВ}^{-2}$ — наклон траектории Редже, R — параметр модели.

Значение R^2 , найденное из условия наилучшего описания данных, оказалось равным $0,8 \text{ ГэВ}^{-2}$. Амплитуда T_1 имеет вид

$$T_1 = \frac{i}{2} \int A_{\pi A}(S, q_1^2) T(S_{\pi\pi}, t', t_\pi, t \dots) \frac{dq_1^2 d\varphi}{(4\pi)^2}$$

и

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos \varphi.$$

Расчеты показали, что амплитуды T_1 и T_2 близки друг другу, поэтому $A = T + 2CT_1$. Ввиду сложности полной амплитуды, расчеты делались численно.

Соб. /40 МэВ

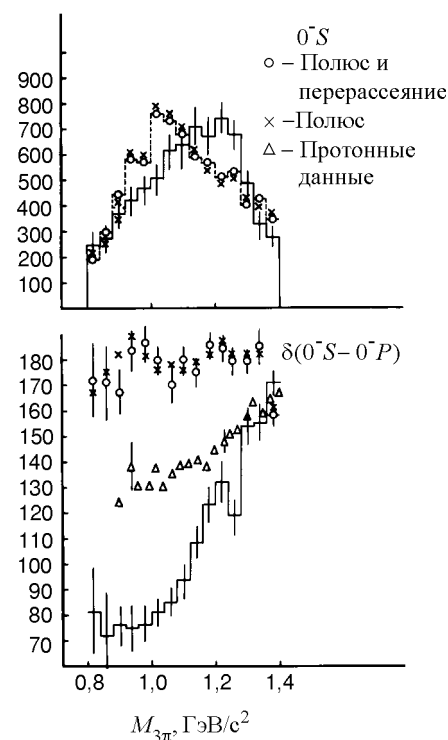


Рис.14. Сравнение с расчетом по модели интенсивности и фазы волны 0^-S

При этом вычисление интегралов для T_1 с достаточной точностью, вследствие осциллирующей подынтегральной функции, требовало значительного машинного времени.

Модель правильно воспроизводит распределения по массе 3π -системы и положение максимума в районе $(1,0 + 1,1)$ ГэВ (так называемый «декковский» максимум, всегда присутствующий в моделях типа ДХД), но, естественно, не дает хорошего описания формы экспериментального спектра в области масс $1,2 \div 1,4$ ГэВ, где проявляются вклады трехпионных резонансов (a_1 - и ρ' -мезоны) [73].

Парциально-волновой анализ результатов расчета по амплитуде A и амплитуде T , учитывающей только полюсный член, приведен на рис.14,15 для основных волн 0^- и 1^+ и их относительных фаз. Нормировка интенсивностей волн сделана по полному числу событий. Как амплитуда A , так и амплитуда T удовлетворительно передают форму интенсивностей волн 0^-S и 1^+S [73].

Сравнение относительных фаз показывает, что фаза $\delta(1^+S - 0^-P)$ во всей области масс $0,8 \div 1,4$ ГэВ/ c^2 практически постоянна и равна 40° и не воспроизводит данные опыта. Фаза состояний $\delta(0^-S - 0^-P)$ также постоянна и равна 180° , в то время как на опыте наблюдается ее изменение от $+70$ до $+170^\circ$. Разность фаз $\delta(1^+S - 0^-S)$ для опыта и модели имеет разные знаки и составляет 50° . Сравнение результатов анализа для полной амплитуды и полюсного члена показывает, что вклад графиков с ядерным перерасcеянием мал и его можно не учитывать в дальнейшем, по крайней мере, для области малых передач. Для того чтобы понять разницу фаз между моделью и опытом в области малых масс $0,8 \div 1$ ГэВ/ c^2 , где вклад модели

доминирует, из пионного пропагатора была выключена реджевская фаза без изменения квадрата амплитуды процесса. Это может привести к другому поведению относительных фаз. Результаты анализа для полюсного члена без реджевской фазы показали, что выключение реджевской фазы не приводит к изменению относительных фаз. Следует заметить, что, безотносительно к реджевской фазе, такой множитель в амплитуде может приводить к неоднозначности анализа. Выше мы обсуждали этот вопрос и показали, что из-за бозе-симметризации дипионной амплитуды в исследуемом процессе $\pi \rightarrow 3\pi$ такая неоднозначность не имеет места. Этот результат непосредственно отражает это обстоятельство.

Результат парциально-волнового анализа данных по теоретической модели с полюсным графиком, как мы видели, неплохо воспроизводит поведение интенсивностей волн. Представляет интерес сделать анализ в комплексной энергетической плоскости этих данных. Для этих целей применен метод паде-аппроксимантов для поиска полюсов и нулей парциальных амплитуд. В этом анализе были использованы интенсивности волн 1^+S , 0^-P и 0^-S и их относительные фазы, полученные в анализе по модели Декка. Энергетический диапазон данных $0,8 \div 1,4$ ГэВ/с². При этом для каждой парциальной волны анализ сделан для разных типов аппроксимантов. В результате анализа было найдено, что для каждого типа паде-аппроксимантов существуют два решения. Основным свойством этих решений является

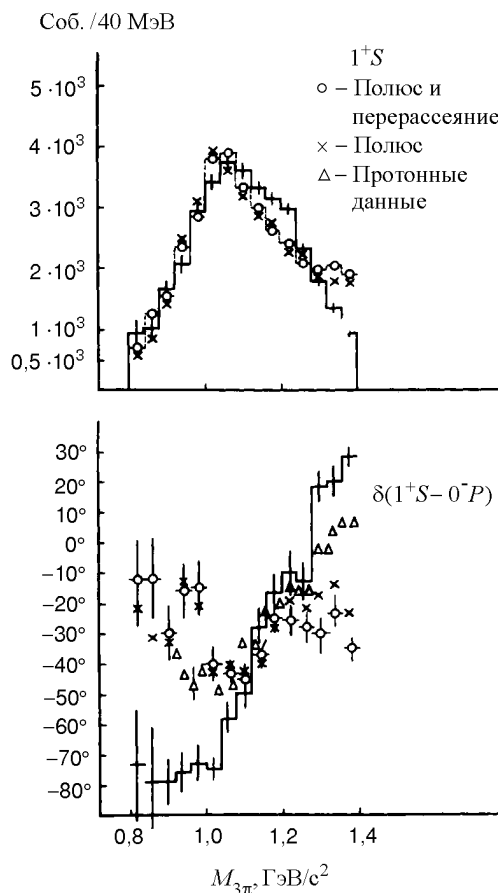


Рис.15. Сравнение с расчетом по модели интенсивности и фазы 1^+S

наличие стабильного полюса в районе ~ 1 ГэВ для каждой парциальной волны. Это и является причиной существования двух решений. Одно решение (I) дает кластер эффективных полюсов в районе энергий $(1 - i 0,18)$ ГэВ и другое (II) — $(1 + i 0,18)$ ГэВ. Меньшее значение отношения χ^2/NDF для всех типов полиномов для решения II, по-видимому, исключает резонансную интерпретацию полюсов в модели Декка. С увеличением степени полиномов полюсы группируются в районе $M_{3\pi} \cong 1 + i 0,18$ и не показывают случайного распределения их в плоскости. Таким образом, проведенный анализ позволяет эффективно описать данные по модели Декка с полюсом на верхнем листе. Этим можно объяснить эксперименты, в которых при ограниченной статистике наблюдалось резонансноподобное поведение массовых спектров в районе ~ 1 ГэВ/с².

Полная амплитуда образования a_1 -резонанса имеет вид

$$A1 = |T + R2|^2 + 2C_{a_1} \operatorname{Re} [(T + R2)^* D2] + C_{a_1}^2 |D2|^2,$$

где T — полюсный член, $R2$ — амплитуда перерасеяния через a_1 -резонанс, $D2$ — амплитуда прямого рождения a_1 -резонанса, C_{a_1} — константа, определяющая вклад прямого рождения. Эта константа была оценена по массовому спектру в области $M_{3\pi} = 0,8 \div 1,4$ ГэВ/с², и ее величина составила $C_{a_1} = 15$, что соответствует $\sim 10\%$ вклада рождения a_1 -резонанса. Парциально-волновой анализ был сделан для этой амплитуды с $C_{a_1} = 15$ и $C_{a_1} = 25$. Данные по поведению фаз лучше описываются для $C_{a_1} = 25$ (28% вклада резонанса). В области масс $< 1,1$ ГэВ/с² результаты повторяют основные черты анализа только с одним полюсным членом, в области $> 1,1$ ГэВ/с², где вклад резонанса существен, наблюдается движение резонансных фаз в соответствии с экспериментальными данными. Вклад π -резонанса небольшой, и поэтому полная амплитуда незначительно отличается от a_1 -амплитуды. На основании сравнения результатов расчетов по модели с экспериментальными данными можно сделать заключение.

1. Вклад ядерных перерасеяний в области дифракции налетающей частицы для малых передач импульса несуществен.

2. Построенная модель с учетом перерасеяния в конечном состоянии удовлетворительно описывает ход фаз на водородной мишени и не описывает данные на ядре для масс $< 1,1$ ГэВ/с². По-видимому, в этой области масс на ядерной мишени включается дополнительный механизм.

3. Для описания экспериментальных данных вклад резонансного рождения должен составлять $\sim 30\%$. Сравнение опыта с моделью исключает деструктивную интерференцию резонансного рождения с полюсной амплитудой нерезонансного рождения. В образование a_1 -резонанса дает вклад как прямое образование, так и перерасcеяние в конечном состоянии.

Мезонная спектроскопия. Результаты исследований рождения бозонных систем на ядрах при 40 ГэВ/с [64—66] и 25 ГэВ/с [61] свидетельствуют о существовании резонансов $a_1(1^+)$ и $\pi_2(2^-)$, дифракционно рожденных на ядрах, и указывают на возможное существование радиально-возбужденных состояний $a'_1(1^+, 1,65)$ и $\pi'_2(2^-)$, а также свидетельствуют о существовании радиально-возбужденных состояний пиона $\pi(0^-, 1,24)$ и $\pi(0^-, 1,77)$. Недавние исследования при более высоких энергиях в фермиевской лаборатории [74] и на установке VES в Протвино [75] надежно подтвердили приведенные данные о радиальных возбуждениях пиона.

Эти данные несовместимы с положением $a_1(1260)$ -резонанса в области 1 ГэВ/с² и находятся в полном согласии с данными опыта [30]. В эксперименте при 8,45 ГэВ [32] в процессе зарядовой перезарядки $\pi^- n \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 n$ положение $a_1(1260)$ -резонанса получено при 1,15 ГэВ и ширине 300 МэВ. Анализ [36] вклада фона дает положение полюса в 1^+S -волне в диапазоне масс 1,23 ÷ 1,28 ГэВ/с². $a_1(1260)$ -мезон наблюдается в распадах τ -лептона $\tau \rightarrow a_1 + \nu_\tau$.

Масса $a_1(1260)$ в этом процессе полностью совпадает с данными, полученными в адронных процессах [76].

Принимая во внимание всю совокупность данных, пока, по-видимому, экспериментально нельзя исключить возможность того, что наблюдаются две разные частицы 1^+ , при этом наблюдаемые состояния могут быть смесью $(q\bar{q})$ - и $(qq\bar{q}\bar{q})$ -состояний [77].

Давняя проблема в мезонной спектроскопии, таким образом, разрешена, и нонет с $C = +1$ для P -волны в $(q\bar{q})$ -системе завершен. Изоскалярными членами являются $f_1(1,285)$ и $f_1(1420)$, представляющие собой смесь октетного и синглетного $I = 0$ состояний. Используя полученное значение массы $a_1(1260)$ -мезона и формулу Гелл-Манна — Юкубо, можно определить угол смешивания синглетов, который равен $\approx 37^\circ$ и близок к идеальному смешиванию. $\pi_2(1680)$ -мезон с квантовыми числами $I^{GJ^{PC}} = 1^-2^-+$ наблюдается в каналах $\epsilon\pi$, $\rho\pi$ и $f\pi$. В системе $(q\bar{q})$ это состояние представляет синглетную D -волну 1D_2 , состояние которой отщеплено от ρ_3 -мезона спин-спиновым взаимодействием.

Массы $a_1(1260)$ - и $\pi_2(1600)$ -резонансов свидетельствуют о том, что эффекты спин-спинового и спин-орбитального взаимодействий в P - и D -волнах $(q\bar{q})$ -системы невелики, они того же порядка, что и радиальные возбуждения в этих системах. Для S -состояний $q\bar{q}$ -системы спин-спиновое расщепление велико. С этой точки зрения интерпретация состояний $0^+(a_0(980), f_0(975), f_0(1300))$ как триплет P -волновой конфигурации представляет очевидную трудность.

Наблюдаемые состояния $\pi(1300)$ и $\pi(1770)$ имеют все квантовые числа пиона $I^G J^{PC} = 1^- 0^{-+}$ и сильную моду распада в $(\epsilon\pi)$ -систему.

С точки зрения кварковой модели эти состояния характеризуются различным числом радиальных волновых функций $q\bar{q}$ -систем.

Радиальные возбуждения состояний $(q\bar{q})$ хорошо установлены для тяжелых кварков (c и b). Для легких кварков экспериментальное обнаружение радиальных возбуждений и трудность их наблюдения обусловлены малой интенсивностью образования, большой шириной состояний и вкладом фоновых процессов. Наиболее надежный кандидат на радиальное возбуждение ρ -мезона 1^- -изовекторный резонанс $\rho(1600)$.

В работе [78] на основе потенциального квантово-хромодинамического потенциала в нерелятивистском приближении рассчитан широкий спектр масс резонансных состояний и радиальных возбуждений. Первое радиальное возбуждение пиона равно 1,2 ГэВ, ширина 300 МэВ, что находится в согласии с экспериментальными данными. В работе [79] предсказание масс радиальных состояний в $(q\bar{q})$ -системе сделано на основе решения задачи на собственные значения линейного массового оператора с учетом спин-спинового взаимодействия. Положение первого радиального уровня предсказывается в интервале 1100 ÷ 1200 МэВ и второго 1300 ÷ 1500 МэВ. Что касается ширин этих состояний, то их предсказание сильно зависит от модельных представлений.

Из сравнения с экспериментом видно, что предсказание первого радиального уровня находится в согласии с опытом, а что касается второго уровня, то различие достаточно большое. Наличие узлов в волновой функции составной системы может приводить к малости перекрытия волновых функций начального и конечного состояний и к подавлению некоторых распадов радиальных состояний. Выводы этой работы о подавлении $\rho\pi$ -распадов $\pi(1300)$ -состояния и отсутствие этих распадов в $\pi(1770)$ -системе находятся в согласии с опытом. В работе [80] получены предсказания массы $\pi(1300)$ -состояния на основе симметричных соотношений и показана возможность размещения $\pi(1300)$, $\eta(960)$ и $\eta(1400)$ в одном радиально-возбужденном псевдоскалярном нонете. При этом по аналогии с основным нонетом, характеризующимся сильным смешиванием $\eta - \eta^1$, предложена естест-

венная модель смешивания $\eta_R - \eta_R^1$. Полученные массовые формулы позволили предсказать значение массы $\pi(1300)$ -мезона 1,23 ГэВ, хорошо согласующееся с данными эксперимента.

Для спектроскопии важно знать, является ли радиальное состояние π -мезона $\pi(1300)$ первым, а $\pi(1770)$ — вторым. В работе [81] предсказывается первое радиальное состояние с массой < 1 ГэВ/ c^2 и приводятся экспериментальные данные о возможности наблюдения узкого состояния $J^P = 0^-$ с массой ~ 740 МэВ и $\Gamma \sim 40$ МэВ.

В заключение приведем график Чу—Фраучи [82], где показаны известные мезонные траектории и помечены установленные состояния (рис.16). Отметим, что $\pi(1300)$ и $\pi(1770)$ начинают новые траектории, и кандидатами для этих траекторий являются состояния a_1' и π_2' . Из-за G -четности состояний должно иметь место удвоение числа возможных состояний.

Важным является установление в дальнейшем свойств редже-траекторий, их линейности. Свойства радиальных состояний весьма чувствительны к соотношению между короткодействующей сингулярной частью кваркового взаимодействия и взаимодействием, обеспечивающим конфайнмент, поэтому их изучение дает информацию о динамике кварков. Спектроскопия

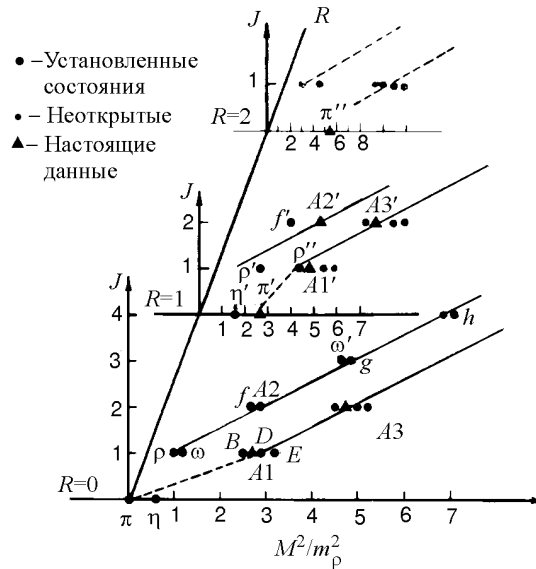


Рис.16. Трехмерный график резонансных состояний Чу—Фраучи

радиальных уровней может пролить свет на зависимость от расстояния потенциала сил, удерживающих кварки в адроне.

Таким образом, проведенными работами по изучению бозонных систем в процессах дифракции адронов и наблюдению радиальных состояний кварк-антикварковой системы положено начало исследованиям в новом направлении — спектроскопии радиальных состояний легких кварков, которое позволит создать экспериментальную основу для построения будущей хромодинамической теории квазисвязанных систем из легких кварков. Особенностью спектроскопии легких кварков является то, что это один из основных источников сведений о непертурбативных эффектах в квантовой хромодинамике. Экспериментальное изучение и теоретический анализ этих закономерностей является одной из важнейших задач физики высоких энергий.

6. КОГЕРЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Обсудим кратко роль когерентных процессов при высоких энергиях. Высокие энергии предоставляют ряд интересных аспектов в физике когерентных процессов элементарных частиц на ядрах. В первую очередь, рождение тяжелых резонансных структур происходит в соответствии с фундаментальным условием когерентности:

$$\frac{(M^2 \text{ резонанса} - M^2 \text{ падающей част.})}{2P \text{ падающей част.}} R \sim 1.$$

Это условие когерентности отражает основное свойство: ядро действительно остается в своем основном состоянии. При высоких энергиях амплитуда взаимодействия элементарных частиц преимущественно мнимая, а реальная часть амплитуды хотя и мала, но дает рассеяние так же, как мнимая часть дает поглощение.

Для рождения известных резонансов ($\sim 1 \text{ ГэВ}/c^2$) продольная передача становится очень малой. Это может означать, что реальная часть амплитуды должна быть все-таки принята во внимание, так как, хотя $q_{\parallel}$ очень мало, но реальная часть изменяет величину передачи на несколько МэВ.

При высоких энергиях возможно когерентное образование адронных резонансов лептонами, в которых виртуальный адрон когерентно рассеивается на массовой оболочке ядра. В случае электророждения ρ -мезона в реакции $e + A \rightarrow e + \rho + A$ продольная передача

$$q_{\parallel} = \frac{m_{\rho}^2 + |q^2|}{2E},$$

где q — 4-импульс фотона, и условие когерентности, как и ранее, будет $q_{\parallel} R \leq 1$.

Рождение ρ -мезона виртуальным фотоном в когерентном процессе электроорождения примечательно еще тем, что рожденная система имеет квантовые числа фотона. Это обстоятельство является другим примечательным свойством когерентных процессов. В этом, по-видимому, состоит физическая сущность модели векторной доминантности в фотопроцессах. Фотообразование нестабильных частиц в кулоновском поле ядра (эффект Примакова) является когерентным процессом, идущим при малых продольных передачах. Практически регистрация этого процесса зависит от возможности отделения этого пика от фона из-за отсутствия интерференции с адронной когерентной амплитудой сильного взаимодействия.

В заключение рассмотрим нейтринный процесс в реакциях на ядрах за счет нейтрального тока:

$$\nu_{e, \mu} + A \rightarrow (e, \mu) + \begin{pmatrix} \pi \\ \rho \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + A.$$

В этом когерентном процессе на ядре рожденная система в нижнем спиновом состоянии будет иметь квантовые числа нейтрино. Если возможно связанное состояние рожденной системы, то оно будет подобно нейтрино, а наблюдение радиальных возбуждений в этой системе непосредственно свидетельствовало бы о составной природе нейтрино. Таким образом, исследование когерентных процессов во взаимодействиях высокоэнергетичных лептонов с ядрами предоставляет уникальную возможность почувствовать на опыте составную структуру лептонов.

Я глубоко признателен моей жене Людмиле за постоянную помощь и поддержку в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bellini G., Di Corato M., Palombo F. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.1687.
2. Беллини Д., Василевский И., Веньи Г., и др. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.511.
3. Tyapkin A., Vasilevsky I., Vishniakov V. et al. — Nucl. Phys., 1992, v.B25, p.32.
4. Померанчук И.Я. — ЖЭТФ, 1958, т.7, с.499.
5. Фейнберг Е.Л., Померанчук И.Я. — Nuovo Cim., 1965, v.3, p.652.
6. Goldhaber A.S. et al. — Phys. Rev. Lett., 1960, v.22, p.802.
7. Good M.L., Walker W.D. — Phys. Rev., 1960, v.120, p.1857.
8. Bellini G. et al. — Nuovo Cim., 1963, v.29, p.896.

9. Грибов В.Н. — Ядерная физика, 1967, т.5, с.197.
10. Baldin A.M. — Part. and Nucl., 1977, v.8, p.429.
11. Glauber R. — Lectures in Theoretical Physics. Interscience Publ., New York, 1959.
12. Ситенко А.Г. — Укр. физ. журнал, 1959, т.4, с.152.
13. Kolbig K.S., Margolis B. — Nucl. Phys., 1968, v.B6, p.85.
14. Albrow M.G. et al. — Nucl. Phys., 1973, v.B51, p.388.
15. Gell-Mann M., Oakes R.J. — Phys. Rev., 1968, v.175, p.2195.
16. Пилькун Н. — Физика релятивистских частиц. М.: Мир, 1983.
17. Drell S.D., Hiida K. — Phys. Rev. Lett., 1961, v.7, p.199.
18. Deck R. — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.1969.
19. Зотов Н.П., Царев В.А. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.650.
20. Antipov Yu. et al. — Nucl. Phys., 1973, v.B63, p.153.
21. Ascoli G. et al. — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.1963.
22. Ascoli G. et al. — Phys. Rev., 1975, v.D12, p.43.
23. Ascoli G. et al. — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.669.
24. Bowler M.G. et al. — Nucl. Phys., 1975, v.B97, p.227.
25. Basdevant J.L., Berger E.L. — Phys. Rev., 1977, v.D16, p.657.
26. Beusch W. et al. — Nucl. Phys., 1978, v.B134, p.436.
27. Gavilet P. et al. — Phys. Lett., 1977, v.B69, p.119.
28. Mazzucato M. et al. — Nucl. Phys., 1979, v.B156, p.546.
29. Dankowych J.A. et al. — Proc. of 20th Int. Conf. HEP-1980, 1980.
30. Daum C. et al. — Phys. Lett., 1980, v.B89, p.281.
31. Анджек Р. и др. — ОИЯИ, 13-3588, Дубна, 1967.
32. Protopescu S.D. et al. — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.1279.
33. Gottfried K., Jackson J.D. — Nuovo Cim., 1964, v.33, p.309.
34. Goldberger M.L., Treiman S.B. — Phys. Rev., 1958, v.111, p.355.
35. Werle J. — Relativistic Theory of Reactions. North-Holland, Amsterdam, 1966.
36. Cashmore R.J., Hey A.J.G. — Phys. Rev., 1972, v.D6, p.1303.
37. Brockway P.V. — Ph.D. Thesis. University of Illinois, 1970.
38. Ascoli G. et al. — Phys. Rev. Lett., 1970, v.25, p.962.
39. Hansen J.D. et al. — Nucl. Phys., 1974, v.B81, p.403.
40. Buchner K. et al. — Nucl. Phys., 1971, v.B74, p.293.
41. Watson K.M. — Phys. Rev., 1952, v.38, p.1163.
42. Никитин Ф. — ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.805.
43. Eden R.J. et al. — The Analytic S-Matrix. Cambridge Univ. Press, England, 1966.
44. Orear J. — Notes on Statistics for Physicists. UCRL-8417, 1958.
45. Cason N.M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.1316.
46. Dalitz R.H., Moorhouse R.G. — Proc. Royal Soc. London F318, 1970, p.279.
47. Particle Data Group. — Phys. Lett., 1982, v.B111.
48. Мухин С.В., Царев В.А. — ЭЧАЯ, 1977, т.8, с.989.
49. Aitchison I.J.R., Bowler M.G. — J. Phys., 1977, v.63, p.150.
50. Bowler M.G., Game M.A.V. — Nucl. Phys., 1975, v.B97, p.227.
51. Thompson G. et al. — Nucl. Phys., 1974, v.B69, p.381.
52. Otter G. — Nucl. Phys., 1974, v.B80, p.1.
53. Haber H.E. et al. — Nucl. Phys., 1977, v.D129, p.429.
54. Roberts Th. et al. — Phys. Rev., 1978, v.D18, p.59.

55. Веребрюсов В.С., Пономарев Л.А. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.33, с.60.
56. Замолодчиков А.Б. и др. — ЖЭТФ, 1979, т.77, с.451.
57. Faldt G., Osland P. — Nucl. Phys., 1977, v.B126, p.221.
58. Osland P., Treleani D. — Nucl. Phys., 1976, v.B107, p.493.
59. Займидорога О., Никитиу Ф. — ОИЯИ, Е1-82-120, Дубна, 1982.
60. Беллини Д. и др. — Труды 3-его симпозиума по физ. выс. энергий. Казимирж, 1980, с.111.
61. Ананьева М. и др. — Труды 21-й Межд. конф. по физике выс. энергий, Париж, 1982.
62. Chew D.M. — Phys. Rev., 1978, v.D18, p.2368.
63. Gersten A. — Nucl. Phys., 1969, v.B12, p.517.
64. Bellini G. et al. — Proc. of 4th Symposium on particle physics. Kasimir, 1981, p.47.
65. Ananieva M. et al. — Comm. Cern, Geneva, EP-81-110, EP-81-98, 1981.
66. Беллини Д. и др. — Ядерная физика, 1985, т.41, с.1213.
67. Пономарев Л. — Ядерная физика, 1978, т.27, с.1342.
68. Камалов А., Пономарев Л. — ИТЭФ-120, 1976.
69. Займидорога О., Тарасов В. — Ядерная физика, 1988, т.48, с.224.
70. Bellini G. et al. — Proc. 12th Intern. Conf. on Multiparticle Dynamics. France, Notre-Dame, 1982, p.110.
71. Graham R.H. — Phys. Rev., 1979, v.D19, p.284.
72. Montanet L. — Rapp. talk, Proc. 21 Intern. Conf. on High Energy Phys., Paris, 1982.
73. Беллини Д. и др. — ОИЯИ, P1-83-606, Дубна, 1983.
74. Zielinski M. et al. — Phys. Rev., 1984, v.D30, p.1855.
75. Bityukov S. et al. — Proc. of Int. Conf. on Hadron Spect. 1991, p.51.
76. Besson D. — Rapp. talk on HEP-97, Jerusalem, 1997.
77. Jaffe R.L., Low F.E. — Phys. Rev., 1979, v.D19, p.2105.
78. Stanley D.P., Robinson D. — Phys. Rev., 1980, v.21, p.3180.
79. Герасимов С.Б., Говорков А.Б. — ОИЯИ, P2-81-538, Дубна, 1981.
80. Филиппов А.Т. — Письма в ЖЭТФ, 1982, т.36, с.96.
81. Ivanshin Yu. et al. — Dubna, JINR Rapid Comm. P2-83-727, 1983; JINR Comm. E1-93-155, 1993.
82. Коккедэ Я. — Теория кварков. М.: Мир, 1971.

О ЗНАКЕ И ВЕЛИЧИНЕ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ВНУТРЕННЕГО ЗАРЯДОВОГО РАДИУСА НЕЙТРОНА

Ю.А.Александров

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре обсуждается связь между средним квадратом внутреннего зарядового радиуса нейтрона $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N$ и измеряемой в нейтронной физике низких энергий длиной рассеяния нейтрона на электроны a_{ne} . Обращается внимание на справедливость формулы Фолди, дающей такую связь. Показано, что формулу Фолди можно получить двумя разными способами. Приводится таблица различных экспериментальных данных, полученных в 1947—1997 гг., позволяющих определить величину a_{ne} . Имеющиеся экспериментальные данные делятся на две группы: $\langle a_{ne} \rangle = -1,30(3) \cdot 10^{-3}$ фм ($\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N > 0$), и (включая ряд экспериментальных работ ЛНФ) $\langle a_{ne} \rangle = -1,58(3) \cdot 10^{-3}$ фм ($\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N < 0$). Обсуждаются источники возможных систематических погрешностей в проведенных экспериментах. В частности, рассматривается вопрос о влиянии на измеряемую величину a_{ne} резонансного ядерного рассеяния. Проводится сравнение экспериментальных результатов по измерению a_{ne} в нейтронной физике низких энергий с теоретическими. Показано, что если данные, ведущие к $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N > 0$, справедливы, то современные теоретические представления о структуре нейтрона (включая наиболее адекватную модель СВМ) следует существенным образом изменить.

The connection of the neutron mean square intrinsic charge radius $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N$ and the neutron-electron scattering length a_{ne} obtained by low energy neutron physics is discussed. One pay attention to the validity of the Foldy's formula setting such connection. Two different methods of obtaining the Foldy's formula is also discussed. The experimental data table of the values a_{ne} for period of time 1947—1997 is presented. The experiments can be divided into two groups: $\langle a_{ne} \rangle = -1,30(3) \cdot 10^{-3}$ fm ($\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N > 0$) and (including Dubna's data) $\langle a_{ne} \rangle = -1,58(3) \cdot 10^{-3}$ fm ($\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N < 0$). The sources of possible systematic uncertainties of carried out experiments are discussed. In particular it is shown that for an even-even nucleus the influence of the neutron resonance scattering to a_{ne} is very small. The comparison of the experimental results of the a_{ne} with modern theory is made. It is shown that if the experimental value of $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N > 0$ is really true the modern theoretical ideas of the neutron structure has to be changed seriously.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования внутреннего (intrinsic) зарядового радиуса нейтрона $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N^{1/2}$, связанного с длиной рассеяния a_{ne} нейтрона на электроны (ne -взаимодействия), в области низких энергий нейтронов ведутся в Лаборатории нейтронной физики им. И.М.Франка ОИЯИ с середины 60-х годов. Изучение этого явления — единственный в настоящее время надежный способ определения величины и знака внутреннего радиуса распределения электрического заряда в нейтроне — фундаментальной характеристики, служащей важным и надежным тестом современных теоретических представлений о нейтроне. Достигнутая в настоящее время точность измерений в нейтронной физике (в противоположность электронному рассеянию в физике высоких энергий) позволяет сделать выводы о величине вклада в a_{ne} данного радиуса. Надеюсь, что настоящий обзор поможет устранению недоразумений, возникающих иногда в дискуссиях, посвященных интерпретации результатов измерений.

В первом разделе показано, что релятивистское дрожание частиц, подчиняющихся уравнению Дирака, является неотъемлемым свойством теории Дирака. Рассматривается предложенный Фолди подход к описанию электромагнитной структуры нейтрона и полученная им формула, связывающая измеряемую в опыте длину рассеяния нейтрона на электроны a_{ne} и квадрат внутреннего зарядового радиуса нейтрона $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N$.

Во втором разделе рассматривается рассеяние частиц, имеющих внутреннюю структуру, вводится понятие формфакторов и говорится об их основных свойствах, включая наглядную интерпретацию в системе координат Брейта, совпадающей при низких энергиях с системой координат покоящегося нуклона. Рассматривается также вопрос о знаке $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N$.

В третьем разделе показано, что формулу Фолди можно получить также, пользуясь понятием формфакторов и саксовским определением зарядового формфактора нуклона. Сделан вывод о том, что формула Фолди справедлива и ею можно пользоваться при сравнении эксперимента с теорией.

В четвертом разделе описаны экспериментальные методы изучения ne -взаимодействия. Рассматривается их история, начиная с первой, теперь уже далеких 40-х гг. работы Ферми и Маршалл. Обращается внимание на то, что уже в конце 60-х гг. из нейтронных экспериментов было известно два значения длины рассеяния нейтрона на электроны. Одно из них при использовании формулы Фолди дает положительный знак $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N$, другое — отрицательный. Отмечается, что значение $\langle r_{E, \text{in}}^2 \rangle_N > 0$ находилось в

противоречии с существующей и популярной в то время теоретической статической моделью нейтрона. Далее рассматривается предложенный в ЛНФ ОИЯИ метод измерения величины a_{ne} с помощью дифракции нейтронов на монокристалле вольфрама-186. Измеряемый ne -эффект возрастает при использовании предложенного метода примерно в 15 раз, и в результате проведенных в ЛНФ экспериментов получено значение $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N < 0$. Описываются трансмиссионные эксперименты, проведенные главным образом с образцом свинца-208 группой Кестера (Гархинг, Германия) совместно с ЛНФ, австрийско-американской группой (Вена — Ок Ридж), физиками ЛНФ в Дубне. Результаты первых двух групп привели к $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N > 0$, дубненские эксперименты говорят о том, что значение $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N < 0$ все-таки более предпочтительно. Приводится таблица результатов измерений a_{ne} в 1947—1997 годы.

В пятом разделе рассматриваются источники возможных систематических погрешностей в обсуждаемых выше экспериментах. Одним из них может быть влияние рассеяния нейтронов на малые углы в трансмиссионных экспериментах при больших расстояниях между образцом и детектором.

В шестом разделе исследуется влияние межрезонансной интерференции на трансмиссионные эксперименты. Обращается внимание на то, что влиянием резонансного рассеяния на определяемую величину a_{ne} можно пренебречь при использовании в экспериментах образца ^{208}Pb или других четно-четных ядер. Показано, что в этом случае результаты группы Кестера должны приводить к значению $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N < 0$.

Наконец, в седьмом разделе проведено сравнение результатов экспериментов с теоретическими предсказаниями и показано, что современные теоретические представления о нуклоне противоречат результатам ряда экспериментов, ведущих к положительному знаку $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N$.

1. «ZITTERBEWEGUNG»

Релятивистский эффект дрожания (Zitterbewegung) дираковских частиц, т.е. частиц с полуцелым спином, иначе называемых фермионами, следует из теории Дирака [1]. Действительно, в теории проекция скорости, например, свободного или находящегося в электромагнитном поле электрона на оси координат, всегда имеет собственные значения, равные скорости света $\pm c$.

Казалось бы, измерение проекций скорости электрона также должно приводить всегда к результату $\pm c$. Однако наблюдаемые в опыте электроны обычно имеют скорости меньше скорости света, и может показаться, что мы имеем противоречие теории с экспериментом. В действительности теоретическая скорость есть скорость в определенный момент времени, наблюдаемые же скорости всегда являются средними скоростями по некоторому конечному интервалу времени.

Дальнейшее теоретическое рассмотрение показывает, что проекция скорости на ось координат состоит из двух частей: постоянной $c^2 p_1 H^{-1}$ и осциллирующей $1/2ich\alpha_1^0 \exp(-2iHt/h)$, частота которой равна $\omega = 2H/h \geq 2mc^2/h$. В приведенных соотношениях H — релятивистский оператор Гамильтона, p_1 — импульс частицы, а α_1^0 определяется выражением $\alpha_1 = \alpha_1^0 \exp(-2iHt/h)$, где α_m — матрицы Дирака. Постоянная часть соответствует наблюдаемой на опыте скорости частицы v , в то время как осциллирующая с частотой порядка $2mc^2/h$ скорость не может наблюдаться в прямом опыте, поскольку измерение дает среднюю скорость за интервал времени, значительно превышающий период колебаний $2\pi/\omega = \pi h/(mc^2) = 4 \cdot 10^{-21}$ с. Именно осциллирующая часть и приводит к тому, что мгновенная теоретическая скорость оказывается равной $\pm c$.

Дрожание точечной дираковской частицы, имеющей электрический заряд e (например, электрона), в присутствии внешнего магнитного поля вызывает такое поведение частицы, как если бы она имела нормальный магнитный момент $eh/(2mc)$ (в случае дираковского электрона равный одному магнетону Бора). Такой момент возникает из чисто точечного характера заряда e и явления его дрожания в области порядка $h/(mc) \approx 4 \cdot 10^{-11}$ см.

Другим экспериментальным явлением, связанным с дрожанием точечного заряда e электрона, является, например, смещение энергетических уровней s -электрона в атоме водорода. Движение точечного заряда происходит подобно движению заряда, распределенному по конечному объему. В теории Дирака этот эффект описывается членом, предложенным Дарвином еще в 1928 году.

Следует заметить, что в недавно опубликованной работе [2] еще раз подчеркнуто, что «Zitterbewegung» — неотъемлемое свойство теории Дирака.

Между нейтроном и электроном может существовать интересный вид взаимодействия. Он возникает как следствие мезонной теории ядерных сил. Из-за виртуальной диссоциации нейтрона на протон и π^- -мезон нейтрон

окружен мезонной «шубой» размером порядка $h/(m_\pi c)$, и в непосредственной близости от нейтрона может присутствовать электрическое поле. При достаточно сильном сближении нейтрона с электроном между ними должны возникать электростатические силы взаимодействия. Эти силы будут влиять на длину рассеяния нейтрона на электроне a_{ne} .

Таким образом, если частица имеет внутреннюю электромагнитную структуру, то измеряемые на опыте заряд и плотность распределения тока будут состоять как из этой внутренней части, так и из дополнительного вклада, связанного с дрожанием. Поскольку наибольший интерес представляет собой именно первая часть, то необходимо уметь разделить эти вклады.

Более чем 45 лет тому назад Фешбахом было показано [3], что при рассеянии ядрами электронов с энергией порядка нескольких десятков мегэлектронвольт (точнее, при $qR \ll 1$, где $q = 2k \sin \theta/2$ — волновое число отдачи, а R — радиус ядра) единственным измеримым параметром, указывающим на размер ядра, является среднеквадратический радиус ядра.

В случае рассеяния очень медленных нейтронов на атомах подобная задача была решена впервые, видимо, Фридом [4] и более подробно Фолди [5] в 50-х годах. Фолди показал, что измеряемое на опыте взаимодействие между нейтроном и электроном, в частности, длина рассеяния нейтрона на электроне, состоит из двух частей: магнитного члена, содержащего аномальный магнитный момент нейтрона (этот член может быть теоретически рассчитан на основе явления дрожания), и внутреннего члена, возникающего вследствие пространственного распределения электрического заряда нейтрона, обусловленного виртуальной диссоциацией нейтрона на протон и π^- -мезон.

Задача рассеяния нейтрона на слабом, медленно меняющемся чисто электростатическом потенциале $\phi(r)$ была решена Фолди на основе следующего обобщенного уравнения Дирака:

$$\gamma_\mu \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \right) + \frac{Mc}{h} \Psi - \frac{1}{hc} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\varepsilon_m \gamma_\mu \square^m A_\mu + \frac{1}{2} \mu_m \gamma_\mu \gamma_\nu \square^m \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где электромагнитное поле описывается четырехмерным вектор-потенциалом $A_\mu(x) \equiv A((r,t); i\phi(r,t))$, $x \equiv (r, it)$, $\gamma_{\mu\nu}$ — матрицы Дирака, $\square = \Delta - 1/(c^2) \partial^2/\partial t^2$ — оператор Даламбера, и коэффициенты ε_m и μ_m характеризуют внутреннюю электромагнитную структуру нейтрона. В частности, ε_0 — полный электрический заряд нейтрона и μ_0 — его аномальный магнитный момент. Другие члены ($m = 1, 2, 3, \dots$) описывают более высокие радиальные моменты распределения внутреннего электрического заряда частицы.

При $m=0$ уравнение (1) сводится к уравнению Дирака с электромагнитными потенциалами, последние два члена которого имеют вид

$$-\mu_n eh / (2Mc)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) - i \mu_n eh / (2Mc)((\boldsymbol{\alpha}\mathbf{H})). \quad (2)$$

Первый член, содержащий $\mathbf{H}$, представляет собой энергию взаимодействия магнитного момента нейтрона $\mu_n eh / (2Mc)$ с магнитным полем $\mathbf{H}$ и описывает магнитное взаимодействие. Второй член, называемый взаимодействием Фолди, появляется вследствие дрожания нейтрона, имеющего магнитный момент $\mu_n eh / (2Mc)$.

В первом борновском приближении из уравнения (1) можно вычислить длину рассеяния нейтрона на электроне. При малых переданных моментах лишь члены с $m=0$ и $m=1$ важны, и в первом борновском приближении амплитуды ne -рассеяния, определяемые из уравнения (1), имеют вид

$$f_0(\mathbf{k}) = -\frac{M\varepsilon_0}{2\pi h^2} \int \exp(-i \mathbf{k}\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$f_1(\mathbf{k}) = -\frac{M}{2\pi h^2} \left[\varepsilon_1 + \frac{h}{2Mc} \mu_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2Mc} \right)^2 \varepsilon_0 \right] \exp(-i \mathbf{k}\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Поскольку для нейтрона $\varepsilon_0=0$ и $\mu_0=\mu_n eh / (2Mc)$, то при $k \rightarrow 0$ длина рассеяния нейтрона на электроне будет иметь вид

$$a_{ne} = 2Me / (h^2) [\varepsilon_1 + \mu_n e(h / (2Mc))^2]. \quad (5)$$

В этом соотношении ε_1 описывает радиальную протяженность распределения внутреннего электрического заряда в нейтроне. Член с μ_n представляет собой вклад Фолди, появляющийся вследствие дрожания частицы с аномальным магнитным моментом μ_n .

Заметим, что Вайскопф предложил довольно изящный вывод формулы (5), учитывающей аномальный магнитный момент нейтрона (см., например, [6]). Траектория релятивистски-дрожащего движущегося нейтрона представляет собой спираль, радиус которой оказывается по порядку величины равным комптоновской длине волны нейтрона $R \simeq h / (Mc)$. Нейтрон движется со скоростью света по этой спирали. При этом шаг спирали оказывается таким, что поступательное движение нейтрона характеризуется скоростью v , наблюдаемой на опыте. Если нейтрон находится на расстоянии порядка R от электрона (т.е. от точечного заряда), то имеет место магнитное спин-орбитальное взаимодействие электронного тока с магнитным моментом нейтрона. Это и есть взаимодействие Фолди, вклад которого в длину рассеяния отражает второй член соотношения (5).

Проведенный Фолди анализ носит, конечно, феноменологический характер. Величины ϵ и μ вводятся как некоторые коэффициенты, о значениях которых можно судить лишь по результатам эксперимента.

Если e — заряд частицы, то можно ввести различные моменты распределения этого заряда:

$$\chi_n = \int r^{2n} \rho(\mathbf{r}) dV = 4\pi \int r^{2n+2} \rho(r) dr, \quad (6)$$

где $\rho(r)$ — сферически-симметричная плотность заряда (в случае равномерно размазанного заряда $\rho = e / (4 / 3\pi R^3) = \text{const}$, где R — радиус частицы), $dV = 4\pi r^2 dr$ — элемент объема.

Полный заряд системы ($n = 0$) $e = \int \rho(r) dV = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr$ (в случае нейтрона $e = 0$). В работе Фолди ϵ_1 пропорционален второму радиальному моменту ($n = 1$) распределения внутреннего электрического заряда или средне-квадратическому внутреннему зарядовому радиусу $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle$:

$$\epsilon_1 \sim 1/6 \int r^2 \rho_{\text{in}}(\mathbf{r}) dV = e/6 \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle, \quad (7)$$

где $\rho_{\text{in}}(\mathbf{r})$ — плотность внутреннего электрического заряда. Как пишет Фолди, после ϵ_1 в (7) стоит «...знак пропорциональности, а не знак равен-

ства, т.к. существует некоторая неоднозначность в связи релятивистских коэффициентов с физически протяженным статическим распределением заряда. Указанное обозначение, по-видимому, наиболее целесообразно».

Принимая (7) со знаком равенства, из (5) можно получить для нейтрона

$$\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N = 3h^2 / (Me^2)(a_{ne} - a_F), \quad (8)$$

где $a_F = \mu_n e^2 / (2Mc^2) = -1,468 \cdot 10^{-3}$ фм — длина рассеяния, соответствующая взаимодействию Фолди. Соотношение (8) можно получить также несколько иным способом, не прибегая к (7), а пользуясь понятием форм-факторов.

2. ФОРМФАКТОРЫ

Известно, что под структурой основного состояния атома обычно понимают пространственное распределение в нем электронов, и описывается оно волновой функцией основного состояния. Плотность электрического заряда в основном состоянии, например, атома водорода в точке x , равна $e \rho(x)$, где $\rho(x)$ — плотность вероятности найти электрон в точке x .

Для ядер распределение электрического заряда уже не будет идентично распределению массы ядра. Для отдельно взятого нуклона, кроме того, возникает дополнительная трудность: при рассеянии на нем какой-либо частицы нуклон испытывает сильную отдачу и вычислять распределение электрического заряда в нем из опытов по рассеянию практически невозможно. Поэтому структуру нуклона, а также и ядер, описывают при помощи формфакторов.

Если падающая частица с зарядом ze и кинетической энергией E и частица-мишень с зарядом Ze бесспиновые и не обладают структурой (т.е. точечные), а частица-мишень не испытывает отдачи, то в борновском приближении, когда предполагается, что падающую и рассеянную частицы можно описать плоскими волнами (при $Zze^2/(hc) \leq 1$), справедлива нерелятивистская формула Резерфорда для дифференциального эффективного сечения рассеяния:

$$(d\sigma/d\Omega)_{\text{Ruth}} = z^2 Z^2 e^4 / (16E^2 \sin^4 \theta / 2). \quad (9)$$

Если частица-мишень не является точечной, а имеет пространственное сферически-симметричное распределение плотности, то можно показать, что формула для дифференциального эффективного сечения рассеяния будет иметь вид [7]:

$$(d\sigma/d\Omega) = (d\sigma/d\Omega)_{\text{Ruth}} |F(q^2)|^2, \quad (10)$$

где $F(q^2)$ называется формфактором, а q^2 — квадрат переданного четырехмерного импульса: $q^2 = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^2 = (\mathbf{p}_{fe} - \mathbf{p}_{ie})^2$, где $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_f$, $\mathbf{p}_{ie}$, $\mathbf{p}_{fe}$ — начальные и конечные четырехмерные импульсы протона и электрона. Пространственные компоненты четырехмерного импульса совпадают с импульсом частицы $\mathbf{p}$, а временная компонента равна iE/c , где E — энергия частицы. Для случая упругого рассеяния электрона на нуклоне $q^2 < 0$ (область пространственноподобных значений q^2).

В 1950 г. Розенблютом была получена [8] известная формула, описывающая дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона на частице со спином $1/2$, конечными размерами, массой M , электрическим зарядом e и аномальным магнитным моментом μ_k :

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_0 \{ (F_1^2 - (q/2Mc)^2 [2(F_1 + \mu_k F_2)^2 \text{tg}^2(\varphi/2) + \mu_k^2 F_2^2] \}, \quad (11)$$

где $(d\sigma/d\Omega)_0$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона на точечном заряде (поскольку частицы имеют отличный от нуля спин, то $(d\sigma/d\Omega)_0 \neq (d\sigma/d\Omega)_{\text{Ruth}}$), $F_1(q^2)$ — дираковский формфактор, описывающий пространственное распределение заряда и связанного с ним нор-

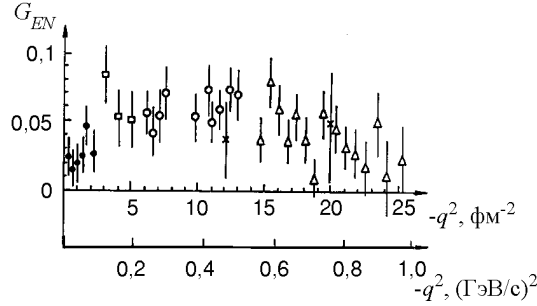


Рис.1. Экспериментальная зависимость зарядового формфактора нейтрона от q^2 . Опыты по упругому ed -рассеянию

мального магнитного момента, $F_2(q^2)$ — формфактор Паули, связанный с пространственным распределением аномального магнитного момента и q^2 — квадрат переданного четырехмерного импульса. Заметим, что функции F_1 и F_2 имеют ясный физический смысл.

Позднее, в 1962 г., Саксом были введены [9] для удобства обработки экспериментальных данных линейные комбинации формфакторов F_1 и F_2 : зарядовый формфактор

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \mu_k(qh/2Mc)^2 F_2(q^2) \quad (12)$$

и магнитный формфактор

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \mu_k F_2(q^2). \quad (13)$$

Поскольку (12) и (13) являются линейными комбинациями F_1 и F_2 , то невозможно доказать, какой набор более фундаментален — F_i или G_i . Однако формула Розенблюта записывается более просто через формфакторы G_i , чем через F_i , в ней отсутствует перекрестный член между G_E и G_M , подобно $F_1 F_2$ (см. (11)). Кроме того, выбрана такая комбинация формфакторов F_1 и F_2 , которая выделяет полные электрическую и магнитную части. Таким образом, G_E и G_M представляют собой описание распределения полного заряда и полного магнитного момента. Экспериментальные данные для $G_{EN}(q^2)$ нейтрона, полученные из опытов по рассеянию электронов на дейтронах, приведены на рис.1, взятом из книги [10]. Видно, что величина G_{EN} близка к нулю.

Хотя для описания наблюдаемых явлений достаточно формфакторов, введенных как феноменологические функции квадрата переданного импульса, полезно с чисто иллюстративной точки зрения дать этим формфакторам

некоторую наглядную интерпретацию. Это возможно в так называемой системе координат Брейта, которая задается требованием равенства нулю пространственных компонент четырехмерного вектора $\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f$; в такой системе трехмерные импульсы начального и конечного протонов равны по значению и противоположны по направлению, а соответствующие энергии одинаковы. В системе Брейта формфактор G_E интерпретируется как фурье-образ пространственного распределения плотности электрического заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = e / (2\pi)^3 \int G_E(q^2) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{q} \quad (14)$$

или

$$G_E(q^2) = 1/e \int \rho(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (15)$$

При этом можно говорить о пространственном образе нуклона, его электромагнитной структуре. Если $G_E(q^2) = \text{const}$, то из (14) следует, что $\rho(r) \sim e\delta(r)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция. Зависимость G_E от q^2 характеризует отклонение распределения заряда от точечного. Заметим, однако, что $\rho(r)$ не является функцией, заданной в фиксированной системе координат. Каждому значению q соответствует своя система отсчета, поэтому определенная формулами (14) и (15) пространственная структура нуклона носит, вообще говоря, довольно условный характер. Она приобретает вполне определенный смысл распределения заряда лишь в нерелятивистском случае малых переданных импульсов ($\hbar^2 q^2 \ll M^2 c^2$), когда изменением энергии покоящегося нуклона можно пренебречь. В этом случае система координат Брейта совпадает с системой координат покоящегося нуклона, а формфактор G_E имеет наглядную интерпретацию как фурье-образ пространственного распределения плотности полного электрического заряда.

Поскольку полный заряд частицы $Q = \int \rho(r) d\mathbf{r}$, то из (14) следует, что $Q = eG_E(0)$. Для протона $G_{EP}(0) = 1$ и $F_{1P}(0) = 1$, для нейтрона $G_{EN}(0) = 0$ и $F_{1N}(0) = 0$. Если у частицы нет заряда, то это означает лишь, что $G_E(0) = 0$. Такая частица способна испускать виртуальные фотоны и обладает распределением заряда. Частица истинно нейтральна, когда формфакторы равны нулю при всех значениях q^2 .

В предельном случае низких энергий (малых переданных импульсов) соотношение (15) можно разложить в ряд по степеням q^2 и, нормируя $\rho(r)$ условием $\int \rho(r) 4\pi r^2 dr = e$, получить $G_E(q^2) = 1 - 1/6 \cdot \langle r_E^2 \rangle q^2 + \dots$, а размер частицы охарактеризовать средним квадратом радиуса распределения полного электрического заряда

$$\langle r_E^2 \rangle = 1/(e) \int \rho(\mathbf{r}) 4\pi r^2 dr = 6(dG_E/dq^2)_{q^2=0} \quad (16)$$

или

$$\langle r_E^2 \rangle = 6(dF_1/dq^2)_{q^2=0} + 3/2\mu_k(h/Mc)^2. \quad (17)$$

Второй член в (17) появляется вследствие дрожания частицы, имеющей аномальный магнитный момент μ_k и подчиняющейся уравнению Дирака (член Фолди). Первый член в (17) возникает вследствие наличия у нуклона внутренней структуры и связан с поведением формфактора Дирака как функции q^2 . Обозначив $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ средний квадрат электрического радиуса, связанного с внутренней структурой нуклона, или, как его еще называют, дираковский радиус, можно записать, что

$$\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N = 6(dF_1/dq^2)_{q^2=0}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что полный средний квадрат электрического радиуса частицы

$$\langle r_E^2 \rangle = \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle + \langle r_F^2 \rangle, \quad (19)$$

где $\langle r_F^2 \rangle = 3/2\mu_k(h/Mc)^2$ — член Фолди. Для протона $\langle r_F^2 \rangle_P = 0,1189 \text{ фм}^2$, для нейтрона $\langle r_F^2 \rangle_N = -0,1268 \text{ фм}^2$.

Заметим, что знак среднего квадрата электрического радиуса в целом нейтральной, не имеющей заряда частицы, в принципе, может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, при отсутствии члена Фолди (например, в статических моделях нуклона, когда $M \rightarrow \infty$, о чем см. ниже) у нейтрона знак $\langle r_E^2 \rangle = 1/(e) \int \rho(\mathbf{r}) r^2 d\mathbf{r} = \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle$ определяется знаком заряда, расположенного на периферии. Поскольку это π^- -мезон, то знак $\langle r_E^2 \rangle$ должен быть отрицательным.

Воспользовавшись соотношениями (16)—(18) и (8), можно получить, что

$$(dG_E/dq^2)_{q^2=0} = 14,41a_{ne}, \quad (20)$$

где a_{ne} в фм. Таким образом, изучение ne -рассеяния дает информацию о производной $(dG_E/dq^2)_{q^2=0}$. Аналогичную информацию о $(dG_E/dq^2)_{q^2=0}$ (а также и о $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle$) можно получить из опытов по рассеянию электронов на дейтронах (см. рис.1), однако погрешности эксперимента не позволяют это сделать с достаточной точностью.

Иногда удобно иметь дело с изоскалярной G_E^S и изовекторной G_E^V комбинацией G_E :

$$G_E = G_E^S + \tau_Z G_E^V, \quad (21)$$

где $\tau_Z = 1$ для протона и $\tau_Z = -1$ для нейтрона. Тогда из (21) следует для нейтрона

$$G_{EN} = G_E^S - G_E^V, \quad (22)$$

для протона

$$G_{EP} = G_E^S + G_E^V. \quad (23)$$

Поскольку G_{EN} близок к нулю (см.рис.1), то

$$G_E^S \approx G_E^V. \quad (24)$$

3. ФОРМУЛА ФОЛДИ

Получим теперь соотношение (8), не применяя для этого подвергающуюся в последнее время сомнению (см., например, [11]) формулу (7), связывающую знаком равенства введенный Фолди параметр ϵ_1 и средний квадрат зарядового радиуса нейтрона. Для этого воспользуемся соотношениями (17), (18), по-видимому, не вызывающими сомнений при низких энергиях.

Предположим, что масса сталкивающейся частицы (электрона) много меньше массы нуклона и нуклон до и после соударения покоится. Предположим также, что плотность электрического заряда нуклона сферически-симметрична. Тогда потенциальная энергия взаимодействия электрона и нуклона в точке r , где находится электрон, будет включать в себя вклады от всех частей нуклона:

$$U(r) = -e^2 \int \frac{\rho(r'')dV''}{|r'' - r|}, \quad (25)$$

где $|r'' - r|$ — расстояние от точки r'' , где расположен заряд $\rho(r'')dV''$, до точки наблюдения r .

Подставляя $U(r)$ в известную формулу борновского приближения для амплитуды рассеяния

$$f(\varphi) = -M / (2\pi\hbar^2) \int U(r) \exp(i \mathbf{K} \mathbf{r}) dV, \quad (26)$$

где $\mathbf{K} = k |\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}|$, $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор в направлении падающего пучка, а $\mathbf{n}$ — в направлении вектора $\mathbf{r}$, и, следовательно, $K = 2k \sin \varphi / 2$, получим длину рассеяния электрона на нейтроне a_{ne} :

$$a_{ne} = Me^2 / (2\pi\hbar^2) \int \exp(i\mathbf{K}\mathbf{r}) dV \int \rho(r'') / (|r'' - r|) dV''. \quad (27)$$

Проводя вычисления (см., например, [5,12]), получим

$$a_{ne} = 8\pi M(e/\hbar k)^2 \int \sin Kr / (Kr) \rho(r) r^2 dr, \quad (28)$$

или при малых Kr , поскольку $\langle r_E^2 \rangle = 4\pi/(e) \int \rho(r) r^4 dr$ равно сумме двух членов (см. ф-лы (17) и (18)), а для нейтрона $4\pi \int \rho(r) r^2 dr = 0$:

$$a_{ne} = 2Me / (\hbar^2) [e / (6) \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N + \mu_n e (\hbar / (2Mc))^2], \quad (29)$$

откуда непосредственно следует формула (8). Из сравнения (5) и (29) видно, что $\epsilon_1 = e / (6) \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$, и именно знак равенства, а не пропорциональности. Это заключение следует, в сущности, из саксовского определения зарядового формфактора G_E (см. (12)). Таким образом, соотношение (7), введенное Фолди и взятое со знаком равенства, все-таки справедливо и может быть использовано при сравнении эксперимента с теорией.

Заметим также, что информацию о $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ можно получить, зная экспериментальную зависимость $G_{EN}(q^2)$ (например, из опытов по рассеянию электронов на нуклонах). Однако имеющиеся в настоящее время ошибки измерений не позволяют это сделать для нейтрона (см. рис.1).

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ne -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Первые попытки обнаружить ne -рассеяние были сделаны еще в 1932 г., однако более аккуратные измерения a_{ne} , начало которым было положено Ферми, относятся к середине 40-х годов и более позднему периоду времени. Главным образом, они основаны либо на наблюдении асимметрии рассеяния тепловых нейтронов атомами, либо на изучении зависимости от энергии полного сечения взаимодействия нейтронов с атомами в электронвольтовой области энергий. Пользуясь формулой (8), можно из измеренного значения a_{ne} получить значение и знак $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$. Однако, поскольку a_{ne} и a_F — величины одного порядка, для определения $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ нужны очень точные измерения. Такие измерения возможны при изучении взаимодействия нейтронов низких энергий с тяжелыми атомами. Дифференциальное сечение когерентного рассеяния атомом медленных нейтронов с длиной волны порядка размеров атома описывается соотношением

$$\sigma(\theta) = |a + Zf(\sin \theta / \lambda)a_{ne}|^2, \quad (30)$$

где a — длина когерентного ядерного рассеяния, $\theta = \varphi/2$, φ — угол рассеяния, а $f(\sin \theta / \lambda)$ — атомный формфактор. Оценки показывают, что отношение второго члена к первому составляет для тяжелых атомов приблизительно 1%, а поэтому величина a_{ne} поддается измерению.

Существуют два старых метода изучения ne -взаимодействия. Один из них [13], впервые примененный Ферми и Маршалл в 1947 г., основан на наблюдении очень небольшой асимметрии рассеяния тепловых нейтронов, обусловленной зависимостью f от θ . Тепловые нейтроны имеют длину волны $\sim 2\text{\AA}$, что по меньшей мере в 10^4 раз больше размеров ядра. Вследствие этого в системе центра масс тепловые нейтроны должны рассеиваться ядрами сферически-симметрично. Отклонения от симметрии рассеяния могут быть обусловлены, помимо ne -взаимодействия, например, взаимодействием магнитного поля, образуемого электронными токами внутри атома, с магнитным моментом нейтрона. Во избежание эффектов такого рода следует использовать атомы, в которых заполнены все оболочки. Могут быть и другие причины, приводящие к асимметрии рассеяния: интерференция волн, рассеиваемых различными атомами, тепловые колебания атомов и т.п. В работе Ферми и Маршалл и в других аналогичных экспериментах наблюдалось рассеяние тепловых нейтронов, имеющих максвелловское распределение по скоростям, под углами $\varphi = 45^\circ$ и 135° . Чтобы избежать влияния магнитного рассеяния и молекулярной дифракции, в качестве рассеивателей были использованы одноатомные благородные газы, имеющие заполненные электронные оболочки, в частности, ксенон ($Z = 54$). Разница между $f(45^\circ) = 0,78$ и $f(135^\circ) = 0,52$ обуславливает асимметрию ne -рассеяния, проявляющуюся на фоне сильного изотропного ядерного рассеяния. В измеренное значение асимметрии следует внести поправку на неодинаковые геометрические параметры детекторов и учесть асимметрию, вызванную тепловым движением атомов газа, в несколько раз превышающую искомый эффект. Для атомов с заполненными электронными оболочками магнитного взаимодействия при рассеянии нейтронов в первом приближении не ожидается. Во втором приближении можно ожидать появления взаимодействия магнитного момента нейтрона с токами, возникающими в виртуальных возбужденных состояниях атома благородного газа. Эффект такого рода был рассмотрен в работе Ферми и Маршалл, и было показано, что он составляет очень малую долю основного ne -взаимодействия.

Кроме того, рассматривалось влияние швингеровского рассеяния. Как показали оценки, его влияние также ничтожно, поскольку швингеровское рассеяние связано со спином и практически не интерферирует с ядерным рассеянием, если нейтроны не поляризованы. Основным недостатком опытов является необходимость введения большой поправки на эффект, вызван-

ный тепловым движением атомов газа. Главный вклад в поправку вносят нейтроны, имеющие большую длину волны как раз в той области, в которой можно ждать отклонений от максвелловского распределения. Это может привести к неправильному вычислению поправки. В наиболее точных экспериментах поправку определяли на основании измерений с аргоном и неоном, для которых ne -рассеяние незначительно.

Следует иметь в виду, что даже в экспериментах с одноатомными газами возможно появление небольшой асимметрии рассеяния, которая связана с интерференцией волн, рассеянных различными атомами газа. На это обратили внимание Ахиезер и Померанчук [14]. Интерференция возникает вследствие корреляции во взаимном расположении атомов, обусловленной тем, что расстояние между центрами двух соседних атомов не может быть меньше удвоенного атомного радиуса. Проведенные вычисления показали, что отношение интенсивностей рассеянных на углы φ_1 и φ_2 нейтронов описывается следующей формулой:

$$\varepsilon = \frac{1 + 4\pi(2R)nf(\varphi_1)}{1 + 4\pi(2R)nf(\varphi_2)}, \quad (31)$$

где $f(\varphi) = \cos \eta / \eta^2 - \sin \eta / \eta^3$; $\eta = (8\pi R / \lambda) \sin(\varphi/2)$; R — радиус атома; n — плотность газа. Вычисления по формуле (31) показали, что при атмосферном давлении газа поправка на интерференцию составляет $\sim 3,5\%$ измеряемого эффекта ne -взаимодействия.

Прецизионные измерения по методу Ферми и Маршалл проводились Кроном и Ринго [15] в Аргоннской лаборатории (США) в 1965—1973 гг. Измерения проводили на ксеноне, криптоне и аргоне, неон был использован для проверки правильности расчета на асимметрию рассеяния, вызванную тепловым движением газа. Значение этой поправки превышало искомый эффект для ксенона в 4, для криптона в 10 и для аргона в 18 раз. Из формулы (30) можно получить в приближении второго порядка по a_{ne}/a :

$$R = 1 + 8\pi (aa_{ne}/\sigma_s) Z \Delta f (1 + \delta), \quad (32)$$

где $R = \sigma(\varphi_1)/\sigma(\varphi_2)$ — измеренная асимметрия рассеяния с учетом поправок; $a = \sum a_j n_j$; a_j — длина ядерного рассеяния j -го нуклида; n_j — концентрация j -го нуклида в изотопической смеси; σ_s — сечение рассеяния; $\Delta f = \langle f(\theta_1) - f(\theta_2) \rangle$ — усредненная по спектру нейтронов разность атомных формфакторов; $\varphi_1 = 2\theta_1 = 45^\circ$; $\varphi_2 = 2\theta_2 = 135^\circ$;

$$\delta = \frac{a_{ne}}{2a\Delta f} \langle f^2(\theta_1) - f^2(\theta_2) \rangle - \frac{8\pi aa_{ne}}{\sigma_s} \langle f(\theta_2) \rangle. \quad (33)$$

Значения длины рассеяния a для ксенона и криптона были определены путем измерения критических углов полного отражения нейтронов от поверхностей сжиженных газов, кроме того, значение для ксенона было получено из опытов по дифракции нейтронов на XeF_4 . Сечения рассеяния благородных газов измерялись в специально поставленных опытах относительно сечения рассеяния неона, принятого за эталон. Были приняты специальные меры для очистки газов от примесей, особенно легких, поскольку даже их небольшие добавки могут сильно исказить результаты эксперимента. Измерения проводили при разных давлениях газа-рассеивателя. При изменении давления от 0,4 до 1,2 атм каких-либо изменений в асимметрии рассеяния в пределах погрешности не наблюдалось. В результате после введения поправки на швингеровское рассеяние получили

$$a_{ne} = (-1,33 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ фм.} \quad (34)$$

Причины возможных дополнительных систематических погрешностей могут заключаться в следующем:

- 1) очень малая наблюдаемая асимметрия рассеяния на фоне сильного симметричного ядерного рассеяния (в работе [15] всего лишь 0,5%, и измеряется она с погрешностью $\pm 2,5\%$);
- 2) экспериментатор должен быть абсолютно уверен в отсутствии побочных эффектов (например, вызванных присутствием неизвестных нейтронных p -резонансов (с шириной порядка 10^{-8} эВ), примесей легких газов и др.);
- 3) большая вводимая поправка на асимметрию рассеяния, вызванную тепловым движением газа (для ксенона вчетверо превышающая искомый эффект).

