

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.30

PART 3

Six issues per year

DUBNA 1999

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 30

ВЫПУСК 3

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1999

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ ,

П.И.ЗРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЪЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы Е.К.Аксенова, тел. (09621) 65-165

Э.В.Ивашкевич

© ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1999

NONPERTURBATIVE EFFECTS IN QCD AT FINITE TEMPERATURE AND DENSITY

C.D.Roberts

Physics Division 203, Argonne National Laboratory,
Argonne IL 60439-4843, USA

These lecture notes illustrate the application of Dyson — Schwinger equations in QCD. The extensive body of work at zero temperature and chemical potential is represented by a selection of contemporary studies that focus on solving the Bethe — Salpeter equation, deriving an exact mass formula in QCD that describes light and heavy pseudoscalar mesons simultaneously, and the calculation of the electromagnetic pion form factor and the vector meson electroproduction cross sections. These applications emphasise the qualitative importance of the momentum-dependent dressing of elementary Schwinger functions in QCD, which provides a unifying connection between disparate phenomena. They provide a solid foundation for an extension of the approach to nonzero temperature and chemical potential. The essential, formal elements of this application are described and four contemporary studies employed to exemplify the method and its efficacy. They study the demarcation of the phase boundary for deconfinement and chiral symmetry restoration, the calculation of bulk thermodynamic properties of the quark-gluon plasma and the response of π - and ρ -meson observables to T and μ . Along the way a continuum order parameter for deconfinement is introduced, an anticorrelation between the response of masses and decay constants to T and their response to μ elucidated, and a (T, μ) -mirroring of the slow approach of bulk thermodynamic quantities to their ultrarelativistic limit highlighted. These effects too are tied to the momentum-dependent dressing of the elementary Schwinger functions.

В работе показано применение уравнений Дайсона — Швингера в КХД. Большая часть обзора посвящена изложению современного подхода, основанного на решении уравнения Бете — Салпитера, воспроизводящего точные массовые формулы КХД, описывающие одновременно как легкие, так и тяжелые псевдоскалярные мезоны и вычисления электромагнитного формфактора пиона и сечения электророждения векторных мезонов при нулевой температуре и химическом потенциале. Эти исследования, которые объединяют такие разные явления, качественно указывают на важность импульсной зависимости одетых элементарных функций Швингера в КХД. Они обеспечивают прочную основу для обобщения рассматриваемого подхода на случай ненулевой температуры и химического потенциала. Существенно, что описаны формальные элементы используемого подхода и приведены четыре примера в качестве иллюстрации метода и его эффективности. С их помощью изучается граница фазового перехода для деконфайнмента и восстановления киральной симметрии, вычисляется набор термодинамических свойств кварк-глюонной плазмы и зависимость π - и ρ -мезонных наблюдаемых от T и μ . Аналогичным образом введены непрерывный параметр порядка для деконфайнмента, антикорреляция между зависимостью масс и констант распада от T и их же зависимостью от μ и (T, μ) -зависимость для малых и ультрарелятивистских значений термодинамических величин. Рассмотренные эффекты также ограничиваются импульсной зависимостью одетых элементарных функций Швингера.

1. INTRODUCTION

In this article I describe the application of Dyson — Schwinger equations (DSEs) to QCD at finite temperature, T , and quark chemical potential, μ . It is not a pedagogical introduction, as this can be found in recent reviews [1,2]. The goal instead is to illustrate how contemporary studies at $(T = 0, \mu = 0)$ can be used as a foundation and springboard for the application of DSEs at finite T and μ , and to describe some of these applications and their results.

The DSEs provide a nonperturbative, Poincaré invariant, continuum approach to solving quantum field theories. They are an infinite tower of coupled integral equations, with the equation for a particular n -point function involving at least one $m > n$ -point function. A tractable problem is only obtained if one truncates the system, and historically this has provided an impediment to the application of DSEs: *a priori* it can be difficult to judge whether a particular truncation scheme will yield qualitatively or quantitatively reliable results for the quantity sought. As integral equations, the analysis of observables using DSEs rapidly becomes a numerical problem and hence a critical evaluation of truncation schemes often requires, or is at least simplified, by easy access to high-speed computers.* With such tools now commonplace, this evaluation can be pursued fruitfully.

The development of efficacious truncation schemes is not a purely numerical task, and neither is it always obviously systematic. For some, this last point diminishes the appeal of the approach. However, with growing community involvement and interest, the qualitatively robust results and intuitive understanding that the DSEs can provide is becoming clear. Indeed, someone familiar with the application of DSEs in the late-70s and early-80s might be surprised with the progress that has been made. It is now clear [3,4] that truncations which preserve the global symmetries of a theory; for example, chiral symmetry in QCD, are relatively easy to define and implement and, while it is more difficult to preserve local gauge symmetries, much progress has been made with Abelian theories [5] and more is being learnt about non-Abelian ones.

The simplest truncation scheme for the DSEs is the weak-coupling expansion. Using this systematic procedure it is readily established that the DSEs *contain* perturbation theory, in the sense that for any given theory the weak-coupling expansion of the equations generates all the diagrams of perturbation theory. Hence, at the very least, the DSEs can be used as a generating tool for perturbation theory, and in this application they are an essential element in the proof of the renormalisability of a quantum field theory. This feature also places a constraint on other truncation schemes; i.e., the scheme must ensure that perturbative results

*The human and computational resources required are still modest compared with those consumed in contemporary numerical simulations of lattice-QCD.

are recovered in that domain on which a weak-coupling expansion is known to be valid.

The most important feature of the DSEs is the antithesis of this weak-coupling expansion: the DSEs are intrinsically nonperturbative. They can be derived directly from the generating functional of a quantum field theory and at no stage in this derivation is a DSE represented as a sum of diagrams in perturbation theory. Hence their solution contains information that is *not* present in perturbation theory. They are ideal for the study of dynamical chiral symmetry breaking* (DCSB) and confinement in QCD, and of hadronic bound state structure and properties. In this application they provide a means of elucidating identifiable signatures of the quark-gluon substructure of hadrons.

Their intrinsically nonperturbative nature also makes them well suited to studying QCD at finite- T and μ , where the characteristics of the phase transition to a quark-gluon plasma are a primary subject. The order of the transition, the critical exponents, and the response of bound states to changes in these intensive variables: all must be elucidated. The latter is of particular importance because there lies the signals that will identify the formation of the plasma and hence guide the current and future experimental searches.

There is a significant overlap between contemporary DSE studies and numerical simulations of lattice-QCD. Of particular importance is that both admit the simultaneous study of DCSB and confinement, the absence of which *defines* the plasma. The DSEs provide an adjunct to lattice simulations. They are a means of checking them, and the simulations can provide input into the development and constraint of DSE truncations. A truncation that is accurate on the common domain can be used to extrapolate into that domain presently inaccessible to lattice-simulations, such as finite chemical potential and the T - and μ -dependence of hadron properties.

2. ESSENTIAL ELEMENTS OF THE DSEs

In this section I summarise some of the results upon which much of the successful DSE phenomenology is founded. Before doing so it is important to specify that I employ an Euclidean metric throughout. For real 4-vectors, a , b :

$$a \cdot b := a_\mu b_\mu \delta_{\mu\nu} := \sum_{i=1}^4 a_i b_i, \quad (1)$$

*Historically, the DSE for a fermion propagator has found widespread use in the study of dynamical symmetry breaking; for example, it is the “gap equation” that describes Cooper-pairing in an ordinary superconductor.

and hence a spacelike vector, Q_μ , has $Q^2 > 0$. The Dirac matrices satisfy

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2)$$

and $\gamma_5 := -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.

My point of view is that the Euclidean formulation is *primary*; i.e., a field theory should be *defined* in Euclidean space, where the propagators and vertices are properly called “ n -point Schwinger functions”. This is the perspective adopted in constructive field theory and, at least as a pragmatic artifice, by practitioners of lattice-QCD. If the field theory is well-defined, it is completely specified once all its Schwinger functions are known. Analytic continuation in the Euclidean-time variable yields the Wightman functions and, following appropriate time-ordering, the Minkowski space propagators. Additional details and discussion can be found in Sec. 2.3 of Ref.1.

It is important because the analytic structure of nonperturbatively dressed Schwinger functions need not be the same as that of their free-particle seeds. Hence, *a priori* one cannot know the analytic properties of the integrand in a DSE and any rotation of the integration contours, as in a “Wick rotation”, is plagued by uncertainty: there may be poles or branch cuts, etc., that cannot be anticipated from the free-particle form of the Schwinger functions involved. This is manifest in the fact that the *transcription rules*:

Configuration Space

1. $\int^M d^4x^M \rightarrow -i \int^E d^4x^E$
2. $\partial \rightarrow i\gamma^E \cdot \partial^E$
3. $A \rightarrow -i\gamma^E \cdot A^E$
4. $A_\mu B^\mu \rightarrow -A^E \cdot B^E$

Momentum Space

1. $\int^M d^4k^M \rightarrow i \int^E d^4k^E$
2. $\not{k} \rightarrow -i\gamma^E \cdot k^E$
3. $k_\mu q^\mu \rightarrow -k^E \cdot q^E$
4. $k_\mu x^\mu \rightarrow -k^E \cdot x^E$,

are valid at every order in perturbation theory; i.e., the correct Minkowski space integral for a given diagram in perturbation theory is obtained by applying these transcription rules to the Euclidean integral. However, for skeleton diagrams; i.e., those in which each line and vertex represents a fully dressed n -point function, this cannot be guaranteed.

2.1. Gluon Propagator. In Landau gauge the two-point, dressed-gluon Schwinger function, or dressed-gluon propagator, has the form

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{\mathcal{G}(k^2)}{k^2}, \quad \mathcal{G}(k^2) := \frac{g^2}{1 + \Pi(k^2)}, \quad (3)$$

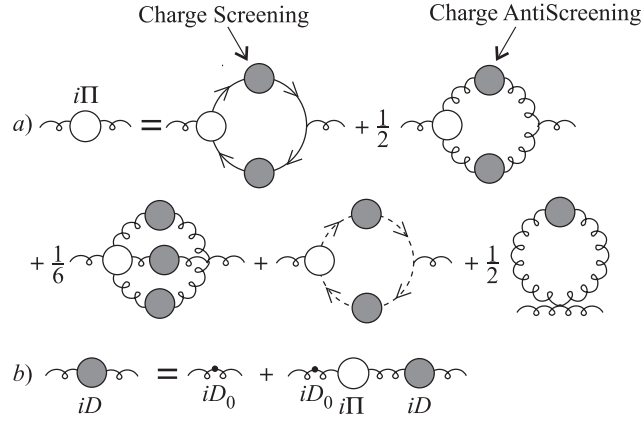


Fig. 1. DSE for the gluon vacuum polarisation and propagator: solid line — quark; spring — gluon; dotted-line — ghost. The open circles are irreducible vertices. As indicated, the quark loop acts to screen the charge, as in QED, while the gluon loop opposes this, antiscreening the charge and enhancing the interaction

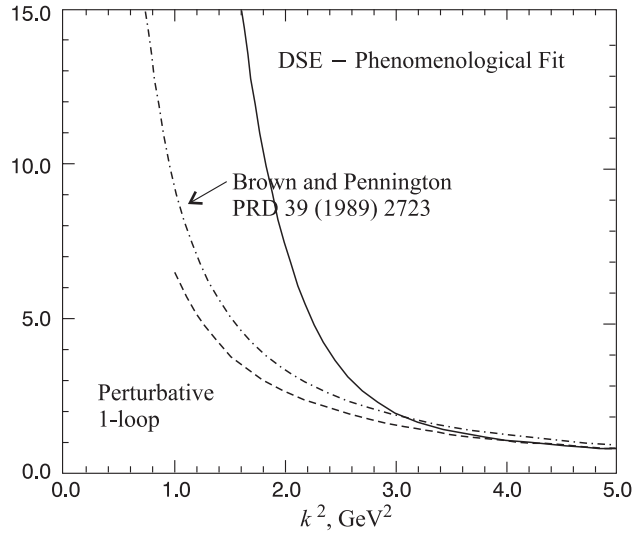


Fig. 2. $\mathcal{G}(k^2)/k^2$ from a solution [6] of the gluon DSE (dash-dot line) compared with the one-loop perturbative result (dashed line) and a fit (solid line) obtained following the method of Ref.7; i.e., by requiring that the gluon propagator lead, via the quark DSE, to a good description of a range of hadron observables

where $\Pi(k^2)$ is the gluon vacuum polarisation, which contains all the dynamical information about gluon propagation. This propagator satisfies the DSE illustrated in Fig. 1 (a nonlinear integral equation). As already stated, a weak-coupling expansion of this DSE reproduces perturbation theory. Using this one sees directly that in the one-loop expression for the running coupling constant:

$$\alpha_S(q^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \ln(q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad (4)$$

the “ $11N_c$ ” comes from the charge-antiscreening gluon loop and the “ $2N_f$ ” from the charge-screening fermion loop, which illustrates how the non-Abelian structure of QCD is responsible for asymptotic freedom and suggests that confinement is related to the importance of gluon self-interactions.

Studies of the gluon DSE have been reported by many authors [1] with the conclusion that, if the ghost-loop is unimportant, then the charge-antiscreening 3-gluon vertex dominates and, relative to the free gauge boson propagator, the dressed gluon propagator is significantly enhanced in the vicinity of $k^2 = 0$. The enhancement persists to $k^2 \sim 1 - 2 \text{ GeV}^2$, where a perturbative analysis becomes quantitatively reliable. In the neighbourhood of $k^2 = 0$ the enhancement can be represented [6] as a regularisation of $1/k^4$ as a distribution, which is illustrated in Fig. 2. As I will elucidate, a dressed-gluon propagator with the illustrated enhancement at $k^2 \simeq 0$ generates confinement and DCSB *without* fine-tuning.

2.2. Quark Propagator. In a covariant gauge the two-point, dressed-quark Schwinger function, or dressed-quark propagator, can be written in a number of equivalent forms

$$S(p) := \frac{1}{i\gamma \cdot p + \Sigma(p)} \quad (5)$$

$$:= \frac{1}{i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2)} \equiv -i\gamma \cdot p \sigma_V(p^2) + \sigma_S(p^2). \quad (6)$$

$\Sigma(p)$ is the dressed-quark self-energy, which satisfies a nonlinear integral equation: the quark DSE (depicted in Fig. 3)

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & (Z_2 - 1) i\gamma \cdot p + Z_4 m_{\text{bm}} + \\ & + Z_1 \int_q^\Lambda g^2 D_{\mu\nu}(p - q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu^a(q, p), \end{aligned} \quad (7)$$

where $\Gamma_\nu^a(q; p)$ is the renormalised dressed-quark-gluon vertex, m_{bm} is the Λ -dependent current-quark bare mass that appears in the Lagrangian and

$\int_q^\Lambda := \int^\Lambda d^4q/(2\pi)^4$ represents mnemonically a *translationally-invariant* regularisation of the integral, with Λ the regularisation mass-scale. The final stage of any calculation is to remove the regularisation by taking the limit $\Lambda \rightarrow \infty$. The quark-gluon-vertex and quark wave function renormalisation constants, $Z_1(\mu^2, \Lambda^2)$ and $Z_2(\mu^2, \Lambda^2)$, depend on the renormalisation point, μ , and the regularisation mass-scale, as does the mass renormalisation constant $Z_m(\mu^2, \Lambda^2) := Z_2(\mu^2, \Lambda^2)^{-1} Z_4(\mu^2, \Lambda^2)$.

One can define a quark mass-function:

$$M(p^2) := \frac{B(p^2)}{A(p^2)} \quad (8)$$

and, as depicted in Fig. 4, solving the quark DSE using a dressed-gluon propagator that behaves as illustrated in Fig. 2 and a dressed-quark-gluon vertex, $\Gamma_\mu(p, q)$, that does not exhibit particle-like singularities at $(p - q)^2 = 0$,^{*} yields a quark mass-function that mirrors the infrared enhancement of the dressed-gluon propagator. The results in Fig. 4 were obtained [7] with the current-quark masses:

$$m_{u/d}^\mu = 3.7 \text{ MeV}, \quad m_s^\mu = 82 \text{ MeV}, \quad m_c^\mu = 0.59 \text{ GeV}, \quad m_b^\mu = 2.0 \text{ GeV}, \quad (9)$$

at a renormalisation point of $\mu \simeq 20 \text{ GeV}$. Applying the one-loop evolution formula, Eq. (39), these masses correspond to:

$$\begin{aligned} m_{u/d}^{1 \text{ GeV}} &= 5.5 \text{ MeV}, & m_s^{1 \text{ GeV}} &= 130 \text{ MeV}, \\ m_c^{1 \text{ GeV}} &= 1.0 \text{ GeV}, & m_b^{1 \text{ GeV}} &= 3.4 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (10)$$

and although it is obvious from Fig. 4 that the one-loop formula does not describe correctly the momentum evolution of the mass-function down to $p^2 = 1 \text{ GeV}^2$, the values in Eq. (10) provide a useful and meaningful comparison with the values quoted conventionally.

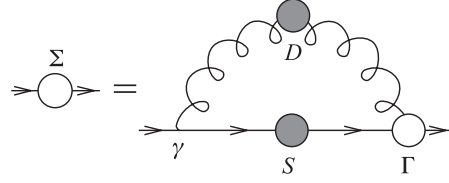


Fig. 3. DSE for the dressed-quark self-energy. The kernel of this equation is constructed from the dressed-gluon propagator (D — spring) and the dressed-quark-gluon vertex (Γ — open circle). One of the vertices is bare (labelled by γ) as required to avoid overcounting

^{*}A particle-like singularity is one of the form $(P^2)^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$. In this case one can write a spectral decomposition for the vertex in which the spectral densities are non-negative. This is impossible if $\alpha > 1$. $\alpha = 1$ is the ideal case of an isolated, δ -function singularity in the spectral densities and hence an isolated, free-particle pole. $\alpha \in (0, 1)$ corresponds to an accumulation, at the particle pole, of branch points associated with multiparticle production.

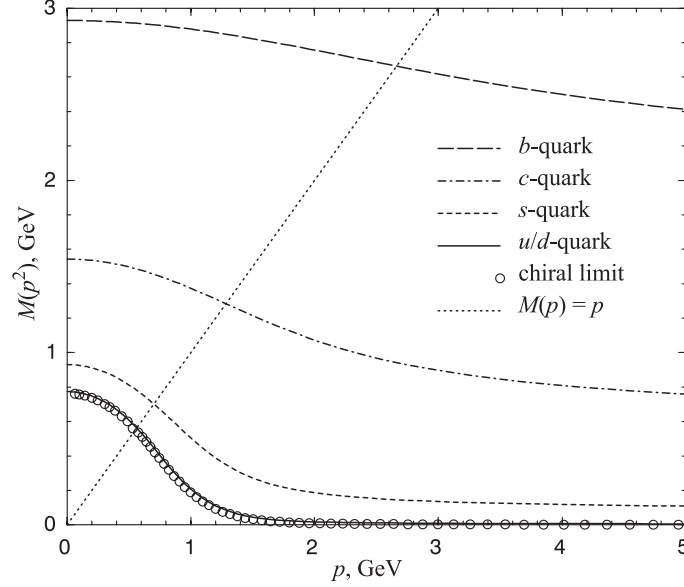


Fig. 4. Dressed-quark mass-function obtained in solving the quark DSE using the dressed-gluon propagator of Ref.7

The quark DSE was also solved in the chiral limit, which in QCD is obtained by setting the Lagrangian current-quark bare mass to zero [7]. From the figure one observes immediately that the mass-function is nonzero even in this case. That *is* DCSB: a momentum-dependent quark mass generated dynamically in the absence of any term in the action that breaks chiral symmetry explicitly. This entails a nonzero value for the quark condensate in the chiral limit. The fact that $M(p^2) \neq 0$ in the chiral limit is independent of the details of the dressed-gluon propagator in Fig. 2; they only affect the magnitude of $M(p^2)$.

Figure 4 illustrates that for light quarks (u , d and s) there are two distinct domains: perturbative and nonperturbative. In the perturbative domain the magnitude of the quark mass-function is governed by the explicit chiral symmetry breaking mass-scale; i.e., the current-quark mass. For $p^2 < 1 \text{ GeV}^2$ the mass-function rises sharply. This is the nonperturbative domain where the magnitude of $M(p^2)$ is determined by the DCSB mechanism; i.e., the enhancement in the dressed-gluon propagator. This emphasises again that DCSB is more than just a nonzero value of the quark condensate in the chiral limit! The boundary, at $p^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$, is that point where the enhancement in the dressed-gluon propagator becomes significant.

The solution of $p^2 = M^2(p^2)$ defines an Euclidean constituent-quark mass, M^E .^{*} For a given quark flavour, the ratio M_f^E/m_f^μ is a single, quantitative measure of the importance of the DCSB mechanism in modifying the quark's propagation characteristics. As illustrated in Eq. (11), obtained using the dressed-gluon propagator in Ref.7,

flavour	u/d	s	c	b	t
$\frac{M^E}{m_{\mu \sim 20 \text{ GeV}}}$	150	10	2.3	1.4	$\rightarrow 1$

(11)

this ratio provides for a natural classification of quarks as either light or heavy. For light quarks the ratio is characteristically 10-100 while for heavy quarks it is only 1—2 [8]. The values of this ratio signal the existence of a characteristic mass-scale associated with DCSB, which I will denote by M_χ . For $p^2 > 0$ the propagation characteristics of a flavour with $m_f^\mu < M_\chi$ are altered significantly by the DCSB mechanism, while for flavours with $m_f^\mu \gg M_\chi$ it is irrelevant, and explicit chiral symmetry breaking dominates. It is apparent from the figure that $M_\chi \sim 0.2 \text{ GeV} \sim \Lambda_{\text{QCD}}$.

The effect that the enhancement of the dressed-gluon propagator has on the light-quark mass-function is fundamental in QCD and can be identified as the source of many observable phenomena. Further, that this enhancement little affects heavy-quark propagation characteristics at spacelike- p^2 provides for many simplifications in the study of heavy-meson observables [9].

2.3. Confinement. One aspect of confinement is the absence of quark and gluon production thresholds in colour-singlet-to-singlet $\mathcal{S}$ -matrix amplitudes. This is manifest if, for example, the quark-loop illustrated in Fig. 5, which describes [10] the diffractive, Pomeron-induced $\gamma \rightarrow \rho$ transition, does not have pinch singularities associated with poles at real- p^2 in the quark propagators. This is ensured if the dressed-quark and -gluon propagators do not have a Lehmann representation.

What is a Lehmann representation?

Consider the 2-point free-scalar Schwinger function:

$$\Delta(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (12)$$

One can write

$$\Delta(z) = \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{z + \sigma}, \quad (13)$$

^{*}In my Euclidean metric a true quark mass-pole exhibits itself as a real- p^2 solution of $p^2 + M^2(p^2) = 0$. This is absent in the solutions of the quark DSE illustrated in Fig. 4, which is a manifestation of confinement, as discussed in Sec. 2.3.

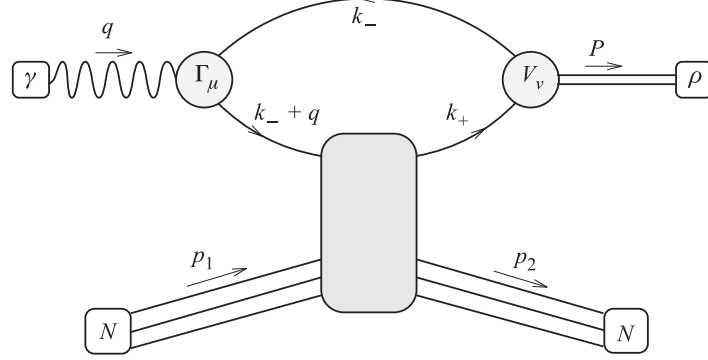


Fig. 5. Illustration of the diffractive electroproduction of a vector meson: $e^- N \rightarrow e^-' N \rho$ with the transition from photon to vector meson proceeding via a quark loop. The shaded region represents [10] a Pomeron-exchange mechanism

where in this case the spectral density is

$$\rho(x) := \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Delta(-x - i\epsilon) - \Delta(-x + i\epsilon)] = \delta(m^2 - x), \quad (14)$$

which is non-negative. This is a Lehmann representation: each scalar function necessary to completely specify the Schwinger function has a spectral decomposition in which the spectral densities are non-negative. Only those functions whose poles or branch points lie at timelike, real- k^2 have a Lehmann representation.

The existence of a Lehmann representation for a dressed-particle propagator is necessary if the construction of asymptotic “in” and “out” states for the associated quanta is to proceed; i.e., it is necessary if these quanta are to propagate to a “detector”. In its absence there are no asymptotic states with the quantum numbers of the field whose propagation characteristics are described by the Schwinger function. Structurally, the nonexistence of a Lehmann representation for the dressed-propagators of elementary fields ensures the absence of pinch singularities in loops, such as that illustrated in Fig. 5, and hence the absence of quark and gluon production thresholds.

This mechanism can be generalised and applied to coloured bound states, such as colour-antitriplet quark-quark composites (diquarks). In this case a study [3] of the 4-point quark-quark scattering matrix shows that it does not have a spectral decomposition with non-negative spectral densities and hence there are no diquark bound states. The same argument that demonstrates this absence of diquarks in the spectrum of $SU(N_c = 3)$ also proves [4] that in $SU(N_c = 2)$ the “baryons”, which are necessarily diquarks in this theory, are degenerate with the mesons.

The infrared-enhanced dressed-gluon propagators illustrated in Fig. 2 do not have a Lehmann representation. Using forms like this in the kernel of the quark

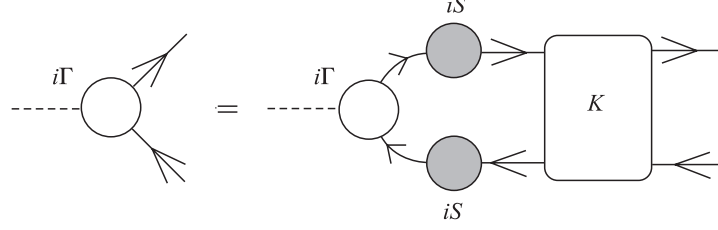


Fig. 6. Homogeneous Bethe — Salpeter equation for a quark-antiquark bound state: Γ is the solution, the Bethe — Salpeter amplitude, S is the dressed-quark propagator and K is the dressed-quark-antiquark scattering kernel

DSE yields automatically a dressed-quark 2-point function that does not have a Lehmann representation. In this sense confinement *breeds* confinement, without fine-tuning.

2.4. Hadrons: Bound States. In QCD the observed hadrons are composites of the elementary quanta: mesons of a quark and antiquark, and baryons of three quarks. Their masses, electromagnetic charge radii and other properties can be understood in terms of their substructure by studying covariant bound state equations: the Bethe — Salpeter equation (BSE) for mesons and the covariant Fadde'ev equation for baryons.

As a two-body problem, the mesons have been studied most extensively. Their internal structure is described by the Bethe — Salpeter amplitude, which is obtained as a solution of the homogeneous BSE, illustrated in Fig. 6. For a pseudoscalar bound state the amplitude has the form

$$\Gamma_H(k; P) = T^H \gamma_5 \left[iE_H(k; P) + \gamma \cdot P F_H(k; P) + \right. \\ \left. + \gamma \cdot k k \cdot P G_H(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_H(k; P) \right], \quad (15)$$

where, if the constituents have equal current-quark masses, the scalar functions E , F , G , and H are even under $k \cdot P \rightarrow -k \cdot P$. In Eq. (15), T^H is a flavour matrix that determines the mesonic channel under consideration; e.g., $T^{K^+} := (1/2)(\lambda^4 + i\lambda^5)$, with $\{\lambda^j, j = 1 \dots 8\}$ the Gell-Mann matrices. The important new element in the BSE is K , the fully-amputated, quark-antiquark scattering kernel: by definition it does not contain quark-antiquark to single gauge-boson annihilation diagrams, such as would describe the leptonic decay of the pion, nor diagrams that become disconnected by cutting one quark and one antiquark line.

K has a skeleton expansion in terms of the elementary, dressed-particle Schwinger functions; e.g., the dressed-quark and -gluon propagators. The first

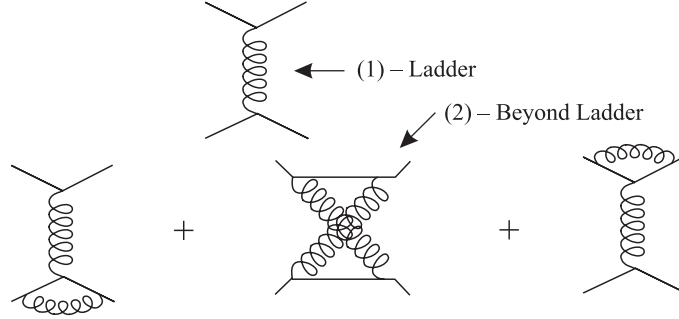


Fig. 7. First two sets of contributions to a systematic expansion of the quark-antiquark scattering kernel. In this expansion, the propagators are dressed but the vertices are bare

two orders in one systematic expansion are depicted in Fig. 7. This particular expansion [3], in concert with its analogue for the kernel in the quark DSE, provides a means of constructing a kernel that, order-by-order in the number of vertices, ensures the preservation of vector and axial-vector Ward — Takahashi identities. This is particularly important in QCD where the Goldstone boson nature of the pion must be understood as a *consequence* of its internal structure.

To proceed with a study of meson properties, one chooses a truncation for K . The homogeneous BSE is then fully specified as a linear integral equation, which is straightforward to solve, yielding the bound state mass and amplitude. The “ladder” truncation of K combined with the “rainbow” truncation of the quark DSE ($\Gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu$ in Fig. 3) is the simplest and most often used. The expansion of Fig. 7 allows one to understand why this Ward — Takahashi identity preserving truncation is accurate for flavour-nonsinglet pseudoscalar and vector mesons: there are cancellations between the higher-order diagrams. And also why it provides a poor approximation in the study of scalar mesons, where the higher-order terms do not cancel, and for flavour-singlet mesons where it omits timelike gluon exchange diagrams.

3. A QCD MASS FORMULA

The chiral-limit axial-vector Ward — Takahashi identity (AV-WTI)

$$-iP_\mu \Gamma_{5\mu}^H(k; P) = \mathcal{S}^{-1}(k_+) \gamma_5 \frac{T^H}{2} + \gamma_5 \frac{T^H}{2} \mathcal{S}^{-1}(k_-), \quad (16)$$

where $\mathcal{S} := \text{diag}(S_u, S_d, \dots)$, is the statement of chiral-current conservation in massless QCD. It relates the divergence of the inhomogeneous axial-vector vertex, $\Gamma_{5\mu}^H(k; P)$, to a sum of dressed-quark propagators. The vertex is the solution of

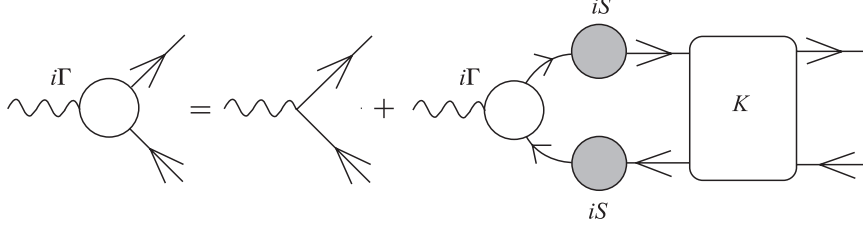


Fig. 8. DSE for the axial-vector vertex. The driving term is the bare vertex: $i\gamma_5\gamma_\mu$

the DSE depicted in Fig. 8, which involves the quark-antiquark scattering kernel, K . It is therefore not surprising that in order to preserve this identity when truncating the DSEs the choice of K and the vertex, Γ_μ , in the quark DSE, are tied together. The divergence $P_\mu \Gamma_{5\mu}^H(k; P)$ is a pseudoscalar and hence contains information about pseudoscalar mesons; i.e., Goldstone modes.

3.1. Dynamical Chiral Symmetry Breaking and Goldstone's Theorem. In the chiral-limit, the axial-vector vertex has the form [7]

$$\Gamma_{5\mu}^H(k; P) = \frac{T^H}{2} \gamma_5 \left[\gamma_\mu F_R(k; P) + \gamma \cdot k k_\mu G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu H_R(k; P) \right] + \tilde{\Gamma}_{5\mu}^H(k; P) + f_H \frac{P_\mu}{P^2} \Gamma_H(k; P), \quad (17)$$

where: F_R , G_R , H_R , and $\tilde{\Gamma}_{5\mu}^H$ are regular as $P^2 \rightarrow 0$; $P_\mu \tilde{\Gamma}_{5\mu}^H(k; P) \sim O(P^2)$; $\Gamma_H(k; P)$ is the pseudoscalar Bethe — Salpeter amplitude in Eq. (15); and the residue of the pseudoscalar pole in the axial-vector vertex is f_H , the leptonic decay constant:

$$f_H P_\mu = Z_2 \int_q^\Lambda \frac{1}{2} \text{tr} \left[(T^H)^\dagger \gamma_5 \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_H(q; P) S(q_-) \right], \quad (18)$$

with the trace over colour, Dirac and flavour indices. This expression is exact: the dependence of Z_2 on the renormalisation point, regularisation mass-scale and gauge parameter is just that necessary to ensure that the left-hand-side, f_H , is independent of all these things.

It now follows from the chiral-limit AV-WTI that

$$f_H E_H(k; 0) = B(k^2), \quad (19)$$

$$F_R(k; 0) + 2 f_H F_H(k; 0) = A(k^2), \quad (20)$$

$$G_R(k; 0) + 2 f_H G_H(k; 0) = 2A'(k^2), \quad (21)$$

$$H_R(k; 0) + 2 f_H H_H(k; 0) = 0, \quad (22)$$

where $A(k^2)$ and $B(k^2)$ are the solutions of the quark DSE in the chiral limit. As emphasised in Sec. 2.2, the appearance of a $B(k^2) \neq 0$ solution of the quark DSE in the chiral limit signals DCSB. It is an intrinsically nonperturbative effect: in perturbation theory $B(k^2) \propto \hat{m}$, the renormalisation-point independent current-quark mass, and hence vanishes in the chiral limit. Equations (17) and (19)-(22) show that when chiral symmetry is dynamically broken: 1) the homogeneous, flavour-nonsinglet, pseudoscalar BSE has a massless, $P^2 = 0$, solution; 2) the Bethe — Salpeter amplitude for the massless bound state has a term proportional to γ_5 alone, with the momentum-dependence of $E_H(k; 0)$ completely determined by that of the scalar part of the quark self energy, in addition to terms proportional to other pseudoscalar Dirac structures, F_H , G_H , and H_H , that are nonzero in general; and 3) the axial-vector vertex, $\Gamma_{5\mu}^H(k; P)$, is dominated by the pseudoscalar bound state pole for $P^2 \simeq 0$. The converse is also true.

Hence, in the chiral limit, the pion is a massless composite of a quark and an antiquark, each of which has an effective mass $M^E \sim 450$ MeV. With a dressed-gluon propagator of the type depicted in Fig. 2, this occurs without fine-tuning.

3.2. Nonzero Quark Masses: A Mass Formula. When the current-quark masses are nonzero, the AV-WTI is modified:

$$\begin{aligned} -iP_\mu \Gamma_{5\mu}^H(k; P) &= \mathcal{S}^{-1}(k_+) \gamma_5 \frac{T^H}{2} + \gamma_5 \frac{T^H}{2} \mathcal{S}^{-1}(k_-) - \\ &\quad - M_{(\mu)} \Gamma_5^H(k; P) - \Gamma_5^H(k; P) M_{(\mu)}, \end{aligned} \quad (23)$$

where: $M_{(\mu)} = \text{diag}(m_u^\mu, m_d^\mu, m_s^\mu, \dots)$ is the current-quark mass matrix. In this case both the axial-vector and the pseudoscalar vertices have a pseudoscalar pole: i.e.,

$$\begin{aligned} \Gamma_{5\mu}^H(k; P) &= \frac{T^H}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu F_R^H(k; P) + \gamma \cdot k k_\mu G_R^H(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu H_R^H(k; P)] + \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_{5\mu}^H(k; P) + f_H \frac{P_\mu}{P^2 + m_H^2} \Gamma_H(k; P), \end{aligned} \quad (24)$$

and

$$\begin{aligned} \Gamma_5^H(k; P) &= \frac{T^H}{2} \gamma_5 [i\mathcal{E}_R^H(k; P) + \gamma \cdot P \mathcal{F}_R^H(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P \mathcal{G}_R^H(k; P) + \\ &\quad + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu \mathcal{H}_R^H(k; P)] + r_H \frac{1}{P^2 + m_H^2} \Gamma_H(k; P), \end{aligned} \quad (25)$$

with: $\mathcal{E}_R^H$, F_R^H , $\mathcal{F}_R^H$, G_R^H , $\mathcal{G}_R^H$, H_R^H , $\mathcal{H}_R^H$, and $\tilde{\Gamma}_{5\mu}^H$ regular as $P^2 \rightarrow -m_H^2$ and $P_\mu \tilde{\Gamma}_{5\mu}^H(k; P) \sim \mathcal{O}(P^2)$. The AV-WTI entails [7] that

$$f_H m_H^2 = r_H \mathcal{M}_H, \quad \mathcal{M}_H := \text{tr}_{\text{flavour}} \left[M_{(\mu)} \left\{ T^H, (T^H)^\dagger \right\} \right], \quad (26)$$

where f_H is given by Eq. (18), with massive quark propagators in this case, and the residue of the pole in the pseudoscalar vertex is

$$ir_H = Z_4 \int_q^\Lambda \frac{1}{2} \text{tr} \left[(T^H)^t \gamma_5 \mathcal{S}(q_+) \Gamma_H(q; P) \mathcal{S}(q_-) \right]. \quad (27)$$

The renormalisation constant Z_4 on the right-hand side depends on the gauge parameter, the regularisation mass-scale and the renormalisation point. This dependence is exactly that required to ensure that: 1) r_H is finite in the limit $\Lambda \rightarrow \infty$; 2) r_H is gauge-parameter independent; and 3) the right-hand side of Eq. (26) is renormalisation point *independent*. This is obvious at one-loop order, especially in Landau-gauge where $Z_2 \equiv 1$ and hence $Z_4 = Z_m$.

Equation (26) is a mass formula for flavour-octet pseudoscalar mesons that is valid *independent* of the magnitude of the current-quark masses of meson's constituents. For small current-quark masses, using Eqs. (15) and (19)–(22), Eq. (27) yields

$$r_H^0 = -\frac{1}{f_H^0} \langle \bar{q}q \rangle_\mu^0, \quad -\langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 := Z_4(\mu^2, \Lambda^2) N_c \int_q^\Lambda \text{tr}_{\text{Dirac}} [S_{\hat{m}=0}(q)], \quad (28)$$

where the superscript “0” denotes that the quantity is evaluated in the chiral limit and $\langle \bar{q}q \rangle_\mu^0$, as defined here, is the chiral limit *vacuum quark condensate*, which is renormalisation-point dependent but independent of the gauge parameter and the regularisation mass-scale. Hence Eq. (25) is the statement that *in the chiral limit the residue of the bound state pole in the flavour-nonsinglet pseudoscalar vertex is $(-\langle \bar{q}q \rangle_\mu^0)/f_H^0$* .

Now one obtains immediately from Eqs. (26) and (28)

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -[m_u^\mu + m_d^\mu] \langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 + \mathcal{O}(\hat{m}_q^2), \quad (29)$$

$$f_{K^+}^2 m_{K^+}^2 = -[m_u^\mu + m_s^\mu] \langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 + \mathcal{O}(\hat{m}_q^2), \quad (30)$$

which exemplify what is commonly known as the Gell-Mann–Oakes–Renner relation. The primary result, Eq. (26), is valid *independent* of the magnitude of $\hat{m}_q$, and can be rewritten in the form

$$f_H^2 m_H^2 = -\langle \bar{q}q \rangle_\mu^H \mathcal{M}_H, \quad (31)$$

where I have introduced the *notation*

$$-\langle \bar{q}q \rangle_\mu^H := f_H r_H = f_H Z_4 \int_q^\Lambda \frac{1}{2} \text{tr} \left[(T^H)^t \gamma_5 \mathcal{S}(q_+) \Gamma_H(q; P) \mathcal{S}(q_-) \right], \quad (32)$$

which defines an *in-meson* condensate. This emphasises that, for nonzero current-quark masses, Eq. (26) *does not* involve a difference of vacuum massive-quark condensates; a phenomenological assumption often employed.

As elucidated elsewhere [11], Eq. (26) has another important corollary: it predicts that the mass of a heavy pseudoscalar meson rises linearly with the current-quark mass of its heavy constituent(s). Model calculations [8] show that this linear evolution is dominant at $\approx 2\hat{m}_s$, in agreement with experiment where the mass of the K , D , and B mesons lie precisely on the same straight line.

In Eq. (26) one therefore has a single mass formula, exact in QCD, that provides a unified understanding of light- and heavy-meson masses.

4. AN ILLUSTRATIVE MODEL

I have already made use of a model [7] in illustrating some of the robust results of DSE studies. To further elucidate the method I will describe that model in more detail. For the kernel of the quark DSE it employs the analogue of the lowest-order BSE kernel in Fig. 7:

$$\begin{aligned} Z_1 \int_q^\Lambda g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu^a(q, p) \rightarrow \\ \rightarrow \int_q^\Lambda \mathcal{G}((p-q)^2) D_{\mu\nu}^{\text{free}}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (33)$$

This is the “rainbow” approximation, in which the specification of the model is complete once a form is chosen for the “effective coupling” $\mathcal{G}(k^2)$.

A choice for $\mathcal{G}(k^2)$ can be motivated by observing that at large- $Q^2 := (p-q)^2$ in an asymptotically free theory the quark-antiquark scattering kernel satisfies

$$\begin{aligned} g^2(\mu^2) D_{\mu\nu}(p-q) [\Gamma_\mu^a(p_+, q_+) S(q_+)] \times [S(q_-) \Gamma_\nu^a(q_-, p_-)] = \\ = 4\pi \alpha(Q^2) D_{\mu\nu}^{\text{free}}(p-q) \left[\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S^{\text{free}}(q_+) \right] \times \left[S^{\text{free}}(q_-) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right], \end{aligned} \quad (34)$$

where P is the total momentum of the quark-antiquark pair, $p_+ := p + \eta_P P$ and $p_- := p - (1 - \eta_P)P$ with $0 \leq \eta \leq 1$. Choosing a truncation of K in which this right-hand side is identified with the lowest order contribution in Fig. 7 then consistency with the AV-WTI requires

$$\mathcal{G}(Q^2) := 4\pi \alpha(Q^2). \quad (35)$$

Thus the form of $\mathcal{G}(Q^2)$ at large- Q^2 is fixed by that of the running coupling constant. This *Ansatz* is often described as the “Abelian approximation” because the left- and right-hand sides are *equal* in QED. In QCD, equality between the two sides of Eq. (35) cannot be obtained easily by a selective resummation of

diagrams. As reviewed in Ref.1, Eqs. (5.1) to (5.8), it can only be achieved by enforcing equality between the renormalisation constants for the ghost-gluon vertex and ghost wave function: $\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_3$.

The explicit form of the *Ansatz* employed in Ref.7 is

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}(k^2)}{k^2} = & 8\pi^4 D \delta^4(k) + \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} + \\ & + 4\pi \frac{\gamma_m \pi}{\frac{1}{2} \ln \left[\tau + \left(1 + k^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \right)^2 \right]} \mathcal{F}(k^2), \end{aligned} \quad (36)$$

with $\mathcal{F}(k^2) = [1 - \exp(-k^2/[4m_t^2])]/k^2$ and $\tau = e^2 - 1, N_f = 4$ and $\Lambda_{\text{QCD}}^{N_f=4} = 0.234 \text{ GeV}$.