Оценим, например, асимметрию рассеяния тепловых нейтронов, вызванную возможным присутствием слабого p -резонанса у ксенона в области энергий нейтронов порядка 0,1 эВ. Амплитуда рассеяния, обусловленная таким p -резонансом для области тепловых энергий, когда потенциальное p -рассеяние несущественно, имеет вид [16]:

$$f_p \approx \frac{3\Gamma_n(E - E_0)}{2k[(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4]} \cos \varphi, \quad (35)$$

где $\Gamma_n = \Gamma_n^0(kR)^2 E^{1/2}$. Величину Γ_n^0 можно оценить из ожидаемого значения p -силовой функции ксенона $\Gamma_n^0/D \approx 2 \cdot 10^{-4}$ [17]. Такое значение приводит к $\Gamma_n \approx 1,42 \cdot 10^{-9}$ эВ и $f_p \approx 4,1 \cdot 10^{-4}$ фм, что, в свою очередь, позволяет оценить ложную асимметрию рассеяния вперед-назад, равную

$$\left(\frac{b_{\text{coh}} + f_p \cos \varphi_1}{b_{\text{coh}} + f_p \cos \varphi_2} \right)^2 - 1 = 2 \cdot 10^{-4}.$$
 Соответствующая величина, обусловленная ne -рассеянием, составляет $6 \cdot 10^{-4}$, и приводимая авторами работы [15] погрешность при определении a_{ne} должна быть по крайней мере удвоена. В действительности ситуация может быть гораздо более серьезной, т.к. Γ_n^0 может превышать принятое нами значение в несколько раз. Заметим, что резонанс с нейтронной шириной даже порядка 10^{-7} эВ вряд ли до сих пор мог быть замечен в полном сечении в обычных опытах по методу пропускания. Специальные поиски слабых p -резонансов показывают, что резонансы с нейтронными ширинами 10^{-7} эВ обнаруживаются лишь при толщине образцов $\geq 10^{23}$ ядер/см³, что достижимо для газообразного ксенона в образцах длиной ~ 1 м и при давлении ~ 50 атм.

Второй метод исследований был впервые применен Хевенсом, Раби и Рейнуотером [18]. Он заключается в наблюдении зависимости полного сечения рассеяния от длины волны нейтрона вблизи $\lambda \approx 1$ Å ($E \approx 0,08$ эВ). Длина ядерного рассеяния должна оставаться постоянной, в то время как атомный формфактор является причиной изменений полного сечения в зависимости от λ . В качестве рассеивателей использовали жидкие свинец и висмут. Полное сечение измерялось в диапазоне $\lambda = 0,3 \div 1,3$ Å. В этом интервале длин волн изменение полного сечения из-за ne -взаимодействия составляет 0,1 б. В результаты измерений следует внести поправки на другие эффекты. Так, поправка на межатомные интерференционные явления составляет в указанном диапазоне длин волн 0,2 б. Необходимо внести также поправку на эффект относительной скорости, обусловленной тепловым движением атомов мишени, а также учесть влияние захвата нейтронов в исследуемом веществе и примесях. Позднее было показано [19], что вводить поправки на агрегатное состояние вещества при энергиях нейтронов ниже 1 эВ можно, как правило, лишь с большой неопределенностью. Все это приводит к тому, что, несмотря на высокую статистическую точность данного метода, общая точность его, видимо, невелика. Наиболее точное значение, полученное данным методом при энергиях нейтронов меньше 1 эВ:

$$a_{ne} = (-1,56 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ фм}, \quad (36)$$

было найдено в работе Мелкониана и др. [20] в 1959 г. в США.

Таким образом, уже в конце 60-х гг. из экспериментов было известно два значения длины рассеяния a_{ne} . К этому времени была известна и формула Фолди (8), связывающая ne -эффект с внутренним зарядовым радиусом нейтрона. Согласно этой формуле при первом значении a_{ne} (см.(34)) полу-

чается $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N > 0$, второе же значение (см.(36)) дает $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N < 0$. К этому же времени Чу и Лоу математически сформулировали идеи Юкавы, дав удовлетворительное количественное толкование экспериментов по фоторождению π -мезонов [21], а также и по их низкоэнергетическому ($E \ll Mc^2 = 0,95$ ГэВ) рассеянию [22]. Приблизительно были рассчитаны также величины магнитных моментов протона и нейтрона [23,24]. В теории Чу и Лоу нуклон рассматривался как протяженный источник виртуального мезонного поля. Виртуальный процесс $n \rightarrow p + \pi^-$ давал отрицательный «хвост», т.е. внешнюю пионную оболочку распределения электрического заряда нейтрона, с характерным размером $\hbar/(m_\pi c) \approx 1,4$ фм. Нуклон рассматривался бесконечно тяжелым, таким образом, отдачу в виртуальных процессах можно было в первом приближении не принимать во внимание. Подобная статическая модель должна приводить к отрицательному знаку квадрата внутреннего зарядового радиуса нейтрона. Таким образом, значение $a_{ne} = -1,33(3) \cdot 10^{-3}$ фм (34) находилось в противоречии с теорией, а значение $a_{ne} = -1,56(5) \cdot 10^{-3}$ фм (36) — в согласии. Внутренняя же часть нуклона в те годы, по существу, не была понята и ее свойства не поддавались расчету. Лишь спустя более 20 лет кварковые представления о нуклоне прояснили ситуацию: внутренность нуклона представляет собой мешок, заполненный тремя кварками.

Третьим экспериментальным методом изучения ne -взаимодействия является метод компенсации длин ядерного рассеяния при отражении нейтронов от зеркала. Этот метод был применен Юзом и др. [25]. Известно, что показатель преломления вещества для нейтронов с длиной волны λ связан с длиной когерентного рассеяния соотношением (при отсутствии магнитного рассеяния нейтронов):

$$n^2 = 1 - (\lambda^2/\pi) \sum a_j N_j, \quad (37)$$

где N_j — число частиц типа j в 1 см^3 вещества, a_j — длина когерентного рассеяния нейтронов частицами типа j . Для прецизионного определения показателя преломления двух веществ измеряют критический угол φ_{cr} полного отражения на их границе, причем

$$\varphi_{\text{cr}}^2 = n_A^2 - n_B^2 \quad (\text{для } \varphi_{\text{cr}} \ll 1), \quad (38)$$

где n_A и n_B — показатели преломления двух веществ.

Для жидкого кислорода и висмута, использовавшихся в [25], из (37) и (38) следует, что

$$(\pi/\lambda^2) \varphi_{\text{cr}}^2 = N_{\text{Bi}} a_{\text{Bi}} \left(\frac{N_{\text{O}} a_{\text{O}}}{N_{\text{Bi}} a_{\text{Bi}}} - 1 \right) - N_{\text{O}} Z_{\text{O}} a_{ne} \left(\frac{N_{\text{Bi}} Z_{\text{Bi}}}{N_{\text{O}} Z_{\text{O}}} - 1 \right) \quad (39)$$

(поскольку речь идет о рассеянии на малые углы (вперед), атомный форм-фактор равен единице). Отношение $\frac{N_O a_O}{N_{Bi} a_{Bi}} = 1,024$, в то время как

$$\frac{N_{Bi} Z_{Bi}}{N_O Z_O} \approx 7. \text{ Вследствие этого измеренное значение критического угла } \varphi_{cr}$$

примерно в равной степени определяется нескомпенсированным ядерным рассеянием и ne -взаимодействием. Этот угол составляет несколько минут. Длины рассеяния a_O и a_{Bi} (или, точнее говоря, a_{Bi} и отношение a_O/a_{Bi}) были определены в эксперименте путем измерения сечения рассеяния свободных атомов при энергии нейтронов порядка 10 эВ. При этой энергии ne -взаимодействие не проявляется, так как формфактор практически равен нулю. Для перехода к длинам когерентного рассеяния a_O и a_{Bi} необходимо определить сечение некогерентного рассеяния висмута. Это было сделано при помощи дополнительных опытов с нейтронами больших длин волн, когда имеет место лишь некогерентное рассеяние.

Измеренный в эксперименте [25] критический угол оказался равным 3,66 угловых минут. В результате

$$a_{ne} = (-1,39 \pm 0,13) \cdot 10^{-3} \text{ фм.} \quad (40)$$

Метод отражения от зеркала обладает преимуществом перед остальными, поскольку измеряемый эффект в значительной степени определяется самим ne -взаимодействием. Однако конечный результат опыта Юза опирается на предположение, что в области энергий от 10 эВ до тепловой длина рассеяния, не связанного с ne -взаимодействием, не меняется. Между тем, как отметил Халперн [26], при энергиях порядка 10 эВ на атомах висмута и кислорода может происходить заметное неупругое рассеяние. Если это так, то значения a_O и a_{Bi} будут отличаться от значений, принятых в [25], что, соответственно, изменит и конечные результаты опыта. Должна быть также уверенность в отсутствии какого-либо влияния резонансов в указанной области энергий.

Поскольку искомый ne -эффект составлял в наиболее точных экспериментах всего лишь величину порядка 1%, было бы очень интересно найти метод исследования, в котором измеряемый эффект, так же, как и в работах Юза, был бы более значительным. В предыдущих работах всегда существовала опасность влияния на результаты какого-либо неучтенного эффекта. Так, например, при использовании метода измерения полного сечения жидкого свинца или висмута в интервале энергий 0 ÷ 10 эВ изменение сечения ядерного рассеяния всего на 0,1% вызывает изменение искомой амплитуды ne -рассеяния на 10%.

Из формулы (30) следует, что относительное значение дополнительного вклада в сечение рассеяния определяется выражением $\Delta \sigma_{ne}/\sigma = 2Z \Delta f a_{ne}/a$. В экспериментах, проводимых по методу Ферми и Маршалл, Δf составляло всего лишь 0,26. Так как формфактор — функция отношения $\sin \theta/\lambda$, для увеличения Δf следует вести измерения при меньших λ , одновременно захватывая область углов менее 45° , или проводить эксперимент по методу времени пролета при фиксированном угле θ в широком диапазоне значений λ . Кроме того, и это более существенно, следует найти подходящее для измерений ядро с очень малым значением длины ядерного рассеяния. В связи с этим в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ в 1965—1966 годах были предприняты поиски тяжелого ядра с малой длиной ядерного рассеяния. Такое ядро было найдено сначала теоретически, затем экспериментально. Им оказался вольфрам-186, ядерная длина рассеяния нейтронов которого в области энергий нейтронов от нуля до нескольких электронвольт мала (примерно в десять раз меньше, чем естественного вольфрама) из-за интерференции потенциального и резонансного рассеяний. Она имеет вид [27]:

$$a = R - \frac{\beta \Gamma_n}{2k_0 E_0} \left(1 + \frac{E}{E_0} \right) + a_{ne} Z f \left(\frac{\sin \theta}{\lambda} \right), \quad (41)$$

где Γ_n — нейтронная ширина первого резонанса ($E_0 = 18,83$ эВ) ^{186}W ; R учитывает потенциальное рассеяние, вклад примесей, а также незначительный вклад остальных резонансов вольфрама; β — содержание изотопа ^{186}W в смеси. Результаты поисков впервые были доложены [27] на семинаре по электромагнитным взаимодействиям в ядерных реакциях в 1966 г. в Дубне, а затем опубликованы в работе [28]. В докладе [27] было предложено применить монокристалл из изотопа вольфрама-186 для измерения ne -взаимодействия посредством изучения дифракции нейтронов в таком кристалле. При этом можно достигнуть возрастания измеряемого ne -эффекта до нескольких десятков процентов. Изменяя концентрацию изотопа ^{186}W в смеси, можно изменять абсолютное значение и знак длины рассеяния.

Прецизионные измерения длины рассеяния нейтронов с помощью смеси изотопов вольфрама, содержащей 90,7% ^{186}W , были выполнены на пучке холодных нейтронов ($\lambda \approx 15$ Å) методом фильтров Кристиансена [29]. На хорошо сколлимированном пучке нейтронов (расходимость в горизонтальной плоскости не превосходит $2\text{—}3'$) устанавливался так называемый фильтр Кристиансена, представляющий собой вертикальную полость, между стеклянными пластинами которой засыпан порошок из исследуемого вещества. Толщина полости в направлении пучка несколько миллиметров, а

по ширине она полностью перекрывает пучок. Пространство между крупинками порошка заполняется поочередно различными жидкостями с известными показателями преломления нейтронов. Позади фильтра на расстоянии нескольких метров на оси пучка устанавливается детектор такой ширины, что в нем могут регистрироваться нейтроны, рассеянные фильтром на углы до $\sim 0,5^\circ$ в горизонтальной плоскости. Измерения заключаются в наблюдении интенсивности малоуглового рассеяния нейтронов фильтром при нескольких значениях показателя преломления жидкости (например, при различных смесях тяжелой ($Na_{D_2O} = (63,399 \pm 0,005) \cdot 10^9$ 1/см²) и легкой ($Na_{H_2O} = (-5,61 \pm 0,03) \cdot 10^9$ 1/см²) воды). Расширение пучка за счет малоуглового рассеяния пропорционально λ/a_0 , где a_0 — размеры крупинок порошка. В принципе, малоугловое рассеяние должно полностью отсутствовать, когда показатель преломления жидкости n_L равен показателю преломления вещества порошка n_P , и появляться при нарушении этого условия. При этом в некотором диапазоне изменения n_L интенсивность рассеяния $I \sim (n_P - n_L)^2 \sim [(Na)_L - (Na)_P]^2$.

Для регистрации только рассеянных нейтронов перед детектором устанавливается кадмиевый поглотитель, полностью перекрывающий падающий пучок и не мешающий рассеянным на малые углы нейтронам. Отсутствие малоуглового рассеяния означает, что $(Na)_L = (Na)_P$, откуда определяется неизвестное значение a_P . В результате проведенных измерений для длины когерентного рассеяния порошка вольфрама (90,7% ^{186}W) получено $a = (-0,466 \pm 0,006)$ фм [30].

Для проведения нейтронографических экспериментов были использованы два монокристалла-шарика диаметром 5 мм из двух разных изотопических смесей. Одна содержала 90,7% ^{186}W ($a = -0,466$ фм), вторая ($a = +0,267$ фм) была приготовлена из первой добавлением 14% естественного вольфрама. Основные измерения [31] проводились в 1968—1969 и 1973 гг. на установках стационарного реактора филиала Физико-химического института им. Карпова, имеющих кристаллические монохроматоры для выделения нейтронов с длиной волны $\lambda = 1,17$ Å. Монохроматором одной из установок служил кристалл меди с мозаичностью $\approx 40'$. Использовалось отражение (331). Угол скольжения монохроматора составлял $\theta_M = 45^\circ$, угол раствора первичного коллиматора $\alpha_0 = 30'$. Примесь нейтронов с длиной волны $\lambda/2$ не превышала 5%, $\Delta\lambda/\lambda \approx 2\%$. После отражения от монохроматора пучок проходил через стальной коллиматор с угловым раствором $\alpha_1 = 40'$ и попадал на изучаемый монокристалл. Мозаичность мо-

нокристалла была около $40'$. Дифрагированные на монокристалле нейтроны регистрировались пропорциональным счетчиком, наполненным ^3He до давления 10 атм. Счетчик находился на расстоянии 40 см от образца и имел коллимационное окно размером 20×30 мм. Все измерения проводились методом $\theta - 2\theta$. Апертура детектора и размеры коллимационной системы были выбраны таким образом, чтобы удовлетворить условиям, при которых измеряется полная интегральная интенсивность при всех отражениях. Выполнение этих условий контролировалось. Так, для передних и задних рефлексов экспериментально определялись размеры отраженного от кристалла пучка. Эти размеры оказались значительно меньше углового раствора детектора как по горизонтали, так и по вертикали.

Также экспериментально был исследован вопрос о возможном перемещении отраженного пучка по окну детектора при движении образца и детектора. Найдено, что эти перемещения не превышали нескольких миллиметров, следовательно, отраженный пучок не мог выходить за пределы окна. Подтверждением правильности измерений полных интегральных интенсивностей отражений является совпадение угловой зависимости этих интенсивностей с аналогичными измерениями на второй установке, имеющей следующие параметры: монохроматор Pb при отражении (110), $\lambda = 1,145 \text{ \AA}$, $\theta_M = 11^\circ$, $\alpha_0 \approx 2,5^\circ$, $\alpha_1 \approx 30'$, а также на дифрактометре ПИЯФ. Эти установки сильно отличались по своим параметрам, тем не менее результаты измерений полностью совпадали.

При фиксированной длине волны измерялись интегральные интенсивности $I_{(hkl)}$ восьми отражений: (110), (200), (220), (310), (400), (330), (420), (510). Поскольку вольфрам — парамагнетик, ожидалось, что магнитное рассеяние не должно давать вклада в брэгговские отражения, и интегральная интенсивность дифракционного пика [31]:

$$I_{(hkl)} = C(a + Zf_{ne})^2 A_{(hkl)} \frac{\exp[-2B(\sin \theta / \lambda)^2]}{\sin 2\theta}, \quad (42)$$

где C — константа, $A_{(hkl)}$ — фактор поглощения, $\exp[-2B(\sin \theta / \lambda)^2]$ — фактор Дебая—Валлера, учитывающий влияние тепловых колебаний атомов, θ — угол Брэгга. Фактор поглощения рассчитывался, изменения этого фактора от отражения (110) к отражению (510) не превышали 4%. Поскольку в литературе имелись очень противоречивые сведения о значении B для вольфрама, были предприняты попытки рассчитать этот фактор, а также определить его экспериментально. Расчеты проведены на основе информации о теплоемкости вольфрама и его фононном спектре. Они дали значения $B = 0,162 \text{ \AA}^2$ и $B = 0,167 \text{ \AA}^2$ [32]. Измерения B проводились на том же монохроматоре, на котором снимались нейтронограммы

монокристаллов-шариков ^{186}W . Методика заключалась в анализе угловой зависимости интегральной интенсивности дифракционных пиков, возникающих при рассеянии нейтронов на спрессованном порошке естественного вольфрама. Эти измерения, проведенные при $T = 293$ К, дали значение $B = (0,19 \pm 0,02) \text{ \AA}^2$. Помимо этого, на импульсном реакторе ИБР-30 ОИЯИ методом времени пролета измерялись интегральные интенсивности дифракционных пиков при температурах $T = 293$ и 80 К. Из измерений со спрессованным порошком естественного вольфрама было получено $B = (0,17 \pm 0,02) \text{ \AA}^2$, а с цилиндрическим монокристаллом ^{186}W $B = (0,15 \pm 0,01) \text{ \AA}^2$. В дальнейшем при обработке результатов измерений было принято $B = 0,17 \text{ \AA}^2$.

Из выражения (42) следует, что зависимость

$$\left(I_{(\text{hkl})} \frac{\sin 2\theta \exp [2B(\sin \theta / \lambda)^2]}{A_{\text{hkl}} C} \right)^{1/2} = a + Zfa_{ne} \quad (43)$$

от Zf должна быть линейной, и наклон прямой обусловлен величиной a_{ne} . Однако из полученных экспериментальных данных [31] следовало, что описать эти данные для двух разных изотопических смесей вольфрама с одним значением величины a_{ne} невозможно (см. рис.2). Величины a_{ne} отличались примерно вдвое. Более детальное рассмотрение показывает, что такое описание полученных результатов линейной зависимостью вообще неудовлетворительно ($\chi^2 \approx 65$). В связи с этим был рассмотрен ряд причин, приводящих к подобной ситуации, в частности, влияние экстинкции и теплового диффузного рассеяния (ТДР). Ввиду малости сечения рассеяния влиянием экстинкции можно пренебречь, т.к. известный критерий тонкого кристалла [33] в нашем случае перевыполнен в 250 раз. Как показали расчеты, вклад от ТДР в дифракционные пики не превышает 1,5%. Кроме того, известно, что вклад ТДР пропорционален температуре образца и обратно пропорционален λ^3 . При существенном влиянии ТДР эти эффекты были бы замечены в экспериментах по определению фактора Дебая—Валлера при разных температурах, а также при сравнении результатов измерений на разных установках.

После поиска простых причин, объясняющих расхождение между теорией и экспериментом, автором совместно с Игнатовичем была выдвинута гипотеза [34] о дополнительном рассеянии, дающем вклад в брэгговские пики. Оно обусловлено рассеянием нейтронов на существующих в исследуемом вольфраме областях упорядочения магнитных моментов. Позднее эта гипотеза получила экспериментальное подтверждение в других опытах, проведенных в ЛНФ ОИЯИ совместно с ПИЯФ (Гатчина) и с ИЯФ (Ржеж,

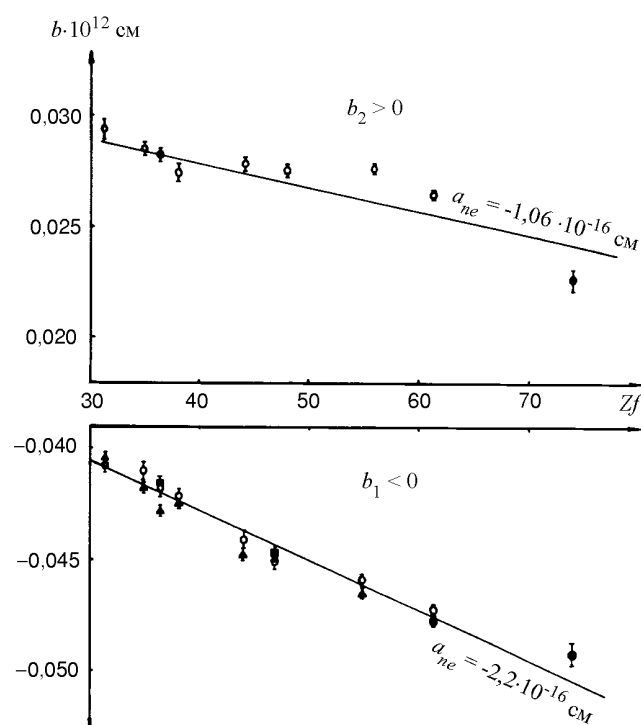


Рис.2. Экспериментальная зависимость длин когерентного рассеяния нейтронов для двух разных изотопических смесей вольфрама от Zf , $\frac{bA}{A+1} = a + Zf(\sin \theta / \lambda)a_{ne}$

Чехия) (рассеяние нейтронов на образцах ^{186}W на малые углы с деполяризацией нейтронов [35], деполяризация нейтронов при дифракции на ^{186}W [36]). Активационный анализ показал, что исследуемый вольфрам содержит микропримесь кобальта. Вокруг атомов кобальта образуются магнитные кластеры из большого числа (порядка сотен) атомов вольфрама. Таким образом, в ЛНФ была обнаружена возможность существования в вольфраме гетерофазного состояния, т.е. состояния, обладающего одновременно свойствами симметрии двух фаз — парамагнитной и ферромагнитной. И хотя исследование гетерофазных состояний стали в настоящее время одним из направлений физики (см., например, [37—39]), для сотрудников ЛНФ это было одной из методических трудностей, на преодоление которой

ушло несколько лет. Аналогичные эффекты наблюдались другими исследователями [40—42], например в палладии, содержащем примеси кобальта или железа, в парамагнитном железе и в некоторых других системах. Заметим, что наличие магнитных примесей не является необходимым условием образования гетерофазного состояния. Важную роль при этом играют гетерофазные флуктуации, существующие в очень широкой области температур [37,38].

С учетом образования магнитных кластеров формула (42) принимает вид, соответствующий описанию совместного ядерного и ферромагнитного рассеяния [31,33]:

$$I_{(hkl)} = C [(a + Zfa_{ne})^2 + p^2] A_{(hkl)} \frac{\exp [-2B(\sin \theta / \lambda)^2]}{\sin 2\theta}, \quad (44)$$

где $p^2 = (2/3) f_m^2 a_m^2$; f_m и a_m — формфактор и длина магнитного рассеяния.

С учетом явления образования магнитных кластеров в ЛНФ было найдено [31,35] значение

$$a_{ne} = (-1,60 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ фм}, \quad (45)$$

а зависимость длин когерентного рассеяния для двух изотопических смесей вольфрама, полученная с учетом p^2 (см. (44)) приведена на рис.3. Поскольку отношение $p^2 / (a + Zfa_{ne})^2$ даже для ^{186}W оказывается лишь порядка 10—20%, наблюдать проявление p^2 в опытах с естественным вольфрамом практически невозможно.

Результаты рассматриваемых ниже экспериментов по определению a_{ne} можно обрабатывать, пользуясь двумя методами. Оба метода базируются на измерениях энергетической зависимости $\sigma_{\text{tot}}(E)$ в интервале энергий от 1 эВ и выше (вплоть до нескольких килоэлектронвольт) и, как правило, на измерениях длин когерентного рассеяния нейтронов при низких энергиях (λ порядка нескольких ангстрем). Для определения величины a_{ne} в первом методе проводится обработка зависимости σ_{tot} от энергии, включающей в себя целый ряд неизвестных параметров: радиус ядра, резонансное рассеяние, ne -взаимодействие и др. С помощью подобной методики обрабатывались данные работ [43—45] и ряда других. Одной из наиболее существенных и трудно определяемых поправок в этих экспериментах является резонансное рассеяние, учет которого затруднителен, поскольку отсутствует полная информация о параметрах резонансов, особенно в области отрицательных энергий нейтронов.

Вторая методика обработки, разработанная и впервые примененная в Дубне в работе [46], заключается в использовании формулы, согласно кото-

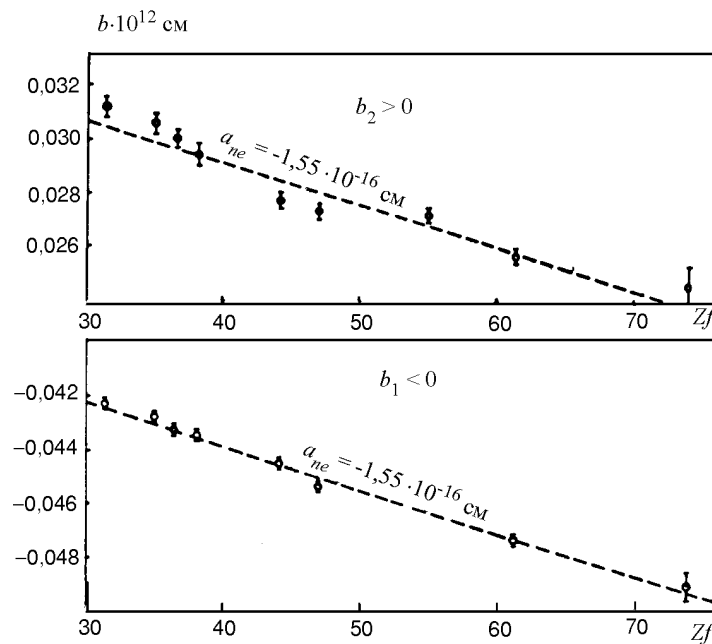


Рис. 3. Экспериментальная зависимость длин когерентного рассеяния нейтронов для двух разных изотопических смесей вольфрама от Zf , полученная после учета p^2

рой обрабатываются разности измеренных величин (см. ниже ф-лу (53)). Данная формула не содержит радиус ядра, а влияние резонансного рассеяния существенно меньше, чем в первом методе. Как будет показано ниже, для четно-четных ядер (например, для ядра ^{208}Pb) резонансное рассеяние практически не сказывается на результатах определения a_{ne} .

В 1976—1995 гг. с целью изучения ne -рассеяния, а также электрической поляризуемости нейтрона, Кестер с сотрудниками (Гархинг, Германия) и в сотрудничестве с ЛНФ ОИЯИ [43,44,47-49] проводил измерения длин когерентного рассеяния нейтронов на свинце, висмуте и изотопе свинца-208 на гравитационном рефрактометре нейтронов (см., например, [10]), а также методом рассеяния нейтронов на малые углы с помощью фильтров Кристиансена. Полученные данные сопоставлялись с данными о полных сечениях нейтронов на тех же веществах при энергиях нейтронов, соответствующих резонансам родия (1,26 эВ), серебра (5,19 эВ), вольфрама (18,8 эВ) и кобальта (132 эВ). Измерения проводились на резонансном детекторе непрерывного действия, представляющем собой вращающиеся диски, изготов-

ленные из фольг резонансных поглотителей. В верхней части диски активировались в пучке нейтронов, а в диаметрально противоположной части активность регистрировалась с помощью счетчиков β -излучения. Подобное устройство обеспечивало высокую статистическую точность проводимых измерений. Позднее проводились измерения еще в двух энергетических точках: 1,97 и 143 кэВ. Нейтроны с такими энергиями были получены с помощью техники двойного резонансного рассеяния и фильтров нейтронных пучков (см., например, [47]). Результаты измерений σ_{tot} для энергии нейтронов 143 кэВ приведены в [50]. В этой же работе отмечено, что при данной энергии, по-видимому, имеется дополнительный вклад резонансного рассеяния, не учтенного при анализе результатов эксперимента. Чтобы от полных сечений перейти к сечениям упругого рассеяния и экстраполировать их в область тепловых энергий, необходимо внести в результаты измерений поправки на упругое некогерентное рассеяние, эффекты, связанные с агрегатным состоянием вещества, швингеровское рассеяние и энергетическую зависимость рассеяния, обусловленную резонансами. Обработка результатов измерений дала

$$a_{ne} = (-1,32 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ фм.} \quad (46)$$

Однако значение (46), по-моему, не может не вызывать сомнений. Дело в том, что учет энергетической зависимости рассеяния от вклада неизвестных резонансов и резонансов с отрицательной энергией в полное сечение выполнялся в Гархинге в работе [44] и частично в итоговой работе [49] на основе знания средних параметров s -рассеяния [17]: силовой функции $s_0 = \Gamma_n^0 / D_0$, равной, например для висмута, $0,65 \pm 0,15$ [17], и среднего расстояния между уровнями $\langle D_0 \rangle = (4,5 \pm 0,6)$ кэВ (также для висмута [17]). При этом можно легко ошибиться, т.к. резонанс (или несколько резонансов) при $E_{0j} < 0$, например, может лежать на расстоянии $|E_{0j}| < \langle D_0 \rangle$ от точки $E = 0$. Кроме того, погрешности известных значений s_0 и $\langle D_0 \rangle$ довольно большие (для висмута до 23%).

Более реалистичным представляется результат, полученный в ЛНФ в 1985 году из измерений полного сечения висмута в интервале энергий $1 \div 130$ эВ на пучке импульсного реактора ИБР-30 по методу времени пролета [46]. Возможность совместного описания ядерного, ne -рассеяния и рассеяния, обусловленного влиянием электрической поляризуемости нейтрона, при этих энергиях была также рассмотрена в работах ЛНФ [10,46,51,52]. Воспользуемся формализмом [16], обычно применяемым при рассмотрении задачи рассеяния частицы на сумме коротко- и дальнедействующего потенциалов. Суммарную амплитуду f_t рассеяния нейтронов на атоме можно вы-

разить через фазы δ_l — ядерного, η_l — ne - и ϵ_l — поляризационного рассеяний:

$$f_t = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) \{S_l \exp [2i(\eta_l + \epsilon_l)] - 1\} P_l(\cos \varphi), \quad (47)$$

где S_l — матрица ядерного рассеяния. В качестве матрицы ядерного рассеяния можно взять в первом приближении общепринятую

$$S_l = \left(1 - \sum_i \frac{i \Gamma_{ni}}{\Delta E_i + i \Gamma_i / 2} \right) \exp (2i \delta_l), \quad (48)$$

где $\Delta E_i = E - E_i$, E_i — энергия i -го резонанса, Γ_{ni} , Γ_i — нейтронная и полная ширины i -го резонанса.

В случае низких энергий, когда для ядра существенно лишь s -рассеяние, выражение (47) можно привести к виду:

$$f_t = \frac{1}{2ik} (S_0 - 1) \exp [2i (\eta_0 + \epsilon_0)] + \\ + \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \sin (\eta_l + \epsilon_l) \exp [i (\eta_l + \epsilon_l)] P_l(\cos \varphi). \quad (49)$$

Рассмотрим сначала случай потенциального рассеяния (без учета резонансов). Если для определения ne - и поляризационного ($f_n(\varphi)$) рассеяний воспользоваться первым борновским приближением, то получим

$$f_t = \frac{1}{2ik} [\exp (2i \delta_0) - 1] \exp [2i (\epsilon_0 + \eta_0) + f_n(\varphi) + Zf(\sin \varphi / \lambda) a_{ne}], \quad (50)$$

где $f(\sin \varphi / \lambda)$ — атомный формфактор, $\epsilon_0 = M\alpha_n(Ze/h)^2(k/R - \pi k^2/3) + \dots$ — фаза поляризационного рассеяния [10], α_n — коэффициент электрической поляризуемости нейтрона, $\eta_0 = ka_{ne}/2 \int_0^\pi f(\sin \varphi / \lambda) \sin \varphi d\varphi$ — фаза ne -рассеяния [10]. Из (50) следует, что

$$\operatorname{Re} f_t = \sin \delta_0 \cos [\delta_0 + 2(\eta_0 + \epsilon_0)] / k + f_n(\varphi) + Zf(\sin \varphi / \lambda) a_{ne} = \\ = -b_{\text{coh}} A / (A + 1), \quad (51)$$

$$\operatorname{Im} f_t(0) = \sin \delta_0 \sin [\delta_0 + 2(\eta_0 + \epsilon_0)] / k = k \sigma_{\text{tot}} / (4\pi). \quad (52)$$

Выражения (51) и (52) содержат неизвестные δ_0 , a_{ne} и α_n , которые можно найти, подставив в (51) и (52) экспериментальные значения b_{coh} и σ_{tot} , полученные при нескольких энергиях.

С учетом резонансов уравнения (51) и (52) имеют вид

$$\operatorname{Re} f_t = \frac{1}{k} \left\{ \sin \delta_0 \cos [\delta_0 + 2(\eta_0 + \varepsilon_0)] - \frac{1}{2} \cos 2(\delta_0 + \eta_0 + \varepsilon_0) \sum_i \frac{g \Gamma_{ni} \Delta E_i}{\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sin 2(\delta_0 + \eta_0 + \varepsilon_0) \sum_i \frac{\Gamma_{ni} \Gamma_i/2}{(\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4)} \right\} \approx \delta_0/k - \frac{1}{2k} \sum_i \frac{g \Gamma_{ni} \Delta E_i}{(\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4)}, \quad (51')$$

$$\operatorname{Im} f_t(0)/k = \sigma_{tot}/4\pi = \\ = \frac{1}{k^2} \left\{ \sin \delta_0 \sin [\delta_0 + 2(\eta_0 + \varepsilon_0)] - \frac{1}{2} \sin 2(\delta_0 + \eta_0 + \varepsilon_0) \sum_i \frac{g \Gamma_{ni} \Delta E_i}{(\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cos 2(\eta_0 + \varepsilon_0) \sum_i \frac{g \Gamma_n^2}{(\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4)} + \frac{1}{4} \cos 2(\eta_0 + \varepsilon_0) \sum_i \frac{g \Gamma_{ni} \Gamma_i}{(\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4)} \right\}, \quad (52')$$

откуда можно получить формулу, с помощью которой обрабатывались экспериментальные данные, полученные в [46]:

$$y = \sigma_{tot}(E')/4\pi - b_{coh}^2 A/(A+1) = a_{ne}^2 (Z-F)^2 - 2a_{ne} b_{coh} A(Z-F)/(A+1) - \\ - f^2 + 2a_{ne} fF + 2/3\pi k' Rf b_{coh} (A/(A+1) - \\ - (\Sigma_1 - \Sigma)[b_{coh} A/(A+1) - a_{ne}(Z-F) + \pi k' Rf/3] + \\ + (\Sigma_1)^2/4 - \Sigma_1 \Sigma/2 + \Sigma_2/4 + \sigma_{abs}(E')/(4\pi), \quad (53)$$

где $f = \frac{M\alpha_n}{R} \left(\frac{Ze}{h} \right)^2$ — амплитуда рассеяния, обусловленная электрической

поляризуемостью нейтрона, $F = \frac{Z}{2} \int_0^\pi f(\sin \theta/\lambda) \sin \theta d\theta$ — проинтегриро-

ванный по углам атомный формфактор, E и E' — энергии нейтронов, при

которых измерены b_{coh} и σ_{tot} , $\sigma_{abs}(E') = \frac{\pi}{k'^2} \sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni}' \Gamma_{\gamma i}}{(\Delta E_i'^2 + \Gamma_i'^2/4)}$ — сечение

поглощения, E_i , Γ_{ni} , $\Gamma_{\gamma i}$ — энергия, нейтронные и γ -ширины i -го резонанса,

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni} \Delta E_i}{k(\Delta E_i^2 + \Gamma_i^2/4)}, \\ \Sigma &= \sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni}' \Delta E_i'}{k'(\Delta E_i'^2 + \Gamma_i'^2/4)}, \\ \Sigma_2 &= \sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni}^2}{k'^2(\Delta E_i'^2 + \Gamma_i'^2/4)}.\end{aligned}\quad (54)$$

Для висмута было найдено $y \approx 0,015 \div 0,020$ б/ср.

При условиях $E \ll E_i$ и $\Gamma_i \ll \Delta E_i$ члены, содержащие резонансы, можно представить в виде разложений в ряд по E/E_i и получить [46]:

$$p_1 = \Sigma_1 - \Sigma \simeq E' \frac{k' \sigma_{\text{abs}}(E')}{\pi \langle \Gamma_{\gamma} \rangle} \quad (55)$$

и

$$p_2 = \frac{1}{4} (\Sigma_1)^2 - \frac{1}{2} \Sigma_1 \Sigma + \frac{1}{4} \Sigma_2 \simeq \frac{1}{4} \sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni}^2}{k_i^2 E_i^2} - \frac{1}{4} \left(\sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni}}{k_i E_i} \right)^2 \quad (56)$$

(без учета межрезонансного интерференционного вклада $\sigma_{\text{int}}/(4\pi)$).

Вклад члена p_i в величину y можно определить, подставив в (55) численные значения $\sigma_{\text{abs}}(E)$ и $\langle \Gamma_{\gamma} \rangle$, известные из литературы (см., например, [17]). Так, например, для висмута произведение $p_1 b_{\text{coh}} = 5,12 \cdot 10^{-4}$ б/ср при энергии нейтронов 10 эВ. Что касается члена p_2 , учитывающего вклад резонансов, а также межрезонансного интерференционного члена, то его вклад в y , как показывают оценки, составляет для висмута несколько процентов, однако определить точное его значение не представляется возможным из-за отсутствия информации об уровнях с отрицательной энергией. Значение его следует варьировать, что и было сделано в работе [46], и выбирать, исходя из лучшего описания экспериментальных данных (об аналитическом определении $p_2 + \sigma_{\text{int}}/(4\pi)$ см. ниже).

Измерения в работе [46] проводились на 60-метровой пролетной базе как с расплавленным, так и с твердым образцом висмута толщиной 18 мм. Уровень фона, измеренного с помощью помещения в пучок пластин родия,

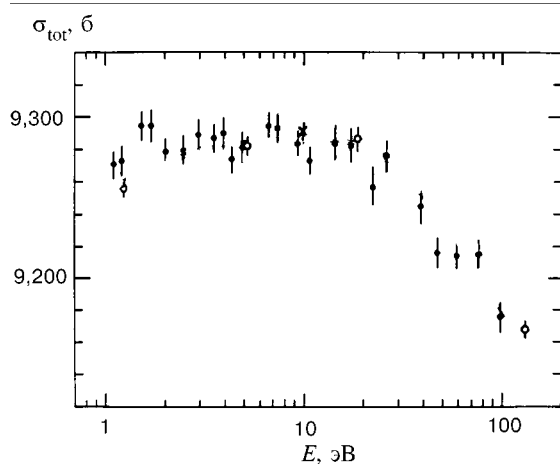


Рис.4. Зависимость σ_{tot} от энергии нейтронов E : (●) — данные ЛНФ [46]; (○) и (×) — данные гархингской лаборатории [43,44,53]

серебра и вольфрама (энергии резонансов 1,26; 5,19 и 18,83 эВ), был низким (при энергиях 1÷6 эВ он составлял $0,3 \pm 0,4\%$ и не превышал 1,5% при энергии порядка 20 эВ). Детектором служил наполненный газом до давления 8 атм ^3He -счетчик. Поправка на мертвое время была найдена путем пропускания нейтронов через свинцовые пластины различных толщин. Она не превышала 1,5%. Расстояние между детектором и образцом (порядка 2 м) исключало возможность влияния на энергетический ход σ_{tot} рассеяния нейтронов на малые углы (об этом эффекте см. ниже). Энергетическая зависимость полного сечения взаимодействия нейтронов с висмутом, полученная в работе [46], приведена на рис.4. Предварительно в экспериментальные данные, обработанные в интервале энергий 1÷20 эВ, вносились поправки, вызванные швингеровским рассеянием и агрегатным состоянием образца. Для висмута они не превышали 0,8% от полного сечения. На том же рисунке приведены значения $\sigma_{\text{tot}}(E)$, измеренные в гархингской лаборатории (Мюнхен) [43,44,53]. Они были использованы для определения абсолютных значений σ_{tot} , полученных в работе [46]. Межрезонансный интерференционный член был получен с помощью соответствующих матриц рассеяния (см. ниже). Для известных резонансов висмута он составлял при энергии нейтронов 10 эВ: $\Delta\sigma_{\text{int}} = 0,108 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, что приблизительно в 90 раз меньше полного сечения висмута. При энергиях менее 50 эВ для висмута его можно считать практически не зависящим от энергии нейтронов. Вследствие этого добавление к члену p_2 (см. ф-лу (56)) дополнительного вклада $\Delta\sigma_{\text{int}}$ не может изменить результат определения a_{ne} в работе [46],

хотя, конечно, изменит аналитическое выражение p_2 . В работе [46] член p_2 считался неизвестным и варьировался, чтобы достигнуть лучшего описания экспериментальных данных формулой (53). Экспериментальные данные обрабатывались методом наименьших квадратов. Значение члена p_2 было найдено равным $-0,0023$ б/ср. С таким значением p_2 были обработаны отдельно данные работ гархингской группы [43,44,53]. Результаты обработки приведены в табл.1.

Таблица 1

Эксперимент	a_{ne} , фм
Гархинг [43,44,53]	$(-1,57 \pm 0,10) \cdot 10^{-3}$
Дубна [46]	$(-1,55 \pm 0,11) \cdot 10^{-3}$

Таким образом, после обработки результатов гархингского эксперимента с учетом определенного в работе [46] значения p_2 видно увеличение абсолютного значения a_{ne} , приведенного в табл.1, примерно в 1,2 раза и $\langle r_{E,in}^2 \rangle_N < 0$. Полученные данные о значении a_{ne} согласуются с данными дифракционных измерений в Дубне [31], проведенных с монокристаллами вольфрама.

В 1994—1995 гг. в ЛНФ ОИЯИ также получен [54] еще один результат измерения длины рассеяния нейтрона на электроны. Измерения полного нейтронного сечения проводились на образце свинца, содержащего 98,3% изотопа ^{208}Pb и имеющего чистоту 99,98%. Образец представлял собой металлический цилиндр диаметром 15 мм и толщиной 20,8 мм. Диаметр нейтронного пучка составлял 11 мм на поверхности образца. Измерения проводились на 70-метровой пролетной базе бустера ИБР-30 по методу времени пролета. Нейтронный детектор представлял собой цилиндр длиной 20 см и был наполнен ^3He до давления 10 атм. Детектор устанавливался на расстоянии 1 м от образца, и при энергиях нейтронов от 1 эВ до 24 кэВ, таким образом, исключалось возможное влияние рассеяния на малые углы на энергетический ход сечения свинца (об этом влиянии см. ниже). Чтобы узнать вклад фона в измеряемое полное сечение свинца при энергии нейтронов до 100 эВ, применялись «черные» фильтры из Cd, Ag, W и Co. Второй диапазон энергии нейтронов 3+8 кэВ выделялся в дополнение к методу времени пролета четырехсантиметровым фильтром из Na_2CO_3 (резонанс

^{23}Na при энергии 2,85 кэВ) и десятисантиметровым фильтром ^{60}Ni , имеющего сильное изменение сечения от 0,01 до 200 б в интервале энергий нейтронов 4÷12 кэВ. Наконец, третий интервал в районе 24 кэВ дополнительно выделялся с помощью фильтров железа (24 см) и алюминия (10 или 20 см).

Одной из существенных поправок, вносимых авторами работы при определении абсолютного значения σ_{tot} , была поправка на мертвое время электронной системы (включая детектор). Погрешность в измерении σ_{tot} при внесении такой поправки достигала значения порядка $\Delta\sigma_{\text{tot}} \approx \pm 7$ мб. Однако, поскольку величина a_{ne} зависит главным образом от энергетического хода кривой $\sigma_{\text{tot}}(E)$, введение поправки на мертвое время вряд ли сильно скажется на определяемой величине a_{ne} . Сечение рассеяния σ_s было получено из σ_{tot} после вычитания сечения захвата, вклада твердотельных эффектов и сечения швингеровского рассеяния. Наконец, сечение потенциального рассеяния нейтронов $\sigma_{\text{pot}}^{208}$ на изотопе свинца-208 определялось из σ_s . При этом учитывался вклад остальных изотопов и s -волновых резонансных эффектов нуклида ^{208}Pb .

Полагая $\sigma_{\text{pot}}^{208} = (4\pi/k^2) \sin^2 \delta_0$, где $\delta_0 = -k(R + a_{ne}ZF + a_pQ)$ — суммарная фаза рассеяния, $R = R_0 - hE$, h учитывает вклад неизвестных резонансов ^{208}Pb , a_p — амплитуда рассеяния, обусловленного электрической поляризуемостью нейтрона, $Q = 1 - (5\pi/18)kR_N + \dots$, F — проинтегрированный по углам атомный формфактор, проводили фитирование параметров R_0 , h , a_{ne} и a_p . В результате для a_{ne} было получено

$$a_{ne} = (-1,67 \pm 0,16) \cdot 10^{-3} \text{ фм} \quad (57)$$

при значении χ^2 примерно вдвое меньше, чем при $a_{ne} = -1,32 \cdot 10^{-3}$ фм. Однако измерения [54], проведенные в ЛНФ, не достигли пока нужной точности, чтобы делать уверенные выводы о величине a_{ne} .

Из имеющихся к настоящему времени экспериментов заслуживают внимания результаты совместной австрийско-американской работы, выполненной в 1992—1995 гг. в Ок-Ридже на импульсном нейтронном источнике ORELA [45]. Эксперименты в основном базировались на подходе, положенном в основу более ранних измерений [20]. Однако был сделан целый ряд существенных усовершенствований. В основном они заключаются в следующем. Использование метода времени пролета позволило значительно более корректно определять энергию нейтронов, чем это делалось авторами рабо-

Таблица 2

Авторы	Метод	Мишень	Величина эффекта	$a_{ne} \cdot 10^{+3}$, фм
В.Хавенс и др., [18] 1947—1951 гг.	Энергетическая зависимость полного сечения	Свинец и висмут	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 1,5\%$	$1,91 \pm 0,36$
Д.Юз и др., [25] 1952—1953 гг.	Отражение нейтронов	Зеркало O_2 —Bi	$\Delta \theta / \theta \approx 50\%$	$1,39 \pm 0,13$
Е.Мелконьян и др. [20] 1959 г.	Энергетическая зависимость полного сечения	Висмут	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 1,5\%$	$1,56 \pm 0,05$
В.Крон, Г.Ринго, [15] 1966—1973 гг.	Асимметрия рассеяния	Благородные газы	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 0,5\%$	$1,33 \pm 0,03$
Л.Кестер и др. [43,44,47,49] 1976—1995 гг.	Энергетическая зависимость полного сечения и измерение длин рассеяния	Висмут, свинец и свинец-208	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 1,2\%$	$1,32 \pm 0,03$
Ю.Александров и др. [46] 1985 г.	Энергетическая зависимость полного сечения	Висмут	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 1,2\%$	$1,55 \pm 0,11$
С.Копецкий и др. [45,63] 1994—1995 гг.	Энергетическая зависимость полного сечения	Свинец (72,5% ^{208}Pb)	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 1,2\%$	$1,31 \pm 0,03 \pm 0,04$
Т.Еник и др. [54] 1995 г.	Энергетическая зависимость полного сечения	Свинец-208	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 1,2\%$	$1,67 \pm 0,16$
Ю.Александров и др. [31,35] 1974—1985 г.	Дифракция нейтронов	Вольфрам-186, монокристалл	$\Delta \sigma_{ne} / \sigma_{tot} \approx 20\%$	$1,60 \pm 0,05$

ты [20], использующими кристаллический спектрометр (энергии 0,1, 0,28, 1,0 и 4 эВ). Примесь нейтронов иных энергий от более высоких порядков отражений, имевшаяся в работе [20], таким образом, была устранена. При проведении измерений по методу времени пролета не нужно было изменять геометрию эксперимента. Она одна и та же для всех энергий нейтронов падающего пучка, в то время как в работе [20] следовало изменять угол рассеяния кристаллического спектрометра. Благодаря увеличению толщины образца чувствительность данной работы к измеряемому *ne*-эффекту была выше, чем в прежнем эксперименте [20]: изменение пропускания образца из-за *ne*-взаимодействия составляло $\approx 3\%$ при изменении энергии нейтронов от 0,1 до 2 эВ (в [20] оно было около 1,4%).

Детектор представлял собой литиевое стекло и был расположен на расстоянии 18,8 м от нейтронного источника. Расстояние от источника до образца и резонансных фильтров для определения фона составляло 5, 9 и 10 м. В интервале нейтронных энергий от 0,1 до 100 эВ отношение числа полезных отсчетов к фону достигало 1500. Мертвое время системы составляло менее 0,5% для нейтронного пучка без образца и порядка 0,1% с образцом.

Пропускание пучка нейтронов через образец:

$$T(E) = \exp [-\sigma_{\text{tot}}(E)N], \quad (58)$$

где $N = 0,154$ атом/б — толщина используемого образца.

Полное нейтронное сечение

$$\sigma_{\text{tot}}(E) = \sigma_{\text{coh}}(E)S_{\text{coh}}(E) + \sigma_{\text{inc}}(E)S_{\text{inc}}(E) + \sigma_{\text{abs}}(E), \quad (59)$$

где $S_{\text{coh}}(E)$ и $S_{\text{inc}}(E)$ — функции, описывающие поправки, обусловленные агрегатным состоянием образца.

Изотопический состав используемого свинцового образца 72,54% ^{208}Pb , 1,65% ^{207}Pb , 25,82% ^{206}Pb и 0,5% ^{204}Pb обеспечивал очень небольшое сечение захвата нейтронов σ_{abs} (при 1 эВ порядка 3 мб). Образец находился в жидком состоянии при температуре ~ 625 К.

Сечение когерентного рассеяния (в первом борновском приближении)

$$\sigma_{\text{coh}}(E) = 4\pi \{a_{\text{coh}}(E) + a_R(E) - a_{ne}Z[1 - f(\sin \theta / \lambda)] + a_p(E)\}^2 \sigma_{\text{Sch}}(E), \quad (60)$$

где $a_{\text{coh}}(E)$ — длина ядерного когерентного рассеяния, $a_R(E)$ — длина резонансного ядерного рассеяния, $a_p(E)$ — длина рассеяния, обусловленная электрической поляризуемостью нейтрона, $\sigma_{\text{Sch}}(E)$ — сечение швингеровского рассеяния.

Полученные из эксперимента данные по пропусканию обрабатывались по методу наименьших квадратов. Варьировалась величина a_{ne} и нормировочный параметр (ядерная когерентная длина рассеяния висмута) в интервале энергий 0,1 ÷ 360 эВ. В результате определен

$$a_{ne} = (-1,31 \pm 0,03 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ фм}, \quad (61)$$

откуда следует согласно (16) и (20)

$$\langle r_E^2 \rangle = (-0,113 \pm 0,003 \pm 0,004) \text{ фм}^2 \quad (62)$$

или $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle > 0$ (согласно (19)). Первая погрешность в (61) и (62) — статистическая, вторая — систематическая. Главным образом, погреш-

ности (точнее, $\approx 75\%$) вызваны неточностями при вычислении поправок, обусловленных агрегатным состоянием вещества. Остальные 25% погрешности вызваны неточностями при определении фона, вклада резонансного рассеяния и мертвого времени системы.

Следует заметить, что, поскольку поправочные функции $S_{\text{coh}}(E)$ и $S_{\text{inc}}(E)$ сильно возрастают при уменьшении энергии нейтронов, фитирование данных по пропусканию проводилось для различных энергетических интервалов независимым образом. Важно отметить также, что величина a_{ne} зависит лишь от энергетической зависимости $\sigma_{\text{tot}}(E)$, но не от абсолютного значения σ_{tot} .

Результаты измерений длин ne -рассеяния, проводившихся в период 1947—1995 гг., приведены в табл.2.

Как видно из табл.2, чтобы выявить вклад $a_{ne} - a_F = (Me^2/3h^2) \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$, т.е. измерить внутренний зарядовый радиус нейтрона $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N^{1/2}$, нужно увеличить точность измерений. Все, что можно пока сказать о значении $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N^{1/2}$ — это то, что оно мало и, видимо, не превышает 0,1 фм.

Интересно отметить, что, если бы нейтрон имел значение $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N^{1/2}$ такое же, как у протона (0,83 фм), то a_{ne} имело бы значение порядка 10^{-2} фм, т.е. примерно в 6—8 раз больше значений, приведенных в таблице.

Из таблицы также следует, что имеются две группы экспериментальных результатов: $\langle a_{ne} \rangle = -1,30(3) \cdot 10^{-3}$ фм ($\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N > 0$) и $\langle a_{ne} \rangle = -1,58(3) \cdot 10^{-3}$ фм ($\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N < 0$). Корректное согласование двух групп результатов и выяснение причин расхождения было бы очень важным для теории [10,55].

5. ВНОСИМЫЕ В ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПОПРАВКИ. ИСТОЧНИКИ ВОЗМОЖНЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Определение длины рассеяния a_{ne} базируется на прецизионных измерениях полных нейтронных сечений и длин рассеяния ($\Delta \sigma_{\text{tot}} / \sigma_{\text{tot}} = \Delta a / a \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$). При достижении таких точностей необходимо внести целый ряд поправок, кроме того, возникают трудности в обнаружении и устранении возможных источников систематических погрешностей (см., например, [56]).

1. Необходимо располагать надежными методами определения фона. Как правило, фон не должен превышать 1—2% от измеряемой полезной

интенсивности. Он не должен резко меняться в зависимости от варьируемого в эксперименте параметра (например, энергии нейтронов или угла рассеяния).

2. При измерении полных сечений необходимо свести к минимуму поправку на просчеты детектора при больших импульсных нагрузках. Как правило, мертвое время детектора и тракта электроники должно быть не более 0,5 мкс.

3. Следует быть очень внимательным к эффектам, искажающим непосредственно измеряемые величины. Так, при измерении полных сечений на больших пролетных базах (см., например, [45]) при малом телесном угле детектора энергетический ход сечения может исказиться вследствие рассеяния нейтронов в образце на малые углы. При достаточно большом телесном угле малоугловое рассеяние нейтронов всегда лежит внутри площади детектора и не оказывает влияния на измерение пропускания при различных энергиях, хотя рассеяние на малые углы сильно меняется с энергией нейтронов. Малоугловое рассеяние охватывает диапазон углов рассеяния от одной угловой секунды до нескольких градусов при длине волны нейтрона от 1 до 20 Å. Формулу для дифференциального сечения рассеяния нейтронов на малые углы можно найти в целом ряде опубликованных работ, в частности, в [57,58]. Для имеющихся в образце сферических неоднородностей радиуса R (обычно $R \approx 20\div 40$ Å), сечение имеет вид

$$\sigma_{sa}(\theta) = Na^2 \exp(\kappa^2 R^2 / 5), \quad (63)$$

где $\kappa = 2k \sin(\theta/2) \approx k\theta$, a — длина рассеяния, N — число рассеивающих атомов в каждой неоднородности. Малоугловое рассеяние нейтронов происходит на отдельных неоднородностях, вследствие чего появляется дополнительная составляющая рассеянного образцом нейтронного пучка. Сечение $\sigma_{sa}(\theta)$ при $\theta = 0$, т.е. вперед, может быть очень значительным, однако оно быстро спадает с ростом угла рассеяния.

Причины, обуславливающие рассеяние на малые углы, разнообразны (кластеры дефектов структуры, магнитные гетерофазные флуктуации и т.п.). Следует заметить, что гетерофазные флуктуации могут носить динамический характер, т.е. число и размер их могут меняться со временем. Микроскопическое описание их исследуется группой теоретиков ОИЯИ (см., например, [37,38]).

Для экспериментального изучения рассеяния нейтронов на малые углы в мире создано большое число установок. Одна из них существует в ПИЯФ (Гатчина). Рассеяние нейтронов на малые углы образцом вольфрама-186 [35] изучалось именно на этой установке. Следует заметить, что, как правило, почти на всех твердых веществах рассеяние нейтронов на малые

углы имеет место. На установке ПИЯФ оно было обнаружено даже на кадмии (при $\lambda \approx 8,8 \text{ \AA}$) [35].

Систематические погрешности могут возникнуть также при недостаточно корректной обработке экспериментальных данных, в частности, при учете резонансного ядерного рассеяния. При анализе данных по полным сечениям необходимо учитывать влияние резонансов, расположенных далеко от исследуемого энергетического интервала. Если для уровней с положительной энергией такую процедуру, в принципе, можно провести для всех известных резонансов, то для уровней с отрицательной энергией она невозможна из-за скудости информации о таких уровнях. Подобные некорректности при анализе полученных экспериментальных данных были допущены, например, в работах [44,49].

В ряде работ (см., например, [54]) влияние далеких от исследуемой области энергий резонансов (в том числе и при отрицательных энергиях нейтронов) учитывалось путем добавления к радиусу рассеяния дополнительного члена hE , где h — параметр, получаемый при разложении в ряд по E/E_i первого резонансного члена в уравнении (52'):

$$h = -2276(A + 1)/(A) \sum g \Gamma_h^0/E_i^2 \text{ фм/эВ.} \quad (64)$$

Параметр h можно оценить также, измеряя энергетическую зависимость в широком интервале энергий. Подобная работа для ^{208}Pb была проведена в исследовании [59]. Здесь важно отметить также, что при обработке разности $y = \sigma_{\text{tot}}/4\pi - b_{\text{coh}}^2$ для четно-четных ядер (например, ^{208}Pb) резонансное рассеяние практически не сказывается на результатах определения величины a_{ne} (см. разд.6)

4. В электронвольтовом интервале энергий следует учесть поправки, обусловленные как интерференционным эффектом от ядер, соседних с рассматриваемым ядром, внедренным в кристаллическую решетку, так и тепловым движением атомов (эффект Доплера). Данные поправки были рассмотрены в ряде работ [60—62]. Обе поправки уменьшаются с ростом энергии нейтронов, и уже при $E \geq 1 \text{ эВ}$ можно воспользоваться интерференционным членом вида [60]:

$$\Delta \sigma = I \lambda^2 / (8\pi V_0^{2/3}), \quad (65)$$

где I — коэффициент, равный для жидкого свинца и висмута 2,885, а V_0 — объем атома. Доплеровская поправка определяется выражением [61]:

$$\sigma/\sigma_{\text{free}} = 1 + \frac{k_B T}{2E} \frac{m}{M}, \quad (66)$$

где m — масса нуклона, M — масса атома, k_B — константа Больцмана, T — температура образца в градусах Кельвина.

Аналогичные формулы можно получить и из данных [63], в результате имеем

$$S_{\text{coh}}(E) = 1 + \frac{k_B T}{2E} \frac{m}{M} - \frac{C(T)}{E} \quad (67)$$

и

$$S_{\text{inc}}(E) = 1 + \frac{k_B T}{2E} \frac{m}{M}. \quad (68)$$

Величина $C(T)$ зависит как от материала образца, так и от его температуры. В работе [63] она была определена для интервала энергий нейтронов 0,001 ÷ 500 эВ для жидкого свинца. Результаты приведены в табл.3.

Таблица 3

Температура, К	603	623	673	763
$C(T)$, 10^{-3} эВ	0,963	0,952	0,935	0,931
$I \lambda^2 / (8\pi V_0^{2/3}) E$, 10^{-3} эВ	0,966	0,966	0,966	0,966

Погрешность при определении $C(T)$ не превышает 5%.

5. В полученные экспериментальные данные следует внести поправку на швингеровское рассеяние, вызванное взаимодействием движущегося магнитного момента нейтрона с кулоновским полем ядра. Амплитуда швингеровского рассеяния, как известно, имеет вид [10]:

$$f_{\text{shv}}(\varphi) = \frac{i}{2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mu_n \left(\frac{h}{Mc} \right) \left(\frac{Ze^2}{hc} \right) [1 - f(q)] \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \quad (69)$$

где $f(q) = \frac{4\pi}{Z} \int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr} \rho(r) r^2 dr$ — атомный формфактор, хорошо известный

из теории рассеяния рентгеновского излучения атомами, $q = 2k \sin(\varphi/2)$, $\rho(r)$ — плотность электрического заряда в точке, $\boldsymbol{\sigma}$ — спиновая матрица, вектор $\mathbf{n}$ связан с $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ соотношением $[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0] = nk^2 \sin \varphi$, где, в свою очередь, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ — конечный и начальный волновые векторы рассеяния.

При измерении пропускания швингеровское рассеяние следует учитывать согласно формуле:

$$\sigma_{\text{shv}} = \frac{\pi}{2} \mu_n^2 \left(\frac{h}{Mc} \right)^2 \left(\frac{Ze^2}{hc} \right)^2 \int_{\varphi_0}^{\pi} [1 - f(q)]^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi d\varphi, \quad (70)$$

где угол рассеяния φ_0 выбирается, исходя из геометрии эксперимента.

Примеры численных значений вводимых в σ_{tot} поправок для свинца-208 в зависимости от энергии нейтронов приведены в табл.4.

Таблица 4

Энергия, эВ	Поправки к измеренным полным сечениям (в барнах)		
	S_{coh}	$\Delta \sigma = \sigma_{\text{exp}}(1 - S_{\text{coh}})$ ($\sigma_{\text{exp}} = 11$ б)	Швингеровское рассеяние (σ_{shv} , б)
1,26	0,9993436	0,0072	0,0029
5,19	0,9998407	0,0018	0,0046
10,1	0,9999181	0,0009	0,0055

6. Следует быть внимательным при введении в сечение поправки, учитывающей влияние p -волнового рассеяния. Оценки показывают, что сечение p -волнового рассеяния ($\sigma_1 = 4\pi/(k^2) 3\sin^2\delta_1$) составляет $\sim 0,5\%$ от s -волнового ($\sigma = 4\pi/(k^2) \sin^2\delta_0$) при энергии нейтронов порядка 20 кэВ. Для того чтобы учесть p -волновое рассеяние, нужно определить фазу δ_1 . В случае нейтронов можно воспользоваться соотношениями, опубликованными в [64]:

$$\exp(2i\delta_l) = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)}, \quad (71)$$

где R — радиус канала $G_l(R) = -\sqrt{\pi k R/2} N_{l+1/2}(kR)$, $F_l(R) = -\sqrt{\pi k R/2} J_{l+1/2}(kR)$. При малых энергиях ($kR \ll 1$) из (71) можно получить известное предельное выражение:

$$\delta_l \approx \frac{-(kR)^{2l+1}}{(2l-1)!!(2l+1)!!} \quad (72)$$

или $\delta_1 = -(kR)^3/3$. Вычисления [65], проведенные И.Гусевой (ПИЯФ, Гатчина), показали, что разница между значениями σ_1 при использовании (71) и (72) составляет 10% при $E = 24$ кэВ, 25% при $E = 45$ кэВ и 40% при $E = 145$ кэВ. Данный результат означает, что при оценках следует пользоваться выражением (71). Что касается эксперимента, то следует найти,

если это возможно, экспериментальные пути для определения p -волнового рассеяния, что и было сделано, например, в работе [66].

7. Следует заметить [56], что в ряде работ (например, [67,68]), использующих при обработке результатов измерений фитирование разложения полного сечения потенциального рассеяния по степеням волнового вектора k :

$$\sigma_s(k) = \sigma_s(0) + ak + bk^2 + ck^3 + dk^4 + \dots, \quad (73)$$

отсутствует, в частности, член, пропорциональный k^3 . Выражение (73), однако, можно получить, разлагая в ряд соотношение, описывающее сечение потенциального рассеяния $\sigma_s = 4\pi/(k^2) \sin \delta_0 \sin(\delta_0 + 2\eta_0)$ (см.(52)).

При этом в уравнении (73) член, пропорциональный k^3 , должен присутствовать. Отношение данного члена к члену, пропорциональному волновому вектору k , составляет $2(kR)^2/3$ и равно 7% при энергии 20 кэВ, 10% при энергии 40 кэВ и 20% при энергии 145 кэВ. Следовательно, член, пропорциональный k^3 , необходимо учитывать при обработке экспериментальных данных. Особенно это важно при проведении измерений при сравнительно больших энергиях (в килоэлектронвольтовом интервале энергий), например, при попытках [67,68] измерения электрической поляризуемости нейтрона. Следует заметить также, что форма записи сечения рассеяния нейтрона по степеням его волнового числа годится лишь в том диапазоне значений энергий, где законно выполнение равенства $\sin \delta_0 \approx \delta_0$, т.е. не более чем до нескольких единиц килоэлектронвольт. В противном случае следует учесть также, что фаза рассеяния стоит еще и под знаком косинуса.

6. УЧЕТ МЕЖРЕЗОНАНСНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Отсутствие в выражении для сечения рассеяния межрезонансных интерференционных членов является следствием определенного вида компонент S -матрицы, что определяет аддитивность вкладов отдельных резонансов в матрицу рассеяния. Такое описание является приближенным. Однако уже довольно давно известны S -матрицы, учитывающие явление межрезонансной интерференции при рассеянии нейтронов ядрами (см., например, [69—71]). Одна из них имеет вид [71]:

$$S_{nn} = \left(1 - i \sum_j \frac{\alpha_{nj} + i \beta_{nj}}{E - \mu_j + i v_j} \right) \exp(2i \delta_{\text{pot}}), \quad (74)$$

где $\Sigma(\alpha_{nj} + i\beta_{nj}) = \Sigma\Gamma_{nj}$, $\Sigma\beta_{nj} = 0$, $\mu_j = \text{Re } \tilde{E}_j$, $\nu_j = \text{Im } \tilde{E}_j$, $\tilde{E}_j$ — комплексная энергия j -го резонанса (при $\beta_{nj} = 0$ $\tilde{E}_j = E_j + i(\Gamma_j/2)$). При $\beta_{nj} = 0$ σ_{tot} представляет собой сумму брейт-вигнеровских членов, учитывающих лишь интерференцию между потенциальным и резонансным рассеянием. При учете всех резонансных уровней выражения (74) расчет σ_{tot} по формуле

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi g(1 - \text{Re } S_{nn})/k^2 \quad (75)$$

довольно сложен. В книге [72] из выражений (74) и (75) получена двух-уровневая формула для σ_{tot} , качественно интерпретирующая все основные особенности корреляций между значениями резонансных параметров уровней. Она имеет вид

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{pot}} + \frac{2\pi g}{k^2} \left[\frac{G_1\nu_1 + H_1(\mu_1 - E)}{(\mu_1 - E)^2 + \nu_1^2} + \frac{G_2\nu_2 + H_2(\mu_2 - E)}{(\mu_2 - E)^2 + \nu_2^2} \right], \quad (76)$$

где

$$G_1 = \alpha_{1n} \cos 2\delta_{\text{pot}} - \beta_n \sin 2\delta_{\text{pot}}, \quad G_2 = \alpha_{2n} \cos 2\delta_{\text{pot}} - \beta_n \sin 2\delta_{\text{pot}},$$

$$H_1 = \beta_n \cos 2\delta_{\text{pot}} - \alpha_{1n} \sin 2\delta_{\text{pot}}, \quad H_2 = -\beta_n \cos 2\delta_{\text{pot}} - \alpha_{2n} \sin 2\delta_{\text{pot}}$$

$$\alpha_{1n} + i\beta_n = \tilde{\Gamma}_{1n} \quad \alpha_{2n} + i\beta_n = \tilde{\Gamma}_{2n}$$

$$2\tilde{E}_{1,2} = E_1 - i\Gamma_1/2 + E_2 - i\Gamma_2/2 \mp [(E_2 - i\Gamma_2/2 - E_1 + i\Gamma_1/2)^2 - \Gamma_{12}^2]^{1/2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{1n} = \Gamma_{1n} \cos^2\varphi + \Gamma_{2n} \sin^2\varphi + \Gamma_{1n}^{1/2} \Gamma_{2n}^{1/2} \sin 2\varphi,$$

$$\tilde{\Gamma}_{2n} = \Gamma_{2n} \cos^2\varphi + \Gamma_{1n} \sin^2\varphi - \Gamma_{1n}^{1/2} \Gamma_{2n}^{1/2} \sin 2\varphi,$$

$$B = i\Gamma_{12}[(E_2 - E_1 - i\Gamma_2/2 + i\Gamma_1/2)^2 - \Gamma_{12}^2]^{-1/2},$$

$\varphi = \arcsin(B/2)$, $\Gamma_{12} = (\Gamma_1\Gamma_2)^{1/2}$, в нашем случае $\Gamma_{12}^2 \ll (E_2 - E_1)^2$. Результаты вычисления межрезонансных интерференционных членов $\Delta\sigma_{\text{int}}$ при использовании формулы (75) для висмута (резонансные энергии $E_1 = 800$ эВ и $E_2 = 2310$ эВ) и ^{208}Pb (резонансные энергии $E_1 = 507$ кэВ и $E_2 = 1735$ кэВ) приведены в табл.5.

Знаки $\Delta\sigma_{\text{int}}$ определяются выбором знаков перед значениями квадратных корней из Γ_{1n} , Γ_{2n} , B и Γ_{12} . Из табл.5 следует, что вдали от резонансных энергий значения $\Delta\sigma_{\text{int}}$ практически не зависят от энергии и составля-

ют менее доли процента от величины σ_{tot} (0,2% σ_{tot} для висмута и 0,04% σ_{tot} для ^{208}Pb).

Таблица 5

	Висмут ($E_1 = 800$ кэВ, $E_2 = 2310$ кэВ)			Свинец-208 ($E_1 = 507$ кэВ и $E_2 = 1735$ кэВ)	
Энергия, эВ	1	16	50	1000	25000
$\Delta \sigma_{\text{int}}, 10^{-3}$ б	$\pm 20,7$	$\pm 20,0$	$\pm 20,5$	$\pm 4,9$	$\pm 4,2$

Другую формулу для S -матрицы можно взять, например, из работ [69,70]:

$$S_{cc'} = \exp(i \delta_{\text{pot},c} + i \delta_{\text{pot},c'}) \left[\delta_{cc'} + i \sum_{\lambda\lambda'} (\Gamma_{\lambda,c})^{1/2} (\Gamma_{\lambda',c'})^{1/2} A_{\lambda\lambda'} \right], \quad (77)$$

где $\delta_{cc'}$ — дельта-функция, а матрица, обратная матрице $A_{\lambda\lambda'}$:

$$(A^{-1})_{\lambda\lambda'} = (E_{\lambda} - E) \delta_{\lambda\lambda'} - i/2 \sum_c (\Gamma_{\lambda,c})^{1/2} (\Gamma_{\lambda',c})^{1/2}.$$

Используя выражения (75) и (77), можно получить

$$\Delta \sigma_{\text{int}} \approx \frac{g_+}{4k^2} \left\{ \sum_i \Gamma_{ni} \Delta E_i \frac{\sum_{j \neq i} \Gamma_j / \Delta E_j}{\Delta E_i^2 + \frac{1}{4} \left(\Gamma_i + \Delta E_i \sum_{j \neq i} \Gamma_j / \Delta E_j \right)^2} \right\} +$$

+ подобный член для другого спина (g_-). (78)

Для двух уровней висмута ($E_1 = 800$ эВ и $E_2 = 2310$ эВ) вычисления по формуле (78) дают результаты, совпадающие практически с данными, приведенными в табл.5. При учете же всех известных резонансов с энергией $E_j > 0$ ($0 < E_j < 265$ кэВ [17]) межрезонансный интерференционный член составляет $\Delta \sigma_{\text{int}} = 0,108$ б для висмута при энергии порядка 10 эВ (полное сечение висмута при этой энергии $\sigma_{\text{tot}} = 9,3$ б, т.е. в 90 раз больше).

Очень важно, однако, что вдали от резонансов $\Delta \sigma_{\text{int}}$ для висмута практически не зависит от энергии. Подтверждение этому можно найти в табл.5, а также анализируя выражение (78), откуда следует, что вдали от резонан-

сов $\Delta \sigma_{\text{int}} \sim \Gamma_{nj} \Gamma_{j+1} / k^2 \approx \text{const}$. Аналогичное утверждение относится также к работе [73], отмечающей необходимость учета межрезонансной интерференции, где при $\gamma^2 = \Gamma_n / (2kR)$

$$\Delta \sigma_{\text{int}} = R^2 \sum \sum \frac{\gamma_i^2 \gamma_j^2}{(E - E_i)(E - E_j)} \approx \text{const}. \quad (79)$$

Однако способ получения $\Delta \sigma_{\text{int}}$ в этой работе вызывает большие сомнения [74].

В работе [46] для определения величины a_{ne} анализировалось значение $y = \sigma_{\text{tot}}(E) / 4\pi - b_{\text{coh}}^2$, где b_{coh} — длина когерентного рассеяния. Выражение для y содержит, в частности, не зависящий от энергии член p_2 , который варьируется, чтобы достигнуть наилучшего описания полученных экспериментальных данных. Так как p_2 не зависит от энергии, введение в выражение σ_{tot} также постоянного члена $\Delta \sigma_{\text{int}}$ не может повлиять на результат определения a_{ne} в работе [46], хотя, конечно, несколько изменит аналитическое выражение p_2 .

С учетом (56) можно получить [75,76] формулу для суммы p_2 и межрезонансного интерференционного члена (78):

$$p_2 + \Delta \sigma_{\text{int}} / 4\pi = \frac{g_+ g_-}{4} \left[\sum_+ \frac{\Gamma_{ni}}{k_i E_i} - \sum_- \frac{\Gamma_{ni}}{k_i E_i} \right]^2 + \frac{g_+}{4k^2} \sum_i \frac{\Gamma_{ni}}{\Delta E_i} \sum_{j \neq i} \frac{\Gamma_{ji}}{\Delta E_j} +$$

+ подобный член для другого спина (g_-). (80)

Второй и третий члены выражения (80) могут быть отрицательными. Их знаки зависят от расположения резонансов, их силы и энергии, при которой проводятся измерения. Таким образом, существует возможность для $p_2 + \Delta \sigma_{\text{int}} / 4\pi$ быть отрицательным, что и было получено для висмута в работе [46].

Для четно-четных ядер ($g_+ = 1, g_- = 0$):

$$p_2 + \Delta \sigma_{\text{int}} / 4\pi = \frac{1}{4k^2} \sum_i \frac{\Gamma_{ni}}{\Delta E_i} \sum_{j \neq i} \frac{\Gamma_{ji}}{\Delta E_j}. \quad (81)$$

Для ^{208}Pb при энергии нейтронов, равной 1 эВ, $p_2 + \Delta \sigma_{\text{int}} / 4\pi \approx 6,3 \cdot 10^{-6}$ б/ср и при энергии 1970 эВ $p_2 + \Delta \sigma_{\text{int}} / 4\pi \approx 1,4 \cdot 10^{-7}$ б/ср, если в расчетах учитываются лишь известные резонансы при 507 и 1735 кэВ.

Учет найденного в работе [54] резонанса при отрицательной энергии нейтронов, равной -1900 кэВ, и $\Gamma_n^{(0)} = 2,3$ кэВ практически не меняет ситуацию. Вклад данного резонанса в $p_2 + \Delta \sigma_{\text{int}}/4\pi$ при энергии нейтронов 1970 кэВ не превышает $3 \cdot 10^{-7}$ б/ср.

Что касается величины $p_1 b_{\text{coh}}$, то ее значение (см.(53) и (55)) даже при энергии 1970 эВ не превышает $3 \cdot 10^{-4}$ б/ср.

Таким образом, влиянием резонансного рассеяния на определяемую величину a_{ne} для образца ^{208}Pb при энергии нейтронов до 1970 эВ можно пренебречь ($y = \sigma_{\text{tot}}/4\pi - b_{\text{coh}}^2 A^2/(A+1)^2 \approx 0,01$ б/ср). Формула (53) для определения a_{ne} упрощается и при $\alpha_n \approx 0$ (согласно последним экспериментальным данным α_n не превышает $0,5 \cdot 10^{-3}$ фм³, см., например, [49]) имеет вид

$$y = \sigma_{\text{tot}}/4\pi - b_{\text{coh}}^2 A^2/(A+1)^2 = (Z-F)^2 a_{ne}^2 - 2a_{ne} b_{\text{coh}} (Z-F)A/(A+1), \quad (82)$$

откуда следует, что $\sigma_{\text{tot}}/4\pi = [b_{\text{coh}} A/(A+1) - a_{ne} (Z-F)]^2$ или

$$\sqrt{\sigma_{\text{tot}}/4\pi} = b_{\text{coh}} A/(A+1) - a_{ne} (Z-F). \quad (83)$$

Из (83) следует, что

$$a_{ne} = 1/\sqrt{4\pi} [\sqrt{\sigma_{\text{tot}}(E_1)} - \sqrt{\sigma_{\text{tot}}(E_2)}]/[F(E_1) - F(E_2)]. \quad (84)$$

Обрабатывая с помощью (84) результаты измерений итоговой работы Кестера и др. [49], можно получить (после введения в σ_{tot} поправок, обусловленных агрегатным состоянием вещества и швингеровским рассеянием) для энергий нейтронов $E_1 = 1,26$ эВ и $E_2 = 5,19$ эВ: $a_{ne} = (-1,58 \pm 0,30) \cdot 10^{-3}$ фм; для $E_1 = 1,26$ эВ и $E_2 = 1970$ эВ: $a_{ne} = (-0,26 \pm \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$ фм и для $E_1 = 5,19$ эВ и $E_2 = 1970$ эВ: $a_{ne} = (+0,10 \pm 0,29) \cdot 10^{-3}$ фм. Из полученных результатов напрашивается вывод о том, что величина σ_{tot} при энергии $E_2 = 1970$ эВ определена в работе [49] неправильно. Если принять, что $\sigma_{\text{tot}}(1970)$, равно $11,525$ б (вместо $11,479$ б, в [49]), то можно получить $a_{ne} = (-1,59 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$ фм (для $E_1 = 1,26$ эВ и $E_2 = 1970$ эВ) и $a_{ne} = (-1,61 \pm 0,29) \cdot 10^{-3}$ фм (для $E_1 = 5,19$ эВ и $E_2 = 1970$ эВ), что, по-видимому, близко к истине.

7. О СРАВНЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ТЕОРИЕЙ

Конечно, с точки зрения экспериментатора, вопрос о длине рассеяния a_{ne} — это вопрос эксперимента. Однако имеющиеся экспериментальные данные все же следует сопоставить с некоторыми современными идеями о внутренней структуре нейтрона. Такие идеи, как мне кажется, наиболее хорошо развиты в кварковых моделях, основы которых заложены в старой мезонной теории Юкавы. Уже из этой теории следует, что виртуальный процесс $n \rightarrow p + \pi^-$ дает отрицательный хвост в распределении электрического заряда в нейтроне (см. рис.5). Однако во всех старых статических представлениях о нуклоне не было ясно, что собой представляет центральная часть нуклона. Эта проблема была решена лишь в рамках современных идей о нуклоне. В 70-х годах была создана квантовая хромодинамика (КХД) — квантово-полевая теория сильных взаимодействий кварков и глюонов. КХД, в частности, обобщила имеющиеся представления о структуре адронов. Уравнения КХД, в отличие от уравнений Максвелла, оказываются нелинейными. В течение последних нескольких лет предпринимались попытки решить уравнения КХД. В отсутствие точных решений естественно воспользоваться феноменологическими моделями, отражающими свойства КХД. Одной из таких моделей является СВМ (Cloudy Bag Model), предложенная и развитая Томасом и др. [77]. Заметим, что основы кварковых моделей нуклонов-мешков были заложены в работах теоретиков ОИЯИ (Дубна), выполненных в середине 60-х годов. Видимо, П.Н.Боголюбов впервые окончательно сформулировал в 1967 г. [78,79] модель «дубненского мешка», представляющую собой систему релятивистских безмассовых кварков, движущихся свободно внутри сферического объема. Дальнейшее развитие дубненских идей привело к созданию кварковой (Massachusetts Institute of Technology) MIT-модели, главные свойства которой были затем положены в основу СВМ. Одним из существенных недостатков MIT-модели являлось то, что в ней нарушалась киральная симметрия. Для устранения этого потребовалось включить в модель взаимодействие кварков с пионным полем на поверхности мешка. Подобная гибридная модель кирального мешка (модель СВМ), как уже отмечалось, была разработана Томасом и др. В этой модели нуклон состоит из сферической статической полости

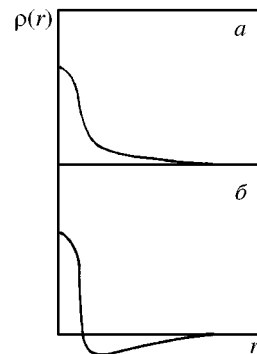


Рис.5. Ожидаемое распределение электрического заряда в нуклоне: а) протон; б) нейтрон

радиуса R , заполненной тремя валентными безмассовыми кварками. Вокруг мешка существует облако отрицательных пионов, которые могут поглощаться и испускаться поверхностью мешка. Отрицательные пионы простираются на расстояние порядка $h/(m_\pi c) > R$. Таким образом, в СВМ нуклон не является точечной частицей. Модель СВМ достаточно успешно описывает статические свойства нуклонов: магнитные моменты, формфакторы, зарядовые радиусы и т.п. Вычисления проводятся именно в статическом пределе ($M \rightarrow \infty$), нуклон считается покоящимся, а поправки, связанные с отдачей нуклона, вводятся позднее. Однако они довольно слабо влияют на полученные результаты (в [80], например, они изменяют вычисленный зарядовый радиус нейтрона не более чем на 6%).

Решающую роль при вычислении радиуса нуклона играет взаимодействие кварков с пионным полем. Так, для нейтрона в MIT-модели, где пионного поля нет, вычисленный радиус равен нулю. Следует заметить, что в СВМ вычисляется именно квадрат внутреннего зарядового радиуса нейтрона $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ согласно соотношению:

$$\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N = 1/(e) \int \rho_N(\mathbf{r}) r^2 d\mathbf{r}, \quad (85)$$

где $\rho_N(\mathbf{r}) = \rho_N^0(\mathbf{r}) + \rho_N^\pi(\mathbf{r})$. Первый член в последней формуле описывает кварковую зарядовую плотность, второй — пионную. Поскольку вычисления ведутся для покоящегося мешка-нуклона ($M \rightarrow \infty$), вычисляемая в СВМ величина (85) не должна содержать член Фолди (см.[80]), обусловленный явлением «Zitterbewegung» и, кроме того, обращающийся в нуль при $M \rightarrow \infty$. Ясно также, что величина (85) должна быть отрицательной, т.к. область $r > R$, где находятся отрицательные пионы, дает в интеграл (85) относительно больший вклад, чем при $r < R$. Положительная величина $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ согласно (85) получиться просто не может, что следует из распределения электрического заряда в нейтроне. Поэтому экспериментальные данные Крона и Ринго, групп Кестера и Копецкого (см. табл.2) противоречат современным наиболее развитым представлениям о структуре нейтрона (см. также [10,75,76,81]). Положительное значение $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ противоречит не только СВМ, но и другим теориям нуклона [82-84], которые также базируются на теории Юкавы. Практически невозможно получить $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N > 0$, следуя современным теоретическим концепциям.

Иногда возникает вопрос: с чем сравнивать результаты теоретических вычислений: с $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ или же с $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N + 3/(2) \mu_n (h/Mc)^2$? Этот вопрос обсуждался еще в конце 50-х — начале 60-х годов в рамках модели Чу и Лоу. Поскольку все вычисления радиусов нуклонов делаются в приближе-

нии неподвижного (без отдачи) тяжелого нуклона ($M \rightarrow \infty$) и в этом случае, $(\partial G_{EN}/\partial q^2)_{q^2=0} \rightarrow \langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N/6$, представляется корректным сравнивать результаты с $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$, т.е. вычитать из измеренного значения a_{ne} амплитуду Фолди.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные выше исследования, связанные с электромагнитной структурой нейтрона, ведутся уже более 50 лет. Несмотря на это отсутствует полная ясность даже в такой, казалось бы, надежно и сравнительно просто измеряемой в нейтронной физике низких энергий величине длины рассеяния нейтрона на электроны. В сущности, имеются два экспериментальных значения этой величины: $\langle a_{ne} \rangle = -1,58(3) \cdot 10^{-3}$ фм и $\langle a_{ne} \rangle = -1,30(3) \cdot 10^{-3}$ фм, хотя в обзоре автор пытался придерживаться точки зрения, что первое значение a_{ne} более предпочтительно. Если справедлива формула Фолди (8) (а в этом, вообще говоря, довольно трудно сомневаться), то первое значение a_{ne} ведет к отрицательному знаку квадрата внутреннего зарядового радиуса нейтрона $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N$ в области низких энергий, что подтверждает современные теоретические представления о нейтроне, его статические модели, при $M \rightarrow \infty$. Если же правильно второе экспериментальное значение $\langle a_{ne} \rangle = -1,30(3) \cdot 10^{-3}$ фм, тогда $\langle r_{E,\text{in}}^2 \rangle_N > 0$, и следует четко понимать, что в настоящее время не существует теоретических представлений, способных объяснить данный факт. В этом случае следует либо ясно сказать о том, что современное теоретическое описание структуры нейтрона при низких энергиях очень далеко от совершенства и не согласуется с экспериментальным значением a_{ne} , либо, хотя это и недостаточно корректно, просто игнорировать и не рассматривать данный вопрос, что и делается в последнее время в некоторых работах (например, в [45]).

В данном обзоре в основном изложена точка зрения автора на имеющуюся проблему внутреннего зарядового радиуса нейтрона. Она опубликована им в ряде журналов (Phys.Rev., Rev.Mexicana de Física, Neutron News, Z.Phys. и др.), доложена на международных конференциях (Оакстапек (Мексика), Санта Фе (США), Триест (Италия), Дубна и др.) и поддержана многими физиками. Остается надеяться, что новые измерения и более аккуратная обработка уже полученных экспериментальных данных решат данную проблему окончательно.

Автор благодарен Г.С.Самосвату за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дирак П.А.М.** — Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.
2. **Вонсовский С.В., Свирский М.С.** — ЭЧАЯ, 1997, т.28, вып.1, с.162.
3. **Feshbach H.** — Phys.Rev., 1951, v.84, p.1206.
4. **Fried B.D.** — Phys. Rev., 1952, v.88, p.1142.
5. **Foldy L.** — Rev. Mod. Phys., 1958, v.30, p.471.
6. **Экспериментальная ядерная физика**, Под ред. Э.Сегре, т.2, с.213, М.: ИИЛ, 1955.
7. **Фрауенфельдер Г., Хенли Э.** — Субатомная физика. М.: Мир, 1979.
8. **Rosenbluth M.N.** — Phys. Rev., 1950, v.79, p.615.
9. **Sachs R.G.** — Phys. Rev., 1962, v.B126, p.2256.
10. **Александров Ю.А.** — Фундаментальные свойства нейтрона. Изд.3, М.: Энергоатомиздат, 1992 (Fundamental Properties of the Neutron, Oxford Clarendon Press, 1992).
11. **Bunatian G.G., Nikolenko V.G., Popov A.B. et al.** — Z. Phys. A, 1997, v.359, p.337.
12. **Блохинцев Д.И.** — Основы квантовой механики. Изд.5., М.: Наука, 1976.
13. **Fermi E., Marshall L.** — Phys. Rev., 1947, v.72, p.1139.
14. **Ахиезер А.И., Померанчук И.Я.** — ЖЭТФ, 1949, т.19, с.558.
15. **Krohn V., Ringo G.** — Phys. Rev., 1973, v.D8, p.1305.
16. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Квантовая механика. Изд.3, М.: Наука, 1974.
17. **Mughabghab S.V., Divadeenam M., Holden N.E.** — Neutron Cross Section, v.1, N.Y.: Academic Press, 1981;
McLane V., Dunford C.L., Rose P.F. — Neutron Cross Section, v.2, N.Y.: Academic Press, 1988.
18. **Havens W., Rabi I., Reinwater L.** — Phys. Rev., 1947, v.72, p.634; 1951, v.82, p.345.
19. **Binder K.** — phys.stat.sol., 1970, v.41, p.767.
20. **Melkonian E., Rustad B.M., Havens, Jr., W.W.** — Phys. Rev., 1959, v.114, p.1571.
21. **Chew G.F., Low E.E.** — Phys. Rev., 1956, v.101, p.1576.
22. **Chew G.F., Low E.E.** — Phys. Rev., 1956, v.101, p.1570.
23. **Friedman M.** — Phys. Rev., 1955, v.97, p.1123.
24. **Miyazawa H.** — Phys. Rev., 1956, v.101, p.1564.
25. **Hughes D.J., Harvey J.A., Goldberg M.D., Stafne M.J.** — Phys. Rev., 1953, v.90, p.497.
26. **Halpern O.** — Phys. Rev., 1964, v.B133, p.579.
27. **Александров Ю.А.** — ОИЯИ 3-3442, Дубна, 1967, с.112.
28. **Александров Ю.А., Балагуров А.М., Малишевски Э. и др.** — ЯФ, 1969, т.10, с.328.
29. **Koester L., Ungerer H.** — Z.Phys., 1969, v.219, p.300.
30. **Alexandrov Yu.A., Koester L., Samosvat G.S.** — JINR, E3-5371, Dubna, 1970.
31. **Александров Ю.А., Мачехина Т.А., Седлакова Л.Н., Фыкин Л.Е.** — ЯФ, 1974, т.20, с.1190.
32. **Александров Ю.А., Балагуров А.М., Самосват Г.С., Фыкин Л.Е.** — ОИЯИ P14-5358, Дубна, 1970.

33. Бэкон Дж. — Дифракция нейтронов. М.: ИЛЛ, 1957.
34. Alexandrov Yu.A., Ignatovich V.K. — JINR, E3-6294, Dubna, 1972.
35. Александров Ю.А., Вавра Я., Врана М. и др. — ЖЭТФ, 1985, т.89, с.34.
36. Александров Ю.А., Вавра Я., Врана М. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1985, т.42, с.200.
37. Шумовский А.С., Юкалов В.И. — ДАН СССР, 1980, т.252, с.581.
38. Шумовский А.С., Юкалов В.И. — ЭЧАЯ, 1985, т.16, вып.6, с.1274.
39. Александров Ю.А. — ОИЯИ РЗ-85-681, Дубна, 1985.
40. Glow G., Holden T.M. — Proc. Phys. Soc., 1966, v.89, p.119.
41. Brown P.J., Cappelman H., Deportes J. et al. — Journ. Magnetism and Magnetic Mater., 1982, v.30, p.243.
42. Madhav Rao L. — IV Межд. школа по нейтр. физике, ОИЯИ, ДЗ,4-82-704, Дубна, 1984.
43. Koester L., Nistler V., Waschkovski W. — Phys. Rev. Lett., 1976, v.36, p.1021.
44. Koester L., Waschkovski W., Meier J. — Z. Phys. A, 1988, v.329, p.229.
45. Kopecky S., Riehs P., Harvey J.A., Hill N.W. — Phys.Rev.Lett., 1995, v.74, p.2427.
46. Александров Ю.А., Врана М., Манрике Гарсна Х., Мачехина Т.А., Седлакова Л.Н. — ЯФ, 1986, т.44, с.1384.
47. Koester L., Waschkovski W., Meier J. — Z. Phys. A, 1990, v.337, p.341.
48. Alexandrov Yu.A., Koester L., Samosvat G.S., Waschkovski W. — JINR Rapid Commun., No.6[45]-90, p.48, Dubna, 1990.
49. Koester L., Waschkovski W., Mitsyna L. et al. — Phys.Rev.C, 1995, v.51, p.3363.
50. Prokofyevs P., Tambergs J., Krasta T. et al. — ISINN-2, E3-94-419, Dubna, 1992, p.220.
51. Александров Ю.А. — ЯФ, 1983, т.37, с.253.
52. Александров Ю.А. — ЯФ, 1983, т.38, с.1100.
53. Triftshause W. — Z. Phys., 1965, v.186, p.23.
54. Enik T.L., Mitsyna L.V., Nikolenko V.G. et al. — ISINN-3, E3-95-307, Dubna, 1995, p.238.
55. Alexandrov Yu.A. — Neutron News, 1994, v.5, No.1, p.20.
56. Alexandrov Yu.A. — Rev. Mex. de Fis., 1996, v.42, p.283.
57. Нозик Ю.З., Озеров Р.П., Хенниг К. — Структурная нейтронография, М.: Атомиздат, т.1, 1979.
58. Свергун Д.И., Фейгин Л.А. — Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние. М.: Наука, 1986.
59. Horen D.J., Johnson C.H., Fowler J.L. et al. — Phys. Rev. C, 1986, v.34, p.429.
60. Placzek G. — Phys. Rev., 1951, v.82, p.392.
61. Placzek G. — Phys. Rev., 1952, v.86, p.377.
62. Granada J.R. — Z. Naturforsch., 1984, v.39a, p.1160.
63. Kopecky S., Riehs P., Harvey J.E., Hill N.W. — Proc. Intern. Conf. on Nucl. Data for Sci. and Technol., Gatlinburg, USA, May 9—13, 1994, v.1, p.233.
64. Блатт Дж., Вайскопф В. — Теория атомного ядра. М.: ИЛ, 1954.
65. Гусева И.С. — Препринт ЛИЯФ-1969, NP-27-1994, Гатчина, 1994.
66. Александров Ю.А., Самосват Г.С., Сэрээтэр Ж., Сор Ц.Г. — Письма в ЖЭТФ, 1966, т.4, с.196.

67. **Schmiedmayer J., Richs P., Harvey J.E., Hill N.W.** — Phys.Rev.Lett., 1991, vol.66, p.1015.
68. **Richs P., Kopecky S., Harvey J.E., Hill N.W.** — Proc. Intern. Conf. on Nucl. Data for Sci. and Technol., Gatlinburg, USA, May 9—13, 1994, v.1, p.236.
69. **Wigner E.P.** — Phys. Rev., 1946, v.70, p.606.
70. **Vogt F.** — Phys. Rev., 1958, v.112, p.203.
71. **Adler D.V., Adler F.T.** — Proc. Conf. Breeding in Fast Reactor, Argonne, 1963, ANL-6792, p.695.
72. **Лукьянов А.А.** — Структура нейтронных сечений, М.: Атомиздат, 1978.
73. **Nikolenko V.G., Popov A.B.** — Z. Phys. A, 1992, v.341, p.365.
74. **Alexandrov Yu.A.** — Z. Phys. A, 1992, v.344, p.219.
75. **Alexandrov Yu.A.** — Phys. Rev. C, 1994, v.49, p.R2297.
76. **Alexandrov Yu.A.** — Rev. Mex. de Fis., 1996, v.42, p.263.
77. **Thomas A.W.** — Adv. Nucl. Phys., 1984, v.13, p.1.
78. **Боголюбов П.Н.** — ОИЯИ, P2-3115, Дубна, 1967.
79. **Bogoliubov P.N.** — Ann. Institute Henri Poincare, 1968, sec.A, v.VIII, p.163.
80. **Thomas A.W., Theberge S., Miller G.A.** — Phys. Rev. D, 1981, v.24, p.216.
81. **Alexandrov Yu.A.** — Neutron News, 1994, v.5, No.4, p17.
82. **Skyrme T.H.** — Nucl. Phys., 1962, v.31, p.556.
83. **Nambu J., Jona-Lasinio G.** — Phys. Rev., 1961, v.122, p.345.
84. **Bijker R., Iachello F., Leviatan A.** — Ann. of Phys. (NY), 1994, v.236, p.69.

WIGNER FUNCTIONS OF ESSENTIALLY NONEQUILIBRIUM SYSTEMS

J. Manjavidze

Institute of Physics, Georgian Academy of Sciences,
Tamarashvili st. 6, Tbilisi 380077, Republic of Georgia,
e-mail: jm@physics.iberiapac.ge

The aim of the article is to discuss the S -matrix interpretation of perturbation theory for the Wigner functions generating functional at a finite temperature. For the sake of definiteness, the concrete problem from particle physics of high-temperature initial states dissipation into cold one is considered from experimental and theoretical points of view. The temperature is introduced in the theory by typical for the microcanonical description way. The perturbation theory contains two-temperature (of initial and final states) Green functions. Two possible boundary conditions are considered. One of them is usual in a field theory vacuum boundary condition. Corresponding generating functional of Wigner functions can be used in the particle physics. Another type of the boundary condition assumes that the system under consideration is in environment of the black-body radiation. This leads to the usual in statistics Kubo–Martin–Schwinger boundary condition at the equilibrium (one-temperature) limit. The comparison of the S -matrix approach with Schwinger–Keldysh real-time finite-temperature field theory and with nonstationary statistical operator approach of Zubarev are considered. The range of applicability of the finite-temperature description of dissipation processes is shown.

Цель данной работы – описать S -матричную интерпретацию теории возмущений для производящего функционала функций Вигнера при конечных температурах. Для определенности будет рассмотрен с экспериментальной и теоретической точек зрения конкретный процесс диссипации горячего начального состояния в холодное, типичный для физики частиц. Температура состояний будет введена в формализм характерным для микроканонического описания образом. Теория возмущений содержит функции Грина, зависящие от двух температур (отдельно для начального и конечного состояний). Рассмотрены два типа граничных условий. Первое соответствует обычному для теории поля вакуумному граничному условию. Соответствующие производящие функционалы функций Вигнера могут быть использованы в физике частиц. Другой тип граничных условий предполагает, что система окружена излучением черного тела. Это приводит к обычным в статистической физике граничным условиям Кубо–Мартин–Швингера в однотемпературном пределе. Мы сравним наш S -матричный подход с реально-временной теорией Швингера–Келдыша при конечных температурах и с нестационарным статистическим оператором Зубарева. Показана область применимости температурного описания диссипативных процессов.

1. INTRODUCTION

At the very beginning of this century, couple P. and T. Ehrenfest had offered a model to visualize Boltzman's interpretation of irreversibility phenomena in

statistics. The model is extremely simple and fruitful [1]. It considers two boxes with $2N$ numerated balls. Choosing number $l = 1, 2, \dots, 2N$ *randomly* one must take the ball with label l from one box and put it into another one. Starting from the highly "nonequilibrium" state with all balls in one box it is seen a tendency to equalization of balls number in the boxes. So, there is seen irreversible* flow toward preferable (equilibrium) state. One can hope [1] that this model reflects a physical reality of nonequilibrium processes with initial state very far from equilibrium. A theory of such processes with (nonequilibrium) flow toward a state with maximal entropy should be sufficiently simple to give definite theoretical predictions.

In order to do the consideration less formal we will be connected with concrete physical problem. For instance, the particles creation processes are good laboratory for investigation of general properties of relativistic nonequilibrium processes. Indeed, considering the multiplicity n as the characteristics of final state entropy we can choose the asymptotically large $n \gg \bar{n}(s)$, where mean multiplicity $\bar{n}(s)$ naturally defines the scale of n . Then one can expect, noting the above-mentioned general property of the nonequilibrium flow, that the theory of processes with practically total dissipation of initial-state kinetic energy into particles masses should be extremely simple. By this reason it is natural to start consideration from region $n \gg \bar{n}(s)$. We would construct the theory permanently taking into account just this condition.

The theory of dissipative processes has general significance from thermodynamical point of view and we would concentrate our attention on this important problem. There is also practical side of the problem considered. At $n \gg \bar{n}(s)$ the cross sections $\sigma_n(s)$ fall down rapidly and are too small ($< nb$). Noting also a problem of triggering such rear final state, the experimenters must have enough arguments to examine them. The main arguments are as follows: at $n \gg \bar{n}(s)$ we have unique chance (i) to examine

- *pure* (practically without admixture of hadrons),
 - *cold* (it is a best condition for investigation of collective phenomena in a system),
 - *dense* (in this case the QCD interaction constant α_s is small)
- quarks plasma (CQGP) and (ii) to realize experimentally the decay of very hot (at high energies) initial state in the "inflationary" regime, with "freezed" nonperturbative degrees of freedom of hadrons system.

It is known from hadrons high-energy experiments that the cross sections σ_n have a maximum at $n \sim \bar{n}(s)$, where $1 \ll \bar{n}(s) \ll n_{\max}$ and $n_{\max} = \sqrt{s}/m_h$ is the maximally available multiplicity at given energy $\sqrt{s}$ (m_h is the hadrons characteristic mass). This testify to the statement that in hadron processes the

*"What never (*is the time-reversed flow*)? No never! What never? Well, hardly ever." [2]

nonequilibrium flow is not equal to zero ($\bar{n}(s) \gg 1$), but the mostly probable processes did not lead to the state with maximal entropy ($\bar{n}(s) \ll n_{\max}$). (The early model was based on the assumption that the final state of inelastic hadron processes has maximal entropy $\bar{n}(s) \sim n_{\max}$ [3].)

The preferable at $n \sim \bar{n}$ processes are indebted for excitation of hadrons nonperturbative degrees of freedom described by creation of hadrons constituents from vacuum: the kinetic motion of partons leads to increasing, because of confinement phenomenon, polarization of vacuum and to its instability concerning quarks creation [4]. In other words, there is a long-range correlation among hadrons constituents. Under this special correlations the conservation laws constraints were implied. They are important in dynamics since each conservation law decreases the number of the dynamical degrees of freedom at least by one unite, i.e., it has nonperturbative effect (this must explain why $\bar{n}(s) \ll n_{\max}$). Moreover, in the so-called integrable systems each independent integral of motion (in involution) reduces number of degrees of freedom by two units. In result there is not stochastization in such systems [5], i.e., the nonequilibrium flow is equal to zero. But it will be argued that at the very high multiplicities this effect is negligible. So, if

$$\bar{n}(s) \ll n < n_{\max}$$

we will see that the particles creation processes are close to Markovian in accordance with Boltzman's idea. The reason of this phenomenon is the more fast falling down of soft channel of hadrons creation compared with hard channels in asymptotics over n .

Rejecting nonperturbative effects creation of the high-multiplicity final state can be described using standard methods of QCD. We will show dominance of processes with minimal number of QCD jets in the high-multiplicities region. This means that the high-multiplicity processes are stationary Markovian*. This result is in agreement with Boltzman's general idea concerning nonequilibrium flows.

So, the high-multiplicity processes are "unshadowed" by nonperturbative and complicated perturbation effects. This will allow one to investigate not only new state of the pure colored plasma but also the structure of fundamental Lagrangian. This conclusions are not evident and we start consideration from brief review of arguments.

It must be noted that the experimental investigation of high-multiplicity processes in deep asymptotics over n seems unreal. But considering moderate $n \gg \bar{n}$ we cannot be sure that the final state is equilibrium. Investigation of fractal dimensions in the multiparticle hadron processes at high energies shows

*The vertices renormalization takes into account the time-reversed fluctuations in the nonequilibrium flow.

presence of considerable fluctuations [6]. This leads to necessity to have the theory of dissipation processes with nonequilibrium final state.

There is also another side of the problem. Today understanding of hadron processes is far from ability to give any quantitative prediction. The above-announced prediction concerning absence of nonperturbative contributions into hadron processes "works" in the deep asymptotics over n only. So, at moderate $n \gg \bar{n}$ we cannot be sure that they do not have important influence. That is why we will concentrate our attention in this paper on the searching for economic (thermodynamical) description of the dissipative processes, trying to find the connections of our S -matrix approach with other ones. It is important to note that the offered formalism allows one to separate the dynamical side of question from the pure descriptional one (see also concluding Section).

This central problem of formalism can be solved noting that our dissipative problem contains element of dynamics since it crucially depends on boundary condition. Therefore, we adopt S -matrix formalism which is natural for dissipative systems time evolution description. For this purpose the amplitudes

$$\langle (p)_m | (q)_n \rangle = a_{n,m}(p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_n)$$

of the m - into n -particles transition will be introduced. (The in- and out-states must be composed from mass-shell particles [7].) Moreover, to incorporate the boundary condition $n \gg m$ we should calculate the probability integrating over particles momenta:

$$r(P; n, m) \sim \int |a_{n,m}|^2 = \int \langle (p)_m | (q)_n \rangle \langle (q)_n | (p)_m \rangle$$

since the amplitude a_{nm} is the function of too many variables, $(p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_n)$. This standard method of particle physics practically solves our problem.

Nevertheless, it is desirable to use the thermodynamical language as the most economic one, i.e., the formalism which uses minimal number of parameters (temperature, chemical potential, etc.) for description of the system.

The field-theoretical description of statistical systems at a finite temperature is usually based on the formal analogy between imaginary time and inverse temperature β ($\beta = 1/T$) [8]. This approach is fruitful [9] for description of the static properties of a system, but it demands a complicated mathematical apparatus for the analytic continuation to the real time [10], if we want to clear up dynamical aspects. The first important quantitative attempt to build the real-time finite-temperature field theory [11] discovers a problem of the pinch-singularities. Further investigation of the theory has allowed one to demonstrate the cancellation mechanism of these unphysical singularities [12]. This was attained by doubling of the degrees of freedom [13, 14]: the Green functions of the theory represent

2×2 matrix. It surely makes the theory more complicated, but the operator formalism of the thermofield dynamics [15] shows the unavoidable character of this complication.

The Schwinger–Keldysh real-time finite-temperature field-theoretical description [13,14] of statistical systems is based on the Kubo–Martin–Schwinger (KMS) [16,17] boundary condition for a field:

$$\Phi(t) = \Phi(t - i\beta).$$

This formal trick introduces into formalism the temperature $T = 1/\beta$ but, without fail, leads to the *equilibrium* fluctuation-dissipation conditions [18] (see also [19]). Beside this we should have the two-temperature theory describing kinetic energy dissipation process (for initial and final states separately). It is evident that in such theory with two temperatures it is impossible to use the KMS boundary condition.

In the S -matrix approach finite-temperature description can be introduced (e.g., [20] and references cited therein) taking into account that, for instance,

$$d\Gamma_n = |a_{n,m}| \prod_1^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2\epsilon(q_i)}, \quad \epsilon(q) = (q^2 + m_h^2)^{1/2},$$

is the differential measure of final state. Then we can define the temperature as the function of initial energy through the equation of state, i.e., proportional to the mean energy of created particles. Such introduction of temperatures as the Lagrange multiplier is obvious for microcanonical approach [16]. The initial-state temperature will be introduced by the same way. Using standard terminology [21], we will deal with the "mechanical" perturbations only [22] and it will not be necessary to divide the perturbations on "thermal" and "mechanical" ones [23].

Introducing temperature as the Lagrange multiplier we should assume that the temperature fluctuations are small (Gaussian). In opposite case the notion of temperature loses its sense. The "working" idea concerning nonequilibrium processes is based on the assumption that evolution of a system goes through few phases. In the first "fast" phase the s -particle distribution functions $\mathbf{D}_s$, $s > 1$, strongly depend on initial conditions. But at the end of this phase the system forgets the initial-state information. Second phase is the "kinetic" one. One can expect that the space-time fluctuations of thermodynamical parameters in this phase are large scale, i.e., there are macroscopical domains in which the subsystems are equilibrium, with Gaussian fluctuations of thermodynamical parameters. In the last "hydrodynamical" phase the whole system is described by macroscopical parameters. We will see that the Schwinger–Keldysh [10,13,14] formalism is applicable for "hydrodynamical" phase only.

The above described S -matrix finite-temperature description can be realized not only for uniform temperature distribution (we have done first step in this direc-

tion wishing to introduce initial and final temperatures separately). So, introducing cells of measuring device (calorimeter) and introducing the energy-momentum shells of each cell separately we can introduce the individual temperatures in each cell. This can be done since in the S -matrix theory the measurement performed by free (mass-shell) particles, i.e., the measurement of energy (and momentum) can be performed in each cell separately. This allows one to capture the "kinetic" phase also (if the number of calorimeter cells is high enough). In this phase multiparticle distribution functions $\mathbf{D}_s$, $s > 1$, are functionals of one-particle distribution function $\mathbf{D}_1$ only. This means the "shortened" description of the non-equilibrium medium [24]. We will return to this question in Sec.4 considering the dissipative processes thermal descriptions applicability range.

The microcanonical description assumes that the energy of system is known with arbitrary accuracy. Introducing the measurement cells and corresponding energy shells we assume that the energy in each cell can be measured with arbitrary accuracy. That is why we should work in the frame of Wigner functions formalism [25].

E.Wigner had offered the function $W(q, R)$ for the quantum states phase space description [26]:

$$W(q, R) = \int dr e^{iqr} \Psi(R + r/2) \Psi^*(R - r/2),$$

where $\Psi(x)$ is the wave function of state. The existence of other approaches must be mentioned [27]. But as will be seen below the Wigner description is mostly natural for us.

In the classical limit $\hbar = 0$ the function $W(q, r)$ coincides with the phase space probability distribution function. It obeys the equation [28]:

$$\dot{W} = \{W, H\} + O(\hbar),$$

which coincides with the Liouville equation only in the classical limit $\hbar = 0$.

The extension of Wigner's idea on the relativistic case uses the connection between Wigner's approach and inclusive description of inelastic scattering processes [25, 29]. But the Wigner functions are not directly measurable quantities because of the quantum uncertainty principle $\Delta q \Delta r \sim \hbar$. Just this restriction leads to impossibility of taking the measurement (calorimeter) cells 4-dimension Δr arbitrary small and defines the natural boundary of Wigner-functions approach applicability. Wishing to use the Wigner-functions description of experiments the corresponding theory must take into account this restriction. The discussion of this question is given in Sec.4.

So, in our terms one can use the thermodynamical formalism if the non-stationary mediums "shortened" description may be applied: in this case mean values of correlation functions over the space-time are negligible and the fluctuations of thermodynamical parameters are small (Gaussian). Other approach

should be mentioned also. Proposing [32] that the equilibrium in the nonuniform nonstationary medium may be attained in small regions more quickly than in the whole system, the entropy maximalness in this restricted domains of a system can be used for construction of the "local equilibrium density matrix" (LDM) [32]. But LDM is applicable for description of processes in which dissipation may be disregarded [30]. Nevertheless, if the energy-momentum density of nonstationary flow is considerably smaller than the energy density of matter, then the first one can be taken into account perturbatively considering LDM as an initial condition. This modifies LDM to "nonstationary density matrix" (NDM) of Zubarev [32] introducing an infinitesimal interaction with a heat bath to get the increasing entropy. We will return to this question in Sec.5.

The S matrix will be introduced phenomenologically, using ordinary in a quantum field theory reduction formalism. This leads naturally to necessity to introduce the boundary conditions for interacting fields $\Phi(\sigma_\infty)$, where σ_∞ is the infinitely far hypersurface, e.g., [31]. The value of $\Phi(\sigma_\infty)$ specifies the environment of a system.

We start with vacuum boundary condition $\Phi(\sigma_\infty) = 0$ familiar for a field theory. This theory can be applied in the particle physics. The simplest choice of $\Phi(\sigma_\infty) \neq 0$ assumes that the system under consideration is surrounded by black-body radiation. Just this "boundary condition" restores the Schwinger–Keldysh [10] real-time finite-temperature field theory [12] from S -matrix formalism in the "hydrodynamical" phase and gives the dynamical interpretation of the KMS periodic boundary condition.

One should admit also that last choice of boundary condition is not unique: one can consider another organization of the environment of considered system. The S -matrix interpretation is able to show the way of adoption of formalism to the arbitrary environment*. It should broaden the potentialities of the real-time finite-temperature field-theoretical methods, for instance, for heavy nucleus high energy interactions. The special interest represent also the topological effects, but, by above-mentioned reason, in this paper consideration will be performed in the perturbation theory framework only (see also concluding Section).

The central purpose of this review paper is to describe connections between ordinary S -matrix description and popular in the modern literature real-time finite-temperature field theories. We wish to discuss:

– The QCD jets dominance in deep asymptotics over n (Sec.2);

In this section we would like to show why the *real-time* formalism is needed for our dissipative process description.

– The S -matrix interpretation of Schwinger–Keldysh theory (Sec.3);

In this section the uniform temperature description of the state will be introduced

*This question was considered also in [29].

in the spirit of microcanonical description. There is presented the way of explicit calculations to show coincidence of used microcanonical description and ordinary (Gibbs) canonical formalism.

– The range of applicability of finite-temperature description (Sec.4);

In this section the necessity and sufficiency of Bogoliubov's "shortened" description is discussed.

– The S -matrix description of media with nonuniform temperature distribution (Sec.5);

In this section the Wigner functions formalism is introduced. The range of its applicability to describe an experiment is shown.

– The comparison of our S -matrix approach with "nonstationary statistical operator" of Zubarev [32] (Sec.6).

In this section the main distinction between S -matrix (microcanonical) and Zubarev's (canonical) perturbation theories is shown.

– Concluding remarks (Sec.7).

In this section the way the nonperturbative effects may be included in the formalism is discussed.

2. PHENOMENOLOGY

To build the phenomenology [33] of high multiplicity processes let us introduce the classification of asymptotics over n . For this purpose it is useful to consider the "big partition function":

$$T(z, s) = \sum_n z^n \sigma_n(s), \quad T(1, s) = \sigma_{\text{tot}}(s).$$

Strictly speaking, summation over n is performed up to n_{max} . But we can extend summation up to infinity* if the weight z is sufficiently small, $0 < z < z_{\text{max}}$. So, $T(z, s)$ can be considered as the nontrivial function of z with sufficient accuracy. Note that $z_{\text{max}} > 1$ since $\sigma_n(s)$ decreases with n . If we know $T(z, s)$, then $\sigma_n(s)$ is defined by inverse Mellin transformation. This gives (usual in thermodynamics) equation (of state):

$$n = z \frac{\partial}{\partial z} \ln T(z, s). \quad (2.1)$$

Solving this equation we can estimate the asymptotics of σ_n :

$$\sigma_n(s) \sim e^{-n \ln \bar{z}(n, s)}, \quad (2.2)$$

where $1 < \bar{z}(n, s) < z_{\text{max}}$ is the smallest solution of Eq. (2.1).

*That is, wishing to consider the "thermodynamical limit".

It follows from (2.2) that at $n \rightarrow \infty$ the solution of (2.1) must tend to singularity z_s of $T(z, s)$ and the character of singularity is not important. So, we must consider three possibilities:

$$a) z_s = z_a = 1, \quad b) z_s = z_b = \infty, \quad c) z_s = z_c, \quad 1 < z_c < \infty.$$

Following Lee and Yang [34] there are no singularities at $0 < z < 1$.

Let us consider now the physical content of this classification.

a) $z_s = 1$.

It is known that the singularity $z_s = 1$ reflects the first order phase transition [34]. To find σ_n for this case we would adopt Langer's analyses [35]. Introducing the temperature $1/\beta$ instead of total energy $\sqrt{s}$ we can use the isomorphism with the Ising model. For this purpose we divide the space volume on cells and if there is particle in the cell, we will write (-1), in opposite case (+1). It is the model of lattice gas well described by the Ising model. We can regulate the number of down-looking spins, i.e., the number of created particles, by the external magnetic field $\mathbf{H}$. Therefore, $z = \exp\{-\beta\mathbf{H}\}$ and $\mathbf{H}$ is the chemical potential.

The corresponding partition function in the continuous limit [35] (see also [36]) has the form:

$$R(\beta, z) = \int D\mu e^{-\int dx \{ \frac{1}{2}(\partial\mu)^2 - \varepsilon\mu^2 + \alpha\mu^4 - \lambda\mu \}}, \quad (2.3)$$

where $\varepsilon \sim (1 - \frac{\beta_c}{\beta})$ and $\lambda \sim \mathbf{H}$, with critical temperature $1/\beta_c$.

If $\beta_c > \beta$ there is no phase transition and the potential has one minimum at $\mu = 0$. But if $\beta_c < \beta$, there are two degenerate minima at $\mu_{\pm} = \pm\sqrt{\varepsilon/2\alpha}$ if $\lambda = 0$. Switching on $\mathbf{H} < 0$ the left minimum at $\mu_- \sim -\sqrt{\varepsilon/2\alpha}$ becomes absolute and the system will tunnel into this minimum (see also [37]). This process describes particles creations as a process of spins flippings.

Eq. (2.1) gives at $n \rightarrow \infty$

$$\ln \bar{z} \sim n^{-1/3} > 0.$$

In result,

$$\sigma_n \sim e^{-an^{2/3}} > 0(e^{-n}), \quad a > 0,$$

i.e., decrease slower than e^{-n} . The quasi-classical calculation shows that the functional determinant is singular at $\mathbf{H} = 0$. It must be underlined that in the used Ising model description the chemical potential deforms the ground state. In result, the quasi-classical approximation is applicable since $\ln \bar{z} \ll 1$, i.e., since the processes of spin flippings are rear at high multiplicity region. It is easy to show in this approximation [35] that the functional determinant is singular at $\mathbf{H} = 0$, i.e., at $z = 1$.

Note that $\bar{z}$ decreases to one with n . This unusual phenomenon must be explained. Considered above mechanism of particles creation describes "fate of false vacuum" [37]. In the process of decay of unstable state the clusters of new phase of size X are created. If the cluster has dimension $X > X_c$ its size increases since the volume energy ($\sim X^3$) of the cluster becomes better than the surface tension energy ($\sim X^2$). This condition defines the value of X_c . The "critical" clusters wall accelerates, i.e., the work needed to add one particle into cluster decreases with $X > X_c$. This explains the reason why $\bar{z}$ decreases with n noting that $\ln \bar{z}$ is proportional to Gibbs free energy per one particle.

The described mechanism of particles creation assumes that we had prepared the *equilibrium* system in the unstable phase at $\mu_+ \sim +\sqrt{\varepsilon/2\alpha}$ and going to another state at $\mu_- \sim -\sqrt{\varepsilon/2\alpha}$ the system creates particles. The initial state may be the QGP and final state may be the hadrons system. Therefore, we must describe the way as the quarks system was prepared.

Following to Lee–Yang's picture of first order phase transition [34] (see also [36]) there is no phase transition in a finite system (the partition function cannot be singular for finite $n_{\max}$). This means that the multiplicity (and the energy) must be high enough to see described phenomena.

b) $z_s = \infty$.

Let us return to the integral (2.3) to investigate the case $\beta_c > \beta$. In this case the potential has one minimum at $\mu = 0$. The external field $\mathbf{H}$ creates the mean field $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mathbf{H})$ and the integral (2.3) should be calculated expanding it near $\mu = \bar{\mu}$. In result, in the quasi-classical approximation ($\bar{\mu}$ increases with increasing n),

$$\ln R(\beta, z) \sim (\ln z)^{4/3}.$$

This gives $\ln \bar{z} \sim n^3$ and $\ln \sigma_n \sim -n^4$, i.e.,

$$\sigma_n < 0(e^{-n}).$$

There is also other possibility to interpret considered case b). For this case we can put

$$\ln T(z, s) = n_0(s) + \bar{n}(s)(z - 1) + O((z - 1)^2) \quad (2.4)$$

at $|z - 1| \ll 1$. By definition $n_0(s) = \ln \sigma_{\text{tot}}$. The experimental distribution of $\ln T(z, s) - n_0(s)$ for various energies shows that the contributions of $O((z - 1)^2)$ terms increase with energy [38]. The hadrons "standard model" (SM) assumes that

$$\ln t(z, s) = n_0(s) + \bar{n}(s)(z - 1)$$

is the Born term in the perturbation series (2.4). There are various interpretations of this series, e.g., the multiperipheral model, the Regge pole model, the heavy color strings model, the QCD multiperipheral models, etc. In all these models $n_0 = a_1 + a_2 \ln s$, $0 \leq a_2 \ll 1$, and $\bar{n}(s) = b_1 + b_2 \ln s$, $b_2 > 0$. The

second ingredient of hadrons SM is the assumption that mean value of created particles transfers momentum $\langle k \rangle = \text{const}$, i.e., is the energy (and multiplicity) independent. It can be shown that under these assumptions:

$$\ln T(z, s) = n_0(s) + \sum_n c_n(s)(z-1)^n, \quad c_1 \equiv \bar{n} \quad (2.5)$$

is *regular* at finite values of z [38] and is able to give well confirmed by experiment predictions.

Inserting (2.5) into (2.1) we find that $\bar{z}(n, s)$ is the increasing function of n . Therefore,

$$\sigma_n < O(e^{-n}). \quad (2.6)$$

But the SM have a finite range of validity: beyond $n \sim \bar{n}^2$ the model must be changed since it is impossible to conserve $\langle k \rangle = \text{const}$ at higher multiplicities [39].

We should underline once more that only two possibilities a) and b) can be deduced from representation (2.3), see also [35]. But nevertheless there is other possibility:

c) $1 < z_s < \infty$.

Let us assume now that

$$T(z, s) \sim \left(1 - \frac{z-1}{z_c-1}\right)^{-\gamma}, \quad \gamma > 0. \quad (2.7)$$

Then, using normalization condition, $(\partial T(z, s)/\partial z)|_{z=1} = \bar{n}_j(s)$ we can find that $z_c(s) = 1 + \gamma/\bar{n}_j(s)$. The singular structure (2.7) is impossible in SM because of condition $\langle k \rangle = \text{const}$. But if $|z-1| \ll 1$, we have estimation (2.4). The difference between SM and c) is seen only at $1 - (z-1)/(z_c-1) \ll 1$, i.e., either in asymptotics over n or in asymptotics over energy. The singular structure is familiar for "logistic" equations of QCD jets, e.g., [40].

In considered case $\bar{z} = z_c + 0(\bar{n}_j/n)$ and at high energies ($\bar{n}_j(s) \gg 1$)

$$\sigma_n \sim e^{-\gamma n/\bar{n}_j} = O(e^{-n}). \quad (2.8)$$

Therefore,

comparing (2.6) and (2.8) we can conclude that at sufficiently high energies, i.e., if $\bar{n}_j \gg \bar{n}$, where $\bar{n}$ is the SM mean multiplicity, the mechanism c) must dominate in asymptotics over n .

It is the general, practically model independent, prediction. It has important, from experimental point of view, consequence that at high energies there is a wide range of multiplicities, where the SM mechanism of hadrons creation is negligible. In other words, the CQGP of high multiplicity processes is the dynamical consequence of jets and SM mechanisms. At transition region between

"soft" of SM and "hard" of jets one can expect the "semihard" processes of minijets dominance.

The multiplicity distribution in jets has interesting property noted many decades ago by Volterra in his mathematical theory of populations [41]. In our terms, if one-jet partition function has the singularity at $z_c^{(1)}(s) = 1 + \gamma/\bar{n}_j(s)$, then two-jet partition function must be singular at

$$z_c^{(2)}(s) = 1 + \frac{\gamma}{\bar{n}_j(s/4)} > z_c^{(1)}(s),$$

and so on. Therefore, at high energies and $n > \bar{n}_j(s)$ the jets number must be minimal (with exponential accuracy). This means that at $n \rightarrow \infty$ the processes of hadrons creation have a tendency to be Markovian (with sharp increase of transverse momentum $< k >$) and only in the last stage the (first order) phase transition (colored plasma) $\rightarrow$ (hadrons) may be seen.

One can say that in asymptotics over n we consider the "inflationary" channel of thermalization which is so fast* that the usual confinement forces are "freezed" and do not play important role in final colored plasma creation.

3. S-MATRIX INTERPRETATION OF REAL-TIME FINITE-TEMPERATURE FIELD THEORIES

3.1. Vacuum Boundary Conditions. The starting point of our calculations is n - into m -particles transition amplitude $a_{n,m}$, the derivation of which is a well-known procedure in the perturbation theory framework. For this purpose the $(n+m)$ -point Green function $G_{n,m}$ is introduced [42]. To calculate the nontrivial elements of S matrix one must put the external particles on the mass shell. Formally this procedure means amputation of the external legs of $G_{n,m}^c$ and further multiplication on the free particles wave functions. In result the amplitude of m - into n -particles transition $a_{n,m}$ in the momentum representation has the form:

$$a_{n,m}((q)_n; (p)_m) = (-i)^{n+m} \prod_{k=1}^m \hat{\phi}(q_k) \prod_{k=1}^n \hat{\phi}^*(p_k) Z(\phi). \quad (3.1)$$

Here we introduce the "annihilation" operator

$$\hat{\phi}(q) = \int dx e^{-iqx} \hat{\phi}(x), \quad \hat{\phi}(x) = \frac{\delta}{\delta \phi(x)}, \quad (3.2)$$

*The partons life time with virtuality $|q|$ is $\sim 1/|q|$ and the time needed for hadrons of mass m_h formation is $\sim 1/m_h$. Therefore the partons have a time to decay before hadrons formation if $|q| \gg m_h$. But this situation is rare since the thermal motion in the initial stage of process is high.

$\hat{\phi}^*(p_k)$ is the "creation" operator and q_k and p_k are the momenta of in- and out-going particles. In (3.1)

$$Z(\phi) = \int D\Phi e^{iS(\Phi) - iV(\Phi + \phi)}$$

is the generating functional. The total action was divided into two parts, where $S(\Phi)$ is the free part and $V(\Phi, \phi)$ describes the interactions. At the very end one should put the auxiliary field $\phi = 0$.

To provide the convergence of the integral (3.1) over scalar field Φ the action $S(\Phi)$ must contain positive imaginary part. Usually for this purpose Feynman's $i\varepsilon$ -prescription is used. It is better for us to shift infinitesimally time contour to the upper half plane [10,43], i.e., to the Mills contour

$$C_+ : t \rightarrow t + i\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

and after all calculations to return the time contour on the real axis, $\varepsilon \rightarrow +0$.

In Eq. (3.1) the integration is performed over all field configurations with standard vacuum boundary condition:

$$\int d^4x \partial_\mu (\Phi \partial^\mu \Phi) = \int_{\sigma_\infty} d\sigma_\mu \Phi \partial^\mu \Phi = 0,$$

which assumes zero contribution from the surface term.

Supposing that the particles number and momenta are insufficient for us we introduce the probability

$$r(P) = \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} \int d\omega_n(q) d\omega_m(p) \delta^{(4)}(P - \sum_{k=1}^n q_k) \delta^{(4)}(P - \sum_{k=1}^m p_k) |a_{n,m}|^2, \quad (3.3)$$

where

$$d\omega_n(q) = \prod_{k=1}^n d\omega(q_k) = \prod_{k=1}^n \frac{d^3q_k}{(2\pi)^3 2\epsilon(q_k)}, \quad \epsilon = (q^2 + m_h^2)^{1/2},$$

is the Lorentz-invariant phase space element. We assume that the energy-momentum conservation δ -function was extracted from the amplitude. It was divided into two parts:

$$\delta^{(4)}(\sum q_k - \sum p_k) = \int d^4P \delta^{(4)}(P - \sum q_k) \delta^{(4)}(P - \sum p_k). \quad (3.4)$$

It is not too hard to see that, up to phase space volume,

$$r = \int d^4P r(P)$$

is the imaginary part of amplitude $\langle vac|vac \rangle$. Therefore, computing $r(P)$ the standard renormalization procedure can be applied and the new divergences will not arise in our formalism.

The Fourier transformation of δ -functions in (3.3) allows one to write $r(P)$ in the form:

$$r(P) = \int \frac{d^4\alpha_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha_2}{(2\pi)^4} e^{iP(\alpha_1+\alpha_2)} \rho(\alpha_1, \alpha_2),$$

where

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} \int \prod_{k=1}^n \{d\omega(q_k) e^{-i\alpha_1 q_k}\} \prod_{k=1}^m \{d\omega(p_k) e^{-i\alpha_2 p_k}\} |a_{n,m}|^2. \quad (3.5)$$

Introduction of the "Fourier-transformed" probability $\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ means only that the phase-space volume is not fixed exactly, i.e., it is proposed that 4-vector P is fixed with some accuracy if α_i are fixed. The energy and momentum in our approach are still locally conserved quantities since the amplitude a_{nm} is translational invariant. So, we can perform the transformation:

$$\alpha_1 \sum q_k = (\alpha_1 - \sigma_1) \sum q_k + \sigma_1 \sum q_k \rightarrow (\alpha_1 - \sigma_1) \sum q_k + \sigma_1 P$$

since 4-momenta are conserved. The choice of σ_1 fixes the reference frame. This degree of freedom of the theory was considered in [44,45].

Inserting (3.1) into (3.5) we find that

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_1, \alpha_2) = \exp\{i \int dx dx' (\hat{\phi}_+(x) D_{+-}(x-x', \alpha_2) \hat{\phi}_-(x') - \\ - \hat{\phi}_-(x) D_{-+}(x-x', \alpha_1) \hat{\phi}_+(x'))\} Z(\phi_+) Z^*(\phi_-), \end{aligned} \quad (3.6)$$

where D_{+-} and D_{-+} are the positive and negative frequency correlation functions,

$$D_{+-}(x-x', \alpha) = -i \int d\omega(q) e^{iq(x-x'-\alpha)}$$

describes the process of particles creation at the time moment x_0 and its absorption at x'_0 , $x_0 > x'_0$, and α is the center of mass () 4-coordinate. Function

$$D_{-+}(x-x', \alpha) = i \int d\omega(q) e^{-iq(x-x'+\alpha)}$$

describes the opposite process, $x_0 < x'_0$. These functions obey the homogeneous equations:

$$(\partial^2 + m_h^2)_x G_{+-} = (\partial^2 + m_h^2)_x G_{-+} = 0$$

since the propagation of mass-shell particles is described.

We suppose that $Z(\phi)$ may be computed perturbatively. For this purpose following transformation will be used:

$$\begin{aligned} e^{-iV(\phi)} &= e^{-i \int dx \hat{j}(x) \hat{\phi}'(x)} e^{i \int dx j(x) \phi(x)} e^{-iV(\phi')} = \\ &= e^{\int dx \phi(x) \hat{\phi}'(x)} e^{-iV(\phi')} = \\ &= e^{-iV(-i\hat{j})} e^{i \int dx j(x) \phi(x)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

where $\hat{\phi}$ was defined in (3.2). At the end of calculations the auxiliary variables j , ϕ' should be taken equal to zero. Using the first equality in (3.7) we find that

$$Z(\phi) = e^{-i \int dx \hat{j}(x) \hat{\Phi}(x)} e^{-iV(\Phi+\phi)} e^{-\frac{i}{2} \int dx dx' j(x) D_{++}(x-x') j(x')}, \quad (3.8)$$

where D_{++} is the causal Green function:

$$(\partial^2 + m_h^2)_x G_{++}(x-y) = \delta(x-y).$$

Inserting (3.8) into (3.6) after simple manipulations with differential operators, see (3.7), we find the expression:

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_1, \alpha_2) &= e^{-iV(-i\hat{j}_+) + iV(-i\hat{j}_-)} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{2} \int dx dx' (j_+(x) D_{+-}(x-x', \alpha_1) j_-(x') - \right. \\ &\quad \left. j_-(x) D_{-+}(x-x', \alpha_2) j_+(x') - \right. \\ &\quad \left. -j_+(x) D_{++}(x-x') j_+(x') + j_-(x) D_{--}(x-x') j_-(x'))\right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where

$$D_{--} = (D_{++})^*$$

is the anticausal Green function.

Considering the system with large number of particles we can simplify calculations choosing the CM frame $P = (P_0 = E, \vec{0})$. It is useful also [16, 20] to rotate the contours of integration over $\alpha_{0,k}$: $\alpha_{0,k} = -i\beta_k$, $\text{Im}\beta_k = 0$, $k = 1, 2$. In result, omitting unnecessary constant, we will consider $\rho = \rho(\beta_1, \beta_2)$.

External particles play the double role in the S -matrix approach: their interactions create and annihilate the interacting fields system and, on the other hand, they are probes through which the measurement of the system is performed. Since β_k are the conjugate to the particles energies quantities we will interpret them as the inverse temperatures in the initial (β_1) and final (β_2) states of interacting fields. But there is the question: are constants β_k really the "good" parameters to describe the system.