The qualitative features of Eq. (36) are clear. The first term is an integrable infrared singularity [12] and the second is a finite-width approximation to $\delta^4(k)$, normalised such that it has the same $\int d^4k$ as the first term. In this way the infrared singularity is split into the sum of a zero-width and a finite-width piece. The last term in Eq. (36) is proportional to $\alpha(k^2)/k^2$ at large spacelike- k^2 and has no singularity on the real- k^2 axis. Gluon confinement is manifest since $\mathcal{G}(k^2)/k^2$ doesn't have a Lehmann representation.

4.1. Solving the Quark DSE. There are ostensibly three parameters in Eq. (36): D , ω and m_t . However, in the numerical studies the values $\omega = 0.3 \text{ GeV}$ ($= 1/[.66 \text{ fm}]$) and $m_t = 0.5 \text{ GeV}$ ($= 1/[.39 \text{ fm}]$) were fixed, and only D and the renormalised u/d - and s -current-quark masses varied in order to satisfy the goal of a good description of low-energy π - and K -meson properties. This was achieved with

$$D = 0.781 \text{ GeV}^2, \quad m_{u/d}^\mu = 3.74 \text{ MeV}, \quad m_s^\mu = 82.5 \text{ MeV}, \quad (37)$$

at $\mu \approx 20 \text{ GeV}$, which is large enough to be in the perturbative domain. The effective coupling obtained is depicted in Fig. 9.

Using Eqs. (33), (36), (37), and the renormalisation boundary condition

$$S(p)^{-1} \Big|_{p^2=\mu^2} = i\gamma \cdot p + m^\mu, \quad (38)$$

the quark DSE, Eq. (7), is completely specified and can be solved by iteration.

The chiral limit in QCD is unambiguously defined by $\hat{m} = 0$. In this case there is no perturbative contribution to the scalar piece of the quark self energy, $B(p^2, \mu^2)$: in fact, there is no scalar, mass-like divergence in the perturbative calculation of the self energy. It follows that $Z_2(\mu^2, \Lambda^2) m_{\text{bm}}(\Lambda^2) = 0, \forall \Lambda$ and, from Eq. (38), that there is no subtraction in the equation for $B(p^2, \mu^2)$. In terms

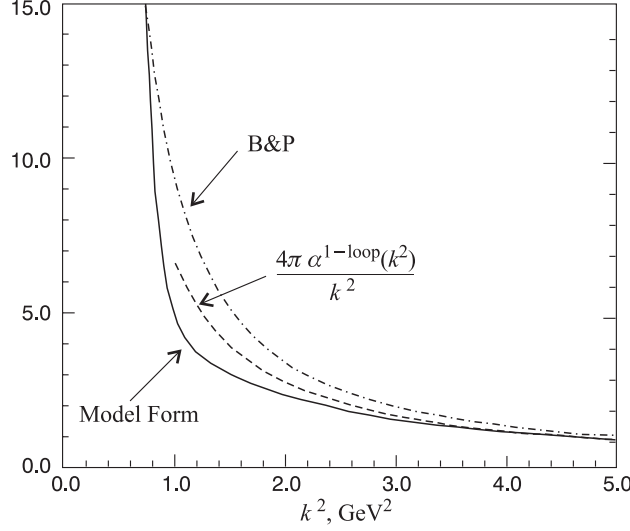


Fig. 9. *Ansatz* for $\mathcal{G}(k^2)/k^2$ employed in Ref.7. “B&P” labels a solution [6] of the gluon DSE, which is presented for comparison, as is the one-loop running coupling in QCD

of the renormalised current-quark mass the existence of DCSB means that, in the chiral limit, $M(\mu^2) \sim O(1/\mu^2)$, up to $\ln \mu^2$ -corrections.*

Figure 10 depicts the renormalised dressed-quark mass function, $M(p^2)$, obtained by solving the quark DSE using the parameters in Eq. (37), and in the chiral limit. It is a complement to Fig. 4 because it highlights the qualitative difference between the behaviour of $M(p^2)$ in the chiral limit and in the presence of explicit chiral symmetry breaking. In the latter case

$$M(p^2) \stackrel{\text{large-}p^2}{=} \frac{\hat{m}}{\left(\frac{1}{2} \ln \left[\frac{p^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right] \right)^{\gamma_m}} \{1 + \text{two loop}\}, \quad \gamma_m = \frac{12}{33 - 2N_f}. \quad (39)$$

However, in the chiral limit the ultraviolet behaviour is given by

$$M(p^2) \stackrel{\text{large-}p^2}{=} \frac{2\pi^2 \gamma_m}{3} \frac{(-\langle \bar{q}q \rangle^0)}{p^2 \left(\frac{1}{2} \ln \left[\frac{p^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right] \right)^{1-\gamma_m}}, \quad (40)$$

where $\langle \bar{q}q \rangle^0$ is the renormalisation-point-independent vacuum quark condensate.

*This is a model-independent statement; i.e., it is true in any study that preserves the one-loop renormalisation group behaviour of QCD.

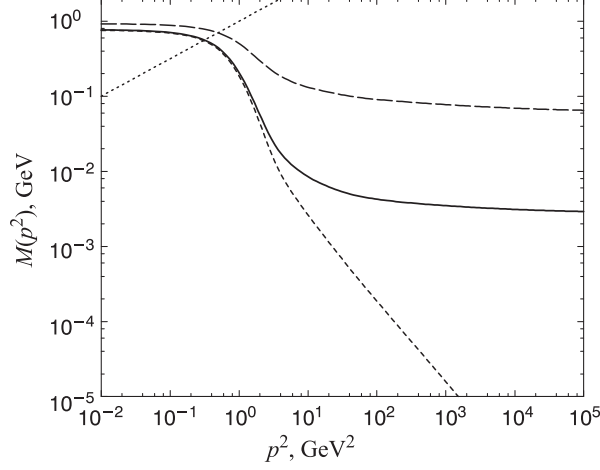


Fig. 10. The renormalised dressed-quark mass function, $M(p^2)$, obtained in solving the quark DSE using the parameters in Eq. (37): u/d -quark (solid line); s -quark (long-dashed line); and chiral limit (dashed line). The renormalisation point is $\mu \approx 20 \text{ GeV}$. The intersection of the line $M^2(p^2) = p^2$ (dotted line) with each curve defines the Euclidean constituent-quark mass, M^E .

Analysing the chiral limit solution yields

$$-\langle \bar{q}q \rangle^0 = (0.227 \text{ GeV})^3, \quad (41)$$

which is a reliable means of determining $\langle \bar{q}q \rangle^0$ because corrections to Eq. (40) are suppressed by powers of $\Lambda_{\text{QCD}}^2/\mu^2$.

Equation (28) defines the renormalisation-point-dependent vacuum quark condensate

$$\begin{aligned} & -\langle \bar{q}q \rangle_\mu^0|_{\mu=19 \text{ GeV}} := \\ & = \left(\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_4(\mu, \Lambda) N_c \int_q^\Lambda \text{tr}_{\text{Dirac}} [S_{\hat{m}=0}(q)] \right) \Big|_{\mu=19 \text{ GeV}} = (0.275 \text{ GeV})^3, \end{aligned} \quad (42)$$

the calculated result. It is straightforward to establish explicitly that $m^\mu \langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 = \text{constant}$, independent of μ , and hence

$$m^\mu \langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 := \hat{m} \langle \bar{q}q \rangle^0, \quad (43)$$

which unambiguously defines the renormalisation-point-independent current-quark masses. From this and Eqs. (37), (41) and (42) one obtains the values of these masses appropriate to this model

$$\hat{m}_{u/d} = 6.60 \text{ MeV}, \quad \hat{m}_s = 147 \text{ MeV}. \quad (44)$$

Using the one-loop evolution in Eq. (39) these values yield $m_{u/d}^\mu = 3.2 \text{ MeV}$ and $m_s^\mu = 72 \text{ MeV}$, which are within $\sim 10\%$ of the actual values in Eq. (37). This indicates that higher-loop corrections to the one-loop formulae, which are present in the solution of the integral equation as made evident by $A(p^2, \mu^2) \neq 1$ in Landau gauge, provide contributions of $< 10\%$ at $p^2 = \mu^2$. The higher-loop contributions decrease with increasing p^2 .

From the renormalisation-point-invariant product in Eq. (43) one obtains

$$-\langle \bar{q}q \rangle_\mu^0|_{\mu=1 \text{ GeV}} := (\ln[1/\Lambda_{\text{QCD}}])^{\gamma_m} \langle \bar{q}q \rangle^0 = (0.241 \text{ GeV})^3. \quad (45)$$

This result can be compared directly with the value of the quark condensate employed in contemporary phenomenological studies: [13] $(0.236 \pm 0.008 \text{ GeV})^3$. Increasing $\omega \rightarrow 1.5\omega$ in $\mathcal{G}(k^2)$ raises the calculated value in Eq. (45) by $\sim 10\%$, a weak sensitivity.

After this discussion of the vacuum quark condensate it is straightforward to determine the accuracy of Eqs. (29) and (30). Using experimental values on the left-hand side, one finds:

$$(0.0924 \times 0.1385)^2 = (0.113 \text{ GeV})^4 \text{ cf. } (0.111 \text{ GeV})^4 = 2 \times 0.0055 \times 0.24^3 \quad (46)$$

$$(0.113 \times 0.495)^2 = (0.237 \text{ GeV})^4 \text{ cf. } (0.206 \text{ GeV})^4 = (0.0055 + 0.13) \times 0.24^3, \quad (47)$$

which indicates that $\mathcal{O}(\hat{m}^2)$ -corrections begin to become important at current-quark masses near that of the s -quark, as demonstrated further in Ref.8.

4.2. Solving the Pseudoscalar Meson BSE. The model quark DSE described above employs the rainbow truncation. Following Fig. 7 the consistent Ward — Takahashi identity preserving truncation of the quark-antiquark scattering kernel is the ladder approximation:

$$K_{tu}^{rs}(q, k; P) = -\mathcal{G}((k-q)^2) D_{\mu\nu}^{\text{free}}(k-q) \left(\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \right)_{tr} \left(\gamma_\nu \frac{\lambda^a}{2} \right)_{su}, \quad (48)$$

in which case the explicit form of Fig. 6 is

$$\Gamma_H(k; P) + \int_q^\Lambda \mathcal{G}((k-q)^2) D_{\mu\nu}^{\text{free}}(k-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \mathcal{S}(q_+) \Gamma_H(q; P) \mathcal{S}(q_-) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu = 0. \quad (49)$$

Having an *Ansatz* for $\mathcal{G}(k^2)$, $\mathcal{S}(q)$ in Eq. (49) follows by solving the quark DSE. The kernel of the BSE is then completely specified and solving the equation for $\Gamma_H(k; P)$ and the bound state mass is a straightforward numerical problem. Then, with $D_{\mu\nu}(k)$, $\mathcal{S}(p)$ and $\Gamma_H(k; P)$, the calculation of other observables such as: the leptonic decay constant, f_H ; meson charge radius, r_H ; and electromagnetic form factor, $F_H(Q^2)$; etc., is possible.

The general form of the solution of Eq. (49) is given in Eq. (15), where the scalar functions depend on the variables k^2 and $k \cdot P$ and are labelled by the eigenvalue P^2 . From this it is clear that the integrand in Eq. (49) depends on the scalars: k^2 , $k \cdot q$, q^2 , $q \cdot P$, and P^2 , which takes a fixed-value at the solution; i.e., at each value of P^2 the kernel is a function of four, independent variables. Solving Eq. (49) can therefore require large-scale computing resources, especially since there are four, independent scalar functions in the general form of the solution.

Two different solution techniques can be employed. In one procedure, which I will label: (A), the scalar functions are treated directly as dependent on two, independent variables: $E(k^2, k \cdot P; P^2)$, etc. This requires straightforward, multidimensional integration at every iteration. Storing the multidimensional kernel requires a large amount of computer memory but the iteration proceeds quickly.

An adjunct, which I will label: (B), employs a Chebyshev decomposition procedure. It is implemented by writing

$$E(k^2, k \cdot P; P^2) \approx \sum_{i=0}^{N_{\max}} i E(k^2; P^2) U_i(\cos \beta), \quad (50)$$

with similar expansions for F , $\hat{G} := k \cdot P G$ and H , where $k \cdot P := \cos \beta \sqrt{k^2 P^2}$ and $\{U_i(x); i = 0, \dots, \infty\}$ are Chebyshev polynomials of the second kind, orthonormalised according to:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} U_i(x) U_j(x) = \delta_{ij}. \quad (51)$$

This procedure requires a large amount of time to set up the kernel but does not require large amounts of computer memory.

In Tables 1 and 2 I list values of the dimensionless ratio

$$\mathcal{R}_H := - \frac{\langle \bar{q} q \rangle_\mu^H \mathcal{M}_H}{f_H^2 m_H^2}. \quad (52)$$

A value of $\mathcal{R}_H = 1$ means that Eq. (26) is satisfied and hence so is the AV-WTI.* Looking at the tabulated values of $\mathcal{R}_H$ it is clear that the scalar function H is not quantitatively important, with the AV-WTI being satisfied numerically with the retention of E , F and G in the pseudoscalar meson Bethe — Salpeter amplitude. The values of $\mathcal{R}_H$, and the other tabulated quantities, highlight the importance

*It illustrates that the pseudoscalar-meson pole in the axial-vector vertex is related to the pseudoscalar-meson pole in the pseudoscalar vertex in the manner elucidated above. A finite value in the chiral limit emphasises that $m_H^2 \propto \mathcal{M}_H$ as $\mathcal{M}_H \rightarrow 0$.

Table 1. Calculated values of the properties of light, pseudoscalar mesons composed of a quark and antiquark of equal-mass. The mass ($m_\pi^{\text{exp}} = 0.1385$) and decay constant ($f_\pi^{\text{exp}} = 0.0924$) are in GeV, $\mathcal{R}_H$ is dimensionless. With the exception of the calculations that retain only the zeroth Chebyshev moment, labelled by “ U_0 only”, the results are independent of the momentum partitioning parameter, η_P , in Eq. (34).

All amplitudes	m_π	π f_π	$\mathcal{R}_H$	chiral limit			$s\bar{s}$		
				m_0	f^0	$\mathcal{R}_H$	$m_{s\bar{s}}$	$f_{s\bar{s}}$	$\mathcal{R}_H$
Method (A)	0.1385	0.0924	1.01	0.0	0.0898	1.00	0.685	0.129	1.00
U_0 only	0.136	0.0999	0.95	0.0	0.0972	0.94	0.675	0.137	0.95
U_0 and U_1	0.1385	0.0925	1.00	0.0	0.0898	1.00	0.685	0.129	1.00
E only									
Method (A)	0.105	0.0667	1.82	0.0	0.0649	1.81	0.512	0.092	1.68
U_0 only	0.105	0.0667	1.82	0.0	0.0649	1.81	0.513	0.092	1.69
E, F									
Method (A)	0.136	0.0992	0.95	0.0	0.0965	0.95	0.677	0.137	0.95
U_0 only	0.136	0.0992	0.95	0.0	0.0965	0.95	0.678	0.138	0.95
$E, F, \hat{G}$									
Method (A)	0.140	0.0917	1.01	0.0	0.0891	1.00	0.688	0.128	1.01
U_0 only	0.136	0.0992	0.95	0.0	0.0965	0.95	0.678	0.138	0.95
U_0 and U_1	0.140	0.0917	1.01	0.0	0.0891	1.00	0.689	0.128	1.01

of F and $\hat{G}$: F is the most important of these functions but $\hat{G}$ nevertheless provides a significant contribution, particularly for bound states of unequal-mass constituents.

From Tables 1 and 2, and Eqs. (31), (32), (37), and (45), one calculates

$$\begin{aligned} -\langle \bar{q}q \rangle_{\mu=1 \text{ GeV}}^\pi & -\langle \bar{q}q \rangle_{\mu=1 \text{ GeV}}^K & -\langle \bar{q}q \rangle_{\mu=1 \text{ GeV}}^{s\bar{s}} \\ (0.245 \text{ GeV})^3 & (0.284 \text{ GeV})^3 & (0.317 \text{ GeV})^3 \end{aligned} \quad (53)$$

showing that, for light pseudoscalars, the “in-meson condensate” I have defined increases with increasing bound state mass; as does the leptonic decay constant, f_H .^{*} Both of these trends are modified as one moves into the heavy-quark domain: $-\langle \bar{q}q \rangle_\mu^H \rightarrow \text{const.}$ and $f_H \rightarrow 0$ as $\mathcal{M}_H \rightarrow \infty$.

Figure 11 depicts the scalar functions in the Bethe — Salpeter amplitude obtained as solutions of Eq. (49), focusing on the zeroth Chebyshev moment of each function, which is obtained via

$${}^0E_H(k^2) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\beta \sin^2 \beta U_0(\cos \beta) E_H(k^2, k \cdot P; P^2), \quad (54)$$

^{*} $(-\langle \bar{q}q \rangle_\mu^H)/f_H$ is the residue of the bound state pole in the pseudoscalar vertex, just as f_H is the residue of the bound state pole in the axial-vector vertex. As expected, $\langle \bar{q}q \rangle_{\mu=1 \text{ GeV}}^\pi \approx \langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 \big|_{\mu=1 \text{ GeV}}$.

Table 2. Calculated properties of the K meson for various values of the momentum partitioning parameter, η_P ; “—” means that no bound state solution exists in this case. The mass ($m_K^{\text{exp}} = 0.496$) and decay constant ($f_K^{\text{exp}} = 0.113$) are in GeV, $\mathcal{R}_K$ is dimensionless

All amplitudes	$\eta_P = 0.50$			$\eta_P = 0.25$			$\eta_P = 0.00$		
	m_K	f_K	$\mathcal{R}_K$	m_K	f_K	$\mathcal{R}_K$	m_K	f_K	$\mathcal{R}_K$
Method (A)	0.497	0.109	1.01	0.497	0.109	1.01	0.497	0.109	1.01
U_0 only	0.469	0.117	0.96	0.482	0.117	0.95	0.475	0.113	1.02
U_0 and U_1	0.500	0.111	1.00	0.497	0.109	1.01	0.498	0.110	1.00
U_0, U_1 and U_2	0.497	0.109	1.01	0.497	0.109	1.01	0.496	0.109	1.01
E only									
Method (A)	0.430	0.079	1.55	0.430	0.079	1.55	0.429	0.076	1.55
U_0 only	0.380	0.077	1.54	0.401	0.076	1.51	0.415	0.073	1.55
U_0 and U_1	0.439	0.089	1.52	0.430	0.078	1.55	0.431	0.076	1.57
U_0, U_1 and U_2	0.430	0.078	1.55	0.430	0.078	1.55	0.427	0.076	1.55
E, F									
Method (A)	0.587	0.17	0.79	0.557	0.14	0.86	0.533	0.11	0.94
U_0 only	0.505	0.12	0.82	0.518	0.11	0.86	0.512	0.11	0.96
U_0 and U_1	—	—	—	0.556	0.14	0.86	0.537	0.12	0.94
U_0, U_1 and U_2	0.583	0.16	0.79	0.557	0.14	0.86	0.532	0.12	0.93
$E, F, \hat{G}$									
Method (A)	0.500	0.108	1.01	0.500	0.108	1.01	0.500	0.108	1.01
U_0 only	0.471	0.116	0.96	0.484	0.116	0.95	0.477	0.112	1.02
U_0 and U_1	0.504	0.110	1.00	0.500	0.108	1.01	0.502	0.109	1.00
U_0, U_1 and U_2	0.500	0.108	1.01	0.500	0.108	1.01	0.499	0.108	1.01

and similarly for F, G [$\hat{G}$ for the K meson] and H . I note that: the momentum-space width of ${}^0E_H(k^2)$ increases as the current-quark mass of the bound state constituents increases; ${}^0F_H(k^2 = 0)$ decreases with increasing current-quark mass but that ${}^0F_H(k^2)$ is still larger at $k^2 > 0.5 \text{ GeV}^2$ for bound states of higher mass; ${}^0G_H(k^2)$ [${}^0\hat{G}_K(k^2)$] behaves similarly; and the same is true for $H_H(k; P)$ but it is uniformly small in magnitude thereby explaining its quantitative insignificance.

Figure 12 depicts the large- k^2 behaviour of the scalar functions in the pseudoscalar Bethe — Salpeter amplitude. The momentum dependence of ${}^0E_H(k^2)$ at large- k^2 is identical to that of the chiral-limit quark mass function, $M(p^2)$ in Eq. (40), [14] and characterises the form of the quark-quark interaction in the ultraviolet. Figure 12 elucidates that this is also true of ${}^0F_H(k^2)$, $k^2 {}^0G_H(k^2)$ [$k^2 {}^0\hat{G}_K(k^2)$ for the K meson] and $k^2 {}^0H_H(k^2)$. Each of these functions reaches its ultraviolet limit by $k^2 \simeq 10 \text{ GeV}^2$, which is very-much-less-than the renormalisation point, $\mu^2 = 361 \text{ GeV}^2$. As I will illustrate below, this result has important implications for the behaviour of pseudoscalar meson form factors.

A direct verification of Eqs. (19)—(22) is possible in this concrete model. Consider the inhomogeneous axial-vector vertex equation, Fig. 8, in the ladder

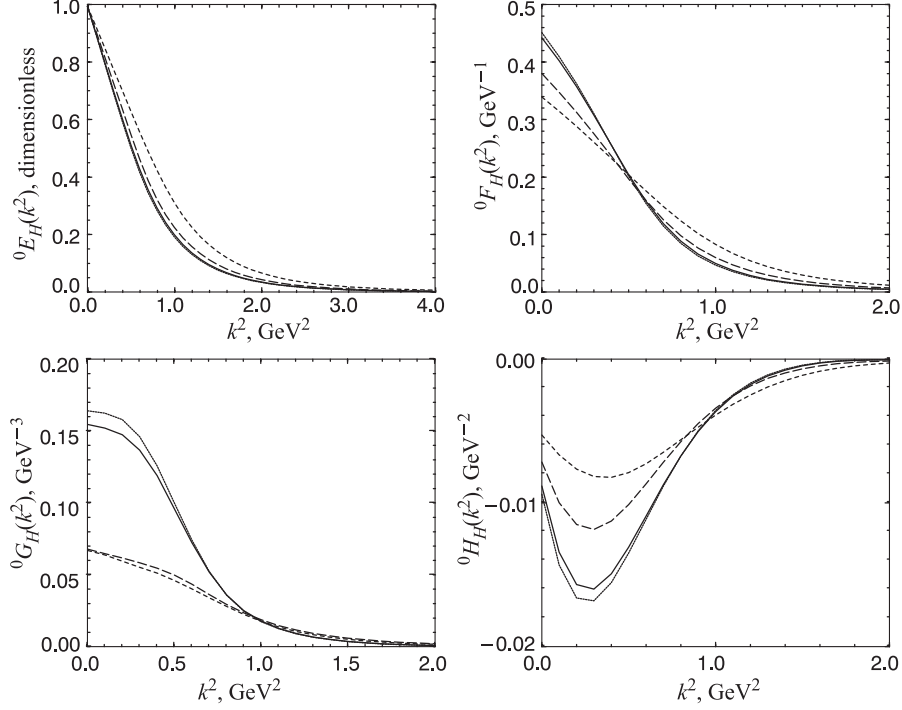


Fig. 11. The zeroth Chebyshev moment of the scalar functions in the mesons' Bethe — Salpeter amplitude: chiral limit (dotted line); π meson (solid line); K meson (long-dashed line); and fictitious, $s\bar{s}$ bound state (dashed line). For ease of comparison the amplitudes are all rescaled so that ${}^0E_H(k^2 = 0) = 1$

truncation:

$$\Gamma_{5\mu}^H(k; P) = Z_2 \gamma_5 \gamma_\mu \frac{T^H}{2} - \int_q^\Lambda \mathcal{G}((k-q)^2) D_{\mu\nu}^{\text{free}}(k-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \mathcal{S}(q_+) \Gamma_{5\mu}^H(q; P) \mathcal{S}(q_-) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \quad (55)$$

From the homogeneous BSE one already has the equations satisfied by $E_H(k; 0)$, $F_H(k; 0)$, $G_H(k; 0)$, and $H_H(k; 0)$. To proceed, one substitutes Eq. (17) for $\Gamma_{5\mu}^H(k; P)$ in Eq. (55). Using the coupled equations for $E_H(k; 0)$, etc., one can identify and eliminate each of the pole terms associated with the pseudoscalar bound state. [That the homogeneous BSE is linear in the Bethe — Salpeter amplitude allows this.] That yields a system of coupled equations for $F_R(k; 0)$, $G_R(k; 0)$, and $H_R(k; 0)$, which can be solved without complication. [The factor of Z_2 automatically ensures that $F_R(k^2 = \mu^2; P = 0) = 1$.] The realisation of

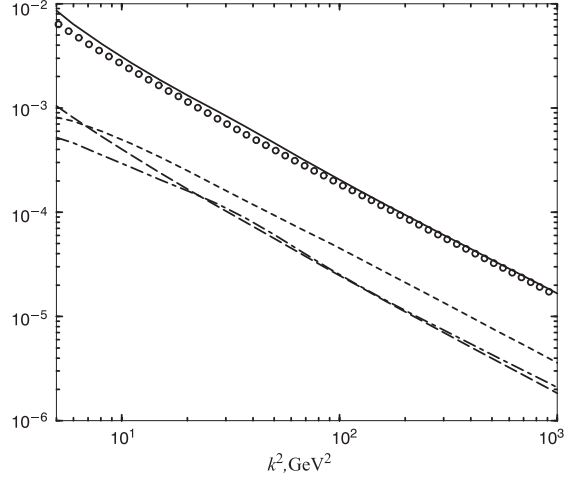


Fig. 12. Asymptotic behaviour of the 0th Chebyshev moments of the functions in the π -meson Bethe — Salpeter amplitude: $f_\pi^0 E_\pi(k^2)$ (GeV, solid line); $f_\pi^0 F_\pi(k^2)$ (dimensionless, long-dashed line); $k^2 f_\pi^0 G_\pi(k^2)$ (dimensionless, dashed line); and $k^2 f_\pi^0 H_\pi(k^2)$ (GeV, dot-dashed line). The k^2 dependence is identical to that of the chiral-limit quark mass function, $M(p^2)$, Eq. (40). For other pseudoscalar mesons the momentum dependence of these functions is qualitatively the same, although the normalising magnitude differs

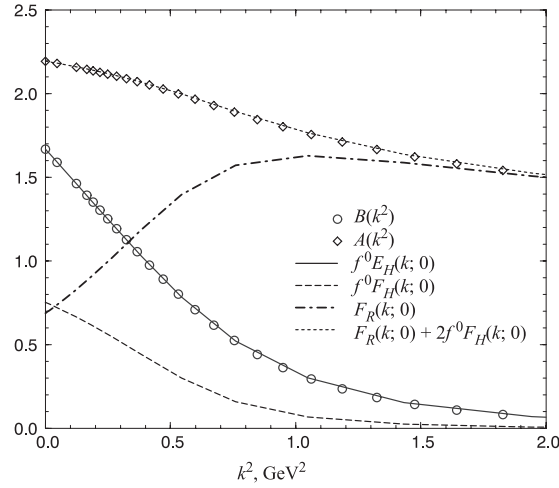


Fig. 13. An illustration of the realisation of the identities Eqs. (19) and (20), which are a necessary consequence of preserving the axial vector Ward — Takahashi identity

the first two identities, Eqs. (19) and (20), is illustrated in Fig. 13. The remaining two identities, Eqs. (21) and (22), are realised in a similar fashion.

5. ADDITIONAL PHENOMENOLOGICAL APPLICATIONS

In the model illustration of Sec. 4 an algebraic *Ansatz* was developed for the dressed-gluon propagator based on the qualitative behaviour of solutions of the gluon DSE. From this basic beginning, I illustrated how one can proceed to calculate hadronic observables. A number of qualitatively significant features emerged, among them DCSB and confinement, all of which are related to the strong momentum dependence of the quark mass function, Eq. (8), in the infrared.

That last observation suggests an alternative phenomenological approach: develop an algebraic *Ansatz* for the dressed-quark propagator. This is not as fundamental as the approach in Sec. 4 because many, apparently distinct features of the dressed-quark propagator are encoded in a few parameters of the *Ansatz* for the dressed-gluon propagator; modelling the dressed-quark propagator directly requires additional parameters to describe correlated effects. However, it has a significant merit: with an algebraic as opposed to a numerical representation of the dressed-quark propagator it is possible to study scattering observables more quickly and easily. The approach can yield quantitatively reliable results provided the *Ansatz* exhibits those essential qualitative features manifest in a direct solution of the quark DSE using a realistic *Ansatz* for the dressed-gluon propagator. Further, in allowing a rapid analysis of a broad range of observable phenomena, it provides a means of exploring the hypothesis that the bulk of hadronic phenomena are simply a manifestation of the nonperturbative, momentum-dependent dressing of the elementary Schwinger functions in QCD.

A simple and widely used model is [15]

$$\bar{\sigma}_S(\xi) = 2\bar{m}\mathcal{F}(2(\xi + \bar{m}^2)) + \mathcal{F}(b_1 \xi)\mathcal{F}(b_3 \xi) (b_0 + b_2\mathcal{F}(\varepsilon \xi)) , \quad (56)$$

$$\bar{\sigma}_V(\xi) = \frac{2(\xi + \bar{m}^2) - 1 + e^{-2(\xi + \bar{m}^2)}}{2(\xi + \bar{m}^2)^2} , \quad (57)$$

with $\bar{\sigma}_S(\xi) := \lambda \sigma_S(p^2)$, $\bar{\sigma}_V(\xi) := \lambda^2 \sigma_V(p^2)$, where $p^2 = \lambda^2 \xi$, λ is a mass-scale, and $\mathcal{F}(y) := [1 - \exp(-y)]/y$. This five-parameter form, where $\bar{m}$ is the current-quark mass, combines the effects of confinement * and DCSB with

*The representation of $S(p)$ as an entire function is motivated by the algebraic solutions of Eq. (7) in Refs.16,17.

free-particle behaviour at large, spacelike p^{2*} . Applying Eq. (28) in this case:

$$-\langle \bar{q}q \rangle_\mu^0 := \lim_{M^2 \rightarrow \infty} Z_4(\mu^2, M^2) \frac{3}{4\pi^2} \int_0^{M^2} ds s \sigma_S^0(s), \quad (58)$$

$$= \lambda^3 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \frac{3}{4\pi^2} \frac{b_0}{b_1 b_3}, \quad (59)$$

and the pion mass is given by

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = 2m \langle \bar{q}q \rangle_{1\text{ GeV}}^0. \quad (60)$$

In Sec.4.1 we saw that when all the components of Γ_π are retained, Eq. (60) yields an approximation to the pion mass found in a solution of the Bethe — Salpeter equation that is accurate to 2%.

The model has been used for both u/d - and s -quark propagators with the difference between flavours manifest in $b_0^s \neq b_0^{u/d}$, $b_2^s \neq b_2^{u/d}$ and $m_s \neq m_{u/d}$: the first allows for a difference between the K and π in-meson condensates and the second for $M_s^E \neq M_{u/d}^E$, and all three are phenomenological constraints observed in the previous section. As emphasised above, in a solution of the quark DSE using an *Ansatz* for the dressed-gluon propagator, the parameters in Eq. (56) are correlated and one can anticipate this crudely when fitting them.

5.1. Pion Electromagnetic Form Factor. The renormalised impulse approximation to the electromagnetic pion form factor is [15]

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)_\mu F_\pi(q^2) &:= \Lambda_\mu(p_1, p_2) = \\ &= \frac{2N_c}{N_\pi^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_D [\bar{\mathcal{G}}_\pi(k; -p_2) S(k_{++}) \times \\ &\times i\Gamma_\mu^\gamma(k_{++}, k_{+-}) S(k_{+-}) \mathcal{G}_\pi(k - q/2; p_1) S(k_{--})], \end{aligned} \quad (61)$$

$k_{\alpha\beta} := k + \alpha p_1/2 + \beta q/2$ and $p_2 := p_1 + q$, illustrated in Fig. 14. Here $\mathcal{G}_\pi(k; P)$ is the pion Bethe — Salpeter amplitude normalised such that $E(0; 0) = B(0)$ in the chiral limit, in which case the consistent canonical normalisation of the

*At large- p^2 : $\sigma_V(p^2) \sim 1/p^2$ and $\sigma_S(p^2) \sim m/p^2$. Therefore the parametrisation does not incorporate the additional $\ln p^2$ -suppression characteristic of QCD: it corresponds to $\gamma_m \rightarrow 1$ in Eq. (40). It is a useful but not necessary simplification, which introduces model artefacts that are easily identified and accounted for. $\varepsilon = 0.01$ is introduced only to decouple the large- and intermediate- p^2 domains.

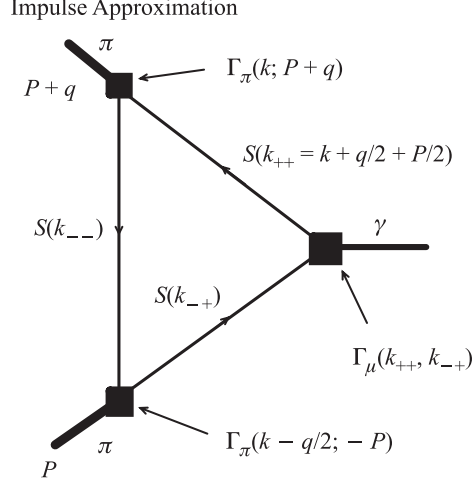


Fig. 14. Impulse approximation to $F_\pi(q^2)$: S labels the dressed-quark propagator; Γ_π , the pion Bethe — Salpeter amplitudes; and Γ_μ , the dressed-quark-photon vertex

Bethe — Salpeter amplitude is

$$2\delta^{ij}N_\pi^2 P_\mu = \int_q^\Lambda \left\{ \text{tr} \left[\bar{\mathcal{G}}_\pi^i(q; -P) \frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \mathcal{G}_\pi^j(q; P) S(q_-) \right] + \right. \quad (62)$$

$$\left. + \text{tr} \left[\bar{\mathcal{G}}_\pi^i(q; -P) S(q_+) \mathcal{G}_\pi^j(q; P) \frac{\partial S(q_-)}{\partial P_\mu} \right] \right\},$$

where $\bar{\mathcal{G}}_\pi(q; -P)^t := C^{-1} \mathcal{G}_\pi(-q; -P) C$ with $C = \gamma_2 \gamma_4$, the charge conjugation matrix, and X^t denotes the matrix transpose of X .

Given S and Eqs. (19)-(22), what form does the Bethe — Salpeter amplitude take?

In Sec. 4.2 we saw that the zeroth Chebyshev moments of the pion Bethe — Salpeter amplitude provided results for m_π and f_π that were indistinguishable from those obtained with the full solution. Also $H_\pi \simeq 0$ and hence it was quantitatively unimportant in the calculation of m_π and f_π . These results are not specific to that particular model; in the latter case because the right-hand side of Eq. (22) is zero and hence in general there is no “seed” term for H_π . We also saw that at large- k^2 , independent of assumptions about the form of K , one has

$$E_\pi^0(k^2; P^2) \propto -\langle \bar{q}q \rangle_{k^2}^0 \frac{\alpha(k^2)}{k^2}, \quad (63)$$

and that the same is true of $F_\pi^0(k^2; P^2)$, $k^2 G_\pi^0(k^2; P^2)$, and $k^2 H_\pi^0(k^2; P^2)$. This makes manifest the “hard-gluon” contribution to $F_\pi(q^2)$ in Eq. (61). In addition,

in an asymptotically free theory, one has [7]

$$k^2 G_\pi^0(k^2; P^2) = 2F_\pi^0(k^2; P^2), \quad k^2 \gtrsim M_{UV}^2, \quad (64)$$

with $M_{UV} := 10 \Lambda_{QCD}$.

These observations, combined with Eqs. (19)–(22), motivate a model for $\mathcal{G}_\pi$:

$$E_\pi(k; P) = B_0(k^2) \quad (65)$$

with $F_\pi(k; P) = E_\pi(k; P)/(110 f_\pi)$, $G_\pi(k; P) = 2F_\pi(k; p)/[k^2 + M_{UV}^2]$, and $H_\pi(k; P) \equiv 0$. The relative magnitude of these functions at large k^2 is chosen to reproduce the numerical results in Fig. 12.

The final element in Eq. (61) is $\Gamma_\mu^\gamma(p_1, p_2)$, the renormalised, dressed-quark-photon vertex, and it is because this vertex must satisfy the vector Ward — Takahashi identity:

$$(p_1 - p_2)_\mu i\Gamma_\mu^\gamma(p_1, p_2) = S^{-1}(p_1) - S^{-1}(p_2), \quad (66)$$

that $(p_1 - p_2)_\mu \Lambda_\mu(p_1, p_2) = 0$ and no renormalisation constants appear explicitly in Eq. (61). $\Gamma_\mu^\gamma(p_1, p_2)$ has been much studied [5] and, although its exact form remains unknown, its robust qualitative features have been elucidated so that a phenomenologically efficacious *Ansatz* has emerged [18]

$$i\Gamma_\mu^\gamma(p, q) := i\Sigma_A(p^2, q^2) \gamma_\mu + (p + q)_\mu \left[\frac{1}{2} i\gamma \cdot (p + q) \Delta_A(p^2, q^2) + \Delta_B(p^2, q^2) \right], \quad (67)$$

$$\Sigma_f(p^2, q^2) := \frac{1}{2} [f(p^2) + f(q^2)], \quad \Delta_f(p^2, q^2) := \frac{f(p^2) - f(q^2)}{p^2 - q^2}, \quad (68)$$

where $f = A, B$. A feature of Eq. (67) is that the vertex is completely determined by the renormalised dressed-quark propagator. In Landau gauge the quantitative effect of modifications, such as that canvassed in Ref.19, is small and can be compensated for by small changes in the parameters that characterise a given model study [20].

The model parameters were determined [15] by optimising a least-squares fit to f_π , r_π and $\langle \bar{q}q \rangle_{1 \text{ GeV}}^0$, and a selection of pion form factor data on the domain $q^2 \in [0, 4] \text{ GeV}^2$. The procedure does not yield a unique parameter set with, for example, the two sets:

	$\lambda(\text{GeV})$	$\bar{m}$	b_0	b_1	b_2	b_3	
A	0.473	0.0127	0.329	1.51	0.429	0.430,	(69)
B	0.484	0.0125	0.314	1.63	0.445	0.405,	

Table 3. Comparison between the calculated values of low-energy pion observables and experiment or, in the case of $(-\langle\bar{q}q\rangle_1^0 \text{ GeV})^{1/3}$ and $m_{u/d}$, the values estimated using other theoretical tools. Each set in Eq. (69) yields the same calculated values. $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.234 \text{ GeV}$

	Calculated	Experiment
f_π	0.092 GeV	0.092
$(-\langle\bar{q}q\rangle_1^0 \text{ GeV})^{1/3}$	0.236	0.236 ± 0.008 [13]
$m_{u/d}$	0.006	0.008 ± 0.004 [21]
m_π	0.1387	0.1385
r_π	0.55 fm	0.663 ± 0.006 [22]
$r_\pi f_\pi$	0.25 (dimensionless)	0.310 ± 0.003

providing equally good fits, as illustrated in Table 3. There is a domain of parameter sets that satisfy the fitting criterion and they are distinguished only by the calculated magnitude of the pion form factor at large- q^2 . The two sets in Eq. (37) delimit reasonable boundaries and illustrate the model dependence in the result. In the chiral limit: $f_\pi^0 = 0.090 \text{ GeV}$.

The quark propagator obtained with these parameter values is pointwise little different to that obtained in Ref.23. One gauge of this is the value of the Euclidean constituent quark mass. Here $M_{u/d}^E = 0.32 \text{ GeV}$, whereas $M_{u/d}^E = 0.30 \text{ GeV}$ in Ref.23. It is also qualitatively similar to the numerical solution described in Sec. 4.1 [7], where $M_{u/d}^E = 0.56 \text{ GeV}$. Indeed, the results are not sensitive to details of the fitting function: fitting with different confining, algebraic forms yields $S(p)$ that is pointwise little changed, and the same results for observables. The earlier parametrisation [23] has been applied more widely, as reviewed in Ref.24, and Table 4 summarises the results.

In the calculations $f_\pi r_\pi$ is 20% too small. This discrepancy cannot be reduced in impulse approximation because the nonanalytic contributions to the dressed-quark-photon vertex associated with π - π rescattering and the tail of the ρ -meson resonance are ignored [29]. It can only be eliminated if these contributions are included. This identifies a constraint on realistic, impulse approximation calculations: they should not reproduce the experimental value of $f_\pi r_\pi$ to better than $\sim 20\%$, otherwise the model employed has unphysical degrees-of-freedom.

The pion form factor calculated [15] using Eqs. (56) and (57) with (69) is compared with available data in Figs. 15 and 16. It is also compared with the result obtained in Ref.23, wherein the calculation is identical *except* that the pseudovector components of the pion were neglected. Figure 15 shows a small, systematic discrepancy between the calculations and the data at low q^2 , which is

Table 4. Summary of results obtained using the parametrisation of $S(p)$ introduced in Ref.23, which differs little from that specified by Eqs. (56) and (57). a_J^I are π - π scattering lengths, whose experimental values are discussed in Ref.28, and $F^{3\pi}(4m_\pi^2)$ is the value of the $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$ transition form factor at the softest point kinematically accessible. The citations for the calculated results specify the article in which the annotated study is described. The “experimental” values of the current-quark masses and the quark condensate are estimates made using other theoretical tools: see Table 3

	Calculated	“Experiment”
f_π	0.0924 GeV	0.0924 ± 0.001
f_K	0.113	0.113 ± 0.001
m_π	0.139	0.138
m_K	0.494	0.494
m_1^{ave}	0.0045	0.008
m_1^s	0.113	$0.1 \sim 0.3$
$-\langle\bar{q}q\rangle_{1\text{ GeV}^2}^{\frac{1}{3}}$	0.247	0.236 ± 0.008
$r_{\pi^\pm}$	0.55 fm	0.663 ± 0.006
$r_{K^\pm}$	0.49 [25]	0.583 ± 0.041
$r_{K^0}^2$	-0.020 fm ²	-0.054 ± 0.026
$g_{\pi^0\gamma\gamma}$	0.50 [23] (dimensionless)	0.504 ± 0.019
$F^{3\pi}(4m_\pi^2)$	1.04 [26]	1 (Anomaly)
a_0^0	0.19 [27]	0.26 ± 0.05
a_0^2	-0.054	-0.028 ± 0.012
$2a_0^0 - 5a_0^2$	0.65	0.66 ± 0.12
a_1^1	0.038	0.038 ± 0.002
a_2^0	0.0017	0.0017 ± 0.0003
a_2^2	-0.00029	
f_K/f_π	1.22	1.22 ± 0.01
$r_{K^\pm}/r_{\pi^\pm}$	0.87	0.88 ± 0.06

due to the underestimate of r_π in impulse approximation*. The results obtained with or without the pseudovector components of the pion Bethe — Salpeter amplitude are quantitatively the same, which indicates that the pseudoscalar component, E_π , is dominant in this domain.

*Just as in the present calculation, $f_\pi r_\pi = 0.25$ in Ref.23. However, the mass-scale is fixed so that $f_\pi = 0.084$, which is why this result appears to agree better with the data at small- q^2 : r_π is larger.