The integrals over β_k :

$$r(E) = \int \frac{d\beta_1}{2\pi i} \frac{d\beta_2}{2\pi i} e^{(\beta_1 + \beta_2)E} e^{-F(\beta_1, \beta_2)}, \quad (3.10)$$

where

$$F(\beta_1, \beta_2) = -\ln \rho(\beta_1, \beta_2),$$

can be computed by the stationary phase method. This assumes that the total energy E is a fixed quantity. The solutions of the equations (of state):

$$E = \frac{\partial F(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_k}, \quad k = 1, 2, \quad (3.11)$$

give the mostly probable values of β_k at a given E . Eqs. (3.11) always have the real solutions and, because of energy conservation law, both Eqs. (3.11) have the same solution with the property [16]:

$$\beta_k = \beta(E), \quad \beta > 0.$$

Assuming that β is the "good" parameter, i.e., the fluctuations of β_k are Gaussian we can interpret $F(\beta_1, \beta_2)$ as the free energy and $1/\beta_k$ as the temperatures. Such definition of thermodynamical parameters is in a spirit of microcanonical description. We will return to this question in Sec.4.

The structure of generating functional (3.9) is the same as the generating functional of Niemi-Semenoff [12]. The difference is only in the definition of Green functions which follows from the choice of boundary condition (2.6). The Green functions $D_{ij}, i, j = +, -$ were defined on the time contours $C_{\pm}$ in the complex time plane ($C_- = C_+^*$). This definition of the time contours coincides with Keldysh' time contour [14]. The expression (3.9) can be written in the compact form if the matrix notations are used. Note also a doubling of the degrees of freedom. This doubling is unavoidable since Green functions D_{ij} are singular on the light cone.

3.2. Closed-Path Boundary Conditions. The generating functional $\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ has important factorized structure, see (3.6):

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = e^{\hat{N}(\alpha_1, \alpha_2; \phi)} \rho_0(\phi_{\pm}),$$

where the operator

$$\begin{aligned} \hat{N}(\alpha_1, \alpha_2; \phi) = & \int dx dx' (\hat{\phi}_+(x) D_{+-}(x - x', \alpha_2) \hat{\phi}_-(x') - \\ & - \hat{\phi}_-(x) D_{-+}(x - x', \alpha_1) \hat{\phi}_+(x')) \end{aligned}$$

acts on the generating functional

$$\begin{aligned} \rho_0(\phi_{\pm}) = & Z(\phi_+) Z^*(\phi_-) = \\ = & \int D\Phi_+ D\Phi_- e^{iS(\Phi_+) - iS(\Phi_-) - iV(\Phi_+ + \phi_+) + iV(\Phi_- + \phi_-)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

of measurables. All "thermodynamical" information was contained in the operator $\hat{N}(\alpha_1, \alpha_2; \phi)$ and interactions are hidden in $\rho_0(\phi_{\pm})$. One can say that action of the operator $\hat{N}$ maps the system of interacting fields on the measurable states. Last ones are "labeled" by α_1 and α_2 . Just this property allows one to say that we are dealing with "mechanical" fluctuations only. To regulate the particles number we can introduce into $\hat{N}$ the dependence from "activities" z_1 and z_2 for initial and final states, separately.

The independent fields ϕ_+, ϕ_- and Φ_+, Φ_- were defined on the time contours C_+, C_- . By definition, path integral (3.12) describes the closed path motion in the space of fields Φ . We want to use this fact and introduce a more general boundary condition which also guarantees cancellation of surface terms in the perturbation framework. We will introduce the equality:

$$\int_{\sigma_{\infty}} d\sigma_{\mu} \Phi_+ \partial^{\mu} \Phi_+ = \int_{\sigma_{\infty}} d\sigma_{\mu} \Phi_- \partial^{\mu} \Phi_-. \quad (3.13)$$

The solution of Eq. (3.13) requires that the fields Φ_+ and Φ_- (and their first derivatives $\partial_{\mu} \Phi_{\pm}$) coincide on the boundary hypersurface σ_{∞} :

$$\Phi_{\pm}(\sigma_{\infty}) = \Phi(\sigma_{\infty}),$$

where, by definition, $\Phi(\sigma_{\infty})$ is the arbitrary, "turning-point", field.

The existence of nontrivial field $\Phi(\sigma_{\infty})$, in absence of surface terms, has influence only on the structure of Green functions

$$\begin{aligned} G_{++} &= \langle T \Phi_+ \Phi_+ \rangle, & G_{+-} &= \langle \Phi_+ \Phi_- \rangle, \\ G_{-+} &= \langle \Phi_- \Phi_+ \rangle, & G_{--} &= \langle \tilde{T} \Phi_- \Phi_- \rangle, \end{aligned} \quad (3.14)$$

where $\tilde{T}$ is the antitemporal time ordering operator. These Green functions must obey the equations

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)_x G_{+-}(x-y) &= (\partial^2 + m^2)_x G_{-+}(x-y) = 0, \\ (\partial^2 + m^2)_x G_{++}(x-y) &= (\partial^2 + m^2)_x^* G_{--}(x-y) = \delta(x-y), \end{aligned} \quad (3.15)$$

and the general solution of these equations

$$\begin{aligned} G_{ii} &= D_{ii} + g_{ii}, \\ G_{ij} &= g_{ij}, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.16)$$

contains the undefined terms g_{ij} which must obey the homogeneous equations:

$$(\partial^2 + m^2)_x g_{ij}(x-y) = 0, \quad i, j = +, -. \quad (3.17)$$

The general solution of these equations (they are distinguished by the choice of the time contours $C_{\pm}$)

$$g_{ij}(x - x') = \int d\omega(q) e^{iq(x-x')} n_{ij}(q) \quad (3.18)$$

are defined by the functions n_{ij} . Last ones are the functionals of ‘turning-point’ field $\Phi(\sigma_{\infty})$: if $\Phi(\sigma_{\infty}) = 0$, we must have $n_{ij} = 0$ and we will come back to the theory of previous section.

Our aim is to define n_{ij} . We can suppose that

$$n_{ij} \sim \langle \Phi(\sigma_{\infty}) \cdots \Phi(\sigma_{\infty}) \rangle.$$

The simplest supposition gives:

$$n_{ij} \sim \langle \Phi_i \Phi_j \rangle \sim \langle \Phi^2(\sigma_{\infty}) \rangle. \quad (3.19)$$

We will find the exact definition of n_{ij} starting from the S -matrix interpretation of the theory.

We should suppose there are only free, mass-shell particles that are on the infinitely far hypersurface σ_{∞} . Formally this follows from (3.16)–(3.18) and is natural in the S -matrix framework [7]. In other respects the choice of the boundary condition is arbitrary.

Therefore, our aim is the description of evolution of the system in a background field of mass-shell particles. We will assume that there are no any special correlations among background particles and will take into account only the energy-momentum conservation laws constraints. Quantitatively this means that multiplicity distribution of background particles is Poisson-like, i.e., is determined by the mean multiplicity only. This is in spirit of definition of n_{ij} in Eqs. (3.18), (3.19).

Our derivation is the same as in [45]. Here we restrict ourselves mentioning only the main quantitative points.

In the vacuum case of Sec.3.1 the process of particles creation and their further absorption was described. In the presence of the background particles this time-ordered picture is wiped out: there appears the possibility of particles absorption before their creation.

The particles creation and absorption was described by the product of operator exponent (3.6). One can derive (see also [45]) the generalizations of (3.6): the presence of the background particles will lead to the same structure:

$$\rho_{cp} = e^{i\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)} \rho_0(\phi_{\pm}),$$

where $\rho_0(\phi_{\pm})$ is the same generating functional, see (3.12). But the operator $\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)$, $i, j = +, -$, should be changed wanting to take into account the external particles environment.

The operator $\hat{\phi}_i^*(q)$ was interpreted as the creation and $\hat{\phi}_i(q)$ as the annihilation operator, see definition (3.1). Correspondingly the product $\hat{\phi}_i^*(q)\hat{\phi}_j(q)$ acts as the activity operator. So, in the expansion of $\hat{N}(\phi_i^*\phi_j)$ we can leave only first nontrivial term:

$$\hat{N}(\phi_i^*\phi_j) = \int d\omega(q) \hat{\phi}_i^*(q) n_{ij} \hat{\phi}_j(q), \quad (3.20)$$

since no special correlation among background particles should be expected. If the external (nondynamical) correlations are present, then the higher powers of $\hat{\phi}_i^*\hat{\phi}_j$ will appear in expansion (3.20) [29]. Following the interpretation of $\hat{\phi}_i^*\hat{\phi}_j$ we conclude that n_{ij} is the mean multiplicity of background particles. In (3.20) the normalization condition $N(0) = 0$ was used and summation over all i, j was assumed. (In the vacuum case only the combination $i \neq j$ was present.)

Computing ρ_{cp} we must conserve the translational invariance of amplitudes and extract the energy-momentum conservation δ -functions. We must adjust to each vertex of in-going particle in $a_{n,m}$ the factor $e^{-i\alpha_1 q/2}$ and for each out-going particle $e^{-i\alpha_2 q/2}$ one, after Fourier transformation, of these δ -functions.

So, the product $e^{-i\alpha_k q/2} e^{-i\alpha_j q/2}$ can be interpreted as the probability factor of the one-particle (*creation + annihilation*) process. The n -particles (*creation + annihilation*) process' probability is the simple product of these factors if there are no special correlations among background particles. This interpretation is evident in the CM frame $\alpha_k = (-i\beta_k, \vec{0})$.

After these preliminaries it is not difficult to find that in the CM frame we have:

$$n_{++}(q_0) = n_{--}(q_0) = \frac{1}{e^{\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}|q_0|} - 1} \equiv \tilde{n}(|q_0| \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}). \quad (3.21)$$

Computing n_{ij} for $i \neq j$ we must take into account that we have one additional particle:

$$n_{+-}(q_0) = \Theta(q_0)(1 + \tilde{n}(q_0\beta_1)) + \Theta(-q_0)\tilde{n}(-q_0\beta_1) \quad (3.22)$$

and

$$n_{-+}(q_0) = \Theta(q_0)\tilde{n}(q_0\beta_2) + \Theta(-q_0)(1 + \tilde{n}(-q_0\beta_2)). \quad (3.23)$$

Using (3.21), (3.22) and (3.23), and the definition (3.16) we find the Green functions (the matrix Green functions in the real-time finite-temperature field theories were introduced firstly in [46]):

$$G_{i,j}(x - x', (\beta)) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-x')} \tilde{G}_{ij}(q, (\beta))$$

where

$$i\tilde{G}_{ij}(q, (\beta)) = \begin{pmatrix} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{q^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} +$$

$$+2\pi\delta(q^2 - m^2) \begin{pmatrix} \tilde{n}(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|) & \tilde{n}(\beta_2|q_0)a_+(\beta_2) \\ \tilde{n}(\beta_1|q_0)a_-(\beta_1) & \tilde{n}(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

and

$$a_{\pm}(\beta) = -e^{\frac{\beta}{2}(|q_0| \pm q_0)}.$$

The corresponding generating functional has the standard form:

$$\begin{aligned} \rho_{cp}(j_{\pm}) &= \exp\{-iV(-i\hat{j}_+) + iV(-i\hat{j}_-)\} \times \\ &\times \exp\{\frac{i}{2} \int dx dx' j_i(x) G_{ij}(x-x', (\beta)) j_j(x')\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

where the summation over repeated indices is assumed.

Inserting (3.25) into the equation of state (3.11) we can find that $\beta_1 = \beta_2 = \beta(E)$. If $\beta(E)$ is a "good" parameter, then $G_{ij}(x-x'; \beta)$ coincide with the Green functions of the real-time finite-temperature field theory and the KMS boundary condition:

$$G_{+-}(t-t') = G_{-+}(t-t' - i\beta), \quad G_{-+}(t-t') = G_{+-}(t-t' + i\beta), \quad (3.26)$$

is restored. Eq. (3.26) can be deduced from (3.24) by the direct calculations.

4. APPLICABILITY OF FINITE-TEMPERATURE DESCRIPTION

4.1. The Schwinger-Keldysh Formalism. There are various approaches to build the real-time finite-temperature field theories of Schwinger-Keldysh type (e.g., [10]). All of them use various tricks for analytical continuation of imaginary-time Matsubara formalism to the real time [47]. The basis of the approaches is introduction of Matsubara field operator

$$\Phi_M(\mathbf{x}, \beta) = e^{\beta H} \Phi_S(\mathbf{x}) e^{-\beta H}, \quad (4.1)$$

where $\Phi_S(\mathbf{x})$ is the interaction-picture operator, instead of Heisenberg operator

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = e^{itH} \Phi_S(\mathbf{x}) e^{-itH}.$$

This introduces the averaging over Gibbs ensemble instead of averaging over zero-temperature vacuum states.

If the interaction is switched on adiabatically at the instant t_i and is switched off at t_f , then there is the unitary transformation:

$$\Phi(x) = U(t_i, t_f) U(t_i, t) \Phi_S(x) U(t, t_i).$$

Introducing the complex Mills time contours [43] to connect t_i to t , t to t_f and t_f to t_i we form "closed-time" contour C (the end-points of the contours C_+ and C_- are *joint* together). This allows one to write last equality in the compact form:

$$\Phi(x) = T_C \{ \Phi(x) e^{i \int_C d^4 x' L_{int}(x')} \}_S,$$

where T_C is the time-ordering on the contour C operator.

The corresponding expression for the generating functional $Z(j)$ of correlation (Green) functions has the form:

$$Z(j) = R(0) < T_C e^{i \int_C d^4 x \{ L_{int}(x) + j(x) \Phi(x) \}}_S >,$$

where $<>$ means averaging over initial state.

If the initial correlations have little effect, we can perform averaging over Gibbs ensemble. This is the main assumption of formalism: the generating functional of the Green functions $Z(j)$ has the form in this case:

$$Z(j) = \int D\Phi' < \Phi'; t_i | e^{-\beta H} T_C e^{i \int_C d^4 x j(x) \Phi(x)} | \Phi'; t_i >$$

with $\Phi' = \Phi'(\mathbf{x})$. In accordance with (4.1) we have:

$$< \Phi'; t_i | e^{-\beta H} = < \Phi'; t_i - i\beta |$$

and, in result,

$$Z(j) = \int D\Phi' e^{i \int_{C_\beta} d^4 x \{ L(x) + j(x) \Phi(x) \}}, \quad (4.2)$$

where path integration is performed with KMS periodic boundary condition:

$$\Phi(t_i) = \Phi(t_i - i\beta).$$

In (4.2) the contour C_β connects t_i to t_f , t_f to t_i and t_i to $t_i - i\beta$. Therefore it contains imaginary-time Matsubara part t_i to $t_i - i\beta$. More symmetrical formulation uses following realization: t_i to t_f , t_f to $t_f - i\beta/2$, $t_f - i\beta/2$ to $t_i - i\beta/2$ and $t_i - i\beta/2$ to $t_i - i\beta$ (e.g., [12]). This case also contains the imaginary-time parts of time contour. Therefore, Eq. (4.2) presents the analytical continuation of Matsubara generating functional to real times.

One can note that if this analytical continuation is possible in $Z(j)$, then representation (4.2) gives good recipe of regularization of frequency integrals in the Matsubara perturbation theory, e.g., [10], but nothing new for our problem since the Matsubara formalism is a formalism for equilibrium states only.

Taking $t_i = -\infty$ and $t_f = +\infty$ and calculating integral (4.2) perturbatively we find coincidence of $Z(j)$ and $\rho(\beta)$ from (3.25) with Green functions defined

in (3.24) if $\beta_1 = \beta_2$. This "factorization" of contributions from contours C_+ and C_- in the integral (4.2) follows from the Riemann–Lebesgue lemma [48] which is applicable in the perturbation framework [12, 43]. Note absence of Matsubara parts of contour, which prevents the factorization, in the derived "S-matrix generating functional" (3.25) by definition (importance of this circumstances is discussed in Sec.7).

4.2. Range of the "Hydrodynamical" Approximation. Let us return now to Eq. (3.5). To find the physical meaning $\beta_{1(2)}$ we must show the way as they can be measured. If there is nonequilibrium flow it is hard to invent a thermometer (or thermodynamical calorimeter) which measures locally in space-time the temperatures of this dissipative processes. But there was described another way — to define the temperatures through equations of state. This is possible in the accelerator experiments where the total energy E is fixed. So, we will define $\beta_{1(2)}$ through equations of state (3.11), i.e., considering $1/\beta_{1(2)}$ as the mean energy of particles in the initial (final) state. But even knowing solutions of these equations one cannot find $\rho(E, z)$ correctly if the assumption that $\beta_{1(2)}$ are "good" quantities is not added, i.e., that the fluctuations near solutions of Eqs. (3.11) are small (Gaussian).

This assumption is the main problem toward nonequilibrium thermodynamics. The problem in our terms looks as follows: the expansion near $\beta_{1(2)}(E)$ gives asymptotic series over

$$\int \mathbf{D}_s \sim \int \prod \{d\omega(k_i) dr_i\} < \varepsilon(k_1) \varepsilon(k_2) \cdots > |_{(r_1, r_2, \dots)},$$

where $\langle \rangle_()$ means averaging over fields drawn on fixed points of phase space $(k, r)_i$. In other words, the fluctuations near $\beta_{1(2)}(E)$ are defined by the value of inclusive spectra familiar in particle physics. Therefore, $\beta_{1(2)}(E)$ are "good" quantities if this inclusive spectra are small. But this is too strong assumption. More careful analysis shows that it is enough to have the factorization properties [49]:

$$\begin{aligned} \int \prod \{d\omega(k_i) dr_i\} < \varepsilon(k_1) \varepsilon(k_2) \cdots > |_{(r_1, r_2, \dots)} - \\ \prod \int d\Omega(k_i) dr_i < \varepsilon(k_i) > |_{(r_i)} \sim 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

It must be noted that this is the unique solution of the problem since the expansion near $\beta_{1(2)}(E)$ *unavoidably* leads to asymptotic series with zero radii of convergence.

One can hope to avoid this problem working permanently in the energy-momentum representation, i.e., without introduction of temperatures. Of course this is possible in particle physics, but if $\beta_{1(2)}(E)$ is not the "good" parameter

this means that all correlations between created particles are sufficient, i.e., only the energy-momentum representation did not solve the problem.

At the end, discussed factorization property of $\mathbf{D}_s$, $s > 1$, is the well-known Bogoliubov condition of "shortened" description of nonequilibrium thermodynamical systems with s -particle distribution functions $\mathbf{D}_s$, $s > 1$, expressed in terms of $\mathbf{D}_1$. It is the condition for the "hydrodynamical" descriptions applicability since it assumes that the constant $\beta_1(E) = \beta_2(E)$ is a "good" parameter for description of whole system.

Considering a problem with nonzero nonequilibrium flow it is hard to expect that $\beta_{1(2)}(E)$ is a good parameter, i.e., that the factorization conditions are held. Nevertheless, as was mentioned above, there is a possibility to have the *mean values* of correlators sufficiently small in restricted ranges of phase space. It is the so-called "kinetic" phase of the process: when the memory of initial state disappears, the "fast" fluctuations are averaged over and we can consider the long-range fluctuations only.

5. LOCAL EQUILIBRIUM HYPOTHESIS

Let us return now to description of experimental situation in the high multiplicity experiments. Having at energies of modern accelerators thousands of particles in a final state it is a difficult problem even to count such big numbers. So, the number of particles n cannot be considered as a trigger. Moreover, it seems natural that it is not important whether we have hundred thousand of particles or hundred thousand plus one. To do first step toward CQGP it is enough to be sure that in experiment the transition of "hot" initial state into "cold" final one is examined. For this purpose the ordinary calorimeters can be used [50].

So, we must assume that the energies of created particles $\varepsilon_i \leq \varepsilon_0$, where ε_0 is fixed by experiment. Then using energy conservation law at given ε_0 the number of created particles is bounded from below: $n > \sqrt{s}/\varepsilon_0 \equiv n_{\min}$. With this constraint the integral cross section

$$\sigma_{\varepsilon_0}(s) = \sum_{n=n_{\min}} \sigma_n(s)$$

is measured. Choosing $n_{\min} \gg \bar{n}$, i.e., $\varepsilon_0 \ll \sqrt{s}/\bar{n}(s)$, we get into high multiplicity region. There is also a theoretical possibility of restoring the quantity $\sim \sigma_n$ calculating the difference $\sigma_{\varepsilon_0}(s) - \sigma_{\varepsilon_0+\delta\varepsilon_0}(s)$ [50].

It is not necessary to measure energy of each particle to have $n_{\min} \gg \bar{n}$. Indeed, let $\tilde{\varepsilon}_i$ is the energy of i -th group of particles, $\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \dots + \tilde{\varepsilon}_k = \sqrt{s}$ and let $\tilde{n}_i$ is the number of particles in the group, $\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \dots + \tilde{n}_k = n^*$. Then,

*It is assumed that the number of calorimeter cells $K \geq k$.

if $\tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, k$, we have inequality: $k > n_{\min}$. Therefore, we get into high multiplicities domain since $n \geq k$, if $\varepsilon_0 \ll \sqrt{s}/\bar{n}(s)$. We can use the calorimeter demanding that the induced in each cell energy $\tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_0$.

The preparation of such experiment is not hopeless task and it may be sufficiently informative. This formulation of experiment we will put in the basis of the theory. Theoretically, we should shrink the 4-dimension of calorimeter cells up to zero since we do not know *ad hoc* the cells dimension. Then the cells index i is transformed into the position of particle r . So we come to contradiction with quantum uncertainty principle. This forces one to use the Wigner functions formalism and the first question which must be solved is to find a way how this formalism can be adopted for description of our experiment (there is also interesting ideas concerning applicability of Wigner functions in [51]).

5.1. Vacuum Boundary Condition. We start consideration from the assumption that the temperature fluctuations are large scale. In a cell, the dimension of which is much smaller than the fluctuation scale of temperature, we can assume that the temperature is a "good" parameter. (The "good" parameter means that the corresponding fluctuations are Gaussian.)

Let us surround the interaction region, i.e., the system under consideration, by N cells with known space-time position and let us propose that we can measure the energy and momentum of groups of in- and out-going particles in each cell. The 4-dimension of cells cannot be arbitrary small in this case because of the quantum uncertainty principle.

To describe this situation we decompose δ -functions in (3.4) on the product of $(N + 1)$ δ -functions:

$$\delta^{(4)}(P - \sum_{k=1}^n q_k) = \int \prod_{\nu=1}^N \{dQ_\nu \delta(Q_\nu - \sum_{k=1}^{n_\nu} q_{k,\nu})\} \delta^{(4)}(P - \sum_{\nu=1}^N Q_\nu),$$

where $q_{k,\nu}$ are the momentum of k -th in-going particle in the ν -th cell and Q_ν is the total 4-momenta of n_ν in-going particles in this cell, $\nu = 1, 2, \dots, N$. The same decomposition will be used for the second δ -function in (3.4). We must take into account the multinomial character of particles decomposition on N groups. This will give the coefficient:

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_N!} \delta_K(n - \sum_{\nu=1}^N n_\nu) \frac{m!}{m_1! \dots m_N!} \delta_K(m - \sum_{\nu=1}^N m_\nu),$$

where δ_K is Kronecker's δ -function.

In result, the quantity

$$r((Q)_N, (P)_N) = \sum_{(n,m)} \int |a_{(n,m)}|^2 \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^N \left\{ \prod_{k=1}^{n_\nu} \frac{d\omega(q_{k,\nu})}{n_\nu!} \delta^{(4)}(Q_\nu - \sum_{k=1}^{n_\nu} q_{k,\nu}) \prod_{k=1}^{m_\nu} \frac{d\omega(p_{k,\nu})}{m_\nu!} \delta^{(4)}(P_\nu - \sum_{k=1}^{m_\nu} p_{k,\nu}) \right\} \quad (5.1)$$

describes a probability to measure in the ν -th cell the fluxes of in-going particles with total 4-momentum Q_ν and of out-going particles with the total 4-momentum P_ν . The sequence of this two measurements is not fixed.

The Fourier transformation of δ -functions in (5.1) gives:

$$r((Q)_N, (P)_N) = \int \prod_{k=1}^N \frac{d^4\alpha_{1,\nu}}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha_{2,\nu}}{(2\pi)^4} e^{i \sum_{\nu=1}^N (Q_\nu \alpha_{1,\nu} + P_\nu \alpha_{2,\nu})} \rho((\alpha_1)_N, (\alpha_2)_N),$$

where

$$\rho((\alpha_1)_N, (\alpha_2)_N) = \rho(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,N}; \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{2,N})$$

has the form:

$$\begin{aligned} \rho((\alpha_1)_N, (\alpha_2)_N) = & \int \prod_{\nu=1}^N \left\{ \prod_{k=1}^{n_\nu} \frac{d\omega(q_{k,\nu})}{n_\nu!} e^{-i\alpha_{1,\nu} q_{k,\nu}} \times \right. \\ & \left. \times \prod_{k=1}^{m_\nu} \frac{d\omega(p_{k,\nu})}{m_\nu!} e^{-i\alpha_{2,\nu} p_{k,\nu}} \right\} |a_{(n,m)}|^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Inserting (3.1) into (5.2) we find:

$$\begin{aligned} \rho((\alpha_-)_N, (\alpha_+)_N) = & \exp\left\{ i \sum_{\nu=1}^N \int dx dx' [\hat{\phi}_+(x) D_{+-}(x-x'; \alpha_{2,\nu}) \hat{\phi}_-(x') - \right. \\ & \left. - \hat{\phi}_-(x) D_{-+}(x-x'; \alpha_{1,\nu}) \hat{\phi}_+(x')] \right\} Z(\phi_+) Z^*(\phi_-), \end{aligned} \quad (5.3)$$

where ϕ_- is defined on the complex conjugate contour $C_- : t \rightarrow t - i\varepsilon$ and $D_{+-}(x-x'; \alpha)$, $D_{-+}(x-x'; \alpha)$ are the positive and negative frequency correlation functions correspondingly.

We must integrate over sets $(Q)_N$ and $(P)_N$ if the distribution of fluxes momenta over cells is not fixed. In result,

$$r(P) = \int D^4\alpha_1(P) d^4\alpha_2(P) \rho((\alpha_1)_N, (\alpha_2)_N), \quad (5.4)$$

where the differential measure

$$D^4\alpha(P) = \prod_{\nu=1}^N \frac{d^4\alpha_\nu}{(2\pi)^4} K(P, (\alpha)_N)$$

takes into account the energy-momentum conservation laws:

$$K(P, (\alpha)_N) = \int \prod_{\nu=1}^N d^4 Q_\nu e^{i \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu Q_\nu} \delta^{(4)}(P - \sum_{\nu=1}^N Q_\nu).$$

The explicit integration gives that

$$K(P, (\alpha)_N) \sim \prod_{\nu=1}^N \delta^{(3)}(\alpha - \alpha_\nu),$$

where $\vec{\alpha}$ is the center of mass (CM) 3-vector.

To simplify the consideration let us choose the CM frame and put $\alpha = (-i\beta, \vec{0})$. In result,

$$K(E, (\beta)_N) = \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^N dE_\nu e^{\sum_{\nu=1}^N \beta_\nu E_\nu} \delta(E - \sum_{\nu=1}^N E_\nu).$$

Correspondingly, in the CM frame,

$$r(E) = \int D\beta_1(E) D\beta_2(E) \rho((\beta_1)_N, (\beta_2)_N),$$

where

$$D\beta(E) = \prod_{\nu=1}^N \frac{d\beta_\nu}{2\pi i} K(E, (\beta)_N)$$

and $\rho((\beta)_N)$ was defined in (5.3) with $\alpha_{k,\nu} = (-i\beta_{k,\nu}, \vec{0})$, $Re\beta_{k,\nu} > 0$, $k = 1, 2$.

We will calculate integrals over β_k using the stationary phase method. The equations for mostly probable values of β_k :

$$-\frac{1}{K(E, (\beta_k)_N)} \frac{\partial}{\partial \beta_{k,\nu}} K(E, (\beta_k)_N) = \frac{1}{\rho((\beta_1)_N)} \frac{\partial}{\partial \beta_{k,\nu}} \rho((\beta)_N), \quad k = 1, 2, \quad (5.5)$$

always have the unique positive solutions $\tilde{\beta}_{k,\nu}(E)$. We propose that the fluctuations of β_k near $\tilde{\beta}_k$ are small, i.e., are Gaussian. This is the basis of the local-equilibrium hypothesis [32]. In this case $1/\tilde{\beta}_{1,\nu}$ is the temperature in the initial state in the measurement cell ν and $1/\tilde{\beta}_{2,\nu}$ is the temperature of the final state in the ν -th measurement cell.

The last formulation (5.4) implies that the 4-momenta $(Q)_N$ and $(P)_N$ cannot be measured. It is possible to consider another formulation also. For instance,

we can suppose that the initial set $(Q)_N$ is fixed (measured) but $(P)_N$ is not. In this case we will have mixed experiment: $\tilde{\beta}_{1,\nu}$ is defined by the equation:

$$E_\nu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta_{1,\nu}} \rho$$

and $\tilde{\beta}_{2,\nu}$ is defined by second equation in (5.5).

Considering limit $N \rightarrow \infty$ the dimension of cells tends to zero. In this case we are forced by quantum uncertainty principle to propose that the 4-momenta sets (Q) and (P) are not fixed. This formulation becomes pure thermodynamical: we must assume that (β_1) and (β_2) are measurable quantities. For instance, we can fix (β_1) and try to find (β_2) as the function of total energy E and the functional of (β_1) . In this case Eqs. (5.5) become the functional equations.

In the considered microcanonical description the finiteness of temperature does not touch the quantization mechanism. Really, one can see from (5.3) that all thermodynamical information is confined in the operator exponent

$$e^{\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)} = \prod_{\nu} \prod_{i \neq j} e^{i \int \hat{\phi}_i D_{ij} \hat{\phi}_j}$$

the expansion of which describes the environment, and the "mechanical" perturbations are described by the amplitude $Z(\phi)$. This factorization was achieved by introduction of auxiliary field ϕ and is independent of the choice of boundary conditions, i.e., of the choice of considered systems environment.

5.2. Wigner Functions Formalism. We will use the Wigner functions formalism in the Carrusers-Zachariasen formulation [25]. For the sake of generality the m into n particles transition will be considered. This will allow one to include into consideration the heavy ion-ion collisions.

In the previous section the generating functional $\rho((\beta)_N)$ was calculated by means of dividing the "measuring device" (calorimeter) on the N cells. It was assumed that the dimension of device cells tends to zero ($N \rightarrow \infty$). Now we will specify the cells coordinates using Wigner's description.

Let us introduce the distribution function F_n which defines the probability to find n particles with definite momentum and with arbitrary coordinates. This probabilities (cross sections) are usually measured in particle physics. The corresponding Fourier-transformed generating functional can be deduced from (5.3):

$$F(z, (\beta_+)_N, (\beta_-)_N) = \prod_{\nu=1}^N \prod_{i \neq j} \int d\omega(q) \hat{\phi}_i^*(q) e^{-\beta_{j,\nu} \epsilon(q)} \hat{\phi}_j(q) z_{ij}^\nu(q) \times \\ \times Z(\phi_+) Z^*(\phi_-). \quad (5.6)$$

The variation of F over $z_{ij}^\nu(q)$ generates corresponding distribution functions. One can interpret $z_{ij}^\nu(q)$ as the local activity: the logarithm of $z_{ij}^\nu(q)$ is conjugate

to the particles number in the cell ν with momentum q for the initial ($ij = 21$) or final ($ij = 12$) states. Note that $z_{ij}^\nu(q)\hat{\phi}_i^*(q)\hat{\phi}_j(q)$ can be considered as the operator of activity.

The Boltzman factor $e^{-\beta_{i,\nu}\epsilon(q)}$ can be interpreted as the probability to find a particle with the energy $\epsilon(q)$ in the final state ($i = 2$) and in the initial state ($i = 1$). The total probability, i.e., the process of creation and further absorption of n particles, is defined by multiplication of this factors.

The generating functional (5.6) is normalized as follows:

$$F(z = 1, (\beta)) = R((\beta)), \quad (5.7)$$

$$F(z = 0, (\beta)) = |Z(0)|^2 = \rho_0(\phi_\pm)|_{\phi_\pm=0},$$

where

$$\rho_0(\phi_\pm) = Z(\phi_+)Z^*(\phi_-)$$

is the "probability" of the vacuum into vacuum transition in presence of auxiliary fields $\phi_\pm$. The one-particle distribution function

$$\begin{aligned} F_1((\beta_1)_N, (\beta_2)_N; q) &= \frac{\delta}{\delta z_{ij}^\nu(q)} F|_{z=0} = \\ &= \{\hat{\phi}_i^*(q)e^{-\beta_i^\nu\epsilon(q)/2}\}\{\hat{\phi}_j(q)e^{-\beta_j^\nu\epsilon(q)/2}\}\rho_0(\phi_\pm) \end{aligned} \quad (5.8)$$

describes the probability to find one particle in the vacuum.

Using definition

$$\begin{aligned} F_1((\beta_1)_N, (\beta_2)_N; q) &= \int dx dx' e^{iq(x-x')} e^{-\beta_{i,\nu}\epsilon(q)} \{\hat{\phi}_i(x)\hat{\phi}_j(x')\rho_0(\phi_\pm) = \\ &= \int dr \{dy e^{iqy} e^{-\beta_{i,\nu}\epsilon(q)}\} \{\hat{\phi}_i(r+y/2)\hat{\phi}_j(r-y/2)\rho_0(\phi_\pm)\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

we introduce the one-particle Wigner function W_1 [25]:

$$F_1((\beta_1)_N, (\beta_2)_N; q) = \int dr W_1((\beta_1)_N, (\beta_2)_N; r, q).$$

So,

$$W_1((\beta_1)_N, (\beta_2)_N; r, q) = \int dy e^{iqy} e^{-\beta_{i,\nu}\epsilon(q)} \{\hat{\phi}_i(r+y/2)\hat{\phi}_j(r-y/2)\rho_0(\phi_\pm).$$

This distribution function describes the probability to find in the vacuum the particle with momentum q at the point r in the cell ν .

Since the choice of the device coordinates is in our hands it is natural to adjust the cell coordinate to the coordinate of measurement r :

$$W_1((\beta_1)_N, (\beta_2)_N; r, q) = \int dy e^{iqy} e^{-\beta_i(r)\epsilon(q)} \{\hat{\phi}_i(r+y/2)\hat{\phi}_j(r-y/2)\rho_0(\phi_\pm).$$

This choice of the device coordinates leads to the following generating functional:

$$F(z, \beta) = \exp\{i \int dy dr [\hat{\phi}_+(r + y/2) D_{+-}(y; \beta_2(r), z) \hat{\phi}_-(r - y/2) - \hat{\phi}_-(r + y/2) D_{-+}(y; \beta_1(r), z) \hat{\phi}_+(r - y/2)]\} \rho_0(\phi_{\pm}), \quad (5.10)$$

where

$$D_{+-}(y; \beta(r), z) = -i \int d\omega(q) z_{+-}(r, q) e^{iqy} e^{-\beta(r)\epsilon(q)},$$

$$D_{-+}(y; \beta(r), z) = i \int d\omega(q) z_{-+}(r, q) e^{-iqy} e^{-\beta(r)\epsilon(q)}$$

are the modified positive and negative correlation functions.

The inclusive, partial, distribution functions are familiar in the particle physics. These functions describe the distributions in presence of arbitrary number of other particles. For instance, one-particle partial distribution function

$$P_{ij}(r, q; (\beta)) = \frac{\delta}{\delta z_{ij}(r, q)} F(z, (\beta))|_{z=1} =$$

$$= \frac{e^{-\beta_i(r)\epsilon(q)}}{(2\pi)^3 \epsilon(q)} \int dy e^{iqy} \hat{\phi}_i(r + y/2) \hat{\phi}_j(r - y/2) \rho(\phi_{\pm}, (\beta)), \quad (5.11)$$

where Eq. (5.7) was used.

The mean multiplicity $n_{ij}(r, q)$ of particles in the infinitesimal cell Y with momentum q is

$$n_{ij}(r, q) = \int dq \frac{\delta}{\delta z_{ij}(r, q)} \ln F(z, (\beta))|_{z=1}.$$

If the interactions among fields are switched out, we can find that (omitting indexes):

$$n(r, q_0) = \frac{1}{e^{\beta(r)q_0} - 1}, \quad q_0 = \epsilon(q) > 0.$$

This is the mean multiplicity of black-body radiation.

5.3. Closed Path Boundary Conditions. The developed formalism allows one to introduce more general "closed-path" boundary conditions. Presence of external black-body radiation flow will reorganize the differential operator $\exp\{\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)\}$ only and new generating functional ρ_{cp} has the form:

$$\rho_{cp}(\alpha_1, \alpha_2) = e^{\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)} \rho_0(\phi_{\pm}).$$

The calculation of operator $\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)$ is strictly the same as in Sec.3. Introducing the cells we will find that

$$\hat{N}(\phi_i^* \phi_j) = \int dr dy \hat{\phi}_i(r + y/2) \tilde{n}_{ij}(r, y) \hat{\phi}_j(r - y/2),$$

where the occupation number $\tilde{n}_{ij}$ carries the cells index r :

$$\tilde{n}_{ij}(r, y) = \int d\omega(q) e^{iqy} n_{ij}(r, q)$$

and ($q_0 = \epsilon(q)$)

$$n_{++}(r, q_0) = n_{--}(r, q_0) = \tilde{n}(r, (\beta_1 + \beta_2)|q_0|/2) = \frac{1}{e^{(\beta_1 + \beta_2)(r)|q_0|/2} - 1},$$

$$n_{+-}(r, q_0) = \Theta(q_0)(1 + \tilde{n}(r, \beta_2 q_0)) + \Theta(-q_0)\tilde{n}(r, -\beta_1 q_0),$$

$$n_{-+}(r, q_0) = n_{+-}(r, -q_0).$$

For simplicity the CM system was used.

Calculating ρ_0 perturbatively we will find that

$$\begin{aligned} \rho_{cp}(\beta) = & \exp\{-iV(-i\hat{j}_+) + iV(-i\hat{j}_-)\} \times \\ & \exp\{i \int dr dy [\hat{j}_i(r + y/2) G_{ij}(y, (\beta(r)) \hat{j}_j(r - y/2)] \} \end{aligned} \quad (5.12)$$

where, using the matrix notations,

$$\begin{aligned} iG(q, (\beta(r))) = & \begin{pmatrix} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{q^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} + \\ & + 2\pi\delta(q^2 - m^2) \begin{pmatrix} n(\frac{(\beta_1 + \beta_2)(r)}{2}|q_0|) & n(\beta_1(r)|q_0|)a_+(\beta_1) \\ n(\beta_2(r)|q_0|)a_-(\beta_2) & n(\frac{(\beta_1 + \beta_2)(r)}{2}|q_0|) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

and

$$a_{\pm}(\beta) = -e^{\beta(|q_0| \pm q_0)/2}. \quad (5.14)$$

Formally these Green functions obey the standard equations in the y space:

$$(\partial^2 - m^2)_y G_{ii} = \delta(y),$$

$$(\partial^2 - m^2)_y G_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

since $\Phi(\sigma_\infty) \neq 0$ reflects the mass-shell particles. But the boundary conditions for these equations are not evident.

It should be underlined that in our consideration r is the coordinate of *measurement*, i.e., r is as the calorimeter cells coordinate and there is no necessity to divide the interaction region of QGP on domains (cells). This means that L must be smaller than the typical range of fluctuations of QGP. But, on the other hand, L cannot be arbitrary small since this will lead to assumption of *local* factorization property of correlators, i.e., to absence of interactions.

So, changing $\beta \rightarrow \beta(r)$ we should assume that $\beta_{1(2)}(r)$ and $z_{+-(-+)}(r, k)$ are constants on interval L . This prescription adopts Wigner functions formalism for the case of high multiplicities. It describes the temperature fluctuations larger than L and averages the fluctuations smaller than L leading to absence, in average, of "non-Gaussian" fluctuations.

It is the typical "calorimetric" measurement since in a dominant number of calorimeter cells the measured mean values of energy, with exponential accuracy, are the "good" parameters $\sim 1/\beta_2(r, E)$. We will assume that the dimension of calorimeter cells $L \ll L_{cr}$, where L_{cr} is the dimension of characteristic fluctuations at given n . In deep asymptotic over n we must have $L_{cr} \rightarrow \infty$. This consideration shows that the offered experiment with calorimeter as the measuring device of particles energies is sufficiently informative in the high multiplicities domain.

6. NONSTATIONARY STATISTICAL OPERATOR

One cannot expect the evident connection between the above considered S -matrix (microcanonical) and Zubarev's [32] approaches. The reason is introduction into Zubarev's formalism of an interaction with a heat bath, external to system under consideration. This interaction is crucial for definition of NSL for explanation of the trend to maximal-entropy state, starting evolution from local-equilibrium state*.

Therefore, in Zubarev's theory the local-equilibrium state was chosen as the boundary condition. It is assumed that in the suitably defined cells of the *system* at a given temperature distribution $T(\vec{x}, t) = 1/\beta(\vec{x}, t)$, where $(\vec{x}, t)$ is the index of the cell, the entropy is maximal. The corresponding nonequilibrium statistical operator

$$\rho_z \sim e^{-\int d^3x \beta(\vec{x}, t) T_{00}} \quad (6.1)$$

describes evolution of a system in the time scale t . Here $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor. It is assumed that the system "follows" to $\beta(\vec{x}, t)$ evolution and the local temperature $T(\vec{x}, t)$ is defined as the external parameter which is the regulator of systems dynamics. For this purpose the special $i\varepsilon$ -prescription was introduced (it was not shown in (6.1)) [32]. It brings the interaction with heat bath.

The KMS periodic boundary condition cannot be applied for nonstationary temperature distribution and by this reason the decomposition:

$$\beta(\vec{x}, t) = \beta_0 + \beta_1(\vec{x}, t) \quad (6.2)$$

*This condition is not necessary in the S -matrix formalism since it is "dynamical" by its nature, i.e., includes the notion of initial- and final-states as the boundary conditions.

was offered in the paper [30]. Here β_0 is the constant, and the inequality

$$\beta_0 \gg |\beta_1(\vec{x}, t)|$$

is assumed. Then,

$$\rho_z \sim e^{-\beta_0(H_0+V+B)}, \quad (6.3)$$

where H_0 is the free part of the Hamiltonian, V describes the interactions, and the linear over β_1/β_0 term B is connected with the deviation of temperature from the "equilibrium" value $1/\beta_0$. Presence of B perturbations creates the "thermal" flows in the system to explain increasing entropy. Considering V and B as the perturbations one can calculate the observables averaging over equilibrium states, i.e., adopting the KMS boundary condition. Using standard terminology one can consider V as the "mechanical" and B as the "thermal" perturbations.

The quantization problem of operator (6.3) is connected with definition of the space-time sequence of mechanical (V) and thermal (B) excitations. It is necessary since the mechanical excitations give the influence on the thermal ones and vice versa. It was assumed in [30] that V and B are commuting operators, i.e., the sequence of V - and B perturbations is not sufficient. The corresponding generating functional has the form [30]:

$$Z(j) = \exp\left\{-i \int_{C_\beta} d^4x (V(-i\hat{j}(x)) + \frac{\beta_1(\mathbf{x}, \tau)}{\beta_0} T_{00}[-i\hat{j}(x)] - \int_{-\infty}^0 dt_1 \frac{\beta_1(\mathbf{x}, \tau + t_1)}{\beta_0} T_{00}[-i\hat{j}(\mathbf{x}, x_0 t_1)])\right\} Tr(e^{-\beta_0 H_0} T_C e^{i \int_C d^4y j(y) \Phi(y)}),$$

where the time contour C_β was described in Sec.4.1, and τ is the measurement time.

It is evident that this solution leads to the renormalization by the interactions with the external field $\beta(\vec{x}, t)$ even without interactions among fundamental fields Φ . The source of this renormalizations is the kinetic term in the energy-momentum tensor T_{00} , i.e., follows from "thermal" interactions with external heat bath. Note absence of this renormalizations in the S -matrix formalism, see, for instance (3.25), where the interactions are generated by V perturbations only.

In [53] the operators V and B are noncommuting ones and B perturbations were switched on after V perturbations. In this formulation the nondynamical renormalizations are also present but it is not unlikely that they are canceled at the very end of calculations [54].

This formulation with $\beta(\vec{x}, t)$ as the external field reminds the old, firstly quantized, field theory in which matter is quantized but fields are not. It is well known that consistent quantum field theory requires the second quantization. Following to this analogy, if we want to take into account consistently the reciprocal

influence of V and B perturbations, the field $\beta(\vec{x}, t)$ must be fundamental, i.e., must be quantized (and the assumption of paper [30] becomes true). But it is evidently the wrong idea in the canonical Gibbs formalism. So, as in the firstly quantized theory, the theory with operator (6.1) must have the restricted range of validity [32].

7. CONCLUSION

In our interpretation of the real-time finite-temperature field theory the statistics and the fields quantum dynamics were factorized: statistics is fixed by the operator $\exp\{\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)\}$ and a pure field-theoretical dynamics is described by $\rho_0(\phi_{\pm}) = Z(\phi_+)Z^*(\phi_-)$, where $Z(\phi_{\pm})$ is the vacuum into vacuum transition amplitude in the presence of the external (auxiliary) fields $\langle vac|vac \rangle_{\phi}$. We can say that the operator $\exp\{\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)\}$ maps the system of interacting fields on the state with definite thermodynamical parameters. We had concentrated our attention in this paper on the structure and origin of operator $\exp\{\hat{N}(\phi_i^* \phi_j)\}$ only and do not discuss $\rho_0(\phi_{\pm})$. But the developed formalism allows one to use following "S-matrix" properties which are new for thermodynamics to define ρ_0 .

First of them is the absence of Matsubara imaginary parts of time contour in ρ_0 by definition: the approach is pure "real-time". This allows one to construct the formalism without referring to time asymptotic properties of correlation (Green) functions, and introduce the temperature description without using a notion of grand canonical ensemble constructing the environment of the system, i.e., the measuring device, "by hand".

Moreover, discussed factorization property has important consequence which would allow one to calculate expectation values with high accuracy. Let us consider the theoretical problem of the $\rho_0(\phi_{\pm})$ calculation. To define the functional measure the orthonormalizability (i.e., the unitarity) condition may be used. It leads to the following representation [55]:

$$\rho_0(\phi) = e^{-i\hat{K}(j,e)} \int DM(\Phi) e^{-U(\Phi,e)} e^{\int dx (v'(\Phi) + j)\phi}, \quad (7.1)$$

where the expansion over operator

$$\hat{K}(j,e) = 2Re \int dx \frac{\delta}{\delta j(x)} \frac{\delta}{\delta e(x)}$$

generates perturbation series and

$$U(\Phi, e) = V(\Phi + e) - V(\Phi - e) - 2Re \int dx e v'(\Phi)$$

weights quantum fluctuations. The most important term in (7.1) is the measure

$$DM(\Phi) = \prod_x d\Phi(x) \delta(\partial_\mu^2 \Phi + m^2 \Phi + v'(\Phi) - j),$$

where $v'(\Phi) \equiv \delta V(\Phi)/\delta \Phi(x)$. So, solving the equation

$$\partial_\mu^2 \Phi + m^2 \Phi + v'(\Phi) = j \quad (7.2)$$

we will find *all* contributions*.

At the very end of calculations one must put $e = j = 0$. Therefore, Eq. (7.2) can be solved expanding it over j . This shows that (7.1) restores at $j = 0$ the usual stationary phase method. Indeed, it can be verified that (7.1) gives usual perturbation theory [55].

But Eq. (7.2) gives much more possibilities. Note that l.h.s. of this equation is the sum of known classical forces and the r.h.s. is the quantum force j . Eq. (7.2) establishes the local equilibrium between this forces. This solves the old standing problem of quantization with constraints: it can be done by field transformations in path integrals since Eq. (7.2) shows the way as j must be transformed when the l.h.s. is transformed. Presence of derivatives in (7.2) shows that the quantum force must be transformed in the tangent space of fields**.

The r.h.s. of Eq. (7.2) may contain also an additional force to describe the external influence on the system of interacting fields. This force was omitted in Eq. (7.2) assuming that a process of particles creation (and absorption) is switched on adiabatically.

As was mentioned above the action of operator $e^{-\hat{N}(\beta, z; \phi)}$ on $\rho_0(\phi)$ maps interacting fields system on measurable states. Let us consider what this gives. Result of action has the form:

$$\rho(\beta, z) = e^{-i\hat{K}(j, e)} \int DM(\Phi) e^{-U(\Phi, e)} e^{-N(\beta, z; \Phi)},$$

where $N = N_1 + N_2$ and

$$N_{1(2)}(\beta, z; \Phi) = \int dr d\omega(k) e^{-\beta_{1(2)}(r) \varepsilon(k)} z_{+-(-+)}(k, r) |\Gamma(k, \Phi)|^2. \quad (7.3)$$

Here r is considered as the *index* of calorimeter cell. This formulae needs more careful explanation. Instead of (7.3) we must consider

$$N_{1(2)}(\beta, z; \Phi) = \int dr d\omega(k) e^{-\beta_{1(2)}(r) \varepsilon(k)} z_{+-(-+)}(k, r)$$

*This means that the unitarity condition is necessary and sufficient for definition of path integral measure for $R_0(\phi_\pm)$ [56]

**This explains why the ordinary transformation of path integral is impossible, gives wrong result [57].

$$\int dq \delta_L(q) \Gamma(k+q, \Phi) \Gamma^*(k-q, \Phi). \quad (7.4)$$

where L is the scale, where $\beta_{1(2)}(r)$ and $z_{+(-+)}(k, r)$ can be considered as the constants (L is the dimension of calorimeter cell). If $L \rightarrow \infty$, then $\delta_L(q)$ can be changed on usual $\delta(q)$ and, therefore, in this limit we will have (7.3). We had considered this limit supposing that the measurement is not in contradiction with quantum uncertainty principle.

So, deriving $N_{1(2)}(\beta, z; \Phi)$ we used the condition that r is the coordinate of size L cell. With this condition

$$\Gamma(k, \Phi) = \int dx e^{ikx} (\partial_\mu^2 + m^2) \Phi \quad (7.5)$$

can be considered as the order parameter. Indeed, $\Gamma(k, \Phi)$ is the element of actions symmetry group since it is linear over field Φ and the generating functional $\rho(\beta, z)$ is trivial if $\langle |\Gamma(k, \Phi)|^2 \rangle = 0$. In this case there is no creation of particles, i.e., there are no measurable asymptotic states (fields).

Indeed, it can be shown [58] that *all* quantum corrections to solitons contribution in the (1+1)-dimensional sine-Gordon model equal zero. This is in accordance with the result of [59] and with factorizability of solitons S matrix. Then it is easily seen computing integral in (7.5) by parts that $\Gamma(k, \Phi_s) = 0$, where Φ_s is the soliton solution. This result shows that hidden symmetry of sine-Gordon model cannot be broken and corresponding (polynomial) integrals of motion are conserved. The application of this idea for non-Abelian field theory should be fruitful.

ACKNOWLEDGMENT

I would like to thank my colleagues from the Institute of Physics (Tbilisi), Institute of Mathematics (Tbilisi), Institute of Nuclear Physics (St.-Petersburg), Joint Institute of Nuclear Research (Dubna), Institute of Experimental and Theoretical Physics (Moscow), Institute of Theoretical Physics (Kiev) and DAMPT (Cambridge), and especially I.Paziashvili and T.Bibilashvili, for fruitful discussions which gave me the chance of extracting the questions that were necessary to show up in this paper. I would like also to thank A.Sissakian for fruitful collaboration in the problem of high-multiplicity hadron reactions. It must be underlined the stimulating interest to this work by V.Kadyshevsky. The experimental side of the problem I learn from T.Lomtadze and T.Grigalashvili. I want to mention also the important information about Wigner functions applicability in the modern solid state physics from M.Tomak. The work was supported in part by the U.S. National Science Foundation and was granted in part by the Georgian Academy of Sciences.

REFERENCES

1. **Kac M.** — Probability and Related Topics. Interscience Publ., London, New York, 1957.
2. **Mayer J.E., Mayer M.G.** — Statistical Mechanics. Wiley, New York, 1940.
3. **Landau L.D.** — Izv. AN SSSR, 1953, v.17, p.85.
4. **Casher A., Neuberger H., Nassinov S.** — Phys.Rev., 1979, v.D20, p.179;
Gurvich E. — Phys.Lett., 1979, v.B87, p.386.
5. **Zakharov V.** — JETP, 1973, v.65, p.219.
6. **Dremin I.** — Usp. Phys. Nauk, 1980, v.160, p.105.
7. **Landau L.D., Peierls R.** — Zs.Phys., 1931, v.69, p.56.
8. **Bloch F.** — Z.Phys., 1932, v.74, p.295.
9. **Matsubara T.** — Prog.Theor.Phys., 1955, v.14, p.351.
10. **Landsman N.P., vanWeert Ch.G.** — Phys.Rep., 1987, v.145, p.141.
11. **Dolan L., Jackiw R.** — Phys.Rev., 1974, v.D9, p.3320.
12. **Niemi A.J., Semenoff G.** — Ann.Phys. (NY), 1984, v.152, p.105.
13. **Schwinger J.** — J.Math.Phys., 1994, v.A9, p.2363.
14. **Keldysh L.** — JETP (Sov.Phys.), 1964, v.20, p.1018.
15. **Umezawa H., Matsumoto H., Tachiki M.** — Thermo-Field Dynamics and Condensed States, Amsterdam, 1982.
16. **Martin M., Schwinger J.** — Phys.Rev., 1959, v.115, p.342.
17. **Kubo R.** — J.Phys.Soc.Japan, 1957, v.12, p.570.
18. **Haag R., Hugengoltz N., Winnink M.** — Commun.Math.Phys., 1967, v.5, p.5.
19. **Chu H., Umezawa H.** — Int.J.Mod.Phys., 1994, v.A9, p.2363.
20. **Byuckling E., Kajantie K.** — Particles Kinematics. John Wiley and Sons, London, 1973.
21. **Kubo R.** — J.Phys.Soc.Japan, 1957, v.12, p.570.
22. **Kadanoff P., Martin P.C.** — Ann.Phys. (NY), 1963, v.24, p.419.
23. **Manjavidze J.** — Preprint, hep-ph/9506424, 1995.
24. **Bogoliubov N.N.** — Studies in Statistical Mechanics. Eds. J.deBoer and G.E.Uhlembeck, North-Holland, Amsterdam, 1962.
25. **Carruthers P., Zachariasen F.** — Phys.Rev., 1986, v.D13, p.950.
26. **Wigner E.P.** — Phys.Rev., 1932, v.40, p.749.
27. **Hisimi K.** — Proc.Phys.Math.Soc.Jap., 1940, v.23, p.264;
Glauber R.J. — Phys.Rev.Lett., 1963, v.10, p.84;
Sudarshan E.C.G. — Phys.Rev.Lett., 1963, v.10, p.177;
Cahill R.E., Glauber R.G. — Phys.Rev., 1969, v.177, p.1882.
28. **Carruthers P., Zachariasen F.** — Rev.Mod.Phys., 1983, v.55, p.245.
29. **Calsetta E., Hu B.L.** — Phys.Rev., 1988, v.D37, p.2878.
30. **Bibilashvili B., Pasiashvili I.** — Ann.Phys. (NY), 1992, v.220, p.134.
31. **Abrikosov A.A., Gorkov L.P., Dzyaloshinski I.E.** — Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics. Dower, New York, 1975.

32. **Zubarev D.N.** — Nonequilibrium Statistical Thermodynamics. Consultants Bureau, NY, 1974.
33. **Manjavidze J., Sissakian A.** — JINR Rapid Comm., 1988, 5[31]-88, p.5.
34. **Lee T.D., Yang C.N.** — Phys.Rev., 1952, v.87, pp.404, 410.
35. **Langer J.S.** — Ann.Phys., 1967, v.41, p.108.
36. **Kac M., Uhlenbeck G.E., Hemmer P.C.** — Journ.Math.Phys., 1963, v.4, p.216, *ibid.* 1964, v.5, p.60.
37. **Coleman S.** — Phys.Rev., 1977, v.D15, p.2929.
38. **Manjavidze J.** — El.Part. and At.Nucl., 1985, v.16, p.101.
39. **Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G.** — Phys.Rep., 1983, v.C100, p.1.
40. **Konishi K., Ukawa A., Veneziano G.** — Phys.Lett., 1979, v.B80, p.259;
Bassetto A., Ciafaloni M., Marchesini G. — Nucl.Phys., 1980, v.B163, p.477.
41. **Volterra V.** — Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte Pour La Vie, Paris, 1931.
42. **Vasil'ev A.N.** — Functional Methods of Quantum Field Theory and Statistical Physics, Leningrad Univ.Press, Leningrad, 1976.
43. **Mills R.** — Propagators for Many-Particle Systems, Gordon and Breach, Science, NY, 1970.
44. **Matsumoto H., Nakano Y., Umetzava H., Mancini F., Marinaro M.** — Prog. Theor. Phys., 1983, v.70, p.559;
Matsumoto H., Nakano Y., Umetzava H. — J.Math.Phys., 1984, v.25, p.3076.
45. **Schwinger J.** — Particles, Sources and Fields v.1 Addison-Wesley Publ.Comp., 1970.
46. **Bakshi P.M., Mahanthappa K.T.** — J.Math.Phys., 1961, v.4, p.1; *ibid.*, 1961, v.4, p.12.
47. **Kadanoff I.P., Baym G.** — Quantum Statistical Mechanics. Benjamin, London, 1962;
Niklasson G., Sjolander A. — Ann.Phys., 1968, v.49, p.249;
Danielevich P. — Ann.Phys., 1984, v.152, p.39.
48. **Kadison R.V., Ringrose J.R.** — Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, v.1. Academic, New York, 1983.
49. **Manjavidze J.** — Preprint, hep-ph/9510360, 1995.
50. **Manjavidze J., Sissakian A.** — JINR Rapid Comm., 1988, 2[28]-88, p.13.
51. **Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P.** — Quant. Semicl. Opt., 1995, v.7, p.615.
52. **Manjavidze J.** — Preprint, hep-ph/9510251, 1995.
53. **Bibilashvili T.** — Phys.Lett., 1993, v.B313, p.119.
54. **Bibilashvili T.** — Private communication.
55. **Manjavidze J.** — Preprint, quant-ph/9507003, 1995.
56. **Manjavidze J.** — Sov.Nucl.Phys., 1987, v.45, p.442.
57. **Marinov M.S.** — Phys.Rep., 1980, v.60, p.1.
58. **Manjavidze J.** — Preprint, IP GAS-HE-6/96, Tbilisi, 1996.
59. **Dashen R., Hasslacher B., Neveu A.** — Phys. Rev., 1978, v.D10, p.3424.

РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ С ЛОКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

С.А.Гогилидзе

ИФВЭ Тбилисского государственного университета, 380086, Тбилиси, Грузия

В.Н.Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

А.М.Хведелидзе

Тбилисский математический институт, 380086, Тбилиси, Грузия

Обзор посвящен проблематике, связанной с изучением динамических систем с конечным числом степеней свободы, обладающих локальной симметрией. В рамках классической лагранжевой и гамильтоновой теории обсуждается процедура редукции системы динамических уравнений к так называемому нормальному виду, когда задача Коши имеет единственное решение. Основное внимание уделено изложению геометрической схемы редукции, которая позволяет выделить физическое подпространство в фазовом пространстве вырожденной динамической системы и найти в явном виде соответствующие канонические переменные без введения в теорию дополнительных калибровочных условий, калибровок. На основе сравнения двух методов редукции — геометрического и с помощью фиксации калибровки — обсуждается вопрос об условиях на калибровку, гарантирующих корректность процедуры редукции.

The review is devoted to the discussion of problems connected with the description of dynamical systems with finite a number of degrees of freedom, which possesses local symmetry. In the framework of the classical Lagrangian and Hamiltonian theory the geometric scheme of reduction of degenerate dynamical equations to the normal form, which admits the correct Cauchy problem with a unique solution is described. The main task of the review is to state geometrical problems of constructing physical subspace in degenerate Hamiltonian systems in an explicit form without introducing additional gauge fixing conditions into the theory. Two approaches to the reduction procedure, the geometrical and gauge fixing methods, are compared with the aim to get requirements to the gauge fixing conditions, which guarantee the correctness of gauge fixing reduction.

1. ВВЕДЕНИЕ

Лагранжевы системы с функционалом действия, инвариантным относительно локальных преобразований обобщенных координат, т.е. преобразований с параметрами, которые являются произвольными функциями от пространственно-временных переменных, принадлежат к классу так называемых вырожденных лагранжевых систем. История исследования *вырожден-*

ных лагранжевых систем, несмотря на почтенный возраст самой классической механики,* насчитывает не более полувека. Начало их систематическому анализу, инициированное потребностью гамильтоновой формулировки задач электродинамики и теории гравитации, было положено в конце 40-х годов нашего столетия в работах Дирака [2] и Бергмана [3]. В них были сформулированы принципы новой теории, получившей название обобщенной гамильтоновой динамики или формализма Дирака — Бергмана. Как показало дальнейшее развитие науки, этот формализм стал неотъемлемой частью квантово-полевого описания всех фундаментальных взаимодействий. Теория гравитации, единая теория электрослабых и сильных взаимодействий, модели большого объединения — все это теоретико-полевые модели с обобщенной гамильтоновой динамикой, вырожденность которой связана с той или иной локальной инвариантностью — *репараметрической* или *калибровочной*.

В современной литературе, посвященной различным аспектам обобщенной гамильтоновой теории, существует большое количество очень хороших книг и обзоров [4]**, после ознакомления с которыми возникает ощущение ее “освежающей непохожести” на теорию невырожденных динамических систем. Наиболее важным и ярким проявлением подобного своеобразия является так называемая процедура *редукции* вырожденной теории, состоящая в регулярном способе построения невырожденной теории, “эквивалентной” исходной вырожденной за счет исключения части “несущественных” переменных. Редукция в вырожденных теориях, несмотря на все ее особенности, представляет собой определенное обобщение хорошо известной с конца прошлого века операции исключения *циклических*, или, по-другому, *игнорируемых* координат, которая имеет место в системах, обладающих непрерывной симметрией, связанной с действием группы Ли. Как и в случае редукции числа степеней свободы в классической механике, редукция в вырожденных динамических системах также обязана чисто геометрическим, симметричным принципам, лежащим в основе теории. Обсуждение этих геометрических аспектов операции редукции и демонстрация ее исключительной важности в вопросе определения физического содержания калибровочных и репараметрически-инвариантных теории и составляет предмет настоящего обзора.

Геометризация динамики и наблюдаемые. Первый шаг в геометризации всех видов взаимодействия после эйнштейновской формулировки общей теории относительности был сделан в 1918 г. Вейлем [5], когда при разработке единой теории электромагнетизма и гравитации он сформули-

*“Аналитическая механика” Лагранжа [1], в которой уже были представлены практически все основные принципы аналитической динамики, вышла в 1788 г.

**Безусловно, перечень [4] не претендует на какую-либо полноту, а всего лишь отражает вкусы и пристрастия авторов.

ровал принцип локальной масштабной инвариантности теории как некий геометрический принцип, объясняющий существование электромагнитного поля. Однако решающей идеей, давшей начало современной геометрической трактовке взаимодействия в терминах связностей в главном расслоенном пространстве*, стала идея заменить группу масштабных преобразований в гравитации на группу локальных фазовых преобразований в зарядовом пространстве электродинамики. А ее обобщение, после формулировки Янгом и Миллсом в 1954 году классической теории неабелевых полей [8], окончательно превратило принцип локальной калибровочной инвариантности в геометрическую основу конструирования квантово-полевых моделей фундаментальных взаимодействий. Подобная формулировка динамики фундаментальных полей исключительно в геометрических терминах приводит с необходимостью к вырожденной теории и наряду с математическим изяществом и прозрачностью основных положений требует решения сложной проблемы, не имеющей аналога в невырожденном случае. Принцип локальной инвариантности, с одной стороны, приписывает физический смысл лишь инвариантным величинам, и с другой — требует присутствия в теории “лишних” степеней свободы, не проявляющихся в наблюдаемых эффектах**. Последнее требование означает, что корректная постановка физической задачи подразумевает возможность построения на базе исходных геометрических переменных новых, но уже наблюдаемых (физических) переменных, в терминах которых физическая реальность будет описываться однозначно, без “лишних” элементов. Однако ясно, что без однозначной и эффективной схемы подобной идентификации наблюдаемых физических величин с исходными фундаментальными геометрическими переменными теория не является полной и конструктивной. Процедура редукции призвана осуществлять такого рода идентификацию физических величин с затравочными геометрическими, выделяя в теории с локальной симметрией так называемые физический и нефизический секторы. В настоящем обзоре будут изложены две схемы редукции. После краткого описания стандартного подхода, основанного на методе “фиксации калибровки” мы подробно проанализируем альтернативный “геометрический” или “бескалибровочный” метод. При этом преследуются две цели: изложить саму схему геометрической редукции и проанализировать те ограничения, которые сле-

*С основами теории расслоенных пространств можно ознакомиться по классической книге А.Лихнеровича [6] и учебнику [7], а анализ геометрических аспектов формулировки теорий поля с локальной симметрией можно найти в монографии Н.П.Коноплевой и В.Н.Попова [4].

**Интересно, что формулировка физических теорий на основе принципа локальной симметрии оказалась в определенном смысле реализацией гипотезы Герца о бессиловом характере взаимодействий. Стремление изъять понятие силы из механики и заменить ее действие эффектами скрытых ненаблюдаемых связей было главным побудительным мотивом новой формулировки механики, изложенной в его знаменитой книге “Принципы механики” [9].

дуют из нее, на традиционный метод фиксации калибровки в обобщенной гамильтоновой динамике.

Редукция в методе фиксации калибровки. Исторически первый опыт обращения с нефизическими степенями свободы возник в рамках классической электродинамики после того, как в начале XX века в связи с желанием вывести уравнения Максвелла из вариационного принципа было введено понятие вектор-потенциала электромагнитного поля*. Расплатой оказалось отсутствие взаимоднозначной связи между напряженностями электрического и магнитного полей и вектор-потенциалом, приведшее к тому, что в теории возникли переменные, не поддающиеся наблюдению. В рамках классической электродинамики подобный функциональный произвол, привнесенный введением в теорию ненаблюдаемых степеней свободы, не доставил особых трудностей, поскольку была известна простая связь между вектор-потенциалом электромагнитного поля и наблюдаемыми величинами — напряженностями электрического и магнитного полей. Добавив к уравнениям движения какое-либо дополнительное условие, например, условия Кулона, нефизические компоненты вектор-потенциала удастся исключить полностью. В результате чего в теории возникает взаимоднозначное соответствие между наблюдаемыми и исходными фундаментальными переменными. Потребность в обобщении этой простой конструкции, применяемой в электродинамике, на случай канонической формулировки гравитации привела Дирака к развитию общей схемы редукции фазового пространства вырожденных систем, получившей название метода фиксации калибровки [11]**. Этот способ идентификации физических степеней свободы, основанный на введении в теорию дополнительных условий, калибровок, устраняющих нефизические степени свободы, стал традиционным методом, применяемым как в классической, так и в квантовой теории вырожденных систем с локальными симметриями.

Представление для матрицы рассеяния неабелевых полей в виде континуального интеграла [12], полученное с использованием метода фиксации калибровок, с успехом было применено в решении целого ряда пертурбативных задач теорий электрослабых и сильных взаимодействий. В дальнейшем, однако, оказалось, что вне рамок теории возмущений в методе фиксации калибровки возникает трудность принципиального характера, так называемая проблема неоднозначностей Грибова [13]. Грибовский анализ дополнительного условия Кулона и дальнейший топологический запрет Зингера на глобальную калибровку в неабелевой теории [14, 15] указали на необходимость

*Историю решения этой задачи в работах Лармора, Лоренца, Шварцшильда и Пуанкаре можно проследить по книге [10].

**Полученное Дираком решение задачи редукции замечательным образом выражается в эффективном сокращении числа степеней свободы за счет замены скобок Пуассона на скобки Дирака [2].

строгого определения класса допустимых калибровок. Хотя на сегодняшний день хорошо известно необходимое условие принадлежности калибровочных функций к классу допустимых — отличие от нуля детерминанта Фаддеева — Попова, вопрос о достаточных условиях на калибровки, гарантирующих корректность выделения физического пространства, остается открытым. Ясно, что решение задачи определения допустимых калибровок в обобщенной гамильтоновой динамике невозможно без детального знания самой структуры физического и нефизического секторов теории. Поэтому приобретает особую значимость альтернативная схема редукции, основанная на явном разделении этих секторов, без введения каких-либо дополнительных калибровочных условий. Такую схему мы будем называть *геометрической*, отдавая дань геометрическому подходу в групповом анализе дифференциальных уравнений, или *бескалибровочной*, тем самым подчеркивая ее альтернативность традиционному методу.

Редукция в геометрических терминах. Изложенная в обзоре схема описания редукции без привлечения калибровочных условий имеет своими корнями хорошо известную операцию редукции, или понижения порядка дифференциальных уравнений, допускающих симметрию относительно действия группы Ли [16—19]. Операция редукции за счет соответствующих интегралов движения применялась, начиная с работ Якоби, Ли и Пуанкаре, либо с целью упрощения исходной системы уравнений, либо для доказательства их интегрируемости в квадратурах. Введение понятия о некоммутативно интегрируемых системах [20] привело к обобщению метода понижения порядка уравнений с помощью инволютивных интегралов движения на случай интегралов, образующих некую алгебру Ли. Метод геометрической редукции является обобщением этих идей на случай симметрии гамильтоновых систем, связанных с действием бесконечномерных групп Ли и псевдогрупп Ли [21]. Проблема редукции вырожденных лагранжевых систем соответствует задаче, поставленной еще Ли: “Для данного уравнения и допускаемой им группы симметрии найти уравнения орбит любых его решений и уравнения, решения которых определяют совокупность всех орбит” [18]. Такое расщепление уравнений на *разрешающую* систему, определяющую семейство неэквивалентных решений, и *автоморфную систему*, которая задает для каждого решения разрешающей системы множество ей эквивалентных, получило название группового разложения системы дифференциальных уравнений или расслоения Ли — Вессьо [18, 19]. В терминах, применяемых в физических приложениях, данное расщепление означает разделение уравнений движения на калибровочно-инвариантный и чисто калибровочный секторы. С подобной точки зрения задача Коши в вырожденных лагранжевых и гамильтоновых системах наиболее четко была сформулирована в работе [22], где был применен метод Леви-Чивита решения задачи редукции системы дифференциальных уравнений с инволютивными инвариантными соотношениями [23].

Обобщение данного метода на случай неинволютивных инвариантных соотношений, образующих псевдоалгебру Ли, невозможно без разработки эффективного метода перехода к эквивалентному набору инволютивных связей или *абелизации связей* в физической терминологии*. В настоящем обзоре будут рассмотрены два способа абелизации связей. Первый основан на процедуре разрешения связей ([4], Henneaux M. Teitelboim C.), конструктивность и безболезненность которой ничем не гарантирована, второй метод [26, 27] связан с применением допустимых в вырожденных системах обобщенных канонических преобразований.

План изложения. Для последовательного изложения всей геометрической схемы редукции, включая и процедуру абелизации связей, нам потребуются некоторые сведения из теории вырожденных динамических систем. Стараясь не дублировать изложение хорошо известных фактов, мы конспективно изложим основные определения и прямо начнем с вопроса о постановке задачи Коши в лагранжевом и гамильтоновом подходах для вырожденных динамических систем. Далее основное внимание сосредоточим на изложении метода бескалибровочной редукции в фазовом пространстве и перейдем к вопросу о допустимых калибровочных условиях. Все изложение будет вестись в рамках механических систем с конечным числом степеней свободы и без обсуждения возможных топологических препятствий. В данном обзоре мы ограничимся координатным описанием процедуры редукции. С геометрическим, бескоординатным описанием невырожденных механических систем можно ознакомиться по книгам [28—31], а с соответствующими аспектами вырожденных теорий — по статьям [32—36].

2. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

Начнем с конспективного изложения тех положений лагранжевой формулировки теории вырожденных систем, которые особенно важны с точки зрения проблемы редукции и постановки задачи Коши.

Обобщенные лагранжевы координаты и эволюция. Конфигурация классической лагранжевой системы с N степенями свободы в некий момент времени $t = T$ задается набором чисел $q_i(T)$, $(i = 1, \dots, N)$. Множество всевозможных конфигураций M принято называть конфигурационным пространством, величины q_i — обобщенными лагранжевыми координатами, а эволюция системы есть изменение конфигурации системы с течением времени, при котором точка q_i описывает на многообразии M некую кривую — классиче-

* Корни этой операции можно найти в известной теореме Ли — Картана из теории функциональных групп [24, 25].

скую траекторию системы. Задачей классической механики является описание эволюции системы, то есть определение ее классической траектории.

Принцип классического детерминизма. Классическая траектория в конфигурационном пространстве определяется как решение дифференциальных уравнений движения. Основное требование, предъявляемое к динамическим уравнениям, заключается в выполнении принципа “классического детерминизма” Ньютона – Лапласа, математическая формулировка которого состоит в возможности однозначного определения конфигурации системы в произвольный момент времени t на основе знания значений обобщенных координат $q_i(t)$, вместе с производными по времени до некоторого порядка (скоростей, ускорений) в любой фиксированный момент времени $t = T$. Иными словами, дифференциальные уравнения движения должны допускать корректную постановку задачи Коши.

Принцип наименьшего действия и уравнения движения. Важнейшее открытие классической механики состоит в возможности вывода подобных дифференциальных уравнений движения из той или иной вариационной задачи. Известно большое разнообразие вариационных принципов, история и анализ формулировок которых систематически изложен в замечательных книгах [23, 37]. В современных теоретико-полевых формулировках обычно исходят из принципа наименьшего действия Гамильтона — Остроградского, согласно которому уравнения движения для классической траектории — уравнения Эйлера — Лагранжа — следуют из условия существования экстремума, так называемого функционала действия*. Если точнее, то предполагается существование интеграла

$$\mathcal{S}[q] = \int dt \mathcal{L} \left(q, \frac{dq}{dt}, \frac{d^2q}{dt^2}, \dots, \frac{d^k q}{dt^k}, t \right), \quad (2.1)$$

задаваемого посредством лагранжиана системы $\mathcal{L}$ — функции от обобщенных лагранжевых координат и их производных по времени вплоть до некоего k -ого порядка. Лагранжиан определяет динамику системы из условия того, что классическая траектория является экстремалью функционала действия $\mathcal{S}$ при определенных граничных условиях на вариации. Большой класс динамических систем, встречающихся в природе, описывается уравнениями второго порядка, поэтому обычно ограничиваются рассмотрением лагранжианов, которые являются функциями от координат и их первых производных по

*Вопросы о границах применимости вариационных принципов — отдельная очень интересная задача, в связи с ней заметим, например, что интегральный принцип Гамильтона — Остроградского в стандартной формулировке верен лишь для голономных систем, в то время как другой, хорошо известный принцип Гаусса — Герца [23] применим и к неголономным системам [37].

времени*. В этом случае необходимым условием экстремума действия

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (2.2)$$

с граничными условиями на вариации $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ является выполнение уравнений Эйлера — Лагранжа** для функций $q_i(t)$:

$$L_i[q] := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

которые можно переписать в форме

$$W_{ij} \ddot{q}_j - l_i = 0, \quad (2.4)$$

если ввести следующие обозначения:

$$W_{ij}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (2.5)$$

$$l_i(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \quad (2.6)$$

Матрица W_{ij} носит название матрицы Гесса для системы уравнений движения (2.3). Ее детерминант, гессиан, является одной из основных характеристик механической системы. В зависимости от того, вырождена ли матрица Гесса, т.е. $\det \|W_{ij}\| = 0$, либо гессиан отличен от нуля $\det \|W_{ij}\| \neq 0$, принято делить механические системы на *вырожденные* и *невырожденные* соответственно***. Иногда предпочитают пользоваться терминами *сингулярные* и *несингулярные*. Введение подобной градации полностью оправданно, поскольку два данных типа теорий обладают принципиально разными свойствами, начиная уже с постановки эволюционных задач.

Задача Коши в невырожденных теориях. Если теория не является вырожденной,

$$\det \|W_{ij}\| \neq 0, \quad (2.7)$$

*Интересно, что, как правило, лагранжевы теории с высшими производными координат по времени описывают объекты, обладающие некой внутренней структурой.

**Вопросы о существовании экстремума и о достаточных условиях, как правило, обходятся в физических задачах некими эвристическими соображениями. С анализом данных проблем можно ознакомиться в книге [38].

***Зануление гессиана не зависит от выбора координат, оно является инвариантной характеристикой системы с точки зрения допустимых в лагранжевом подходе несингулярных преобразований обобщенных координат.

то, считая q_i и $\dot{q}_i$ независимыми величинами, можно рассмотреть уравнения Эйлера — Лагранжа (2.3) как алгебраическую систему относительно неизвестных ускорений $\ddot{q}_i$ и разрешить их относительно вторых производных по времени

$$\ddot{q}_i = W_{ij}^{-1} l_j, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Подобная запись уравнений движения, в так называемой нормальной форме представления дифференциальных уравнений, означает выполнимость “локального” принципа “классического детерминизма”. Действительно, для уравнений Эйлера — Лагранжа, представленных в форме (2.8), всегда существует единственное решение в окрестности произвольных начальных данных, заданных в форме набора начальных координат и скоростей, поскольку для системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной, имеет место теорема Коши — Ковалевской о существовании и единственности решений.

Резюме. В случае невырожденных систем для уравнений движения Эйлера — Лагранжа (2.3) задача Коши имеет единственное решение в окрестности произвольных начальных значений координат и скоростей.

Задача Коши в вырожденных теориях. В теориях с вырожденным лагранжианом ситуация принципиально иная. В этом случае из-за отсутствия обратной матрицы Гесса приведение к нормальной форме уравнений движения невозможно, что влечет за собой невозможность постановки классической задачи Коши. Однако при этом не исключается ее определенная модификация, которая в явной или неявной форме применяется во всех динамических задачах, связанных с вырожденными системами, пример тому — проблема Коши в гравитации и задача определения оператора эволюции в теории неабелевых калибровочных полей.

Корректная постановка задачи Коши подразумевает выполнение следующих пунктов:

- а) существование решения,
- б) единственность решения,
- в) произвольность начальных данных.

Возможная модификация, очевидно, состоит лишь в отказе от соблюдения пунктов (а) и (в). Поэтому всюду в дальнейшем предполагается, что вырожденная теория непротиворечива в смысле существования решения, и возможна лишь (либо) его неоднозначность и (либо) существование лишь для некоторых начальных данных. Помимо этого, с точки зрения физических приложений наиболее важным представляется такая обобщенная формулировка задачи, когда в исходной вырожденной теории можно выбрать такой набор обобщенных лагранжевых координат, что для описания эволюции определенной части этих переменных задача Коши оказывается корректной

в классическом смысле. Построение такого набора переменных и составляет сущность процедуры *лагранжевой редукции* вырожденных систем. Проблема лагранжевой редукции, требующая отдельного и тщательного рассмотрения, не составляет цели данного обзора, поэтому мы лишь зафиксируем ее некоторые аспекты в связи с постановкой задачи Коши.

В силу вырожденности теории ранг матрицы Гесса меньше*, чем число степеней свободы N :

$$\text{rank } \|W_{ij}(q, \dot{q}, t)\| = R < N. \quad (2.9)$$

В отличие от невырожденного случая теперь уравнения Эйлера — Лагранжа (2.3), рассматриваемые как система из N линейных алгебраических неоднородных уравнений с неизвестными $\ddot{q}_j$, $j = 1, \dots, N$, разрешаются лишь относительно ускорений R , поскольку ранг основной матрицы системы равен R :

$$\ddot{q}_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \ddot{q}_{R+1}, \dots, \ddot{q}_N), \quad \alpha = 1, \dots, R. \quad (2.10)$$

Действительно, из (2.9) следует существование у матрицы $\|W_{ij}(q, \dot{q}, t)\|$ R линейно независимых векторов $\mu_i^a(q, \dot{q}, t)$ с ненулевыми собственными значениями $\xi^a(q, \dot{q})$:

$$W_{ij}(q, \dot{q}, t)\mu_i^a(q, \dot{q}, t) = \xi^a(q, \dot{q}, t)\mu_j^a(q, \dot{q}, t) \quad (2.11)$$

и $N - R$ линейно независимых нуль-векторов $\mu^a(q, \dot{q}, t)$ с нулевыми собственными значениями

$$W_{ij}(q, \dot{q}, t)\mu_i^a(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad a = 1, \dots, N - R. \quad (2.12)$$

Свертывая собственные векторы с ненулевыми собственными значениями с уравнениями (2.3), мы получим уравнения (2.10), в то время как свертка нуль-векторов с (2.3) дает систему $N - R$ уравнений, не содержащих ускорений:

$$\chi_a(q, \dot{q}, t) = l_i(q, \dot{q}, t)\mu_i^a(q, \dot{q}, t) = 0. \quad (2.13)$$

При анализе уравнений (2.10) и (2.13) возможны следующие варианты:

- (i) уравнения несамосогласованны (противоречивы);
- (ii) уравнения (2.13) выполняются тождественно;
- (iii) из $N - R$ уравнений (2.13) r (r_1) уравнений являются функционально независимыми (зависимыми), а r_2 уравнений выполняются тождественно.

Вариант (i) означает отсутствие у функционала действия точек экстремума и поэтому исключается из дальнейшего анализа как случай, не представляющий физического интереса. Если имеет место (ii), т.е. все $N - R$ соотношений (2.13) выполняются тождественно, то уравнения (2.10) представляют

*В дальнейшем ранг гессиана будем считать постоянным во всей области изменения переменных $(q, \dot{q})$.

собой систему дифференциальных уравнений для R координат $(q_1, \dots, q_R)$ в нормальной форме, правая часть которых зависит от неких произвольных функций $(q_{R+1}, \dots, q_N)$. Поэтому здесь мы имеем ситуацию, когда задача Коши не имеет единственного решения; после фиксации начальных условий для координат $(q_1, \dots, q_R)$ и соответствующих скоростей $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_R)$ решение уравнения (2.10) содержит $N - R$ произвольных функций.

Резюме. Если все $N - R$ соотношений (2.13) выполняются тождественно, то решение задачи Коши для уравнений Эйлера — Лагранжа (2.3) после фиксации начальных условий для R координат и соответствующих скоростей содержит $N - R$ произвольных функций.

Наиболее сложным для анализа оказывается третий вариант (iii), когда, вообще говоря, не все соотношения (2.13) выполняются тождественно. В этом случае $N - R$ функционально независимых соотношений дают ограничения на возможные значения обобщенных координат и скоростей — так называемые *лагранжевы связи**. Возникновение лагранжевых связей немедленно ставит вопрос о самосогласованности всей схемы, поскольку исходная вариационная задача подразумевала независимость вариаций всех координат. Для дальнейшего анализа без потери общности можно положить, что

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial \chi_a(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i}, \frac{\partial \chi_a(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right\| = r_1 + r_2, \quad r_1 + r_2 \leq N - R, \quad (2.14)$$

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial \chi_a(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right\| = r_2. \quad (2.15)$$

Тогда соотношения (2.13) можно заменить эквивалентными $r_1 + r_2$ соотношениями вида

$$\chi_a^1(q, t) = 0, \quad a = 1, \dots, r_1, \quad (2.16)$$

$$\chi_a^2(q, \dot{q}, t) = 0, \quad a = 1, \dots, r_2. \quad (2.17)$$

За функциями χ_a^1 и χ_a^2 закрепилось по традиции название *лагранжевых связей* типа A и типа B соответственно (Sudarshan E.C.G., Mukunda N. [4]). Таким образом, в сингулярном случае исходная система уравнений движения (2.3) редуцировалась в систему уравнений (2.10), (2.16) и (2.17), которую надо исследовать на непротиворечивость. Ясно, что полученная система будет непротиворечива, если связи χ_a^1 и χ_a^2 сохраняются во времени, т.е. если

* Начиная с работ Дирака, в литературе одним и тем же термином “связь” принято называть как саму функцию, так и условие ее обращения в нуль, считая, что это не вызовет недоразумения.

их полная производная по времени будет равна нулю. Анализ условий непротиворечивости начнем со связей типа A :

$$\frac{d\chi_a^1(q, t)}{dt} = \frac{\partial\chi_a^1(q, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\chi_a^1(q, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.18)$$

Если эти равенства тождественно не выполняются при учете лагранжевых связей A и B , то тогда, вообще говоря, из (2.18) возникают новые лагранжевы связи обоих типов, которые в принципе могут понизить ранг матрицы Гесса, что, в свою очередь, приведет к уменьшению числа уравнений второго порядка (2.10). Полученная таким образом система уравнений, с учетом новых лагранжевых связей типа A , заново должна быть проверена на непротиворечивость и т.д. Для непротиворечивых теорий после конечного числа шагов процесс возникновения новых связей типа A прекратится, при этом общее число связей будет меньше числа степеней свободы N . После этого необходимо провести аналогичную процедуру для связей типа B , что приводит к уравнениям

$$\frac{d\chi_a^2(q, \dot{q}, t)}{dt} = \frac{\partial\chi_a^2(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial\chi_a^2(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\chi_a^2(q, \dot{q}, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.19)$$

Если данные равенства не выполняются тождественно при учете всех имеющихся на данном этапе уравнений движения и лагранжевых связей типа A и B , то из (2.19) следуют новые лагранжевы связи обоих типов, которые вновь могут понизить ранг матрицы Гесса и тем самым уменьшить число независимых уравнений второго порядка по времени. Для непротиворечивых теорий повторение вышеописанной процедуры в конечном итоге приведет к полной системе следующего вида:

$$\ddot{q}_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \ddot{q}_{r'+1}, \dots, \ddot{q}_N), \quad \alpha = 1, \dots, r', \quad (2.20)$$

$$\chi_{a'}^1(q, t) = 0, \quad a' = 1, \dots, r'_1, \quad (2.21)$$

$$\chi_{a''}^2(q, \dot{q}, t) = 0, \quad a'' = 1, \dots, r'_2, \quad (2.22)$$

при этом $r_1 + r_2 < r'_1 + r'_2 < N$, $r' < R$, $r'_1 + r'_2 + r' < N$, а условие полноты системы связей означает, что в процессе эволюции не возникнет новых связей, т.е. равенства

$$\frac{d\chi_{a'}^1(q, t)}{dt} = 0, \quad a' = 1, \dots, r'_1, \quad (2.23)$$

$$\frac{d\chi_{a''}^2(q, \dot{q}, t)}{dt} = 0, \quad a'' = 1, \dots, r'_2 \quad (2.24)$$

выполняются тождественно при учете всех уравнений (2.20)—(2.22).

Резюме. Для систем с вырожденными лагранжианами окончательная система уравнений дается уравнениями (2.20)—(2.22), среди которых только часть уравнений, содержащая вторые производные по времени, являются истинными уравнениями движения, а оставшаяся часть представляет собой ограничения на начальные условия для координат и скоростей, лагранжевы связи.

Общая задача исследования интегрируемости вырожденных лагранжевых уравнений движения и установления характера общих решений в смысле определения степени их неоднозначности представляет собой сложную проблему. Ее анализ требует привлечения методов современной геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений [21], базирующейся на идеях формального разложения решений в ряд Тейлора и продолжения системы дифференциальных уравнений до интегрируемой системы. Не углубляясь в данную проблему, отметим лишь некоторые принципиальные особенности задачи Коши для лагранжевых уравнений движения в вырожденных теориях.

- Если произвол в общем решении уравнений движения, следующих из невырожденных лагранжианов, сводится к существованию $2N$ произвольных постоянных, значения которых однозначно определяются начальными данными для обобщенных координат и скоростей, то для вырожденного случая это не так. Границы для степени и характера данного произвола можно установить, рассматривая два предельных случая:

Максимальный произвол имеет место, когда все лагранжевы связи выполняются тождественно. В этом случае общее решение уравнений движения зависит от $N - R$ произвольных функций времени и от $2R$ произвольных постоянных.

Минимальный произвол осуществляется, когда все лагранжевы связи являются связями типа A , тогда общее решение зависит от $2(N - R)$ произвольных постоянных.

- В отличие от невырожденного случая начальные значения обобщенных координат и скоростей не могут быть выбраны произвольно, они должны удовлетворять лагранжевым связям (2.22), (2.22).

Тождества Нетер и задача Коши. Отмеченное при получении системы уравнений (2.20)—(2.22) условие полноты связано с непротиворечивостью постановки задачи Коши, когда лагранжевы связи (2.22), (2.22) рассматриваются как некие условия на начальные данные для системы второго порядка в нормальной форме (2.20). Для исключительно важных сингулярных теорий, вырожденность которых связана с инвариантностью действия по отношению

к преобразованиям, содержащим в качестве групповых параметров произвольные функции времени, интегрируемость или, иначе, непротиворечивость задачи Коши гарантируется известными тождествами Нетер [39, 40], которые обеспечивают выполнимость условий связей в любой момент времени, если они имели место в некий момент времени (В.В.Нестеренко, А.М.Червяков [4]). Помимо этого, тождества Нетер, определяют и функциональный произвол общих решений уравнений движения, связанный с рангом группы симметрии функционала действия.

3. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Аналогия между механическими и оптическими явлениями, открытая Гамильтоном и изложенная в докладе, представленном им в 1824 г. Ирландской академии наук, положила начало новым формулировкам динамических принципов движения. Как показала история науки, спустя столетие именно эта аналогия и гамильтонова форма уравнений движения сыграли исключительно важную роль при создании и становлении квантовой теории.

Гамильтонова механика, берущая начало в исследованиях Пуассона, Гамильтона, Остроградского и Лиувилля, первоначально опиралась исключительно на канонические координаты симплектической структуры в евклидовом пространстве*. Более общее рассмотрение, основанное на пуассоновой структуре, впервые появляется в связи с теорией функциональных групп и теорией интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в трудах Ли [25]. Однако подход Ли был забыт как математиками, так и физиками, а возрождению общего взгляда на пуассоновскую структуру механики Гамильтона мы обязаны Дираку ([2], 1950 г.), который, по-видимому, впервые ввел общую симплектическую структуру многообразия, определив скобку Пуассона чисто аксиоматически**.

Форма Гамильтона невырожденных лагранжевых систем. Систему лагранжевых уравнений (2.8) из N дифференциальных уравнений второго порядка в нормальной форме можно заменить (бесконечным множеством способов) эквивалентной ей системой первого порядка, также в нормальной форме с $2N$ неизвестными, если за новые неизвестные функции принять, наряду с $q_i(t)$, и N первых производных $v_i(t) = \dot{q}_i(t)$, или вообще N независимых

*За историческими деталями становления теории Гамильтона в прошлом столетии отсылаем к классическому учебнику Е.Т.Уиттекера [37], с.294, и монографии [10].

**Отдавая дань огромному вкладу Софуса Ли, в важном примере пуассоновской структуры, связанной с алгебрами Ли, соответствующую скобку на пространстве, дуальном к алгебре, назвали скобкой Ли — Пуассона.

между собой функций $v_i(t) = v_i(q(t), \dot{q}(t), t)$. Для получения уравнений первого порядка Гамильтон воспользовался одним замечательным выбором таких функций. Эти дополнительные к координатам переменные — обобщенные или канонические импульсы — связаны со скоростями преобразованием Лежандра, причем порождающей функцией прямого преобразования являлся сам лагранжиан системы $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

а порождающей функцией обратного преобразования

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

функция Гамильтона или гамильтониан $H(p, q, t)$, который связан с лагранжианом формулой

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^N (p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) \Big|_{\dot{q} \rightarrow q, p, t}, \quad (3.3)$$

где предполагается, что все скорости выражены через импульсы на основе прямого преобразования (3.1). Преобразование Лежандра переводит уравнения движения Эйлера — Лагранжа (2.8) в канонические уравнения Гамильтона*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \quad (3.4)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i}. \quad (3.5)$$

Пространство канонических переменных p, q , следуя Дж.В.Гиббсу, принято называть $2N$ -мерным фазовым пространством Γ . После введения скобки Пуассона двух функций $A(q, p, t)$ и $B(q, p, t)$, определенных на Γ ,

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad (3.6)$$

уравнения движения (3.4) приобретают симметричную форму

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (3.7)$$

*Функции Лагранжа $\mathcal{L}$ и Гамильтона H , следуя классической терминологии, иногда называют характеристическими функциями, тем самым подчеркивая, что в них содержится вся информация, характеризующая систему.

Эквивалентность полученных канонических уравнений уравнениям Эйлера — Лагранжа может быть также установлена с использованием вариационной задачи на условный экстремум в фазовом пространстве

$$S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] \quad (3.8)$$

с граничными условиями

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (3.9)$$

При этом невырожденность матрицы Гесса $\det \|W_{ij}\| \neq 0$ является необходимым условием подобной эквивалентности.

Резюме. Классическая теорема об эквивалентности описания эволюции невырожденных систем в терминах переменных, определенных на фазовом пространстве, и в терминах конфигурационного пространства гласит: если функции $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа, то функции $q_i(t)$, $p_i(t)$, связанные с ними прямым преобразованием Лежандра, с порождающей функцией Лагранжа, удовлетворяют уравнениям Гамильтона, и наоборот, всякое решение канонических уравнений переходит в решение лагранжевых уравнений с помощью обратного преобразования Лежандра.

Гамильтонова динамика в вырожденных системах. Перейдем к рассмотрению гамильтоновой динамики для систем с вырожденными лагранжианами. Пусть ранг матрицы Гесса не максимален:

$$\text{rank } \|W_{ij}(q, \dot{q}, t)\| = R < N. \quad (3.10)$$

Тогда, согласно определению канонических импульсов (3.1), из N канонических импульсов p_i только R являются независимыми функциями скоростей. Иными словами, имеют место соотношения вида

$$\varphi_\alpha(q, p) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N - R, \quad (3.11)$$

связывающие канонические переменные фазового пространства, которые Бергман назвал *первичными связями*. Отметим, что среди $N - R$ первичных связей (3.11) нет функционально зависимых

$$\text{rank } \left\| \frac{\partial \varphi_\alpha(q, p)}{\partial p_i}, \frac{\partial \varphi_\alpha(q, p)}{\partial q_i} \right\| = N - R, \quad (3.12)$$

и их можно разрешить относительно $N - R$ импульсов*

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial \varphi_\alpha(q, p)}{\partial p_i} \right\| = N - R. \quad (3.13)$$

Таким образом, в отличие от невырожденных систем, где преобразование Лежандра определяет взаимно однозначное соотношение между пространством состояний M' и фазовым пространством Γ , для вырожденных систем имеет место лишь проецирование.

Резюме. В случае систем с вырожденными лагранжианами преобразование Лежандра отображает все пространство состояний M' на так называемую $2N - R$ -мерную поверхность первичных связей Γ_1 .

Этот факт приводит к тому, что канонический гамильтониан как порождающая функция обратного преобразования Лежандра**

$$H_c(q_i, p_a, \dot{q}_{R+\alpha}) = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \Big|_{\dot{q}_a = f_a} \\ i = 1, \dots, n, \quad a = 1, \dots, R, \quad \alpha = 1, \dots, N - R. \quad (3.14)$$

для вырожденной системы определен на поверхности первичных связей $\Gamma_1 \subset \Gamma$, а не во всем фазовом пространстве. А это означает, что теперь вместо $2N$ уравнений на Γ имеют место лишь $2N - R$ гамильтоновых уравнений движения, определенных на Γ_1 . Чтобы иметь полную систему из $2N$ гамильтоновых уравнений, Дирак сделал принципиально новый шаг — ввел понятия *слабого* и *сильного* равенств, которые устанавливают отношение эквивалентности на множестве функций, определенных во всем фазовом пространстве системы. Не углубляясь в анализ этих понятий, будем считать две функции $f(q, p)$ и $g(q, p)$ равными в слабом смысле*** $f(q, p) \simeq g(q, p)$ если они совпадают друг с другом на поверхности связей. В соответствии с этим отношением эквивалентности можно показать, что существует бесконечное количество функций $H_c(q, p)$, определенных во всем фазовом пространстве, отличающихся друг от друга линейной комбинацией первичных связей, и эквивалентных $H_c(q_i, p_a)$

*Последнее равенство означает, что первичные связи с необходимостью зависят от импульсных переменных, в то время как зависимость от координат может и отсутствовать.

**Заметим, что в действительности канонический гамильтониан не зависит от неразрешенных скоростей $\dot{q}_{R+\alpha}$, в силу замечательного свойства самого преобразования Лежандра; $H_c(q_i, p_a, \dot{q}_{R+\alpha}) = H_c(q_i, p_a)$.

***Следуя Дираку, слабое равенство принято обозначать символом " $\simeq$ ", оставив обычный знак " $=$ " для сильных равенств.

в том смысле, что

$$\begin{aligned}\{q_i, H_c(q_i, p_a)\} &\simeq \{q_i, H_c(q, p)\} \\ \{p_i, H_c(q_i, p_a)\} &\simeq \{p_i, H_c(q, p)\}.\end{aligned}$$

Чтобы охватить весь класс эквивалентных $H_c(q_i, p_a)$ гамильтонианов, Дирак определил *полный* гамильтониан

$$H_T = H_c(q, p) + u_\alpha(t)\varphi_\alpha(q, p), \quad \alpha = 1, \dots, N - R, \quad (3.15)$$

введя $N - R$ произвольных функций $u_\alpha(t)$ и зафиксировав одну функцию $H_c(q, p)$, определенную во всем фазовом пространстве, удовлетворяющую условию $H_c(q, p) \simeq H_c(q_i, p_a)$. Именно с помощью полного гамильтониана H_T для систем с вырожденными лагранжианами можно записать уравнения движения в форме Гамильтона — Дирака

$$\dot{q}_i \simeq \{q_i, H_T(q, p)\}, \quad (3.16)$$

$$\dot{p}_i \simeq \{p_i, H_T(q, p)\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

$$\varphi_\alpha(q, p) \simeq 0, \quad \alpha = 1, \dots, N - R, \quad (3.18)$$

которая эквивалентна системе уравнений Эйлера — Лагранжа (2.20)—(2.22). Здесь эквивалентность, как и в невырожденном случае, понимается в том смысле, что если функции $q_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ являются решениями уравнений Эйлера — Лагранжа, то функции $q_i(t)$ и $p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)}$ будут решениями уравнений Гамильтона (3.16)—(3.18)) при некотором выборе функций $u_\alpha(t)$, $\alpha = 1, \dots, N - R$. И наоборот, если при некотором выборе функций $u_\alpha(t)$ функции $q_i(t)$, $p_i(t)$ являются решениями уравнений Гамильтона — Дирака, то функции $q_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа. В силу такой эквивалентности анализ непротиворечивости лагранжевых уравнений движения, описанный в предыдущем разделе, переносится и на систему уравнений Гамильтона — Дирака. Подобно тому, как при анализе лагранжевых уравнений движения непротиворечивость теории проверялась согласованностью динамики с наличием лагранжевых связей (2.13), в данном случае требуется проверить стационарность первичных связей (3.11) во времени

$$\begin{aligned}0 &\equiv \frac{d\varphi_\alpha(q, p)}{dt} := \{\varphi_\alpha(q, p), H_T(q, p)\} = \\ &= \{\varphi_\alpha(q, p), H_c(q, p)\} + u_\beta(t)\{\varphi_\alpha(q, p), \varphi_\beta(q, p)\} \simeq 0.\end{aligned} \quad (3.19)$$

При анализе уравнений (3.16)–(3.18) и (3.19) возможны следующие варианты:

- (i) уравнения несамосогласованны (противоречивы);

- (ii) уравнения (3.19) выполняются тождественно;
- (iii) часть из $N - R$ уравнений (3.19) представляет систему функционально независимых уравнений, с помощью которых определяются некоторые $u_\alpha, \alpha = 1, \dots, \alpha_0$.

Вариант (i) означает отсутствие точек экстремума у функционала действия, когда никаким выбором u_α нельзя удовлетворить (3.19), и тем самым исключается из рассмотрения как случай, не представляющий физического интереса. Случай (ii) не требует комментариев, теория непротиворечива. В третьем варианте принято выделять особый случай, когда система связей замкнута относительно операции взятия скобок Пуассона:

$$\{\varphi_\alpha(q, p), \varphi_\beta(q, p)\} = f_{\alpha\beta\gamma}(q, p)\varphi_\gamma(q, p), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, N - R. \quad (3.20)$$

В связи с этим заметим, что набор связей и скобка Пуассона устанавливают отношение эквивалентности среди динамических величин. Из-за важности этого свойства Дирак ввел соответствующую терминологию; любую функцию $A(q, p)$, скобки Пуассона которой со всеми связями, имеющимися в теории, слабо равны нулю

$$\{A(q, p), \varphi_\alpha(q, p)\} \simeq 0,$$

он назвал динамической величиной *первого рода*, а все величины, не относящиеся к первому роду, — величинами *второго рода*. В соответствии с этой терминологией классифицируются и сами связи.

Из условий стационарности (3.19) после учета первичных связей выпадает зависимость от всех u_α , и (3.19) представляет собой дополнительное ограничение на обобщенные координаты и импульсы

$$\chi(p, q) = 0, \quad (3.21)$$

которые Дирак назвал *вторичными*, подчеркивая тем самым, что они обязаны своим происхождением динамическим уравнениям движения, а не только преобразованиям Лежандра, как это имеет место для первичных связей. Очевидно, что при наличии вторичных связей анализ непротиворечивости теории следует продолжить таким же образом, как и в случае первичных связей. При этом исследование непротиворечивости заканчивается, если на очередном этапе процесс появления новых связей обрывается. Для анализа общего случая (iii), когда не все скобки Пуассона $\{\varphi_\alpha(q, p), \varphi_\beta(q, p)\}$ равны нулю с учетом всех связей предшествующих этапов, удобно ввести единое обозначение для всех связей второго, третьего и т.д. этапов через $\varphi_j, j = N - R + 1, \dots, J$. Поскольку в этом случае условия непротиворечивости не дают новых связей, то их можно рассматривать как систему неоднородных линейных уравнений

относительно u_α :

$$\{\varphi_j(q, p), H_c(q, p)\} + u_\alpha(t)\{\varphi_j(q, p), \varphi_\alpha(q, p)\} \simeq 0, \quad \alpha = 1, \dots, N - R \quad (3.22)$$

и зафиксировать коэффициенты $u(t)$ как функции от (q, p) — $u_\alpha(t) := U_\alpha(q, p)$. При этом, если $\text{rang}\|\{\varphi_i(q, p), \varphi_\alpha(q, p)\}\| = A$, то общее решение для $u_\alpha(t)$ содержит слагаемое в виде линейной комбинации A произвольных функций $v_a(t)$ с решениями соответствующей однородной системы $V_{a\alpha}$:

$$u_\alpha(t)\{\varphi_i(q, p), \varphi_\alpha(q, p)\} \simeq 0, \quad (3.23)$$

$$u_\alpha(t) = U_\alpha(p, q) + v_a(t)V_{a\alpha}, \quad a = 1, \dots, A. \quad (3.24)$$

В соответствии с этим выделяются две структуры полного гамильтониана

$$H_T = H'_c(p, q) + v_a(t)\phi_a(p, q), \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} H'_c(p, q) &:= H_c(p, q) + U_\alpha(p, q)\varphi_\alpha(p, q), \\ \phi_a(p, q) &= V_{a\alpha}(p, q)\varphi_\alpha(p, q). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Резюме. Обобщенная гамильтонова динамика в теории с вырожденным лагранжианом определяется полным гамильтонианом системы H_T , который равен сумме двух величин первого рода H' и $v_a(t)\phi_a(p, q)$ с произвольными функциями времени $v_a(t)$, в количестве, равном числу первичных связей первого рода. Наличие произвольных функций в уравнениях Гамильтона — Дирака означает невозможность однозначного определения динамики обобщенных координат и импульсов, по заданным начальным данным удовлетворяющим полному набору связей системы.

Эта неоднозначность находится в полном согласии с описанием эволюции в лагранжевом подходе и имеет одну и ту же причину — инвариантность уравнений движения относительно группы локальных калибровочных преобразований, ранг которой определяется числом первичных связей первого рода. Оставляя в стороне обсуждение известной гипотезы Дирака о структуре производящих функций локальных калибровочных преобразований симметрии и о роли связей первого рода (см. [4, 44, 45]), далее сосредоточимся на основной задаче, проистекающей из этой особенности динамики вырожденных систем с локальными симметриями. Речь идет о задаче редукции, то есть об определении невырожденной гамильтоновой системы, которая была бы “эквивалентна” исходной. Раскрытие смысла слова “эквивалентность” и составляет предмет дальнейшего изложения.

4. РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ СО СВЯЗЯМИ ПЕРВОГО РОДА

При изложении вопросов редукции мы ограничимся случаем, когда в теории присутствуют лишь связи первого рода и начнем с ответа на вопрос, в каком смысле исходной вырожденной теории с локальной симметрией можно сопоставить эквивалентную ей невырожденную теорию.

Определение редуцированного фазового пространства. Для уточнения всех понятий зафиксируем механическую систему, определенную в $2n$ -мерном евклидовом фазовом пространстве Γ с каноническими координатами q_i , сопряженными с ними импульсами p_i и наделенным канонической симплектической структурой $\{q_i, p^j\} = \delta_i^j$. Согласно обобщенной гамильтоновой формулировке систем с локальной симметрией динамика разворачивается на $(2n - m)$ -мерном подмногообразии Γ_c фазового пространства, заданном посредством полного набора m функционально независимых соотношений

$$\varphi_\alpha(p, q) = 0, \quad (4.1)$$

которые образуют замкнутую систему относительно операции взятия скобок Пуассона

$$\{\varphi_\alpha(p, q), \varphi_\beta(p, q)\} = f_{\alpha\beta\gamma}(p, q)\varphi_\gamma(p, q), \quad (4.2)$$

т.е. являются связями первого рода. Полнота понимается в смысле выполнения соотношений

$$\{\varphi_\alpha(p, q), H_C(p, q)\} = g_{\alpha\gamma}(p, q)\varphi_\gamma(p, q), \quad (4.3)$$

с каноническим гамильтонианом системы $H_C(p, q)$. Благодаря присутствию связей динамика системы описывается обобщенной формой Пуанкаре — Картана

$$\Theta = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H_E(p, q) dt \quad (4.4)$$

с обобщенным гамильтонианом $H_E(p, q)$, который отличается от канонического $H_C(p, q)$ добавлением линейной комбинации всех связей первого рода с неопределенными коэффициентами $u_\alpha(t)$:

$$H_E(p, q) = H_C(p, q) + u_\alpha(t)\varphi_\alpha(p, q). \quad (4.5)$$

Из условия полноты (4.3) с заменой H_C на H_E следует, что при наличии только связей первого рода функции $u_\alpha(t)$ не могут быть определены во внутренних терминах теории. Этот факт есть проявление локальной симметрии, присущей системе, и она приводит к тому, что динамика части координат оказывается неопределенной. Существование произвольных функций $u_\alpha(t)$ указывает на отсутствие взаимно однозначного соответствия между пространством физических состояний системы и подпространством Γ_c . Иными

словами, на Γ_c есть точки, которым соответствует одно и то же физическое состояние, в то время как каждому физическому состоянию соответствует лишь одна точка подпространства Γ_c . Подпространство полного фазового пространства Γ , точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с физическими состояниями системы, принято называть *редуцированным фазовым пространством вырожденной теории* и обозначать через Γ^* . Ясно, что $\Gamma^* \subset \Gamma_c$, в силу того, что траектория системы, начавшаяся с точки фазового пространства, принадлежащей поверхности связей Γ_c , остается на ней и во все последующие моменты времени в силу условия стационарности связей. Для того чтобы убедиться в том, что такое подпространство Γ^* действительно существует и его размерность равна $2n - 2m$, где n — число степеней свободы системы, а m — количество всех связей первого рода, следует уточнить определение физического состояния классической системы с локальной симметрией. Предположим, что пространство физических состояний системы задается посредством конечного набора *физических переменных* O^A , каждая из которых в теории со связями первого рода определена, согласно Дираку, как динамическая величина, удовлетворяющая соотношениям*:

$$\{O^A(p, q), \varphi_\alpha(p, q)\} = d_{\alpha\gamma}^A(p, q)\varphi_\gamma(p, q). \quad (4.6)$$

Тогда редуцированное пространство определяется следующим образом. Рассмотрим (4.6) как систему из m линейных дифференциальных уравнений первого порядка на O^A , тогда благодаря условиям интегрируемости (4.2) каждая из функций может быть определена полностью и однозначно по ее начальным значениям на $2(n - m)$ -мерном подмногообразии полного фазового пространства Γ [32]. Именно это подпространство поверхности связей определяет искомое *редуцированное фазовое пространство* Γ^* .

Резюме. Физическое состояние системы, описываемой вырожденной $2n$ -мерной гамильтоновой системой с m связями первого рода, определяется посредством набора $2(n - m)$ инвариантных дираковских наблюдаемых (4.6), определенных на редуцированном фазовом пространстве Γ^* .

Таким образом, проясняется смысл операции редукции системы со связями первого рода как задачи построения невырожденной гамильтоновой системы, эквивалентной исходной. Слово “эквивалентность” здесь означает,

*Из данного определения следует, что эволюция физической переменной, согласно динамике, задаваемой обобщенным гамильтонианом, будет однозначной, не зависящей от произвольных множителей Лагранжа.

что, во-первых, невырожденная система должна иметь $2(n - m)$ -мерное фазовое пространство, **изоморфное** редуцированному пространству вырожденной теории, во-вторых, ее гамильтонова динамика должна быть **канонически эквивалентна** динамике дираковских наблюдаемых в вырожденном случае. Для решения этой задачи решающим является нахождение набора из $2(n - m)$ “физических координат” Q_i^*, P_i^* , задающих редуцированное фазовое пространство и выбор дополнительных m пар координат, определяющих калибровочные степени свободы системы.

Известны различные подходы к решениям задачи редукции в системах со связями первого рода. Ниже коротко будут описаны альтернативные методы построения физических и калибровочных степеней свободы: стандартный подход с введением дополнительных калибровочных условий, калибровок, и чисто геометрический метод гамильтоновой редукции без использования каких-либо калибровок. В связи с последним методом отметим только, что идея проводить редукцию исключительно во внутренних терминах теории связана прежде всего с желанием полностью сохранить глобальные свойства исходной теории с “лишними” степенями свободы.

Метод Дирака фиксации калибровки. Общие принципы введения калибровочных условий в гамильтоновом подходе как дополнительных ограничений, накладываемых на канонические переменные, были предложены Дираком в связи с построением канонического формализма теории гравитации [11]. Согласно идее Дирака для задания $2(n - m)$ -мерного редуцированного пространства Γ^* как поверхности в полном фазовом пространстве Γ наряду с m уравнениями связей можно ввести в теорию m дополнительных ограничений на координаты — *калибровки*

$$\chi_\alpha(p, q) = 0. \quad (4.7)$$

При этом предполагается, что калибровочные условия удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) с их помощью неопределенные множители Лагранжа должны фиксироваться однозначно как функции обобщенных координат и импульсов;
- 2) совместно со связями калибровочные условия должны определить $2(n - m)$ -мерное пространство Σ ;
- 3) поверхность Σ должна быть “канонически эквивалентна” поверхности Γ^* .

Заметим сразу, что основная проблема состоит в строгой формулировке и удовлетворении последнего пункта условий на калибровки. Требованиям (1) и (2) можно удовлетворить, если выполняется условие

$$\det \|\{\chi_\alpha(p, q), \varphi_\beta(p, q)\}\| \Big|_\Sigma \neq 0. \quad (4.8)$$

Выполнимость условия (2) непосредственно следует из теоремы о неявной функции. Покажем, что условие (4.8) дает возможность найти неизвестные множители Лагранжа $u_\alpha(t)$ из условия стационарности калибровок (4.7) во времени

$$\dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H_C\} + \sum_\beta \{\chi_\alpha, \varphi_\beta\} u_\beta = 0 \quad (4.9)$$

и тем самым зафиксировать динамику системы однозначным образом. Действительно, уравнения (4.9) образуют совместную систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_\beta(t)$, причем условием совместности служит именно соотношение (4.8). После определения множителей Лагранжа как функций от координат и импульсов, имеем следующую картину: динамика системы задается в виде $2n$ гамильтоновых уравнений движения

$$\dot{q}_i \simeq \{q_i, H_E^*\}, \quad (4.10)$$

$$\dot{p}_i \simeq \{p_i, H_E^*\} \quad (4.11)$$

и $2m$ уравнений связей

$$\varphi_\alpha(q, p) \simeq 0, \quad (4.12)$$

$$\chi_\alpha(q, p) \simeq 0, \quad (4.13)$$

которые в действительности представляют собой дополнительные условия на начальные данные в задаче Коши для системы уравнений Гамильтона — Дирака (4.10), (4.11). В формулах (4.10), (4.11) знак “ $\simeq$ ” означает слабое равенство с учетом всех связей и калибровок, а через H_E^* обозначен обобщенный гамильтониан H_E , в котором множители Лагранжа зафиксированы с помощью уравнений (4.9). Таким образом, уравнения Гамильтона — Дирака (4.10), (4.11) представляют собой систему слабых уравнений, т.е. в них связи и калибровки следует принимать во внимание лишь после взятия всех скобок Пуассона. Однако оказывается, что с помощью модификации скобки Пуассона, точнее говоря, в результате замены скобок Пуассона на так называемые скобки Дирака можно избавиться от присутствия в теории слабых равенств. Скобки Дирака определяются с помощью операции взятия скобок Пуассона и системы связей первого рода, дополненной калибровками:

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \{F, \xi_s\} C_{ss'}^{-1} \{\xi_{s'}, G\}, \quad (4.14)$$

где ξ обозначает набор всех связей и калибровок, а C^{-1} — матрицу, обратную к $C_{\alpha\beta} := \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}$. Замечательный результат Дирака состоит в наблюдении, что уравнения движения можно записать с заменой скобок Пуассона на новые (4.14):

$$\dot{q}_i \simeq \{q_i, H_c\}_D, \quad (4.15)$$

$$\dot{p}_i \simeq \{p_i, H_c\}_D, \quad (4.16)$$

причем все связи можно положить равными нулю до взятия скобок Дирака. Этот факт обязан следующему примечательному свойству скобки Дирака:

$$\{F, \xi_s\}_D = 0, \quad (4.17)$$

где $F(q, p)$ — произвольная функция. Тем самым в теории останутся только сильные равенства, и задача редукции фазового пространства решена, правда, в неявной форме, поскольку количество гамильтоновых уравнений движения осталось прежним, хотя наличие связей и калибровок говорит об их зависимости.

Резюме. Корректное добавление калибровок к набору связей первого рода позволяет учесть факт зависимости исходных канонических координат заменой исходной канонической симплектической структуры на новую, определяемую скобками Дирака, и эффективно редуцировать число степеней свободы от $2n$ до $2(n-m)$

$$\sum_{i=1}^n \{q_i, p_i, \}_{P.B.} = n, \quad \sum_{i=1}^n \{q_i, p_i, \}_{D.B.} = n - m.$$

Новая симплектическая структура, зависящая от выбора калибровочных условий, в общем случае является сложной, и как следствие, приводит к серьезным трудностям при квантовании. Однако существует специальный случай, когда скобка Дирака совпадает с канонической скобкой Пуассона для регулярной системы, определенной на Γ^* :

$$\{F, G\}_D \Big|_{\varphi=0, \chi=0} = \sum_{i=1}^{n-m} \left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_i^*} \frac{\partial \bar{G}}{\partial P_i^*} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial P_i^*} \frac{\partial \bar{G}}{\partial Q_i^*} \right\}. \quad (4.18)$$

Из этого представления скобок Дирака следует, что в терминах сопряженных координат Q_i^*, P_i^* ($i = 1, \dots, n-m$) редуцированное фазовое пространство параметризовано таким образом, что связи тождественно обращаются в ноль, и произвольная функция $F(p, q)$, заданная на редуцированном фазовом пространстве, представима в виде

$$F(p, q) \Big|_{\varphi=0, \chi=0} = \bar{F}(P^*, Q^*).$$

Таким образом, если в методе Дирака фиксации калибровки выполнен пункт (3) требований на калибровки, т.е. если поверхность Σ канонически эквивалентна поверхности Γ^* , и выбор калибровок сделан “удачно” в том смысле, что имеет место равенство (4.18), то задача определения “истинных динамических степеней” свободы тем самым решена в явной форме.

Метод Фаддеева фиксации калибровки. Иной метод редукции с фиксацией калибровки был предложен в хорошо известной работе Л.Д.Фаддеева [32], посвященной квантованию систем со связями в методе функционального интегрирования. Основная идея метода Фаддеева, в противоположность методу Дирака, состоит во введении явной параметризации редуцированного фазового пространства. Как и в методе Дирака, вводятся калибровочные условия $\chi_\alpha(p, q) = 0$, которые помимо условия (4.8) подчинены еще дополнительному требованию “абелевости”

$$\{\chi_\alpha(p, q), \chi_\beta(p, q)\} = 0. \quad (4.19)$$

Абелев характер калибровочных условий (4.19) позволяет перейти с помощью канонического преобразования

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i = Q_i(q, p) \\ p_i &\mapsto P_i = P_i(q, p) \end{aligned} \quad (4.20)$$

к таким новым переменным координатам, что их первые m импульсов совпадают с калибровочными условиями χ_α :

$$P_\alpha = \chi_\alpha(q, p). \quad (4.21)$$

Условие (4.8) позволяет разрешить связи (4.1) относительно координат Q_α , выражая их как функции от $(n-m)$ пар канонически сопряженных координат и импульсов (Q_i^*, P_i^*) , которые представляют собой внутренние координаты $2(n-m)$ -мерной поверхности Σ , определяемой соотношениями

$$\begin{aligned} P_\alpha &= 0, \\ Q_\alpha &= Q_\alpha(Q^*, P^*). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Этим редукция фазового пространства, в смысле выделения $2(n-m)$ независимых переменных, которые эволюционируют согласно обычным гамильтоновым уравнениям с гамильтонианом

$$H^*(Q^*, P^*) := H_E(q, p) \Big|_{\bar{Q}_\alpha = \bar{Q}_\alpha(P^*, Q^*), \bar{P}_\alpha = 0}, \quad (4.23)$$

завершена.

Резюме. Переменные (Q_i^*, P_i^*) в методе Фаддеева действительно представляют собой набор физических степеней свободы, если возможен такой выбор дополнительных калибровочных условий χ_α , что поверхность Σ канонически эквивалентна редуцированному фазовому пространству Γ^* системы.

Таким образом, как и в методе Дирака, в данном подходе вопрос об определении допустимых калибровочных условий также требует своего решения.

Бескалибровочный метод гамильтоновой редукции. Инвариантность теории относительно локальных калибровочных преобразований вызвана наличием в теории нефизических степеней свободы, что в гамильтоновом подходе отражается в существовании множителей Лагранжа, не поддающихся определению во внутренних терминах теории. Метод редукции фазового пространства с помощью введения калибровок позволяет устранить этот произвол, зафиксировав множители Лагранжа как функции обобщенных координат и импульсов, за счет введения дополнительных калибровочных условий, оставляя открытым вопрос о разделении исходных степеней свободы на физические и нефизические. В противоположность этому метод бескалибровочной редукции, к изложению которого мы переходим, основан на идее явного разделения набора обобщенных координат фазового пространства на физические (калибровочно-инвариантные) и нефизические (калибровочно-неинвариантные). Изложение начнем с рассмотрения теорий частного вида, а именно с теорий, где есть лишь абелевы связи.

Пусть имеем вырожденную теорию с полным набором абелевых связей $\varphi_\alpha(q, p) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, m < n$):

$$\{\varphi_\alpha(q, p), \varphi_\beta(q, p)\} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m. \quad (4.24)$$

В этом случае явную параметризацию редуцированного фазового пространства можно задать следующим образом. Согласно хорошо известной теореме (см., например, [37, 50]), всегда можно построить каноническое преобразование к новым переменным

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i = Q_i(q, p), \\ p_i &\mapsto P_i = P_i(q, p), \end{aligned} \quad (4.25)$$

таким, что m новых импульсов $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m)$ становятся равными абелевым связям φ_α :

$$\bar{P}_\alpha = \varphi_\alpha(q, p), \quad (4.26)$$

при этом оставшиеся $(n - m)$ пар новых канонических переменных $(Q_1^*, P_1^*, \dots, Q_{n-m}^*, P_{n-m}^*)$ будут представлять собой именно базис для калибровочно-инвариантных наблюдаемых O . Чтобы убедиться в этом выясним структуру канонического гамильтониана в этих переменных. В силу условия полноты системы связей имеем соотношение

$$\{\varphi_\alpha(q, p), H_c(q, p)\} = g_{\alpha\beta}(q, p)\varphi_\beta(q, p) \quad (4.27)$$

с некоторыми фиксированными функциями $g_{\alpha\beta}$. Из уравнения (4.27) в новых координатах P, Q

$$\frac{\partial \overline{H}_C(P, Q)}{\partial \overline{Q}_\alpha} = \overline{g}_{\alpha\beta}(P, Q) \overline{P}_\beta, \quad (4.28)$$

$$\overline{H}_C(P, Q) = H_C(p(P, Q), q(P, Q))$$

следует, что канонический гамильтониан представим в виде

$$\overline{H}_C(P, Q) = \overline{H}_0(Q^*, P^*, \overline{P}) + \overline{\Psi}_\alpha(Q, P) \overline{P}_\alpha \quad (4.29)$$

с некой функцией $H_0(Q^*, P^*, \overline{P})$, не зависящей от координаты $\overline{Q}$:

$$\{\overline{P}_\alpha, \overline{H}_0(P, Q)\} = 0 \quad (4.30)$$

и определяющей калибровочно-инвариантную часть канонического гамильтониана *. Что касается функции $\overline{\Psi}_\alpha(Q, P)$, то она определяется через структурные функции $\overline{g}_{\alpha\beta}(P, Q)$ посредством уравнения

$$\frac{\partial \overline{\Psi}_\gamma(P, Q)}{\partial \overline{Q}_\alpha} = \overline{g}_{\alpha\gamma}(P, Q). \quad (4.31)$$

Это означает, что в терминах исходных переменных p, q канонический гамильтониан имеет вид

$$H_C(p, q) = H_0(q, p) + \Psi_\alpha(p, q) \varphi_\alpha(p, q), \quad (4.32)$$

где $H_0(p, q)$ есть калибровочно-инвариантная функция

$$\{H_0(p, q), \varphi_\alpha(p, q)\} = 0, \quad (4.33)$$

а $\Psi_\alpha(p, q)$ связана с $\overline{\Psi}_\alpha(Q, P)$ соотношением

$$\Psi_\alpha(p, q) = \overline{\Psi}_\alpha(P(p, q), Q(p, q)). \quad (4.34)$$

При этом уравнения (4.31) можно переписать в канонически-инвариантной форме посредством скобок Пуассона

$$\{\varphi_\alpha(p, q), \Psi_\gamma(p, q)\} = g_{\alpha\gamma}(p, q). \quad (4.35)$$

*В теории невырожденных систем за координатами, от которых гамильтониан не зависит, закрепилось название *циклических* или *игнорируемых*. Этим же термином в теории вырожденных динамических систем принято называть чисто калибровочные степени свободы, несмотря на принципиальное отличие; динамика “классических циклических” координат однозначно определяется, в то время как эволюция циклических координат в вырожденной теории содержит функциональный произвол.

Однако отметим основное преимущество адаптированных координат (P, Q) . В этих координатах инвариантная часть гамильтониана определяется простым разложением

$$H_0(P, Q) = \overline{H}_C(P, Q) - \frac{\partial \overline{H}_C}{\partial \overline{P}_\alpha} \overline{P}_\alpha, \quad (4.36)$$

в то время как в исходных p и q ее можно представить лишь посредством вариационной производной

$$H_0(p, q) = \left[H_C(p, q) - \frac{\delta H_C}{\delta \varphi_\alpha} \varphi_\alpha \right]. \quad (4.37)$$

С учетом представления (4.29) для канонического гамильтониана обобщенные уравнения Гамильтона — Дирака (в качестве генератора применим полный гамильтониан)

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H_T\}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H_T\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

в новых координатах (Q, P) имеют вид

$$\dot{\bar{Q}}_A \simeq \{\bar{Q}_A, \bar{H}_E\} = \left[\frac{\partial \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})}{\partial \bar{P}_A} + \psi_A(Q, P) + u_\alpha(t) \delta_{\alpha A} \right] \Big|_{\bar{P}_A=0}, \quad (4.39)$$

$$\dot{\bar{P}}_A \simeq 0, \quad A = 1, \dots, m, \quad (4.40)$$

$$\dot{Q}_a^* \simeq \{Q_a^*, \bar{H}_E\} = \frac{\partial \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})}{\partial P_a^*} \Big|_{\bar{P}_A=0} = \frac{\partial \bar{H}^*(Q^*, P^*)}{\partial P_a^*}, \quad (4.41)$$

$$\dot{P}_a^* \simeq \{P_a^*, \bar{H}_E\} = - \frac{\partial \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})}{\partial Q_a^*} \Big|_{\bar{P}_A=0} = - \frac{\partial \bar{H}^*(Q^*, P^*)}{\partial Q_a^*}, \quad (4.42)$$

$$\bar{P}_A \simeq 0, \quad (4.43)$$

с физическим гамильтонианом

$$H^*(P^*, Q^*) \equiv H_C(P, Q) \Big|_{\bar{P}_A=0}. \quad (4.44)$$

Резюме. В специальных канонических координатах $(\bar{Q}, \bar{P})$ и (Q^*, P^*) канонические уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{Q}^* &= \{Q^*, H^*\}, & \dot{\bar{Q}} &= u(t), \\ \dot{P}^* &= \{P^*, H^*\}, & \dot{\bar{P}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

H^* зависит только от $(n-m)$ пар новых калибровочно-инвариантных канонических переменных (Q^*, P^*) , и форма канонических уравнений (4.45) показывает явную факторизацию переменных

$$2n \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_n \end{pmatrix} \right\} \mapsto \begin{matrix} 2(n-m) \left\{ \begin{pmatrix} Q^* \\ P^* \end{pmatrix} & \text{физические} \\ & \text{переменные} \\ 2m \left\{ \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{P} \end{pmatrix} & \text{нефизические} \\ & \text{переменные} \end{matrix} \quad (4.46)$$

Принципиально важным при этом является то, что произвольные функции $u(t)$ присутствуют лишь в той части системы уравнений, которые содержат скорости игнорируемых координат $\bar{Q}_\alpha$, а уравнения движения для координат (Q^*, P^*) выделились в виде отдельной замкнутой системы, не содержащей переменных $(\bar{Q}, \bar{P})$. Поскольку в этих уравнениях нет никакого произвола, то именно они и являются истинными уравнениями движения, а координаты (Q^*, P^*) — истинными динамическими величинами, поскольку удовлетворяют требованиям, предъявляемым к физическим величинам*: они калибровочно-инвариантны и их эволюция определяется системой из $2(n-m)$ гамильтоновых уравнений движения без каких либо ограничений на начальные данные. Соответствующие решения уравнений заполняют все многообразие размерности $2(n-m)$, точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с точками пространства физических состояний системы. Тем самым без введения дополнительных калибровочных условий в теории, содержащей лишь абелевы связи, возможно осуществить искомую редукцию лишь за счет выбора специальных переменных, причем последние связаны с исходным каноническим преобразованием, гарантирующим требуемую нами “эквивалентность” невырожденной редуцированной системы, первоначально сингулярной.

Прямое обобщение этого метода редукции на неабелев случай невозможно, поскольку идентификация импульсов со связями запрещена именно

Заметим, что выбор специальных адаптированных координат P^, Q^* и $\bar{Q}$ не единственный. Например, можно было использовать в качестве таковых канонические координаты

$$\begin{aligned} \bar{P}'_A &= \bar{P}_A, \\ \bar{Q}'_A &= \bar{Q}_A + f_A(Q^*), \\ P'^*_i &= P^*_i + \bar{P}_A \frac{\partial f_A(Q^*)}{\partial Q^*_i}, \\ Q'^*_i &= Q^*_i. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Однако в любом случае переход от одних координат к другим будет являться каноническим преобразованием в секторе калибровочно-инвариантных переменных (Q^*, P^*) .

их неабелевостью. Однако существует важное наблюдение, позволяющее фактически свести анализ процесса редукции системы с произвольными связями первого рода к рассмотренному случаю абелевых связей. Причина кроется в том, что в системах со связями существует большая свобода в описании*; помимо произвола в выборе канонических переменных, существует дополнительная свобода, связанная с описанием поверхности связей Γ_c . В связи с такой неоднозначностью описания возникает вопрос о возможности представления данной поверхности связей с помощью других функций, находящихся в инволюции. Ответ на этот вопрос положителен**.

Резюме. Утверждение об абелизации связей состоит в возможности замены связи φ_α эквивалентным набором связей Φ_α :

$$\Phi_\alpha = D_{\alpha\beta}\varphi_\beta, \quad \det \|D\| \Big|_{\varphi=0} \neq 0, \quad (4.48)$$

которые задают ту же поверхность Γ_c , но формируют абелеву алгебру.

Доказательство этого утверждения коротко обсуждается в приложении А. Здесь отметим лишь, что оно основано либо на явном разрешении связей (см. [4], Sundermeyer; Гитман, Тютин; Henneaux, Teitelboim), либо используются условия, фиксирующие калибровку [43], или же применяется прямой метод построения матрицы абелизации как решения определенной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (см. [26, 27] и приложение А).

С учетом последнего факта окончательно сформулируем общую схему бескалибровочной редукции вырожденных теорий с алгеброй связей первого рода общего вида. Пусть имеем вырожденную систему с каноническим гамильтонианом $H_c(q, p)$ и полным неприводимым набором связей первого рода $\varphi_A(q, p)$:

$$\{\varphi_A(q, p), \varphi_B(q, p)\} = f_{ABC}(q, p)\varphi_C(q, p). \quad (4.49)$$

С помощью процедуры локальной абелизации заменяем неабелевы связи эквивалентным набором абелевых связей $\Phi_A(q, p) = D_{AB}(q, p)\varphi_B(q, p)$ и переходим к специальным адаптированным переменным

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i = Q_i(q, p), \\ p_i &\mapsto P_i = P_i(q, p), \end{aligned} \quad (4.50)$$

*Полную группу преобразований, сохраняющих как вид гамильтоновых уравнений движения, так и поверхность связей, Бергман назвал “*обобщенной группой канонических преобразований*” [3].

**Поскольку канонические преобразования оставляют неизменным значение скобок Пуассона, то преобразование абелизации не может быть каноническим, но, безусловно, должно принадлежать к классу обобщенных канонических преобразований.

таким, что m новых импульсов $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m)$ становятся равными новым абелевым связям Φ_A :

$$\bar{P}_A = \Phi_A(q, p) . \quad (4.51)$$

Обобщенный гамильтониан в новых переменных и в терминах абелизованных связей имеет следующий вид:

$$\bar{H}_E(Q, P) = \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) + \bar{\psi}_B(Q, P) \bar{P}_B + u_A(t) \bar{D}_{AB}^{-1}(Q, P) \bar{P}_B, \quad (4.52)$$

что демонстрирует существование игнорируемых координат $\bar{Q}_A$ и канонических переменных (Q^*, P^*) , эволюция которых однозначно определяется из гамильтоновых уравнений движения с редуцированным гамильтонианом

$$\bar{H}^*(Q^*, P^*) = \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) \Big|_{\bar{P}=0} . \quad (4.53)$$

Резюме. В вырожденных теориях с неабелевыми связями первого рода, используя лишь обобщенные канонические преобразования, можно провести процедуру редукции фазового пространства без привлечения дополнительных калибровочных условий.

Для проведения такой схемы редукции требуется знание явного вида как матрицы абелизации, так и канонических преобразований (4.50), что, в свою очередь, связано с решением полных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Тем самым в этом пункте схема бескалибровочной редукции может натолкнуться на трудности технического характера, уровень сложности которых определяется функциональным видом лагранжиана системы. Несмотря на это, сам факт существования схемы бескалибровочной редукции имеет принципиальное значение, поскольку данная схема редукции основана на допустимом с точки зрения обобщенной гамильтоновой динамики применении обобщенных канонических преобразований к “специальным” координатам, что является гарантией ее корректности. Это обстоятельство может послужить отправным пунктом для анализа упомянутых проблем определения класса допустимых калибровок как в методе Дирака, так и в методе Фаддеева.