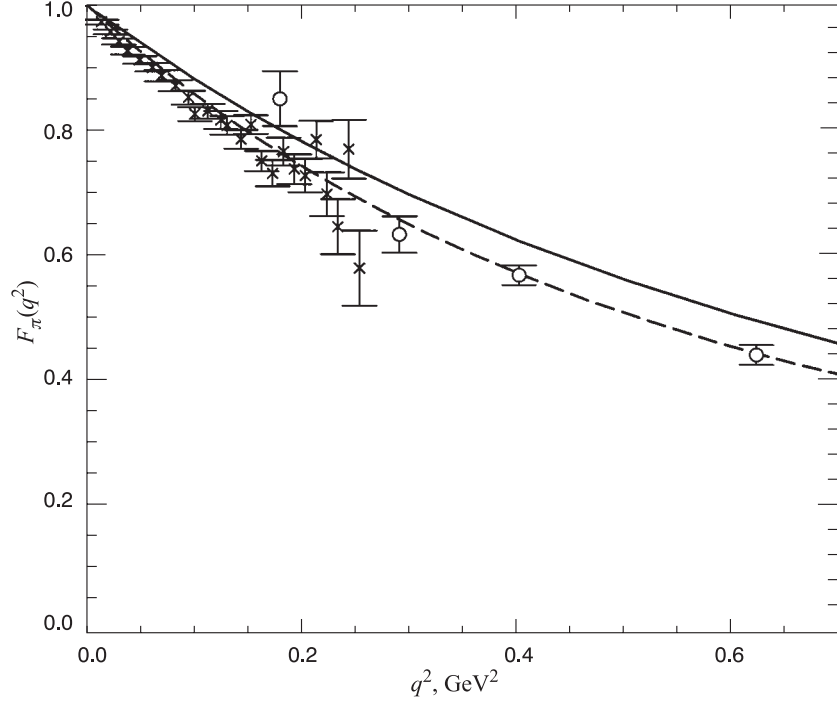


Fig. 15. Calculated pion form factor compared with data at small q^2 . The data are from Refs.22 (crosses) and 30 (circles). The solid line is the result obtained when the pseudovector components of the pion Bethe — Salpeter amplitude are included; the dashed-line, when they are neglected [23]. On the scale of this figure, both parameter sets in Eq. (69) yield the same calculated result

The increasing uncertainty in the experimental data at intermediate q^2 is apparent in Fig. 16, as is the difference between the results calculated with or without the pseudovector components of the pion Bethe — Salpeter amplitude. These components provide the dominant contribution to $F_\pi(q^2)$ at large pion energy because of the multiplicative factors: $\gamma \cdot P$ and $\gamma \cdot k k \cdot P$, which contribute an additional power of q^2 in the numerator of those terms involving F^2 , FG , and G^2 relative to those proportional to E . Using the method of Ref.23 and the model-independent asymptotic behaviour indicated by Eq. (63) one finds

$$F_\pi(q^2) \propto \frac{\alpha(q^2)}{q^2} \frac{(-\langle \bar{q}q \rangle_{q^2}^0)^2}{f_\pi^4}; \quad (70)$$

i.e., $q^2 F_\pi(q^2) \approx \text{const.}$, up to calculable $\ln q^2$ -corrections. If the pseudovector components of Γ_π are neglected, the additional numerator factor of q^2 is missing and one obtains [23] $q^4 F_\pi(q^2) \approx \text{const.}$

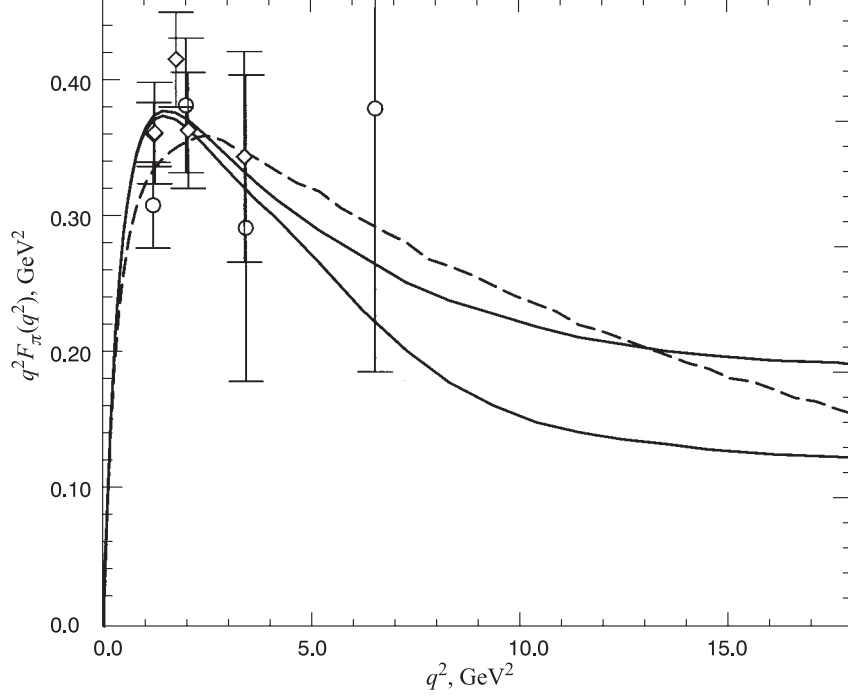


Fig. 16. Calculated pion form factor compared with the largest q^2 data available: diamonds — Ref.30; and circles — Ref.31. The solid lines are the results obtained when the pseudovector components of the pion Bethe — Salpeter amplitude are included (lower line — set A in Eq. (69); upper line — set B), the dashed-line when they are neglected [23]

With this model the behaviour identified in Eq. (70) becomes apparent at $q^2 \gtrsim 2 M_{UV}^2$. This is the domain on which the asymptotic behaviour indicated by Eq. (63) is manifest. The calculated results, obtained with the two sets of parameters in Eq. (37), illustrate the model dependent uncertainty:

$$q^2 F_\pi(q^2)|_{q^2 \sim 10-15 \text{ GeV}^2} \sim 0.12 - 0.19 \text{ GeV}^2. \quad (71)$$

It arises primarily because the model allows for a change in one parameter to be compensated by a change in another. In this example: $b_2^B > b_2^A$ but $b_0^B + b_2^B = b_0^A + b_2^A$; and $b_1^A b_3^A = b_1^B b_3^B$, which allows an equally good fit to low-energy properties but alters the intermediate- q^2 behaviour of $F_\pi(q^2)$. As emphasised, in a solution of Eq. (7) these coefficients of the $1/p^4$ and $1/p^6$ terms are correlated and such compensations cannot occur.

As a comparison, evaluating the leading-order perturbative-QCD result with the asymptotic quark distribution amplitude: $\phi_{\text{as}}(x) := \sqrt{3} f_\pi x(1-x)$, yields

$$q^2 F_\pi(q^2) = 16 \pi f_\pi^2 \alpha(q^2) \approx 0.15 \text{ GeV}^2, \quad (72)$$

assuming a value of $\alpha(q^2 \sim 10 \text{ GeV}^2) \approx 0.3$. However, the perturbative analysis neglects the anomalous dimension accompanying condensate formation; e.g., Eqs. (19)-(22) are not satisfied in Ref.32.

5.2. Electroproduction of Vector Mesons. There is an extensive body of literature describing Pomeron phenomenology, all derived from the observation that the total cross section in high-energy scattering: p - p , $\bar{p}$ - p , $\pi^\pm$ - p , γ - p , etc., is forward-peaked and rises slowly with $\sqrt{s}$. This is illustrated [21] in Fig. 17 and can be described [10] by a Pomeron-exchange model of the quark-nucleon interaction with the following features:

1. The quark-Pomeron coupling is $\bar{q}^f(p_2) \Gamma_\mu^f q^f(p_1)$, where $\Gamma_\mu := \beta_f \gamma_\mu$ with β_f a flavour-dependent coupling constant. It is the only flavour-dependence in the interaction.
2. The Pomeron “propagator” is characterised by a Regge trajectory:

$$G(s, t) := (\alpha_1 s)^{\alpha_0 + \alpha_1 t} \quad (73)$$

with $\alpha_0 > 0$, which ensures the increase with s , and the Pomeron-nucleon coupling is $3\beta_u F_1(t)$, where $F_1(t)$ is the Dirac form factor of the proton.

3. The interaction is used in impulse approximation so that, for example, the $\pi N \rightarrow \pi N$ interaction is completely described by

$$\begin{aligned} \langle P; p_2 m'_s | T_{\pi N \rightarrow \pi N} | q; p_1 m_s \rangle &:= \\ &:= \Lambda_\mu(q, P) 3\beta_{u/d} F_1(t) G(s, t) \bar{u}_{m'_s}(p_2) \gamma_\mu u_{m_s}(p_1), \end{aligned} \quad (74)$$

where $u_{m_s}(p_1)$ is a nucleon spinor and $\Lambda_\mu(q, P) := 2\Lambda_\mu^u(q, P) + 2\Lambda_\mu^{\bar{d}}(q, P)$ with

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^f(q, P) &:= \\ &:= N_c \text{tr}_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_u(k_{-+}) \Gamma_\pi(k_{0-}) S_d(k_{--}) \bar{\Gamma}_\pi(k) S_u(k_{++}) \beta_f i \gamma_\mu \end{aligned} \quad (75)$$

describing the interaction of the Pomeron with the f -quark in the pion. The parameters: β_f , α_0 , α_1 , in this model were fixed [10] by requiring a good description of πN and KN scattering, and this is achieved with

$$\beta_{u/d} = 2.35 \text{ GeV}^{-2}, \quad \beta_s = 1.50 \text{ GeV}^{-2}, \quad \alpha_0 = 0.10, \quad \alpha_1 = 0.33 \text{ GeV}^{-2}. \quad (76)$$

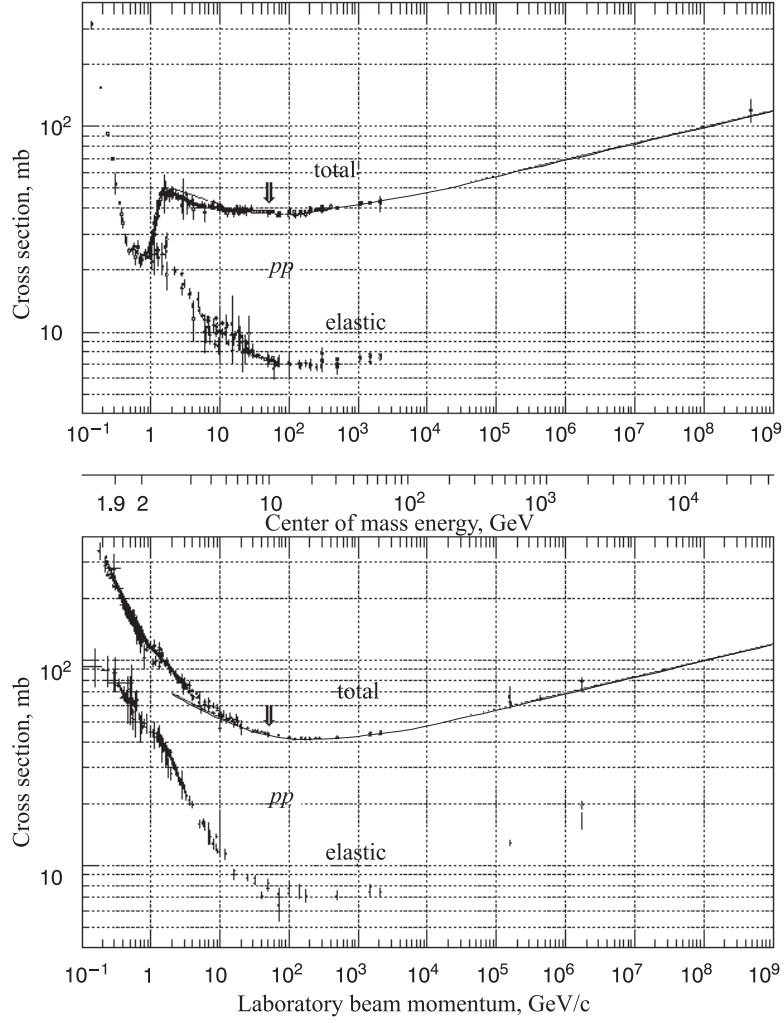


Fig. 17. Total and elastic cross sections for p - p and $\bar{p}$ - p scattering. The slow increase of the total cross section with $\sqrt{s}$ at high energy is obvious.

In the diffractive regime the process $e^- p \rightarrow e^-' p' V$, where $V = \rho, \phi, \psi$, is also expected to proceed via soft-Pomeron exchange and the model introduced above can be applied directly. The matrix element is

$$\begin{aligned}
 \langle p_2 m_2; k \lambda_\rho | J_\mu | p_1 m_1 \rangle = \\
 = 2\beta_f t_{\mu\nu\lambda}(q, k) \varepsilon_\lambda^{\lambda_\rho}(k) G_P(\bar{w}^2, t) 3\beta_u F_1(t) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1), \quad (77)
 \end{aligned}$$

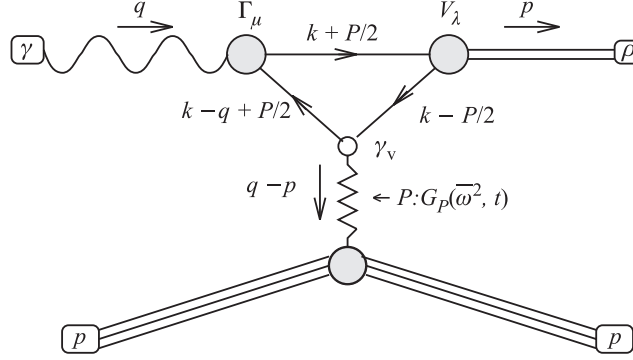


Fig. 18. ρ -meson electroproduction matrix element. $\bar{\omega}^2 := -(q - P/2 + p_1)^2$, where p_1 is the momentum of the struck nucleon

depicted in Fig. 18, where the $\gamma\mathcal{P} \rightarrow \rho$ transition form factor is

$$t_{\mu\nu\lambda}(q, P) = 3e_0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ S(k + \frac{1}{2}P) \times \right. \\ \left. \times \Gamma_\mu^\gamma(k + \frac{1}{2}P, k - q + \frac{1}{2}P) S(k - q + \frac{1}{2}P) \gamma_\nu S(k - \frac{1}{2}P) V_\lambda(k; -P) \right\}. \quad (78)$$

The unknown quantity in Eq. (78) is the vector meson Bethe — Salpeter amplitude, $V_\nu(k; -P)$. In the absence of a solution of the associated Bethe — Salpeter equation, an oft used and phenomenologically efficacious procedure [24] is to parametrise the amplitude in a manner similar to that employed for the pion in Sec. 5.1:

$$V_\nu(k; P) = \left(\gamma_\nu + \frac{P_\nu \gamma \cdot P}{m_V^2} \right) \frac{1}{N_V} \left\{ e^{-k^2/a_V^2} + \frac{c_V}{1 + k^2/b_V^2} \right\}, \quad (79)$$

where N_V is fixed via the canonical normalisation condition: clearly, $P \cdot V(k; P) = 0$. The parameters are

	a (GeV)	b (GeV)	c
ρ	0.40	0.008	125.0
ϕ	0.45	0.6	0.3
ψ	1.10	0.0	0.0

(80)

which were fixed [10] by requiring the fit to the dimensionless coupling constants in Eq. (81).

	$g_{\rho \rightarrow e^+e^-}$	$g_{\rho \rightarrow \pi^+\pi^-}$	$g_{\phi \rightarrow e^+e^-}$	$g_{\phi \rightarrow K\bar{K}}$	$g_{\psi \rightarrow e^+e^-}$
Theory	4.6	6.8	12.7	3.9	11.5
Experiment	5.0	6.1	12.9	4.6	11.5

(81)

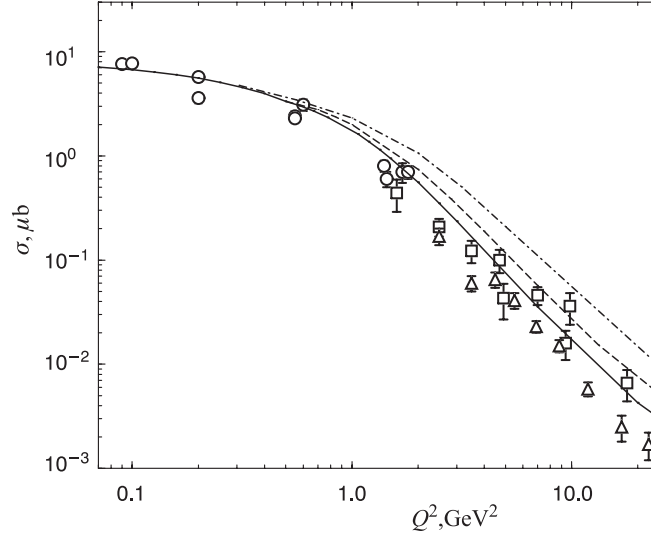


Fig. 19. ρ -meson electroproduction cross section at $W = 15$ GeV: solid line — calculated result; long-dashed line — result if $\bar{m}_{u/d} \rightarrow 10 \bar{m}_{u/d}$; dash-dot line — result if $\bar{m}_{u/d} \rightarrow 25 \bar{m}_{u/d} \simeq \bar{m}_s$. The data are: circles — Ref.33; squares — Ref.34; triangles — Ref.35

The experimental values of the decay constants were calculated from the widths in Ref.21, and the fit is acceptable given the simplicity of the *Ansatz* for V_ρ , which includes only one of the eight scalar functions necessary to completely specify a vector meson bound state. At this point there are no free parameters in the calculation of the electroproduction cross sections.

Figure 19 depicts the Q^2 -dependence of the ρ -meson electroproduction cross section and the magnitude is a prediction. There is complete agreement on the entire range of accessible Q^2 , with the large Q^2 behaviour [10]: $1/Q^4$, which becomes evident at $Q^2 \simeq 1\text{--}2 \text{ GeV}^2$. Below that point the nonperturbative character of the dressed-quark propagator dominates the evolution of the cross section. It is important to observe the prediction that, the larger the current-quark mass of the constituents, the larger the value of Q^2 at which the asymptotic behaviour is manifest.

The calculated ϕ -meson electroproduction cross section is depicted in Fig. 20. It is in excellent agreement with Refs.36 and 37, which used a nucleon target, as opposed to Ref.35, which averaged over variety of nuclear targets. As could be anticipated from Fig. 19, the onset of the asymptotic $1/Q^4$ behaviour is pushed to larger- Q^2 for the ϕ -meson because the current-quark mass of the constituents, the s -quark, is larger. In calculating the ψ -meson electroproduction cross section

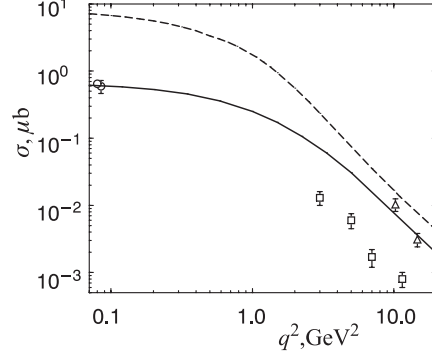


Fig. 20. ϕ -meson electroproduction cross section at $W = 70$ GeV: solid line; the dashed line is the ρ -meson result for comparison. The data are: triangles — Ref.35; circles — Ref.36; squares — Ref.37

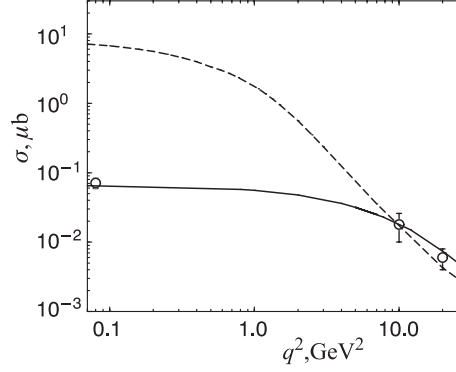


Fig. 21. ψ -meson electroproduction cross section at $W = 100$ GeV: solid line; the dashed line is the ρ -meson result at $W = 15$ GeV for comparison. The data are from Refs.38,39

a very simple form was used for the c -quark propagator:

$$S_c(k) := \frac{1}{m_c^2} (-i\gamma \cdot k + m_c) \mathcal{F}(1 + k^2/m_c^2) \quad (82)$$

with $m_c = 1.2$ GeV ($\sim m_c^{1\text{ GeV}}$ in Eq. (10)). This and the simple form of the ψ -meson Bethe — Salpeter amplitude anticipate the successful application of DSEs to heavy-meson observables [9]. The calculated cross section is depicted in Fig. 21. The striking prediction, confirmed by recent data, is that although two-orders of magnitude smaller than the ρ -meson cross section at the photoproduction point, the ψ -meson cross section is equal to that of the $W = 100$ GeV, ρ -meson cross section at $Q^2 = 15$ GeV². This is because the large c -quark mass shifts the onset of the asymptotic $1/Q^4$ -behaviour to larger- Q^2 .

6. FINITE TEMPERATURE AND CHEMICAL POTENTIAL

As we have seen, at zero temperature and chemical potential the low-energy and small- q^2 behaviour of QCD is characterised by confinement and DCSB. The internal scale that marks the boundary between small and large energy in QCD is $M_\chi \sim \Lambda_{\text{QCD}}$. As the energy and/or momentum transfer increases, QCD is characterised by asymptotic freedom; i.e., the coupling evolves

$$\alpha_S(Q^2, T=0=\mu) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0 \quad (83)$$

and quarks and gluons behave as weakly interacting, massless particles in high-energy and/or large- Q^2 processes.

The study of QCD at finite temperature and baryon number density proceeds via the introduction of the intensive variables: temperature, T ; and quark chemical potential, μ . These are additional mass-scales, with which the coupling can run and hence, for $T \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ and/or $\mu \gg \Lambda_{\text{QCD}}$, $\alpha_S(Q^2=0, T, \mu) \sim 0$. It follows that at finite temperature and/or baryon number density there is a phase of QCD in which quarks and gluons are weakly interacting, *irrespective* of the momentum transfer [40]; i.e., a quark-gluon plasma. Such a phase of matter existed approximately one microsecond after the big-bang. In this phase confinement and DCSB are absent and the nature of the strong interaction spectrum is qualitatively different. The contemporary expectation for the position of the phase boundary in the (μ, T) -plane is illustrated in Fig. 22.

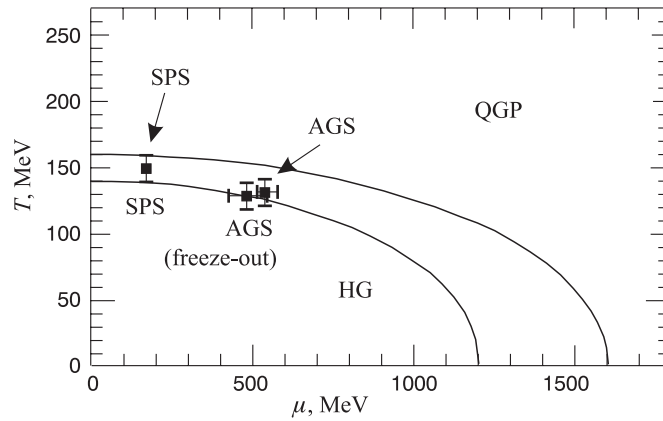


Fig. 22. The anticipated quark-gluon phase boundary in the (μ_N, T) -plane. “HG” — hadron gas, “QGP” — quark-gluon plasma. The nucleon chemical potential: $\mu_N := 3\mu$; i.e., three-times the quark chemical potential. “SPS” and “AGS” mark the points in the plane that is the estimate of these facilities explore.

The path followed in the transition to the plasma is important because it determines some observational consequences of the plasma's existence. For example [41], the time-scale for the expansion of the early universe: $\sim 10^{-5}$ s, is large compared with the natural time-scale in QCD: $1/\Lambda_{\text{QCD}} \sim 1 \text{ fm}/c \sim 10^{-23}$ s, hence thermal equilibrium is maintained throughout the QCD transition. Therefore, if the transition is second-order, the ratio $B := \text{baryon-number/entropy}$, remains unchanged from that value attained at an earlier stage in the universe's evolution. However, a first-order transition would be accompanied by a large increase in entropy density and therefore a reduction in B after the transition. Hence the order of the QCD transition constrains the mechanism for baryon number generation in models describing the formation of the universe, since with a second-order transition this mechanism is only required to produce the presently observed value of B and need not allow for dilution. In the absence of quarks, QCD has a first-order deconfinement transition, and with three or four massless quarks a first-order chiral symmetry restoration transition is expected [41]. A current, primary question is: what happens in the realistic case of two light quark flavours?

Nonperturbative methods are necessary to study the phase transition, which is characterised by qualitative changes in order parameters such as the quark condensate. One widely used approach is the numerical simulation of finite temperature lattice-QCD, with the first simulations in the early eighties and extensive efforts since then [42]. Here I focus on the application of DSEs. This is a new usage and much remains to be learnt: these are exploratory studies. One goal is to develop DSE models of QCD at finite- T and μ (QCD_μ^T) that can be used to check the results of numerical simulations, and be constrained by them. These models can then be employed to extrapolate into that domain presently inaccessible to lattice studies, such as finite chemical potential and the effects of T and μ on bound state properties, the latter of which are expected to provide the signatures of quark-gluon plasma formation in relativistic heavy ion collisions.

Before discussing details it is interesting to provide a human scale for the temperatures and densities involved. The natural scale in QCD is $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$ and temperatures of this order of magnitude will be necessary to create the plasma. $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 10^{10} \times \text{room-temperature!}$ It represents a temperature on the astrophysical and cosmological scale. Nuclear matter density $\rho_0 \approx 3 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3 = 0.16 \text{ N/fm}^3$ and this is more than $10^{13} \times$ the density of solid lead! The density at the core of a neutron star is expected to be approximately $4\rho_0$ [43] and it is densities on this order that are anticipated to be required for plasma formation.

The expectation of the existence of a new phase of matter, the quark-gluon plasma, has led to the construction of a Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) at Brookhaven National Laboratory. Construction is to be completed in 1999. It will use counter-circulating, colliding $100 \text{ A GeV } ^{197}\text{Au}$ beams to generate a total

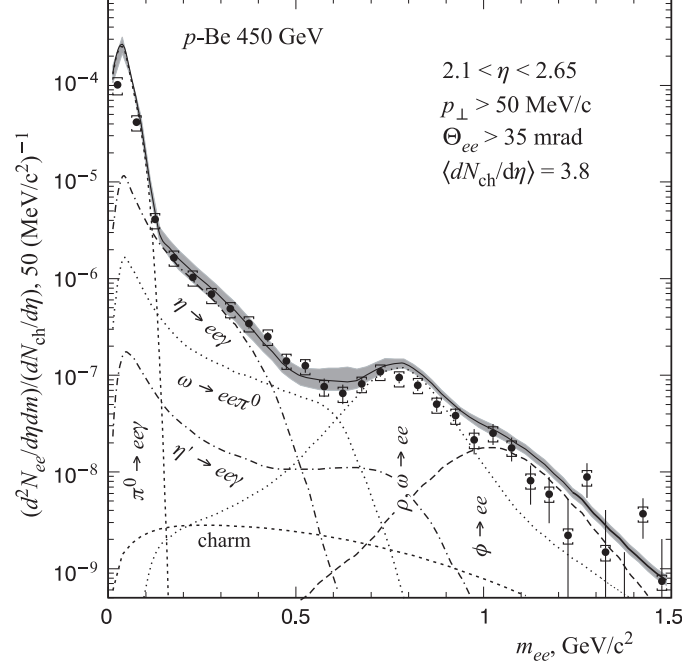


Fig. 23. Mass spectra for inclusive e^+e^- pairs in 450 GeV p-Be collisions showing the data and various contributions from hadron decays. The shaded region indicates the systematic error on the summed contributions [45]

centre-of-mass energy of ~ 40 TeV, in an effort to produce an equilibrated quark-gluon plasma. It is anticipated to approach the quark-gluon plasma via a low baryon density route. Contemporary, fixed target experiments at the Brookhaven-AGS and CERN-SpS explore a high baryon density environment at much lower centre-of-mass energies. These experiments are crucial in developing the expertise necessary for operating detectors under RHIC conditions but they are not expected to “discover” the plasma. The CERN-SpS experiments have nevertheless produced some interesting results.

One example is the “NA45-CERES” experiment [44], which studies e^+e^- pair production in heavy ion collisions. $e^\pm$ pairs leave the interaction region without interacting strongly and hence they are a probe of the early stages of the interaction. In Fig. 23 I illustrate the dilepton spectrum obtained in high-energy p-Be collisions. It is well described by known hadron decays. The same is true of p -Au collisions. However, this is not the case in S-Au collisions, as illustrated in Fig. 24. There the known hadron decays describe the data only for $m_{ee} < 300$ MeV, which is the region dominated by π^0 Dalitz decays. At higher energies the shape of the spectrum is different and shows a strong enhancement

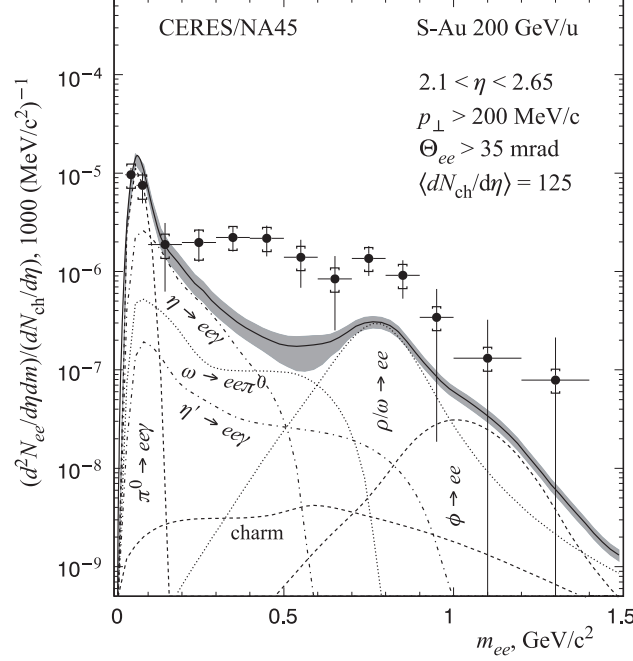


Fig. 24. Mass spectra for inclusive e^+e^- pairs in 200 GeV S-Au collisions showing the data and various contributions from hadron decays. The shaded region indicates the systematic error on the summed contributions [45]

in the dilepton yield. Integrating over the region $0.2 < m_{ee} < 1.5$ GeV the enhancement factor is

$$5.0 \pm 0.7 \text{ stat.} \pm 2.0 \text{ syst.} \quad (84)$$

The enhancement persists in Pb—Au collisions [44]. What explanation can be offered?

One model calculation [46] shows that this enhancement can be explained by a medium-induced reduction of the ρ -meson's mass; another [47], that it follows from an increase in the ρ -meson's width. A decrease in the ρ -meson's mass is consistent with the QCD sum rules analysis of Ref.48 but inconsistent with that of Ref.49, which employs a more complex phenomenological model for the in-medium spectral density used in matching the two sides of the sum rule. In Ref.49 there is no shift in the ρ -meson mass but a significant increase in its width. The consistency between Refs.47 and 49 is not surprising since, in contrast to Ref.48, they both rely heavily on effective Lagrangians with elementary hadron degrees-of-freedom. These are possibilities that can be explored using DSEs, which focusing on dressed-quark and -gluon degrees of freedom is an approach most akin to Ref.48. A first attempt [50], summarised in Sec. 7.6, predicts a

15% suppression of m_ρ at nuclear matter density but employs a model that is inadequate to address Γ_ρ .

6.1. Notes on Field Theory. Equilibrium statistical field theory can be understood by analogy with equilibrium statistical mechanics. For a particle moving in a potential V the density matrix is given by the path integral

$$\rho(x, x'; T := 1/\beta) := \int_{x(0)=x}^{x(\beta)=x'} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(\tau)^2 - V(x(\tau)) \right] \right\}, \quad (85)$$

where the underlined term is just the Lagrangian. All of the thermodynamic information about this system can be obtained from the partition function

$$Z(T) := \int_V dx \rho(x, x, T); \quad (86)$$

for example, the pressure $P = T \ln Z(T)/V$ and the baryon density $\rho^B = (1/3) \partial P / \partial \mu$.

The equilibrium thermodynamics of a quantum field theory is also completely specified by a partition function, or generating functional. In the particular case of a self-interacting scalar field this is given by the functional integral:

$$\mathcal{Z}[T] := \int \Pi_{\tilde{x}, \tau \in [0, \beta]} D\phi(\tilde{x}, \tau) \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}^E(x; \phi) \right), \quad (87)$$

where $\mathcal{L}^E(x; \phi)$ is the Euclidean Lagrangian density describing the interaction of $\phi(\tilde{x}, \tau)$, whose boundary conditions are periodic:

$$\phi(\tilde{x}, \tau = 0) = \phi(\tilde{x}, \tau = \beta). \quad (88)$$

The boundary conditions for fermions are antiperiodic:

$$\psi(\tilde{x}, \tau = 0) = -\psi(\tilde{x}, \tau = \beta). \quad (89)$$

This difference in boundary conditions is the reason for the difference between the Matsubara frequencies of fermions and bosons and hence why fermions acquire a screening mass at finite temperature.

It is immediately obvious that the $O(4)$ invariance of the Euclidean theory is lost: at finite temperature (and/or chemical potential) the theory exhibits only an $O(3)$ symmetry corresponding to spatial rotations and translations. This is why the formalism, necessarily used in lattice simulations, is only applicable to equilibrium systems — there is no generator of translations in time. One also notes from Eq. (87) that as $T \rightarrow \infty$ one dimension disappears completely and

hence the corresponding $(d-1)$ -dimensional theory is a candidate to describe the infinite-temperature limit of a d -dimensional theory.

The finite temperature, free fermion Lagrangian density is

$$\mathcal{L}_{\text{Free}}^E(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi}(\vec{x}, \tau) \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + \gamma_4 \partial_\tau + m \right) \psi(\vec{x}, \tau). \quad (90)$$

Introducing a Fourier decomposition:

$$\psi(\vec{x}, \tau) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \psi(\vec{p}, \omega_n) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} + i\omega_n \tau}, \quad (91)$$

antiperiodicity entails that the fermion Matsubara frequencies are

$$\omega_n = (2n+1)\pi T, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (92)$$

and the free fermion action is

$$S_{\beta}^E[\bar{\psi}, \psi]_{\text{Free}} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}(\vec{p}, \omega_n) (i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4 \omega_n + m) \psi(\vec{p}, \omega_n). \quad (93)$$

From this one identifies the finite temperature, free fermion propagator

$$S(p) = \frac{1}{i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4 \omega_n + m}. \quad (94)$$

Analogous arguments, using the periodic boundary conditions, lead to an identification of the free boson propagator

$$D(p, \Omega_n) = \frac{1}{|\vec{p}|^2 + \Omega_n^2 + m^2}, \quad (95)$$

where $\Omega_n = 2\pi n T$. Having obtained the free particle propagators one can proceed to define a perturbation theory. As an example, in massless ϕ^4 theory the one-loop correction to the ϕ propagator is

$$\propto T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Omega_n^2 + |\vec{p}|^2}. \quad (96)$$

The sum can be evaluated:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n^2 + |\vec{p}|^2} = \frac{1}{|\vec{p}|} \frac{1}{\exp(|\vec{p}|/T) - 1} + T\text{-independent piece}, \quad (97)$$

to yield the Bose-Einstein factor. This is a source of problems: for large temperatures

$$\frac{1}{\exp(|\vec{p}|/T) - 1} = \frac{T}{|\vec{p}|} \quad (98)$$

and one can thereby encounter additional infrared divergences.

These are particularly serious in QCD. To illustrate this [51] consider an $(\ell + 1)$ -gluon-loop diagram and focus on the $n = 0$ mode, which obviously yields the dominant infrared behaviour. The estimate is made easier if one neglects the tensor structure and notes that: from the vertices there is a factor of $g^{2\ell} p^{2\ell}$; the loop-sum-integral gives $(T \int_{p^2 \in [0, T]} d^3 p)^{\ell+1}$; and the propagators, $(p^2 + m^2)^{-3\ell}$, where m is a possible, dynamically generated mass-scale. A little thought and calculation shows that the net order of a given diagram in perturbation theory is

$$\begin{array}{lll} \ell = 1, 2 & \ell = 3 & \ell \geq 4 \\ g^{2\ell} T^4 & g^6 T^4 \ln(T/m) & g^6 T^4 [g^2 T/m]^{\ell-3}. \end{array} \quad (99)$$

Clearly, if $m = 0$ the diagrams are infrared divergent for $\ell > 2$. The divergences may cancel when all diagrams of a given order are summed but that is difficult to verify. Suppose instead that the mass-scale $m \sim gT$, as does the Debye mass in QED, then no problem arises: at each order above $\ell = 3$ the diagrams are suppressed by powers of the coupling and a self-consistent calculation of the mass-scale is straightforward. This underlies the successful application of the method of “hard thermal loops” [52]. However, suppose that $m \sim g^2 T$, which is the next possibility. In this case every diagram above $\ell = 2$ contributes with the same strength: g^6 , which presents a serious impediment to the application of perturbation theory!

The introduction of a quark chemical potential modifies Eq. (93):

$$\begin{aligned} & S_\beta^E[\bar{\psi}, \psi]_{\text{Free}} := \\ & := T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}(\vec{p}, \omega_n) (i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4 \omega_n - \gamma_4 \mu + m) \psi(\vec{p}, \omega_n) \end{aligned} \quad (100)$$

so that even the free Dirac operator is not hermitian and hence the QCD action is necessarily complex. As such it does not specify a probability measure, which precludes the straightforward application of Monte-Carlo methods in the evaluation of the partition function. However, the application of DSEs remains straightforward. The propagators and vertices are complex, so twice as many functions are required to represent them but otherwise there are no complications. Thus they provide a nonperturbative means of exploring this domain, which is presently inaccessible in lattice simulations.

6.2. Some Lattice Results. Since the early eighties, as one branch of the extensive application of lattice methods in many areas of QCD, Monte-Carlo simulations have been used to estimate the finite temperature QCD partition function [53]. These studies have contributed considerably to the current understanding of the nature of the quark-gluon plasma. Due to the persistent limitation of computational power many analyses have focused on the pure gauge sector, which exhibits a first-order deconfinement transition at a critical temperature of

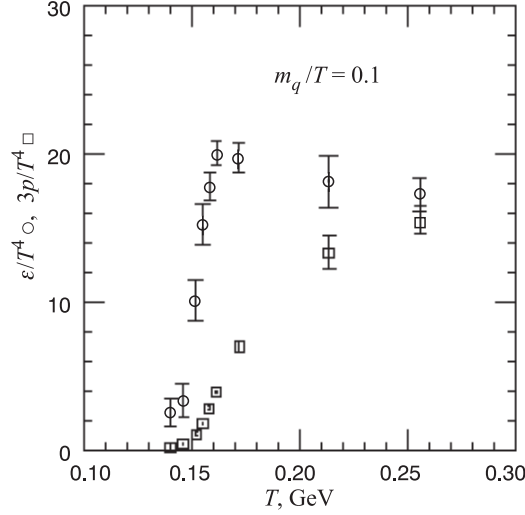


Fig. 25. Energy density and pressure for 2-light-flavour QCD on lattices with four temporal lattice sites, from Ref.58

$T_c^{N_f=0} \approx 270 \text{ MeV}$ [54]. In studying the chiral transition this commonly used quenched approximation is inadequate because the details depend sensitively on the number of active (light) flavours. It is therefore necessary to include the fermion determinant.

That is even more important when $\mu \neq 0$ because the Dirac operator is not hermitian and thus the fermion determinant acquires an explicit imaginary part, in addition to those terms associated with axial anomalies. The QCD action being complex entails that the study of finite density is significantly more difficult than that of finite temperature. Simulations that ignore the fermion determinant at $\mu \neq 0$ encounter a forbidden region, which begins at $\mu = m_\pi/2$ [55], and since $m_\pi \rightarrow 0$ in the chiral limit this is a serious limitation, preventing a reliable study of chiral symmetry restoration. The phase of the fermion determinant is essential in eliminating this artefact [56].

QCD with dynamical quarks is a contemporary focus and for two flavours of light quarks the theory appears [57] to exhibit a second-order transition at a critical temperature $T_c^{N_f=2} \approx 150 \text{ MeV}$. This is illustrated in Fig. 25, which shows a rapid change in the energy density in a small region around 150 MeV. For three or more light quark flavours the continuum theory is expected to have a first order chiral symmetry restoration transition.

The quark condensate is an order parameter for chiral symmetry breaking, with its nonzero value at $T = 0$ responsible for the pion mass being proportional to the square-root of the light current-quark masses. Its behaviour near the

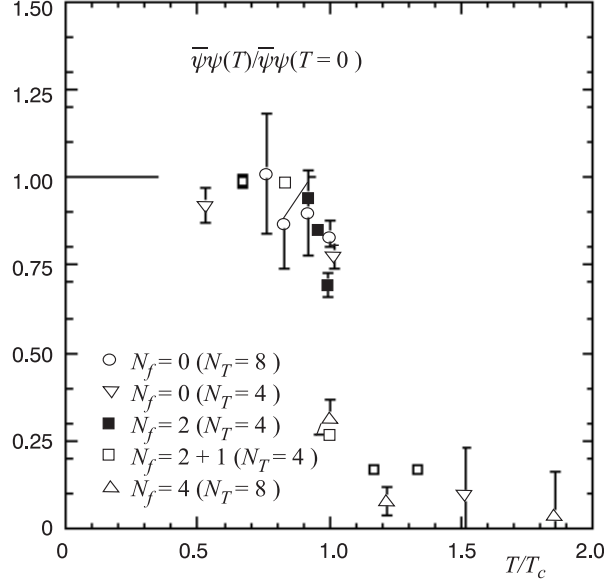


Fig. 26. Chiral condensate calculated [57] using staggered fermions and normalised to its zero temperature value. Only the $N_f = 0$ results are extrapolated to zero quark mass

critical temperature is depicted in Fig. 26, and the rapid, qualitative change with increasing T is easily apparent. Very important is that, independent of the number of light-quark flavours, the condensate is *unchanged* for $T < 0.9T_c$. It suggests that hadron properties are insensitive to T until very near the phase boundary.

The simulations with dynamical fermions are still preliminary, and many uncertainties remain. For example, a review [59] of recent results obtained with larger lattices and lighter quarks reports a significant lattice-volume-dependence for the critical exponents of the two light-flavour chiral symmetry restoration transition: the transition may even be first order! This might be an artefact of introducing lighter dynamical quarks, which drive the simulations to stronger coupling. The order of the transition with three and four flavours also remains unclear. With these uncertainties it is apparent that the lattice study of the phase transition will require further, even more computer-intensive simulations.

7. DSEs AT FINITE T AND μ

The contemporary application of DSEs at finite temperature and chemical potential is a straightforward extension of the $T = 0 = \mu$ studies. The direct approach is to develop a finite- T extension of the *Ansatz* for the dressed-gluon propagator. The quark DSE can then be solved and, having the dressed-quark and -gluon propagators, the response of bound states to increases in T and μ

can be studied. As a nonperturbative approach that allows the simultaneous study of DCSB and confinement, the DSEs have a significant overlap with lattice simulations: each quantity that can be estimated using lattice simulations can also be calculated using the DSEs. This means they can be used to check the lattice simulations, and importantly, that lattice simulations can be used to constrain their model-dependent aspects. Once agreement is obtained on the common domain, the DSEs can be used to explore phenomena presently inaccessible to lattice simulations.

7.1. Quark DSE. The renormalised dressed-quark propagator at finite- (T, μ) has the general form

$$S(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) = \frac{1}{i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} A(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) + i\gamma_4 \tilde{\omega}_k C(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) + B(\vec{p}, \tilde{\omega}_k)} \quad (101)$$

$$\equiv -i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \sigma_A(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) - i\gamma_4 \tilde{\omega}_k \sigma_C(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) + \sigma_B(\vec{p}, \tilde{\omega}_k), \quad (102)$$

where $\tilde{\omega}_k := \omega_k + i\mu$. The complex scalar functions: $A(\vec{p}, \tilde{\omega}_k)$, $B(\vec{p}, \tilde{\omega}_k)$ and $C(\vec{p}, \tilde{\omega}_k)$ satisfy:

$$\mathcal{F}(\vec{p}, \tilde{\omega}_k)^* = \mathcal{F}(\vec{p}, \tilde{\omega}_{-k-1}), \quad (103)$$

$\mathcal{F} = A, B, C$, and although not explicitly indicated they are functions only of $|\vec{p}|^2$ and $\tilde{\omega}_k^2$.

The DSE for the renormalised dressed-quark propagator is

$$S^{-1}(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) = Z_2^A i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + Z_2 (i\gamma_4 \tilde{\omega}_k + m_{\text{bm}}) + \Sigma'(\vec{p}, \tilde{\omega}_k), \quad (104)$$

where Z_2^A and Z_2 are renormalisation constants, m_{bm} is the bare mass, and the regularised self energy is

$$\Sigma'(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) = i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \Sigma'_A(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) + i\gamma_4 \tilde{\omega}_k \Sigma'_C(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) + \Sigma'_B(\vec{p}, \tilde{\omega}_k), \quad (105)$$

with

$$\begin{aligned} \Sigma'_{\mathcal{F}}(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) &= \\ &= \int_{l,q}^{\bar{\Lambda}} \frac{4}{3} g^2 D_{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}, \tilde{\omega}_k - \tilde{\omega}_l) \frac{1}{4} \text{tr} [\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \gamma_\mu S(\vec{q}, \tilde{\omega}_l) \Gamma_\nu(\vec{q}, \tilde{\omega}_l; \vec{p}, \tilde{\omega}_k)] , \end{aligned} \quad (106)$$

where $\mathcal{P}_A := -(Z_1^A/p^2)i\gamma \cdot p$, $\mathcal{P}_B := Z_1$, $\mathcal{P}_C := -(Z_1/\tilde{\omega}_k)i\gamma_4$, Z_1^A and Z_1 are vertex renormalisation constants, and $\int_{l,q}^{\bar{\Lambda}} := T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int^{\bar{\Lambda}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$. This last is a mnemonic to represent a translationally invariant regularisation of the integral with $\bar{\Lambda}$ the regularisation mass scale.

In Eq. (106) the Landau-gauge, finite- (T, μ) dressed-gluon propagator has the form

$$g^2 D_{\mu\nu}(\vec{p}, \Omega) = P_{\mu\nu}^L(\vec{p}, \Omega) \Delta_F(\vec{p}, \Omega) + P_{\mu\nu}^T(\vec{p}) \Delta_G(p, \Omega), \quad (107)$$

where

$$P_{\mu\nu}^T(\vec{p}) := \begin{cases} 0; & \mu \text{ and/or } \nu = 4, \\ \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}; & \mu, \nu = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad (108)$$

$$P_{\mu\nu}^L(\vec{p}, \Omega) := \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{\sum_{\alpha=1}^4 p_\alpha p_\alpha} - P_{\mu\nu}^T(p); \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4. \quad (109)$$

A “Debye-mass” for the gluon appears as a T -dependent contribution to Δ_F .

In renormalising we require that

$$S^{-1}(\vec{p}, \tilde{\omega}_0)|_{\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \zeta^2}^{\mu=0} = i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4 \omega_0 + m_R^\zeta, \quad (110)$$

where ζ is the renormalisation point and m_R^ζ is the renormalised current-quark mass. This entails that the renormalisation constants are:

$$Z_2^A(\zeta^2, \bar{\Lambda}^2) = 1 - \Sigma'_A(\vec{p}, \tilde{\omega}_0)|_{\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \zeta^2}^{\mu=0}, \quad (111)$$

$$Z_2(\zeta^2, \bar{\Lambda}^2) = 1 - \Sigma'_C(\vec{p}, \tilde{\omega}_0)|_{\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \zeta^2}^{\mu=0}, \quad (112)$$

$$m_R^\zeta = Z_2 m_{\text{bm}} + \Sigma'_B(\vec{p}, \tilde{\omega}_0)|_{\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \zeta^2}^{\mu=0}, \quad (113)$$

and yields the renormalised self energies:

$$\mathcal{F}(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) = \xi_{\mathcal{F}} + \Sigma'_{\mathcal{F}}(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) - \Sigma'_{\mathcal{F}}(\vec{p}, \tilde{\omega}_0)|_{\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \zeta^2}^{\mu=0}, \quad (114)$$

where $\mathcal{F} = A, B, C$; $\xi_A = 1 = \xi_C$ and $\xi_B = m_R^\zeta$.

In studying confinement one cannot assume that the analytic structure of a dressed propagator is the same as that of the free particle propagator: it must be determined dynamically. Indeed, one knows that the $\tilde{p}_k := (\vec{p}, \tilde{\omega}_k)$ -dependence of A and C is qualitatively important since it can conspire with that of B to eliminate free-particle poles in the dressed-quark propagator [17]. In this case the propagator does not have a Lehmann representation so that, in general, the Matsubara sum cannot be evaluated analytically. More importantly, it either complicates or precludes a real-time formulation of the finite temperature theory, which makes the study of nonequilibrium thermodynamics a very challenging problem. In addition, as we will see, this $\tilde{p}_k$ -dependence of A and C can be a crucial factor in determining the behaviour of bulk thermodynamic quantities such as the pressure and entropy; being responsible for these quantities reaching their respective Stefan – Boltzmann limits only for very large values of T and μ . It is therefore important in any DSE study to retain $A(\tilde{p}_k)$ and $C(\tilde{p}_k)$, and their dependence on $\tilde{p}_k$.

7.2. Phase Transitions and Order Parameters. Phase transitions are characterised by the behaviour of an order parameter, $\langle X \rangle$, the expectation value of an operator. In the ordered phase of a system: $\langle X \rangle \neq 0$, whereas in the disordered phase $\langle X \rangle = 0$. A phase transition is first-order if $\langle X \rangle \rightarrow 0$ discontinuously, whereas it is second-order if $\langle X \rangle \rightarrow 0$ continuously. For a second-order transition, the length-scale associated with correlations in the system diverges as $\langle X \rangle \rightarrow 0$ and one can define a set of critical exponents that characterise the behaviour of certain macroscopic properties at the transition point. For example, in a system that is ferromagnetic for temperatures less than some critical value, T_c , the magnetisation, M , is an order parameter and in the absence of an external magnetic field $M \propto (T_c - T)^\beta$ for $T \sim T_c^-$, where β is the critical exponent. At $T = T_c$ the behaviour of the magnetisation in the presence of an external field, $h \rightarrow 0^+$, defines another critical exponent, δ : $M \propto h^{(1/\delta)}$. In a system that can be described by mean field theory these critical exponents are

$$\beta^{\text{MF}} = 0.5, \quad \delta^{\text{MF}} = 3.0. \quad (115)$$

The problem is that it can be difficult to identify the order parameter relevant to the discussion of a phase transition.

One order parameter for the chiral symmetry restoration transition is well known — it is the quark condensate, defined via the renormalised dressed-quark propagator [7]:

$$-\langle \bar{q}q \rangle_\zeta := N_c \lim_{\bar{\Lambda} \rightarrow \infty} Z_4(\zeta, \bar{\Lambda}) \int_{l,q}^{\bar{\Lambda}} \frac{B_0(\tilde{p}_k)}{|\vec{p}|^2 A_0(\tilde{p}_k)^2 + \tilde{\omega}_l^2 C_0(\tilde{p}_k)^2 + B_0(\tilde{p}_k)^2}, \quad (116)$$

for each massless quark flavour, where the subscript “0” denotes that the scalar functions: A_0 , B_0 , C_0 , are obtained as solutions of Eq. (104) in the chiral limit. The functions have an implicit ζ -dependence. An equivalent order parameter is

$$\mathcal{X} := \text{Re } B_0(\vec{p} = 0, \tilde{\omega}_0), \quad (117)$$

which was used in Refs.60–62. Thus the zeroth Matsubara mode determines the character of the chiral phase transition, a conjecture explored in Ref.63.

What is an order parameter for deconfinement?

In Sec.2.3 I observed that the analytic properties of Schwinger functions play an important role in confinement. For illustrative simplicity, set $\mu = 0$, the generalisation to $\mu \neq 0$ is not difficult, and consider

$$\Delta_{B_0}(x, \tau = 0) := T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi x} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp p \sin(px) \sigma_{B_0}(p, \omega_n) \quad (118)$$

$$:= \frac{T}{2\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{B_0}^n(x). \quad (119)$$

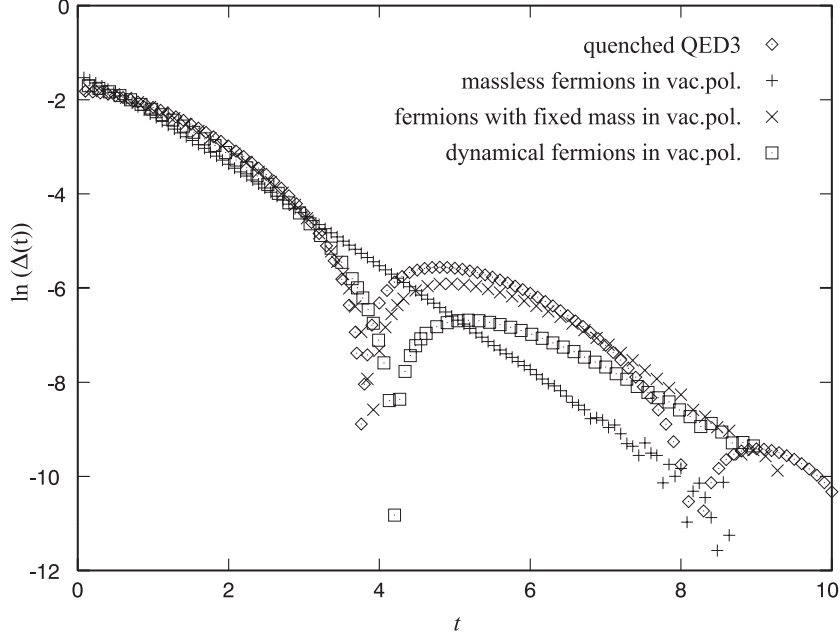


Fig. 27. $-E(t) := \ln \Delta(t)$ in QED_3 . Here the analogue of the mass-function is $E'(t)$ and the difference between the unconfined theory: “+”, and the confining theories is unmistakable

For a free fermion of mass M , $\sigma_{B_0}(p, \omega_n) = M/(\omega_n^2 + p^2 + M^2)$ and

$$\Delta_B^n(x) = M e^{-x \sqrt{\omega_n^2 + M^2}} : \quad (120)$$

the $n = 0$ term dominates the sum. In this case the “mass-function”

$$M(x; T) := \frac{d}{dx} (-\ln |\Delta_{B_0}^0(x)|) = \sqrt{\pi^2 T^2 + M^2}. \quad (121)$$

The most important observation is that for a free particle $M(x, T)$ has a fixed, real value, which identifies the mass-pole in the propagator. It also exhibits the fermion “screening mass” $= \pi T$, which becomes important for $T \sim M/\pi$. In the context of dynamical mass generation: $M \sim M^E$. Since $M_{u/d}^E \approx 450 \text{ MeV}$ one anticipates that finite- T effects will become important at $T \sim 150 \text{ MeV}$ (or finite μ effects at $\mu \sim 450 \text{ MeV}$). For a boson of mass M_b , $M(x; T) = M_b$: there is no screening mass.

How does $\Delta^0(x)$ behave if the dressed-propagator does not have a Lehmann representation? An example [64] is

$$\mathcal{D}(p, \Omega) = \frac{p^2 + \Omega_n^2 + M^2}{(p^2 + \Omega_n^2 + M^2)^2 + 4b^4}, \quad (122)$$

which has complex conjugate poles. In this case

$$\Delta_D^0(x) = e^{-Mx} \cos[bx]; \quad (123)$$

i.e., the Schwinger function oscillates and the mass-function has singularities, which is an unambiguous signal for the absence of a Lehmann representation and hence confinement!

An order parameter for confinement is now obvious [65]. Denote the position of the first zero in $\Delta_{B_0}^0(x)$ by $r_0^{z_1}$, which is inversely proportional to the distance of the poles from the real axis. Define $\kappa_0 := 1/r_0^{z_1}$, then $\kappa_0 \propto b$ and deconfinement is observed if, for some $T = T_c$, $\kappa_0(T_c) = 0$: at this point thermal fluctuations have overwhelmed the confinement scale-parameter and the poles have migrated to the real-axis. This criterion generalises easily to the case of $\mu \neq 0$ and to situations in which the dressed-propagator has an essential singularity rather than complex conjugate poles. It is also valid for both light and heavy quarks.

An analogue of this criterion, with

$$\Delta(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_4 e^{ip_4 t} \sigma_S(\vec{p} = 0, p_4), \quad (124)$$

has been used to very good effect in an analysis [66] of QED₃ at $T = 0$. QED₃ is confining in quenched approximation but not when massless fermions are allowed to influence the propagation of the photon. In that case complete charge screening is possible. Confinement is recovered in the theory if the fermion in the photon vacuum polarisation loop is massive. This application is summarised in Fig.27.

7.3. Illustration at $(T \neq 0, \mu = 0)$. As a first example I summarise a study [60] that uses a one-parameter, model dressed-gluon propagator. This parameter, m_t , is a mass-scale that marks the boundary between the perturbative and nonperturbative domains, and its value, $m_t = 0.69$ GeV, was fixed in $T = 0$ studies [67]. The extension of the model to finite- T involves no additional parameters and is defined with: $\Delta_F(p, \Omega) := \mathcal{D}(p, \Omega; m_D)$ and $\Delta_G(p, \Omega) := \mathcal{D}(p, \Omega; 0)$;

$$\mathcal{D}(p, \Omega; m) := \frac{16}{9} \pi^2 \left[\frac{2\pi}{T} m_t^2 \delta_0 \delta^3(p) + \frac{1 - e^{[-(p^2 + \Omega^2 + m^2)/(4m_t^2)]}}{p^2 + \Omega^2 + m^2} \right], \quad (125)$$

where $m_D^2 = (8/3)\pi^2 T^2$ is the perturbatively evaluated “Debye-mass”*. The quark DSE was solved using the rainbow approximation

$$\Gamma_\mu(q, \omega_l; p, \omega_k) = \gamma_\mu. \quad (126)$$

I have discussed this truncation in Secs. 2.4 and 4, and here only note that in $T = 0$ studies it has proven to be reliable in Landau gauge; i.e., at this level an efficacious phenomenology with a more sophisticated vertex *Ansatz* only requires a small quantitative modification of the parameters that characterise the small- k^2 behaviour of the dressed-gluon propagator [65]. Using this truncation, mutually consistent constraints are $Z_1^A = Z_2^A$ and $Z_1 = Z_2$.

The quark DSE was solved numerically with $m_R^\zeta = 1.1$ MeV, $\zeta = 9.47$ GeV. The $T = 0$ fitting of m_t and m_R ensured a best χ^2 -fit to a range of pion observables, yielding

$$\begin{array}{cccc} f_\pi = 92.4 & m_\pi = 139.5 & r_\pi N_\pi = 0.24 & g_{\pi^0 \gamma \gamma} = 0.45 \\ (92.4 \pm 0.3) & (138.3 \pm 0.5) & (0.31 \pm 0.004) & (0.50 \pm 0.02) \\ a_0^0 = 0.16 & a_0^2 = -0.041 & a_1^1 = 0.028 & a_2^0 = 0.0022 \\ (0.21 \pm 0.02) & (-0.040 \pm 0.003) & (0.038 \pm 0.002) & (0.0017 \pm 0.0003) \end{array} \quad (127)$$

with the experimental values listed in parentheses**. The finite- T study reproduces these results to within 6% at $T = 5$ MeV, using the finite- T generalisations of the formulae in Ref.67:

$$m_\pi^2 N_\pi^2 = \langle m_R^\zeta (\bar{q}q)_\zeta \rangle_\pi; \quad (128)$$

$$cd.. \langle m_R^\zeta (\bar{q}q)_\zeta \rangle_\pi := 8N_c \int_{k,p}^{\bar{\Lambda}} B_0 (\sigma_{B_0} - B_0 [\omega_k^2 \sigma_C^2 + p^2 \sigma_A^2 + \sigma_B^2]) ,$$

which vanishes linearly with m_R^ζ ; the canonical normalisation constant is

$$\begin{aligned} N_\pi^2 = 2N_c \int_{k,p}^{\bar{\Lambda}} B_0^2 \{ \sigma_A^2 - 2 [\omega_k^2 \sigma_C \sigma'_C + p^2 \sigma_A \sigma'_A + \sigma_B \sigma'_B] \\ - \frac{4}{3} p^2 ([\omega_k^2 (\sigma_C \sigma''_C - (\sigma'_C)^2) + p^2 (\sigma_A \sigma''_A - (\sigma'_A)^2) + \sigma_B \sigma''_B - (\sigma'_B)^2] \} \} , \end{aligned} \quad (129)$$

*The influence of the Debye-mass on finite- T observables is qualitatively unimportant, even in the vicinity of the chiral symmetry restoration transition. The ratio of the coefficients in the two terms in Eq. (125) is such that the long-range effects associated with $\delta_0 k \delta^3(p)$ are completely cancelled at short-distances; i.e., for $|\vec{x}|^2 m_t^2 \ll 1$.

**In Sec. 5.1 I discussed why $r_\pi N_\pi \approx 0.25$ in impulse approximation. The π - π scattering lengths fitted in Ref.67 were taken from Ref.68.

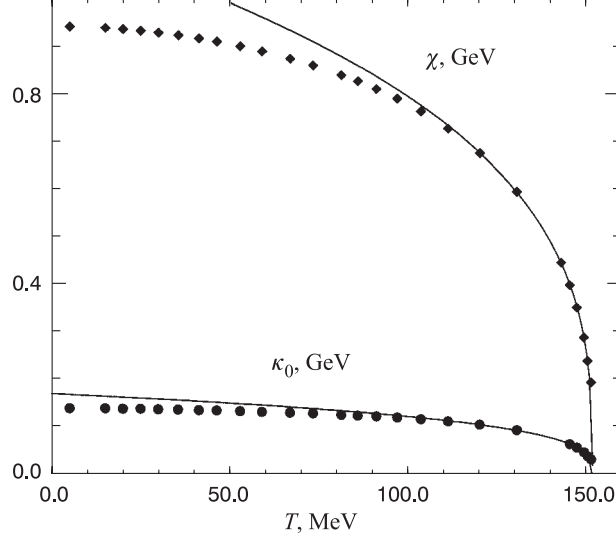


Fig. 28. The order parameters for chiral symmetry restoration ($\chi(T)$, diamonds) and deconfinement ($\kappa_0(T)$, circles) both vanish at $T_c = 150$ MeV. The parameters for the fitted curves are presented in Table 5

with $\sigma'_B \equiv \partial \sigma_B(p^2, \omega_k) / \partial p^2$, etc.; and the pion decay constant is obtained from

$$f_\pi N_\pi = 4N_c \int_p^\Lambda B_0 \left\{ \sigma_A \sigma_B + \frac{2}{3} |\vec{p}|^2 (\sigma'_A \sigma_B - \sigma_A \sigma'_B) \right\}. \quad (130)$$

Equations (128)–(130) were derived under the assumption that $\Gamma_\pi = i\gamma_5 B_0$. Some of the limitations of this assumption were discussed in Secs. 4.2 and 5.1, and they are considered further in Ref.7. It is quantitatively unreliable near the transition temperature, however, the qualitative behaviour of N_π and f_π is the same, see Table 5. Only after these studies were completed was it understood that N_π provides the best approximation to the leptonic decay constant when $\Gamma_\pi = i\gamma_5 B_0$ is assumed.

The calculated T -dependence of the chiral symmetry and deconfinement order parameters is depicted in Fig. 28. The curves in the figure, fitted on $T \in [120, 150]$ MeV, are of the form $\alpha (1 - T/T_c)^\beta$ with $T_c \approx 150$ MeV and α, β given in Table 5. The transitions are coincident and second-order with $\beta_\chi = \beta_{\kappa_0}$, within errors: $\sim 10\%$. This estimate of β_χ is not a mean field value and it agrees with a lattice estimate [69]: $\beta^{\text{lat}} = 0.30 \pm 0.08$. It has been argued [41] that two-light-flavour QCD is in the universality class of the $N = 4$ Heisenberg magnet, for which $\beta^{\text{H}} = 0.38 \pm 0.01$ and both the DSE and lattice results are broadly

Table 5. Parameters characterising the behaviour of the listed quantities, fitted to $\alpha(1 - T/T_c)^\beta$, near $T_c = 150$ MeV

	α	β
χ	1.1 GeV	0.33
κ_0	0.16 GeV	0.30
N_π^2	$(0.18 \text{ GeV})^2$	1.1
$f_\pi N_\pi$	$(0.15 \text{ GeV})^2$	0.93
$\langle m_R(\bar{q}q) \rangle$	$(0.15 \text{ GeV})^4$	0.92
m_π	0.12 GeV	-0.11
f_π	0.12 GeV	0.36

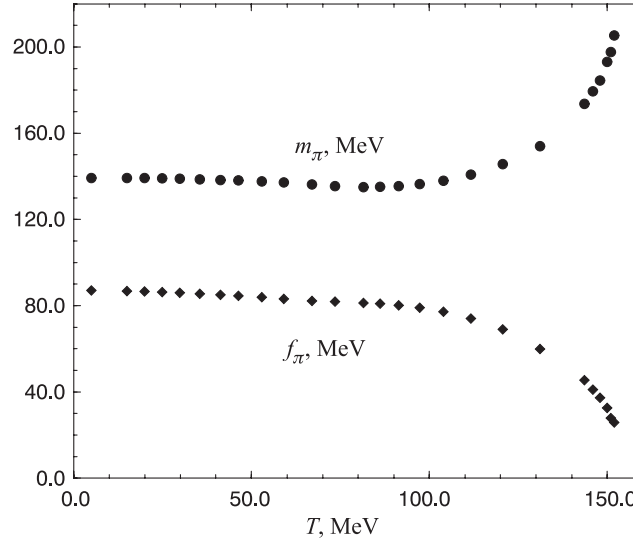


Fig. 29. Temperature dependence of the pion mass ($m_\pi(T)$, circles) and pion weak-decay constant ($f_\pi(T)$, diamonds)

consistent with this value. However, neither of these estimates of β survives more exhaustive study [59,70], and the most recent analyses [70,71] suggest that in DSE models whose long-range part is described by the regularised singularity in Eq. (125) the chiral symmetry restoration transition at finite- T is described by a mean-field value of β .

The behaviour of pion observables calculated from Eqs.(128)–(130) is depicted in Fig.29. f_π and m_π are weakly sensitive to T for $T < 0.7 T_c^\chi$, and this is also seen in lattice simulations; e.g., the quark condensate in Fig. 26 and f_π in Fig. 30. However, as T approaches T_c^χ , the mass eigenvalue in the

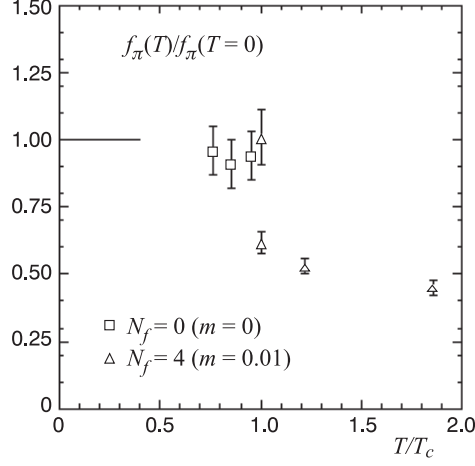


Fig. 30. Temperature dependence of the pion weak-decay constant on a $32^3 \times 8$ lattice [57]

pion Bethe — Salpeter equation moves to increasingly larger values, as thermal fluctuations overwhelm attraction in the channel, until at $T = T_c^\chi$ there is no solution and $f_\pi \rightarrow 0$. This means that the pion-pole contribution to the four-point, quark-antiquark correlation function disappears; i.e., there is no quark-antiquark pseudoscalar bound state for $T > T_c^\chi$. That may have important consequences for a wide range of physical observables [72], if borne out by improved studies; e.g., such T -dependence for f_π and m_π would lead to a 20% reduction in the $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ decay widths at $T \approx 0.9 T_c^\chi$.

7.4. Complementary study at ($T = 0, \mu \neq 0$). The finite- μ behaviour of the same model [67] has also been explored [62]. The dressed-gluon propagator has the simple form [67]

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{\mathcal{G}(k^2)}{k^2}, \quad (131)$$

$$\frac{\mathcal{G}(k^2)}{k^2} = \frac{16}{9} \pi^2 \left[4\pi^2 m_t^2 \delta^4(k) + \frac{1 - e^{-[k^2/(4m_t^2)]}}{k^2} \right], \quad (132)$$

and the rainbow approximation is used again. Neither the dressed propagator nor vertex have explicit μ -dependence, which can arise through quark vacuum polarisation insertions. As such they may be inadequate at large values of μ , particularly near any critical chemical potential. However, in the absence of finite- μ studies of these quantities, the exploration of such models is useful, and one can assess the results obtained in the light of existing experiments and related theoretical studies.

The renormalised dressed-quark propagator is

$$S(p_{[\mu]}) := -i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \sigma_A(p_{[\mu]}) - i\gamma_4 \omega_{[\mu]} \sigma_C(p_{[\mu]}) + \sigma_B(p_{[\mu]}), \quad (133)$$

where $p_{[\mu]} := (\vec{p}, \omega_{[\mu]})$, with $\omega_{[\mu]} := p_4 + i\mu$. The quark DSE and the renormalisation conditions are similar to those discussed in the previous section, and the equation has two qualitatively distinct solutions: a chirally symmetric Wigner–Weyl mode, characterised by $B_0 \equiv 0$; and a confining Nambu–Goldstone mode, characterised by $B_0 \neq 0$.

To explore the possibility of a phase transition one calculates the relative stability of the different phases, which is measured by the difference in pressure between them. The pressure is obtained directly from the partition function, $\mathcal{Z}$: it is the sum of all vacuum-to-vacuum transition amplitudes. In “stationary phase” approximation, the partition function is given by the tree-level auxiliary-field effective action [73] and the pressure is:

$$P[S] := \frac{T}{V} \ln \mathcal{Z} = \frac{T}{V} \left\{ \text{Tr} \text{Ln} \left[\frac{1}{T} S^{-1} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} [\Sigma S] \right\}. \quad (134)$$

It is a functional of $S(p_{[\mu]})$. In the absence of interactions $\Sigma \equiv 0$ and Eq. (134) yields the free fermion partition function. [Additive gluon contributions cancel in the pressure difference and are neglected.] The contribution of hadrons and hadron-like correlations to the partition function are neglected in Eq. (134). At the level of approximation consistent with Eq. (134) these terms are an additive contribution that can be estimated using the *hadronisation* techniques of Ref.74. After a proper normalisation of the partition function; i.e., subtraction of the vacuum contribution, they are the only contributions to the partition function in the confinement domain. They are easy to calculate and are considered no further here as they are not a significant influence on the position of the phase boundary.

The pressure difference is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N_f N_c} \mathcal{B}(\mu) := \int_p^\Lambda \left\{ \ln \left[\frac{|\vec{p}|^2 A_0^2 + \omega_{[\mu]}^2 C_0^2 + B_0^2}{|\vec{p}|^2 \hat{A}_0^2 + \omega_{[\mu]}^2 \hat{C}_0^2} \right] + \right. \\ \left. + |\vec{p}|^2 (\sigma_{A_0} - \hat{\sigma}_{A_0}) + \omega_{[\mu]}^2 (\sigma_{C_0} - \hat{\sigma}_{C_0}) \right\}, \quad (135) \end{aligned}$$

which defines a μ -dependent “bag constant” [75]. In Eq. (135), $\hat{A}$ and $\hat{C}$ represent the solution of Eq.(104) obtained when $B_0 \equiv 0$; i.e., when DCSB is absent. This solution exists for all μ . $\mathcal{B}(\mu)$ is plotted in Fig. 31. It is positive when the Nambu–Goldstone phase is dynamically favoured; i.e., has the highest pressure, and becomes negative when the Wigner pressure becomes larger. The critical chemical potential is the zero of $\mathcal{B}(\mu)$; i.e., $\mu_c = 375 \text{ MeV}$. This abrupt switch from the Nambu–Goldstone to the Wigner–Weyl phase signals a first order transition.

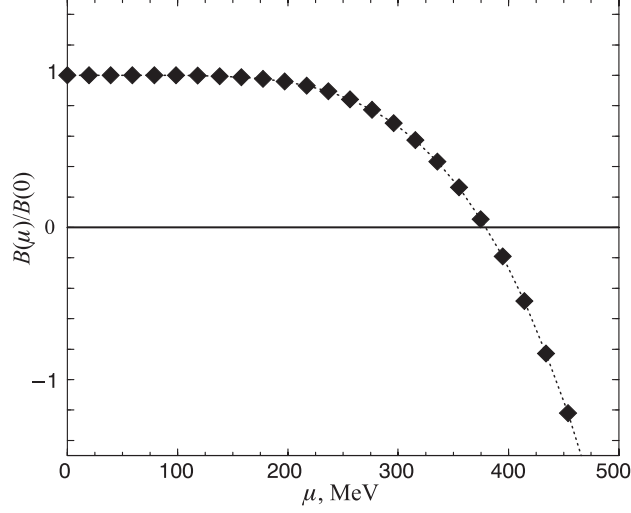


Fig. 31. $\mathcal{B}(\mu)$ from (135); $\mathcal{B}(\mu) > 0$ marks the domain of confinement and dynamical chiral symmetry breaking. The zero of $\mathcal{B}(\mu)$ is $\mu_c = 375$ MeV. $\mathcal{B}(0) = (0.104 \text{ GeV})^4$, which can be compared with the value $\sim (0.145 \text{ GeV})^4$ commonly used in bag-like models of hadrons [74]

The order parameter for chiral symmetry restoration is that given in Eq. (117), while the confinement order parameter at $(T = 0, \mu \neq 0)$ is derived from

$$\Delta_S(\tau) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_4 e^{ip_4 \tau} \sigma_{B_0}(\vec{p} = 0, \omega_{[\mu]}), \quad (136)$$

an analogue of Eq. (118). For a free, massive fermion $\sigma_B(\vec{p} = 0, \omega_{[\mu]}) = M/(\omega_{[\mu]}^2 + M^2)$. This function has poles at $p_4^2 = -(M \pm \mu)^2$, which are associated with the μ -induced offset of the particle and antiparticle zero-point energies, and

$$\Delta_S(\tau) = \frac{1}{2} e^{-(M-\mu)\tau} \theta(M - \mu), \quad (137)$$

which is positive-definite and monotonically decreasing. In contrast, as observed above, for a Schwinger function with complex-conjugate p^2 -poles, $\Delta_S(\tau)$ has zeros at $\tau > 0$.

The μ -dependence of the order parameters for chiral symmetry restoration and deconfinement is depicted in Fig. 32. The chiral order parameter *increases* with increasing chemical potential up to μ_c , with $\mathcal{X}(\mu_c)/\mathcal{X}(0) \approx 1.2$, whereas $\kappa(\mu)$ is insensitive to increasing μ . At μ_c they both drop immediately and discontinuously to zero, as expected of a first-order phase transition. The increase of the chiral order parameter with μ is a necessary consequence of the momentum dependence

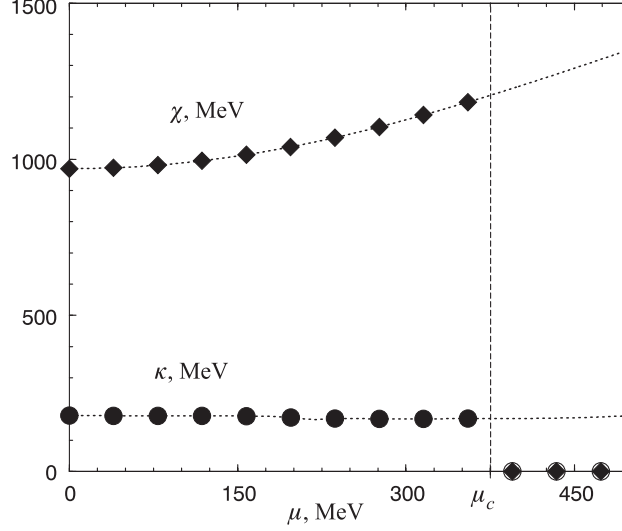


Fig. 32. The order parameters for chiral symmetry restoration [χ , diamonds] and deconfinement [κ , circles]. $\mu_c = 375$ MeV.

of the scalar piece of the quark self energy, $B(p_{[\mu]})$, as is easily seen in Ref. 61 and in Secs. 7.5 and 7.6. The vacuum quark condensate behaves in qualitatively the same manner as χ .

The behaviour of m_π and f_π is illustrated in Fig. 33. One observes that although the chiral order parameter *increases* with μ , m_π *decreases* slowly as μ increases. This slow fall continues until $\mu \approx 0.7\mu_c$, when $m_\pi(\mu)/m_\pi(0) \approx 0.94$. At this point m_π begins to increase although, for $\mu < \mu_c$, $m_\pi(\mu)$ does not exceed $m_\pi(0)$. This precludes pion condensation, in qualitative agreement with Ref.76. The behaviour of m_π results from mutually compensating increases in $\langle m_R^\zeta(\bar{q}q)_\zeta \rangle_\pi$ and N_π^2 . This is a manifestation of the manner in which dynamical chiral symmetry breaking protects pseudoscalar meson masses against rapid changes with μ . The pion leptonic decay constant is insensitive to the chemical potential until $\mu \approx 0.7\mu_c$, when it increases sharply so that $f_\pi(\mu_c^-)/f_\pi(\mu=0) \approx 1.25$. The relative insensitivity of m_π and f_π to changes in μ , until very near μ_c , mirrors the behaviour of these observables at finite- T [60]. For example, it leads only to a 14% increase in the $\pi \rightarrow \mu\nu$ decay width at $\mu \approx 0.9\mu_c$. The universal scaling conjecture of Ref.77 is inconsistent with the anticorrelation we observe between the μ -dependence of f_π and m_π .

Comparing the μ -dependence of f_π and m_π with their T -dependence, one observes an anticorrelation; e.g., at $\mu = 0$, f_π falls continuously to zero as T is increased towards $T_c \approx 150$ MeV [60]. This too is a necessary consequence of the

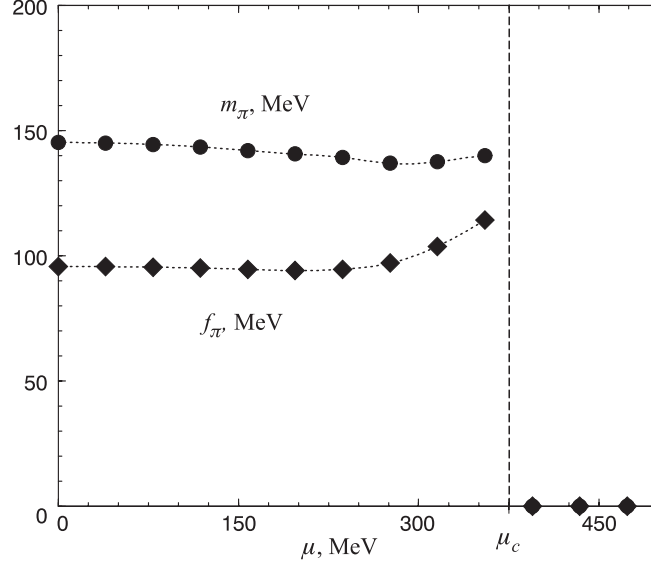


Fig. 33. Chemical potential dependence of the pion mass [m_π , circles] and pion leptonic decay constant [f_π , diamonds]

momentum-dependence of the quark self-energy. In calculating these observables the natural dimension is mass-squared, and their behaviour at finite T and μ is determined by $\text{Re}(\omega_{[\mu]}^2) \sim [\pi^2 T^2 - \mu^2]$, where the T -dependence arises from the introduction of the fermion Matsubara frequency: $p_4 \rightarrow (2n+1)\pi T$. Hence when such a quantity decreases with T it will increase with μ , and vice-versa. This is elucidated in Secs. 7.5 and 7.6, and in Ref.50.

The confined-quark vacuum consists of quark-antiquark pairs correlated in a scalar condensate. Increasing μ increases the scalar density: $(-\langle \bar{q}q \rangle)$. This result is an expected consequence of confinement, which entails that each additional quark must be locally paired with an antiquark thereby increasing the density of condensate pairs as μ is increased. For this reason, as long as $\mu < \mu_c$, there is no excess of particles over antiparticles in the vacuum and hence the baryon number density remains zero [61]; i.e., $\rho_B^{u+d} = 0$, $\forall \mu < \mu_c$. This is just the statement that quark-antiquark pairs confined in the condensate do not contribute to the baryon number density.

The quark pressure, $P^{u+d}[\mu]$, can be calculated [61], see Sec. 7.5, and one finds that after deconfinement it increases rapidly, as the condensate “breaks-up”, and an excess of quarks over antiquarks develops. The baryon-number density,

$\rho_B^{u+d} = (1/3)\partial P^{u+d}/\partial\mu$, also increases rapidly, with

$$\rho_B^{u+d}(\mu \approx 2\mu_c) \simeq 3\rho_0, \quad (138)$$

where $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ is the equilibrium density of nuclear matter. For comparison, the central core density expected in a $1.4 M_\odot$ neutron star is 3.6-4.1 ρ_0 [43]. Finally, at $\mu \sim 5\mu_c$, the quark pressure saturates the ultrarelativistic limit: $P^{u+d} = \mu^4/(2\pi^2)$, and there is a simple relation between baryon-density and chemical-potential:

$$\rho_B^{u_F+d_F}(\mu) = \frac{1}{3} \frac{2\mu^3}{\pi^2}, \quad \forall \mu \gtrsim 5\mu_c, \quad (139)$$

so that $\rho_B^{u_F+d_F}(5\mu_c) \sim 350\rho_0$. Thus the quark pressure in the deconfined domain overwhelms any finite, additive contribution of hadrons to the equation of state, which anticipating this was neglected in Ref.62. This discussion suggests that a quark-gluon plasma may be present in the core of dense neutron stars.

7.5. Simultaneous study of $(T \neq 0, \mu \neq 0)$. This is the most difficult problem and the most complete study [61] to date employs a simple *Ansatz* for the dressed-gluon propagator:

$$g^2 D_{\mu\nu}(\vec{p}, \Omega_k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{|\vec{p}|^2 + \Omega_k^2} \right) 2\pi^3 \frac{\eta^2}{T} \delta_{k0} \delta^3(\vec{p}), \quad (140)$$

which exhibits the infrared enhancement suggested by Ref.6. As an infrared-dominant model that does not represent well the behaviour of $D_{\mu\nu}(\vec{p}, \Omega_k)$ away from $|\vec{p}|^2 + \Omega_k^2 \approx 0$, some model-dependent artefacts arise. However, there is significant merit in its simplicity and, since the artefacts are easily identified, the model remains useful as a means of elucidating many of the qualitative features of more sophisticated *Ansätze*.

With this model, using the rainbow approximation, the QCD $_\mu^T$ gap equation, or DSE for the dressed-quark propagator, is [3]

$$S^{-1}(\vec{p}, \omega_k) = S_0^{-1}(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) + \frac{1}{4}\eta^2 \gamma_\nu S(\vec{p}, \tilde{\omega}_k) \gamma_\nu. \quad (141)$$

A simplicity inherent in Eq. (140) is now apparent: it allows the reduction of an integral equation to an algebraic equation, in whose solution many of the qualitative features of more sophisticated models are manifest, as will become clear. In terms of the scalar functions introduced in Eq. (101), Eq. (141) reads

$$\eta^2 m^2 = B^4 + mB^3 + (4\tilde{p}_k^2 - \eta^2 - m^2) B^2 - m(2\eta^2 + m^2 + 4\tilde{p}_k^2) B, \quad (142)$$

$$A(\tilde{p}_k) = C(\tilde{p}_k) = \frac{2B(\tilde{p}_k)}{m + B(\tilde{p}_k)}. \quad (143)$$

Of particular interest is the chiral limit, $m = 0$. In this case Eq. (142) reduces to a quadratic equation for $B(\tilde{p}_k)$, which has two qualitatively distinct solutions. The “Nambu–Goldstone” solution, for which

$$B(\tilde{p}_k) = \begin{cases} \sqrt{\eta^2 - 4\tilde{p}_k^2}, & \text{Re}(\tilde{p}_k^2) < \frac{\eta^2}{4} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (144)$$

$$C(\tilde{p}_k) = \begin{cases} 2, & \text{Re}(\tilde{p}_k^2) < \frac{\eta^2}{4} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta^2}{\tilde{p}_k^2}} \right), & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (145)$$

describes a phase of this model in which: 1) chiral symmetry is dynamically broken, because one has a nonzero quark mass-function, $B(\tilde{p}_k)$, in the absence of a current-quark mass; and 2) the dressed-quarks are confined, because the propagator described by these functions does not have a Lehmann representation. The alternative “Wigner” solution, for which

$$\hat{B}(\tilde{p}_k) \equiv 0, \quad \hat{C}(\tilde{p}_k) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta^2}{\tilde{p}_k^2}} \right), \quad (146)$$

describes a phase of the model in which chiral symmetry is not broken and the dressed-quarks are not confined.

With these two “phases”, characterised by qualitatively different, momentum-dependent modifications of the quark propagator, this model can be used to explore chiral symmetry restoration and deconfinement, and elucidate aspects of the method in such studies.