Анализ допустимых калибровок. В настоящем пункте, сравнивая две процедуры редукции: в методе фиксации калибровки и бескалибровочном, будут изложены некоторые простые условия на калибровки, гарантирующие корректность самого метода фиксации калибровки*.

*Обсуждению ряда важных моментов процедуры фиксации калибровок в вырожденных теориях посвящен обзор [46].

Поскольку все формы представления вырожденных теорий с необходимостью должны быть связаны друг с другом посредством обобщенных канонических преобразований, то за определение допустимых калибровок можно принять следующее. *Калибровка является допустимой, если и только если существует каноническое преобразование, связывающее уравнения Гамильтона — Дирака (4.39) для канонических переменных Q^*, P^* с уравнениями движения, полученными с ее использованием в методе фиксации калибровки (4.15).*

В “специальных” координатах калибровочные условия общего вида имеют следующий вид:

$$\bar{\chi}_A(\bar{Q}, \bar{P}, Q^*, P^*) = 0. \quad (4.54)$$

Как это следует из определения, калибровочные условия (4.54) принадлежат к классу допустимых, если они не накладывают никаких ограничений на динамические переменные (Q^*, P^*) и приводят к физическому гамильтониану (4.53). Требование невырожденности детерминанта Фаддеева — Попова (4.8) в координатах (Q, P)

$$\det \left\| \{ \bar{\chi}_A(Q, P), \bar{\Phi}_B(Q, P) \} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \bar{\chi}_A(Q, P)}{\partial \bar{Q}_B} \right\|_{\Gamma^*} \neq 0 \quad (4.55)$$

является условием разрешимости связей и калибровок относительно пар канонически сопряженных переменных в виде

$$\begin{aligned} \bar{P}_A &= 0, \\ \bar{Q}_A &= f_A(Q^*, P^*). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Покажем, что если функции $f_A(Q^*, P^*)$ определены для произвольных значений (Q^*, P^*) из области их определения, то калибровки

$$\bar{\chi}' = \bar{Q}_A - f_A(Q^*, P^*) = 0 \quad (4.57)$$

принадлежат к классу допустимых. Для этого достаточно доказать, что редуцированный гамильтониан, соответствующий калибровкам (4.57), совпадает с физическим гамильтонианом (4.53). Определяя множители Лагранжа из условий стационарности калибровочных условий (4.57)

$$\dot{\bar{\chi}}_A = \{ \bar{\chi}_A, \bar{H}_E \} = 0, \quad (4.58)$$

получим следующее представление для обобщенного гамильтониана $\bar{H}_E$:

$$\bar{H}_E = \bar{H}_0 + \left[-\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{P}_B} - \frac{\partial \bar{\psi}_C}{\partial \bar{P}_B} \bar{P}_C + \{ \bar{f}_B, \bar{H}_c \} \right] \bar{P}_B. \quad (4.59)$$

Применяя для функции $\bar{H}_0$ формулу Тейлора с остаточным членом

$$\begin{aligned} \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) = \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) \Big|_{\bar{P}=0} + \left(\bar{P}_A \frac{\partial}{\partial \bar{P}_A} \right) \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) \Big|_{\bar{P}=0} + \\ + \frac{1}{2} \left(\bar{P}_A \frac{\partial}{\partial \bar{P}_A} \right)^2 \bar{H}_0(Q^*, P^*, \Theta \bar{P}), \end{aligned} \quad (4.60)$$

где $0 \leq \Theta_A \leq 1$, обобщенный гамильтониан записывается в виде

$$\bar{H}_E = \bar{H}^* + \bar{F}_B(Q^*, P^*, \bar{P}) \bar{P}_B, \quad (4.61)$$

где $\bar{H}^*$ совпадает с редуцированным гамильтонианом (4.53) в бескалибровочной схеме, а

$$\bar{F}_B(Q^*, P^*, \bar{P}) = \left[\frac{1}{2} \left(\bar{P}_A \frac{\partial}{\partial \bar{P}_A} \frac{\partial}{\partial \bar{P}_B} \right) \bar{H}_0(Q^*, P^*, \Theta \bar{P}) - \frac{\partial \bar{\psi}_A}{\partial \bar{P}_B} \bar{P}_A + \{ \bar{f}_B, \bar{H}_c \} \right].$$

Данное представление показывает, что калибровка действительно является допустимой, так как гамильтоновы уравнения движения, полученные с помощью $\bar{H}_E$, совпадают с уравнениями движения для Q^*, P^* в бескалибровочной схеме редукции.

Особое место среди допустимых калибровок занимают калибровочные условия, зависящие лишь от игнорируемых координат

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_A(\bar{Q}) = 0, \\ \det \left\| \frac{\partial \bar{\chi}_A(\bar{Q})}{\partial \bar{Q}_B} \right\|_{\Sigma} \neq 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

или в разрешенном виде

$$\bar{\chi}_A = \bar{Q}_A - C_A = 0, \quad (4.63)$$

где C_A — произвольные константы. Такой тип калибровок (4.62), которые будем называть *каноническими*, представляется наиболее естественным с точки зрения бескалибровочной редукции. Множители Лагранжа, определяемые из условий стационарности канонической калибровки

$$\bar{u}_A = - \frac{\partial \bar{H}_c}{\partial \bar{P}_A} - \bar{\psi}_A, \quad (4.64)$$

приводят к обобщенному гамильтониану

$$\bar{H}_E = \bar{H}_c - \frac{\partial \bar{H}_c}{\partial \bar{P}_A} \bar{P}_A = \bar{H}^* - \bar{F}_{AB} \bar{P}_A \bar{P}_B, \quad (4.65)$$

совпадающему с соответствующим выражением, полученным с помощью бескалибровочной схемы редукции. В связи с тем, что данное определение канонической калибровки является конструктивным лишь в специальных координатах (Q, P) , возникает задача сформулировать некое условие на канонические калибровки, позволяющее инвариантным образом, независимо от выбора координат, проверять каноничность калибровки. Ниже будет изложен подобный критерий принадлежности к классу канонических калибровок. Для его получения заметим, что, согласно определению редуцированного гамильтониана (4.53), требование независимости калибровки от физических переменных (Q^*, P^*) может быть выражено в следующей канонически инвариантной форме*:

$$\{\chi_\beta(p, q), H^*(p, q)\} \Big|_{\Gamma^*} = 0. \quad (4.66)$$

В такой форме этот критерий также далек от практического использования, однако, используя определения скобок Дирака, можно переписать его в удобном виде. Действительно, в специальных координатах (Q, P) имеет место следующее представление для канонического гамильтониана:

$$\begin{aligned} \overline{H}_C(P, Q) &= \overline{H}_0(Q^*, P^*, \overline{P}) + \overline{\Psi}_\alpha(Q, P) \overline{P}_\alpha = \\ &= \overline{H}^*(P^*, Q^*) + F_\alpha(Q, P) \overline{P}_\alpha. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Учитывая, что ни сама калибровка, ни матрица $\overline{\Delta}_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \overline{P}_\beta\}$ не зависят от физических переменных, имеем выражения

$$\begin{aligned} \{\overline{\chi}_\alpha(\overline{Q}), \overline{H}_C(P, Q)\} &= \overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}) F_\beta(P, Q) + \{\overline{\chi}_\alpha(\overline{Q}), F_\beta(P, Q)\} \overline{P}_\beta, \\ \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{H}_C(P, Q)\} &= \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}) F_\gamma(P, Q)\} \overline{P}_\gamma + \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{P}_\gamma\} F_\gamma(P, Q), \end{aligned} \quad (4.68)$$

из которых, исключая функции $F_\gamma(P, Q)^{**}$, получаем

$$\{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{H}_C(P, Q)\} \Big|_{\Gamma^*} = \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{P}_\gamma\} \overline{\Delta}_{\gamma\sigma}^{-1}(\overline{Q}) \{\overline{\chi}_\sigma(\overline{Q}), \overline{H}_C(P, Q)\} \Big|_{\Gamma^*}.$$

С учетом определения скобок Дирака это условие принимает более привлекательную форму

$$\{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{H}_C(P, Q)\} \Big|_{D(\overline{P}, \overline{\chi})} \Big|_{\overline{P}=0, \overline{\chi}=0} = 0. \quad (4.69)$$

Безусловно, возможен случай, когда гамильтониан не зависит от некой физической переменной Q^ . Это имеет место для циклических координат, связанных с глобальной симметрией системы. И по этой причине он не является “опасным” для выводимого критерия.

**Мы предполагаем, что $\{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{P}_\gamma\} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то калибровка может зависеть от физических координат

$$\overline{\chi}_\alpha = \overline{Q}_\alpha + f_\alpha(Q^*).$$

Однако, как было отмечено при анализе выбора специальных координат, с помощью канонического преобразования в физическом секторе удастся исключить эту зависимость.

Однако недостаток данного критерия состоит в том, что он записан в терминах абелизованных связей $\bar{P}$. Для того чтобы иметь критерий каноничности калибровки в терминах неабелевых связей, воспользуемся важным свойством матрицы абелизации

$$\varphi_\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\beta} \bar{P}_\beta. \quad (4.70)$$

Прежде всего заметим, что скобка Дирака является инвариантом по отношению к обобщенным каноническим преобразованиям [3]:

$$\{\bar{F}(P, Q), \bar{G}(P, Q)\}_{D(\bar{P}, \bar{Q})} = \{F(p, q), G(p, q)\}_{D(\varphi, \chi)},$$

и поэтому вместо (4.69) имеем

$$\mathcal{D}_{\alpha\gamma} \{\Delta_{\gamma\beta}(p, q), H_C(p, q)\}_{D(\varphi, \chi)} + \Delta_{\gamma\beta}(p, q) \{\mathcal{D}_{\alpha\gamma}, H_C(p, q)\}_{D(\varphi, \chi)} \Big|_{\varphi=0, \chi=0} = 0. \quad (4.71)$$

Теперь для получения искомого результата надо убедиться в том, что матрица абелизации зависит лишь от $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, и как следствие

$$\{\mathcal{D}_{\alpha\gamma}, H_C(p, q)\}_{D(\varphi, \chi)} \Big|_{\varphi=0, \chi=0} = 0. \quad (4.72)$$

В этом можно убедиться, рассматривая структуру генератора калибровочных преобразований, который можно представить либо в виде линейной комбинации неабелевых связей первого рода [4], Дирак, [44, 45],

$$G = \varepsilon_\alpha(q, p, t) \varphi_\alpha(q, p),$$

либо в терминах абелевых связей

$$G = \bar{\varepsilon}_\alpha(\bar{Q}, \bar{P}, t) \bar{P}_\alpha. \quad (4.73)$$

При этом в (4.73) функции — параметры калибровочных преобразований $\varepsilon_A(\bar{Q})$ — зависят лишь от игнорируемых координат $(\bar{Q}, \bar{P})$ в силу факторизованной формы уравнений движения. Согласно (4.73) произвольная калибровочно-инвариантная функция I зависит лишь от Q^* и P^* :

$$\{I, G\} = 0, \quad (4.74)$$

поэтому, используя уравнения (4.74) с генератором калибровочных преобразований G , в терминах неабелевых связей и матрицы абелизации (4.70)

$$G = \bar{\varepsilon}_\alpha(\bar{Q}, \bar{P}, t) \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-1} \varphi_\beta$$

получим для $I \equiv Q^*, P^*$

$$\begin{aligned} \{Q_i^*, G\} = 0 &\implies \frac{\partial \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-1}}{\partial Q_i^*} = 0, \\ \{P_i^*, G\} = 0 &\implies \frac{\partial \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{-1}}{\partial P_i^*} = 0, \end{aligned} \quad (4.75)$$

с учетом невырожденности матрицы $\mathcal{D}$ и функциональной независимости связей. Этим завершается доказательство независимости матрицы абелизации от переменных P^* и Q^* , и тем самым из (4.71) получаем условие

$$\{\Delta_{\alpha\beta}(p, q), H_C(p, q)\}_D \Big|_{\varphi=0, \chi=0} = 0, \quad (4.76)$$

где уже матрица $\Delta_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}$ вычислена посредством неабелевых связей и при произвольном выборе канонических координат.

Резюме. Требование зануления скобки Дирака матрицы $\Delta_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}$ с каноническим гамильтонианом на поверхности связей и калибровок

$$\{\Delta_{\alpha\beta}(p, q), H_C(p, q)\}_D \Big|_{\varphi=0, \chi=0} = 0 \quad (4.77)$$

является инвариантным критерием принадлежности калибровки χ_α к классу канонических.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При написании данной статьи мы не ставили цели обсудить все аспекты или хотя бы дать полную библиографию, касающуюся процедуры редукции в вырожденных динамических системах. Круг вопросов, связанных с проблематикой настоящего обзора, крайне обширен, он включает в себя как принципиальные математические проблемы, так и сложные задачи реализации процедуры гамильтоновой редукции в теоретико-полевых моделях, представляющих непосредственный физический интерес.

Среди подобных проблем, не затронутых обсуждением, выделим несколько тем, к изложению которых мы намерены обратиться в дальнейших публикациях:

- развитие метода гамильтоновой редукции для систем, обладающих репараметрической инвариантностью;
- обобщение метода гамильтоновой редукции на теоретико-полевые модели;
- сравнение с ковариантным методом Баталина — Фрадкина — Вилковиского описания вырожденных систем с введением дополнительных духовых переменных;
- исследование вопросов глобальных свойств процедуры гамильтоновой редукции;

Отметим, что операция редукции числа степеней свободы в калибровочных теориях поля в силу бесконечного числа динамических переменных несравненно сложнее, чем в механических системах, и здесь требуется тщательная разработка принципиальных вопросов. Она, в первую очередь, помимо очевидных технических трудностей, связана с проблемой глобального анализа явления редукции. Очевидно, что без первого корректного шага, выяснения локальных свойств теории, получение каких-либо результатов глобального характера не представляется возможным. Хотя и результаты, изложенные в обзоре, основаны на локальном рассмотрении в том смысле, что во всех рассматриваемых многообразиях мы ограничиваем себя областью, которую можно покрыть одной картой. Однако, опираясь на традиционно применяемый принцип, сформулированный Я.В.Татариновым [50] как принцип *“презюмции аналитичности”*: **“соотношения, установленные локально, дают результат правильный и глобально”**, можно попытаться сделать и некие заключения о свойствах системы в целом. При этом, каждый раз обнаруживая, что он нарушается, наверное, следует вспомнить наказ И.Ньютона, записанный в анаграмме: *“Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa”*.

Авторы благодарны А.Н.Тавхелидзе за стимулирующий интерес к написанию обзора. Особую благодарность выражаем В.П.Гердту, А.Н.Квинихидзе, В.В.Корняку, Д.М.Младенову, В.Н.Нестеренко, В.П.Павлову, В.А.Рубакову, А.А.Славнову, А.Т.Филипову, обсуждения с которыми способствовали прояснению многих вопросов и улучшению изложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грантов №96-01-01223, 98-01-00101.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Алгоритм абелизации связей первого рода

Существенным ингредиентом бескалибровочной редукции вырожденных систем с локальной симметрией является процедура абелизации связей первого рода. Возможность перехода к абелевым связям следует из хорошо известного факта*, что если связи первого рода разрешить относительно канонических импульсов, то они с необходимостью абелевы. Следует отметить

*Заметим, что уже Леви-Чивита в задаче о нахождении частных интегралов дифференциальных уравнений пользовался именно такой процедурой для получения инвариантных соотношений в инволюции [23].

при этом, что хотя из теоремы о неявной функции, применимость которой в данном случае гарантируется условием (3.13), следует возможность подобного разрешения, однако остается открытым вопрос о глобальной эквивалентности исходной поверхности связей той поверхности, которая описывается уже абелевыми связями. Очевидно, что если абелизованные связи $\Phi_\alpha(p, q)$ связаны с исходными неабелевыми связями соотношением

$$\Phi_\alpha(p, q) = \mathcal{D}_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma(p, q), \quad (\text{A.1})$$

то условие глобальной эквивалентности означает существование такой невырожденной матрицы $\mathcal{D}(p, q)$ (с $\det \|\mathcal{D}_{\alpha\gamma}\| \Big|_{\Gamma_c} \neq 0$ на всей поверхности связей), которая является глобальным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\{\mathcal{D}_{\alpha\gamma}, \mathcal{D}_{\beta\lambda}\}\varphi_\gamma + \{\mathcal{D}_{\alpha\lambda}, \varphi_\gamma\}\mathcal{D}_{\beta\gamma} + \{\varphi_\gamma, \mathcal{D}_{\beta\lambda}\}\mathcal{D}_{\alpha\gamma} + f_{\gamma\sigma\lambda}\mathcal{D}_{\alpha\gamma}\mathcal{D}_{\beta\sigma} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Анализ существования такого решения представляет собой крайне сложную проблему. Однако оказывается возможным свести задачу нахождения решений (A.2) к задаче определения частного решения полной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных*. Более точно в этом приложении будет описана рекуррентная процедура абелизации связей, удовлетворяющих алгебре общего вида

$$\{\varphi_\alpha(p, q), \varphi_\beta(p, q)\} = f_{\alpha\beta\gamma}(p, q)\varphi_\gamma(p, q), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.3})$$

с помощью преобразования эквивалентности Дирака (A.1) к новым абелевым связям $\Phi_\alpha(p, q)$ с матрицей, имеющей следующую структуру:

$$\mathcal{D} := \underbrace{\mathcal{D}^1(p, q) \cdots \mathcal{D}^m(p, q)}_m, \quad (\text{A.4})$$

где каждая матрица $\mathcal{D}^k$ является произведением k матриц размерности $m \times m$:

$$\mathcal{D}^k := \mathcal{R}^{a_k+k}(p, g) \prod_{i=k-1}^0 \mathcal{S}^{a_k+i}(p, g), \quad a_k := \frac{k(k+1)}{2}, \quad (\text{A.5})$$

*Подобный способ доказательства применялся в специальном случае алгебры

$$\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = F_{\alpha\beta}(\varphi_1, \dots, \varphi_m), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m.$$

Такой набор связей принято называть функциональной группой, следуя терминологии Ли [41,42].

$$\mathcal{R}^{a_k+k} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{a_k+k} \end{pmatrix}}^{k \quad m-k} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$S^{a_k+i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{k \quad m-k} \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & C_k^{a_k+i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & C_{k+1}^{a_k+i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & C_{m-1}^{a_k+i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & C_m^{a_k+i} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{k-i} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Связи, полученные в результате действия k матриц этого типа на исходные связи Φ_β^0 — связи $(a_k + k)$ -го этапа процедуры абелизации

$$\Phi_\alpha^{a_k+k} := (\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{D}^{k-1} \cdots \mathcal{D}^1)_{\alpha\beta} \Phi_\beta^0, \quad (\text{A.8})$$

образуют набор, в котором k связей имеют нулевые скобки Пуассона с любой связью в силу того, что функции C и B удовлетворяют полной системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\{\Phi_{\alpha_k}^{a_k+i-1}, C_{\alpha_k}^{a_k+i}\} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\{\Phi_k^{a_k+i-1}, C_{\alpha_k}^{a_k+i}\} = f_{k\alpha_k\gamma_k}^{a_k+i-1} C_{\gamma_k}^{a_k+i} - f_{k\alpha_k i+1}^{a_k+i-1}, \quad (\text{A.10})$$

$$\{\Phi_{\alpha_k}^{a_k+k-1}, B_{\alpha_k\beta_k}^{a_k+k}\} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\{\Phi_k^{a_k+k-1}, B_{\alpha_k/\beta_k}^{a_k+k}\} = -f_{k\gamma_k/\beta_k}^{a_k+k-1} B_{\alpha_k\gamma_k}^{a_k+k}, \quad (\text{A.12})$$

где $\alpha_k = k + 1, \dots, m$, $\bar{\alpha}_k = 1, 2, \dots, k - 1$, и $f_{\alpha\gamma\beta}^{a_k+i}$ являются структурными функциями алгебры связей $(a_k + i)$ -го этапа.

Доказательство справедливости представления (А.4) и полноты систем дифференциальных уравнений для матриц S $\mathcal{R}$ было проведено в работе [26] методом индукции. С алгебраической точки зрения процедура абелизации является итерационной процедурой построения “эквивалентных” алгебр A^{a_i} , образованных связями $\Phi_{\alpha}^{a_i}$:

$$\mathcal{A}^0 \xrightarrow[\mathcal{D}^1]{S^1} \mathcal{A}^1 \xrightarrow[\mathcal{D}^2]{\mathcal{R}^2} \mathcal{A}^2 \xrightarrow[\mathcal{D}^3]{S^3} \mathcal{A}^3 \xrightarrow[\mathcal{D}^4]{S^4} \mathcal{A}^4 \xrightarrow[\mathcal{D}^5]{\mathcal{R}^5} \mathcal{A}^5 \dots \xrightarrow[\mathcal{D}^k]{S^{a_k}} \mathcal{A}^{a_k} \dots \xrightarrow[\mathcal{D}^k]{\mathcal{R}^{a_k+k}} \mathcal{A}^{a_k+k} \dots \quad (\text{A.13})$$

Процедура абелизации состоит из a_m последовательных этапов формирования абелевой алгебры размерности m , эквивалентной исходной неабелевой алгебре, так что на a_k -ом этапе алгебра $\mathcal{A}^{a_k}$ обладает центром из k элементов $\mathcal{Z}_k[A] = (\Phi_1^{a_k}, \Phi_2^{a_k}, \dots, \Phi_k^{a_k})$. Иными словами, матрица $\mathcal{D}^k$ переводит алгебру $\mathcal{A}^k$ в алгебру $\mathcal{A}^{k+1}$, с центром из $k + 1$ -го элемента.

Б. Абелева модель Христа — Ли — Прохорова

Здесь на примере простейшей механической системы будет изложена процедура бескалибровочной редукции, дано сравнение со схемой фиксации калибровки. Этот пример показывает существование калибровок, которые, несмотря на то, что условие (4.8) выполняется, все же приводят к искажению истинной динамики редуцированной системы.

Формулировка модели и бескалибровочная редукция. Рассмотрим точно решаемую механическую систему, заданную лагранжианом [47, 48]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + y^2(x_1^2 + x_2^2)) - y(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) - V(x_1^2 + x_2^2), \quad (\text{Б.1})$$

где x_1, x_2, y — независимые переменные. Ранг матрицы Гесса равен двум, поэтому имеется одна первичная связь

$$p_y = 0, \quad (\text{Б.2})$$

которая непосредственно следует из определения канонического импульса p_y . Применяя стандартную процедуру перехода к гамильтонову формализму, получим полный гамильтониан

$$H_T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - y(x_1 p_2 - x_2 p_1) + V(x_1^2 + x_2^2) + u(t)p_y \quad (\text{Б.3})$$

и вторичную связь из условия стационарности первичной

$$\varphi := x_1 p_2 - x_2 p_1 = 0. \quad (\text{Б.4})$$

Легко убедиться в том, что в теории нет других связей, а первичные и вторичные связи образуют полную систему связей первого рода

$$\{\varphi, p_y\} = 0.$$

Это означает, что существует группа локальных калибровочных преобразований, относительно которой лагранжиан системы (квази)инвариантен. Производящая функция соответствующих бесконечно малых локальных калибровочных преобразований строится по связям и имеет следующий вид:

$$G = -\dot{\varepsilon}(t)p_y + \varepsilon(t)(x_1 p_2 - x_2 p_1). \quad (\text{Б.5})$$

Преобразования обобщенных координат, генерируемые с помощью G :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \{x_1, G\} = x_1 - \varepsilon(t)x_2, \\ x'_2 &= x_2 + \{x_2, G\} = x_2 + \varepsilon(t)x_1, \\ y' &= y + \{y, G\} = y - \dot{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

представляют собой вращения на угол $\varepsilon(t)$ вокруг оси, перпендикулярной к плоскости (x_1, x_2) .

Осуществим теперь каноническое преобразование к специальным переменным $(Y, P_Y), (R, P_R), (\bar{\Theta}, \bar{P}_{\bar{\Theta}})$ так, чтобы новый импульс $\bar{P}_{\bar{\Theta}}$ был равен вторичной связи φ :

$$Y = y, \quad P_y = p_Y, \quad (\text{Б.7})$$

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad P_R = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (\text{Б.8})$$

$$\bar{\Theta} = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad \bar{P}_{\bar{\Theta}} = x_1 p_2 - x_2 p_1. \quad (\text{Б.9})$$

Это преобразование каноническое и имеет обратное

$$y = Y, \quad p_Y = P_y, \quad (\text{Б.10})$$

$$x_1 = R \cos \bar{\Theta}, \quad p_1 = P_R \cos \bar{\Theta} - \frac{\bar{P}_{\bar{\Theta}}}{R} \sin \bar{\Theta}, \quad (\text{Б.11})$$

$$x_2 = R \sin \bar{\Theta}, \quad p_2 = P_R \sin \bar{\Theta} + \frac{\bar{P}_{\bar{\Theta}}}{R} \cos \bar{\Theta} \quad (\text{Б.12})$$

всюду, за исключением одной точки $R = 0$, если примем, что $0 < \bar{\Theta} < 2\pi$. В терминах новых переменных полный гамильтониан имеет вид

$$H_T = \frac{1}{2}(P_R^2 + \frac{\bar{P}_\Theta^2}{R^2}) - Y\bar{P}_\Theta + V(R^2) + u_Y P_Y. \quad (\text{Б.13})$$

В соответствии с общим представлением уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{R} &= P_R, \\ \dot{P}_R &= -\frac{\partial V(R^2)}{\partial R}, \\ \dot{\bar{P}}_\Theta &= 0, \quad \dot{\bar{\Theta}}_\alpha = \bar{u}_\Theta(t), \\ \dot{P}_Y &= 0, \quad \dot{Y} = \bar{u}_Y(t) \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

демонстрируют расщепление координат фазового пространства на две части: (R, P_R) , динамика которых не содержит произвола и задается физическим гамильтонианом

$$H_{Ph} = \frac{1}{2}P_R^2 + V(R^2), \quad (\text{Б.15})$$

и (Y, Θ) с полностью произвольной эволюцией. Таким образом, после учета связей P_Y и $\bar{P}_\Theta$ автоматически происходит редукция к истинным динамическим переменным (R, P_R) без введения каких-либо дополнительных калибровочных условий. В их калибровочной инвариантности легко убедиться с помощью производящей функции бесконечно малых локальных калибровочных преобразований (Б.5) в новых координатах

$$G = -\dot{\varepsilon}(t)P_Y + \varepsilon(t)\bar{P}_\Theta. \quad (\text{Б.16})$$

Каноническая калибровка. Обратимся теперь к схеме редукции с фиксацией калибровки. Всякая корректная редукция должна приводить к невырожденной теории, которая должна быть канонически эквивалентна теории, полученной бескалибровочным образом. Поэтому прежде всего удостоверимся в существовании канонической калибровки для данной модели. Легко проверить, что выбор калибровок

$$\begin{aligned} \chi_1 &=: y = 0, \\ \chi_2 &=: \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \text{const}, \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

$$\det \|\{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}\| = 1 \quad (\text{Б.18})$$

позволяет зафиксировать множители Лагранжа u_1, u_2 в обобщенном гамильтониане

$$H_E = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - y(x_1 p_2 - x_2 p_1) + V(x_1^2 + x_2^2) + u(t)_1 p_y + u_2(x_1 p_2 - x_2 p_1),$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= y - \frac{x_1 p_2 - x_2 p_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{aligned}$$

и приводит к редуцированной системе, которая эквивалентна полученной выше (Б.14).

Недопустимая калибровка. Приведем пример калибровки, которая удовлетворяет условию невырожденности матрицы Фаддеева — Попова, однако не является допустимой. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv y = 0, \\ \chi_2 &\equiv \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) = 0, \quad A > 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Легко убедиться, что данная калибровка, несмотря на то, что с ее помощью также можно зафиксировать множители Лагранжа, недопустима, поскольку ее следствием является ограничение на значение физической величины. Действительно, в специальных координатах (Б.7) эта калибровка имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv Y = 0, \\ \chi_2 &\equiv \cos 2\bar{\Theta} - \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{R} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.20})$$

Из (Б.20) следует, что $0 < 2\bar{\Theta} \leq \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \leq 2\bar{\Theta} < 2\pi$, и поэтому на Γ^* выполняется необходимое условие Фаддеева — Попова

$$\det \|\{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}\| = -2 \sin 2\bar{\Theta} \Big|_{\Gamma^*} \neq 0, \quad (\text{Б.21})$$

однако немедленно следует ограничение на физическую переменную R :

$$R > 2A. \quad (\text{Б.22})$$

Заметим еще, что предложенный критерий допустимых калибровок (4.76) забраковывает данную калибровку (Б.19).

Приведем еще один пример калибровки:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= y = 0, \\ \chi_2 &= x_2 - \sqrt{x_1 \left(\frac{2}{3} x_1^2 - x_1 + 2 \right) + a} = 0, \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

для которой на поверхности калибровок и связей детерминант Фаддеева — Попова нигде не обращается в ноль, но которая также является недопустимой.

В. $SU(2)$ инвариантная механика Янга — Миллса в $0 + 1$ -мерном пространстве-времени

В качестве примера процедуры абелизации связей и построения редуцированной системы рассмотрим модель [48, 49], представляющую собой $SU(2)$ калибровочно-инвариантную теорию полей Янга — Миллса в $(0 + 1)$ -мерном пространстве-времени.

Лагранжиан модели задается выражением

$$L = \frac{1}{2} (D_t x)_i (D_t x)_i - \frac{1}{2} V(x^2) , \quad (\text{B.1})$$

где x_i и y_i — компоненты трехмерных векторов и D_t — ковариантная производная

$$(D_t x)_i := \dot{x}_i + g \epsilon_{ijk} y_j x_k . \quad (\text{B.2})$$

Заданная таким образом система соответствует размерной редукции неабелевой $SU(2)$ -теории в $(0 + 1)$ -мерии, причем переменные x_i являются реликтом полей “материи”. С помощью преобразования Лежандра

$$p_y^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} , \quad (\text{B.3})$$

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{x}_i + g \epsilon^{ijk} y_j x_k \quad (\text{B.4})$$

получаем канонический гамильтониан

$$H_C = \frac{1}{2} p_i p_i - \epsilon_{ijk} x_j p_k y_i + V(x^2) \quad (\text{B.5})$$

и три первичные связи $p_y^i = 0$, приводящие ко вторичным связям

$$\Phi_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k = 0 , \quad (\text{B.6})$$

образующим $SO(3)$ -алгебру:

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = \epsilon_{ijk} \Phi_k . \quad (\text{B.7})$$

Заметим, что вторичные связи зависимы в смысле Дирака: $x_i \Phi_i = 0$. Приступая к процедуре абелизации, выберем в качестве независимых связей следующие:

$$\Phi_1^{(0)} := x_2 p_3 - x_3 p_2 , \quad \Phi_2^{(0)} := x_3 p_1 - x_1 p_3 . \quad (\text{B.8})$$

Теперь вместо алгебры (B.7) имеем*

$$\{\Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}\} = -\frac{x_1}{x_3} \Phi_1^{(0)} - \frac{x_2}{x_3} \Phi_2^{(0)}. \quad (\text{B.9})$$

Согласно общей итерационной схеме построения матрицы абелизации (см. [26] или приложение А) в данном случае следует выполнить два этапа преобразований эквивалентности связей. Сначала исключим $\Phi_1^{(0)}$ из правой части равенства (B.9). Это достигается преобразованием

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &:= \Phi_1^{(0)}, \\ \Phi_2^{(1)} &:= \Phi_2^{(0)} + C \Phi_1^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

с функцией C , которая является решением следующего дифференциального уравнения в частных производных:

$$\{\Phi_1^{(0)}, C\} = -\frac{x_2}{x_3} C + \frac{x_1}{x_3}. \quad (\text{B.11})$$

Используя частное решение этого уравнения

$$C(x) = \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + x_3^2}, \quad (\text{B.12})$$

для новых связей получаем алгебру вида

$$\{\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}\} = -\frac{x_2}{x_3} \Phi_2^{(1)}. \quad (\text{B.13})$$

На втором шаге процедуры абелизации сделаем преобразование

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &:= \Phi_1^{(1)}, \\ \Phi_2^{(2)} &:= B \Phi_2^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

с функцией B , удовлетворяющей уравнению

$$\{\Phi_1^{(2)}, B\} = \frac{x_2}{x_3} B. \quad (\text{B.15})$$

Воспользовавшись одним из решений этого уравнения $B(x) = \frac{1}{x_3}$, приходим к искомому абелевым связям

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= x_2 p_3 - x_3 p_2, \\ \Phi_2^{(2)} &= \frac{1}{x_3} \left[(x_3 p_1 - x_1 p_3) + \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + x_3^2} (x_2 p_3 - x_3 p_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

*В дальнейшем сектор первичных связей не будем выписывать, поскольку они уже принадлежат центру алгебры, а процедура абелизации элементы центра оставляет без изменения.

Теперь опишем каноническое преобразование к специальным переменным, таким, что два новых импульса совпадают с абелизованными связями*:

$$p_\theta := \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^2 \mathbf{p}_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \quad p_\phi := x_2 p_3 - x_3 p_2. \quad (\text{B.17})$$

Легко проверить, что точечное преобразование от декартовых координат к сферическим

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ x_2 &= r \sin \phi \sin \theta, & \theta &= \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ x_3 &= r \cos \phi \sin \theta, & \phi &= \arctan \left(\frac{x_2}{x_3} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

как раз является преобразованием такого типа. Действительно, используя соответствующую производящую функцию

$$\begin{aligned} F[\mathbf{x}; \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_\theta, \mathbf{p}_\phi] &= \\ &= p_r \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + p_\theta \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + p_\phi \arctan \left(\frac{x_2}{x_3} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

получаем

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = p_r \cos \theta - p_\theta \frac{\sin \theta}{r}, \quad (\text{B.20})$$

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = p_r \sin \theta \sin \phi + p_\theta \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} + p_\phi \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, \quad (\text{B.21})$$

$$p_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3} = p_r \sin \theta \cos \phi + p_\theta \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} - p_\phi \frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \quad (\text{B.22})$$

и убеждаемся, что в новых переменных двумя независимыми связями в самом деле являются $p_\theta = 0$ и $p_\phi = 0$, в соответствии с равенством (B.17). Стоит заметить, что, стартуя с набора приводимых связей (B.6) и выполнив преобразование (B.18), можно получить следующее представление:

$$\Phi_1 = -p_\phi, \quad (\text{B.23})$$

$$\Phi_2 = -p_\theta \cos \phi + p_\phi \sin \phi \cot \theta, \quad (\text{B.24})$$

$$\Phi_3 = p_\theta \sin \phi + p_\phi \cos \phi \cot \theta, \quad (\text{B.25})$$

*Здесь мы вводим компактные обозначения для трехмерных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ и умножаем связи $\Phi_2^{(2)}$ на фактор $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, чтобы связи имели одинаковую размерность. Это умножение сохраняет абелев характер связей, поскольку $\{\Phi_1^{(2)}, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}\} = 0$.

которое приспособлено к процедуре абелизации. Матрица абелизации для приводимого набора связей имеет вид

$$D := \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -d_2 \sin \phi - d_3 \cos \phi, & d_1 \sin \phi, & d_1 \cos \phi \\ (d_2 \cos \phi - d_3 \sin \phi) \cot \theta, & -d_3 - d_1 \cos \phi \cot \theta, & d_2 + d_1 \sin \phi \cot \theta \\ \cot \theta, & \sin \phi, & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

с произвольными $\mathbf{d}$ и $d := d_1 \cot \theta + d_2 \sin \phi + d_3 \cos \phi$. Этот пример демонстрирует две характерные черты процедуры абелизации:

i) нет необходимости работать с неприводимым набором связей, т.к. процедура абелизации автоматически приводит к неприводимому набору связей;

ii) в определенных специальных координатах задача решения дифференциальных уравнений переходит в алгебраическую задачу. В новых канонических переменных канонический гамильтониан (B.5) принимает вид

$$H_C = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) - p_\phi y_\phi - p_\theta y_\theta + V(r), \quad (\text{B.27})$$

с физическим импульсом $p_r = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$, и

$$\begin{aligned} y_\phi &:= y_1 + y_2 \sin \phi + y_3 \cos \phi \cot \theta, \\ y_\theta &:= y_2 \cos \phi - y_3 \sin \phi. \end{aligned}$$

В результате все нефизические переменные отделились от физических r и p_r , эволюция во времени которых однозначно определяется физическим гамильтонианом. Последний получается из канонического занулением p_ϕ и p_θ в выражении (B.27):

$$H_{\text{phys}} = \frac{1}{2} p_r^2 + V(r). \quad (\text{B.28})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лагранж Ж.** — Аналитическая механика. М.: Гостехиздат, 1950, т.1,2.
2. **Dirac P. A. M.** — Canad. J. Math., 1950, v.2, p.129; Canad. J. Math., 1951, v.3, p.1; Proc. Roy. Soc., 1958, v.A246, p.326.
3. **Bergmann P.G.** — Phys. Rev., 1949, v.75, p.680; **Anderson J.L., Bergmann P.G.** — Phys. Rev., 1951, v.83, p.1018; **Bergmann P.G., Goldberg J.** — Phys. Rev., 1955, v.98, p.531.
4. **Дирак П. А. М.** — Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
Коноплева В. П., Попов В. Н. — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
Sudarshan E. C. G., Mukunda N. — Classical Dynamics; A Modern Perspective New York: Wiley, 1974.
Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C. — Constrained Hamiltonian Systems. Accademia

- Nazionale dei Lincei, 1976.
- Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
- Sundermeyer K.** — Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics, 1982, v.169. Berlin: Springer-Verlag.
- Henneaux M.** — Phys. Rep., 1985, v.126, p.1.
- Нестеренко В. В., Червяков А. М.** — Сингулярные лагранжианы. Лекции для молодых ученых. Дубна, 1986.
- Разумов Ф. И., Соловьев Л. Д.** — Препринты ИФВЭ-86-212, 86-213, 86-214, 1986.
- Гитман Д. М., Тютин И. В.** — Каноническое квантование систем со связями. М.: Наука, 1986.
- Lusanna L.** — Riv. Nuovo Cimento., 1991, v.14, N3, p.1.
- Henneaux M., Teitelboim C.** — Quantization of Gauge Systems. Princeton University, Princeton, NJ, 1992.
- Прохоров Л.В., Шабанов С.В.** — Гамильтонова механика калибровочных систем. ОИЯИ, Б1-2-93-312, Дубна, 1993.
5. **Weyl H.** — Z. f. Phys., 1929, v.56, p.330-346.
 6. **Лихнерович А.** — Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960.
 7. **Дубровин Б.А. Новиков П.С. Фоменко А.Т.** — Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
 8. **Yang C.N., Mills R.L.** — Phys. Rev., 1954, v.96, p.191. 7.
 9. **Герц Г.** — Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: ГТТИ, 1959.
 10. **Полак Л.С.** — Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960.
 11. **Dirac P.A.M.** — Phys. Rev., 1959, v.114, p. 924.
 12. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys.Lett. B, 1967, v.25, p.30.
 13. **Gribov V.N.** — Nucl. Phys. B, 1978, v.139, p.1.
 14. **Singer I.M.** — Commun. Math. Phys., 1978, v.60, p.7.
 15. **Соловьев М.А.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.415; ТМФ, 1989, т.78, с.163.
 16. **Арнольд В.И.** — Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
 17. **Олвер П.** — Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
 18. **Овсянников Л. В.** — Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
 19. **Ибрагимов Н. Х.** — Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
 20. **Фоменко А.Т.** — Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1988.
 21. **Помаре Ж.** — Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
 22. **Shanmugadhasan S.** — J. Math. Phys., 1973, v.14, p.677.
 23. **Леви-Чивита Т., Амальди У.** — Курс теоретической механики. М.: ИЛ, 1951, т.2, ч.2.
 24. **Картан Э.** — Интегральные инварианты. М., 1940.
 25. **Forsyth A. R.** — The Theory of Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1953, v.5.
 26. **Gogilidze S.A., Khvedelidze A.M., Pervushin V.N.** — J. Math. Phys., 1996, v.37, p.1760.
 27. **Gogilidze S.A., Khvedelidze A.M., Pervushin V.N.** — Phys. Rev. D, 1996, v.53, p.2160.
 28. **Abraham R., Marsden J.E.** — Foundations of Mechanics, Addison-Wesley, 1978.
 29. **Thirring W.** — A Course in Mathematical Physics I,II. Springer-Verlag, New-York, 1978.

30. **Годбийон К.** — Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
31. **Marsden J.S, Ratiu T.S** — Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer-Verlag, New-York, 1994.
32. **Фаддеев Л. Д.** — ТМФ, 1969, т.1, с.3.
33. **Lichnerowicz A.** — C.R. Acad. Sci., Paris, 1975, v.A 280, p.523.
34. **Gotay M., Nester J., Hinds G.** — J. Math. Phys., 1978 v, 19, p.2388.
35. **Marmo G., Mukunda N., Samuel J.** — Riv. Nuovo Cim., 1983, v.6, p.2.
36. **Павлов В. П.** — ТМФ, 1995, т.104, с.304; т.105, с.429.
37. **Уиттекер Е.Т.** — Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
38. **Rund H.** — The Hamilton – Jacobi Theory in Calculus of Variational. D. van. Nostrad Comp., 1966.
39. **Нетер Э.** — В сб.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959, с.611.
40. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — Непрерывные симметрии в теории поля. Лекции для молодых ученых. Дубна, 1978.
41. **Эйзенхарт Л. П.** — Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ., 1947.
42. **Schouten J. A., v. d. Kulk W.** — Pfaff's Problem and its Generalizations. Oxford: Clarendon Press, 1949.
43. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.** — Nucl. Phys., 1984, v. B234, 106.
44. **Gogilidze S.A., Sanadze V.V., Surovtsev Yu.S., Tkebuchava F.G.** — Int. J. of Mod. Phys., 1989, v.A4, p.4165.
45. **Гогилидзе С.А., Санадзе В.В., Суровцев Ю.С., Ткебучава Ф.Г.** — ТМФ, 1995, т.102, с.56; ТМФ, 1995, т.102, с.66.
46. **Прохоров Л. В.** — ЭЧАЯ, 1996, т.27, 5, с.1399.
47. **Christ N.H., Lee T.L.** — Phys. Rev., 1980, v.D22, p.389.
48. **Прохоров Л.В.** — ЯФ, 1982, т.35, с.229.
49. **Прохоров Л.В. Шабанов С.В.** — УФН, 1991, т.161, с.13.
50. **Татаринов Я.В.** — Лекции по классической динамике. М.: МГУ, 1984.

УДК 517.9; 519.6; 539.12

ОБОБЩЕННЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВО-ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ*

*И.В.Пузынин, И.В.Амирханов, Е.В.Земляная,
В.Н.Первушин, Т.П.Пузынина, Т.А.Стриж*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В.Д.Лахно

Институт математических проблем биологии РАН, Пущино

В обзоре дано систематическое описание вычислительного метода для исследования нелинейных задач, возникающих в математических моделях физики. Единой основой для разработки вычислительных схем служит обобщение непрерывного аналога метода Ньютона, которое представляет собой качественно новое развитие ньютоновского эволюционного процесса на основе объединения идей методов теории возмущений и эволюции по параметрам. Представлены результаты численного исследования квантово-полевых моделей полярона, сольватированного электрона, бинуклона и потенциальных моделей КХД для наиболее распространенных потенциалов.

The systematic description of a computational method for studying the nonlinear problems arisen in mathematical models of physics is presented. A unified basis for working out the computational schemes is a generalization of the continuous analogue of Newton's method which represents a qualitatively new development of the Newtonian evolution process basing on integration of the conceptions of the methods in perturbation and evolution theory on parameters. Results of numerical research in quantum field models of polaron, solvated electron, binucleon as well as QCD potential models for the some wide-spread potentials are given.

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени публикации первого обзора в ЭЧАЯ о применении непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) для численного решения нелинейных уравнений в математических моделях физики [1] прошло двадцать пять лет. В дальнейшем, наряду с теоретическими обоснованиями, для НАМН были

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 97-01-01040).

найжены новые приложения в задачах физики ускорителей и в обратной задаче теории рассеяния [2]. Кроме того, за это время усилиями в основном группы сотрудников ОИЯИ этот метод превратился в мощный инструмент построения эффективных вычислительных схем для решения разнообразных нелинейных задач, возникающих в теоретической физике. Сейчас можно с уверенностью утверждать, что разработан качественно новый, по сравнению с НАМН, подход к созданию алгоритмов для численного анализа сложных многопараметрических нелинейных моделей физики.

Создание этого подхода явилось, во многом, продуктом опыта решения разнообразных практических задач. Поэтому в предложенном методе, наряду с идеями НАМН, нашли отражение наиболее привлекательные стороны некоторых известных методов, широко применяющихся при решении задач физики. Это схемы теории возмущений [3], метод продолжения по параметру [4], метод дифференцирования по параметру [5], который в задачах ядерной физики известен как метод эволюции по константе связи [6].

В разработанных итерационных схемах в определенном смысле решена задача выбора начальных приближений и упрощено решение линейной задачи относительно итерационных поправок. Более того, возможно построение итерационного процесса без обращения линейного оператора в этой задаче. Как результат, развитые вычислительные схемы обладают свойствами таких известных методов, как метод расщепления [7], многосеточные методы [8], некоторые методы регуляризации [9]. Поэтому разработанный подход отвечает современным тенденциям развития компьютерной архитектуры и технологии программирования вычислительных процессов [10].

В спектральных задачах квантовой механики обобщение НАМН может служить единой теоретической основой описания ряда известных методов, таких, как метод обратных итераций, метод обратных итераций со сдвигом и с рэлеевским частным [11]. Особенности реализации вычислительных схем в этих задачах отражены в обзорах [12, 13].

Наши работы в области развития обобщенного НАМН инициировали исследования по оптимизации сходимости ньютоновских итерационных схем [14, 15], а также схем продолжения по параметру [16]. В данном обзоре представлены результаты численного исследования нелинейных моделей теории полярона и потенциальных моделей КХД, относящихся к различным разделам теоретической физики, но выполненных с помощью вычислительных схем, основанных на обобщенном НАМН.

Обзор состоит из пяти разделов. В разд.2 дана единообразная математическая постановка задач, к решению которых приводят исследования ряда моделей квантовой теории поля. Аргументируется выбор метода Ньютона и его обобщения для решения этой задачи, описаны ньютоновские итерационные схемы и даны оценки их точности. Приведены итерационные схемы на основе модификации НАМН, эффективные при использовании на современ-

ных векторно-параллельных вычислительных системах. Даны ньютоновские итерационные схемы для решения интегрального уравнения Шредингера и нелинейных сингулярных краевых задач с параметрической зависимостью от асимптотики решений.

В разд.3 представлены обзор работ и результаты, полученные при изучении моделей полярона, бинуклона в пределе сильной связи, автолокализованных электронных состояний в жидкости.

В разд.4 рассмотрены постановки и методы численного анализа граничных нелинейных задач в рамках уравнений Швингера — Дайсона и Бете — Солпитера для ряда наиболее распространенных потенциалов. Проведено сравнение полученных результатов с известными теоретическими и экспериментальными данными других авторов.

Коллектив авторов настоящего обзора состоит из специалистов в области численного анализа нелинейных моделей физики и физиков-теоретиков, являющихся активными пользователями разработанного метода. Мы надеемся, что представленный материал даст возможность заинтересованному читателю познакомиться с основными идеями обобщенного НАМН и методикой численного анализа некоторых нелинейных моделей физики и расширить область его применимости.

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО НАМН

Ряд математических моделей квантовой теории поля приводит к новым постановкам граничных задач для нелинейных дифференциальных, интегродифференциальных и интегральных уравнений. Оригинальность постановок заключается в комбинации нелинейных граничных и спектральных задач, что приводит к системам соответствующих уравнений. Общими свойствами таких систем являются их сингулярность и многопараметричность относительно параметров модели и спектральных параметров. Рассматриваемые задачи можно свести к единообразной постановке в виде уравнения

$$\varphi(\vec{a}, \vec{\lambda}, y) = 0, \quad (1)$$

где y — элемент из некоторой области B -пространства Y , $\vec{\lambda} \in R_m, \vec{a} \in R_l$ — векторы из евклидовых пространств соответствующих размерностей. Нелинейная функция φ при заданном векторе $\vec{a}$ переводит элементы $z = \{\vec{\lambda}, y\}$ из области пространства $R_m \times Y$ в пространство $R_m \times U$, где U является B -пространством, причем $U \supseteq Y$. Предполагается, что для каждого заданного вектора $\vec{a}$ уравнение (1) имеет счетное множество решений $\{y_n^*\}, n = 0, 1, 2, \dots$, причем каждому решению y_n^* соответствует вектор собственных

значений $\vec{\lambda}_n^*$. Решение $z_n^* = \{\vec{\lambda}_n^*, y_n^*\}$ уравнения (1) является функцией вектора параметров $\vec{a}$.

Отметим также следующие особенности рассматриваемых задач.

1. Как правило, имеется определенная информация о существовании и качественном поведении искомых решений. Эта информация может быть получена из физических свойств изучаемых процессов, рассмотрения упрощенных моделей, особенно в асимптотических областях изменения параметров.
2. В задачах, представляющих приближения к более сложным многомерным, а также при переходе от бесконечных областей изменения независимых переменных к конечным, возникают проблемы оценки точности применяемых аппроксимаций. Во многих случаях подобные оценки можно получить лишь численно, проводя расчеты при некоторых значениях параметров аппроксимации.

Таким образом, в постановке (1) вектор "внешних" параметров $\vec{a}$ расширяется и помимо "физических" параметров модели содержит также параметры аппроксимации задачи, в том числе и вычислительной схемы. Численное исследование модели обычно сводится к проведению массовых расчетов в широкой области изменения этих параметров, позволяющих одновременно изучать и свойства рассматриваемых моделей, то есть поведение решений в зависимости от "физических" параметров, и точность получаемых результатов в зависимости от параметров аппроксимации исходных задач.

В дальнейшем там, где это несущественно, мы будем опускать зависимость функции φ от параметров $\vec{a}$ и $\vec{\lambda}$.

2.1. Ньютоновские итерационные схемы. В работе [17], где впервые был предложен НАМН, рассматривается группа одношаговых итерационных методов решения нелинейного уравнения в B -пространстве

$$\varphi(z) = 0,$$

в которых на каждом шаге с номером k итерационного процесса поправка Δz_k к известному приближению z_k искомого решения вычисляется по формуле

$$\Delta z_k = \psi(z_k),$$

$$z_{k+1} = z_k + \Delta z_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

z_0 — заданный элемент.

Способ построения функции $\psi(z)$ определяется в зависимости от используемого итерационного метода. В частности, для метода Ньютона

$$\psi(z) = -\varphi'(z)^{-1}\varphi(z),$$

где $\varphi'(z)$ – линейный оператор, производная Фреше функции $\varphi(z)$. Для каждого итерационного процесса указанного вида можно построить его непрерывный аналог путем введения вместо дискретной переменной k ($k = 0, 1, 2, \dots$) непрерывного параметра t ($0 \leq t < \infty$). Предполагая непрерывную зависимость $z = z(t)$ и вводя вместо приращения Δz_k производную $\frac{d}{dt}z(t)$, мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}z(t) = \psi(z(t)), z(0) = z_0. \quad (2)$$

В результате нахождение решения уравнения (1) осуществляется путем решения задачи Коши (2) на полуоси $0 \leq t < \infty$. В цитируемой работе [17] доказан ряд утверждений о сходимости непрерывных аналогов итерационных методов при $t \rightarrow \infty$ к изолированному решению z^* уравнения (1).

Для НАМН такое доказательство основано на преобразовании уравнения (2) к виду

$$\frac{d}{dt}\varphi(z(t)) = -\varphi(z(t)), z(0) = z_0, \quad (3)$$

откуда следует существование интеграла

$$\varphi(z(t)) = e^{-t}\varphi(z_0).$$

При условии гладкости функции $\varphi(z)$ и существования ограниченного оператора $\varphi'(z)^{-1}$ в окрестности начального приближения z_0 доказано существование в этой окрестности корня z^* уравнения (1) и сходимость траектории $z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ к этому корню.

Для приближенного решения задачи Коши (2) в работе [17] предлагается использовать подходящие численные методы, ожидая их устойчивости при асимптотической устойчивости $z = z(t)$.

В обзоре [1] описан простейший метод приближенного интегрирования задачи (2) – метод Эйлера для НАМН. Этот метод на дискретной сетке $\{t_k, k = 0, 1, 2, \dots; t_{k+1} - t_k = \tau_k\}$ приводит к последовательности линейных задач

$$\begin{aligned} \varphi'(z_k)v_k &= -\varphi(z_k), \\ z_{k+1} &= z_k + \tau_k v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где z_0 – заданный элемент. При $\tau_k \equiv 1$ получается последовательность метода Ньютона.

Сходимость метода Эйлера доказана [1] на конечном отрезке $0 \leq t \leq T$ при $\tau_k \rightarrow 0$. Однако для практической реализации трактовка параметра τ_k как шага интегрирования не представляет интереса. Действительно, для того, чтобы $z = z(T)$ мало отличался от искомого решения z^* , необходимо выбрать $t = T$ достаточно большим. В то же время для более точного вычисления методом Эйлера значения $z = z(T)$ необходимо задавать τ_k достаточно малыми.

Данные требования являются противоречивыми, поскольку нас не интересуют все приближенные значения $z_k \approx z(t_k)$, а лишь необходим элемент $z(T)$.

Чтобы найти представление параметра τ_k , соответствующее требованиям минимальности вычислительных затрат при достижении с требуемой точностью решения z^* , вспомним, что метод Ньютона, обладая квадратичной сходимостью в близкой окрестности решения, обеспечивает минимальность невязки для линейной части $\varphi(z)$ [18].

Обобщая это свойство, будем рассматривать τ_k как итерационный параметр в итерациях (4), оптимальный выбор которого дает минимум функции перехода $\psi_{k+1}(\tau)$ в оценке [19]

$$\|\varphi(z_{k+1})\| \leq \psi_{k+1}(\tau_k) \|\varphi(z_k)\|.$$

Если предположить, что в окрестности искомого решения

$$\|\varphi'(z)^{-1}\| \leq B, \quad \|\varphi''(z)\| \leq M, \quad (5)$$

то функция перехода определяется как

$$\psi_{k+1}(\tau) = 1 - \tau + \frac{\tau^2}{2} MB^2 \|\varphi(z_k)\|, \quad 0 < \tau \leq 1.$$

В работе [19] показано, что алгоритм определения итерационного параметра

$$\tau_k = \|\varphi'(z_k)\|^{-1} \|\varphi(z_{k-1})\| \tau_{k-1}, \quad 0 < \tau_0 \leq \tau_k \leq 1 \quad (6)$$

обеспечивает при удачном выборе τ_0 вычисление последовательности $\{\tau_k\}$, близкой к оптимальной, и в случае сходимости переход итераций (4) в метод Ньютона. Следует отметить, что алгоритм (6) впервые был предложен в работе [20] и успешно применен к решению многих нелинейных задач [21].

В работе [19] исследована локальная сходимость итераций (4) с итерационным параметром (6).

Теорема 1 [19]. Пусть в сфере

$$\bar{D}_1 = \{\|z - z_0\| < \frac{B}{1 - q_1} \|\varphi(z_0)\|\}$$

выполнены условия (5) и

$$q_0 = \frac{\tau_0}{2} MB^2 \|\varphi(z_0)\| < 1.$$

Пусть существует целое положительное число K такое, что

$$1) \quad 1 > \tau_k = \frac{\|\varphi(z_{k-1})\|}{\|\varphi(z_k)\|} \tau_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, K - 1.$$

2) $\tau_{k+j} = 1, \quad j = 0, 1, \dots$

3) $\tau_0 > q_1^K, q_1 = \psi_1(\tau_0)$.

Тогда уравнение (1) имеет решение $z^* \in \bar{D}_1$, к которому сходятся итерации (4), начиная с z_0 . Скорость сходимости определяется неравенством

$$\|z^* - z_k\| < Bq_1^{2^{(k-K)}-1+K} \|\varphi(z_0)\|, \quad k > K.$$

В этой работе также показано, что область сходимости итераций на основе НАМН при таком выборе τ_k шире, чем у классического метода Ньютона.

В силу того, что НАМН обеспечивает сходимость к решению уравнения (1) только в окрестности локального решения [1], весьма важной является проблема построения начальных приближений, которая, вообще говоря, не алгоритмизуема и решается по-разному в зависимости от особенностей конкретной задачи.

В частности, при численном анализе большинства моделей теоретической физики обычно имеется априорная информация о характере решений, которая может учитываться при выборе начальных приближений.

В программном комплексе SLIPH4 [22], реализующем решение задачи Штурма — Лиувилля, для построения начальных приближений эффективно используется метод, предложенный в работе [23]. Он основан на алгоритме вычисления корней полинома методом Ньютона с удалением вычисленного корня [24]. В этой же работе, а также в [25] для исключения сходимости к уже найденному решению на каждой итерации производится дополнительная ортогонализация вычисляемого приближенного решения.

В работе [26] выполнено численное исследование некоторых параметрически зависимых задач в рамках различных физических моделей на основе сочетания ньютоновских итераций с методом продолжения [4]. Вычислительный процесс при этом организуется таким образом, что известное для некоторого набора параметров решение используется в качестве начального приближения при решении задачи с новыми значениями параметров. При этом малое изменение параметров и непрерывная зависимость решения задачи от них гарантируют сходимость ньютоновской итерационной схемы.

Следует отметить, что трудности при практическом применении НАМН могут быть вызваны близостью к нулю $\|\varphi'(z)\|$. Они связаны с тем, что система (4) в этом случае становится некорректной. Некоторые варианты регуляризации итерационного процесса (4) рассматриваются в работе [14].

В работе [27] предложена итерационная процедура, основанная на комбинации ньютоновских итераций и метода установления [28], преимущество которой перед схемой (4) состоит в более широкой применимости для случаев, близких к вырожденным ($\|\varphi'(z)\| \rightarrow 0$).

Оценки точности ньютоновских итерационных схем. Остановимся на вопросе точности вычислительных схем на основе НАМН. Как уже отмечалось,

при практической реализации ньютоновских итерационных схем уравнение (1) заменяется аппроксимирующим его уравнением в сеточном пространстве

$$\varphi_h(z_h) = 0. \quad (7)$$

Пусть z_h^* – точное решение уравнения (7). Тогда в сеточной норме справедлива следующая оценка:

$$\|z^* - z_h^k\| \leq \|z^* - z_h^*\| + \|z_h^* - z_h^k\|, \quad (8)$$

где z_h^k – приближение к решению, полученное после k -й итерации при выполнении условия

$$\|\varphi_h(z_h^k)\| \leq \varepsilon, \quad (9)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$.

Поскольку

$$\|z^* - z_h^*\| \leq O(h^p) \quad [29],$$

$$\|z_h^* - z_h^k\| \leq B\|\varphi_h(z_h^k)\| \quad [17],$$

то при $B\|\varphi_h(z_h^k)\| \ll O(h^p)$, что выполняется при задании достаточно малого ε в соотношении (9), точность полученного приближенного решения близка к теоретической оценке выбранного метода разностной аппроксимации уравнения (1):

$$\|z^* - z_h^k\| \sim O(h^p). \quad (10)$$

Ее можно детально исследовать на последовательности сгущающихся сеток. При этом возможно уточнение разностного решения с помощью экстраполяции Паде или Ричардсона (см., например, [8]).

В случае, если исходная задача является сингулярной, в оценку точности добавляется слагаемое, характеризующее ошибку аппроксимации сингулярной задачи соответствующей регулярной задачей [30]. Оценить эту погрешность можно путем проведения последовательных расчетов на расширяющихся интервалах. При этом добиваются такого соотношения параметров вычислительной схемы, чтобы основной вклад составляла погрешность разностного решения, т.е. чтобы выполнялось соотношение (10).

Отметим, что, согласно [31], классические спектральные задачи для линейных операторов могут трактоваться как нелинейные функциональные уравнения. Для этого задача на собственные значения вида

$$\mathcal{D}y - \lambda y = 0$$

доопределяется условием нормировки собственного элемента

$$\Gamma(y) = 0,$$

где Γ – нормировочный функционал, например,

$$(y, y) - 1 = 0.$$

В такой постановке задача на собственные значения представляет собой нелинейное функциональное уравнение (1) относительно неизвестного $z = \{\lambda, y\}$. Таким образом, НАМН может использоваться и при решении задач на собственные значения [21].

Обобщение НАМН. В настоящее время разработаны и широко используются различные модификации НАМН, увеличивающие его эффективность для конкретных классов задач и расширяющие область его применения.

Одной из таких модификаций, используемой в целом ряде работ, является обобщение НАМН, согласно которому параметризация уравнения (1) относительно дополнительного параметра t осуществляется с явной зависимостью φ от t . При этом непрерывный параметр t вводится в уравнение (1) так, чтобы при $t = 0$ получалось простое уравнение

$$\varphi(0, z(0)) \equiv \varphi_0(z_0) = 0,$$

которое можно легко решить, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, z(t)) = \varphi(z).$$

Таким образом, для нелинейного функционального уравнения (1) строится эволюционное уравнение по непрерывному параметру t , подобное уравнению (3):

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, z(t)) = -\varphi(t, z(t)), \quad 0 \leq t < \infty \quad (11)$$

с начальным условием $z(0) = z_0$.

Из уравнения (11), обозначив $A(t) = \varphi'_z(t, z(t))$, получаем

$$\frac{dz}{dt} = -A(t)^{-1} [\varphi(t, z(t)) + \varphi'_t(t, z(t))]. \quad (12)$$

Поскольку интеграл уравнения (11) есть $\varphi(t, z(t)) = e^{-t} \varphi(0, z_0)$, то $\|\varphi(t, z(t))\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и следует ожидать асимптотически устойчивой сходимости $z(t)$ к искомому решению z^* .

При аппроксимации по схеме Эйлера уравнения (12) производится дискретизация непрерывного параметра $t : (t_0, t_1, \dots, t_k)$; $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k = \tau_k$ и получается последовательность итераций

$$z_{k+1} = z_k + \tau_k V_k, \quad (13)$$

где

$$V_k = -B_k [\varphi(t_k, z_k) + \varphi'_t(t_k, z_k)], \quad B_k = A(t_k)^{-1}. \quad (14)$$

Вычисляя для каждого значения t_k итерационную поправку V_k и шаг τ_k , получаем новое приближение z_{k+1} к решению z^* . Итерационный процесс (13), (14) должен продолжаться до выполнения неравенства

$$\delta_k = \|\varphi(t_k, z_k)\| < \epsilon. \quad (15)$$

Один из вариантов параметризации на основе обобщения НАМН можно выполнить с использованием скалярной функции $g(t)$ [32], так называемой функции включения возмущения, такой, что $g(0) = g(\infty) - 1 = g'(\infty) = 0$, и представления функции $\varphi(t, z(t))$ в виде суммы

$$\varphi(t, z(t)) = \varphi_0(z(t)) + g(t)[\varphi(z(t)) - \varphi_0(z(t))]. \quad (16)$$

Считаем, что для уравнения $\varphi_0(z) = 0$ легко найти решение, или оно известно, а оператор $\varphi'_0(z)$ легко обратим. Такой вариант может рассматриваться как комбинация НАМН и метода вариации параметра [5].

В работе [33] функция $g(t)$ вычисляется в итерационном процессе через итерационную поправку, в работах [34—39] функциональная зависимость $g(t)$ задается явно.

Условия сходимости ньютоновского эволюционного процесса (11), (16) при $g(t) = 1 - \exp(-t)$ рассматриваются в работе [32].

Теорема 2 [32]. Пусть в сфере

$$D: \|z - z_0\| \leq \frac{B}{1-q} \|\varphi(z_0)\|, \quad 0 < q < 1$$

функциональное уравнение (1) представляется как

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) = 0,$$

параметрическая зависимость имеет вид

$$\varphi(t, z(t)) = \varphi_0(z(t)) + g(t)\varphi_1(z(t)),$$

существуют производные Фреше $\varphi'_0(z)$, $\varphi'_1(z)$ и линейные производные $\varphi''_0(z)$, $\varphi''_1(z)$, причем линейный оператор $\varphi'_0(z)$ обратимый, и имеют место неравенства

$$\|\varphi'_0(z)^{-1}\| \leq B, \quad \|\varphi'_1(z)^{-1}\| \leq C, \quad q = 2BC < 1.$$

Пусть также операторы φ''_0 и φ''_1 ограничены в окрестности каждой точки из сферы D . Тогда выполняется следующее:

1) Уравнение (11) имеет решение $z = z(t)$ для всех t из $[0, \infty)$, причем его значения лежат в D .

2) Существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z^*$, служащий корнем уравнения (1).

Теорема 3 [32]. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение z^* в некоторой открытой области D пространства X , и в этой области выполнены все условия теоремы 2. Тогда существует сфера $S : \|z - z_0\| \leq \epsilon$, принадлежащая области D , такая, что для любого $z_0 \in S$ дифференциальное уравнение (11) имеет единственное решение $z(t)$ для всех $t \in [0, \infty)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z^*$.

Одно из преимуществ такого подхода заключается в конструктивном решении вопроса о выборе начального приближения, в качестве которого может быть использовано известное приближенное решение уравнения

$$\varphi_0(z) = 0.$$

Другая возможность применения рассматриваемого подхода состоит в построении модифицированных итерационных схем, где вместо обращения оператора $\varphi'(z)$ на каждой итерации происходит обращение производной специально выбранного оператора φ_0 , имеющего простую структуру. Вопросы сходимости таких схем также обсуждаются в работе [32].

В работах [35—39] параметризация указанного вида используется для разработки эффективных вычислительных схем повышенной точности.

В работах [34] представлены численные схемы на основе обобщения НАМН для решения интегродифференциальных уравнений, в которых интегральная часть уравнения рассматривается как возмущение и вводится через функцию включения.

Наличие интегрального оператора в задачах такого рода приводит к необходимости обращения аппроксимирующих его заполненных матриц высокого порядка на каждой итерации. Рассматриваемый подход позволяет избежать этой требующей значительных затрат компьютерных ресурсов операции и существенно упростить решение задачи.

Отметим, что, как показано в работе [32], реализация ньютоновского эволюционного процесса (12)—(14) приводит к процессам регуляризации ньютоновского типа, рассмотренным в работах [9, 40].