In this model the relative stability of the different phases is measured by a (T, μ) -dependent “bag constant” [75],

$$\mathcal{B}(T, \mu) := P[S_{\text{NG}}] - P[S_{\text{W}}], \quad (147)$$

where S_{NG} means Eq. (101) obtained from Eq. (144) and S_{W} , Eq. (101) obtained from Eq. (146). As above, $\mathcal{B}(T, \mu) > 0$ indicates the stability of the confined (Nambu–Goldstone) phase and hence the phase boundary is specified by that curve in the (T, μ) -plane for which

$$\mathcal{B}(T, \mu) \equiv 0. \quad (148)$$

In the chiral limit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(T, \mu) &= \\ &= \eta^4 2N_c N_f \frac{\bar{T}}{\pi^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \int_0^{\bar{\Lambda}_l} dy y^2 \left\{ \text{Re}(2\bar{p}_l^2) - \text{Re}\left(\frac{1}{C(\bar{p}_l)}\right) - \ln |\bar{p}_l^2 C(\bar{p}_l)^2| \right\}, \end{aligned} \quad (149)$$

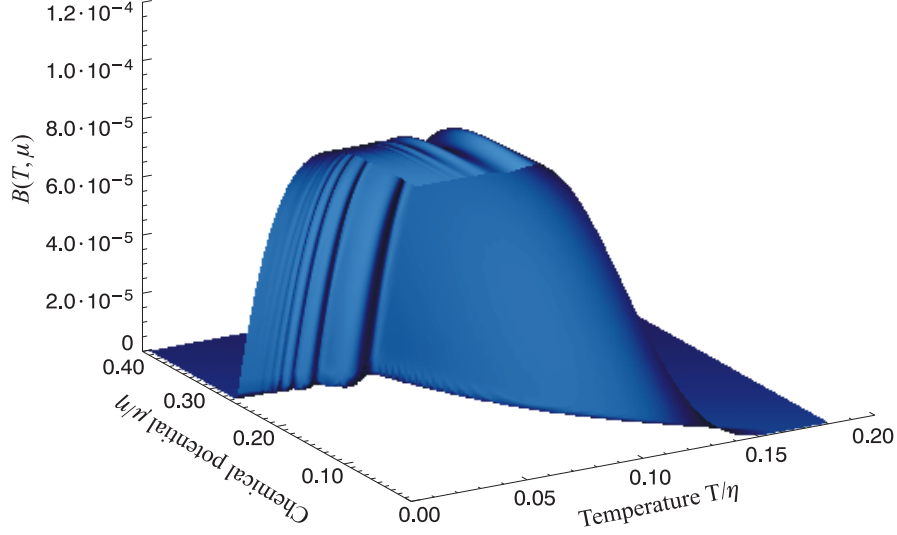


Fig. 34. $\mathcal{B}(T, \mu)$ from Eq. (149); $\mathcal{B}(T, \mu) > 0$ marks the confinement domain. The scale is set by $\mathcal{B}(0, 0) = (0.102\eta)^4 = (0.109 \text{ GeV})^4$; $\eta = 1.06 \text{ GeV}$ [12]

with: $\bar{T} = T/\eta$, $\bar{\mu} = \mu/\eta$; l_{max} is the largest value of l for which $\bar{\omega}_{l_{max}}^2 \leq \frac{1}{4} + \bar{\mu}^2$ and this also specifies $\omega_{l_{max}}$, $\bar{\Lambda}^2 = \bar{\omega}_{l_{max}}^2 - \bar{\omega}_l^2$, $\bar{p}_l = (\vec{y}, \bar{\omega}_l + i\bar{\mu})$. $\mathcal{B}(T, \mu)$ is depicted in Fig. 34 and the critical line in Fig. 35. The deconfinement and chiral symmetry restoration transitions are coincident.

For $\mu = 0$ the transition is second order and the critical temperature is $T_c^0 = 0.159\eta$, which using the value of $\eta = 1.06 \text{ GeV}$ obtained by fitting the π and ρ masses [12] corresponds to $T_c^0 = 0.170 \text{ GeV}$. This is only 12% larger than the value obtained in Sec. 7.3, [60], and the order of the transition is the same. However, in the present case the critical exponent is $\beta = 0.5$. For any $\mu \neq 0$ the transition is first-order, as revealed by close scrutiny of Fig. 34. For $T = 0$ the critical chemical potential is $\mu_c^0 = 0.3 \text{ GeV}$, which is $\approx 30\%$ smaller than the result in Sec. 7.4 [62]. One notes from Fig. 35 that $\mu_c(T)$ is insensitive to T until $T \approx 0.3 T_c^0$. The discontinuity in the order parameters vanishes as $\mu \rightarrow 0$.

In the deconfinement domain, illustrated clearly in Fig. 35, the quarks contribute an amount

$$P[S_W] = \eta^4 2N_c N_f \frac{\bar{T}}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dy y^2 \left\{ \ln \left| \beta^2 \bar{p}_l^2 \hat{C}(\bar{p}_l)^2 \right| - 1 + \text{Re} \left(\frac{1}{\hat{C}(\bar{p}_l)} \right) \right\} \quad (150)$$

to the pressure, which must be renormalised to zero on the phase boundary. Just as for free fermions, this expression is formally divergent and one must isolate and

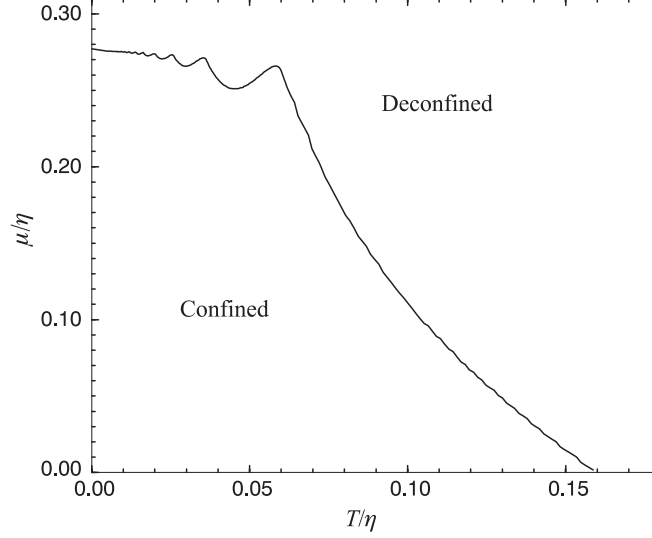


Fig. 35. The phase boundary in the $(\bar{T}, \bar{\mu})$ -plane obtained from (148) and (149). The “structure” in this curve, apparent for small- T , is an artefact of the inadequate representation of the quark-quark interaction in the ultraviolet by Eq. (140)

define the active, temperature-dependent contribution. This is difficult because, in general, $\hat{C}(\bar{p}_l)$ is only known numerically and hence it is not possible to evaluate $P[S_W]$ analytically. A method for the numerical evaluation of Eq. (150) was developed in Ref.61.

Consider the derivative of the integrand in Eq. (150):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d}{d\bar{T}} \left\{ \ln \left| \beta^2 \bar{p}_l^2 \hat{C}(\bar{p}_l)^2 \right| - 1 + \text{Re} \left(\frac{1}{\hat{C}(\bar{p}_l)} \right) \right\} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\bar{T}} \left[\frac{(y - \bar{\mu})^2}{(y - \bar{\mu})^2 + \bar{\omega}_l^2} + \frac{(y + \bar{\mu})^2}{(y + \bar{\mu})^2 + \bar{\omega}_l^2} \right] + \text{Re} \left(\frac{2\hat{C}(\bar{p}_l) - 1}{\hat{C}(\bar{p}_l)^2} \frac{d\hat{C}(\bar{p}_l)}{d\bar{T}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (151)$$

In the absence of interactions $C(\bar{p}_l) \equiv 1$, the second term is zero and

$$-\frac{2}{\bar{T}} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(y - \bar{\mu})^2}{(y - \bar{\mu})^2 + \bar{\omega}_l^2} + \frac{(y + \bar{\mu})^2}{(y + \bar{\mu})^2 + \bar{\omega}_l^2} \right] = \frac{d}{d\bar{T}} \left\{ \frac{e(y)}{\bar{T}} + \mathcal{I}(e(y)) \right\}, \quad (152)$$

where in this case $e(y) = y$ and

$$\mathcal{I}(\zeta) = \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\zeta - \bar{\mu}}{\bar{T}} \right) \right] + \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\zeta + \bar{\mu}}{\bar{T}} \right) \right]. \quad (153)$$

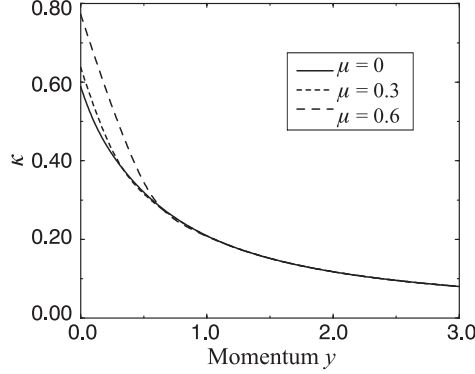


Fig. 36. $\kappa(y, \bar{\mu})$, which describes the nonperturbative modification of the free particle dispersion law, for $\bar{\mu} = 0, 0.3, 0.6$. By assumption, it is independent of T

Appropriately inserting Eq. (152) for the parenthesised term in Eq. (150), and neglecting T -independent terms one obtains,

$$P[S_0] = \eta^4 N_c N_f \frac{\bar{T}}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \mathcal{I}(y) \quad (154)$$

$$= \eta^4 N_c N_f \frac{1}{12\pi^2} \left(\bar{\mu}^4 + 2\pi^2 \bar{\mu}^2 \bar{T}^2 + \frac{7}{15} \pi^4 \bar{T}^4 \right), \quad (155)$$

which is the massless free particle pressure.

To proceed in the general case, the assumption is made [61] that the nontrivial momentum dependence of $\hat{C}(\bar{p}_l)$, which is manifest in all DSE-models of QCD_μ^T , acts primarily to modify the usual massless, free particle dispersion law. One evaluates the sum on the right-hand side of (151) numerically and uses the form on the right-hand side of Eq. (152) to fit a modified, T -independent dispersion law, $\underline{e}(y, \bar{\mu}) = y + \kappa(y, \bar{\mu})$, to the numerical results. The existence of a $\kappa(y, \bar{\mu})$ that provides a good χ^2 -fit on the deconfinement domain is understood as an *a posteriori* justification of the assumption. In Ref.61 the relative error between the fit and the numerical results is $< 10\%$ on the entire T -domain.

The calculated form of $\kappa(y, \bar{\mu})$ is depicted in Fig. 36; it only depends weakly on $\bar{\mu}$. The form indicates a persistence of nonperturbative effects into the domain of deconfinement, evident in the nontrivial momentum dependence of $\hat{C}(\bar{p}_l)$ and its slow evolution to the asymptotic value $\hat{C}(\bar{p}_l) = 1$. The effect of this is to generate a mass-scale in the massless dispersion law: $\kappa(0, 0) \simeq 0.6 \sim 2\bar{\mu}_c^0$. This mass-scale is unrelated to the chiral-symmetry order parameter, $\mathcal{X}$ in Eq. (117), and is a qualitatively new feature of the study. For $\bar{\mu} > 5\bar{\mu}_c^0$ the explicit mass-scale introduced by the chemical potential overwhelms the dynamically generated scale.

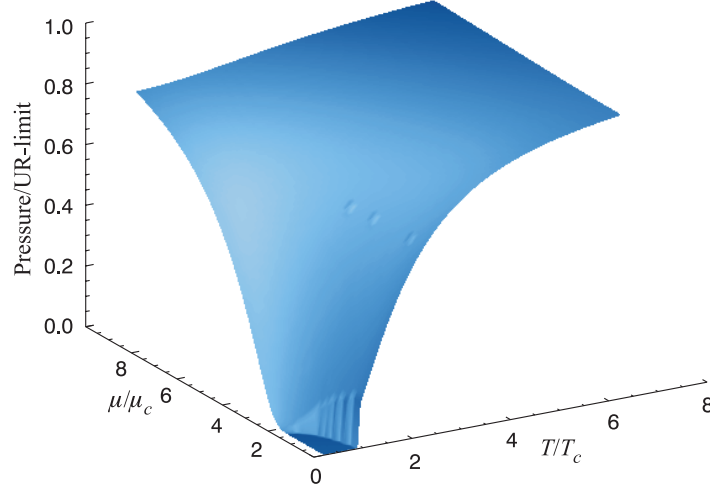


Fig. 37. The quark pressure, $P_q(\bar{T}, \bar{\mu})$, normalised to the free, massless (or Ultra-Relativistic) result, Eq. (155)

Using this result, Eq. (150) becomes

$$P[S_W] = \eta^4 N_c N_f \frac{\bar{T}}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \mathcal{I}(\underline{e}(y, \bar{\mu})), \quad (156)$$

and the quark pressure in this DSE-model of QCD_μ^T is

$$P_q(T, \mu) = \theta(\mathcal{D}) \{P[S_W] - P[S_W]|_{\partial\mathcal{D}}\}, \quad (157)$$

where $\mathcal{D}$ is the domain marked “Deconfined” in Fig. 35, $\theta(\mathcal{D})$ is a step function, equal to one for $(T, \mu) \in \mathcal{D}$, and $P[S_W]|_{\partial\mathcal{D}}$ indicates the evaluation of this expression on the boundary of $\mathcal{D}$, as defined by the intersection of a straight-line from the origin in the (T, μ) -plane to the argument-value. It is plotted in Fig. 37, which illustrates clearly that in this model the free particle (Stefan–Boltzmann) limit is reached at large values of $\bar{T}$ and $\bar{\mu}$. The approach to this limit is slow, however. For example, at $\bar{T} \sim 0.3 \sim 2\bar{T}_c^0$, or $\bar{\mu} \sim 1.0 \sim 3\bar{\mu}_c^0$, Eq. (157) is only 50% of the free particle pressure, Eq. (155). A qualitatively similar result is observed in numerical simulations of lattice-QCD actions at finite- T [42]. This feature results from the slow approach to zero with y of $\kappa(y, \bar{\mu})$, illustrated in Fig. 36, and emphasises the persistence of the momentum dependent modifications of the quark propagator.

With the definition and calculation of the pressure, $P_q(T, \mu)$, all the remaining bulk thermodynamic quantities that characterise the model can be calculated. As

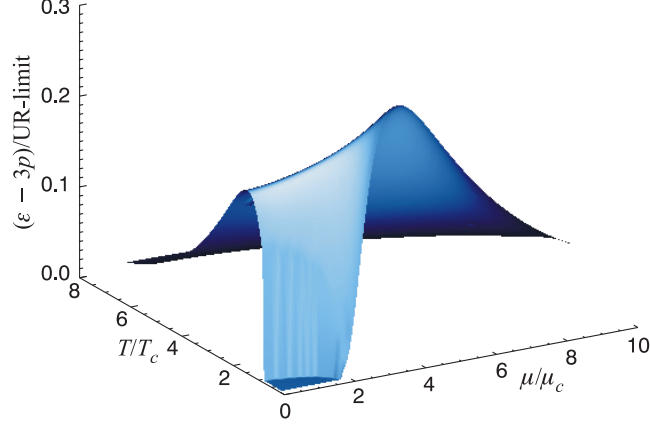


Fig. 38. The “interaction measure”, $\Delta(T, \mu)$, normalised to the free, massless result for the pressure, Eq. (155)

an example the “interaction measure”: $\Delta := \epsilon - 3P$, where ϵ is the energy density, is plotted in Fig. 38. It is zero for an ideal gas, hence the name: Δ measures the interaction-induced deviation from ideal gas behaviour. This figure provides a very clear indication of the persistence of nonperturbative effects into the deconfinement domain, with a $\mu = 0$ maximum of $\Delta \approx 0.2 P[S_0]$ at $T \approx 2T_c$ and a $T = 0$ maximum of $\Delta \approx 0.3 P[S_0]$ at $\mu \approx 3\mu_c$. Both Figs. 37 and 38 indicate that there is a “mirroring” of finite- T behaviour in the μ -dependence of the bulk thermodynamic quantities.

7.6. π and ρ properties. The model discussed in the last section has been used [50] to study the (T, μ) -dependence of π and ρ properties, and to elucidate other features of the models described above that employ a more sophisticated *Ansatz* for the dressed-gluon propagator. In these applications its simplicity is particularly helpful.

To begin, consider the vacuum quark condensate, which in this model is

$$-\langle \bar{q}q \rangle = \eta^3 \frac{8N_c}{\pi^2} \bar{T} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \int_0^{\bar{\Lambda}_l} dy y^2 \operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{4} - y^2 - \tilde{\omega}_l^2} \right) : \quad (158)$$

for $T = 0 = \mu$, $(-\langle \bar{q}q \rangle) = \eta^3 / (80 \pi^2) = (0.11 \eta)^3$. In Fig. 39 one observes that $(-\langle \bar{q}q \rangle)$ decreases with T but *increases* with increasing μ , up to a critical value of $\mu_c(T)$ when it drops discontinuously to zero. These results are in qualitative and semiquantitative agreement with the $(T = 0, \mu \neq 0)$ and $(T \neq 0, \mu = 0)$ studies described in Secs. 7.3 and 7.4. The increase with μ is also qualitatively identical to that observed in a random matrix theory with the global symmetries of the QCD partition function [78]. $(-\langle \bar{q}q \rangle)$ must increase with μ in the confinement

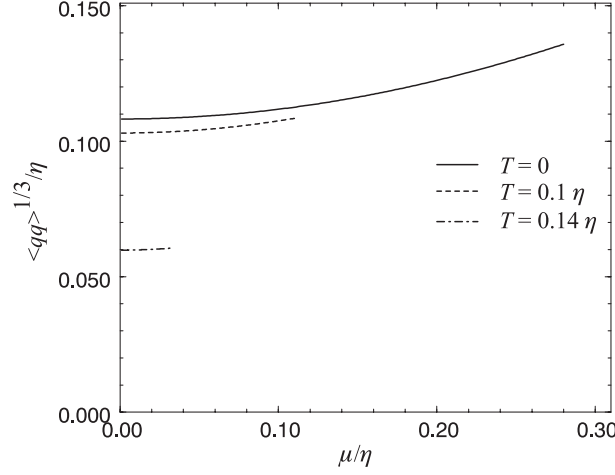


Fig. 39. The quark condensate, Eq. (158), as a function of μ for a range of values of T . In all existing studies, in which the quark mass function has a realistic momentum dependence, it increases with μ and decreases with T . At the critical chemical potential, $\mu_c(T)$, $(-\langle \bar{q}q \rangle)$ drops discontinuously to zero, as expected of a first-order transition. For $\mu = 0$ it falls continuously to zero, exhibiting a second-order transition at $T_c(\mu = 0) = 0.16\eta$.

domain because confinement entails that each additional quark must be locally-paired with an antiquark, thereby increasing the density of condensate pairs. This vacuum rearrangement is manifest in the behaviour of the necessarily-momentum-dependent scalar part of the quark self energy, $B(\tilde{p}_k)$. In this model Eqs. (128)-(130) yield very simple expressions in the chiral limit; for example*,

$$f_\pi^2 = \eta^2 \frac{16N_c}{\pi^2} \bar{T} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \frac{\bar{\Lambda}_l^3}{3} \left(1 + 4\bar{\mu}^2 - 4\bar{\omega}_l^2 - \frac{8}{5}\bar{\Lambda}_l^2 \right). \quad (159)$$

Characteristic in Eq. (159) is the combination $\mu^2 - \omega_l^2$, which entails that, whatever change f_π undergoes as T is increased, the *opposite* occurs as μ is increased. Without calculation, Eq. (159) indicates that f_π will *decrease* with T and *increase* with μ . This provides a simple elucidation of the results described above. Figure 40 illustrates this behaviour for $m \neq 0$. The (T, μ) -dependence of m_π , from Eq. (128), is also depicted in Fig. 40. It is *insensitive* to changes in μ and only increases slowly with T , until T is very near the critical temperature. As in Sec. 7.4, this insensitivity is the result of mutually cancelling increases in $\langle m \bar{q}q \rangle_\pi$

*This is the expression for N_π^2 from Eq. (129), which provides a better approximation to the pion leptonic decay constant than Eq. (130) when one assumes $\Gamma_\pi(p; P) = i\gamma_5 B_0(p^2)$.

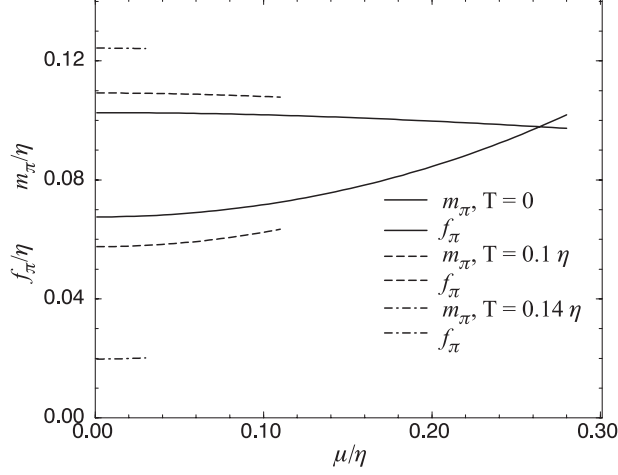


Fig. 40. The pion mass, Eq. (128), and weak decay constant, Eq. (129), as a function of μ for a range of values of T . m_π falls slowly and uniformly with μ [$m_\pi(T=0, \mu_c) = 0.95 m_\pi(T=0, \mu=0)$] but increases with T . Such a decrease is imperceptible if the ordinate has the range in Fig. 41. f_π increases with μ and decreases with T [$f_\pi(T=0, \mu_c) = 1.51 f_\pi(T=0, \mu=0)$]

and f_π , and is a feature of studies that preserve the momentum-dependence of the confined, dressed-quark degrees of freedom in bound states.

With $\eta = 1.37 \text{ GeV}$ and $m = 30 \text{ MeV}$, one obtains $f_\pi = 92 \text{ MeV}$ and $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ at $T = 0 = \mu$. That large values of η and m are required is a quantitative consequence of the inadequacy of Eq. (140) in the ultraviolet: the large- p^2 behaviour of the scalar part of the dressed-quark self energy is incorrect. This defect is remedied easily [7] without qualitative changes to the results presented here [71].

ρ -meson properties are more difficult to study: one must solve the vector-meson Bethe — Salpeter equation directly. As described above, the ladder truncation of the kernel in the inhomogeneous axial-vector vertex equation and the rainbow truncation of the quark DSE form an AV-WTI identity preserving pair [3]. It follows that the ladder BSE is accurate for flavour-nonsinglet pseudoscalar and vector bound states of equal-mass quarks because of a cancellation in these channels between diagrams of higher order in the systematic expansion illustrated in Fig. 7.

A ladder BSE using the $T = 0$ limit of Eq. (140) was introduced in Ref.12. It has one notable pathology: the bound state mass is determined only upon the additional specification that the constituents have zero relative momentum. That specification leads to a conflict with Eqs. (19)-(22), which follow from the AV-

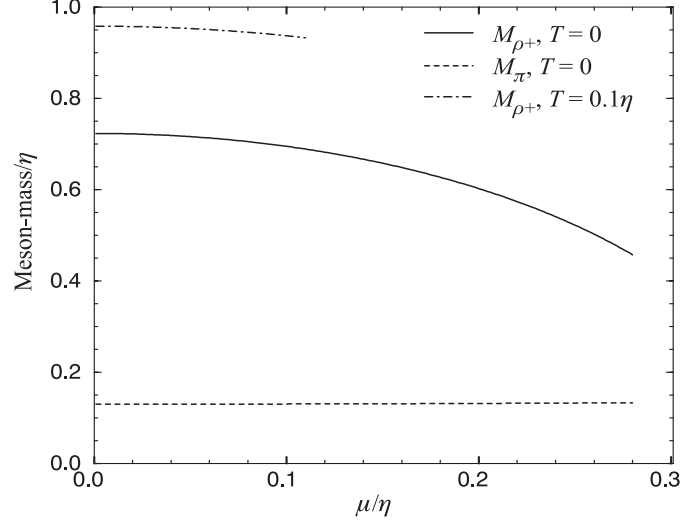


Fig. 41. $M_{\rho+}$ and m_{π} as a function of $\bar{\mu}$ for $\bar{T} = 0, 0.1$. On the scale of this figure, m_{π} is insensitive to this variation of T . The current-quark mass is $m = 0.011 \eta$, which for $\eta = 1.06 \text{ GeV}$ yields $M_{\rho+} = 770 \text{ MeV}$ and $m_{\pi} = 140 \text{ MeV}$ at $T = 0 = \mu$

WTI, and is an artefact of implementing the delta-function limit discontinuously; i.e., these identities are manifest for any finite-width representation of the delta-function, as this width is reduced continuously to zero. In other respects this ladder BSE provides a useful qualitative and semi-quantitative tool for analysing features of the pseudoscalar and vector meson masses. For example, Goldstone's theorem is manifest, in that the π is massless in the chiral limit, and also m_{π}^2 rises linearly with the current-quark mass. Further, there is a naturally large splitting between m_{π} and m_{ρ} , which decreases slowly with the current-quark mass.

To illustrate this and determine the response of m_{ρ} to increasing T and μ , the BSE of Ref.12 was generalised [50] to finite- (T, μ) as

$$\Gamma_M(\tilde{p}_k; \tilde{P}_\ell) = -\frac{\eta^2}{4} \text{Re} \left\{ \gamma_\mu S(\tilde{p}_i + \frac{1}{2}\tilde{P}_\ell) \Gamma_M(\tilde{p}_i; \tilde{P}_\ell) S(\tilde{p}_i - \frac{1}{2}\tilde{P}_\ell) \gamma_\mu \right\}, \quad (160)$$

where $\tilde{P}_\ell := (\vec{P}, \Omega_\ell)$. The bound state mass is obtained by considering $\tilde{P}_{\ell=0}$ and, in ladder truncation, the ρ - and ω -mesons are degenerate.

The π equation admits the solution

$$\Gamma_\pi(P_0) = \gamma_5 \left(i\theta_1 + \vec{\gamma} \cdot \vec{P} \theta_2 \right) \quad (161)$$

and yields the mass plotted in Fig. 41. The mass behaves in qualitatively the same manner as m_{π} in Fig. 40, from Eq. (128), as required if Eq. (160) is to provide a reliable guide. In particular, it vanishes in the chiral limit.

For the ρ -meson there are two components: one longitudinal and one transverse to $\vec{P}$. The solution of the BSE has the form

$$\Gamma_\rho = \begin{cases} \gamma_4 \theta_{\rho+} \\ \left(\vec{\gamma} - \frac{1}{|\vec{P}|^2} \vec{P} \vec{\gamma} \cdot \vec{P} \right) \theta_{\rho-} \end{cases}, \quad (162)$$

where $\theta_{\rho+}$ labels the longitudinal and $\theta_{\rho-}$ the transverse solution. The eigenvalue equation obtained from Eq. (160) for the bound state mass, $M_{\rho\pm}$, is

$$\frac{\eta^2}{2} \text{Re} \left\{ \sigma_S(\omega_{0+}^2 - \frac{1}{4} M_{\rho\pm}^2)^2 - \left[\pm \omega_{0+}^2 - \frac{1}{4} M_{\rho\pm}^2 \right] \sigma_V(\omega_{0+}^2 - \frac{1}{4} M_{\rho\pm}^2)^2 \right\} = 1. \quad (163)$$

The equation for the transverse component is obtained with $[-\omega_{0+}^2 - \frac{1}{4} M_{\rho-}^2]$ in (163). Using the chiral-limit solutions, Eq. (144), one obtains immediately that

$$M_{\rho-}^2 = \frac{1}{2} \eta^2, \text{ independent of } T \text{ and } \mu. \quad (164)$$

This is the $T = 0 = \mu$ result of Ref.12. Even for nonzero current-quark mass, $M_{\rho-}$ changes by less than 1% as T and μ are increased from zero toward their critical values. Its insensitivity is consistent with the absence of a constant mass-shift in the transverse polarisation tensor for a gauge-boson.

For the longitudinal component one obtains in the chiral limit:

$$M_{\rho+}^2 = \frac{1}{2} \eta^2 - 4(\mu^2 - \pi^2 T^2). \quad (165)$$

The characteristic combination $[\mu^2 - \pi^2 T^2]$ again indicates the anticorrelation between the response of $M_{\rho+}$ to T and its response to μ , and, like a gauge-boson Debye mass, that $M_{\rho+}^2$ rises linearly with T^2 for $\mu = 0$. The $m \neq 0$ solution of Eq. (163) for the longitudinal component is plotted in Fig. 41. As signalled by Eq. (165), $M_{\rho+}$ *increases* with increasing T and *decreases* as μ increases*.

I stated that contributions from skeleton diagrams not included in the ladder truncation of the vector meson BSE do not alter the calculated mass significantly because of cancellations between these higher order terms [3]. This is illustrated explicitly in two calculations: Ref.79, which shows that the $\rho \rightarrow \pi\pi \rightarrow \rho$ contribution to the real part of the ρ self energy; i.e., the π - π induced mass-shift, is only -3%; and Ref.80, which shows, for example, that the contribution to the ω -meson mass of the $\omega \rightarrow 3\pi$ -loop is negligible. Therefore, ignoring such

*There is a 25% difference between the value of η required to obtain the $T = 0 = \mu$ values of m_π and f_π , from Eq. (128) and Eq. (129), and that required to give $M_{\rho\pm} = 0.77$ GeV. This is a measure of the quantitative accuracy of this algebraic model.

contributions does not introduce uncertainty into estimates of the vector meson mass based on Eq. (160).

Equation (163) can also be applied to the ϕ -meson. The transverse component is insensitive to T and μ , and the behaviour of the longitudinal mass, $M_{\phi+}$, is qualitatively the same as that of the ρ -meson: it increases with T and decreases with μ . Using $\eta = 1.06 \text{ GeV}$, the model yields $M_{\phi\pm} = 1.02 \text{ GeV}$ for $m_s = 180 \text{ MeV}$ at $T = 0 = \mu$.

In a 2-flavour, free-quark gas at $T = 0$ the baryon number density is $\rho_B = 2\mu^3/(3\pi^2)$, by which gauge nuclear matter density, $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, corresponds to $\mu = \mu_0 := 260 \text{ MeV} = 0.245 \eta$. At this chemical potential the algebraic model yields

$$M_{\rho+}(\mu_0) \approx 0.75 M_{\rho+}(\mu = 0), \quad (166)$$

$$M_{\phi+}(\mu_0) \approx 0.85 M_{\phi+}(\mu = 0). \quad (167)$$

The study summarised in Sec. 7.4 [62], indicates that a better representation of the ultraviolet behaviour of the dressed-gluon propagator expands the horizontal scale in Fig. 41, with the critical chemical potential increased by 25%. This suggests that a more realistic estimate is obtained by evaluating the mass at $\mu'_0 = 0.20 \eta$, which yields

$$M_{\rho+}(\mu'_0) \approx 0.85 M_{\rho+}(\mu = 0), \quad (168)$$

$$M_{\phi+}(\mu'_0) \approx 0.90 M_{\phi+}(\mu = 0); \quad (169)$$

a small, quantitative modification. The difference between Eqs. (166) and (168), and that between Eqs. (167) and (169), is a measure of the theoretical uncertainty in the estimates in each case. This reduction in the vector meson masses is quantitatively consistent with that calculated in Ref.48 and conjectured in Ref.81. At the critical chemical potential for $T = 0$, $M_{\rho+} \approx 0.65 M_{\rho+}(\mu = 0)$ and $M_{\phi+} \approx 0.80 M_{\phi+}(\mu = 0)$.

This simple model of QCD_μ^T preserves the momentum-dependence of gluon and quark dressing, which is an important qualitative feature of more sophisticated studies. Its simplicity means that many of the consequences of that dressing can be demonstrated algebraically. For example, it elucidates the origin of an anticorrelation, found for a range of quantities, between their response to increasing T and that to increasing μ .

Both $(-\langle \bar{q}q \rangle)$ and f_π decrease with T and increase with μ , and this ensures that m_π is insensitive to increasing μ and/or T until very near the edge of the domain of confinement and DCSB. The mass of the transverse component of the vector meson is insensitive to T and μ while the mass of the longitudinal component increases with increasing T but decreases with increasing μ . This behaviour is opposite to that observed for $(-\langle \bar{q}q \rangle)$ and f_π , and hence the scaling

law conjectured in Ref.81 is inconsistent with this calculation, as it is with others of this type.

This study has two primary limitations. First, the width of the vector mesons cannot be calculated because the solution of Eq. (160) does not provide a realistic Bethe — Salpeter amplitude. Second, the calculation of meson-photon observables at $T = 0 = \mu$ only became possible with the determination [5] of the form of the dressed-quark-photon vertex. Its generalisation to nonzero- (T, μ) is a necessary precursor to the study of these processes.

8. CLOSING REMARKS

These lecture notes illustrate the contemporary application of Dyson — Schwinger equations to the analysis of observable strong interaction phenomena, highlighting the positive aspects and successes. Many recent, interesting studies have been neglected; a calculation of the electric dipole moment of the ρ -meson [82] and an exploration of η - η' mixing [83] among them. However, a simple enquiry of “<http://xxx.lanl.gov/find/hep-ph>” with the keywords: “Dyson — Schwinger” or “Schwinger — Dyson”, will provide a guide to other current research.

In all phenomenological applications, modelling is involved, in particular, of the behaviour of the dressed Schwinger functions in the infrared. [The ultraviolet behaviour is fixed because of the connection with perturbation theory.] This is tied to the need to make truncations in order to define a tractable problem. Questions will always be asked regarding the fidelity of the modelling. The answers can only come slowly as, for example, more is learnt about the constraints that Ward Identities and Slavnov — Taylor identities in the theory can provide. That approach has been particularly fruitful in QED [5], and already in the development of a systematic truncation procedure for the kernel of the quark DSE and meson BSE [3,4]. In the meantime, and as is common, phenomenological applications provide a key to understanding which elements of the approach need improvement: one must push and prod to find the weak links.

Acknowledgments. I am grateful to the faculty and staff at JINR-Dubna for their hospitality during this workshop, and especially to L. Kalinovskaya and Yu. Kalinovsky for their particular care. This work was supported by the US Department of Energy, Nuclear Physics Division, under contract no.W-31-109-ENG-38, the National Science Foundation under grant no. INT-9603385, and Deutscher Akademischer Austauschdienst.

REFERENCES

1. **Roberts C.D., Williams A.G.** — Prog. Part. Nucl. Phys., 1994, v.33, p.477: hep-ph/9403224.
2. **Roberts C.D.** — "Dyson — Schwinger Equations in QCD", in *Light-Front Quantization and Non-Perturbative QCD*, edited by Vary J.P. and Wolz F. (International Institute of Theoretical and Applied Physics, Ames, 1997), pp.212-239: <http://www.iitap.iastate.edu/reports/lfw/contents.html>.
3. **Bender A., Roberts C.D., Smekal L.V.** — Phys. Lett. B, 1996, v.380, p.7: nucl-th/9602012.
4. **Roberts C.D.** In: *Quark Confinement and the Hadron Spectrum II*, edited by Brambilla N. and Prosperi G.M. (World Scientific, Singapore, 1997), pp.224-230: nucl-th/9609039
5. **Bashir A., Kizilersu A., Pennington M.R.** — Phys. Rev. D, 1998, v.57, p.1242; and references therein: hep-ph/9707421.
6. **Brown N., Pennington M.R.** — Phys. Rev. D, 1989, v.39, p.2723.
7. **Maris P., Roberts C.D.** — Phys. Rev. C, 1997, v.56, p.3369: nucl-th/9708029.
8. **Maris P., Roberts C.D.** — "Differences between Heavy- and Light-Quarks", in *Rostock 1997, Progress in Heavy Quark Physics*, edited by Beyer M., Mannel T. and Schröder H.: nucl-th/9710062.
9. **Ivanov M.A., Kalinovsky Yu., Maris P., Roberts C.D.** — Phys. Rev. C, 1998, v.57, p.1991: nucl-th/9711023.
10. **Pichowsky M.A., H.Lee T.-S.** — Phys. Rev. D, 1997, v.56, p.1644: nucl-th/9612049;
Pichowsky M.A. — "Nonperturbative Quark Dynamics in Diffractive Processes", PhD Thesis, University of Pittsburgh.
11. **Maris P., Roberts C.D.** — "QCD Bound States and Their Response to Extremes of Temperature and Density", to appear in the proceedings of the *Workshop on Nonperturbative Methods in Field Theory*, University of Adelaide, Adelaide, South Australia, Feb. 1998: nucl-th/9806nnn.
12. **Munczek H.J., Nemirovsky A.M.** — Phys. Rev. D, 1983, v.28, p.181.
13. **Leinweber D.B.** — Ann. Phys., 1997 v.254, p.328: nucl-th/9510051.
14. **Miransky V.** — Mod. Phys. Lett. A, 1990, v.5, p.1979.
15. **Maris P., Roberts C.D.** — "Pseudovector Components of the Pion, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, and $F_\pi(q^2)$ ": nucl-th/9804062.
16. **Munczek H.** — Phys. Lett. B, 1986, v.175, p.215.
17. **Burden C.J., Roberts C.D., Williams A.G.** — Phys. Lett. B, 1992, v.285, p.347.
18. **Ball J.S., Chiu T.-W.** — Phys. Rev. D, 1980, v.22, p.2542.
19. **Curtis D.C., Pennington M.R.** — Phys. Rev. D, 1992, v.46, p.2663.
20. **Hawes F.T., Roberts C.D., Williams A.G.** — Phys. Rev. D, 1994, v.49, p.4683.
21. **Particle Data Group (Barnett R.M. et al.)** — Phys. Rev. D, 1996, v.54, p.1: <http://pdg.lbl.gov/>.
22. **Amendolia S.R. et al.** — Nucl. Phys. B, 1986, v.277, p.168.
23. **Roberts C.D.** — Nucl. Phys. A, 1996, v.605, p.475: hep-ph/9408233
24. **Tandy P. C.** — Prog. Part. Nucl. Phys., 1997, v.39, p.117: nucl-th/9705018.
25. **Burden C.J., Roberts C.D., Thomson C.D.** — Phys. Lett. B, 1996, v.371, p.163: nucl-th/9511012.
26. **Alkofer R., Roberts C.D.** — Phys. Lett. B, 1996, v.369, p.101: hep-ph/9510284.
27. **Roberts C.D., Cahill R.T., Seviar M.E., Iannella N.** — Phys. Rev. D, 1994, v.49, p.125: hep-ph/9304315.

28. **Počanić D.** — Summary of π - π Scattering Experiments, in *Chiral Dynamics: Theory and Experiment*, edited by Bernstein A. M. and Holstain B. R., Lecture Notes in Physics, v.452, (Springer, Berlin, 1995), 95: hep-ph/9412339.
29. **Kalinovsky Yu., Mitchell K.L., Roberts C.D.** — Phys. Lett. B, 1997, v.399, p.22: nucl-th/9610047.
30. **Bebek C.J. et al.** — Phys. Rev. D, 1976, v.13, p.25.
31. **Bebek C.J. et al.** — Phys. Rev. D, 1978, v.17, p.1693.
32. **Farrar G.R., Jackson D.R.** — Phys. Rev. Lett., 1979, v.43, p.246.
33. **Shambroom W.D. et al.** — Phys. Rev. D, 1982, v.26, p.1.
34. **Aubert J.J. et al.** — Phys. Lett. B, 1985, v.161, p.203.
35. **Arneodo M. et al.** — Nucl. Phys. B, 1994, v.429 p.503.
36. **Derrick M. et al.** — Phys. Lett. B, 1996, v.377, p.259: hep-ex/9601009.
37. **Derrick M. et al.** — Phys. Lett. B, 1996, v.380, p.220: hep-ex/9604008.
38. **Derrick M. et al.** — Phys. Lett. B, 1995, v.350, p.120: hep-ex/9503015.
39. **Aid S. et al.** — Nucl. Phys. B, 1996, v.468, p.3: hep-ex/9602007.
40. **Collins J.C., Perry M.J.** — Phys. Rev. Lett., 1975, v.34, p.1353.
41. **Rajagopal K.** — The Chiral Phase Transition in QCD: Critical Phenomena and Long-Wavelength Pion Oscillations, in *Quark-Gluon plasma*, edited by Hwa R.C. (World Scientific, New York, 1995), 484: hep-ph/9504310.
42. **Engels J. et al.** — Phys. Lett. B, 1997, v.396, p.210: hep-lat/9612018; and references therein.
43. **Wiringa R. B., Fiks V., Fabrocini A.** — Phys. Rev. C, 1988, v.38, p.1010.
44. **Drees A.** — Dilepton Enhancement at the CERN SpS, in *Proceedings of the XXVth International Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations*, Hirschegg 1997, edited by Feldmeier H., Knoll J., Nörenberg W. and Wambach J. (GSI-Darmstadt, 1997), 178.
45. This figure can be found at: <http://ceres6.physi.uni-heidelberg.de/ceres/referenceData/Index.html>.
46. **Li G.G., Ko C.M., Brown G.E.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.4007: nucl-th/9504025.
47. **Rapp R., Chanfray G., Wambach J.** — Nucl. Phys. A, 1997, v.617, p.472: hep-ph/9702210.
48. **Jin X., Leinweber D.B.** — Phys. Rev. C, 1995, v.52, p.3344: nucl-th/9510064.
49. **Klingl F., Kaiser N., Weise W.** — Nucl. Phys. A, 1997, v.624, p.527: hep-ph/9704398.
50. **Maris P., Roberts C.D., Schmidt S.** — Phys. Rev. C, 1998, v.57, p.R2821: nucl-th/9801059.
51. **Kapusta J.I.** — "Finite-Temperature Field Theory" (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1989).
52. **Pisarski R. D.** — Phys. Rev. Lett., 1989, v.63, p.1129; **Braaten E., Pisarski R.D.** — Nucl. Phys. B, 1990, v.337, p.569; *ibid* B, 1990, v.339, p.310; Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.1338; **Frenkel J., Taylor J.C.** — Nucl. Phys. B, 1990, v.334, p.199.
53. **De Tar C.** — "Quark Gluon Plasma in Numerical Simulations of Lattice QCD", in *Quark-Gluon Plasma*, ed. Hwa R. C. (World Scientific, New York, 1995), 1: hep-ph/9504325.
54. **Ukawa A.** — Nucl. Phys. B, 1990, v.17 (Proc. Suppl.), p.118; and references therein.
55. **Lombardo M.-P., Kogut J.B., Sinclair D.K.** — Phys. Rev. D, 1996, v.54, p.2303: hep-lat/9511026.
56. **Halasz M.A., Jackson A.D., Verbaarschot J.J.M.** — Phys. Rev. D, 1997, v.56, p.5140: hep-lat/9703006.

-
57. **Karsch F.** — Nucl. Phys. A, 1995, v.590, p.367c: hep-lat/9503010.
 58. **Blum T. et al.** — Phys. Rev. D, 1995, v.51, p.5153: hep-lat/9410014.
 59. **Laermann E.** — "Thermodynamics Using Wilson and Staggered Quarks": hep-lat/9802030.
 60. **Bender A., Blaschke D., Kalinovsky Yu., Roberts C.D.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.3724: nucl-th/9606006.
 61. **Blaschke D., Roberts C.D., Schmidt S.** — "Thermodynamic Properties of a Simple, Confining Model", Phys. Lett. B, in press: nucl-th/9706070.
 62. **Bender A. et al.** — "Deconfinement at Finite Chemical Potential", Phys. Lett. B, in press: nucl-th/9710069.
 63. **Jackson A.D., Verbaarschot J.J.M.** — Phys. Rev. D, 1996, v.53, p.7223: hep-ph/9509324.
 64. **Häbel U., Könning R., Reusch H.-G., Stingl M., Wigard S.** — Z. Phys. A, 1990, v.336, p.423;
Häbel U., Könning R., Reusch H.-G., Stingl M., Wigard S. — Z. Phys. A, 1990, v.336, p.435.
 65. **Hawes F.T., Roberts C.D., Williams A.G.** — Phys. Rev. D, 1994, v.49, p.4683: hep-ph/9309263.
 66. **Maris P.** — Phys. Rev. D, 1995, v.52, p.6087: hep-ph/9508323.
 67. **Frank M.R., Roberts C.D.** — Phys. Rev. C, 1996, v.53, p.390: hep-ph/9508225.
 68. **Sevior M.E.** — Nucl. Phys. A, 1992, v.543, p.275c.
 69. **Karsch F., Laermann E.** — Phys. Rev. D, 1994, v.50, p.6954: hep-lat/9406008.
 70. **Blaschke D., Hoell A., Roberts C.D., Schmidt S.** — "Analysis of Chiral and Thermal Susceptibilities": nucl-th/9803030.
 71. **Maris P.**, private communication.
 72. **Blaschke D. et al.** — Nucl. Phys. A, 1995, v.592, p.561.
 73. **Haymaker R.W.** — Riv. Nuovo Cim., 1991, v.14, series 3, no.8.
 74. **Cahill R.T.** — Aust. J. Phys., 1989, v.42, p.171.
 75. **Cahill R.T., Roberts C.D.** — Phys. Rev. D, 1985, v.32, p.2419.
 76. **Yabu H., Myhrer F., Kubodera K.** — Phys. Rev. D, 1994, v.50, p.3549: nucl-th/9402014.
 77. **Brown G.** — Nucl. Phys. A, 1988, v.488, p.689c.
 78. **Halasz M.A.**, private communication.
 79. **Mitchell K.L., Tandy P.C.** — Phys. Rev. C, 1997, v.55, p.1477: nucl-th/9607025.
 80. **Hollenberg L.C.L., Roberts C.D., McKellar B.H.J.** — Phys. Rev. C, 1992, v.46, p.2057.
 81. **Brown G.E., Rho M.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.2720.
 82. **Hecht M.B., McKellar B.H.J.** — Phys. Rev. C, 1998, v.57, p.2638: hep-ph/9704326.
 83. **Klabucar D., Kekez D.** — " η and η' at the Limits of Applicability of a Coupled Schwinger – Dyson and Bethe – Salpeter Approach in the Ladder Approximation": hep-ph/9710206.