2.2. Ньютоновская итерационная схема с одновременным вычислением оператора, обратного к оператору производной нелинейной функции. Развитие векторно-параллельных вычислительных систем делает актуальной проблему разработки специальных алгоритмов и программ для эффективного использования возможностей этих систем. В этом разделе представлен модифицированный алгоритм на основе обобщенного НАМН, учитывающий эти возможности. В работе [41] разработан итерационный процесс, в котором обращение оператора производной нелинейной функции заменяется на каждой итерации на два умножения линейных операторов.

Идея такого подхода для нахождения обратных матриц в применении к методу вариации параметра была высказана в работах [42, 43]. Преимуществом его является отсутствие операции деления на протяжении всех вычислений. Этим исключаются и случаи деления на малое число, возможные при обращении плохо обусловленных матриц. Тем самым повышаются устойчивость и точность вычислений.

Тестовые расчеты, проведенные для ряда задач, подтвердили эффективность представленного алгоритма для векторно-параллельных систем, имеющих в ОИЯИ.

Описание модифицированного алгоритма. Будем рассматривать вместо уравнения (1) следующую систему функционально-операторных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0, \\ BA - I = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $A = \varphi'_z$, $B = A^{-1}$, I — единичный оператор.

Вводя непрерывный параметр t ($0 \leq t < \infty$) и переходя, согласно обобщенному НАМН, к системе эволюционных уравнений, получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t, z(t)) = -\varphi(t, z(t)), \\ \frac{d}{dt}[B(t)A(t) - I] = I - B(t)A(t). \end{cases} \quad (18)$$

После простых преобразований окончательно имеем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = -B(t)[\varphi(t, z(t)) + \varphi'_t(t, z(t))], \\ \frac{d}{dt}B(t) = [I - B(t)(A(t) + A'_t(t))]B(t). \end{cases} \quad (19)$$

Производя дискретизацию непрерывного параметра, на основе схемы Эйлера получаем формулы для вычисления $z_{k+1} = z(t_{k+1})$ и $B_{k+1} = B(t_{k+1})$, считая известными на каждом k -м шаге z_k и B_k :

$$\begin{cases} z_{k+1} = z_k + \tau_k V_k, \\ B_{k+1} = B_k + \tau_k W_k, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$V_k = -B_k[\varphi(t_k, z_k) + \varphi'_t(t_k, z_k)], \quad (21)$$

$$W_k = [I - B_k(A_k + (A_k)'_t)]B_k. \quad (22)$$

Таким образом, имея начальное приближение z_0 и B_0 , можно последовательно найти все приближения z_k и B_k .

Итерационный процесс продолжается до выполнения неравенства (15).

Особенностью вышеизложенного алгоритма является параллельное вычисление обратного оператора B_k в итерационном процессе, что открывает дополнительные возможности для распараллеливания вычислительного процесса.

С другой стороны, обращение производной нелинейного функционального оператора в рассматриваемой модификации заменяется перемножениями вспомогательных операторов, что приводит при программной реализации к соответствующим операциям с аппроксимирующими их матрицами. Так как в скалярном варианте реализации одно обращение матрицы по времени близко ко времени умножения двух матриц [44], то время счета по модифицированной схеме должно быть приблизительно в два раза больше по сравнению с обычной схемой.

Однако с точки зрения векторизации операций [45] умножение матриц предпочтительнее обращения матрицы, и модифицированный алгоритм дает выигрыш по времени на векторной вычислительной системе. Естественно, что этот выигрыш будет получен за счет дополнительных затрат на объем памяти, необходимый для хранения дополнительных матриц.

Вопросы сходимости представленной итерационной схемы обсуждаются в работе [46].

Итерационная схема решения задачи на собственные значения для линейного интегрального уравнения. Рассмотрим в качестве иллюстрации итерационную схему для решения следующего уравнения:

$$\Phi(z) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \Gamma(z) \end{pmatrix} = 0, \quad (23)$$

где

$$\Phi(z) \equiv y(x)(Q(x) - \lambda) + \alpha \int_0^R K(x, x')y(x')dx' = 0, \quad (24)$$

$K(x, x')$ известно, $z = (y(x), \lambda)$, условие нормировки имеет вид

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^R y^2(x)dx - N = 0. \quad (25)$$

Введем параметр $t(0 \leq t < \infty)$ и функцию "включения" $g(t) = 1 - e^{-t}$. Представим $\Phi(t, z)$ в виде

$$\Phi(t, z) = \Phi_0(z) + g(t)(\Phi(z) - \Phi_0(z)), \quad (26)$$

где $\Phi_0(z) = 0$ – некоторое простое функциональное уравнение с известным решением z_0 , используемым как начальное приближение.

Учитывая, что $z(t) = (y(x, t), \lambda(t))$, и переходя к эволюционному уравнению, получим для (26):

$$\begin{aligned} & [(\Phi_0(z(t)))'_y + g(t)[(\Phi(z(t)))'_y - (\Phi_0(z(t)))'_y]]y'_t = \\ & = -[\Phi_0(z(t)) + (g(t) + g'_t(t))(\Phi(z(t)) - \Phi_0(z(t)))] - \\ & - [(\Phi_0(z(t)))'_\lambda + g(t)((\Phi(z(t)))'_\lambda - (\Phi_0(z(t)))'_\lambda)]\lambda'_t(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Применив подход, описанный выше, обозначив $y_k(x) = y(x, t_k)$, $g_k = g(t_k)$, $g'_k = g'(t_k)$, $v_k = y'_t(x, t_k)$, $\mu_k = \lambda'_t(t_k)$, $A_k = \Phi'_y$, $B_k = A_k^{-1}$, для каждого t_k с учетом (21), (22) получим

$$v_k = -B_k[G_k + \mu_k F_k], \quad (28)$$

$$W_k = [I - B_k(A_k + A'_{k_t})]B_k, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(v_k(x)) &= \Phi'_{0y}(z_k)v_k(x) + g_k[(Q(x) - \lambda_k)v_k(x) + \\ & + \alpha \int_0^R K(x, x')v_k(x')dx' - \Phi'_{0y}(z_k)v_k(x)], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} A'_{k_t}(v_k(x)) &= (\Phi'_{0y}(z_k))'_t v_k(x) + g'_k[(Q(x) - \lambda_k)v_k(x) + \alpha \int_0^R K(x, x')v_k(x')dx' - \\ & - \Phi'_{0y}(z_k)v_k(x)] - g_k v_k(x)[\mu_k + (\Phi'_{0y}(z_k))'_t], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} G_k &= \Phi_0(z_k) + (g_k + g'_k)[(Q(x) - \lambda_k)y_k(x) + \\ & + \alpha \int_0^R K(x, x')y_k(x')dx' - \Phi_0(z_k)], \end{aligned} \quad (32)$$

$$F_k = \Phi'_{0\lambda}(z_k) - g_k(1 + \Phi'_{0\lambda}(z_k)). \quad (33)$$

Итерационная поправка v_k вычисляется следующим образом:

$$v_k = v_k^{(1)} + \mu_k v_k^{(2)}, \quad (34)$$

где

$$v_k^{(1)} = -B_k G_k, \quad v_k^{(2)} = -B_k F_k. \quad (35)$$

Формула для вычисления μ_k выводится из условия нормировки (25) и имеет вид

$$\mu_k = \frac{N - \int_0^R y_k(x)(y_k(x) - 2v_k^{(1)}(x))dx}{\int_0^R 2y_k(x)v_k^{(2)}(x)dx}. \quad (36)$$

После вычисления итерационных поправок μ_k, v_k, W_k можно найти новое приближение по схеме Эйлера:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \tau_k v_k, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \tau_k \mu_k, \\ B_{k+1} &= B_k + \tau_k W_k. \end{aligned} \quad (37)$$

Численная аппроксимация уравнения (24) на дискретной сетке по $x : (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = R)$ приводит к системе n уравнений:

$$\Phi_i = y_i(Q_i - \lambda) + \alpha \sum_{j=1}^n K_{ij} y_j \xi_j, \quad (38)$$

где $y_i = y(x_i)$, $Q_i = Q(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, ξ_j — коэффициенты квадратурной формулы численного интегрирования. При этом операторы A, A'_t, F, G в формулах (28)—(33) аппроксимируются соответственно матрицами $\{a_{ij}\}, \{\tilde{a}_{ij}\}$ и векторами $(F_i), (G_i)$. В частности, значения матричных элементов a_{ij} и $\tilde{a}_{ij}$ на k -м шаге определяются следующим образом:

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + g_k[(Q_i - \lambda_k)\delta_{ij} + \alpha K_{ij}\xi_j - a_{ij}^{(0)}], \quad (39)$$

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ij}^{(0)} + g'_k[(Q_i - \lambda_k)\delta_{ij} + \alpha[K_{ij}\xi_j - \tilde{a}_{ij}^{(0)}] - g_k[\mu_k + \tilde{a}_{ij}^{(0)}]], \quad (40)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $a_{ij}^{(0)}$ и $\tilde{a}_{ij}^{(0)}$ — элементы матриц, аппроксимирующих на дискретной сетке по x операторы $\Phi'_{0y}(z_k)$ и $[\Phi'_{0y}(z_k)]'_t$ соответственно.

2.3. Ньютоновская итерационная схема с параметрической зависимостью от асимптотики решений. Моделирование нелинейных эффектов в полевых моделях приводит к сингулярным нелинейным граничным задачам, зависящим от "внешних" физических параметров модели. Зачастую учет их дополнительных связей позволяет уменьшить количество параметров задачи. Следует отметить, что при этом возникают дополнительные условия, которые, как правило, связывают интегральные характеристики искомых решений с их асимптотическим поведением. Поскольку при этом группа зависимых параметров может быть заменена асимптотическими соотношениями для некоторых

искомых решений, можно говорить о постановке оригинальной граничной задачи, в которой уравнения зависят не только от искомых решений, но и явно от граничных условий для них.

Разработанная в [47] итерационная схема для решения этого нового типа задач использует комбинацию НАМН и метода продолжения по параметру [4]. Она дает возможность исследовать зависимость поведения решения от параметров задачи, включая "внешние" параметры физической модели и "внутренние" параметры вычислительной схемы.

Рассмотрим систему N уравнений, записанную в векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\vec{y}) \equiv \vec{y}'' + \mathbf{F}(\vec{y}; \vec{y}'; x; \vec{c}) &= 0, \\ 0 \leq x < \infty, \end{aligned} \quad (41)$$

где штрих означает дифференцирование по x , $\vec{c}$ – параметры задачи (M -компонентный вектор), $\mathbf{F}$ – непрерывная вектор-функция своих аргументов $\vec{y}, \vec{y}', \vec{c}$, кроме того, как функция x может иметь сингулярность $1/x^p$, $p \leq 2$, при $x \rightarrow 0$.

Будем искать решение системы (41) (существование которого предполагается), удовлетворяющее асимптотическим условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_L(\vec{y}) \equiv \mathbf{G}_L(\vec{y}(x_L); \vec{y}'(x_L); x_L; \vec{c}) &= 0, x_L \rightarrow 0, \\ \mathbf{R}_R(\vec{y}) \equiv \mathbf{G}_R(\vec{y}(x_R); \vec{y}'(x_R); x_R; \vec{c}) &= 0, x_R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (42)$$

а также дополнительному функциональному условию

$$\mathbf{R}_A(\vec{y}) \equiv \mathbf{S}(\vec{y}; \vec{y}'; x, \vec{c}) = 0, \quad (43)$$

где $\mathbf{G}_L$ и $\mathbf{G}_R$ – N -компонентные вектор-функции, $\mathbf{S}$ – p -компонентная вектор-функция, причем $p \leq M$. Заметим, что при $p = M$, разрешая уравнение (43) относительно $\vec{c}$ (если это возможно) и подставляя в (41), можно полностью исключить параметры задачи. Если $p < M$, то всегда остаются свободные параметры. Далее, не нарушая общности, предположим, что $p = M$.

Таким образом, решая краевую задачу (41), (42) с учетом дополнительного условия (43), нужно найти неизвестные величины $\{\vec{y}(x), \vec{c}\}$. При численном решении сингулярной граничной задачи (41)–(43) на полуоси ($0 \leq x < \infty$) необходимо определить соответствующие граничные условия на конечном интервале ($0 \leq x \leq x_R$). При этом возникает дополнительная проблема, связанная с переносом асимптотических условий для искомых решений в конечные точки ($x = x_L, x = x_R$) и оценкой точности такого приближения. В общем случае такие оценки можно выполнить только численно,

используя расчеты для последовательности значений параметров x_L , x_R . Предположим, что граничные условия (42) для конечных значений $x_L = 0$ и $x_R < \infty$ достаточно точно учитывают асимптотические особенности искомых решений. Для решения задачи (41)–(43) на конечном интервале ($0 \leq x \leq x_R$) применим непрерывный аналог метода Ньютона. Ньютоновские итерации для этой задачи заключаются в решении на каждом шаге с номером k линейной задачи

$$\vec{v}_k'' + \mathbf{F}'_{\vec{y}} \vec{v}_k' + \mathbf{F}'_{\vec{y}} \vec{v}_k = -\mathbf{R}(\vec{y}) - \vec{\mu}_k^T \mathbf{F}'_{\vec{c}} \quad (44)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_{L\vec{y}} \vec{v}_k'(0) + \mathbf{G}'_{L\vec{y}} \vec{v}_k(0) &= -\mathbf{R}_L(\vec{y}) - \vec{\mu}_k^T \mathbf{G}'_{L\vec{c}}, \\ \mathbf{G}'_{R\vec{y}} \vec{v}_k'(x_R) + \mathbf{G}'_{R\vec{y}} \vec{v}_k(x_R) &= -\mathbf{R}_R(\vec{y}) - \vec{\mu}_k^T \mathbf{G}'_{R\vec{c}} \end{aligned} \quad (45)$$

и дополнительным уравнением

$$\mathbf{S}'_{\vec{y}} \vec{v}_k' + \mathbf{S}'_{\vec{y}} \vec{v}_k = -\mathbf{R}_D(\vec{y}) - \vec{\mu}_k^T \mathbf{S}'_{\vec{c}} \quad (46)$$

относительно итерационной поправки $\vec{v}_k = \triangle \vec{y}_k, \vec{\mu}_k = \triangle \vec{c}_k$ к известному приближению $\{\vec{y}(x)_k, \vec{c}_k\}$ искомого решения. Решение системы (44) будем искать в виде

$$\vec{v}_k = \vec{v}_k^{(1)} + \vec{\mu}_k^T \vec{v}_k^{(2)}. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (44) и (45), получим

$$(\vec{v}_k^{(1)})'' + \mathbf{F}'_{\vec{y}} (\vec{v}_k^{(1)})' + \mathbf{F}'_{\vec{y}} \vec{v}_k^{(1)} = -\mathbf{R}(\vec{y}), \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_{L\vec{y}} (\vec{v}_k^{(1)}(0))' + \mathbf{G}'_{L\vec{y}} \vec{v}_k^{(1)}(0) &= -\mathbf{R}_L(\vec{y}), \\ \mathbf{G}'_{R\vec{y}} (\vec{v}_k^{(1)}(x_R))' + \mathbf{G}'_{R\vec{y}} \vec{v}_k^{(1)}(x_R) &= -\mathbf{R}_R(\vec{y}) \end{aligned} \quad (49)$$

и

$$(\vec{v}_k^{(2)})'' + \mathbf{F}'_{\vec{y}} (\vec{v}_k^{(2)})' + \mathbf{F}'_{\vec{y}} \vec{v}_k^{(2)} = -\mathbf{F}'_{\vec{c}}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_{L\vec{y}} (\vec{v}_k^{(2)}(0))' + \mathbf{G}'_{L\vec{y}} \vec{v}_k^{(2)}(0) &= -\mathbf{G}'_{L\vec{c}}, \\ \mathbf{G}'_{R\vec{y}} (\vec{v}_k^{(2)}(x_R))' + \mathbf{G}'_{R\vec{y}} \vec{v}_k^{(2)}(x_R) &= -\mathbf{G}'_{R\vec{c}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Для нахождения функций $\vec{v}_k^{(1)}$ и $\vec{v}_k^{(2)}$ решаем граничные задачи (48)–(49) и (50)–(51). Затем, подставляя (47) в (46), получаем систему уравнений для нахождения $\vec{\mu}_k$. Таким образом, на каждой итерации надо решать краевые задачи (48)–(49), (50)–(51) и систему алгебраических уравнений (46) для

определения $\vec{\mu}_k$. Переход к следующему приближению осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}\vec{y}_{k+1} &= \vec{y}_k + \tau_k \vec{v}_k, \\ \vec{c}_{k+1} &= \vec{c}_k + \tau_k \vec{\mu}_k,\end{aligned}\tag{52}$$

где τ_k — итерационный параметр, выбор которого может обеспечить оптимальные условия сходимости итераций [14]. Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\delta_k < \epsilon,$$

где невязка δ_k может определяться как

$$\delta_k = \max_j \max_i \max_{x \in [x_L, x_R]} | \mathbf{R}_i(y_{ik}(x), c_{jk}) |, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

$\epsilon > 0$ — заданное малое число.

Рассмотренный подход к построению итерационных схем непосредственно применяется к уравнению (1) при фиксированном векторе параметров $\vec{a}$. Для исследования зависимости решения уравнения (1) от параметров $\vec{a}$ целесообразно построить вычислительную схему на основе метода продолжения [4]. Этот метод позволяет использовать уже вычисленные решения при некотором значении $\vec{a}_k$ как начальное приближение в итерациях для нахождения решения при новом значении вектора параметров $\vec{a}_{k+1} = \vec{a}_k + \Delta \vec{a}_k$. Известно [4], что конечную область изменения вектора параметров $\vec{a}$ можно разбить узлами $\{\vec{a}_k\}$ так, что будет обеспечена сходимость даже классического метода Ньютона от выбранных таким образом начальных приближений. Область сходимости обсуждаемых итерационных схем шире, чем классического метода. Поэтому узлы $\{\vec{a}_k\}$ можно задавать более произвольно. Начинать вычисления следует от решений в асимптотических областях "физических" параметров. Таким образом, получается замкнутая схема численного анализа уравнения (1).

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВО-ПОЛЕВЫХ САМОСОГЛАСОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО НАМН

Моделирование ряда физических процессов в конденсированных средах во многих случаях проводится в терминах автолокализованных состояний. Поэтому их изучение является весьма актуальной задачей, и в течение ряда лет большие усилия предпринимались для одночастичного самосогласованного

описания многочастичных систем (см., например, сборник [48] и ссылки в нем).

В качестве примера можно привести концепцию полярона [49], являющегося, с одной стороны, простейшей моделью квантовой теории поля, а с другой — имеющего многочисленные приложения в физике конденсированных систем. Отметим, что проблема полярона как нерелятивистской частицы, взаимодействующей с квантованным полем, была первоначально сформулирована как проблема автолокализованного электрона в ионном кристалле.

В настоящее время имеется большое число физических примеров, когда электрон образует автолокализованное состояние. К числу таких примеров относятся магнитоупорядоченные кристаллы, в которых возможно образование магнитных поляронов, полярные жидкости, в которых автолокализованные состояния представляют собой сольватированные электроны, и многие другие (см. ссылки в [48]). В случае заряженной пробной частицы, взаимодействующей с электронным газом, одночастичный спектр был исследован в приближении частицы, связанной с плазмонами и образующей автолокализованное состояние [50].

С математической точки зрения возникновение автолокализованных состояний связано с появлением при некотором значении константы взаимодействия пробной частицы с квантовым полем частицеподобных решений [51].

Моделирование нелинейных эффектов в конденсированных средах и квантово-полевых моделях приводит к нелинейным задачам на собственные значения для дифференциальных уравнений, зависящих от "внешних" физических параметров модели. Таким образом, центр тяжести проблемы в значительной степени связан с исследованием решений уравнений, возникающих при сильном взаимодействии частицы с полем, когда становится возможным образование автолокализованных состояний.

В настоящем разделе представлены постановки задач в рамках некоторых самосогласованных моделей, численное исследование которых проводилось с использованием ньютоновских итерационных схем. Это обобщенное уравнение полярона в рамках модели Латтинжера - Лу [52], самосогласованная модель сольватированного электрона [53] и квантово-полевая модель бинуклона в пределе сильной связи [54].

3.1. Уравнение полярона в рамках модели Латтинжера – Лу. *Общая постановка задачи.* В пределе сильной связи расчет характеристик (уровней энергии и волновых функций) полярона сводится к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений на собственные значения

$$\begin{aligned}\Delta_r \Psi(\vec{r}) + \phi(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) + E \Psi(\vec{r}) &= 0, \\ \Delta_r \phi(\vec{r}) + C \Psi^2(\vec{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{53}$$

в которой на функцию $\Psi(\vec{r})$ наложено условие $\int \Psi^2(\vec{r}) d\vec{r} = 1$ (здесь E – собственное значение, C – параметр). Система (53) была получена С.И.Пекаром из феноменологической теории [55]. В основополагающей работе Н.Н.Боголюбова [56] уравнения (53) были конструктивно получены из последовательной микроскопической теории движения нерелятивистской частицы, взаимодействующей с квантовым полем.

Сферически-симметричные решения системы (53) к настоящему времени достаточно хорошо изучены. Впервые приближенные решения системы (53) этого вида были получены в [55] для основного состояния путем применения прямого вариационного метода с выбором пробных функций в виде полиномов и экспонент. Уточнение вариационных расчетов основного состояния полярона выполнено в [57] с помощью численного интегрирования уравнений (53). В [58] для расчета основного состояния был использован НАМН. В [59] были впервые вычислены решения уравнений (53), отвечающие четырем различным возбужденным самосогласованным состояниям частицы в квантовом поле. Поскольку физико-химические реакции в конденсированных средах идут именно через возбужденные состояния, то количественное исследование их физических характеристик несомненно актуально. В связи с этим возрос и интерес к проблеме решения задачи о поляроне не только в пределе сильного взаимодействия, но и во всем интервале изменения константы связи частицы с полем. Физическая сторона проблемы отражена в многочисленных статьях и обзорах (см., например, обзор Чуева и Лахно в [48] и содержащиеся в нем ссылки).

Как известно, в настоящее время наилучшей аппроксимацией для полярона при промежуточных значениях электрон-фононной связи является фейнмановский подход [60] с использованием интегралов по траекториям. К сожалению, этот подход непосредственно применим для расчета лишь основного состояния полярона. По существу, этот метод аналогичен прямому вариационному методу для уравнения Шредингера. Заметным развитием подхода Фейнмана явилась работа Латтинжера и Лу [52], а также последующие публикации [61]. Эти работы позволяют переформулировать фейнмановский подход на языке дифференциальных уравнений. В настоящее время это единственный подход, позволяющий с помощью дифференциальных уравнений описать переход от предела слабой связи частицы с полем к пределу сильного взаимодействия. При этом существенно, что в пределе сильной связи получаемые уравнения являются асимптотически точными, т.е. переходят в уравнения Боголюбова — Тябликова, отвечающие пределу сильной связи.

Таким образом, простейшая согласованная модель полярона при произвольной связи получается из общей задачи, сформулированной в [62]. Согласно этой работе уровни энергии и волновые функции полярона $\{\epsilon_n, u(\vec{r})\}$ в рамках модели Латтинжера — Лу определяются задачей на собственные значения для интегриродифференциального уравнения в трехмерном координатном

пространстве

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \nabla^2 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\mu} \int d\vec{r}' \frac{|u(\vec{r}')|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (1 - e^{-C|\vec{r} - \vec{r}'|}) \right] u(\vec{r}) = \epsilon u(\vec{r}), \quad (54)$$

в которой ∇^2 – трехмерный оператор Лапласа, $\mu = m/(1+m)$ – приведенная масса электрона, α – константа связи, $C = \mu\sqrt{2}/\sqrt{1-\mu}$. Условие нормировки имеет следующий вид:

$$\int d\vec{r} |u(\vec{r})|^2 = 1.$$

Задача (54) может быть сформулирована в безразмерных величинах как нелинейная задача на собственные значения для системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\vec{r}) - \lambda\psi(\vec{r}) + A(V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r}))\psi(\vec{r}) &= 0, \\ \Delta V_1(\vec{r}) + |\psi(\vec{r})|^2 &= 0, \\ \Delta V_2(\vec{r}) - C^2 V_2(\vec{r}) + |\psi(\vec{r})|^2 &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

с условием нормировки

$$\int_0^\infty |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1, \quad (56)$$

где Δ – трехмерный оператор Лапласа, A и C – физические параметры задачи, λ – собственные значения, определяющие уровни энергии состояний полярона.

Сферически-симметричный случай. Представляя сферически-симметричные решения уравнения (54) в виде

$$u(\vec{r}) = x^{-1}\psi(x), \quad x = |\vec{r}|,$$

получаем следующую задачу на собственные значения, решения которой определяют уровни энергии и волновые функции полярона в сферически-симметричном случае [62]:

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) + A\psi(x)V(x, \psi(x)) = 0, \quad (57)$$

где

$$V(x, \psi(x)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty D(x, x') \frac{\psi^2(x')}{x'} dx',$$

граничные условия имеют вид

$$\psi(0) = \psi(\infty) = 0,$$

условие нормировки

$$\int_0^{\infty} \psi^2(x) dx = \frac{1}{4\pi}, \quad (58)$$

$$D(x, x') = \begin{cases} x' - \frac{1}{C} \exp(-Cx) \sinh(Cx'), & x' < x, \\ x - \frac{1}{C} \exp(-Cx') \sinh(Cx), & x < x', \end{cases}$$

$A = 8\sqrt{2}\pi\alpha$, $\lambda = 2\mu\epsilon$, $\epsilon > 0$ – уровни энергии. В предельном случае сильной связи при $\mu = 1$, соответствующем постановке задачи для модели Пекара [55], функция $D(x, x')$ принимает вид

$$D(x, x') = \begin{cases} x', & x' < x, \\ x, & x < x'. \end{cases}$$

В работе [63] для решения указанной задачи использовалась составленная на основе модификации НАМН [64] программа.

Другая постановка задачи на собственные значения (57) имеет вид [65]:

$$\begin{cases} \psi''(x) - \lambda\psi(x) + A\psi(x)\frac{V_2 - V_1}{x} = 0, \\ V_1'' + \frac{\psi^2}{x} = 0, \\ V_2'' - CV_2 + \frac{\psi^2}{x} = 0 \end{cases} \quad (59)$$

с условием нормировки (58). Искомые решения системы (59) должны удовлетворять следующим асимптотическим условиям:

$$\psi(0) = \psi(\infty) = 0, \quad V_1(0) = V_1'(\infty) = 0, \quad V_2(0) = V_2(\infty) = 0.$$

Решения задачи (57) являются решениями задачи (59) и наоборот. В работе [65] для численного решения системы (59) применялся модифицированный алгоритм на основе НАМН, описание которого дается ниже для более общего сферически-несимметричного случая.

После ряда преобразований спектральная задача (57)–(59) может быть сведена [62] к параметрически-зависимой системе нелинейных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \phi'' - \phi + \frac{1}{x}\phi(W_1 - W_2) = 0, \\ W_1'' + \frac{1}{x}\phi^2 = 0, \\ W_2'' - a^2W_2 + \frac{1}{x}\phi^2 = 0 \end{cases} \quad (60)$$

с граничными условиями

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0, \quad W_1(0) = W_1'(\infty) = 0, \quad W_2(0) = W_2(\infty) = 0,$$

решения которой $z = \{\phi, W_1, W_2\}$ вычисляются для различных значений параметра a . Особенностью такой постановки является тот факт, что уровни энергии и другие физические параметры задачи могут быть определены лишь после того, как найдено решение системы для некоторого значения параметра a . В работе [62] представлена ньютоновская итерационная схема для численного исследования задачи (60). В этой работе впервые найдены первые пять сферически-симметричных состояний полярона. Отметим, что результаты решения задачи на собственные значения в постановках (57) и (59), полученные в [63] и [65] соответственно, согласуются с результатами [62].

Сферически-несимметричный случай. Если представить решение системы (55) в виде разложения по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$\begin{cases} \psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\psi_{lm}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \\ V_i(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{V_{ilm}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (61)$$

и подставить это разложение в систему (55), умножая слева на $Y(\theta, \phi)^*$ и интегрируя по $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, то получится следующая система уравнений для коэффициентов разложения $\psi_{lm}(r)$ и $V_{ilm}(r)$:

$$\psi_{lm}''(r) - \lambda \psi_{lm}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_{lm}(r) + \frac{A}{r} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} Q_{lm l_1 m_1}(r) \psi_{l_1 m_1}(r) = 0,$$

$$V_{1lm}''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} V_{1lm}(r) + S_{lm}(r) = 0, \quad (62)$$

$$V_{2lm}''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} V_{2lm}(r) - C^2 V_{2lm}(r) + S_{lm}(r) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, m = -l, \dots, l$$

с условием нормировки

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} \psi_{lm}^2(r) dr = 1, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{lm l_1 m_1} &= \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} W_{lm l_1 m_1 l_2 m_2} (V_{1l_2 m_2}(r) - V_{2l_2 m_2}(r)), \\ S_{lm} &= \frac{1}{r} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \bar{W}_{lm l_1 m_1 l_2 m_2} \psi_{l_1 m_1}(r) \psi_{l_2 m_2}(r), \end{aligned} \quad (64)$$

$$W_{lm l_1 m_1 l_2 m_2} = \int d\Omega Y_{lm}^* Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2}, \quad \bar{W}_{lm l_1 m_1 l_2 m_2} = \int d\Omega Y_{lm}^* Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2}^*.$$

Искомые решения системы (62) удовлетворяют следующим асимптотическим условиям:

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(r)_{r \rightarrow 0} &\rightarrow A_{1lm} r^{l+1}, & \psi_{lm}(r)_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow A_{2lm} e^{-\sqrt{\lambda} r}, \\ V_{1lm}(r)_{r \rightarrow 0} &\rightarrow B_{1lm} r^{l+1}, & V_{1lm}(r)_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow B_{2lm} r^{-l}, \\ V_{2lm}(r)_{r \rightarrow 0} &\rightarrow C_{1lm} r^{l+1}, & V_{2lm}(r)_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow C_{2lm} r^{-C r}, \end{aligned} \quad (65)$$

где $A_{1lm}, A_{2lm}, B_{1lm}, B_{2lm}, C_{1lm}, C_{2lm}$ – константы.

Численное решение задачи (62)–(64) с граничными условиями (65) производится на конечном интервале $0 \leq r \leq R_m$, $R_m \gg 1$ с ограничением количества членов в разложениях (61) числом L_m для $\psi(\vec{r})$ и числом $L_v = 2L_m$ для $V_i(r)$, $i = 1, 2$.

Как уже упоминалось, наиболее изученным является случай сферически-симметричных решений $\psi(r, \theta, \phi) \rightarrow \psi(r)$, соответствующий значению $L_m = 0$, когда задача (62)–(65) может быть сведена к представленным в предыдущем пункте постановкам.

Остановимся на более общем случае: $\psi(r, \theta, \phi) \rightarrow \psi(r, \theta)$. Тогда в разложении (61) функцию $Y_{lm}(\theta, \phi)$ надо заменить на

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta),$$

где P_l – полином Лежандра и $l = 0, 1, \dots, L_m$.

Вводя более удобные обозначения $\psi_{l0} = \psi_l$, $V_{1l0} = V_{1l}$, $V_{2l0} = V_{2l}$, $S_{l0} = S_l$, $Q_{l0l_10} = Q_{ll_1}$, $W_{l0l_10l_20} = W_{ll_1l_2}$, с учетом вышеизложенных ограничений систему (62)–(65) можно переписать в виде

$$\psi_l''(r) - \lambda \psi_l(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l(r) + \frac{A}{r} \sum_{l_1=0}^{L_m} Q_{ll_1}(r) \psi_{l_1}(r) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, L_m, \quad (66)$$

$$V_{1l}''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} V_{1l}(r) + S_l(r) = 0, \quad (67)$$

$$V_{2l}''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} V_{2l}(r) - C^2 V_{2l}(r) + S_l(r) = 0, \quad (68)$$

где $l = 0, 1, \dots, L_v$, а условие нормировки имеет вид

$$\sum_{l=0}^{L_m} \int_0^{R_m} \psi_l^2(r) dr = 1. \quad (69)$$

Здесь

$$Q_{l_1}(r) = \sum_{l_2=0}^{L_v} W_{l_1 l_2} (V_{1l_2}(r) - V_{2l_2}(r)), \quad (70)$$

$$S_l(r) = \sum_{l_1=0}^{L_m} \sum_{l_2=0}^{L_m} W_{l_1 l_2} \psi_{l_1}(r) \psi_{l_2}(r), \quad (71)$$

$$W_{l_1 l_2}(r) = 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}} \int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l_1}(x) P_{l_2}(x) dx. \quad (72)$$

Учитывая асимптотические свойства решений (65), напомним краевые условия на конечном интервале $0 \leq r \leq R_m$:

$$\psi_{1A}(0)\psi'_l(0) - \psi'_{1A}(0)\psi_l(0) = 0, \quad (73)$$

$$\psi_{2A}(R_m)\psi'_l(R_m) - \psi'_{2A}(R_m)\psi_l(R_m) = 0, \quad (74)$$

$$V_{i1A}(0)V'_{il}(0) - V'_{i1A}(0)V_{il}(0) = 0, \quad (75)$$

$$V_{i2A}(R_m)V'_{il}(R_m) - V'_{i2A}(R_m)V_{il}(R_m) = 0, \quad (76)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{1A} &= A_{1l}r^{l+1}, \quad \psi_{2A} = A_{2l}e^{-\sqrt{\lambda}r}, \quad V_{11A} = B_{1l}r^{l+1}, \\ V_{12A} &= B_{2l}r^{-l}, \quad V_{21A} = C_{1l}r^{l+1}, \quad V_{22A} = C_{2l}e^{-Cr}, \end{aligned}$$

A_{il}, B_{il}, C_{il} – константы, $i = 1, 2$.

Практическая реализация НАМН применительно к рассматриваемой задаче приводит к необходимости решать на каждой итерации достаточно сложные системы из $(L_m + 2L_v + 3)$ нелинейных дифференциальных уравнений. В работе [67] для решения этой системы предлагается другой подход. По аналогии с методом расщепления [68] вместо системы $(L_m + 2L_v + 3)$ нелинейных дифференциальных уравнений можно последовательно решать более простые задачи — задачу на собственные значения для системы из $(L_m + 1)$ линейных дифференциальных уравнений (66) и $2(L_v + 1)$ краевых задач для линейных дифференциальных уравнений (67), (68).

Итерационная процедура для решения задачи (66)–(76) согласно [67] имеет следующую последовательность действий.

Задавшись некоторым набором $\{\lambda^{(0)}, \psi_l^{(0)}(r), l = 0, 1, \dots, L_m\}$ (начальное приближение), используя выражение (71), вычисляем коэффициенты $S_l(r)$ для (67), (68). Решая (67), (68) с граничными условиями (75), (76), находим $V_{1l}^{(0)}(r)$ и $V_{2l}^{(0)}(r)$. Затем, используя выражения (70)–(72), вычисляем

эффективные потенциалы $Q_{ll_1}^{(0)}(r)$. Далее, решая задачу на собственные значения для системы (66) с граничными условиями (73)–(74), условием нормировки (69) и найденным потенциалом $Q_{ll_1}^{(0)}(r)$, получаем новые функции $\{\lambda^{(1)}, \psi_l^{(1)}(r), l = 0, 1, \dots, L_m\}$, которые, в свою очередь, используются для вычисления решений $V_{1l}^{(1)}(r), V_{2l}^{(1)}(r)$ и построения эффективного потенциала $Q_{ll_1}^{(1)}(r)$ для следующей итерации.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока собственные значения и волновые функции $\{\lambda^{(k)}, \psi_l^{(k)}(r), l = 0, 1, \dots, L_m\}$, а также функции $V_{il}^{(k)}(r), i = 1, 2, l = 0, 1, \dots, L_v$, получаемые после двух последовательных итераций, не будут совпадать друг с другом с заданной точностью ϵ , т.е. пока не выполнится условие

$$\delta \leq \epsilon,$$

где

$$\delta = \max \{ |\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|, \max_{r_j \in [0, R_m]} \{ \max_{l \in [0, \dots, L_v], i=1,2} |V_{il}^{(k+1)}(r_j) - V_{il}^{(k)}(r_j)|, \max_{l \in [0, \dots, L_m]} | \psi_l^{(k+1)}(r_j) - \psi_l^{(k)}(r_j) | \} \}.$$

Аналогичный алгоритм использовался также в работе [65] для определения сферически-симметричных решений.

Отметим, что описанная итерационная процедура может рассматриваться как вариант сочетания метода установления с ньютоновскими итерациями, теоретическое обоснование сходимости которого дано в работе [27].

Представленный алгоритм успешно использовался при решении ряда других нелинейных задач.

Результаты численного анализа рассматриваемой задачи согласуются с теоретическими результатами работы [69]. Более общий случай $m \neq 0$ исследован в работе [70]. В этой работе представлен алгоритм на основе НАМН и результаты расчетов в пределе сильной связи.

3.2. Автолокализованные электронные состояния в жидкости. Для описания автолокализованных электронных состояний в жидкости, так называемого сольватированного электрона, в работе [71] используется система трех нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi''(x) - \xi(x) + \xi(x) \frac{\eta_1(x) - \eta_2(x)}{x} = 0 \\ \eta_1''(x) + \frac{1}{x} \xi^2(x) = 0 \\ \eta_2''(x) - \frac{\alpha^2}{d} x \sinh\left(\frac{d\eta_2(x)}{x}\right) + \frac{b}{x} \xi^2(x) = 0 \end{cases} \quad (77)$$

с граничными условиями

$$\xi(0) = \xi(\infty) = \eta_1(0) = \eta_1'(\infty) = \eta_2(0) = \eta_2(\infty) = 0, \quad (78)$$

где α, b, d — параметры физической модели.

Эта же система с линеаризованным $[\sinh \frac{d\eta_2(x)}{x} \sim \frac{d\eta_2(x)}{x}]$ последним уравнением и с теми же граничными условиями (78) совпадает с системой (60) и решалась в [59].

Для некоторых физических моделей предполагаются дополнительные связи между этими параметрами. Для краевой задачи (77)–(78) выполняются условия

$$\begin{aligned} m &= \frac{dT_1^2}{5,2629 \cdot 10^2}, \\ n &= m \frac{d\alpha^2}{b \cdot 6,2125 \cdot 10^2}, \end{aligned} \quad (79)$$

а для задачи (60), (78) — условие

$$b \left(\frac{T_1^2}{\alpha} \right)^2 = 0,84713 \frac{m^2}{n}, \quad (80)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^\infty \xi^2(x) dx = \eta_1(\infty), \\ A_1 &= dT_1^2, \quad A_2 = d\alpha^2, \end{aligned} \quad (81)$$

m — эффективная масса электрона, n — концентрация ионов. Эти параметры m и n удобны тем, что определяются из экспериментальных данных.

Таким образом, с учетом условий (79) и (80) исходные краевые задачи, зависящие от трех независимых параметров, можно свести к краевым задачам с одним параметром и дополнительным условием (81), связывающим интегральное условие на одну искомую функцию с асимптотическим поведением другой функции.

Подобный подход позволяет сформулировать краевую задачу с дополнительными условиями, описанную в предыдущем разделе.

В случае задачи о сольватированном электроде мы имеем в обозначениях $\xi = y_1$, $\eta_1 = y_2$ и $\eta_2 = y_3$ систему (77) с граничными условиями

$$\begin{aligned} G_{L1} &\equiv y_1(0) = 0 \\ G_{L2} &\equiv y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{L3} &\equiv y_3(0) = 0 \\
G_{R1} &\equiv y_1'(x_R) + y_1(x_R) = 0 \\
G_{R2} &\equiv y_2'(x_R) - C = 0 \\
G_{R3} &\equiv y_3'(x_R) + \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} C y_3(x_R) = 0,
\end{aligned} \tag{82}$$

аппроксимирующими асимптотические условия (78), и дополнительным условием

$$Q_1 \equiv \int_0^{x_R} y_1^2(x) dx - C = 0, \tag{83}$$

которая приводится в процессе итераций к системе линейных уравнений

$$\begin{cases}
v_{1k}'' - v_{1k} + \frac{y_{2k} - y_{3k}}{x} v_{1k} + \frac{v_{2k} - v_{3k}}{x} y_{1k} = -R_1 \\
v_{2k}'' + \frac{2}{x} y_{1k} v_{1k} = -R_2 \\
v_{3k}'' - \frac{A_2}{A_1} C^2 \cosh\left(\frac{A_1 y_{3k}}{C^2 x}\right) v_{3k} + \frac{2b}{x} y_{1k} v_{1k} = \\
\quad -R_3 + \mu \left(\frac{A_2}{A_1^2} 4C^3 x \sinh\left(\frac{A_1 y_{3k}}{C^2 x}\right) - \frac{A_2}{A_1} 2C y_3 \cosh\left(\frac{A_1 y_{3k}}{C^2 x}\right) \right)
\end{cases} \tag{84}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases}
v_{1k}(0) = -G_{L1} \\
v_{2k}(0) = -G_{L2} \\
v_{3k}(0) = -G_{L3} \\
v_{1k}'(x_R) + v_{1k}(x_R) = -G_{R1} \\
v_{2k}(x_R) - \mu = -G_{R2} \\
v_{3k}'(x_R) + \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} C v_{3k}(x_R) = -G_{R3} - \mu \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} y_{3k}(x_R)
\end{cases} \tag{85}$$

и дополнительным уравнением

$$2 \int_0^{x_R} y_{1k}(x) v_{1k}(x) dx - \mu_k = -Q_1. \tag{86}$$

В работе [47] дается подробное описание алгоритма решения представленной задачи и демонстрируются полученные численные результаты.

3.3. Квантово-полевая модель бинуклона в пределе сильной связи. Проблеме описания бинуклона (связанного состояния нейтрона и протона) посвящено большое число работ, ссылки на которые содержатся в книгах и обзорах, посвященных данной тематике [72, 73]. Однако до сих пор эта задача остается актуальной, поскольку именно ее решение дает непосредственные сведения о ядерных силах.

В работах [74] рассчитаны основные характеристики бинуклона в рамках предложенной в [54] квантово-полевой модели. Согласно рассматриваемому подходу описание взаимодействия нуклонов с мезонным полем в пределе сильной связи сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений в трехмерном пространстве.

В соответствии с [54] функционал полной энергии в квантово-полевой модели бинуклона для случая точечного взаимодействия нуклонов со скалярным и псевдоскалярным мезонными полями имеет вид:

$$F = \frac{\hbar^2}{m} \int |\nabla \psi|^2 dV - \frac{g^2}{\pi} \int \frac{e^{-k_C |r-r'|/2}}{|r-r'|} |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2 dV dV' - \tilde{f}^2 \int (\sigma \nabla_r)(\sigma \nabla_{r'}) \frac{e^{-k_{\text{ПС}} |r-r'|/2}}{|r-r'|} |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2 dV dV', \quad (87)$$

где k_C – масса скалярного мезона, $k_{\text{ПС}}$ – масса псевдоскалярного мезона, m – масса нуклона, $g, \tilde{f}$ – константы взаимодействия со скалярным и псевдоскалярным мезонными полями, σ – спиновый оператор (единичный вектор, направленный по оси z), $\hbar$ – постоянная Планка.

Из условия минимума функционала (87) на классе функций $\psi(\vec{r})$, удовлетворяющих условию нормировки

$$\int d\vec{r} |\psi(\vec{r})|^2 = 1, \quad (88)$$

можно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{m} \Delta \psi - \varepsilon \psi + \frac{2g^2}{\pi} V_1 \psi + 2\tilde{f}^2 [(\sigma \nabla_r) V_2] \psi = 0, \\ \Delta V_1 - \left(\frac{k_C}{2}\right)^2 V_1 = -4\pi |\psi|^2, \\ \Delta V_2 - \left(\frac{k_{\text{ПС}}}{2}\right)^2 V_2 = -4\pi (\sigma \nabla_r) |\psi|^2. \end{cases} \quad (89)$$

Далее, обозначая

$$V_3 = (\sigma \nabla_r) V_2$$

и полагая $\hbar^2 = 1$, перепишем систему (89) в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} \Delta \psi - \varepsilon \psi + \frac{2g^2}{\pi} V_1 \psi + 2\tilde{f}^2 V_3 \psi = 0, \\ \Delta V_1 - \left(\frac{k_C}{2}\right)^2 V_1 = -4\pi |\psi|^2, \\ \Delta V_3 - \left(\frac{k_{\text{ПС}}}{2}\right)^2 V_3 = -4\pi (\sigma \nabla_r)^2 |\psi|^2. \end{cases} \quad (90)$$

Решая систему (90) на классе функций $\psi(\vec{r})$, ограниченных при $0 < \vec{r} < \infty$, удовлетворяющих условию нормировки (88) и асимптотическим условиям

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \psi(\vec{r}) = \text{const}, & \lim_{r \rightarrow 0} V_1(\vec{r}) = \text{const}, & \lim_{r \rightarrow 0} V_3(\vec{r}) = \text{const}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(\vec{r}) = \text{const}, & \lim_{r \rightarrow \infty} V_1(\vec{r}) = \text{const}, & \lim_{r \rightarrow \infty} V_3(\vec{r}) = \text{const}, \end{cases} \quad (91)$$

можно определить уровни энергии ε и волновые функции ψ бинуклона. (Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Тогда радиус бинуклона R и его квадрупольный момент Q вычисляются, соответственно, по формулам

$$R = \int d\vec{r} r |\psi|^2, \quad Q = \int d\vec{r} (3z^2 - r^2) |\psi|^2. \quad (92)$$

Выполнив преобразования вида

$$\vec{r} = r_0 \vec{\bar{r}}, \quad \psi = \gamma \varphi, \quad (93)$$

систему (90) можно переписать в безразмерных величинах (черту над вектором $\vec{r}$ в дальнейшем опускаем)

$$\begin{cases} \Delta \varphi - \lambda \varphi + (V_1 + BV_3) \varphi = 0, \\ \Delta V_1 - k_1^2 V_1 = -|\varphi|^2, \\ \Delta V_3 - k_2^2 V_3 = -(\sigma \nabla_r)^2 |\varphi|^2, \end{cases} \quad (94)$$

где

$$\lambda = \varepsilon m r_0^2, k_1^2 = \left(\frac{k_C}{2}\right)^2 r_0^2, k_2^2 = \left(\frac{k_{\text{ПС}}}{2}\right)^2 r_0^2, B = \frac{\tilde{f}^2}{g^2} \frac{\pi}{r_0^2}, 8g^2 m r_0^4 \gamma^2 = 1. \quad (95)$$

С учетом замены переменных (93) перепишем выражения (88), (92) и (87) в следующем виде:

$$\hat{N} = \int d\vec{r} |\varphi|^2 = \frac{1}{r_0^3 \gamma^2}, \quad R = r_0^4 \gamma^2 \hat{R}, \quad \hat{R} = \int d\vec{r} r |\varphi|^2, \quad (96)$$

$$Q = r_0^5 \gamma^2 \hat{Q}, \quad \hat{Q} = \int d\vec{r} (3z^2 - r^2) |\varphi|^2, \quad F = (\varepsilon/\lambda)[(\hat{T} - W_{13}/2)/\hat{N}], \quad (97)$$

где

$$T = r_0 \gamma^2 \hat{T}, \quad \hat{T} = \int d\vec{r} |\nabla \varphi|^2, \quad W_{13} = \int d\vec{r} (V_1 + BV_3) |\varphi|^2. \quad (98)$$

Указанные величины связаны следующими соотношениями

$$R = r_0 (\hat{R}/\hat{N}), \quad Q = r_0^2 (\hat{Q}/\hat{N}). \quad (99)$$

Здесь выражения в скобках являются безразмерными.

Система дифференциальных уравнений для бинуклона (94) представляет собой нелинейную трехпараметрическую задачу на собственные значения. Численное интегрирование (94) в пределе $k_{\text{ПС}} \rightarrow \infty$ было осуществлено в [54]. Численное исследование задачи (94) для конечных $k_{\text{ПС}}$ выполнено в [74].

Приведем в качестве примера вариант постановки краевой задачи для системы (94) в частном случае, когда решения симметричны относительно оси, т.е. $\Phi(\rho, z, \phi) \rightarrow \Phi(\rho, z)$ (цилиндрическая система координат). Кроме того, мы переходим от полубесконечного интервала интегрирования к конечной области $(-z_M \leq z \leq z_M, 0 \leq \rho \leq \rho_M)$. При этом описание бинуклона сводится к решению двумерной спектральной задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Сформулируем постановку задачи таким образом, чтобы свести ее к одномерной системе уравнений.

Решение системы (94) в цилиндрической системе координат будем искать в виде

$$\begin{cases} \varphi(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z) \Phi_n(\rho), \\ V_1(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{1n}(z) \Phi_{1n}(\rho), \\ V_3(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{3n}(z) \Phi_{3n}(\rho), \end{cases} \quad (100)$$

где собственные значения и функции $\{\mu_n, \Phi_n\}$ определяются как решения следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} \Phi_n'' + \frac{1}{\rho} \Phi_n' + \mu_n \Phi_n = 0, & 0 \leq \rho \leq \rho_M, \\ \Phi_n'(0) = 0, & \Phi_n'(\rho_M) - A_{\rho_M} \Phi_n(\rho_M) = 0, \\ \int d\rho \rho \Phi_n^2 = 1. \end{cases} \quad (101)$$

A_{ρ_M} определяется из соотношений

$$A_{\rho_M} = \left. \frac{\frac{d}{d\rho}[\Phi_A(\rho)]}{\Phi_A(\rho)} \right|_{\rho=\rho_M}, \quad \Phi_A(\rho) = \int_{-z_M}^{z_M} dz y_0(z) \varphi_A(z, \rho).$$

При нахождении наборов $\{\mu_{1n}, \Phi_{1n}\}$ и $\{\mu_{3n}, \Phi_{3n}\}$ функция φ_A заменяется, соответственно, на V_{1A} и V_{3A} , а функция $y_0(z)$ — соответственно, на V_{10} и V_{30} , где $y_0(z), V_{10}, V_{30}$ — некоторые начальные приближения. В частном случае можно использовать только один набор функций $\{\Phi_n\}$.

Подставляя разложение (100) в систему (94), получаем

$$\begin{cases} y_n'' - (\lambda + \mu_n)y_n + \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}y_m = 0, & n = 1, 2, \dots \\ V_{1j}'' - (k_1^2 + \mu_{1j})V_{1j} = -J_{1j}, & j = 1, 2, \dots \\ V_{3j}'' - (k_2^2 + \mu_{3j})V_{3j} = -J_{3j}, \end{cases} \quad (102)$$

где

$$W_{nm} = \sum_{j=1}^{\infty} [Q_{1njm}V_{1j} + BQ_{3njm}V_{3j}], \quad (103)$$

$$J_{1j} = \sum_{n,m=1}^{\infty} Q_{1njm}y_n y_m, \quad J_{3j} = \sum_{n,m=1}^{\infty} Q_{3njm} \frac{d^2}{dz^2}(y_n y_m), \quad (104)$$

$$Q_{ijnm} = \int_0^{\rho_M} d\rho \rho \Phi_n(\rho) \Phi_{ij}(\rho) \Phi_{im}(\rho), \quad i = 1, 3. \quad (105)$$

Функции y_n, V_{1j}, V_{3j} удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} y_n'(z_M) - A(z_M)y_n(z_M) = 0, & y_n'(-z_M) - A(-z_M)y_n(-z_M) = 0, \\ V_{1j}'(z_M) - A_1(z_M)V_{1j}(z_M) = 0, & V_{1j}'(-z_M) - A_1(-z_M)V_{1j}(-z_M) = 0, \\ V_{3j}'(z_M) - A_3(z_M)V_{3j}(z_M) = 0, & V_{3j}'(-z_M) - A_3(-z_M)V_{3j}(-z_M) = 0, \end{cases} \quad (106)$$

где

$$\begin{aligned} A(z_M) &= \left. \frac{d}{dz} \frac{[y_A(z)]}{y_A(z)} \right|_{z=z_M}, & y_A(z) &= \int_0^{\rho_M} d\rho \rho \Phi_0(\rho) \varphi_A(z, \rho), \\ A_1(z_M) &= \left. \frac{d}{dz} \frac{[V_{1A}(z)]}{V_{1A}(z)} \right|_{z=z_M}, & V_{1A}(z) &= \int_0^{\rho_M} d\rho \rho \Phi_{10}(\rho) V_{1A}(z, \rho), \\ A_3(z_M) &= \left. \frac{d}{dz} \frac{[V_{3A}(z)]}{V_{3A}(z)} \right|_{z=z_M}, & V_{3A}(z) &= \int_0^{\rho_M} d\rho \rho \Phi_{30}(\rho) V_{3A}(z, \rho). \end{aligned}$$

Аналогично определяются коэффициенты $A(-z_M)$, $A_1(-z_M)$ и $A_3(-z_M)$.
Условие нормировки для системы (102) принимает вид

$$\sum_n \int_{-z_M}^{z_M} dz y_n^2(z) = \frac{1}{2\pi r_0^3 \gamma^2} = \hat{N}_c.$$

С учетом разложения (100) формулы (96) и (97) для вычисления необходимых физических величин имеют следующий вид:

$$\hat{R} = 2\pi \int_{-z_M}^{+z_M} dz \int_0^{\rho_M} d\rho \rho \sqrt{(z^2 + \rho^2)} \varphi^2(z, \rho), \quad (107)$$

$$\hat{Q} = 2\pi \int_{-z_M}^{+z_M} dz \int_0^{\rho_M} d\rho \rho (2z^2 - \rho^2) \varphi^2(z, \rho), \quad (108)$$

$$F = (\varepsilon/\lambda) [\hat{T}_c - \hat{W}_c/2]/(2\pi N_c), \quad (109)$$

где

$$\hat{T}_c = 2\pi \int_{-z_M}^{+z_M} dz \int_0^{\rho_M} d\rho \rho \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2 \right],$$

$$\hat{W}_c = 2\pi \sum_{jnm} \int_{-z_M}^{+z_M} dz [V_{1j}(z) + BV_{3j}(z)] y_n(z) y_m(z).$$

Отметим, что, используя симметрию задачи, систему (102) можно решать на интервале $0 \leq z \leq z_M$. При этом нужно соответственно изменить граничные условия и условие нормировки.

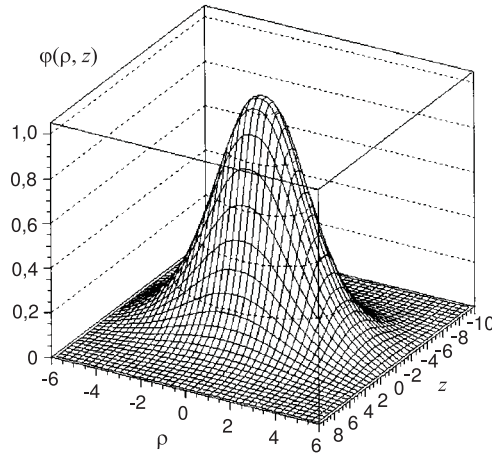


Рис. 1. Волновая функция $\varphi(\rho, z)$ бинуклона

Для численного исследования представленной задачи в работе [74] использовался модифицированный алгоритм на основе НАМН, аналогичный описанному в п. 3.1 (сферически-несимметричный случай). В качестве иллюстрации на рис.1 представлена волновая функция бинуклона $\varphi(\rho, z)$. Расчеты показали, что численные решения системы для двух нуклонов в пределе сильного взаимодействия в скалярном и псевдоскалярном поле позволяют получить согласованные с экспериментом значения энергии связи, эффективного радиуса и квадратурного момента дейтрона.

В заключение отметим, что система вида (53) возникает в самых различных случаях взаимодействия частицы с полем. Это, например, автолокализованные состояния электронов в электролитах [71, 75] и электронные состояния в биомакромолекулах [76, 77], в частности, перенос электронов в биосистемах на большие расстояния. К нелинейным самосогласованным системам приводят также некоторые модели ядерной физики (Хартри — Фока и Хартри — Фока — Слетера [78]).

Общим во всех указанных и многих других задачах является решение нелинейной самосогласованной спектральной задачи. Поэтому развитие методов численного исследования автолокализованных состояний приобретает весьма важное значение.

Разработанные для представленных выше задач алгоритмы и программы на основе НАМН имеют широкую область применения и могут использоваться для решения широкого круга нелинейных самосогласованных задач.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КВАРКОНИЯ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕНИЯ НАМН

Физические программы экспериментов на "мезонных фабриках" ставят перед теорией элементарных частиц задачу построения модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов. В ряде работ [79—84] для решения этой задачи было использовано квантово-полевое обобщение нерелятивистской потенциальной модели одноглюонного обмена. Главной особенностью такого подхода является описание спонтанного нарушения киральной симметрии с помощью уравнения Швингера — Дайсона. При этом описание спектра мезонов сводится к решению краевых задач для уравнений Швингера — Дайсона (ШД) и Бете — Солпитера (БС) в трехмерной форме. Уравнение ШД описывает кварки "внутри" мезона и позволяет с помощью одного и того же феноменологического потенциала, используемого в спектроскопии тяжелых кваркониев, вычислить "динамическую" массу кварка, которая является мерой спонтанного нарушения киральной симметрии в области легких кварков. Решения уравнения БС (собственные значения и собственные функции) сопоставляются массам и волновым функциям свободных мезонов. Путем сравнения полученных решений с экспериментальными данными для масс и констант распадов исследуется вопрос построения эффективного потенциала КХД, не зависящего от аромата кварков. В пределе тяжелых кварков уравнения модели переходят в уравнение Шредингера.

В работах [80—84] кварковая потенциальная модель с различными феноменологическими потенциалами (типа гармонического осциллятора, линейно

растущего потенциала в комбинации с кулоновским и потенциала Ричардсона) была применена для описания широкого спектра масс мезонов, волновых функций и их констант лептонного распада (F_π и т.п.). Главным результатом авторы указанных работ считают описание на качественном уровне спектров масс всех мезонов, представляемых в виде связанных состояний кварка и антикварка. В частности, в [85] большая разность масс ρ - и π -мезонов получена в приближении осцилляторного потенциала как следствие спонтанного нарушения киральной симметрии без учета спин-спинового взаимодействия кварка и антикварка, которое обычно добавляют в потенциал взаимодействия. Вместе с тем в упомянутых выше работах для констант лептонных распадов мезонов (например, F_π) получены значения, значительно меньшие, чем экспериментальные данные.

Одна из трудностей численного исследования релятивистских потенциальных моделей (см., например, [85]) связана с тем, что в качестве эффективного потенциала в них, как и в нерелятивистском случае [86], обычно используется комбинация кулоновского и линейного потенциалов, что приводит к расходимостям в ядрах интегральных уравнений. В литературе для решения этой проблемы часто используется метод так называемой "перенормировки волновой функции кварка внутри мезона". По сути, устранение сингулярностей при этом происходит за счет дополнительно введенных в гамильтониан контрчленов. Отметим, что до сих пор нет самосогласованного способа регуляризации сингулярностей, когда кварк находится вне массовой поверхности и является составляющей адрона.

Другой путь преодоления проблемы сингулярностей предполагает модификацию исходного потенциала на уровне координатного представления путем его аппроксимации некоторыми функциями с "хорошими" свойствами. В частности, в работе [87] рассматривается ряд функций, аппроксимирующих кулоновский и линейный потенциалы. На примере нерелятивистского уравнения Шредингера проведено исследование свойств этих аппроксимаций и проведено сравнение с расчетами [88], где проблема расходимости решается другим способом.

С математической точки зрения задача ШД представляет собой систему двух нелинейных интегральных уравнений в трехмерном импульсном пространстве. Ее решениями являются волновая функция и функция энергии кварка, которые используются в уравнении БС. Постановка задачи дополняется асимптотическими условиями, из физических соображений накладываемыми на динамическую массу и энергию кварка.

Система уравнений БС в рамках рассматриваемой модели представляет собой задачу на собственные значения для системы линейных интегральных уравнений в трехмерном импульсном пространстве. Собственные значения и собственные функции системы БС имеют физический смысл уровней энергии и волновых функций мезона.

Таким образом, теоретические исследования характеристик кварков в рамках указанной модели приводят к численному решению сингулярных граничных задач для систем нелинейных дифференциальных, интегродифференциальных и интегральных уравнений. Эти задачи характеризуются счетным множеством решений, с помощью которых можно описать спектры кварков, которые, в свою очередь, зависят от физических параметров модели: массы и заряда кварка, характеристик модельного потенциала.

Исследование поставленных задач представляет собой сложную вычислительную проблему. Отметим, что в общем виде каждая из них может рассматриваться как нелинейное функциональное уравнение в B -пространстве [89]. Единый подход к численному анализу указанных задач, основанный на обобщенном непрерывном аналоге метода Ньютона, позволяет создавать эффективные вычислительные схемы, максимально учитывая специфику исследуемых задач. Разработанные алгоритмы и программы позволили успешно решить задачу вычисления спектров масс и констант лептонных распадов для ряда эффективных потенциалов взаимодействия.

Так, в [90] проведено численное исследование уравнений ШД и БС с осцилляторным потенциалом и получены решения для спектра мезонов (π, π', K, K') . В [91] для этого же потенциала вычислены спектры псевдоскалярных, скалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов. В [92] найдены численные решения уравнений ШД и БС для потенциала, содержащего осцилляторный и кулоновский члены. В [93] в приближении потенциала Гаусса впервые удалось описать экспериментальное значение константы лептонного распада псевдоскалярного пиона. В [98–100] численный анализ модифицированных уравнений ШД и БС на основе НАМН был проведен для потенциалов Юкавы, комбинации осцилляторного и гауссовского, а также линейного и кулоновского членов.

Отметим, что явный вид указанных уравнений зависит от выбранного эффективного потенциала. Ниже представлена общая постановка задач ШД и БС в рамках рассматриваемого подхода, приводятся виды потенциалов, популярных в спектроскопии мезонов, а также обсуждаются методы численного исследования поставленных задач на основе обобщения НАМН.

4.1. Уравнение Швингера — Дайсона. Система уравнений ШД для заданного потенциала $V(|\vec{p} - \vec{q}|)$ согласно [84] имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p} - \vec{q}|) \cos(2v(q)) / (2\pi)^3 \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p} - \vec{q}|) \xi \sin(2v(q)) / (2\pi)^3, \end{cases} \quad (110)$$

где интегрирование ведется в трехмерном пространстве координат вектора $\vec{q}$, $\xi = (\vec{p}/p, \vec{q}/q)$ – скалярное произведение единичных трехмерных векторов,

m_0 – заданная константа (токовая масса кварка), $E(p)$ и $v(p)$ – соответственно, энергия и волновая функция кварка, которые надо найти.

После интегрирования по углам $\Omega \vec{q}$ система (110) принимает вид

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + I_1(p) \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + I_2(p), \end{cases} \quad (111)$$

где

$$I_1(p) = \int_0^\infty dq V_1(p, q) \cos(2v(q)), \quad I_2(p) = \int_0^\infty dq V_2(p, q) \sin(2v(q)), \quad (112)$$

$$V_1(p, q) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega V(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad V_2(p, q) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega \xi V(|\vec{p} - \vec{q}|). \quad (113)$$

Решения системы уравнений (111)–(113) зависят как от вида потенциала, так и от асимптотического поведения функций $V_1(p, q)$ и $V_2(p, q)$ при

$$p \rightarrow 0, \quad q = \text{const} \quad (\text{или } q \rightarrow 0, \quad p = \text{const}),$$

$$p \rightarrow \infty, \quad q = \text{const} \quad (\text{или } q \rightarrow \infty, \quad p = \text{const}),$$

$$|p - q| \rightarrow 0.$$

Кроме того, из физических соображений функции $I_1(p)$ и $I_2(p)$ должны удовлетворять определенным асимптотическим условиям при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_1 = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I_2 = 0, \quad \lim_{p \rightarrow 0} I_1 = \text{const} < \infty, \quad \lim_{p \rightarrow 0} I_2 = \text{const} < \infty. \quad (114)$$

Это накладывает ограничения на класс допустимых потенциалов.

При этом, как уже отмечалось, для некоторых потенциалов, используемых в спектроскопии адронов, интегралы $I_1(p)$ и $I_2(p)$ в асимптотике малых и больших импульсов имеют расходимости. Для их устранения в рамках множества выбранных потенциалов ряд авторов предлагает заменить систему (111) системой так называемых перенормированных уравнений (обычно такой прием используется в теории возмущений):

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0(1 - Z_m) + I_1(p) \\ E(p) \sin(2v(p)) = p(1 - Z) + I_2(p), \end{cases}$$

где

$$Z_m = \text{const} < \infty, \quad Z = \text{const} < \infty.$$

Подбирая Z_m и Z , для некоторых потенциалов можно достичь выполнения требований (114), накладываемых на систему (111). Некоторые авторы предлагают постоянные Z_m , Z заменить функциями $Z_m(p)$, $Z(p)$ и подбирать их специальным образом. Эти вопросы обсуждаются, в частности, в работах [81–83].

Более общий подход к модификации системы (111) состоит в следующем. Сохраняя вид системы ШД, введем в выражение (112) некоторые новые функции $f_1(p, q)$ и $f_2(p, q)$:

$$\begin{cases} I_1(p) = \int_0^\infty dq V_1(p, q) \cos(2v(q)) f_1(p, q), \\ I_2(p) = \int_0^\infty dq V_2(p, q) \sin(2v(q)) f_2(p, q). \end{cases} \quad (115)$$

Выбирая различным образом функции f_1 и f_2 , мы получаем различные модификации уравнения ШД. Так, например, полагая

$$f_1 = \frac{\cos(2v(p)) - m_0/\sqrt{p^2 + m_0^2}}{\cos(2v(p))}, \quad f_2 = \frac{\sin(2v(p)) - 1}{\sin(2v(p))},$$

получаем систему уравнений ШД, рассмотренную в работе [82]. При $f_1 \equiv 1$ и $f_2 \equiv 0$ мы имеем один из вариантов модификации уравнения ШД, рассмотренный в работе [93], и т.д. В качестве вариантов выбора функций f_1 и f_2 могут рассматриваться, например, аналитические решения уравнения Шредингера с соответствующим потенциалом, а также функции вида $p^a \exp(-bp)$ или $cp^a/(p^a + 1)^b$ и т.п., где $a \geq 0, b \geq 1, c > 0$. Отметим, что поскольку решения $E(p)$ и $v(p)$ системы (111),(113),(115) описывают не свободные кварки, а кварки, находящиеся в связанном состоянии ("внутри мезона"), то выбор функций f_1 и f_2 можно связать не только с решениями системы ШД, но и с решениями $U_1(p)$ и $U_2(p)$ уравнения БС, т.е. $f_1 = f_1(p, U_1(p)), f_2 = f_2(p, U_2(p))$. Уравнения ШД и БС в этом случае надо решать как единую систему уравнений. Здесь мы не занимаемся физическим обоснованием замены системы (111)—(113) на систему (111),(113),(115) и конкретного выбора функций f_1 и f_2 . Критерием вида этих функций в данном случае является правильное асимптотическое поведение решений, отсутствие расходимостей в интегралах I_1 и I_2 , а также качественное и количественное описание характеристик мезонов как связанных состояний кварка и антикварка.