LIGHT-FRONT FORMALISM IN THE QUASI-POTENTIAL APPROACH IN QUANTUM FIELD THEORY

V.R.Garsevanishvili, A.N.Tavkhelidze

Mathematical Institute of the Georgian Academy of Sciences,
M.Alexidze Str. 1, 380093 Tbilisi, Georgia
E-mail: garse@rmi.acnet.ge
E-mail: aleko@presid.acnet.ge

The review of the light-front formulation of the quasi-potential approach in quantum field theory for bound state and scattering problems is given.

Обзор посвящен применению квазипотенциальной формулировки теории поля на нуль-плоскости для описания процессов рассеяния с участием связанных состояний.

1. INTRODUCTION

The most general information about two- and many-body systems in quantum field theory is contained in the corresponding many-time Green functions, which are related to each other by function equations. In some conditions from these equations one can obtain equations for two-body bound state and scattering problems (Bethe–Salpeter-type equations [1]). The dependence of the Bethe–Salpeter amplitude (wave function) on the relative time of two particles leads to the fact that it contains the information on bound state and on the states, which have nothing to do with bound states as well. «Electron today and proton tomorrow» do not form the bound state — hydrogen atom. Similar difficulties arise in the case of many-body systems.

A regular method for excluding the relative time, based on the two-time Green functions has been developed in Ref. 2, where relativistic three-dimensional equations for bound state and scattering problems were derived. These equations are known as quasi-potential equations, because of their similarity with the corresponding equations of quantum mechanics. For quasi-potential wave functions the boundary conditions corresponding to bound state and scattering problems can be imposed. Relativistically covariant form of these equations for two- and many-body systems is given in Ref. 3. Similar equation for two particles in the Hamiltonian formulation of quantum field theory has been derived in Ref. 4.

With the development of quark models and the study of structure of particles and nuclei at high momentum transfer it turned out to be convenient the light-front form of quasi-potential equations [5].

In this approach the relativistic composite system with the total 4-momentum P is described by means of the quasi-potential wave function $\Phi_P([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])$, where the «longitudinal motion» of constituents is parametrized by means of the scale-invariant variables

$$x^{(i)} = \frac{p_0^{(i)} + p_3^{(i)}}{P_0 + P_3},$$

where $p_\mu^{(i)}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$ is the Lorentz index) and P_μ are the individual 4-momentum of the i -th constituent and the total 4-momentum of the system, respectively. Variables $x^{(i)}$ are ratios of the light-front variables. In terms of these variables the wave function of the composite system reflects, in particular, the dependence of the internal motion of constituents on the total momentum of the system. Square brackets in the argument of the wave function Φ_P denote the set of the variables $x^{(i)}$ and $\mathbf{p}_\perp^{(i)}$ which satisfy the conditions

$$\sum_{i=1}^N x^{(i)} = 1; \quad 0 < x^{(i)} < 1; \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)} = \mathbf{P}_\perp.$$

The review is organized as follows:

Section 2 is devoted to the formulation of the light-front formalism for composite systems. Equations for bound states and scattering problems are given. It is shown how equations of this approach are related to or differ from the equation obtained in the framework of the old-fashioned perturbation theory in the infinite momentum frame. Spectral and projective properties of the «two-time» Green functions are studied.

Section 3 deals with the method of constructing of relativistic elastic form factors and scattering amplitudes of composite systems in the light-front formalism. A general expression for the matrix element of the current of composite system in terms of relativistic wave functions and the generalized vertex operator $\tilde{\Gamma}_\mu$ is given. The electromagnetic form factor for a system, consisting of two or arbitrary number of constituents is presented in the impulse approximation.

Problems of the interaction of relativistic composite systems are also discussed in this section. The scattering amplitude is expressed in a general form, using relativistic wave functions and the transition operator. The constituent interchange mechanism is considered.

Section 4 is devoted to the study of deep inelastic form factors of composite systems. Like the case of elastic form factors, a general expression for the deep inelastic tensor $W_{\mu\nu}$, in terms of the relativistic wave functions are the generalized two-photon vertex $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$ is given. The explicit form of the structure functions W_1

and νW_2 in the lowest order in the electromagnetic interaction is presented. It is shown that if the transverse motion of quarks is taken into account, the Bjorken scaling is violated and the structure functions become the square of the momentum transfer dependent.

In Section 5 inclusive hadron-hadron processes are considered. General representations for the inclusive cross sections in terms of the light-front wave functions are given. Approximations are treated which lead to the quark-parton description of these processes.

Note, that the review is based mainly on the results obtained in the Dubna school. Other forms of light-front dynamics and appropriate lists of references can be found in a number of original and review papers (see, e.g., [6–15]).

2. LIGHT-FRONT FORMULATION OF BOUND STATE AND SCATTERING PROBLEMS

Light-front variables have been introduced by Dirac [16] with the aim to construct the quantum theory with commutation relations on the light-front hyperplane (instead of traditionally used $t = 0$ hyperplane). In this section, following Ref. 2 equations for bound state and scattering problems in light-front variables are derived.

2.1. Equation for the Two-Body Bound State Wave Function. Consider the Bethe–Salpeter amplitude (wave function)

$$\chi_{P,\alpha} = \langle 0 | T(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)) | P, \alpha \rangle = e^{-iPX} \chi_{P,\alpha}(x). \quad (2.1)$$

Here $|P, \alpha\rangle$ is the state vector with total 4-momentum P and quantum numbers α , $X = (x_1 + x_2)/2$ is the centre of mass coordinate, $P = p_1 + p_2$. Define the relative coordinate and momentum

$$x = x_1 - x_2, \quad p = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad (2.2)$$

and introduce the light-front variables

$$x_{\pm} = \frac{x_0 \pm x_3}{2}, \quad p_{\pm} = p_0 \pm p_3, \quad P_{\pm} = P_0 \pm P_3. \quad (2.3)$$

Introduce then the Fourier transform $\chi_{P,\alpha}(p) = \chi_{P,\alpha}(p_-, p_+, \mathbf{p}_{\perp})$ of the Bethe–Salpeter amplitude

$$\begin{aligned} \chi_{P,\alpha}(p) &= \chi_{P,\alpha}(p_-, p_+, \mathbf{p}_{\perp}) = \int d^4p e^{-ipx} \chi_{P,\alpha}(p) = \\ &= \frac{1}{2} \int dp_+ dp_- d\mathbf{p}_{\perp} e^{-i(p_+ x_- + p_- x_+ - \mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{x}_{\perp})} \chi_{P,\alpha}(p) \end{aligned} \quad (2.4)$$

and define the light-front quasi-potential wave function [2,5]:

$$\Psi_{P,\alpha}(p_+, \mathbf{p}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_- \chi_{P,\alpha}(p_-, p_+, \mathbf{p}_\perp). \quad (2.5)$$

It can be shown that the function $\Phi_{P,\alpha}(p_+, \mathbf{p}_\perp)$ depends on the values of the Bethe–Salpeter amplitude on the light-front hyperplane $x_0 + x_3 = 0$. In fact, using the definition (2.5) and the Fourier transformation (2.4) we get:

$$\begin{aligned} \Psi_{P,\alpha}(p_+, \mathbf{p}_\perp) &= \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int dx_+ dx_- d\mathbf{x}_\perp \delta(x_+) e^{-i(p_+ x_- + p_- x_+ - \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp)} \chi_{P,\alpha}(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Consider now the two-particle Green function

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= G(X - X'; x, x') = \\ &= \langle 0 | T(\phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_1^+(x'_1) \phi_2^+(x'_2)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dP dp dp' e^{-iP(X-X') - i(p x - p' x')} G(P; p, p'). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Here the total and relative 4-momenta and 4-coordinates in the initial and final states are introduced

$$P = p_1 + p_2, \quad p = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x = x_1 - x_2. \quad (2.8)$$

$$P = p'_1 + p'_2, \quad p' = \frac{p'_1 - p'_2}{2}, \quad X' = \frac{x'_1 + x'_2}{2}, \quad x' = x'_1 - x'_2. \quad (2.9)$$

Define the Fourier transform of the «two-time» quasi-potential Green function

$$\tilde{G}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_- dp'_- G(P; p, p'). \quad (2.10)$$

For free particles we have

$$G^{(0)}(P; p, p') = \frac{-\delta^{(4)}(p - p')}{\left[\left(\frac{P}{2} + p \right)^2 - m_1^2 + i\epsilon \right] \left[\left(\frac{P}{2} - p \right)^2 - m_2^2 + i\epsilon \right]}. \quad (2.11)$$

Performing the integration according to the definition (2.10), we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(0)}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) = \\ \frac{4\pi i \delta(p_+ - p'_+) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp) \theta(x) \theta(1-x)}{P_+ x(1-x) \left[P^2 + \mathbf{p}_\perp^2 - \frac{(\mathbf{P}/2 + \mathbf{p})_\perp^2 + m_1^2}{x} - \frac{(\mathbf{P}/2 + \mathbf{p})_\perp^2 - m_2^2}{1-x} \right]} = \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\tilde{G}^{(0)}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp) \delta(p_+ - p'_+) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp).$$

In this expression the variable x is introduced in the following way

$$x = \frac{1}{2} + \frac{p_+}{P_+}. \quad (2.13)$$

It is obvious that when the variable x varies in the limits

$$0 < x < 1, \quad (2.14)$$

the variable p_+ varies in the interval $(-P_+/2, P_+/2)$.

Define now the inverse operator by the relation

$$\begin{aligned} \int_{-P_+/2}^{P_+/2} dp''_+ \int d\mathbf{p}''_\perp \tilde{G}^{-1}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p''_+, \mathbf{p}''_\perp) \times \\ \times \tilde{G}(P; p''_+, \mathbf{p}''_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) = \delta(p_+ - p'_+) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Introduce the interaction kernel V (quasi-potential) [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{-1}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) = \tilde{G}^{(0)-1}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp) \times \\ \times \delta(p_+ - p'_+) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp) - \frac{1}{4\pi i} V(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp). \end{aligned} \quad (2.16)$$

After simple transformations the equation for the quasi-potential wave function

$$\Phi_{P,\alpha}(x, \mathbf{p}_\perp) = P_+ x(1-x) \Psi_{P,\alpha}(p_+, \mathbf{p}_\perp) \quad (2.17)$$

takes the form [5]:

$$\left[P^2 - \frac{(\mathbf{p}_\perp + (1/2 - x)\mathbf{P}_\perp)^2 + m_1^2}{x} - \frac{(\mathbf{p}_\perp + (1/2 - x)\mathbf{P}_\perp)^2 + m_2^2}{1-x} \right] \times$$

$$\times \Phi_{P,\alpha}(x, \mathbf{p}_\perp) = \int_0^1 \frac{dx'}{x'(1-x')} \int d\mathbf{p}'_\perp V(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) \Phi_{P,\alpha}(x', \mathbf{p}'_\perp). \quad (2.18)$$

The equation obtained gives the wave function of a bound state in an arbitrary Lorentz reference frame. Comparing it with the equation in the frame where $\mathbf{P}_\perp = 0$ we get the transformation property for the wave function from the arbitrary frame to the frame, in which the total transverse momentum of two-particle bound state is equal to zero:

$$\Phi_P(x, \mathbf{p}_\perp) = \Phi_{\mathbf{P}_\perp=0}(x, \mathbf{p}_\perp + (1/2 - x)\mathbf{P}_\perp). \quad (2.19)$$

The case of spin particles is considered in Ref. 17.

2.2. Equation for the Scattering Amplitude and Relation to the Equation in the Infinite Momentum Frame. Derive now the equation for the two-body scattering amplitude. Definition of the scattering amplitude $T(P; p, p')$ in the 4-dimensional covariant Bethe–Salpeter formalism looks as follows:

$$\begin{aligned} G(P; p, p') &= G^{(0)}(P; p, p') + \\ &+ \int d^4 p'' d^4 p''' G^{(0)}(P; p, p'') T(P; p'', p''') G^{(0)}(P; p''', p') = \\ &G^{(0)}(P; p) \delta^{(4)}(p - p') + G^{(0)}(P; p) T(P; p, p') G^{(0)}(P; p'). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Define the quantity $\tilde{T}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp)$ by the similar expression [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) &= \tilde{G}^{(0)}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp) \delta(p_+ - p'_+) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp) + \\ &\tilde{G}^{(0)}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp) \tilde{T}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) \tilde{G}^{(0)}(P; p'_+, \mathbf{p}'_\perp). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Integrating (2.20) according to (2.10) we get:

$$\tilde{G} = \tilde{G}^{(0)} + G^{(0)} \widetilde{T} G^{(0)}. \quad (2.22)$$

Comparing formulae (2.22) and (2.21) we obtain:

$$\tilde{T} = \tilde{G}^{(0)-1} \cdot G^{(0)} \widetilde{T} G^{(0)} \cdot \tilde{G}^{(0)-1}. \quad (2.23)$$

It can be shown that on the mass shell the following equality holds

$$\tilde{T} = T. \quad (2.24)$$

Derive now the equation for the amplitude $\tilde{T}$. Using the definition (2.16) we get the equation for the Fourier transform of the «two-time» Green function

$$\tilde{G} = \tilde{G}^{(0)} + \tilde{G}^{(0)} V \tilde{G}. \quad (2.25)$$

In (2.25) the multiplication is understood as a three-dimensional intergration over the corresponding variables x and $\mathbf{p}_\perp$. Comparing (2.25) and (2.21) one can see that

$$\tilde{T} \tilde{G}^{(0)} = V \tilde{G} \quad (2.26)$$

from which the equation for scattering amplitude $\tilde{T}$ follows:

$$\tilde{T} = V + V \tilde{G}^{(0)} \tilde{T}. \quad (2.27)$$

In the frame, where total transverse momentum is zero $\mathbf{P}_\perp = 0$, the explicit form of the equation (2.27) looks as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(P; x, \mathbf{p}_\perp; x', \mathbf{p}'_\perp) = & V(P; x, \mathbf{p}_\perp; x', \mathbf{p}'_\perp) + \\ & \int_0^1 \frac{dx''}{x''(1-x'')} \int d\mathbf{p}_\perp'' \frac{V(P; x, \mathbf{p}_\perp; x'', \mathbf{p}_\perp'') \tilde{T}(P; x'', \mathbf{p}_\perp'' x', \mathbf{p}'_\perp)}{\left[\frac{m_1^2 + \mathbf{p}_\perp''^2}{x''} + \frac{m_2^2 + \mathbf{p}_\perp''^2}{1-x''} - P^2 - i\epsilon \right]}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

In a number of papers (see, e.g., [18–21]) composite systems have been described on the basis of the so-called old-fashioned perturbation theory in the infinite momentum frame, which has been used by Weinberg [22] in the relativistic quantum field theory. Equation (2.28) reproduces in the lowest order of perturbation theory the equation from [22] and at the same time contains the regular method of constructing the interaction kernel in the higher orders of perturbation theory. We will not discuss this point here, but recall that as in the canonical three-dimensional approach [2] there exist two methods of constructing of the interaction kernel (by means of the «two-time» Green function and by means of the scattering amplitude on the mass-shell).

The method of the constructing of the interaction kernel in lowest and high orders in perturbation theory can be used, for instance, for the relativistic generalization of one- or multi-boson exchange potentials to describe the nuclear forces. For the review of quark aspects of nuclear forces see, e.g., [23].

We note, however, that there exists one substantial difference between the equation derived here and equation of Ref. 22. In the light-front approach the equation is written in an arbitrary Lorentz frame and «longitudinal motion» of constituents is parametrized in terms of scale invariant and Lorentz invariant (under the transformations of reference frames along the z -axis) variable $x = (P/2 + p)_+ / P_+$. In the infinite momentum frame «longitudinal motion» is parametrized in terms of the variable $x = (P/2 + p)_3 / P_3$, which is not Lorentz invariant.

2.3. Equation for the Many-Body Bound State Wave Function. Formalism developed can be extended to the case of N relativistic interacting particles. The way of this extension can be seen if instead of the variable x , defined by the relative momentum, two variables $x^{(1)}$ and $x^{(2)}$, defined by the individual momenta of particles

$$x^{(i)} = \frac{p_+^{(i)}}{P_+}, \quad i = 1, 2 \quad (2.29)$$

are used. The variables $x^{(i)}$ vary in the interval $0 < x^{(i)} < 1$.

Define the Fourier transform of the many-body Bethe–Salpeter amplitude (wave function)

$$\chi_{P,\alpha}([x_\mu^{(i)}]) = \langle 0 | T(\phi_1(x_\mu^{(1)}) \phi_2(x_\mu^{(2)}) \dots \phi_N(x_\mu^{(N)})) | P, \alpha \rangle$$

by the following relation

$$\delta^{(4)}\left(P - \sum_{i=1}^N p^{(i)}\right) \chi_{P,\alpha}([p^{(i)}]) = \int \prod_{i=1}^N d^4 x^{(i)} \exp\left[i \sum_{i=1}^N p^{(i)} x^{(i)}\right] \chi_{P,\alpha}([x_\mu^{(i)}]), \quad (2.30)$$

where

$$[p^{(i)}] = p^{(1)}, \dots, p^{(N)}; \quad [x_\mu^{(i)}] = x_1^{(1)}, \dots, x^{(N)}.$$

Here we have ascribed the Lorentz index μ to the 4-coordinates $x_\mu^{(i)}$ in order to distinguish them from the scale-invariant variables $x^{(i)}$, which will be introduced later.

Introduce the light, front variables

$$P_\pm = P_0 \pm P_3; \quad p_\pm^{(i)} = p_0^{(i)} \pm p_3^{(i)}; \quad x_\pm^{(i)} = \frac{x_0^{(i)} \pm x_3^{(i)}}{2} \quad (2.31)$$

and integrate (2.30) over $\prod_{i=1}^N dp_-^{(i)}$. We obtain

$$\begin{aligned} & 2\delta\left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)}\right) \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right) \Psi_{P,\alpha}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) = \\ & = (2\pi)^N \int \prod_{i=1}^N d^4 x^{(i)} \delta(x_+^{(i)}) \exp\left[i \sum_{i=1}^N (p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)})\right] \chi_{P,\alpha}([x_\mu^{(i)}]). \end{aligned} \quad (2.32)$$

The function $\Psi_{P,\alpha}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])$ is related to the Bethe–Salpeter amplitude in the following way:

$$\Psi_{P,\alpha}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dp_-^{(i)} \delta\left(P_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)}\right) \chi_{P,\alpha}([p^{(i)}]). \quad (2.33)$$

Introduce now the Fourier transform of the «two-time» Green function

$$\begin{aligned} & \tilde{G}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dp_-^{(i)} dp_-^{(i)'} \delta\left(P_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)}\right) \delta\left(P_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)'}\right) G(P; [p^{(i)}]; [p^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (2.34)$$

The function $G(P; [p^{(i)}]; [p^{(i)'}])$ is defined by the Fourier transformation

$$\begin{aligned} G([x_\mu^{(i)}]; [x_\mu^{(i)'}]) &= \langle 0 | T(\phi_1(x_\mu^{(1)}) \dots \phi_N(x_\mu^{(N)}) \phi_1^+(x_\mu^{(1)'}) \dots \phi_N^+(x_\mu^{(N)'}) | 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-4N} \int \prod_{i=1}^N d^4 p^{(i)} d^4 p^{(i)'} \exp\left[-i \sum_{i=1}^N (p^{(i)} x^{(i)} - p^{(i)'} x^{(i)'})\right] \times \\ & \quad \times G(P; [p^{(i)}]; [p^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (2.35)$$

For the case of free particles we have

$$G^{(0)}(P; [p^{(i)}]; [p^{(i)'}]) = \frac{i^N \prod_{i=1}^N \delta^{(4)}(p^{(i)} - p^{(i)'})}{\prod_{i=1}^N (p^{(i)2} - m^{(i)2} + i\epsilon)}. \quad (2.36)$$

Integrating both sides of (2.36) according to the definition (2.34) and omitting the δ -function corresponding to the total 4-momentum consevation, we get

$$\begin{aligned} & \tilde{G}^{(0)}(P; [p_+^{(i)}, p_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \\ &= \frac{(2i)^N (2\pi i)^{N-1} \prod_{i=1}^N \delta(p_+^{(i)} - p_+^{(i)'}) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)'}) \prod_{i=1}^N \theta(x^{(i)}) \theta(1 - x^{(i)})}{P_+^{N-1} \prod_{i=1}^N x^{(i)} \left[P^2 - \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{p}_\perp^{(i)} - x^{(i)} \mathbf{p}_\perp)^2 + m^{(i)2}}{x^{(i)}} \right]} = \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\tilde{G}^{(0)}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \prod_{i=1}^N \delta(p_+^{(i)} - p_+^{(i)'}) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}).$$

The variables $x^{(i)}$ are defined in the following way:

$$x^{(i)} = \frac{p_+^{(i)}}{P_+}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.38)$$

Thus, the function $\tilde{G}^{(0)}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])$ is defined under the conditions:

$$\sum_{i=1}^N x^{(i)} = 1; \quad 0 < x^{(i)} < 1; \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)} = \mathbf{P}_\perp. \quad (2.39)$$

Introduce now the inverse operator $\tilde{G}^{-1}$ by means of the relation

$$\begin{aligned} & \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)''} \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)''} \tilde{G}^{-1}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \times \\ & \times \tilde{G}(P; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \prod_{i=1}^N \delta(p_+^{(i)} - p_+^{(i)'}) \delta^{(2)}(\mathbf{p}_\perp^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

and define the interaction kernel V :

$$\begin{aligned} & \tilde{G}^{-1}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \tilde{G}^{(0)-1}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) - \\ & - \frac{\delta\left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)}\right) \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right)}{(2i)^N (2\pi i)^{N-1}} V(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (2.41)$$

The equation for the wave function

$$\Phi_{P,\alpha}([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) = P_+^{N-1} \prod_{i=1}^N x^{(i)} \Psi_{P,\alpha}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \quad (2.42)$$

looks as follows [24]:

$$\left[P^2 - \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{p}_\perp^{(i)} - x^{(i)} \mathbf{P}_\perp)^2 + m^{(i)2}}{x^{(i)}} \right] \Phi_{P,\alpha}([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \prod_{i=1}^N \frac{dx^{(i)'}}{x^{(i)'}} \delta \left(1 - \sum_{i=1}^N x^{(i)'} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_{\perp}^{(i)'} \delta^{(2)} \left(\mathbf{P}_{\perp} - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{\perp}^{(i)'} \right) \times \\
 &\quad \times V(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)'}]) \Phi_{P,\alpha}([x^{(i)'}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)'}]).
 \end{aligned} \quad (2.43)$$

The formalism developed can be used for the treatment of a wide class of elementary particle and nuclear physics problems.

2.4. Spectral and Projective Properties of the Two-Time Green Functions.

The Green function for N interacting particles in the light-front quantum field theory is defined as a vacuum expectation value of the «chronologically» ordered Heisenberg field operators [25]:

$$G([x_{\mu}^{(i)}]; [x_{\mu}^{(i)'}]) = \langle 0 | T_+ (\psi_1(x_{\mu}^{(1)}) \dots \psi_N(x_{\mu}^{(N)}) \bar{\psi}_N(x_{\mu}^{(N)'}) \dots \bar{\psi}_1(x_{\mu}^{(1)'})) | 0 \rangle. \quad (2.44)$$

Define now the «two-time» Green function:

$$\tilde{G}(X_+; [x_{\mu}^{(i)}], \mathbf{x}_{\perp}^{(i)}; X'_+; [x_{\mu}^{(i)'}, \mathbf{x}_{\perp}^{(i)'}]) = G([x_{\mu}^{(i)}]; [x_{\mu}^{(i)'}]) \left| \begin{array}{l} x_+^{(1)} = \dots = x_+^{(N)} = X_+ \\ x_+^{(1)'} = \dots = x_+^{(N)'} = X'_+ \end{array} \right. \quad (2.45)$$

It is convenient to introduce the operators

$$\begin{aligned}
 A([x_{\mu}^{(i)}]) &= \psi_1(x_{\mu}^{(1)}) \dots \psi_N(x_{\mu}^{(N)}) \Big|_{x_+^{(1)} = \dots = x_+^{(N)} = X_+} \\
 \bar{A}([x_{\mu}^{(i)'}]) &= \bar{\psi}_N(x_{\mu}^{(N)'}) \dots \bar{\psi}_1(x_{\mu}^{(1)'}) \Big|_{x_+^{(1)'} = \dots = x_+^{(N)'} = X'_+}
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

and rewrite the «two-time» Green function as follows:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}([x_{\mu}^{(i)}]; [x_{\mu}^{(i)'}]) &= \langle 0 | T_+ (A([x_{\mu}^{(i)}]) \bar{A}([x_{\mu}^{(i)'}])) | 0 \rangle = \\
 &= \theta(X_+ - X'_+) \langle 0 | A([x_{\mu}^{(i)}]) \bar{A}([x_{\mu}^{(i)'}]) | 0 \rangle \pm \\
 &\quad \pm \theta(X'_+ - X_+) \langle 0 | \bar{A}([x_{\mu}^{(i)'}]) A([x_{\mu}^{(i)}]) | 0 \rangle.
 \end{aligned} \quad (2.47)$$

The signs $\pm$ are chosen depending on the number of fermion field operators in $A([x_{\mu}^{(i)}])$.

In what follows we will obtain the spectral representation for the Green function (2.47). Using the expansion in the complete set of physical states $|n\rangle$,

translation invariance property and the Fourier representation for θ function the expression (2.47) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \tilde{G}([x_\mu^{(i)}]; [x_\mu^{(i)'}]) &= \tilde{G}(X_+ - X'_+; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dP_- \exp^{ip_-(X_+ - X'_+)} \int_0^{\infty} dz \times \\ &\times \left[\frac{\sigma_1(z; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}])}{P_- - z + i\epsilon} \mp \frac{\sigma_2(z; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}])}{P_- + z - i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Spectral functions σ_1 and σ_2 are expressed via the three-dimensional light-front wave functions:

$$\begin{aligned} \sigma_1(z; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_m \delta(z - P_-^{(m)}) \Psi_{om}([x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_{om}([x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(z; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_m \delta(z - P_-^{(m)}) \Psi_{mo}([x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_{mo}([x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{om}([x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) &= \langle 0 | A([0, x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) | m \rangle = \\ &= \langle 0 | \psi_1(0, x_-^{(1)}, \mathbf{x}_\perp^{(1)}) \dots \psi_N(0, x_-^{(N)}, \mathbf{x}_\perp^{(N)}) | m \rangle, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\bar{\Psi}_{om}([x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) = \langle m | \bar{A}([0, x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) | 0 \rangle, \quad (2.52)$$

$$\Psi_{mo}([x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) = \langle m | A([0, x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) | 0 \rangle, \quad (2.53)$$

$$\bar{\Psi}_{mo}([x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) = \langle 0 | \bar{A}([0, x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) | m \rangle. \quad (2.54)$$

Summation in Eqs. (2.49), (2.50) is understood as the integration over 4-momentum $P^{(m)}(P_+^{(m)} > 0; P_-^{(m)} > 0)$ under the condition $P^{(m)^2} > 0$ and

the summation over other quantum numbers on which the given physical state $|m\rangle$ can be dependent.

Define the Fourier transforms of the spectral functions:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}(z; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) &= \frac{1}{(2\pi)^{4N}} \int \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} dp_+^{(i)'} d\mathbf{p}_\perp^{(i)'} \times \\ &\times \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^N [(p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)}) - (p_+^{(i)'} x_-^{(i)'} - \mathbf{p}_\perp^{(i)'} \mathbf{x}_\perp^{(i)'})] \right\} \times \\ &\times \sigma_{1,2}(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (2.55)$$

From this definition and Eqs.(2.51)–(2.54) for wave functions one obtains:

$$\begin{aligned} \sigma_1(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= \frac{i}{(2\pi)^{1-4N}} \sum_m \delta(z - P_-^{(m)}) \Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_{om}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]), \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= \frac{i}{(2\pi)^{1-4N}} \sum_m \delta(z - P_-^{(m)}) \Psi_{mo}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_{mo}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]), \end{aligned} \quad (2.57)$$

where

$$\begin{aligned} \Psi_{mo}([x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) &= \\ &= \int \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \exp \left[-i \sum_{i=1}^N [(p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)})] \right] \Psi_{mo}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{om}([x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]) &= \\ &= \int \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \exp \left[-i \sum_{i=1}^N [(p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)})] \right] \Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]). \end{aligned} \quad (2.59)$$

We will show now that the functions $\sigma_{1,2}(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])$ possess the following properties:

$$\sigma_1(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = 0 \quad (2.60)$$

if even one of the variables $p_+^{(i)}, p_+^{(i)'} < 0$ and

$$\sigma_2(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = 0 \quad (2.61)$$

if even one of the variables $p_+^{(i)}, p_+^{(i)'} > 0$.

Let us show first the validity of (2.60). Consider for this purpose the Fourier transform of the light-front wave function

$$\begin{aligned} \Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) &= \frac{1}{(2\pi)^{3N-3}} \int \prod_{i=1}^N dx_-^{(i)} d\mathbf{x}_\perp^{(i)} \exp \left[i \sum_{i=1}^N [(p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)})] \right] \times \\ &\quad \times \langle 0 | \psi_1(0, x_-^{(1)}, \mathbf{x}_\perp^{(1)}) \dots \psi_N(0, x_-^{(N)}, \mathbf{x}_\perp^{(N)}) | m \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3N-3}} \sum_{m_1} \delta(p_+^{(1)} - p_+^{(m_1)}) \int \prod_{i=2}^N dx_-^{(i)} d\mathbf{x}_\perp^{(i)} \exp \left[i \sum_{i=2}^N (p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)}) \right] \times \\ &\quad \times \langle 0 | \psi_1(0) | m_1 \rangle \langle m_1 | \psi_2(x_-^{(2)}, \mathbf{x}_\perp^{(2)}) \dots \psi_N(x_-^{(N)}, \mathbf{x}_\perp^{(N)}) | m \rangle. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Taking into account that $p_+^{(m_1)} > 0$, it is evident that $\Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])$, if $p_+^{(1)} < 0$. In order to show the validity of this statement for arbitrary $p_+^{(i)}$ we will use the light-front commutation properties of the fields $\psi_i(x_\mu^{(i)})$ and locate on the first place arbitrary operator $\psi_i(x_\mu^{(i)})$:

$$\begin{aligned} \Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) &= \frac{1}{(2\pi)^{3N-3}} \sum_{m_1} \delta(p_+^{(i)} - p_+^{(m_1)}) \times \\ &\quad \times \int \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N dx_-^{(j)} d\mathbf{x}_\perp^{(j)} \times \exp \left[i \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N [(p_+^{(j)} x_-^{(j)} - \mathbf{p}_\perp^{(j)} \mathbf{x}_\perp^{(j)})] \right] \times \\ &\quad \times \langle 0 | \psi_1(0) | m_1 \rangle \langle m_1 | \psi_1(x_-^{(1)}, \mathbf{x}_\perp^{(1)}) \dots \psi_{i-1}(x_-^{(i-1)}, \mathbf{x}_\perp^{(i-1)}) \psi_{i+1}(x_-^{(i+1)}, \mathbf{x}_\perp^{(i+1)}) | m \rangle. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Taking into account that for physical states $p_+^{(m_1)} \geq 0$, we see that

$$\Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) = 0 \quad (2.64)$$

if even one of $p_+^{(i)} < 0$.

In a similar way one can show that

$$\Psi_{mo}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) = 0 \quad (2.65)$$

if even one of $p_+^{(i)} > 0$.

Taking into account (2.64) and (2.65) one can see the validity of Eqs. (2.60) and (2.61).

Define now the Fourier transform of the «two-time» Green function:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(X_+ - X'_+; [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) &= \frac{1}{(2\pi)^{4N}} \int \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} dp_+^{(i)'} d\mathbf{p}_\perp^{(i)'} \times \\ &\times \exp \left\{ -iP_-(X_+ - X'_+) - i \sum_{i=1}^N [(p_+^{(i)} x_-^{(i)} - \mathbf{p}_\perp^{(i)} \mathbf{x}_\perp^{(i)}) - \right. \\ &\left. - (p_+^{(i)'} x_-^{(i)'} - \mathbf{p}_\perp^{(i)'} \mathbf{x}_\perp^{(i)'})] \right\} \tilde{G}(P_-; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Inserting (2.55) and (2.66) into (2.48) one obtains:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P_-; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= \int dz \left[\frac{\sigma_1(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])}{P_- - z + i\epsilon} \mp \frac{\sigma_2(z; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])}{P_- + z - i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Here $\sigma_1 = 0$ if even one of $p_+^{(i)}$ or $p_+^{(i)'}$ is less than zero, $\sigma_2 = 0$ if even one of $p_+^{(i)}$ or $p_+^{(i)'}$ is bigger than zero.

Spectral representation (2.67) is an analogue of the spectral representation of the «two-time» Green function [3] with respect to total energy. Here, however, an essential difference between the upper and lower parts of the light cone is realized which is characteristic for the light-front quantum field theory. «Retarded» part of the Green function (first term) determines completely the behaviour of the Green function for positive $p_+^{(i)}, p_+^{(i)'}$, «advanced» part (second term) determines the behaviour of the Green function for negative $p_+^{(i)}, p_+^{(i)'}$.

Taking into account the definition of spectral densities and translation invariance property of wave functions one can obtain the spectral representation of the «two-time» Green function with respect to P^2 [25]:

$$\tilde{G}(P^2, [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \int_0^\infty ds \frac{\sigma(s; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])}{P^2 - s + i\epsilon}, \quad (2.68)$$

where

$$\sigma(s; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) =$$

$$= \sigma_1(s; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \prod_{i=1}^N \theta(p_+^{(i)}) \theta(p_+^{(i)'}) \mp \quad (2.69)$$

$$\mp \sigma_2(s; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \prod_{i=1}^N \theta(-p_+^{(i)}) \theta(-p_+^{(i)'}),$$

$$\sigma_1(s; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) =$$

$$= i(2\pi)^{4N-1} \sum_m P_+ \delta(s - P^{(m)^2}) \Psi_{om}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_{om}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]), \quad (2.70)$$

$$\sigma_2(s; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) =$$

$$= i(2\pi)^{4N-1} \sum_m P_+ \delta(s - P^{(m)^2}) \Psi_{mo}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_{mo}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]). \quad (2.71)$$

Taking into account the momentum conservation

$$\sum_{i=1}^N p_+^{(i)} = \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'}, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'} \quad (2.72)$$

one can rewrite the «two-time» Green function as follows:

$$\tilde{G}(P^2, [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) =$$

$$= \delta \left(\sum_{i=1}^N p_+^{(i)} - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'} \right) \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)} - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'} \right) \times \quad (2.73)$$

$$\times \tilde{G}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])_{i=1, \dots, N-1}.$$

Let us show now that the Green function (2.73) depends on its variables in a special manner:

$$(P^+)^{2N-2} \tilde{G}(P, [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \equiv$$

$$\equiv S_P \tilde{G}(P; [x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)} - x^{(i)} \mathbf{P}_\perp]; [x^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'} - x^{(i)'} \mathbf{P}_\perp]) S_P^{-1}. \quad (2.74)$$

S_P and S_P^{-1} are the known transformation matrices acting on spin indices. For scalar particles $S_P = 1$.

The fact that the Green function depends only on the scaling variables $x^{(i)}$ and $x^{(i)'}$ is the consequence of the invariance of the Green function under the rotations in the (x_0, x_3) -plane:

$$\begin{aligned} G([x_\mu^{(i)}]; [x_\mu^{(i)'}]) &= \\ &= S_\lambda G([\lambda x_+^{(i)}, \lambda^{-1} x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; [\lambda x_+^{(i)'}, \lambda^{-1} x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]) S_\lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

The matrix S_λ acts on the spin indices. Remind that an arbitrary 4-vector $A(A_+, A_-, \mathbf{A}_\perp)$ is transformed according to:

$$A_+ \rightarrow \lambda A_+, \quad A_- \rightarrow \lambda^{-1} A_-, \quad \mathbf{A}_\perp \rightarrow \mathbf{A}_\perp \quad (2.76)$$

under the rotations in the (x_0, x_3) -plane.

The property (2.75) is preserved for «two-time» Green function. As a result the Fourier transform is a homogeneous function of the variables $P_+, p_+^{(i)}, p_+^{(i)'}$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P_-, P_+, \mathbf{P}_\perp; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= \lambda^{2N-2} S_\lambda \tilde{G}(P^2; \lambda P_+, \mathbf{P}_\perp; [\lambda p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [\lambda p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) S_\lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

From (2.77) it follows that $\tilde{G}$ depends only on the scaling variables $x^{(i)}$ and $x^{(i)'}$.

Consider the Lorentz transformation which is given by the 2-vector $\mathbf{u}_\perp$:

$$A_+ \rightarrow \lambda A_+; \quad A_- \rightarrow A_- + \mathbf{u}_\perp \mathbf{A}_\perp + \frac{1}{2} A^+ \mathbf{u}_\perp^2; \quad \mathbf{A}_\perp \rightarrow \mathbf{A}_\perp + A_+ \mathbf{u}_\perp. \quad (2.78)$$

The Green function is invariant under these transformations. For the Fourier transform of the «two-time» Green function it follows that:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P^2, \mathbf{P}_\perp; [x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [x^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) &= \\ &= S_{\mathbf{u}_\perp} \tilde{G}(P^2, \mathbf{P}_\perp + P_+ \mathbf{u}_\perp; [x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)} + p_+^{(i)} \mathbf{u}_\perp]; \times \\ &\quad \times [x^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'} + p_+^{(i)'} \mathbf{u}_\perp]) S_{\mathbf{u}_\perp}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Choosing $\mathbf{u}_\perp = \frac{\mathbf{P}_\perp}{P_+}$ one obtains the formula (2.74).

3. RELATIVISTIC ELASTIC FORM FACTORS AND SCATTERING AMPLITUDES FOR COMPOSITE SYSTEMS

3.1. Formulation of the Method. The reaction of a composite systems on a weak external perturbation corresponding to the local field $A(x)$ is described in quantum field theory by the expression [26,27]:

$$\langle P, \alpha | \frac{\delta S}{\delta A(k)} | P', \beta \rangle |_{A=0} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - P' - k) \langle P, \alpha | J(0) | P', \beta \rangle. \quad (3.1)$$

Here $J(x)$ is the local current of the system

$$J(x) = i \frac{\delta S}{\delta A(x)} S^+, \quad (3.2)$$

$|P, \alpha\rangle$ and $|P', \beta\rangle$ are the state vectors of composite particles with momenta P and P' and the sets of additional quantum numbers α and β , respectively, normalized in a relativistically invariant manner

$$\langle P, \alpha | P', \beta \rangle = 2P_0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}'). \quad (3.3)$$

Below we suggest a method of constructing relativistically covariant form factors of composite systems in terms of light-front wave functions.

Consider first the case of two-particle system. Introduce the quantity R defined by the vacuum expectation value of the chronologically ordered product of Heisenberg field operators of scalar particles $\phi_i(x_i)$ and the same local current $J(x)$:

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x'_1, x'_2) &= \langle 0 | T(\phi_1(x_1) \phi_2(x_2) J(0) \phi_1^+(x'_1) \phi_2^+(x'_2)) | 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-16} \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p'_1 d^4 p'_2 \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{j=1}^2 (p_j x_j - p'_j x'_j) \right] R(p_1, p_2; p'_1, p'_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introducing, as above, relative 4-coordinates and 4-momenta

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x = x_1 - x_2; \quad X' = \frac{x'_1 + x'_2}{2}, \quad x' = x'_1 - x'_2; \\ P &= p_1 + p_2; \quad p = \frac{p_1 - p_2}{2}; \quad P' = p'_1 + p'_2; \quad p' = \frac{p'_1 - p'_2}{2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

we rewrite expression (3.4) in the form

$$R(X, x : X', x') = (2\pi)^{-16} \int d^4 P d^4 p d^4 P' d^4 p' \times \\ \times \exp[-i(PX - P'X' + px - p'x')] R(P, p; P', p'). \quad (3.6)$$

As is known [28], the quantity R can be presented in the form

$$R = G\Gamma G \quad (3.7)$$

or in the detailed form

$$R(X, x; X', x') = \int d^4 X'' d^4 x'' d^4 X''' d^4 x''' G(X - X''; x, x'') \times \\ \times \Gamma(X'', x''; X''', x''') G(X''' - X'; x''', x'). \quad (3.8)$$

In the momentum space we get

$$R(P, p; P', p') = \int d^4 p'' d^4 p''' G(P, p, p'') \Gamma(P, p''; P', p''') G(P'; p''', p'). \quad (3.9)$$

Here G is two-particle Green function of fields $\phi_i(x_i)$ and the vertex function Γ is the sum of all two-particle irreducible diagrams for the 5-poin Green function (3.6) (see Fig.1).

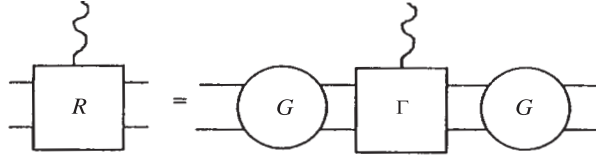


Fig. 1.