Таким образом, система уравнений ШД сводится к решению краевой задачи для системы нелинейных уравнений (111),(113),(115) с граничными условиями

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} v(p) = \pi/4, \quad \lim_{p \rightarrow 0} E(p) = \text{const}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} E(p) = p.$$

4.2. Уравнение Бете — Солпитера. Рассмотрим уравнение БС для псевдоскалярных мезонов, состоящих из кварков с разными массами [84]:

$$ML_{(2)}^{(2)}(\vec{p}) = E_t(p)L_{(2)}^{(1)}(\vec{p}) - \quad (116)$$

$$- \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(|\vec{p} - \vec{q}|) [C_p^{(+)} C_q^{(+)} + \xi S_p^{(+)} S_q^{(+)}] L_{(\frac{1}{2})}(\vec{q}),$$

где

$$C_p^{(+)} = \cos(v_1(p) \pm v_2(p)), \quad S_p^{(+)} = \sin(v_1(p) \pm v_2(p)),$$

v_1, v_2 и E_1, E_2 – решения уравнения ШД для кварка и антикварка с токовыми массами m_{01} и m_{02} соответственно, $E_t(p) = E_1(p) + E_2(p)$ – полная энергия мезона, M – собственное значение (масса связанного состояния), $L_{(\frac{1}{2})}$ – волновые функции. Условие нормировки имеет вид:

$$\frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} L_1(\vec{q}) L_2(\vec{q}) = 1, \quad (117)$$

где $N_C = 3$ – квантовое число. Используя полученные решения системы (116), можно вычислить константы лептонных распадов псевдоскалярных мезонов:

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} L_2(\vec{q}) \cos(v_1(q) + v_2(q)). \quad (118)$$

Будем искать решения системы (116) в виде разложения по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$L_{(\frac{1}{2})}(\vec{p}) = \frac{1}{p} \sum_{l,m} U_{(\frac{1}{2})lm}(p) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (119)$$

В сферически-симметричном случае ($l, m = 0$), обозначив для краткости $U_{(\frac{1}{2})00} = U_{(\frac{1}{2})}$, получаем

$$MU_{(\frac{1}{2})}(p) = E_t(p)U_{(\frac{1}{2})}(p) - 2 \int_0^\infty dq [C_p^{(+)} C_q^{(+)} \hat{V}_1(p, q) + S_p^{(+)} S_q^{(+)} \hat{V}_2(p, q)] U_{(\frac{1}{2})}(q), \quad (120)$$

$$\frac{4N_C}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq U_1(q) U_2(q) = 1, \quad (121)$$

где $\hat{V}_1(p, q) = \frac{p}{q} V_1(p, q)$, $\hat{V}_2(p, q) = \frac{p}{q} V_2(p, q)$, $V_1(p, q)$ и $V_2(p, q)$ определяются формулой (113).

Формула для константы лептонных распадов принимает вид:

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{4\pi} \int_0^\infty dq q U_2(q) \cos(v_1(q) + v_2(q)). \quad (122)$$

Решения системы (120) должны удовлетворять асимптотическим условиям

$$\lim_{p \rightarrow 0} U_{(1)}(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} U_{(1)}(p) = 0. \quad (123)$$

Таким образом, мы получили задачу на собственные значения для системы (120) с условием нормировки (121) и граничными условиями (123). Еще раз отметим, что в формулы, определяющие задачу БС, входят решения (v_1, E_1) и (v_2, E_2) системы ШД для двух масс кварков m_{01} и m_{02} .

4.3. Потенциалы взаимодействия. В этом разделе представлены наиболее часто используемые эффективные потенциалы взаимодействия и обсуждаются методы численного решения задач ШД и БС с этими потенциалами.

Потенциалы Гаусса и Юкавы. Потенциал Гаусса обычно используется для упрощения модели (например, [93, 94]). Координатное представление этого потенциала следующее

$$V_G = v_g \exp(-\mu^2 r^2) + C, \quad (124)$$

где C – константа, $v_g > 0$ и $\mu > 0$ – параметры. Приведем импульсное представление потенциала (124)

$$V(|\vec{p} - \vec{q}|) = \frac{v_g}{(\sqrt{\pi})^3} R^3 \exp(-R^2 |\vec{p} - \vec{q}|^2) + C(2\pi)^3 \delta(|\vec{p} - \vec{q}|), R = \mu/2. \quad (125)$$

Потенциал, представляющий собой разность двух потенциалов Юкавы, имеет координатную и импульсную форму соответственно:

$$V = \frac{\alpha}{r} \{ \exp(-\mu_1 r) - \beta \exp(-\mu_2 r) \} + C, \quad (126)$$

$$V(\vec{p} - \vec{q}) = 4\pi\alpha \left\{ \frac{1}{\mu^2_1 + |\vec{p} - \vec{q}|^2} - \frac{\beta}{\mu^2_2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2} \right\} + C(2\pi)^3 \delta(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad (127)$$

где α, μ_1, μ_2, C – параметры потенциала. При $\beta=0$ остается только один потенциал Юкавы. Очевидно, что при $\beta = 0, \mu_1 r \ll 1$ потенциал становится похожим на кулоновский. Случай разности двух потенциалов Юкавы ($\beta = 1$) при $\mu_1 \ll \mu_2$ можно рассматривать как способ регуляризации кулоновского потенциала в ультрафиолетовой области ($|\vec{p} - \vec{q}|^2 \gg \mu_2^2$).

Для решения перенормированной системы (111), (113), (115) с потенциалом (124), (125) при $f_1 \equiv 1, f_2 \equiv 0$ в работе [95] применялся модифицированный ньютоновский алгоритм [96]. При этом постановка задачи путем простых преобразований формулировалась в виде нелинейного интегрального уравнения для определения массовой функции кварка

$$m(p) = m_0 + \int_0^\infty dq V(q, p) m(q) / \sqrt{m^2(q) + q^2}, \quad (128)$$

где

$$V(p, q) = \alpha_g \frac{p}{q} [\exp(-\beta_g(p^2 + q^2)) \sinh(2\beta_g pq)], \quad (129)$$

α_g и β_g – параметры.

В работах [93, 98] для решения задачи ШД использовался представленный в [93] итерационный процесс. Отметим, что численные результаты, полученные при решении системы ШД указанным методом, согласуются с результатами решения уравнения (128)–(129), полученными на основе модифицированной ньютоновской итерационной схемы, описанной в [96].

Система БС (120) для потенциалов (124)–(125) и (126)–(127) представляет собой задачу на собственные значения для двух линейных интегральных уравнений с условием нормировки (121). Ее численное решение осуществлялось с использованием программного комплекса SYSINT (SYSINTM) [97], предназначенного для решения задачи на собственные значения для системы линейных интегральных уравнений с использованием модифицированных итерационных схем на основе обобщенного НАМН. При вычислении интегралов использовалась квадратурная формула Симпсона, обеспечивающая порядок аппроксимации $O(h^4)$, что подтверждается численными экспериментами на последовательности сгущающихся сеток с шагом аргумента $h, h/2, h/4$ (см. табл.1).

Таблица. 1. $m_{01} = m_{02} = 0,01$

h	M (потенциал Гаусса) $\beta = 3$	M (потенциал Юкавы) $\mu_1 = 0,001, \mu_2 = 5, \alpha = 1, 8$
0,100	0,192851	0,461893
0,050	0,202286	0,463275
0,025	0,201669	0,463363
$\sigma_M = \frac{M_h - M_{h/2}}{M_{h/2} - M_{h/4}}$	15,17	15,71

Осцилляторный и гауссовский потенциалы. Осцилляторный потенциал, координатное и импульсное представление которого, соответственно, имеет вид

$$V_O(r) = -v_o r^2, \quad V_O(|\vec{p} - \vec{q}|) = -(2\pi)^3 v_o \Delta_{\vec{p}} \delta(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad (130)$$

часто используется как приближение линейного для упрощения модели [81, 90–92, 99]. При этом, как показано в работах [90, 91], уравнение ШД удается свести к нелинейному дифференциальному уравнению вида

$$\psi''(p) + 2\psi'(p)/p - 2p \sin \psi(p) + \sin 2\psi(p)/p^2 + 2m_0 - 2 \cos \psi(p) = 0 \quad (131)$$

с граничными условиями

$$\psi(0) = \pi/2, \quad \psi(\infty) = m_0/\sqrt{p^2 + m_0^2}.$$

В указанных работах численное исследование уравнения (131) проводилось с помощью ньютоновской итерационной схемы. В работе [99] рассматривалась некоторая модификация задачи (131), позволяющая более точно описать некоторые экспериментальные характеристики. Ее решение также осуществлялось на основе НАМН.

Рассмотрим более общий случай, а именно, комбинацию осцилляторного и гауссовского потенциалов:

$$V = V_G + V_O, \quad V_G = v_g \exp(-\mu^2 r^2) + C, \quad V_O = -v_o r^2. \quad (132)$$

Импульсное представление потенциала (132) имеет вид

$$V(|\vec{p} - \vec{q}|) = \frac{v_g}{(\sqrt{\pi})^3} R^3 \exp(-R^2 |\vec{p} - \vec{q}|^2) + C(2\pi)^3 \delta(|\vec{p} - \vec{q}|) - \\ - v_o (2\pi)^3 \Delta_{\vec{p}} \delta(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad R = 1/(2\mu). \quad (133)$$

При этом выражения (112) принимают вид

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 = [(\sin(\phi(\tilde{p})))'' + \frac{2}{p}(\sin(\phi(\tilde{p})))'] + \tilde{J}_1, \\ \tilde{I}_2 = [(\cos(\phi(\tilde{p})))'' + \frac{2}{p}(\cos(\phi(\tilde{p})))' - \frac{2}{p^2} \cos(\phi(\tilde{p}))] + \tilde{J}_2, \end{cases}$$

где

$$J_1 = \hat{\alpha} \int_0^\infty dq V_1(p, q) \cos(2v(q)), \quad J_2 = \hat{\alpha} \int_0^\infty dq V_2(p, q) \sin(2v(q)), \quad (134)$$

$$V_1 = R \frac{q}{p} [\exp(-R^2(p^2 + q^2)) \sinh(2R^2 pq)], \quad (135)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Rp^2} \{ \exp(-R^2(p^2 + q^2)) [2R^2 pq \cosh(2R^2 pq) - \sinh(2R^2 pq)] \}. \quad (136)$$

Численное исследование системы (115), (134)—(136) проводилось в работе [100]. Уравнение ШД в этом случае сводится к нелинейной граничной задаче для одного интегродифференциального уравнения (при $V_g = 0$, $f_1 \equiv f_2 \equiv 1$ мы получаем дифференциальное уравнение (131)). Численное решение такой задачи осуществлялось с помощью модифицированного ньютоновского алгоритма, рассмотренного в работах [64].

Постановка задачи (120) для потенциала (132) имеет вид задачи на собственные значения для системы двух линейных интегродифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} MU_{(1)}(p) + U_{(1)}''(p) + W_{(1)}(p)U_{(1)}(p) = \\ = -2 \int_0^\infty dq [C_p^{(+)} C_q^{(+)} \hat{V}_1(p, q) + S_p^{(+)} S_q^{(+)} \hat{V}_2(p, q)] U_{(1)}(q), \end{aligned} \quad (137)$$

с условием нормировки (121), где

$$W_1 = -\{E_t + \frac{1}{4}(\phi_1' + \phi_2')^2 + \frac{2}{p^2} \cos^2(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2})\}, \quad (138)$$

$$W_2 = -\{E_t + \frac{1}{4}(\phi_1' - \phi_2')^2 + \frac{2}{p^2} \sin^2(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2})\}, \quad (139)$$

$$\phi_i = -2v_i + \pi/2, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи (137)—(138) осуществлялось в [100] с помощью той же модификации НАМН, предложенной в [64]. Для случая $V_g = 0$, когда уравнения системы становятся дифференциальными, использовался программный комплекс SLIPS2 [25].

Комбинация кулоновского и линейного потенциалов. Координатное представление комбинации кулоновского и линейного потенциалов имеет вид

$$V(r) = -\alpha_c \frac{1}{r} + \sigma r, \quad (140)$$

где α_c и σ — параметры. В импульсном представлении имеем

$$V(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\alpha_c \frac{4\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} - \sigma \frac{8\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^4}. \quad (141)$$

Используя тождество

$$\frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^4} = \frac{1}{6} \Delta_p \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2}, \quad (142)$$

систему (115) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + I_{1K} + I_{1L}, \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + I_{2K} + I_{2L}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= -\frac{\alpha_c}{2\pi}, \quad \bar{\sigma} = -\frac{\sigma}{\pi}, \\ I_{1C} &= \frac{\bar{\alpha} \hat{I}_{1C}}{p}, \quad I_{2C} = \frac{\bar{\alpha} \hat{I}_{2C}}{p}, \quad I_{1L} = \frac{\bar{\sigma} \hat{I}_{1C}''}{2p}, \quad I_{2L} = \frac{\bar{\sigma}}{2p} [\hat{I}_{2C}'' - \frac{2\hat{I}_{2C}}{p^2}], \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \hat{I}_{1C}(p) = \int_0^\infty dq q \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \cos(2v(q)) f_1(p, q), \\ \hat{I}_{2C}(p) = \int_0^\infty dq q \left[-1 + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right] \sin(2v(q)) f_2(p, q). \end{cases}$$

Для численного решения такой системы в работе [101] использовался алгоритм, описанный в [93].

В работе [101] показано также, что уравнение БС для потенциала (140)—(141) удается свести к системе вида

$$\begin{cases} V_{13}(p)U_1''(p) + V_{12}(p)U_1'(p) + V_{11}(p)U_1(p) - MU_2(p) - 2J_{12}(U_1, U_2, p) = 0 \\ V_{23}(p)U_2''(p) + V_{22}(p)U_2'(p) + V_{21}(p)U_2(p) - MU_1(p) - 2J_{22}(U_1, U_2, p) = 0, \end{cases} \quad (143)$$

где функции J_{12} и J_{22} нелинейно зависят от собственных функций U_1, U_2 .

Для численного решения системы (143) в [101] была разработана модифицированная ньютоновская схема, аналогичная предложенному в [67] алгоритму, сочетающая НАМН с методом последовательных приближений. Вычислительная схема реализована на равномерной сетке по аргументу p с шагом h и имеет второй порядок сходимости, что подтверждается расчетами на последовательности вдвое сгущающихся сеток, представленными в табл. 2.

Таблица. 2. Интервал [0,6], $m_0 = 0, 1, \bar{\alpha} = 0, 1, \bar{\sigma} = 0, 1$

h	M	$U_1(0, 6)$	$U_2(0, 6)$
0,100	1,7691	7,8183	6,6219
0,050	1,7744	7,7721	6,6048
0,025	1,7757	7,7607	6,6005
	$\frac{M_h - M_{h/2}}{M_{h/2} - M_{h/4}} = 4, 16$	$\frac{U_{1,h} - U_{1,h/2}}{U_{1,h/2} - U_{1,h/4}} = 4, 05$	$\frac{U_{2,h} - U_{2,h/2}}{U_{2,h/2} - U_{2,h/4}} = 3, 94$

Анализ численных результатов. В работах [93, 98, 100, 101] было проведено численное исследование уравнений ШД и БС с различными видами эффективных потенциалов. Решения получены для пиона как связанного состояния кварка и антикварка, имеющих ненулевые токовые массы.

Поскольку, как уже упоминалось выше, в ряде работ других авторов расчетные значения констант лептонного распада не соответствовали имеющимся экспериментальным данным, целью проведенных расчетов была попытка описания экспериментального значения константы лептонного распада F_π для основного состояния псевдоскалярного пиона.

Поэтому в качестве критерия выбора свободных параметров модели использовалось экспериментальное значение отношения массы и константы лептонного распада пиона $M_\pi/F_\pi \sim 1,04$. Для каждого из упомянутых выше потенциалов были найдены параметры и схема модификации системы ШД, удовлетворяющие указанному экспериментальному значению.

В частности, в работе [93] впервые было показано, что существует схема перенормировки решений задачи ШД, позволяющая описать значение F_π в рассматриваемом классе моделей.

Для фиксированных из условия выполнения этого соотношения параметров были вычислены также радиально возбужденные состояния пиона. Однако при указанном способе выбора параметров модели уровни энергии радиально возбужденных состояний оказались ниже имеющихся экспериментальных оценок, приведенных в [102]. Исключение составил осцилляторный потенциал [84], для которого энергии радиально возбужденных состояний существенно превышают экспериментальные данные.

4.4. Обобщение КХД-инспирированной модели на случай конечных температур. Обобщение уравнений ШД и БС на случай конечной температуры и барионной плотности, предложенное в работах [94, 103], интересно с точки зрения решения актуальной проблемы описания горячей и плотной адронной материи (кварк-глюонной плазмы) [104]. Поскольку до сих пор [105, 106] указанная проблема рассматривалась в основном в рамках модели Намбу — Йона-Лазинио [107], эквивалентной сепарабельному приближению [108] рассматриваемых уравнений, сравнение результатов численного решения полной системы уравнений ШД и БС с результатами, полученными в сепарабельном приближении, полезно для анализа применимости теоретической модели.

Такое исследование было проведено в [109]. Так же, как и в [93, 94], для упрощения модели использовался эффективный потенциал в виде гауссиана.

С точки зрения постановки задачи включение температурной зависимости приводит к появлению дополнительного уравнения для химического потенциала. В результате, как показано в [110], задача ШД принимает вид системы трех нелинейных интегральных уравнений в трехмерном импульсном пространстве

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p} - \vec{q}|) [1 - f(q) - \bar{f}(q)] \cos(2v(q)) / (2\pi)^3, \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p} - \vec{q}|) \xi [1 - f(q) - \bar{f}(q)] \sin(2v(q)) / (2\pi)^3, \end{cases} \quad (144)$$

$$\mu(p) = \mu_0 + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p} - \vec{q}|) [f(q) - \bar{f}(q)] / (2\pi)^3, \quad (145)$$

где

$$f(p) = \frac{1}{1 + \exp [\beta_T(E(p) - \mu(p))]}, \bar{f}(p) = \frac{1}{1 + \exp [\beta_T(E(p) + \mu(p))]}. \quad (146)$$

Как и в п.4.1, интегрирование ведется в трехмерном импульсном пространстве, $\xi = (\vec{p}/p, \vec{q}/q)$ – скалярное произведение единичных трехмерных векторов, $\beta_T = 1/T$, T – температура, $E(p)$, $v(p)$, $\mu(p)$ – соответственно, энергия кварка, его волновая функция и химический потенциал, которые надо найти. Токовая масса кварка m_0 и начальный химический потенциал μ_0 рассматриваются в данном случае как заданные параметры модели.

После интегрирования по углам $\Omega\vec{q}$, перехода к безразмерным величинам и некоторых преобразований получаем систему

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}(2v(p)) = \frac{m_0 + I_1(p)}{p + I_2(p)}, \\ E(p) = \frac{1}{2}C[1 - f(p) - \bar{f}(p)] + [m_0 + I_1(p)] \cos(2v(p)) + \\ \quad + [p + I_2(p)] \sin(2v(p)), \\ \mu(p) = \mu_0(p) + \frac{1}{2}C[f(p) - \bar{f}(p)] + \int_0^\infty dq V_1(p, q)[f(q) - \bar{f}(q)], \end{cases} \quad (147)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dq V_1(p, q)[1 - f(q) - \bar{f}(q)] \cos(2v(q)) f_1(p, q), \\ I_2 &= \int_0^\infty dq V_2(p, q)[1 - f(q) - \bar{f}(q)] \sin(2v(q)) f_2(p, q), \\ \begin{cases} V_1 = R \frac{q}{p} \exp(-R^2(p^2 + q^2)) \sinh(2R^2 pq), \\ V_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{R p^2} \exp(-R^2(p^2 + q^2)) [2R^2 pq \cosh(2R^2 pq) - \sinh(2R^2 pq)]. \end{cases} \end{aligned} \quad (148)$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи БС. Как показано в [110], в случае неравных токовых масс кварков для псевдоскалярных мезонов уравнение БС имеет вид задачи на собственные значения для системы четырех интегральных уравнений

$$\begin{aligned} (E^{(N)}(p) - M) L_{\left(\begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}^{(N)}(\vec{p}) = \\ = \alpha \begin{pmatrix} N \\ + \end{pmatrix} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(|\vec{p} - \vec{q}|) [c_p^{(+)} c_q^{(-)} + \xi c_p^{(-)} c_q^{(+)}] L_{\left(\begin{smallmatrix} A \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}^{(N)}(\vec{q}), \end{aligned} \quad (149)$$

где

$$c_p^{(+)} = \cos(v_1(p) \pm v_2(p)), \quad s_p^{(+)} = \sin(v_1(p) \pm v_2(p)),$$

$$\alpha_{(\pm)}^{(N)} = (a_+^{(N)} \pm a_-^{(N)})/2, \quad E^{(N)} = E_1 \pm E_2,$$

$$a_+^N = 1 - f_1 - \bar{f}_2, \quad a_-^N = 1 - \bar{f}_1 - f_2, \quad a_+^A = f_2 - f_1, \quad a_-^A = \bar{f}_2 - \bar{f}_1$$

$$f_i = \frac{1}{1 + \exp[\beta_T(E_i - \mu_i)]}, \quad \bar{f}_i = \frac{1}{1 + \exp[\beta_T(E_i + \mu_i)]}, \quad i = 1, 2,$$

v_1, v_2, E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – решения уравнения ШД и химический потенциал для кварка и антикварка с заданными токовыми массами m_{01} и m_{02} , M – собственное значение (масса связанного состояния), $L_{(1)}^{(N)}$ – волновые функции.

Условие нормировки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} & \left(\frac{(L_1^N(\vec{q}) + L_2^N(\vec{q}))^2}{a_+^N} - \frac{(L_1^N(\vec{q}) - L_2^N(\vec{q}))^2}{a_-^N} - \right. \\ & \left. - \frac{(L_1^A(\vec{q}) + L_2^A(\vec{q}))^2}{a_+^A} + \frac{(L_1^A(\vec{q}) - L_2^A(\vec{q}))^2}{a_-^A} \right) = 1. \end{aligned} \quad (150)$$

Константы лептонных распадов согласно [110] могут быть вычислены с использованием полученных решений по формуле

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} (L_2^N(\vec{q}) \cos(v_1(q) + v_2(q)) - L_2^A(\vec{q}) \sin(v_1(q) + v_2(q))). \quad (151)$$

Для сферически-симметричного случая, переходя к конечному интервалу интегрирования $[0, p_M]$, мы получаем задачу на собственные значения для системы четырех линейных интегральных уравнений.

Для случая равных токовых масс кварков $m_{01} = m_{02}$ система БС несколько упрощается и сводится к задаче на собственные значения для системы двух интегральных уравнений.

Для численного решения указанных уравнений применялись описанные в [93] алгоритмы и программы, существенно модифицированные с учетом специфики данной задачи. Для решения задачи ШД использовался метод простых итераций. Для решения системы БС использовалась программа SYSINT(SYSINTM) [97]. Поскольку введение дополнительных параметров – температуры и химического потенциала – делает задачу более громоздкой, для ее успешного решения применялся метод продолжения по параметру [4], позволяющий использовать в качестве начального приближения решения, уже полученные для других параметров задачи.

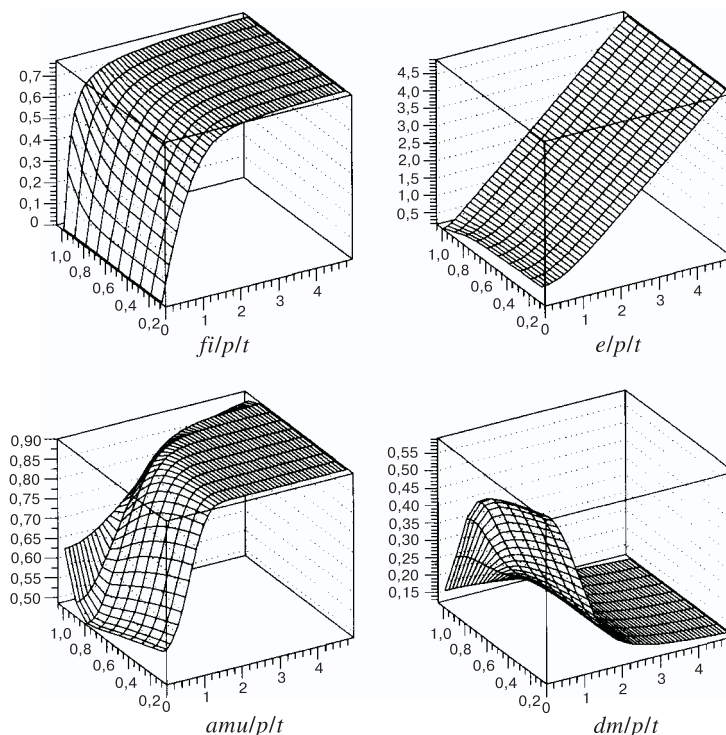


Рис. 2. Зависимость решений уравнения ШД от температуры T и импульса P ($v(T, p) = fi/p/t$, $E(T, p) = e/p/t$, $\mu(T, p) = amu/p/t$ и $m(T, p) = E(T, p) \cos(2v(T, p)) = dm/p/t$) для токовой массы кварка $m_0 = 0,1$ и начального химического потенциала $\mu_0 = 0,9$ при $I_2 = 0$

В табл. 3 представлены некоторые результаты расчетов на последовательности вдвое сгущающихся сеток, которые подтверждают, что вычислительная схема имеет порядок сходимости $O(h^4)$, соответствующий порядку численной аппроксимации задачи.

Решения задач ШД и БС для некоторых значений параметров приведены на рис.2–4. Нужно заметить, что качественное поведение решений рассматриваемых задач в модифицированном варианте (при $I_2 \equiv 0$) аналогично результатам, полученным в [110] для модели Намбу — Иона-Лазинио.

Отметим, что разработанное программное обеспечение позволяет получать решения для различных значений параметров задачи (массы кварков, температуры и начального значения "химпотенциала"). Поэтому необходимы дополнительные условия для определения решений, интересных для физических исследований.

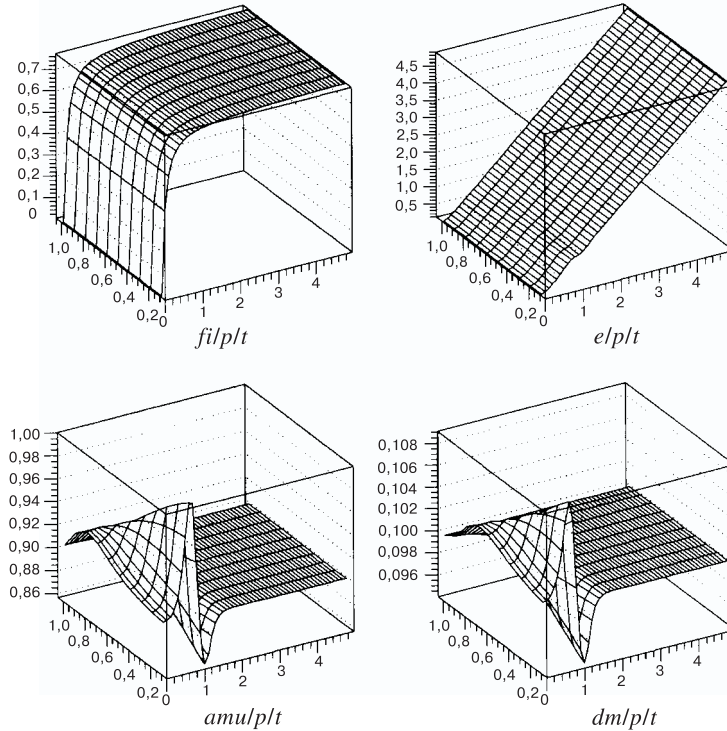


Рис. 3. Зависимость решений уравнения ШД от температуры T и импульса P ($v(T, p) = fi/p/t$, $E(T, p) = e/p/t$, $\mu(T, p) = am/p/t$ и $m(T, p) = E(T, p) \cos(2v(T, p)) = dm/p/t$) для токовой массы кварка $m_0 = 0, 1$ и начального химического потенциала $\mu_0 = 0, 9$ для немодифицированной системы ($I_2 \neq 0$)

Следует отметить также, что разработанный подход к решению рассматриваемых задач и созданное программное обеспечение позволяют проводить численный анализ теоретических моделей и для потенциалов другого вида (например, в виде функции Юкавы).

Численное исследование уравнений ШД и БС с различными видами потенциалов показывает, что в рамках рассматриваемого подхода возможно количественное описание некоторых из имеющихся экспериментальных данных. Так, с применением комбинации кулоновского и линейного потенциалов получено удовлетворительное описание спектров масс и констант лептонных распадов тяжелых кваркониев. В приближении осциляторного потенциала удастся описать спектры масс как тяжелых, так и легких кваркониев. В работе [93] на примере потенциала Гаусса впервые была показана возможность правильного описания константы распада для основного состояния

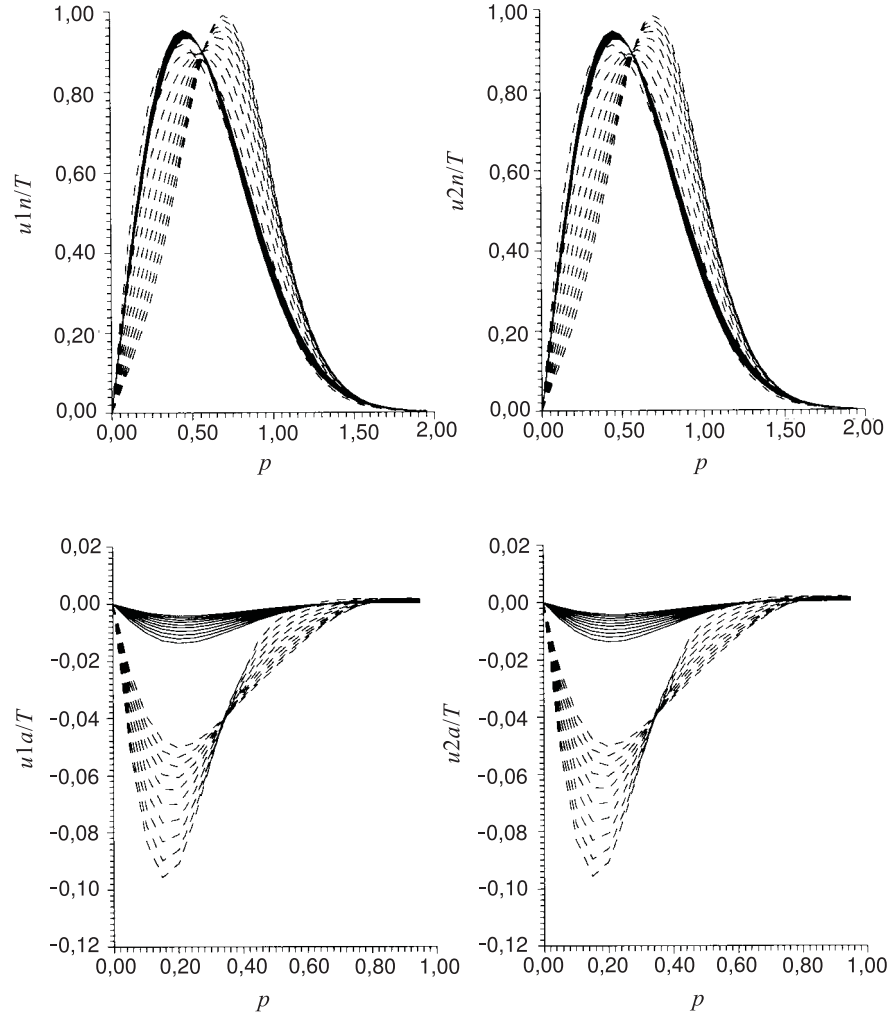


Рис. 4. Волновые функции уравнений БС в зависимости от температуры $T = 0, 1(0, 1)1$; для токовых масс кварков $m_{01} = 0, 8$, $m_{02} = 0, 4$ и $\mu_0 = 1$; для $I_2 = 0$ — сплошные и для $I_2 \neq 0$ — пунктирные кривые

Таблица. 3. $m_{01} = m_{02} = 0, 1, T = 0, 1, \mu_0 = 1$

h	M	$U_1(1, 96)$	$U_2(1, 96)$
0,07	0,5150346	0,6175460E-02	0,5610517E-02
0,035	0,5150543	0,6176788E-02	0,5611749E-02
0,0175	0,5150554	0,6176862E-02	0,5611821E-02
	$\frac{M_h - M_{h/2}}{M_{h/2} - M_{h/4}} = 17, 9$	$\frac{U_{1,h} - U_{1,h/2}}{U_{1,h/2} - U_{1,h/4}} = 17, 9$	$\frac{U_{2,h} - U_{2,h/2}}{U_{2,h/2} - U_{2,h/4}} = 17, 1$

пиона. Аналогичные результаты получены для потенциала Юкавы и комбинации осцилляторного потенциала с гауссовским.

Проведенные численные исследования системы нелинейных уравнений, включающей сингулярную граничную и спектральную задачи, показали эффективность вычислительных схем, построенных на основе обобщения непрерывного аналога метода Ньютона. Их широкие возможности продемонстрированы как для задач ШД и БС без учета температурного фактора, так и для обобщения этих уравнений на случай ненулевой температуры и барионной плотности.

Анализ полученных результатов может служить основой для дальнейшего развития используемых теоретических подходов и их экспериментальной проверки.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом обзоре дано систематическое описание вычислительного аппарата для исследования задач, возникающих в некоторых квантово-полевых моделях и потенциальных моделях КХД. Единой основой для разработки вычислительных схем служит обобщение непрерывного аналога метода Ньютона, которое представляет собой качественно новое развитие НАМН на основе объединения идей методов теории возмущений и эволюции по параметрам. Показано, что с помощью излагаемого подхода можно построить эффективные итерационные схемы с оптимальным шагом, дающие возможность обращаться на каждом итерационном шаге регулярную часть линейного оператора производной или избежать обращения этого оператора. Дано обоснование сходимости разработанных вычислительных схем и показана их связь с рядом существующих методов.

В обзоре представлены результаты численного исследования моделей теории полярона, биполярона, сольватированного электрона и потенциальных моделей КХД с различными типами потенциалов.

Как результат, продемонстрирован эффективный численный метод исследования широкого класса нелинейных моделей теоретической физики.

НАМН, развиваемый в ОИЯИ на протяжении более тридцати лет, и сегодня подтверждает свою жизнеспособность. Причиной этого является его тесная связь с практическими задачами математического моделирования физических процессов, откуда непрерывно поступают как новые требования к методу, так и новые идеи, стимулирующие его развитие.

Авторы благодарны профессору Е.П.Жидкову за внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. — ЭЧАЯ, 1973, т.4, в.1, с.127.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. — ДАН СССР, 1976, т.231, в.5, с.1052;
Жидков Е.П., Перельштейн Э.А., Иванов И.Н. и др. — ЖВМ и МФ, 1975, т.15, в.5, с.1241;
Жидков Е.П., Визнер Я., Лелек В. и др. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, в.3, с.710.
3. Като Т. — Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. — Итерационные методы решения нелинейных систем со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
5. Давиденко Д.Ф. — Укр. матем. журнал, 1955, т.7, в.1, с.18.
6. Киржниц Д.А., Такибаев Н.Г. — ЯФ, 1977, т.25, с.700
7. Марчук Г.И. — Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
8. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. — Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
9. Александров Л. — Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, в.7, с.1281.
10. Системы параллельной обработки. Ред. Ивенс Д., М.: Мир, 1985.
11. Blum E.K., Chang A.F. — J. Inst. Math. Appl., 1978, v.22, p.29.
12. Bracci L., Fiorentini G. — Phys.Rep. 1982, v.86, p.169.
13. Puzynin I.V., Vinitsky S.I. — J.Muon Catalyzed Fusion, 1988, v.3, p.307.
14. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. — ЖВМ и МФ, 1981, 21, с.491.
15. Лебедев К.А. — ЖВМ и МФ, 1996, т.36, в.3, с.6.
16. Родионов И.Д. — Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. д.ф.м.н., Дубна, 1987.
17. Гавурин М.К. — Изв.вузов. Сер. матем., 1958, т.5(6), с.18.
18. Кивистик Л.А. — Докл. АН СССР, 1961, т.136, в.1, с.22.
19. Жанлав Т., Пузынин И.В. — ЖВМ и МФ, 1992, т.32, в.6, с.846.
20. Пузынин И.В. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.м.н., Дубна, 1969.
21. Пузынин И.В. — Дисс. на соиск. уч. ст. д.ф.м.н., Дубна, 1978.
22. Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Стриж Т.А. — Сообщение ОИЯИ, P11-87-332, Дубна, 1987.

23. Акишин П.Г., Пузынин И.В. — Сообщение ОИЯИ, 5-10992, Дубна, 1977.
24. Уилкинсон Дж.Х. — Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
25. Пузынина Т.П. — Сообщение ОИЯИ, P11-89-728, Дубна, 1989.
26. Стриж Т.А. — Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук, Дубна, 1988.
27. Жанлав Т., Пузынин И.В. — ЖВМ и МФ, 1994, т.34, в.2, с.175.
28. Бахвалов Н.С. — Численные методы. М.: Наука, 1976.
29. Самарский А.А. — Теория разностных схем. М.: Наука, 1980.
30. Глазман И.М. — Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
31. Канторович Л.В. — УМН, 1956, т.11, в.6, с.90.
32. Жанлав Т., Пузынин И.В. — ЖВМ и МФ, 1992, т.31, в.1, с.3.
33. Виницкий С.И., Пономарев Л.И., Пузынин И.В., Пузынина Т.П. — Сообщение ОИЯИ, P4-10942, Дубна, 1977.
34. Виницкий С.И., Гочева А.Д., Пузынин И.В. — Сообщение ОИЯИ, P11-81-837, Дубна, 1981;
Виницкий С.И., Гочева А.Д., Пузынин И.В. — Сообщение ОИЯИ, P11-82-314, Дубна, 1982;
Виницкий С.И., Гочева А.Д., Пузынин И.В. — Сообщение ОИЯИ, P11-82-315, Дубна, 1982.
35. Виницкий С.И., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С. — Сообщение ОИЯИ, P11-91-327, Дубна, 1991.
36. Жанлав Т., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С. — Сообщение ОИЯИ, P11-90-501, Дубна, 1990.
37. Виницкий С.И., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С. — Ядерная физ., 1990, т.52, в.4(10), с.1176.
38. Жанлав Т., Пузынин И.В., Ракитский А.В. — Сообщение ОИЯИ, P11-88-823, Дубна, 1988.
39. Бояджиев Т.Л., Жанлав Т., Пузынин И.В. — Сообщение ОИЯИ, P11-89-423, Дубна, 1989.
40. Александров Л. — ЖВМ и МФ, 1970, т.11, в.1, с.36.
41. Puzynin I.V., Amirkhanov I.V., Puzynina T.P., Zemlyanaya E.V. — JINR Rapid Comm., 1993, No.62, p.63.
42. Давиденко Д.Ф. — Докл. АН СССР, 1960, т.131, No.3, с. 500.
43. Holbrow W., Hass R., Kalaba R., Zagustin E. — Report University of Southern California, Los Angeles, 1972.
44. Калиткин Н.Н. — Численные методы. М.: Наука, 1978.
45. Ортега Дж. — Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
46. Airapetyan R.G., Puzynin I.V. — Comp. Phys. Comm., 1997, v.102, p.97.
47. Амирханов И.В., Пузынин И.В., Стриж Т.А. — Сообщение ОИЯИ, P11-91-454, Дубна, 1991.
48. Perspectives of polarons. Eds. G.N.Chuev, V.D.Lakhno, World Scientific, Singapore, 1996.
49. Фирсов Ю.А. — Поляроны. М.: Наука, 1975.
50. Lakhno V.D. — In: Polarons and Applications, Ed. V.D.Lakhno, Chichester, 1994, p.5.

51. **Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Strizh T.A., Fedyanin V.K., Lakhno V.D.** — In: Excited polaron states in condensed media, Ed. V.D.Lakhno, Manchester Univ. Press, Manchester, 1991.
52. **Luttinger J., Lu Ch.Y.** — Phys.Rev. B, 1980, v.21, p.4251.
53. **Пикаев А.К.** — Сольватированный электрон в радиационной химии. М.: Наука, 1969.
54. **Лакно В.Д.** — ТМФ, 1994, т.100, в.2, с.219.
55. **Пекар С.И.** — Исследования по электронной теории кристаллов. М.-Л.:Гостехиздат, 1951.
56. **Боголюбов Н.Н.** — УМЖ, 1950, т.2, с.3.
57. **Mijake S.J.** — J.Phys.Soc.Jap., 1975, v.38, p.181.
58. **Комаров Л.И., Крылов Е.В., Феранчук И.Д.** — ЖВМ и МФ, 1978, т.18, в.3, с.681.
59. **Амирханов И.В., Пузынин И.В., Родригес К. и др.** — Сообщение ОИЯИ, P11-85-445, Дубна, 1985;
Amirkhanov I.V., Lakhno V.D., Puzynin I.V., Strizh T.A. — In 8th Intern.Workshop "Non-linear Evolution Equations & Dynamical Systems "NEEDS'92, Dubna, Russia, Jul.,1992., Singapore a.o. World Sci., 1993, p.406-414.
60. **Feynman R.P.** — Phys.Rev., 1955, 97, p.660.
61. **Lu Y., Shen Ch.K.** — Phys.Rev. B, 1982, v.26, p.4707.
62. **Амирханов И.В., Лакно В.Д., Пузынин И.В., Стриж Т.А., Федянин В.К.** — Препринт НЦБИ АН СССР, Пушино, 1988; в кн: Возбужденные поляронные состояния в конденсированных средах, НЦБИ АН СССР, Пушино, 1990, с.70-86.
63. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Пузынина Т.П.** — Сообщение ОИЯИ, P11-91-87, Дубна, 1991.
64. **Гареев Ф.А., Гончаров С.А., Жидков Е.П. и др.** — ЖВМ и МФ, 1977, т.17, 2, с.407.
65. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Пузынина Т.П.** — Сообщение ОИЯИ, P11-91-139, Дубна, 1991.
66. **Балабаев Н.Л., Лакно В.Д.** — Препринт ОНТИ НЦБН АН СССР, Пушино, 1970.
67. **Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P., Zemlyanaya E.V.** — Preprint JINR, E11-92-205, Dubna, 1992; In: Polarons and Applications. Ed. by Lakhno V.D., Chishester a.o.: Willey, 1994, p.445.
68. **Марчук Г.И.** — Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
69. **Габдуллин Р.Р.** — Препринт НЦБИ АН СССР, Пушино, 1991;
Габдуллин Р.Р. — Доклады РАН, 1993, т.333, в.1, с.23-27.
70. **Акишин П.Г., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С.** — ЖВМ и МФ, 1996, т.36, в.7, с.109-118.
71. **Lakhno V.D., Vasil'ev O.V.** — Chem.Phys. 1991, v.153, (n.1,2), p.147; Phys.Lett. 1991, v.A 152, (n.5,6), p.300.
72. **Ericson T., Weise W.** — Pions and Nuclei. Clarendon Press, Oxford, 1988.
73. **Brown G.E., Jackson A.D.** — The Nucleon-Nucleon Interaction. North-Holland P.C., Amsterdam, 1976.
74. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Лакно В.Д. и др.** — Мат. моделирование, 1997, т.9, в.8, с.52;
Amirkhanov I.V., Lakhno V.D., Puzynin I.V. et al. — In: III International Symposium "Dubna-Deuteron 95" (4-7 July 1995) E2-96-100, Dubna, 1996, p.58;
Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P. et al. — In: 9th International Conference "Computational Modelling and Computing in Physics" (Dubna, September 16-21 1996). JINR, D5,11-97-112, Dubna, 1997, p.48;
Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P. et al. — In: "Perspectives of Polarons", ed. by G.N.Chuev and V.D.Lakhno, Singapore a.o.: World Sci., 1996, p.229-250.

75. **Амирханов И.В., Пузынин И.В., Стриж Т.А., Васильев О.В., Лахно В.Д.** — Препринт ОНТИ НЦБИ, Пушино, 1990.
76. **Chuev G.N., Lakhno V.D.** — J. Theor. Biol. 1993, v.163, p.51.
77. **Лахно В.Д., Чув Г.Н.** — Биофизика, 1997, т.42, в.3, с.313.
78. **Хартри Д.Р.** — Расчеты атомных структур. М.: ИЛ, 1960.
79. **Калиновский Ю.Л., Каллис В., Куранов Б.Н., Первушин В.Н., Сариков Н.А.** — Ядерная физика, 1989, т.49, с.1709.
80. **Goldrey S., Isgur N.** — Phys. Rev. D, 1985, v.32, No.1;
Yaouanc A. Le, Oliver L., Pene P., Raynal J.C. — Phys. Rev. 1984, D29, p.1233; Phys. Rev. 1985, v.D31, p.137;
Adler S.L., Davis A.S. — Nucl. Phys., 1984, v.B224, p.469;
Pedro J. de A.Bicudo, Jose E.F.T.Ribeiro — Phys. Rev. 1990, v.D42, p.1611.
81. **Kocic A.** — Phys. Rev. 1986, v.D33, p.1785;
McKay D.W., Munczek H.J., Bing-Lin Young — Phys. Rev. 1988, v.D37, p.195.
82. **Trzupek A.** — Acta Physica Polonica, 1989, v.B20, No.2, p.93.
83. **Alkofer R., Amundsen P.A.** — Nucl. Phys. 1988, v.B306, p.305.
84. **Kalinovsky Yu.L., Kallis W., Kaschluhn L. et al.** — Fortschr. Phys., 1990, v.38, p.333; Few Body Systems, 1991, v.10, p.87;
Horvat R., Kekec D., Klabučar D., Palle D. — Phys.Rev. 1991, v.D44, No.5, p.1585.
85. **Gross F.** — Phys.Rev. 1968, v.B6, p.125;
Gross F., Milane J. — Phys.Rev. 1991, v.D43, p.2401;
Gross F., Milane J. — Phys.Rev. 1992, v.D 45, p.969;
Kadyshevsky V.G. — Nucl.Phys. 1968, v.B6, p.125;
Thompson R.H. — Phys.Rev. 1970, v.D1, p.110.
86. **Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В.** — УФН, 1984, т.143, с.3.
87. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Стриж Т.А.** — Препринт ОИЯИ, P11-96-449, Дубна, 1996; Математическое моделирование, 1997, т.9, No.10, с.111;
Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P., Strizh T.A., Zemlyanaya E.V. — In: 9th International Conference "Computational Modelling and Computing in Physics" (Dubna, September 16-21). D5,11-97-112, JINR, Dubna, 1997, p.40.
88. **Maung K.H., Kahana D.E., Norbury J.W.** — Phys.Rev. 1993, v.D 47, 3, p.1183.
89. **Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P., Strizh T.A., Zemlyanaya E.V.** — In: "Lecture Notes in Computer Science"; 1996. Proceedings of WNAA'96 (I International Workshop on Numerical Analysis and Applications, June 1996, Rousse, Bulgaria) Ed. by Vulkov L., Wasniewski J. and Yalamov P. Springer, 1997, p.9.
90. **Амирханов И.В., Жураев О.М., Каллис В. и др.** — Сообщение ОИЯИ, P11-88-506, Дубна, 1988;
Amirkhanov I.V., Juraev O.M., Pervushin V.N. et al. — JINR Comm., E11-91-108, Dubna, 1991.
91. **Amirkhanov I.V., Juraev O.M., Pervushin V.N., Puzynin I.V., Sarikov N.A.** — Preprint JINR, E2-90-414, Dubna, 1990;
Амирханов И.В., Жураев О.М., Первушин В.Н., Пузынин И.В., Сариков Н.А. — Сообщение ОИЯИ, P11-91-111, Дубна, 1991.
92. **Амирханов И.В., Насиров Т.З., Сариков Н.А.** — Сообщение ОИЯИ, P11-93-173, Дубна, 1993.

93. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Первушин В.Н. и др.** — Препринт ОИЯИ, P11-94-74, Дубна, 1994; Математическое моделирование, 1994, т.6, No.7, с.55.
94. **Blaschke D., Kalinovsky Yu.L., Pervushin V.N., Ropke G., Schmidt S.** — Zeitschrift fur Physik, 1993, v.A346, p.85;
Blaschke D. et al. — Preprint JINR, E2-94-307, Dubna, 1994.
95. **Земляная Е.В.** — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.м.н., Дубна, 1994.
96. **Puzynin I.V., Amirkhanov I.V., Puzynina T.P., Zemlyanaya E.V.** — JINR Rapid Comm., 1993, 5[62]-93, Dubna, p.63;
Puzynin I.V., Amirkhanov I.V., Puzynina T.P., Zemlyanaya E.V. — In: International Conference "Programming and Mathematical Techniques in Physics" (JINR, Dubna, Russia, June 1993) ed. by Yu.Yu.Lobanov and E.P.Zhidkov, Singapore a.o.: World Sci., 1994, p.30.
97. **Земляная Е.В.** — Сообщение ОИЯИ, P11-94-120, Дубна, 1994.
98. **Амирханов И.В., Давлатов Х.Ф., Земляная Е.В. и др.** — Сообщение ОИЯИ, P11-94-523, Дубна, 1994.
99. **Амирханов И.В., Насиров Т.З., Первушин В.Н., Сариков Н.А.** — Сообщение ОИЯИ, P11-94-406, Дубна, 1994.
100. **Amirkhanov I.V., Pervushin V.N., Puzynin I.V. et al.** — JINR Comm., E11-94-509, Dubna, 1994.
101. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Стриж Т.А.** — Препринт ОИЯИ, P11-95-8, Дубна, 1995; Математическое моделирование, 1995, т.7, No.7, с.34.
102. Particle Data Group 1992 — Phys. Rev., (1992), v.D45, p.11;
Amelin D.V. et al. — In: Proceed. "Hadron-93", Como, Italy.
103. **Kalinovsky Yu.L., Weiss C.** — Z.Phys.C., 1994, v.63, No.2, p.275.
104. **Karsch F.** — In: Quark-Gluon Plasma, ed. by Hwa R.C., World Scientific, Singapore, 1990, p.61.
105. **Volkov M.K.** — Ann. Phys., 1984, v.157, p.282.
106. **Klevansky S.P.** — Rev. Mod. Phys., 1992, v.64, p.649;
Kalinovsky Yu.L., Kaschluhn L., Pervushin V.N. — Phys. Lett.B., 1989, v.231, No.3., p.288.
107. **Nambu Y., Iona-Lasinio G.** — Phys. Rev. 1961, v.122, p.345; 1961, v.124, p.246;
Volkov M.K. — Ann. Phys. 1984, v.157, p.285;
Ebert D., Reinhardt H. — Nucl. Phys., 1986, v.B27, p.188;
Kalinovsky Yu.L., Kaschluhn L., Pervushin V.N. — Phys. Let., 1989, v.B231, p.288; Fortschr. Phys. 1990, v.38, No.4.
108. **Kallis W., Pervushin V.N., Sarikov N.A.** — Preprint JINR, E9-94-42, Dubna, 1994.
109. **Амирханов И.В., Земляная Е.В., Первушин В.Н. и др.** — Препринт ОИЯИ, P11-95-325, Дубна, 1995; Математическое моделирование, 1997, т.9, No.3, с.73.
110. **Schmidt S., Blaschke D., Kalinovsky Yu.L.** — Phys. Rev. C, 1994, v.50, No.1, p.435.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.126.4

Радиальные возбуждения систем из легких кварков. *Займидорога О.А.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.1, с.5.

В обзоре рассмотрены экспериментальные свидетельства наблюдения радиально-возбужденных резонансных состояний систем из легких кварков, имеющих разные массы для одного и того же состояния по спину и четности. Исследования спектра возбуждения по орбитальному и радиальному квантовому числу проведено во взаимодействиях адронов с ядрами, когда в результате дифракционной диссоциации мезона на ядре как целом рождается тяжелая бозонная система, а ядро остается в основном состоянии. Парциально-волновой анализ позволил определить волновое содержание бозонных состояний по спину и четности в широком интервале масс. Установлены резонансные свойства $a_1(1260)$ -мезона и показано, что когерентный механизм усиливает образование этого резонанса с увеличением атомного веса ядра мишени. Обнаружены новые псевдоскалярные резонансные состояния $\pi(1240)$ и $\pi(1770)$, имеющие квантовые числа π -мезона. Приведены новые данные о резонансной природе $\pi_2(1600)$. Развита новая методика анализа, позволившая установить положение стабильных полюсов в амплитудах в комплексной энергетической плоскости. Исследован нерезонансный вклад в когерентное образование бозонной системы с учетом эффектов ядерного перераспределения, перераспределения через резонанс и прямого рождения резонансов.

Табл.2. Ил.16. Библиогр.: 82.

УДК 539.125.5

О знаке и величине среднего квадрата внутреннего зарядового радиуса нейтрона.

Александров Ю.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.1, с.72.

В обзоре обсуждается связь между средним квадратом внутреннего зарядового радиуса нейтрона $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N$ и измеряемой в нейтронной физике низких энергий длиной рассеяния нейтрона на электроны a_{ne} . Подчеркивается, что формула Фолди, дающая такую связь, справедлива. Показано, что формулу Фолди можно получить двумя разными способами. Приводится таблица различных экспериментальных данных, полученных за период 1947—1997 гг., позволяющих определить величину a_{ne} . Имеющиеся экспериментальные данные можно разделить на две группы: $\langle a_{ne} \rangle = -1,30(3) \cdot 10^{-3}$ фм ($\langle r_{E, in}^2 \rangle_N > 0$) и (включая ряд экспериментальных работ ЛНФ) $\langle a_{ne} \rangle = -1,58(3) \cdot 10^{-3}$ фм ($\langle r_{E, in}^2 \rangle_N < 0$). Обсуждаются источники возможных систематических погрешностей в проведенных экспериментах. В частности, рассматривается вопрос о влиянии на измеряемую величину a_{ne} резонансного ядерного рассеяния. Показано, что в случае измерений рассеяния нейтронов на четно-четных ядрах (например, на ^{208}Pb) влиянием резонансного рассеяния на величину a_{ne} можно пренебречь. Проводится сравнение экспериментальных результатов измерения a_{ne} в нейтронной физике низких энергий с теоретическими. Показано, что если данные, ведущие к $\langle r_{E, in}^2 \rangle_N > 0$, справедливы, то современные теоретические представления о структуре нейтрона (включая наиболее адекватную модель — СВМ) следует существенно изменить.

Табл.5. Ил.5. Библиогр.: 84 назв.

УДК 539.12.01

Функции Вигнера существенно неравновесных систем. Манджавидзе И. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.1, с.123.

В работе описана теория возмущений для производящего функционала функций Вигнера при конечных температурах. Для определенности рассмотрен конкретный процесс диссипации горячего начального состояния в холодное, типичный для физики частиц, если множественность рожденных частиц очень велика. Температура состояний, как начального, так и конечного, вводится в формализм характерным для микроканонического описания образом. Соответственно, теория возмущений содержит функции Грина, зависящие от двух температур (начального и конечного состояний). Это позволяет описать локальные в пространстве-времени температурные распределения. Рассмотрены два типа граничных условий. Первое соответствует обычному для теории поля вакуумному граничному условию. Соответствующие производящие функционалы функций Вигнера могут быть использованы в физике частиц. Другой тип граничных условий предполагает, что система окружена излучением черного тела. Это приводит к обычным в статистической физике граничным условиям Кубо—Мартина—Швингера в однотемпературном пределе, когда система равновесна. Мы сравним наш S -матричный подход с реально-временной теорией Швингера—Келдыша при конечных температурах и с нестационарным статистическим оператором Зубарева. Исследуется область применимости температурного описания диссипативных процессов. Показано, что необходимым и достаточным условием для этого является расщепление корреляций Боголюбова.

Библиогр.: 59.

УДК 539.12.01

Редукция в системах с локальной симметрией. Гогилидзе С.А., Первушин В.Н., Хвелидзе А.М. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.1, с.160.

В обзоре обсуждается ряд принципиальных проблем, связанных с описанием динамических систем с конечным числом степеней свободы, обладающих локальной симметрией. В рамках классической лагранжевой и гамильтоновой теории изложена геометрическая схема процедуры редукции системы динамических уравнений к так называемому нормальному виду, когда задача Коши имеет единственное решение. Основное внимание уделено обсуждению вопросов, связанных с геометрической схемой выделения физического подпространства в фазовом пространстве вырожденной динамической системы и построения в явном виде соответствующих канонических переменных без введения в теорию дополнительных калибровочных условий, калибровок. На основе сравнения двух методов редукции — геометрического и с помощью фиксации калибровки — обсуждается вопрос об условиях на калибровку, гарантирующих корректность процедуры редукции. Рассмотрен ряд примеров, демонстрирующих геометрический способ редукции вырожденных гамильтоновых систем.

Библиогр.: 50.

УДК 517.9; 519.6; 539.12

Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей. Пузынин И.В., Амирханов И.В., Земляная Е.В., Первушин В.Н., Пузынина Т.П., Стриж Т.А., Лахно В.Д. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.1, с.210.

В обзоре рассмотрены вопросы численного анализа нелинейных граничных задач для дифференциальных, интегродифференциальных и интегральных уравнений, отно-

сящихся к некоторым квантово-полевым моделям теории поля и потенциальным моделям квантовой хромодинамики. Общим для постановок этих задач являются их сингулярность и многопараметричность. Оригинальность постановок заключается в комбинации граничных и спектральных задач. В первой части обзора изложено обобщение непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) для решения нелинейных задач указанного типа, которое основано на идеях НАМН, методов теории возмущения и методов эволюции по параметрам. В результате представлены итерационные схемы с оптимальным заданием итерационного шага, в которых может быть решена задача выбора начального приближения и упрощено решение линейных уравнений относительно итерационных поправок. Представлено обоснование вычислительных схем и их сравнение с некоторыми известными методами. Описана новая ньютоновская схема, не требующая обращения оператора производной, которая может быть эффективно реализована на векторно-параллельных системах. Во второй части обзора рассмотрены особенности численного исследования и результаты для квантово-левых моделей самосогласованного поля (модель Латтинжера—Лу), автолокализованных электронных состояний в жидкости и бинуклона в пределе сильной связи. Дано сравнение полученных результатов с некоторыми известными. Третья часть посвящена численному исследованию потенциальных моделей кваркония в рамках уравнений Швингера—Дайсона и Бете—Солпитера для различных потенциалов взаимодействия: потенциалов Гаусса и Юкавы, осцилляторного и комбинации кулоновского с линейно растущим потенциалом. Приведен анализ математических постановок граничных задач, рассмотрены пути устранения расходимостей, обсуждаются результаты, которые сравниваются с полученными в рамках сепарабельного приближения. Рассмотрено обобщение КХД-инспирированной модели для конечных температур. Результаты, изложенные в обзоре, демонстрируют эффективность единого подхода к численному анализу нелинейных моделей из различных разделов теоретической физики на основе обобщенного НАМН.

Табл.3. Ил.4. Библиогр.: 110.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Займидорога О.А.</i> Радиальные возбуждения систем из легких кварков	5
<i>Александров Ю.А.</i> О знаке и величине среднего квадрата внутреннего зарядового радиуса нейтрона	72
<i>Манджавидзе И.</i> Функции Вигнера существенно неравновесных систем	123
<i>Гогилдзе С.А., Первушин В.Н., Хвелидзе А.М.</i> Редукция в системах с локальной симметрией	160
<i>Пузынин И.В., Амирханов И.В., Земляная Е.В., Первушин В.Н., Пузынина Т.П., Стриж Т.А., Лахно В.Д.</i> Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей.	210

CONTENTS

<i>Zaimidoroga O.A.</i> Radial Excitation in the System of Light Quark	5
<i>Alexandrov Yu.A.</i> Sign and Value of the Neutron Mean Square Intrinsic Charge Radius	72
<i>Mandjavidze J.</i> Wigner Functions of Essentially Nonequilibrium Systems	123
<i>Gogilidze S.A., Pervushin V.N., Khvedelidze A.M.</i> Reduction in System with Local Symmetries	160
<i>Puzynin I.V., Amirkhanov I.V., Zemlyanaya E.V., Lakhno V.D., Pervushin V.N., Puzynina T.P., Strizh T.A.</i> The Generalized Continuous Analogue of Newton's Method for the Numerical Investigation of Some Nonlinear Quantum - Field Models	210

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\vec{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbine A.V.** — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 07.10.98. Подписано в печать 29.12.98. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,0. Уч.-изд.л. 20,68.
Тираж 400. Заказ 51103. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1999. Том 30. Вып.1. 1—272.

РАДИАЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИСТЕМ ИЗ ЛЕГКИХ КВАРКОВ

О.А.Займидорога

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	5
ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА	
ДИФРАКЦИОННОЙ ДИССОЦИАЦИИ	8
Кинематика процессов дифракции	8
Когерентность	10
Правила отбора	13
Селекция механизма обмена	14
Возбуждение внутренней структуры	15
Сходимость парциального разложения	
дифракционной амплитуды	17
Экспериментальный фон исследований	19
ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ	20
Общие характеристики исследуемого процесса	22
Анализ спинового содержания конечного состояния	23
Метод парциально-волнового анализа	25
Структура амплитуды распада	30
Унитарность состояний	35
Фит данных	38
РЕЗУЛЬТАТЫ ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОГО АНАЛИЗА	40
Резонансные свойства состояния	
$J^{P}LM\eta = 1^{+}L0^{+}, a_1(1260)$ -мезон	45
Резонансные свойства состояния $J^{P}LM\eta = 0^{-}S0^{+}, \pi(1300)$ -	
и $\pi(1770)$ -мезоны [1,2]	49
Определение параметров резонансов с помощью	
метода паде-аппроксимации	51
Состояние $J^{P}LM\eta = 2^{-}L0^{+}, \pi_2(1600)$ -резонанс	55
НЕРЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ И ВОПРОСЫ	
МЕЗОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ	60
Мезонная спектроскопия	65
КОГЕРЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ	68
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	69

О ЗНАКЕ И ВЕЛИЧИНЕ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ВНУТРЕННЕГО ЗАРЯДОВОГО РАДИУСА НЕЙТРОНА

Ю.А.Александров

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	73
«ZITTERBEWEGUNG»	74
ФОРМФАКТОРЫ	78
ФОРМУЛА ФОЛДИ	83
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ $n\bar{e}$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	84
ВНОСИМЫЕ В ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПОПРАВКИ ИСТОЧНИКИ ВОЗМОЖНЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ	107
УЧЕТ МЕЖРЕЗОНАНСНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ	112
О СРАВНЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ТЕОРИЕЙ	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	119
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	120

WIGNER FUNCTIONS OF ESSENTIALLY NONEQUILIBRIUM SYSTEMS

J. Manjavidze

Institute of Physics, Georgian Academy of Sciences,
Tamarashvili st. 6, Tbilisi 380077, Republic of Georgia,
e-mail: jm@physics.iberiapac.ge

INTRODUCTION	123
PHENOMENOLOGY	130
<i>S</i> -MATRIX INTERPRETATION OF REAL-TIME	
FINITE-TEMPERATURE FIELD THEORIES	134
Vacuum Boundary Conditions	134
Closed-Path Boundary Conditions	138
APPLICABILITY OF FINITE-TEMPERATURE DESCRIPTION	142
The Schwinger-Keldysh Formalism	142
Range of the "Hydrodynamical" Approximation	144
LOCAL EQUILIBRIUM HYPOTHESIS	145
Vacuum Boundary Condition	146
Wigner Functions Formalism	149
Closed Path Boundary Conditions	151
NONSTATIONARY STATISTICAL OPERATOR	153
CONCLUSION	155
REFERENCES	158

РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ С ЛОКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

С.А.Гогилидзе

ИФВЭ Тбилисского государственного университета, 380086, Тбилиси, Грузия

В.Н.Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

А.М.Хведелидзе

Тбилисский математический институт, 380086, Тбилиси, Грузия

ВВЕДЕНИЕ	160
ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ	165
ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ	173
РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ СО СВЯЗЯМИ ПЕРВОГО РОДА	180
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ	196
ПРИЛОЖЕНИЯ	197
А. Алгоритм абелизации связей первого рода	197
Б. Абелева модель Христа — Ли — Прохорова	200
В. $SU(2)$ инвариантная механика Янга — Миллса в $0 + 1$ -мерном пространстве-времени	204
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	207

ОБОБЩЕННЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ
МЕТОДА НЬЮТОНА
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ
КВАНТОВО-ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ*

*И.В.Пузынин, И.В.Амирханов, Е.В.Земляная,
В.Н.Первушин, Т.П.Пузынина, Т.А.Стриж*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В.Д.Лахно

Институт математических проблем биологии РАН, Пущино

ВВЕДЕНИЕ	210
МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО НАМН	212
Ньютоновские итерационные схемы	213
Ньютоновская итерационная схема с одновременным вычислением оператора, обратного к оператору производной нелинейной функции	220
Ньютоновская итерационная схема с параметрической зависимостью от асимптотики решений	224
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВО-ПОЛЕВЫХ САМОСОГЛАСО- ВАННЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО НАМН	227
Уравнение полярона в рамках модели Латтинжера – Лу	228
Автолокализованные электронные состояния в жидкости	235
Квантово-полевая модель бинуклона в пределе сильной связи	237
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КВАРКОНИЯ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕНИЯ НАМН	243

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 97-01-01040).

Уравнение Швингера — Дайсона	245
Уравнение Бете — Солпитера	247
Потенциалы взаимодействия	249
Обобщение КХД-инспирированной модели на случай конечных температур	254
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	260
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	261