Passing to the «two-time» description in terms of light-front variables we define the quantity

$$\tilde{R}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_- dp'_- R(P, p; P', p'). \quad (3.10)$$

The quantity $\tilde{R}$ can be presented in the form

$$\tilde{R} = \tilde{G}\tilde{\Gamma}\tilde{G} \quad (3.11)$$

or in the detailed form

$$\begin{aligned} \tilde{R}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) &= \int_{-P_+/2}^{P_+/2} dp''_+ \int d\mathbf{p}''_\perp \int_{-P'_+/2}^{P'_+/2} dp'''_+ \int d\mathbf{p}'''_\perp \times \\ &\times \tilde{G}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p''_+, \mathbf{p}''_\perp) \tilde{\Gamma}(P; p''_+, \mathbf{p}''_\perp; p'''_+, \mathbf{p}'''_\perp) \times \\ &\times \tilde{G}(P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp; p'''_+, \mathbf{p}'''_\perp). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Here $\tilde{\Gamma}$ is the vertex integral operator. Let us show that the quantity $\tilde{\Gamma}$ defines the form factor of composite system. Starting from the spectral properties [29] of the 5-point Green function (3.10), it is possible to show that the quantity $\tilde{R}$ has the pole singularities near the points corresponding to the masses M_α and M_β of composite system:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) &\cong \\ &P^2 \rightarrow M_\alpha^2, P'^2 \rightarrow M_\beta^2 \\ &\cong [i(2\pi)^4]^2 \frac{\Psi_{P,\alpha}(p_+, \mathbf{p}_\perp) \langle P, \alpha | J(0) | P', \beta \rangle \Psi_{P',\beta}^+(p'_+, \mathbf{p}'_\perp)}{(P^2 - M_\alpha^2)(P'^2 - M_\beta^2)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On the other hand, taking into account the pole singularities of the two-particle «two-time» Green function

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) &\cong \\ &P^2 \rightarrow M_\alpha^2 \\ &\cong i(2\pi)^4 \frac{\Psi_{P,\alpha}(p_+, \mathbf{p}_\perp) \Psi_{P',\alpha}^+(p'_+, \mathbf{p}'_\perp)}{P^2 - M_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

We find from (3.12):

$$\begin{aligned} \tilde{R}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) &\cong \\ &\cong [i(2\pi)^4]^2 \frac{\Psi_{P,\alpha}(P_+, \mathbf{P}_\perp) \Psi_{P',\beta}^+(P'_+, \mathbf{P}'_\perp)}{(P^2 - M_\alpha^2)(Q^2 - M_\beta^2)} \\ &\int_{-P_+/2}^{P_+/2} dp''_+ \int d\mathbf{p}''_\perp \int_{-P'_+/2}^{P'_+/2} dp'''_+ \int d\mathbf{p}'''_\perp \\ &\times \Psi_{P,\alpha}^+(p''_+, \mathbf{p}''_\perp) \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}(P; p''_+, \mathbf{p}''_\perp; P'; p'''_+, \mathbf{p}'''_\perp) \Psi_{P',\beta}(p'''_+, \mathbf{p}'''_\perp), \end{aligned} \quad (3.15)$$

where

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) = \tilde{\Gamma}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) \Big|_{\substack{P^2=M_\alpha^2 \\ P'^2=M_\beta^2}}. \quad (3.16)$$

Comparing equations (3.13) and (3.15) we get the following expression for the matrix element of the local current J :

$$\begin{aligned} \langle P, \alpha | J(0) | P', \beta \rangle &= \int_{-P_+/2}^{P_+/2} dp_+ \int d\mathbf{p}_\perp \int_{-P'_+/2}^{P'_+/2} dp'_+ \int d\mathbf{p}'_\perp \times \\ &\times \Psi_{P,\alpha}^+(p_+, \mathbf{p}_\perp) \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) \Psi_{P',\beta}(p'_+, \mathbf{p}'_\perp). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Equations (3.15) and (3.17) give an exact expression for vertex operator of the composite system

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) &= \\ &= \lim_{\substack{P^2 \rightarrow M_\alpha^2 \\ P'^2 \rightarrow M_\beta^2}} \int_{-P_+/2}^{P_+/2} dp''_+ \int d\mathbf{p}''_\perp \int_{-P'_+/2}^{P'_+/2} dp'''_+ \int d\mathbf{p}'''_\perp \times \\ &\times \tilde{G}^{-1}(P; p_+, \mathbf{p}_\perp; p''_+, \mathbf{p}''_\perp) [\widetilde{G\Gamma G}](P; p''_+, \mathbf{p}''_\perp; P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp) \times \\ &\times \tilde{G}^{-1}(P'; p'_+, \mathbf{p}'_\perp; p'''_+, \mathbf{p}'''_\perp). \end{aligned} \quad (3.18)$$

in terms of 4- and 5-point Green functions G and Γ . Using the perturbation theory methods for these functions one can construct the coupling constant expansion for the vertex function of composite system.

3.2. Elastic Form Factor in the Impulse Approximation. To demonstrate this method we consider the so-called impulse approximation for the vertex operator $\tilde{\Gamma}$, which corresponds to the limit of «weakly bound» (noninteracting) particles (see Fig.2).

For the vertex operator corresponding to the conserved vector current we find

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \tilde{\Gamma}_{1\mu}^{(0)} + \tilde{\Gamma}_{2\mu}^{(0)}, \quad (3.19)$$

$$\tilde{\Gamma}_{i\mu} = [\tilde{G}^{(0)}]^{-1} [G^{(0)} \widetilde{\Gamma_{i\mu}^0} G^{(0)}] [\tilde{G}^{(0)}]^{-1}, \quad (3.20)$$



Fig. 2.

where

$$\tilde{\Gamma}_{i\mu}^{(0)} = (2\pi)^4 e_i (p_i + p'_i)_\mu \delta^{(4)}(p_j - p'_j) [G_j^{(0)}(p_j)]^{-1} |_{i \neq j}. \quad (3.21)$$

Here

$$G^{(0)}(p_1, p_2) = G_1^{(0)}(p_1) G_2^{(0)}(p_2) = i^2 \prod_{i=1}^2 (p_i^2 - m_i^2)^{-1}, \quad (3.22)$$

$$G^{(0)}(p'_1, p'_2) = G_1^{(0)}(p'_1) G_2^{(0)}(p'_2) = i^2 \prod_{i=1}^2 (p_i'^2 - m_i^2)^{-1} \quad (3.23)$$

are two-particle Green functions for free particles with masses m_i and charges e_i . Then for the invariant form factor of the composite system defined by the relation

$$\langle P, \alpha | J_\mu(0) | P', \beta \rangle = (P + P')_\mu F(\Delta^2); \quad \Delta = P - P' \quad (3.24)$$

in the reference frame, in which

$$P_+ = P'_+, \quad (P - P')^2 = \Delta^2 = -\Delta_\perp^2 = -(\mathbf{P}_\perp - \mathbf{P}'_\perp)^2 \quad (3.25)$$

we have

$$F(\Delta_\perp^2) = \frac{e_i (2\pi)^2}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int d\mathbf{p}_\perp \Phi_{\mathbf{P}_\perp=0}(x, \mathbf{p}_\perp + (1-x)\Delta_\perp) \\ \Phi_{\mathbf{P}_\perp=0}(x, \mathbf{p}_\perp) + \text{similar term with } e_2. \quad (3.26)$$

Note that construction of relativistic form factors of composite systems in other versions of relativistic description of bound states is considered, e.g., in Refs. 29–31.

3.3. Relativistic Form Factor for the Many-Body System. Let's construct now the form factor for the relativistic many-body system in terms of the many-body light-front wave functions $\Phi_P([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])$. Consider, as in the case of two constituents, the quantity R , which is defined by the vacuum expectation value of the chronologically ordered product of the Heisenberg field operators $\phi_i(x_\mu^{(i)})$ and the local current $J(x)$

$$R([x_\mu^{(i)}]; [x_\mu^{(i)'}]) = \\ = \langle 0 | T(\phi_1(x_\mu^{(1)}) \dots \phi_N(x_\mu^{(N)}) J(0) \phi_1^+(x_\mu^{(1)'}) \dots \phi_N^+(x_\mu^{(N)'})) | 0 \rangle = \quad (3.27)$$

$$= (2\pi)^{-4N} \int \prod_{i=1}^N d^4 p^{(i)} d^4 p^{(i)'} \exp \left[-i \sum_{i=1}^N (p^{(i)} x^{(i)} - p^{(i)'} x^{(i)'}) \right] R([p^{(i)}]; [p^{(i)'}]).$$

The quantity R can be presented in the form

$$R = G\Gamma G. \quad (3.28)$$

Multiplication in (3.28) has to be understood as an integration over the 4-coordinates of particles. G is the many-body Green function of the fields $\phi_i(x_\mu^{(i)})$ and the vertex function Γ is defined by the sum of the irreducible diagrams of the $(2N+1)$ -point function (3.27).

Proceeding now to the light-front description we introduce the quantity $\tilde{R}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])$ by the relation

$$\begin{aligned} & \tilde{R}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dp_-^{(i)} d^4 p_-^{(i)'} \delta \left(P_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)} \right) \delta \left(P'_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)'} \right) R([p^{(i)}]; [p^{(i)'}]) \end{aligned} \quad (3.29)$$

and write it in the form

$$\tilde{R} = \tilde{G}\tilde{\Gamma}\tilde{G}. \quad (3.30)$$

Multiplication in Eq. (3.30) has to be understood in the operator sense:

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{B} &= \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)''} \delta \left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)''} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)'} \delta^{(\alpha)} \left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)''} \right) \times \\ & \tilde{A}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \tilde{B}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (3.31)$$

From the spectral properties of the function $\tilde{G}$ it follows that $\tilde{R}$ possesses the double pole singularities

$$\begin{aligned} & \tilde{R}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \cong \\ & \cong [i(2\pi)^4]^2 \frac{\Psi_{P,\alpha}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \langle P, \alpha | J(0) | P', \beta \rangle \Psi_{P',\beta}^+([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])}{(P^2 - M_\alpha^2); (P'^2 - M_\beta^2)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

in the vicinity of the points, where N -particle system forms the bound states with masses M_α and M_β and sets of other quantum numbers α and β , respectively.

On the other hand, knowing the pole singularities of the Green function one can reduce the Eq. (3.32) to the form

$$\begin{aligned}
 & \tilde{R}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \cong \\
 & \cong [i(2\pi)^4]^2 \frac{\Psi_{P,\alpha}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \Psi_{P',\beta}^+([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])}{(P^2 - M_\alpha^2)(P'^2 - M_\beta^2)} \times \\
 & \times \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)''} \delta\left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)''}\right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)''} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)''}\right) \times \\
 & \times \int_0^{P'_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)'''} \delta\left(P'_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'''}\right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)'''} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}'_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'''}\right) \times \\
 & \times \Psi_{P,\alpha}^+([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}]) \Psi_{P',\beta}^+([p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}])).
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Comparing (3.32) with (3.33) we get the following expression for the matrix element of the bound state current:

$$\begin{aligned}
 & \langle P, \alpha | J(0) | P', \beta \rangle = \\
 & \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)} \delta\left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)}\right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right) \times \\
 & \int_0^{P'_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)'} \delta\left(P'_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'}\right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)'} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}'_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'}\right) \times \\
 & \times \Psi_{P,\alpha}^+([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \Psi_{P',\beta}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

The vertex operator $\Gamma_{\alpha\beta}$ can be constructed, using, for instance, perturbation theory methods of quantum field theory. Phenomenological vertex operators can also be used. Here we consider the so-called «impulse approximation». In this case we obtain:

$$\langle P, \alpha | J_\mu(0) | P', \beta \rangle = \sum_{k=1}^N \langle P, \alpha | J_\mu(0) | P', \beta \rangle_k \tag{3.35}$$

where, for instance

$$\begin{aligned}
 \langle P, \alpha | J_+(0) | P', \beta \rangle_k &= (P_+ + P'_+) F_k(-\Delta_\perp^2) = \\
 &= \frac{-(2\pi)^4 e_k (P_+ + P'_+)}{(2i)^{N+1} (2\pi i)^{N-1}} \int_0^1 \prod_{i=1}^N \frac{dx^{(i)}}{x^{(i)}} \times \\
 &\times \delta \left(1 - \sum_{i=1}^N x^{(i)} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)} \right) \times \\
 &\times \Phi_{\mathbf{P}_\perp=0, \alpha}^+([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)} - x^{(i)} \Delta_\perp]_{i \neq k}, x^{(k)}, \mathbf{p}_\perp^{(k)} + \\
 &+ (1 - x^{(k)}) \Delta_\perp) \Phi_{\mathbf{P}_\perp=0, \beta}([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Taking into account the normalization condition for the wave functions for $\Delta_\perp = 0$ we get:

$$F(\Delta^2 = 0) = \sum_{k=1}^N e_k. \tag{3.37}$$

Thus, the form factor at zero momentum transfer is normalized to the total charge of the system. Note, that problems of normalization of three-dimensional relativistic wave function have been considered in Ref. 32.

3.4. Scattering of Relativistic Composite Systems. Experimental study of high energy processes during the last decades revealed a number of scaling properties of observable quantities. Many of these properties can be understood on the basis of the composite quark parton structure of elementary particles. In particular, the asymptotic scaling property of differential cross section of hadron-hadron scattering

$$\left. \frac{do}{dt} \right|_{|t/s|=\text{const.}}^{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^N} f(\cos \theta_s), \tag{3.38}$$

where N is integer number, can be explained in the framework of dimensional analysis and the assumption on three-quark structure of baryons and quark anti-quark structure of mesons (quark counting rules) [33,34].

In connection with the development of composite models of elementary particles a problem of the description of their interactions becomes of special interest. Study of interactions of relativistic composite systems is important also in connection with current and future experiments with beams of relativistic nuclei. Here we outline a method for the treatment of problems of that kind [35]. Below we present a description of the scattering of two composite particles. It will be

shown that some simple assumption on the hadron interactions in the scattering process allows one to reproduce the results of quark counting rules.

Consider the eight-point Green function G :

$$\begin{aligned}
 G(x_1, x_2, x_3, x_4; x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) &= \\
 &= \langle 0 | T(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\phi_1^+(x'_1)\phi_2^+(x'_2)\phi_3^+(x'_3)\phi_4^+(x'_4)) | 0 \rangle = \\
 &= [(2\pi)^4]^{-8} \int \prod_{i=1}^4 d^4 p_i d^4 p'_i \exp \left[-i \sum_{i=1}^4 (p_i x_i - p'_i x'_i) \right] \times \\
 &\quad \times G(p_1, p_2, p_3, p_4; p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) = \\
 &= [(2\pi)^4]^{-8} \int d^4 P^{(12)} d^4 p^{(12)} d^4 P^{(34)} d^4 p^{(34)} d^4 P'^{(12)} d^4 p'^{(12)} d^4 P'^{(34)} d^4 p'^{(34)} \times \\
 &\quad \times \exp[-i(P^{(12)} X^{(12)} + P^{(34)} X^{(34)} + p^{(12)} x^{(12)} + p^{(34)} x^{(34)} - \\
 &\quad - P'^{(12)} X'^{(12)} + P'^{(34)} X'^{(34)} + p'^{(12)} x'^{(12)} + p'^{(34)} x'^{(34)})] \times \\
 &\quad \times G(P^{(12)}, p^{(12)}, P^{(34)}, p^{(34)}; P'^{(12)}, p'^{(12)}, P'^{(34)}, p'^{(34)}).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

In (3.39) the momenta $P^{(12)}, p^{(12)}, P^{(34)}, p^{(34)}; P'^{(12)}, p'^{(12)}, P'^{(34)}, p'^{(34)}$ are introduced according to the following equations

$$\begin{aligned}
 P^{(12)} &= p_1 + p_2, p^{(12)} = \frac{p_1 - p_2}{2}, P^{(34)} = p_3 + p_4, p^{(34)} = \frac{p_3 - p_4}{2}, \\
 P'^{(12)} &= p'_1 + p'_2, p'^{(12)} = \frac{p'_1 - p'_2}{2}, P'^{(34)} = p'_3 + p'_4, p'^{(34)} = \frac{p'_3 - p'_4}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Passing now to the «two-time» description, we introduce the light-front variables and define the quantity

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(P^{(12)}, p_+^{(12)}, \mathbf{p}_\perp^{(12)}; P^{(34)}, p_+^{(34)}, \mathbf{p}_\perp^{(34)}; P'^{(12)}, p_+'^{(12)}, \mathbf{p}_\perp'^{(12)}; P'^{(34)}, p_+'^{(34)}, \mathbf{p}_\perp'^{(34)}) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_-^{(12)} dp_-^{(34)} dp_-'^{(12)} dp_-'^{(34)} \times \\
 &\quad \times G(P^{(12)}, p^{(12)}, P^{(34)}, p^{(34)}; P'^{(12)}, p'^{(12)}, P'^{(34)}, p'^{(34)}).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Introduce now the quantity M by the relation:

$$\begin{aligned}
 G(P^{(12)}, p^{(12)}, P^{(34)}, p^{(34)}; P'^{(12)}, p'^{(12)}, P'^{(34)}, p'^{(34)}) = \\
 = \int d^4 p^{(12)''} d^4 p^{(34)''} d^4 p^{(12)'''} d^4 p^{(34)'''} \times \\
 \times G_{12}(P^{(12)}, p^{(12)}, p^{(12)'}) G_{34}(P^{(34)}, p^{(34)}, p^{(34)'}) \times \\
 \times M(P^{(12)}, p^{(12)''}; P^{(34)}, p^{(34)''}; P'^{(12)}, P^{(12)'''}; P^{(34)}, P^{(34)'''}) \times \\
 \times G_{12}(P'^{(12)}, p^{(12)'''}, p^{(12)'}) G_{34}(P'^{(34)}, p^{(34)'''}, p^{(34)'}) \equiv (G_{12} G_{34}) M (G_{12} G_{34}).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

The quantity $\tilde{G}$ can be presented in the form (here and in what follows we omit the arguments which are related to the relative momenta and this will not cause any misunderstanding):

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(P^{(12)}, P^{(34)}, P'^{(12)}, P'^{(34)}) = \\
 = \tilde{G}_{12}(P^{(12)}) \tilde{G}_{34}(P^{(34)}) \tilde{M}(P^{(12)}, P^{(34)}, P'^{(12)}, P'^{(34)}) \tilde{G}_{12}(P'^{(12)}) \tilde{G}_{34}(P'^{(34)}).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

The multiplication in the (3.43) has to be understood in the following sense

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} \tilde{B} = \int_{-P_+^{(12)}/2}^{P_+^{(12)}/2} dp_+^{(12)} \int_{-P_+^{(34)}/2}^{P_+^{(34)}/2} dp_+^{(34)} \int d\mathbf{p}_\perp^{(12)} \int d\mathbf{p}_\perp^{(34)} \times \\
 \times \tilde{A}(\dots, p_+^{(12)}, \mathbf{p}_\perp^{(12)}; p_+^{(34)}, \mathbf{p}_\perp^{(34)}) \tilde{B}(p_+^{(12)}, \mathbf{p}_\perp^{(12)}; p_+^{(34)}, \mathbf{p}_\perp^{(34)}, \dots)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

and dots correspond to the set of other arguments the operators $\tilde{A}$ and $\tilde{B}$ can depend on.

Knowing the pole singularities of the two-particle Green functions $\tilde{G}_{12}$, $\tilde{G}_{34}$ one can show that in the vicinity of these poles the function $\tilde{G}$ looks as follows:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(P^{(12)}, P^{(34)}, P'^{(12)}, P'^{(34)}) \cong \\
 \cong [i(2\pi)^4]^4 \frac{\Psi_{12}(P^{(12)}) \Psi_{34}(P^{(34)}) \Psi_{12}^+(P'^{(12)}) \Psi_{34}^+(P'^{(34)})}{(P^{(12)2} - M_{12}^2)(P^{(34)2} - M_{34}^2)(P'^{(12)2} - M_{12}^2)(P'^{(34)2} - M_{34}^2)} \times
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\times \Psi_{12}^+(P^{(12)}) \Psi_{34}^+(P^{(34)}) \tilde{M}(P^{(12)}, P^{(34)}, P'^{(12)}, P'^{(34)}) \Psi_{12}(P'^{(12)}) \Psi_{34}^+(P'^{(34)}).$$

Here

$$\tilde{M}_{1234} = \lim_{\substack{P^{(12)2} \rightarrow M_{12}^2, P^{(34)2} \rightarrow M_{34}^2 \\ P'^{(12)2} \rightarrow M_{12}^2, P'^{(34)2} \rightarrow M_{34}^2}} \tilde{G}_{12}^{-1}(P^{(12)}) \tilde{G}_{34}^{-1}(P^{(34)}).$$

$$\cdot G_{12} G_{34} \widetilde{M} G_{12} G_{34}(P^{(12)}, P^{(34)}, P'^{(12)}, P'^{(34)}) \cdot \tilde{G}_{12}^{-1}(P'^{(12)}) \tilde{G}_{34}^{-1}(P'^{(34)}), \quad (3.46)$$

$M_{12}^2, M_{34}^2, M'^2_{12}, M'^2_{34}$ are the masses of corresponding states.

From the equations (3.43) and (3.45) we get the following expression for the scattering amplitude

$$\begin{aligned} T(P^{(12)}, P^{(34)}, P'^{(12)}, P'^{(34)}) &= \Psi_{12}^+(P^{(12)}) \Psi_{34}^+(P^{(34)}) \times \\ &\times \tilde{M}(P^{(12)}, P^{(12)}, P'^{(12)}, P'^{(12)}) \Psi_{12}(P'^{(12)}) \Psi_{34}^+(P'^{(34)}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Eq. (3.47) gives a general expression for the scattering amplitude in the case of scattering of composite particles. The detailed form of the scattering amplitude depends on the interaction mechanism in the intermediate state and on a specific form of the wave functions of the scattered objects.

3.5. Constituent Interchange Mechanism. Considering the constituent interchange mechanism (Fig.3) one gets the following expression for the scattering amplitude

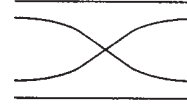


Fig. 3.

$$\begin{aligned} T &= \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{dx}{x^2(1-x)^2} \int d\mathbf{p}_\perp \Phi_{\mathbf{p}_\perp=0}^{+(12)}(x, \mathbf{p}_\perp - x\mathbf{\Delta}_\perp^{(u)} + \\ &\quad + (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp^{(t)}) \Phi_{\mathbf{p}_\perp=0}^{+(34)}(x, \mathbf{p}_\perp) \times \\ &\quad \times [M_{12}^2 + M_{34}^2 - S(x, \mathbf{p}_\perp + x\mathbf{\Delta}_\perp^{(t)} - (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp^{(u)}) - S(x, \mathbf{p}_\perp)] \times \\ &\quad \times \Phi_{\mathbf{p}_\perp=0}^{(12)}(x, \mathbf{p}_\perp - x\mathbf{\Delta}_\perp^{(u)}) \Phi_{\mathbf{p}_\perp=0}^{(34)}(x, \mathbf{p}_\perp + (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp^{(t)}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

where $\mathbf{\Delta}_\perp^{(t)} = -t$, $\mathbf{\Delta}_\perp^{(u)} = -u$.

Here the notation has been introduced

$$S(x, \mathbf{p}_\perp) = \frac{m_1^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{1-x} + \frac{m_2^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{x} \quad (3.49)$$

and the following properties of wave functions

$$\Phi(x, \mathbf{p}_\perp) = \Phi(x, -\mathbf{p}_\perp), \Phi(x, \mathbf{p}_\perp) = \Phi(1-x, \mathbf{p}_\perp) \quad (3.50)$$

have been used.

Let us choose now the wave function of the composite particles in the form

$$\Phi_N(x, \mathbf{p}_\perp) = \frac{\phi_N(x)}{[S(x, \mathbf{p}_\perp)]^N}, N = A, B, C, D \quad (3.51)$$

A, B and C, D denote the hadrons before and after the scattering and corresponding powers, respectively.

Inserting the wave functions (3.51) into the Eq. (3.48) for the scattering amplitude one gets in the asymptotic region

$$T \underset{|t| \rightarrow \infty}{\underset{s \rightarrow \infty}{\sim}} \frac{1}{s^{A+C+D-1}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{-C} \left(\frac{1-z}{2} \right)^{-D} f(z), \quad (3.52)$$

where

$$\begin{aligned} f(z) = & \int_0^1 \frac{dx \phi_A^+(x) \tilde{\phi}_B^+(x) \phi_C(x) \phi_D(x)}{[(1-x)^2 \frac{1-z}{2} + x^2 \frac{1+z}{2}]^A} \left[(1-x)^2 \frac{1+z}{2} + x^2 \frac{1-z}{2} \right] \times \\ & \times [x(1-x)]^{A+B+C+D-3} x^{-2C} (1-x)^{-2D}, \quad (3.53) \\ \tilde{\phi}_B^+(x) = & \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_\perp \Phi_B^+(x, \mathbf{p}_\perp) [x(1-x)]^{-B} \end{aligned}$$

$z = \cos \vartheta s$, where ϑs is the scattering angle in the c.m.s.

$$-t \cong \frac{s}{2}(1-z), \quad -u \cong \frac{s}{2}(1+z).$$

Eq.(3.53) is in close connection with the results of quark counting rules [33,34,36].

4. DEEP INELASTIC FORM FACTORS OF COMPOSITE SYSTEMS

The great interest to deep inelastic interaction processes is caused by the possibility of studying the internal structure of hadrons and nuclei experimentally and checking different theoretical models based on the assumptions about composite nature of strongly interacting particles. The main part of experimentally observed properties of these processes (in particular, the scale properties of structure functions) have been explained in the framework of composite quark-parton

models of hadrons, in which hadron is considered as a bound state of some parallelly moving pointlike constituents. Interaction between constituents and their transverse motion inside hadron is neglected [37,38].

More precise measurements in wider range of kinematic variables have led to the observation of deviations from exact scale invariance in the behaviour of structure functions [39–41]. Attempts were made to explain these deviations on the kinematical (search for new scale-invariant variables [42]) and dynamical (taking into account chromodynamical corrections [43]) basis. Quark-parton picture of the deep inelastic scattering in the quasi-potential approach can be found in Ref. 44.

Here we incorporate the transverse motion of constituents in the composite system, which leads to the violation of Bjorken scaling of structure functions.

4.1. Construction of the Tensor $W_{\mu\nu}$. Consider the quantity $R_{\mu\nu}$, which is defined by the vacuum expectation value of the chronologically ordered product of the Heisenberg field operators $\phi_i(x_\mu^{(i)})$ and local currents J_μ and J_ν :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}([x_\mu^{(i)}]; [x_\mu^{(i)'}]; z) &= \\ &= \langle 0 | T(\phi_1(x_\mu^{(1)}) \dots \phi_N(x_\mu^{(N)}) J_\mu(z) J_\nu(0) \phi_1^+(x_\mu^{(1)'}) \dots \phi_N^+(x_\mu^{(N)'})) | 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3N} \int \prod_{i=1}^N d^4 p^{(i)} d^4 p^{(i)'} \exp \left[-i \sum_{i=1}^N (p^{(i)} x^{(i)} - p^{(i)'} x^{(i)'}) \right] \times \quad (4.1) \\ &\quad \times R_{\mu\nu}([p_\mu^{(i)}]; [p_\mu^{(i)'}]; z). \end{aligned}$$

Here $[x_\mu^{(i)}], [x_\mu^{(i)'}], [p_\mu^{(i)}], [p_\mu^{(i)'}]$ are the sets of corresponding 4-vectors. The quantity $R_{\mu\nu}$ can be presented as (see Fig.4)

$$R_{\mu\nu} = G \Gamma_{\mu\nu} G,$$

where G is the N -particle Green function of fields $\phi_i(x_\mu^{(i)})$ and «two-photon» vertex function $\Gamma_{\mu\nu}$ is defined by the sum of the irreducible diagrams with $2N+2$ points (legs).

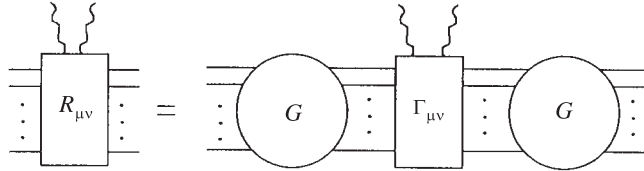


Fig. 4.

Introduce now the three-dimensional quantity $\tilde{R}_{\mu\nu}$ equating all $x_+^{(i)} = x_+$ and $x_+^{(i)'} = x'_+$ in (4.1)

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\mu\nu}(x_+, [x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}]; x'_+, [x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}]; z) = \\ & = \langle 0 | T(\phi_1(x_+, x_-^{(i)}, \mathbf{x}_\perp^{(i)}) \dots \phi_N(x_+, x_-^{(N)}, \mathbf{x}_\perp^{(N)}) J_\mu(z) J_\nu(0) \times \\ & \quad \times \phi_1^+(x'_+, x_-^{(i)'}, \mathbf{x}_\perp^{(i)'}) \dots \phi_N^+(x'_+, x_-^{(N)'}, \mathbf{x}_\perp^{(N)'}) | 0 \rangle = \quad (4.2) \\ & = (2\pi)^{-3N} \int \prod_{i=1}^N (dp_+^{(i)}, d\mathbf{p}_\perp^{(i)}) (dp_+^{(i)'}, d\mathbf{p}_\perp^{(i)'}) \tilde{R}_{\mu\nu}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; z) \times \\ & \times \exp \left[-i(x_+ P_- - x'_+ P'_-) - i \sum_{i=1}^N (p_+^{(i)} x_-^{(i)} - p_+^{(i)} x_-^{(i)}) + i \sum_{i=1}^N (p_+^{(i)'} x_-^{(i)'} - \mathbf{p}_\perp^{(i)'} \mathbf{x}_\perp^{(i)'}) \right]. \end{aligned}$$

Fourier transforms of $R_{\mu\nu}$ and $\tilde{R}_{\mu\nu}$ are related to each other in the following way:

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\mu\nu}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dp_-^{(i)} dp_-^{(i)'} \delta \times \\ & \times \left(P_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)} \right) \delta \left(P'_- - \sum_{i=1}^N p_-^{(i)'} \right) R_{\mu\nu}([p^{(i)}]; [p^{(i)'}]; z). \quad (4.3) \end{aligned}$$

Single out now the contribution of N -particle bound states in the matrix element (4.3) expressing the T -product via θ -functions and using the completeness of physical states:

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\mu\nu}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; z) \cong \\ & \cong [i(2\pi)^4]^2 \frac{\Psi_P([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \langle P, \alpha | T(J_\mu(z) J_\nu(0)) | P', \beta \rangle \Psi_{P'}^+([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])}{(P^2 - M_\alpha^2)(P'^2 - M_\beta^2)}. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Finally, we get the following expression for the matrix element of T -product of currents:

$$\begin{aligned} & \langle P, \alpha | T(J_\mu(z) J_\nu(0)) | P', \beta \rangle = \\ & = \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)''} \delta \left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)''} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)''} \delta^{(2)} \left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)''} \right) \times \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{p'_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)'''} \delta \left(P'_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'''} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)'''} \delta^{(2)} \left(\mathbf{P}'_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'''} \right) \times \\
&\quad \times \Psi_P^+([p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}]) \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}([p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}]; [p_+^{(i)'''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'''}]; z) \Psi_{P'}([p_+^{(i)'''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'''}]).
\end{aligned}$$

Fourier transform of this matrix element defined the amplitude of virtual Compton scattering of photon with space-like 4-momentum q_μ on the hadron with 4-momentum P_μ :

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(P, q) &= i \int d^4z e^{iqz} \langle P, \alpha | T(J_\mu(z) J_\nu(0)) | P, \alpha \rangle = \\
&= \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)''} \left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)''} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)''} \delta^{(2)} \left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)''} \right) \times \quad (4.6) \\
&= \int_0^{P'_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)'''} \delta \left(P'_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'''} \right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)'''} \delta^{(2)} \left(\mathbf{P}'_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'''} \right) \times \\
&\quad \times \Psi_P^+([p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}]) \int d^4z e^{iqz} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}([p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}]; [p_+^{(i)'''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'''}]; z) \times \\
&\quad \times \Psi_{P'}([p_+^{(i)'''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'''}]).
\end{aligned}$$

According to optical theorem the tensor $W_{\mu\nu}$, which defines the hadronic part of deep inelastic lepton-hadron scattering cross section is related to the imaginary part of the amplitude of the zero angle virtual Compton scattering in the following way:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \sum_\alpha \int d^4z e^{iqz} \langle P, \alpha | T(J_\mu(z) J_\nu(0)) | P, \alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \text{Im} T_{\mu\nu}(P, q). \quad (4.7)$$

Taking into account the current conservation, the tensor $W_{\mu\nu}$ can be expressed via two invariant structure functions W_1 , and W_2 :

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(P, q) &= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(q^2, \nu) + \\
&+ \frac{1}{M^2} \left(P_\mu - \frac{Pq}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{Pq}{q^2} q_\nu \right) W_2(q^2, \nu),
\end{aligned}$$

where $M\nu = Pq$, M is the hadron mass.

Thus, using Eqs. (4.6)–(4.8) one can express the structure functions of deep inelastic lepton-hadron scattering in terms of the light-front many-body wave functions, describing the internal motion of partons inside hadron, and the «two-photon» vertex function:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; q) &= \int d^4z e^{iqz} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; z) = \\
 &= \int d^4z e^{iqz} \int_0^{P_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)''} \delta\left(P_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)''}\right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)''} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)''}\right) \times \\
 &\quad \times \int_0^{P'_+} \prod_{i=1}^N dp_+^{(i)'''} \delta\left(P'_+ - \sum_{i=1}^N p_+^{(i)'''}\right) \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)'''} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}'_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)'''}\right) \times \\
 &\quad \times \tilde{G}^{-1}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \\
 &\quad \times [G\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}G]([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \times \\
 &\quad \times \tilde{G}^{-1}(P'; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}])
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2. Lowest Order in the Electromagnetic Interaction. The «two-photon» vertex operator $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$ can be constructed using methods of perturbation theory and expanding the functions $\tilde{G}^{-1}$ and $\tilde{R}_{\mu\nu} = G\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}G$ in the series in coupling constant. In the lowest order two types of diagrams, shown in Fig.5 contribute to $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(0)}$.

Assuming that the partons constituting hadron are on mass shell and neglecting small terms of the order of $P_- - \sum_{j=1}^N (\mathbf{p}_\perp^{(j)2} + m^{(j)2})/p_+^{(j)}$, we ob-

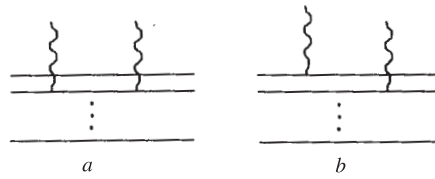


Fig. 5.

tain that diagrams of type b) do not contribute to $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{(0)}$. Summing the contribution of all diagrams of type a), inserting into the expression (4.6) for virtual Compton

scattering amplitude and extracting the imaginary part we obtain for the structure functions W_1 and W_2 :

$$W_1(q^2, \nu) = \frac{1}{8(4\pi)^{N-1}} \int_0^1 \prod_{i=1}^N \frac{dx^{(i)}}{x^{(i)}} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^N x^{(i)}\right) \times \\ \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right) |\Phi_P([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])|^2 \times \\ \times \sum_{i=1}^N \frac{e_i^2}{x^{(i)}} \left[\frac{(M\nu + 2\bar{p}^{(i)}P)^2}{M^2(1 - \nu^2/q^2)} - (4m^{(i)2} - q^2) \right] \delta(q^2 + 2\bar{p}^{(i)}q), \quad (4.9a)$$

$$\nu W_2(q^2, \nu) = \frac{1}{8(4\pi)^{N-1}} \frac{\nu}{(1 - \nu^2/q^2)} \int_0^1 \prod_{i=1}^N \frac{dx^{(i)}}{x^{(i)}} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^N x^{(i)}\right) \times \\ \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta^{(2)}\left(\mathbf{P}_\perp - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right) |\Phi_P([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])|^2 \times \\ \times \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{e_i^2}{x^{(i)}} \left[\frac{3(M\nu + 2\bar{p}^{(i)}P)^2}{M^2(1 - \nu^2/q^2)} - (4m^{(i)2} - q^2) \right] \delta(q^2 + 2\bar{p}^{(i)}q) \right\}. \quad (4.9b)$$

Here $\bar{p}^{(i)}$ is the momentum of parton on the mass shell $\bar{p}^{(i)} = \left(\frac{\mathbf{p}_\perp^{(i)2} + m^{(i)2}}{p_+^{(i)}}, p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp \right)$.

For further consideration we proceed to the frame, where the virtual photon and hadron are moving along the z axis:

$$P = (P_-, P_+, \mathbf{0}_\perp), \quad q = (q_-, q_+, \mathbf{0}_\perp).$$

In this frame

$$2\bar{p}^{(i)}P = x^{(i)}M^2 + \frac{\mathbf{p}_\perp^{(i)2} + m^{(i)2}}{x^{(i)}}$$

and δ -function in (4.9) can be rewritten in the form:

$$\delta(q^2 + 2\bar{p}^{(i)}q) = \frac{1}{\xi} \delta \left[\frac{\mathbf{p}_\perp^{(i)2} + m^{(i)2}}{x^{(i)}} + \frac{Q^2(\xi - x^{(i)})}{\xi^2} \right]. \quad (4.10)$$

Here we have introduced the variables $Q^2 = -q^2$ and

$$\xi = -\frac{q_+}{P_+} = \frac{Q^2}{M(\nu + \sqrt{\nu^2 + Q^2})}. \quad (4.11)$$

Scaling properties of structure functions with respect of variable ξ are discussed in several papers [50–53]. The Nachtmann variable ξ is the generalization of the usual Bjorken variable x_B taking into account the hadron mass and is related to x_B by following relation:

$$\xi = -\frac{2x_B}{1 + \sqrt{1 + \frac{4Mx_B}{Q^2}}}. \quad (4.12)$$

If one neglects the masses and transverse momenta of partons ($m^{(i)2} \ll Q^2, \mathbf{p}_\perp^{(i)2} \ll Q^2$), the δ -function takes the form

$$\delta(2\bar{p}^{(i)}q - Q^2) = \frac{\xi}{Q^2} \delta(x^{(i)} - \xi).$$

Then the structure function W_1 vanishes and for the structure function νW_2 we obtain

$$\begin{aligned} \nu W_2(Q^2, \xi) &= \frac{MQ^2}{2(4\pi)^{N-1}\xi} \frac{(Q^2/\xi^2 - M^2)}{(Q^2/\xi^2 + M^2)^2} \times \\ &\int_0^1 \prod_{i=1}^N \frac{dx^{(i)}}{x^{(i)}} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^N x^{(i)}\right) \times \\ &\int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta^{(2)}\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right) |\Phi_P([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])|^2 \sum_{i=1}^N e_i^2 \delta(x^{(i)} - \xi). \end{aligned} \quad (4.13)$$

In the asymptotic limit ($\nu, Q^2 \gg M^2$, x_B is fixed) the variable ξ coincides with the Bjorken variable x_B and we obtain that the structure function νW_2 , is scale invariant with respect to the variable x_B :

$$\begin{aligned} \nu W_2(x_B) &= \frac{Mx_B}{2(4\pi)^{N-1}} \int_0^1 \prod_{i=1}^N \frac{dx^{(i)}}{x^{(i)}} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^N x^{(i)}\right) \times \\ &\int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta^{(2)}\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)}\right) |\Phi_P([x^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])|^2 \sum_{i=1}^N e_i^2 \delta(x^{(i)} - x_B). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assuming that the interaction kernel does not depend on the total energy and using the explicit expression for the Green function of N free particles we obtain the following sum rule:

$$\int_0^1 \frac{\nu W_2(x_B)}{Mx_B} dx_B = \sum_{i=1}^N e_i^2. \quad (4.15)$$

4.3. Model Parametrisation of the Wave Function. Consider now the case, when the hadron consists of two constituents. This case corresponds to meson, which consists of quark and antiquark. We will neglect contributions of gluons and quark-antiquark sea. Expressions for structure functions in the case $N = 2$ have the form:

$$\begin{aligned}
 W_1(Q^2, \xi) &= \frac{e_1^2 + e_2^2}{8\pi\xi} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int d\mathbf{p}_{\perp} |\Phi_P(x, \mathbf{p}_{\perp})|^2 \times \\
 &\times \left[\frac{Q^2 x(x-\xi)}{\xi^2} - m^2 \right] \delta \left[\mathbf{p}_{\perp}^2 + m^2 - \frac{Q^2 x(x-\xi)}{\xi^2} \right], \\
 \nu W_2(Q^2, \xi) &= \frac{e_1^2 + e_2^2}{8\pi\xi} M Q^2 \frac{Q^2/\xi^2 - M^2}{(Q^2/\xi^2 + M^2)^2} \int_a^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int d\mathbf{p}_{\perp} |\Phi_P(x, \mathbf{p}_{\perp})|^2 \times \\
 &\times \left[\frac{6Q^2 x(x-\xi)}{\xi^2} + Q^2 - 2m^2 \right] \delta \left(\mathbf{p}_{\perp}^2 + m^2 - \frac{Q^2 x(x-\xi)}{\xi^2} \right). \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Here we assume that masses of constituents are equal to each other $m^{(1)} = m^{(2)} = m$.

In (4.16) the limit of integration over x is defined from the δ -function:

$$a = \frac{\xi}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right). \quad (4.17)$$

Neglecting masses and transverse momenta of quarks we obtain that the structure function W_1 , vanishes and the structure function νW_2 takes the following form:

$$\nu W_2(Q^2, \xi) = \frac{(e_1^2 + e_2^2) M Q^2}{8\pi\xi^2(1-\xi)} \frac{Q^2/\xi^2 - M^2}{(Q^2/\xi^2 + M^2)^2} \int d\mathbf{p}_{\perp} |\Phi_P(\xi, \mathbf{p}_{\perp})|^2. \quad (4.18)$$

If we choose the following parametrization for wave function Φ_P

$$\Phi_P(x, \mathbf{p}_{\perp}) = C \left[\frac{\mathbf{p}_{\perp}^2 + m^2}{x(1-x)} - \alpha \right]^{-n} \quad (4.19)$$

for the structure function νW_2 we get

$$\nu W_2(Q^2, \xi) = \frac{(e_1^2 + e_2^2) M Q^2}{8} \frac{Q^2/\xi^2 - M^2}{(Q^2/\xi^2 + M^2)^2} \frac{|C|^2 \xi^{2n-1} (1-\xi)^{2n-1}}{(2n-1)[m^2 - \alpha\xi(1-\xi)]^{2n-1}}. \quad (4.20)$$

In the Bjorken limit ($Q^2 \gg m^2$, $\xi \rightarrow x_B$) for $n = 1$ we obtain [45]:

$$\nu W_2(x_B) = \frac{e_1^2 + e_2^2}{8} M |C|^2 \frac{x_B(1 - x_B)}{m^2 - \alpha x_B(1 - x_B)}. \quad (4.21)$$

5. INCLUSIVE PROCESSES IN LIGHT-FRONT FORMALISM

Inclusive processes which have been proposed by Logunov and collaborators [46] are in effective tool to study the hadron structure at high energy. Consequences of a number of theoretical models have been formulated in this way. Majority of experiments in the relativistic nuclear physics (in particular, experiments on the cumulative production predicted by Baldin [47]) are also inclusive.

In this section expressions for inclusive cross sections in terms of the light-front quasi-potential wave functions are given [48].

5.1. Some Preliminary Relations. Let us construct the scattering amplitudes of the multiparticle production processes. «Two-time» N -particle Green function obeys the following equation:

$$\tilde{G}^{(N)} = \tilde{G}_0^{(N)} + \tilde{G}_0^{(N)} V^{(N)} \tilde{G}^{(N)}. \quad (5.1)$$

Here $V^{(N)}$ is the interaction kernel for N particles which can be constructed by the perturbation expansion.

If the total Hamiltonian processes one particles states with quantum numbers of $(N - k)$ and k particles of the initial state and $k_1, \dots, k_M$ particles of the final state the Green function possesses the poles with respect to the variables $P_A^2 = \left(\sum_{i=1}^k p^{(i)} \right)^2$, $P_B^2 = \left(\sum_{i=k+1}^N p^{(i)} \right)^2$, $P_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{k_1} p^{(i)'} \right)^2, \dots, P_M^2 = \left(\sum_{i=N-k_1-k_2-\dots-k_{M-1}}^N p^{(i)} \right)^2$. In the vicinity of these poles it is of the form:

$$\begin{aligned} G(P; [p^{(i)}]; [p^{(i)'}]) &\approx \\ &\approx \frac{\chi_1(p^{(i)'}, \dots, p^{(k_1)'}) \dots \chi_M(p^{(N-k_1-\dots-k_M)'}, \dots, p^{(N)'})}{\prod_{i=1}^M (P_i^2 - M_i^2 + i\epsilon)} \times \\ &\times \frac{T(P_1, \dots, P_M; P_A, P_B) \bar{\chi}_A(p^{(1)}, \dots, p^{(k)}) \bar{\chi}_B(p^{(k+1)}, \dots, p^{(N)})}{(P_A^2 - M_A^2 + i\epsilon)(P_B^2 - M_B^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

T is the scattering amplitude corresponding to the process: $A+B \rightarrow 1+2+\dots+M$.

The «two-time» Green function has the following pole structure in the vicinity of corresponding poles:

$$G^{(N)}(P; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \cong [2(2\pi)^3]^{N-M-1} \times$$

$$\times \left[\frac{\Psi_1([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) \dots \bar{\Psi}_M([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) T \bar{\Psi}_A([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_B([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])}{x^{(i)'} \dots x^{(M)'} \left(P^2 - \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{p}_\perp^{(i)2} + M^{(i)2}}{x^{(i)}} \right) x^{(A)} \dots x^{(B)} \left(P^2 - \sum_{i=A,B}^M \frac{\mathbf{p}_\perp^{(i)2} + M^{(i)2}}{x^{(i)}} \right)} \right]. \quad (5.3)$$

Define transition operators $M_{\alpha\beta}^{(N)}$:

$$G^{(N)} = G_\alpha^{(N)} M_{\alpha,AB}^{(N)} G_{AB}^{(N)} + R,$$

where $G_\alpha^{(N)}$ is the Green functions which take into account interactions only inside the subsystems. α denotes the final states.

5.2. Production of Leading Hadrons with Large Transverse Momenta.

Taking into account expression for Green functions one obtains the expression for the transition amplitude of the inclusive process $A+B \rightarrow C+X$ with the leading hadron C (assume that hadron C coincides with hadron A , or it is its excited state)

$$T(AB \rightarrow C) = [2(2\pi)^{N-M-1}] \times$$

$$\times \int \prod_{i=1}^C dx^{(i)'} d\mathbf{p}_\perp^{(i)'} C_+ \delta \left(C_+ - \sum_{i=1}^C p_+^{(i)'} \right) \delta^{(2)} \left(\mathbf{C}_\perp - \sum_{i=1}^C \mathbf{p}_\perp^{(i)'} \right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{A+B} dx^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} A_+ \delta \left(A_+ - \sum_{i=1}^A p_+^{(i)} \right) \delta^{(2)} \left(\mathbf{A}_\perp - \sum_{i=1}^A \mathbf{p}_\perp^{(i)} \right) \times$$

$$B_+ \delta \left(B_+ - \sum_{i=1}^B p_+^{(i)} \right) \delta^{(2)} \left(\mathbf{B}_\perp - \sum_{i=1}^B \mathbf{p}_\perp^{(i)} \right) \times \quad (5.4)$$

$$\times \bar{\Psi}_C([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]) M_{ABC}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [q_+^{(i)'}, \mathbf{q}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \times$$

$$\times \bar{\Psi}_A([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \bar{\Psi}_B([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]).$$

Here by A, B, C we denote hadrons A, B, C and the same time the number of elementary constituents inside them and their 4-momenta;

$$x^{(i)'} = \frac{p_+^{(i)'}}{C_+}; \quad x^{(i)} = \frac{p_+^{(i)}}{A_+}; \quad x^{(i)} = \frac{p_+^{(i)}}{B_+}$$

$q_+^{(i)}, \mathbf{q}_\perp^{(i)}$ are components of 4-momenta of the constituents of undetected hadrons.

Let us assume that the states A and C occur in the same subsystem of M constituents and use pairwise approximation for the transition operator M_{ABC} . This is presented schematically in the Fig.6.

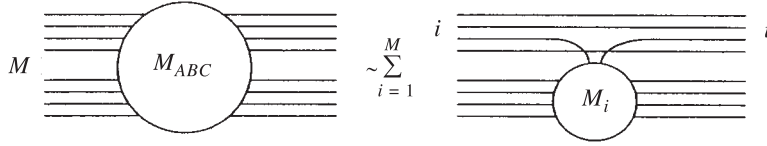


Fig. 6.

M_{iB} is the transition operator corresponding to the collision of the i -th constituent of hadron A with hadron B .

In this approximation the transition amplitude (5.4) takes the form:

$$\begin{aligned} T(AB \rightarrow C) &= [2(2\pi)^{N-M-1}] \times \\ &\times \sum_{i=1}^C \int \prod_{i=1}^C dx^{(i)} x^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta \left(1 - \sum_{i=1}^C x^{(i)} \right) \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^C \mathbf{p}_\perp^{(i)} \right) \times \\ &\times \bar{\Psi}_C(x^{(1)}, \mathbf{p}_\perp^{(1)} - x^{(1)} \Delta_\perp; \dots; x^{(i)}, (1 - x^{(i)}) \Delta_\perp; \dots; x^{(c)}, \mathbf{p}_\perp^{(c)} - x^{(c)} \Delta_\perp) \times \\ &\times \bar{\Psi}_A([x^{(1)}, \mathbf{p}_\perp^{(1)}]) T_{iB}(B; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [p_+^{(i)''}, \mathbf{p}_\perp^{(i)''}]), \end{aligned} \quad (5.5)$$

where: $x^{(i)} = p_+^{(i)}/A_+$,

$$p_+^{(i)'} = p_+^{(i)} + x^{(i)}/A_+; \quad \mathbf{p}_\perp^{(i)'} = \mathbf{p}_\perp^{(i)} + x^{(i)} \mathbf{A}_\perp; \quad \Delta = C - A$$

$$p_+^{(i)''} = p_+^{(i)} + x^{(i)}/C_+; \quad \mathbf{p}_\perp^{(i)''} = \mathbf{p}_\perp^{(i)} + x^{(i)} \mathbf{A}_\perp; \quad (5.6)$$

T_{iB} is the inelastic amplitude of the scattering of i -th constituent of hadron A with hadron B .

For the following we recall the calculations of the electromagnetic form factors of composite systems. Rewrite the expression for the electromagnetic form factor in the impulse approximation in the form:

$$eF(t) = \sum_{n,i} e_i \int dx S_i^{(n)}(x, (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp), \quad t = (P - P')^2 = -\mathbf{\Delta}_\perp^2,$$

where the quantity $S_i^{(n)}$ is defined as:

$$\begin{aligned} S_i^{(n)}(x, (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp) &= [2(2\pi)^3]^{n-1} x \int_0^1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n dx^{(k)} x^{(k)} \delta \left(1 - x - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x^{(k)} \right) \times \\ &\times \int \prod_{k=1}^n d\mathbf{p}_\perp^{(k)} \delta \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_\perp^{(k)} \right) \bar{\Psi}^{(n)}([x^{(k)}, \mathbf{p}_\perp^{(k)} - x^{(k)} \mathbf{\Delta}_\perp]_{k \neq i}, x, \mathbf{p}_\perp^{(i)} + (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp) \times \\ &\times \bar{\Psi}^{(n)}([x^{(k)}, \mathbf{p}_\perp^{(k)}]). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Taking into account the normalization condition for wave functions one can obtain the following normalization condition for $S_i^{(n)}$:

$$\sum_i \int_0^1 S_i^{(n)}(x, \mathbf{0}_\perp) dx = 1. \quad (5.8)$$

In the case when the interaction of the i -th constituent of hadron A with hadron B is effectively local [49] the transition amplitude $T(AB \rightarrow C)$ in the Eq. (5.5) takes the form:

$$T(AB \rightarrow C) = \sum_i f_i(\mathbf{\Delta}_\perp) T_{iB}, \quad (5.9)$$

where

$$f_i^{(\ell)}(\mathbf{\Delta}_\perp) = \int_0^1 \frac{dx}{x} S_i^{(\ell)}(x, (1-x)\mathbf{\Delta}_\perp) \phi(x).$$

The function $\phi(x)$ characterizes the local interaction vertex and in the case of the exchange of vectors particles (gluons), for instance, $\phi(x) = x$. In this case Eq. (5.9) takes the form:

$$T(AB \rightarrow C) = \sum_i F_i(\mathbf{\Delta}_\perp) T_{iB}, \quad (5.10)$$

where $\sum_i F_i(\Delta_\perp) = F_A(\Delta_\perp)$ is the form factor of particle A , T_{iB} is the transition amplitude.

For the inclusive cross section one obtains:

$$E \frac{d\sigma(AB \rightarrow A)}{d\mathbf{p}} = \sum_i F_A^2(t) E \frac{d\sigma^{iB \rightarrow i+x}}{d\mathbf{p}}(s', t', u'). \quad (5.11)$$

Here s' , t' , u' are the Mandelstam invariant variables for the subprocess.

5.3. Production of Hadron Systems with Large Transverse Momenta. Consider now the possibility when the transition operator takes into account interaction between some systems of constituents of hadrons A and B . Schematically this process is presented in Fig.7.

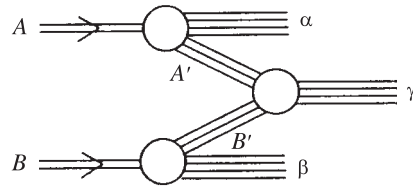


Fig. 7.

Let us assume that the wave function of the hadron A contains $\alpha + \ell$ constituents, the wave function of hadron B contains $\beta + \ell'$ constituents and $\gamma = \ell + \ell'$. In this approximation the transition amplitude takes the form:

$$\begin{aligned} T(A, B; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [k_+^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}]) = \\ = [2(2\pi)]^{\alpha+\beta+\gamma-1} \int \prod_{i=1}^{\ell-1} dx^{(i)'} d\mathbf{k}_\perp^{(i)'} \prod_{i=\ell+1}^{\gamma-1} dx^{(i)'} d\mathbf{k}_\perp^{(i)'} \times \\ \times \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{p_+^{(i)}}{A_+} \prod_{i=1}^{\beta} \frac{p_+^{(i)'}}{B_+} M_{A'B'}([k_+^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}]; [k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]) \times \\ \times \Psi_B^{(\beta+\ell')}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]) \Psi_A^{(\beta+\ell')}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]) \\ x^{(i)'} = \begin{cases} k_+^{(i)'} / A_+, & i = 1, \dots, \ell \\ k_+^{(i)'} / B_+, & i = \ell + 1, \dots, \gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

$M_{A'B'}$ is the transition operator of two interacting subsystems A' and B' . Let us connect the transition operator $M_{A'B'}$ with the transition operator $M_{A'B' \rightarrow C'D'}$ corresponding to inelastic «two-body» scattering (Fig.8). Here $G_{C'}$ and $G_{D'}$ are the Green functions of the subsystems C' and D' .



Fig. 8.

Using spectral properties of the Green functions $G_{C'}$ and $G_{D'}$ and restricting to the «one-particle» contributions one can represent the operator $M_{A'B'}$ in the form:

$$\begin{aligned}
 M_{A'B'}([k_+^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}]; [k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]) &= [2(2\pi)^3]^{\gamma-2} \prod_{i=1}^{\delta} \frac{k_+^{(i)}}{C_+} \prod_{i=\delta+1}^{\delta} \frac{k_+^{(i)}}{D_+} \times \\
 &\times \Psi_{C'}([k_+^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}];) \Psi_{D'}([k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}];) \prod_{i=1}^{\delta-1} dx^{(i)''} d\mathbf{k}_\perp^{(i)''} \prod_{i=\delta+1}^{\gamma-1} dx^{(i)''} d\mathbf{k}_\perp^{(i)''} \times \\
 &\times \Psi_{C'}([k_+^{(i)''}, \mathbf{k}_\perp^{(i)''}];) \Psi_{D'}([k_+^{(i)''}, \mathbf{k}_\perp^{(i)''}];) M_{A'B'C'D'}([k_+^{(i)''}, \mathbf{k}_\perp^{(i)''}]; [k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]),
 \end{aligned}$$

where $x^{(i)''} = \begin{cases} k_+^{(i)''}/C_+, & i = 1, \dots, \delta \\ k_+^{(i)''}/D_+, & i = \delta + 1, \dots, \delta. \end{cases}$

This approximation corresponds to the pole contribution in the spectral representation for the Green functions of A' , B' , C' , D' states and switching off the interactions with $(A - A')$ and $(B - B')$ subsystems. In the same approximation the wave functions Ψ_A and Ψ_B can be represented in the form:

$$\begin{aligned}
 \Psi_A^{(\alpha+\ell)}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]) &\sim \\
 &\sim (A_+/A'_+)^{\ell-1} \Psi_{AA'}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}];) \Psi_{A\ell'}([k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]),
 \end{aligned}$$

where $\Psi_{A\ell'}([k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}])$ is the usual light-front wave function of the system A' ,

$\Psi_{AA'}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}])$ is defined as:

$$\Psi_{AA'}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \delta \left(A_+ - A'_+ - \sum_{i=1}^{\alpha} p_+^{(i)} \right) \delta^{(2)} \left(\mathbf{A}_\perp - \mathbf{A}'_\perp - \sum_{i=1}^{\alpha} \mathbf{p}_\perp^{(i)} \right) =$$

$$= \int \prod_{i=1}^{\alpha} dx_{-}^{(i)} d\mathbf{x}_{\perp}^{(i)} \exp \left[i \sum_{i=1}^{\alpha} (p_{+}^{(i)} x_{-}^{(i)} - \mathbf{p}_{\perp}^{(i)} \mathbf{x}_{\perp}^{(i)}) \right] \langle A' | \psi_1(x_{\mu}^{(1)}) \dots \psi_{\alpha}(x_{\mu}^{(\alpha)}) | A \rangle. \quad (5.12)$$

It is seen from the definition that $\Psi_{AA'}$ is the «one-time vertex function». Schematically the approximations made can be represented in the form (Fig.9).

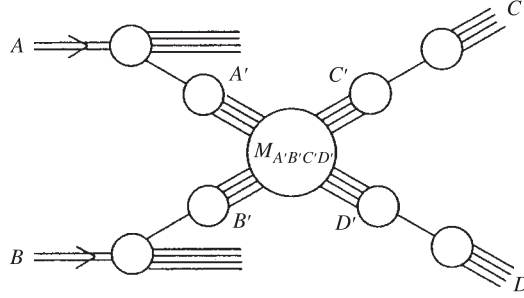


Fig. 9.

Corresponding expression for the scattering amplitude takes the form:

$$\begin{aligned} T(A, B; [p_{+}^{(i)}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)}]; [p_{+}^{(i)'}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)'}]; [k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]) = \\ = [2(2\pi)]^{\alpha+\beta+\gamma-2} [2(2\pi)]^{\gamma-2} \prod_{i=1}^{\delta} \frac{k_{+}^{(i)}}{C'_{+}} \prod_{i=\delta+1}^{\gamma} \frac{k_{+}^{(i)}}{D'_{+}} \times \\ \times \Psi_{C'}([k_{+}^{(i)}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)}]) \Psi_{D'}([k_{+}^{(i)}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)}]) \times \\ \times \left\{ \int \prod_{i=1}^{\delta-1} dx^{(i)''} d\mathbf{k}_{\perp}^{(i)''} \prod_{i=1}^{\ell-1} dx^{(i)'} d\mathbf{k}_{\perp}^{(i)'} \prod_{i=1}^{\gamma-1} dx^{(i)'} d\mathbf{k}_{\perp}^{(i)'} \times \right. \\ \times \Psi_{C'}([k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]) \Psi_{D'}([k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]) M_{A'B'C'D'}([k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]; [k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]) \times \\ \times \Psi_{A\ell'}([k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]) \Psi_{B'(\gamma-\ell)}([k_{+}^{(i)'}, \mathbf{k}_{\perp}^{(i)'}]) \left. \right\} \Psi_{AA'}([p_{+}^{(i)}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)}]) \Psi_{BB'}([p_{+}^{(i)'}, \mathbf{p}_{\perp}^{(i)'}]) \times \\ \times \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{p_{+}^{(i)}}{A_{+}} \prod_{i=1}^{\beta} \frac{p_{+}^{(i)'}}{B_{+}}, \quad (5.13) \end{aligned}$$

where

$$x^{(i)'} = \begin{cases} k_+^{(i)'} / A'_+, & i = 1, \dots, \ell \\ k_+^{(i)'} / B'_+, & i = \ell + 1, \dots, \gamma, \end{cases}$$

$$x^{(i)''} = \begin{cases} k_+^{(i)''} / C'_+, & i = 1, \dots, \delta \\ k_+^{(i)''} / D'_+, & i = \delta + 1, \dots, \gamma. \end{cases}$$

The expression in paranthesis in Eq. (5.14) is by the definition the scattering amplitude of the process $A'B' \rightarrow C'D'$. Finally for the scattering amplitude we obtain:

$$\begin{aligned} T(A, B; [p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]; [p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]; [k_+^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}]) = \\ = [2(2\pi)^3]^{\alpha+\beta+\gamma-2} \prod_{i=1}^{\delta} \frac{k_+^{(i)}}{C'_+} \prod_{i=\delta+1}^{\gamma} \frac{k_+^{(i)}}{D'_+} \times \\ \times \Psi_{C'}([k_+^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}]) \Psi_{D'}([k_+^{(i)'}, \mathbf{k}_\perp^{(i)'}]) \times \\ \times T(A'B' \rightarrow C'D') \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{p_+^{(i)}}{A_+} \prod_{i=1}^{\beta} \frac{p_+^{(i)'}}{B_+} \times \\ \times \Psi_{AA'}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \Psi_{BB'}([p_+^{(i)'}, \mathbf{p}_\perp^{(i)'}]). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Thus the transition amplitude is expressed through the scattering amplitude $T(A'B' \rightarrow C'D')$ of constituents which in particular, can be quarks. This mechanism corresponds to the production of jets.

Constructing the inclusive cross section of the process $AB \rightarrow c(C)$ we obtain:

$$\begin{aligned} E_C \frac{d\sigma(Ab \rightarrow c(C))}{d\mathbf{C}} = \frac{1}{4(2\pi)^2 s} \sum_{A'B'C'} \sum_{c(C)} \int dx d\mathbf{p}_\perp dx' d\mathbf{p}'_\perp \frac{dk_+}{k_+} (C_+ x x')^{-1} \times \\ \times \rho_A^{A'}(x, \mathbf{p}_\perp - \mathbf{A}_\perp, \alpha) \rho_B^{B'}(x', \mathbf{p}'_\perp - x' \mathbf{B}'_\perp, \beta) x'' \rho_C^{c(C)}(z, \mathbf{k}_\perp - x'' \mathbf{C}_\perp, \gamma) \times \\ \times |T(A'B' \rightarrow C'D')|^2 \delta \left[\frac{A^2 - \alpha}{A_+} + \frac{B^2 - \beta}{B_+} + \frac{C^2 - \gamma}{C_+} + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_+} (s' + t' + u' - c^2 - k^2 - A'^2 - B'^2) \right] d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Here $s' = xx's$; $t' = \frac{x}{x'}t$; $u' = \frac{x'}{x''}u$. Summation is performed over all possible intermediate states A' , B' , C' . The functions $\rho_A^{A'}$, $\rho_B^{B'}$, $\rho_C^{C'}$ are related to the squares of the corresponding wave functions.

Neglecting all the terms in the argument of δ -function as compared to $(s' + t' + u')$, and taking into account that transverse momenta in the functions ρ are limited, in the limit of high energies ($s \rightarrow \infty$) and large momentum transfers ($t/s \rightarrow \text{const}$, $u/s \rightarrow \text{const}$) one obtains:

$$E_C \frac{d\sigma(AB \rightarrow c(C))}{C} = \frac{s}{\pi} \int dx dx' dx'' \frac{xx'}{x''^2} \rho_A^{A'}(x) \rho_B^{B'}(x') \rho_C^{c(C)}(x') \times \\ \times \frac{d\sigma}{dt'}(s', t', u') \delta(s' + t' + u'). \quad (5.16)$$

In the case, when A' , B' , C' , D' are quark states, corresponding quantities $\rho_A^{A'}$, $\rho_B^{B'}$ go over to the corresponding quark distribution functions and $\frac{d\sigma}{dt'}$ goes over to the quark-quark elastic cross section. Let us write finally the relation of quark distribution functions ρ_A to the light-front quasi-potential wave function:

$$\rho_A^{(N-1)}([p_i^{(+)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \prod_{i=2, \dots, N}^N dx^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} = [2(2\pi)^3]^{N-2} \left| \Psi_A^{(N-1)}([p_+^{(i)}, \mathbf{p}_\perp^{(i)}]) \right|^2 \times \\ \times A_+ \prod_{i=2}^N x^{(i)} dx^{(i)} d\mathbf{p}_\perp^{(i)} \delta \left(A_+ - \sum_{i=2}^N p_+^{(i)} \right) \delta^{(2)} \left(\mathbf{A}_\perp - \sum_{i=2}^N \mathbf{p}_\perp^{(i)} \right). \quad (5.17)$$

REFERENCES

1. **Bethe H.A., Salpeter E.E.** — Phys. Rev., 1951, v.84, p.1232.
2. **Logunov A.A., Tavkhelidze A.N.** — Nuovo Cim., 1963, v.29, p.380.
3. **Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N.** — JINR Communications E2-3785, Dubna, 1967, P2-3900, Dubna, 1968.
4. **Kadyshevsky V.G.** — Nucl. Phys., 1968, v.B6, p.125.
5. **Garsevanishvili V.R., Kvinikhidze A.N., Matveev V.A., Tavkhelidze A.N., Faustov R.N.** — Sov. J. of Theor. and Math. Phys., 1975, v.23, p.310.
6. **Chang S.-J., Root R.G., Yan T.-M.** — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.1133.
Chang S.-J., Yan T.-M. — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.1167.
Yan T.-M. — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.1760.
7. **Leutwyler H.** — Nucl. Phys., 1974, v.B76, p.413.
Leutwyler H., Stern J. — Ann. Phys.(N.Y.), 1978, v.112, p.98.
8. **Berestetsky V.B., Terentyev M.V.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1976, v.24, p.547.

9. **Harindranath A., Vary J.P.** — Phys. Rev., 1987, v.D36, p.1141; Phys. Rev., 1988, v.D37, p.1064.
10. **Karmanov V.A.** — Sov. J. of Particles and Nuclei, 1988, v.19, p.525.
11. **Brodsky S.J., Pauli H.-C.** — In: Recent Aspects of Quantum Fields. Eds. H.Mitter, H.Gausterer, Springer, Berlin, 1991.
Brodsky S.J., McCartor G., Pauli H.-C., Pinsky S.S. — Particle World, 1993, v.3, p.109.
12. **Bassetto A.** — Talk at the Meeting on the New Perturbative Methods and Quantization on the Light Cone. Les Houches, 24 Feb. – 4 Mar. 1997.
13. **Grangé P., Werner E.** — Talk at the Meeting on the New Perturbative Methods and Quantization on the Light Cone. Les Houches, 24 Feb. – 4 Mar. 1997.
14. **Wilson K.G., Walhout T.S., Harindranath A., Zhang W.-M., Perry S.J., Glazek St.D.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.6720.
Brisudova M.M., Perry R.J., Wilson K.G. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.1227.
15. **Carbonell J., Desplangues B., Karmanov V.A., Mathoit J.-F.**, to appear in Phys. Reports.
16. **Dirac P.A.M.** — Rev. Mod. Phys., 1949, v.21, p.392.
17. **Khelashvili A.A.** — JINR Communications P2-8750, Dubna, 1975.
18. **Susskind L.** — Phys. Rev., 1968, v.165, p.1535.
19. **Kogut J.B., Soper D.E.** — Phys. Rev., 1970, v.D1, p.2901.
20. **Kogut J.B., Susskind L.** — Phys. Reports, 1973, v.8, p.75.
21. **Gunion J.F., Brodsky S.T., Blankenbckler R.** — Phys. Rev., 1973, v.D8, p.287.
22. **Weinberg S.** — Phys. Rev., 1966, v.150, p.1313.
23. **Kopaleishvili T.I.** — In: Proc. of the VI Intern. Seminar on High Energy Physics Problems. JINR D1,2-81-728, Dubna, 1981.
24. **Garsevanishvili V.R., Matveev V.A.** — Sov. J. of Theor. and Math. Phys., 1975, v.24, p.3.
25. **Kvinikhidze A.N., Matveev V.A., Tavkhelidze A.N., Khelashvili A.A.** — Sov. J. of Theor. and Math. Phys., 1976, v.29, p.3.
26. **Bogolubov N.N., Shirkov D.V.** — Introduction to the Theory of Quantized Fields, Willy, New York, 1980.
27. **Tavkhelidze A.N.** — Talk at the Solvey Congress, 1967.
28. **Mandelstam S.** — Proc. Roy Soc., 1955, v.A233, p.248.
29. **Faustov R.N.** — Ann. Phys.(N.Y.), 1973, v.78, p.176.
30. **Bogolubov N.N., Matveev V.A., Tavkhelidze A.N.** — In: Proc. of the Intern. Seminar on Elementary Particle Physics, Varna, Bulgaria, 1968, JINR, P2-4050, Dubna, 1968.
31. **Alabiso C., Schierholz G.** — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.960.
32. **Faustov R.N., Khelashvili A.A.** — Sov. J. of Nucl. Phys., 1970, v.10, p.619.
33. **Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N.** — Lett. Nuovo Cim., 1973, v.7, p.719.
34. **Brodsky S.J., Farrar G.** — Phys. Rev. Lett., 1973, v.31, p.1153.
35. **Garsevanishvili V.R., Kvinikhidze A.N., Matveev V.A., Tavkhelidze A.N., Faustov R.N.** — Sov. J. of Theor. and Math. Phys., 1975, v.25, p.37.
36. **Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N.** — JINR Communications E2-8048, Dubna, 1974.
37. **Feynman R.P.** — Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.1415.

38. **Bjorken J.D., Paschos E.A.** — Phys. Rev., 1969, v.185, p.1975; Phys. Rev., 1970, v.D1, p.3151.
39. **Bodek A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1973, v.30, p.1087.
40. **Riordan E.M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1974, v.33, p.561.
41. **Gordon B.A. et al.** — Phys. Rev., 1979, v.D20, p.2645.
42. **Nachtmann O.** — Phys. Rev., 1973, v.B63, p.237.
43. **De Rujula A., Georgi H., Politzer H.D.** — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.2141; Ann. Phys. (N.Y.), 1977, v.103, p.315.
44. **Krasnikov N.N., Tavkhelidze A.N., Chetyrkin K.G.** — In: Proc. of the Intern. Conf. «Neutrino 77», Nauka, Moscow, 1978.
45. **Atakishiev N.M., Mir-Kasimov R.M., Nagiev Sh.M.** — JINR Communications P2-80-635, Dubna, 1980.
46. **Logunov A.A., Mestvirishvili M.A., Nguen Van Hieu** — Phys. Lett., 1967, v.25B, p.612.
47. **Baldin A.M.** — Short Communications in Physics, 1971, v.1, p.35.
48. **Kvinikhidze A.N., Sissakian A.N., Slepchenko L.A., Tavkhelidze A.N.** — Sov. J. of Particles and Nuclei, 1977, v.8, p.478.
49. **Logunov A.A., Mestvirishvili M.A., Petrov V.A.** — IHEP, 74-66, Protvino, 1974.

ДИАГНОСТИКА СВЕРХПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР

И.П.Лохтин, Л.И.Сарычева, А.М.Снигирев

Научно-исследовательский институт ядерной физики, МГУ, Москва

В обзоре рассматриваются способы регистрации и определения основных параметров сверхплотной адронной материи, образующейся в ультрарелятивистских столкновениях ядер. Обсуждаются вопросы, связанные с кварк-адронным фазовым переходом и условиями его реализации, анализируются различные подходы для описания эволюции ядро-ядерных соударений: микроскопические генераторы Монте-Карло и гидродинамические модели. Рассматриваются основные тесты, предлагаемые для экспериментального изучения свойств ядерной материи, находящейся в экстремальных условиях. Приводятся возможные интерпретации особенностей, наблюдаемых в экспериментах по релятивистским столкновениям ядер на действующих ускорителях (AGS, SPS), по сравнению с соответствующими адрон-адронными соударениями: уширения импульсных спектров адронов, повышенного выхода дилептонов небольших масс, усиленного рождения странных частиц, подавления выхода Ψ -резонансов и др. Обсуждаются перспективы будущих экспериментов на коллайдерах RHIC и LHC.

Большое внимание уделяется "жестким" тестам, дающим информацию о ранних стадиях эволюции "горячей" сильновзаимодействующей материи. На основе модельных представлений анализируются эффекты, ожидаемые в результате прохождения жестких струй цветозаряженных партонов через плотную среду, и определяются параметры среды, влияющие в первую очередь на изменение характеристик струй и возможность их экспериментального обнаружения. Обсуждается также вопрос идентификации жестких КХД-струй в столкновениях тяжелых ионов на фоне больших статистических флуктуаций потока поперечной энергии, обусловленных большой множественностью вторичных частиц.

We provide an overview of the possibilities for the detection and determination of main parameters of hadronic superdense matter, created in ultrarelativistic collisions of nuclei. We discuss the problems related with quark-hadron transition and conditions for it to take place, and analyze the different approaches to the description of nucleus-nucleus collision evolution: microscopical Monte Carlo generators and hydrodynamical models. The main observables, that have been proposed for the experimental study of nuclear matter properties under extremal conditions, are considered. We present the possible interpretations of peculiarities being observed in relativistic nuclei collisions experiments at existing accelerators (AGS, SPS), as compared to hadron-hadron collisions: hadron momentum spectra "broadening", enhanced production of low mass dileptons, strangeness enhancement, Ψ -resonances suppression etc. The prospects for future experiments at colliders RHIC and LHC are discussed.

Much attention is paid to "hard" probes, which carry information about the early stages of the "hot" strong interacting matter evolution. Basing on model concepts we analyze the effects expected as a result of hard parton jet passing through the dense matter and determine the medium parameters, which primarily influence on the change in jet characteristics and the possibility of their experimental observation. The problem is also discussed of hard QCD-jets recognition in heavy ion

collisions against the background of statistical fluctuation of the transverse energy flux due to a huge multiplicity of secondary particles.

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное исследование ультрарелятивистских столкновений ядер на действующих и планируемых ускорителях тяжелых ионов [1] предоставляет уникальную возможность изучения свойств сильновзаимодействующей материи с такой высокой плотностью энергии, при которой ожидается достижение деконфайнмента адронной материи (одно из основных предсказаний статистической квантовой хромодинамики (КХД) для систем с достаточно высокой температурой или плотностью барионного заряда) и образование газа асимптотически свободных кварков и глюонов — так называемой кварк-глюонной плазмы (КГП), в которой в силу коллективных эффектов экранируется цветовое взаимодействие между партонами [2–7]. Если при низких энергиях (не более десятков и сотен МэВ) ядро может рассматриваться как система нуклонов, подчиняющихся законам нерелятивистской квантовой механики, то в области относительных скоростей ядер, близких к скорости света c , в качестве составляющих частиц ядерной материи начинают проявляться кварки и глюоны, динамика взаимодействий которых определяется уравнениями КХД [8,9].

Сам факт и возможные сценарии образования КГП в релятивистских ядро-ядерных соударениях являются предметом научных дискуссий. В любом случае при трансформации значительной части энергии сталкивающихся ядер в энергию конститuentов "термализованной" системы этой энергии должно хватить для образования КГП в достаточно больших (по отношению к характерным адронным масштабам) объемах, когда обсуждение теоретических и экспериментальных проблем ее обнаружения имеет смысл [10]. Можно выделить три основных направления в описании динамики релятивистских столкновений ядер: гидродинамический подход, модели кварк-глюонных струн и партонные каскадные модели. Согласно первому множественное рождение частиц происходит в момент перекрытия ядер, начальное состояние которых в системе центра масс представляет собой два лоренц-сжатых диска, плоскости которых перпендикулярны оси столкновения. Дальнейший характер пространственно-временной эволюции расширяющейся системы рожденных частиц определяется в соответствии с уравнениями релятивистской гидродинамики. Струнные модели предполагают, что в момент соприкосновения ядер происходят интенсивные кварк-глюонные обмены, приводящие к образованию возбужденных кварк-глюонных струн, которые затем взаимодействуют друг с другом и распадаются на вторичные адроны. В партонных каскадных моделях сталкивающиеся ядра рассматриваются как два "облака" кварков и

глюонов, взаимодействие которых приводит к развитию интенсивного кварк-глюонного каскада с его последующей адронизацией*.

Традиционно разделяют две области кинематических переменных, занимаемых частицами, образовавшимися в ядро-ядерном взаимодействии: центральную область быстрот (область пионизации), в которой ожидается максимальная температура и минимальная (в идеальном случае — нулевая) плотность барионного заряда, и область быстрот фрагментации, где может достигаться высокая плотность барионного заряда по сравнению с обычным ядерным веществом. В экспериментах по релятивистским соударениям тяжелых ионов фактически предпринимается попытка воссоздания в лабораторных условиях материи, которая, в соответствии с современными космологическими представлениями, существовала в первые микросекунды эволюции "горячей" и "безбарионной" Вселенной (в течение времени t при температуре $T \sim \frac{10^6}{t^{1/2}}$ МэВ, превышающей критическую температуру кварк-адронного фазового перехода $T_c \sim 200$ МэВ [11]), а также, предположительно, на поздних стадиях испарения "черных дыр" [12]. В то же время условия, необходимые для формирования другого предельного сверхплотного состояния — "холодной" кварковой материи, могут достигаться в недрах нейтронных звезд [13]. Не исключено также, что сами атомные ядра являются гетерофазными системами и в своем составе помимо нуклонов содержат "капельки" "холодной" КГП в местах сильного превышения флуктуаций ядерной плотности над ее средним значением [14, 15]. В частности, на основе этой идеи находят объяснение предсказанные А.М.Балдиным и открытые экспериментально на синхрофазотроне в Дубне кумулятивные процессы — рождение вторичных частиц на ядре за пределами кинематически доступной области при соударении с одним свободным нуклоном [15–17].

Естественным источником высокоэнергичных ядер является первичное космическое излучение, при изучении свойств которого также возникает вопрос о возможности образования КГП [18]. В частности, в эмульсионном эксперименте на баллонах JASIE регистрировались события с "аномально" высокой множественностью и средним поперечным импульсом вторичных частиц, не согласующиеся с предсказаниями традиционных моделей мягких адронных взаимодействий и экстраполяцией низкоэнергетических данных [19, 20]. Также высказывались предположения, что экзотические события типа "Центавр" [21, 22], наблюдавшиеся при прохождении первичного космического излучения через земную атмосферу, могут быть связаны с формированием КГП при столкновении космической частицы с ядром атмосферы, так

* Более подробно модели ядро-ядерных взаимодействий при высоких энергиях обсуждаются во втором разделе.

как в результате адронизации кварковой материи возможно образование так называемого "дезориентированного кирального конденсата" с асимметричным выходом заряженных и нейтральных пионов [23, 24]. Однако слишком малый поток космических лучей при высоких энергиях $E \gtrsim 10^6$ ГэВ затрудняет проведение систематического анализа такого рода "аномальных" событий. В то же время, поскольку ядра являются важной составной частью космических лучей, для описания их прохождения через межзвездную среду и атмосферу важны особенности ядро-ядерных взаимодействий, и получаемые на ускорителях данные могут служить опорой для интерпретации результатов экспериментов с космическими лучами.

Впервые пучки релятивистских ядер при энергии $E = 1 \div 4$ ГэВ/нуклон были получены в 1970 году на синхрофазотроне ОИЯИ. В последующем ядра были ускорены до высоких энергий и в других ядерных центрах, в частности, на ускорителях AGS в Брукхейвенской национальной лаборатории (БНЛ) США (энергия пучка $E = 11 \div 15$ ГэВ/нуклон, эквивалентная энергия в с.ц.м. $\sqrt{s} \simeq 4,5 \div 5,5$ ГэВ/нуклон) и SPS в ЦЕРН ($E = 160 \div 200$ ГэВ/нуклон, $\sqrt{s} \simeq 18 \div 20$ ГэВ/нуклон). Мощным средством изучения свойств "горячей" и сверхплотной ядерной материи в наиболее экстремальных условиях должны стать создаваемые коллайдеры тяжелых ионов RHIC в БНЛ (энергия в с.ц.м. сталкивающихся пучков $\sqrt{s} = 200$ ГэВ/нуклон) [25] и LHC в ЦЕРН ($\sqrt{s} = 6$ ТэВ/нуклон) [26]. Отметим, что в настоящее время в ОИЯИ на ускорителе "Нуклотрон" в сочетании с синхрофазотроном ведутся исследования особенностей ядро-ядерных взаимодействий при более низких энергиях ($E \leq 6$ ГэВ/нуклон): кумулятивных процессов, спиновых эффектов, свойств возбужденных мультибарионных кластеров, гиперядер, метастабильных ядерных состояний и др. [27], анализ которых выходит за рамки данного обзора.

Особенностью, отличающей столкновения тяжелых ядер при высоких энергиях от соответствующих адрон-адронных соударений, является возможность генерации сверхплотной материи в объемах, которые по отношению к характерным адронным масштабам являются квазимакроскопическими, что, если следовать идеям Гейзенберга [28], Ферми [29], Померанчука [30] и Ландау [31], открывает принципиальный путь для применения термодинамики сильных взаимодействий (см., например, обзор [32]).

Уравнение состояния кварк-глюонной системы базируется на фундаментальном лагранжиане КХД

$$L_{\text{QCD}} = \frac{1}{4} \sum F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} - m_f \right) \psi, \quad (1)$$

где индекс f пробегает по всем возможным кварковым ароматам u, d, s, c и др., и неабелево глюонное поле задается в виде

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2)$$

Проведение непертурбативных численных расчетов методом Монте-Карло в решеточной калибровочной теории основано на аппроксимации непрерывного пространства-времени дискретной совокупностью точек — решеткой и вычислении средних (статистической суммы и других термодинамических функций) по квантовым флуктуациям полей, распределенных по многим узлам решетки [33]. В настоящее время улучшение первоначальных алгоритмов наряду с существенным ростом компьютерных возможностей привело к заметному прогрессу в исследованиях, связанных с определением параметров кварк-адронного фазового перехода и условиями его реализации [34]. Последние результаты калибровочной $SU(3)$ -теории в приближении валентных кварков (т.е. без учета рождения из вакуума динамических кварков — виртуальных $q\bar{q}$ -пар) на решетке с $N_\sigma = 32^3$ узлами в пространстве и $N_\tau = 12$ узлами во времени [35] указывают на значение критической температуры $T_c \simeq 265$ МэВ, ниже которой свободная энергия изолированного кварка бесконечна, а выше — конечна, т.е. кварковый конфайнмент нарушается в высокотемпературной фазе. В то же время параметр порядка киральной симметрии (симметрии лагранжиана КХД относительно преобразований, меняющих четность) — кварковый конденсат $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ отличен от нуля при $T = 0$, когда спонтанное нарушение киральной симметрии приводит к динамической генерации масс кварков порядка нескольких сотен МэВ/ c^2 , и уменьшается с ростом температуры. Киральная симметрия восстанавливается при температуре, близкой к температуре деконфайнмента [34], $T_{\text{chiral}} \simeq T_c$. В этом случае вследствие векторного характера взаимодействия кварков с глюонами можно независимо вращать левые и правые составляющие полей безмассовых u -, d - и s -кварков, что согласуется с результатами теории возмущений КХД при высоких температурах, в рамках которой киральная симметрия не нарушена.

Значительный практический интерес представляет вопрос о виде кварк-адронного фазового перехода: в случае, если переход первого рода, кварк-глюонная и адронная материи могут сосуществовать в смешанной фазе при критической температуре T_c довольно долгое время, тогда как переход второго рода происходит быстро, т.е. степень влияния смешанной фазы на экспериментально наблюдаемые характеристики конечного состояния (например, спектр "термальных" дилептонов и фотонов в релятивистских столкновениях ядер) в этих двух случаях будет существенно различаться. Решеточная $SU(3)$ -теория без динамических кварков предсказывает кварк-адронный фазовый переход первого рода. Включение динамических кварков приводит к существенному снижению критической температуры до $T_c \simeq 140$ МэВ (решетка $16^3 \times 4$ при нулевой барионной плотности $\mu_b = 0$ [36]). Вид фазового перехода требует в этом случае дальнейшего прояснения: для числа активных кварковых ароматов $N_f > 3$ переход может быть первого рода, в то время как для меньшего числа N_f существуют указания на переход второго рода. Зависимость плотности энергии от температуры, взятая из [36], представлена

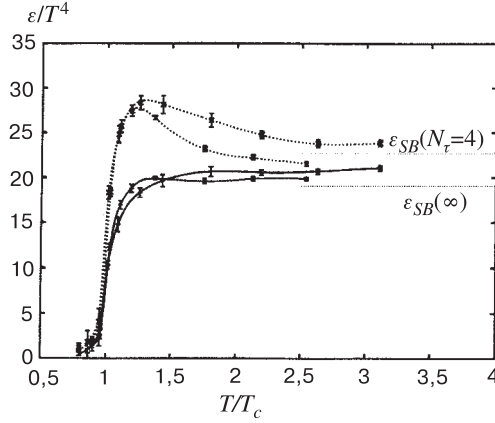


Рис. 1. Зависимость отношения плотности энергии ϵ к четвертой степени температуры T^4 от T/T_c [36] для $N_f = 4$ активных кварковых ароматов. Точечные и сплошные кривые показывают результаты разных алгоритмов расчета ϵ . Верхним кривым соответствуют большие значения масс кварков, $m = 0,4T$; нижним — меньшие, $m = 0,2T$. Горизонтальные линии представляют результат для идеального газа при решеточном параметре $N_\tau = 4$ и в континуальном пределе ($N_\tau \rightarrow \infty$)

на рис.1 для $N_f = 4$ в сравнении со случаем идеального газа при $N_\tau = 4$ узлах решетки во времени и в континуальном пределе ($N_\tau \rightarrow \infty$).

Важный результат заключается в том, что как в случае с динамическими кварками, так и в чисто глюонной плазме разница в результате для плотности энергии по сравнению с идеальным газом не превышает 15% при температуре $T \geq 2T_c$, т.е. приближение квазиидеального слабовазаимодействующего газа кварков и глюонов является хорошей моделью кварк-глюонной плазмы при высоких температурах. В то же время свойства кварк-глюонной плазмы или адронного газа при температуре порядка критической $T \sim T_c$ существенно отличаются от свойств идеальных систем и определяются характером непертурбативных взаимодействий вблизи критической точки кварк-адронного фазового перехода. При этом важную роль могут играть предпереходные флуктуационные эффекты, приводящие к конечной вероятности формирования кварк-глюонной плазмы при температуре ниже критической $T < T_c$ или адронных кластеров при $T > T_c$ [32].

2. МОДЕЛИ ЯДРО-ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

2.1. Микроскопические модели. С точки зрения применимости качественных выводов решеточных теорий к динамике кварк-адронных фазовых переходов, которые могут быть реализованы в экспериментах на ускорите-

лях, важным является вопрос о самой возможности достижения равновесного (с точки зрения термодинамики) состояния системой вторичных партонных, генерируемых в процессе ультрарелятивистского ядро-ядерного соударения. В принципе, ответ на этот вопрос могут дать микроскопические модели Монте-Карло (так называемые "генераторы событий"), основанные либо на пертурбативных расчетах партонных каскадов (PCM [37,38]), либо на струнной феноменологии (HIJING [39], FRITIOF [40], VENUS [41], QGSM [42], DPM [43] и др.).

Описание динамики релятивистских ядерных столкновений из первых принципов КХД ограничено, как правило, вычислением свойств жестких процессов партон-партонного рассеяния, идущих на малых расстояниях (с большими передачами импульса). В то же время основную часть адронных сечений при энергиях действующих ускорителей тяжелых ионов (AGS, SPS) составляют идущие с малыми передачами поперечного импульса мягкие процессы. Поэтому для количественного анализа ядро-ядерных взаимодействий при высоких энергиях разработан ряд феноменологических моделей, которые содержат большое количество параметров, подбираемых из сравнения результатов для основных характеристик адрон-адронных, адрон-ядерных и ядро-ядерных взаимодействий (как, например, сечения различных каналов реакций, распределение по множественности и инклюзивные спектры вторичных частиц) с имеющимися данными на ускорителях и в экспериментах с космическими лучами.

При разработке моделей, описывающих адронные состояния и мягкие адронные и ядерные взаимодействия, широко используется струнная концепция, вытекающая из исследования свойств КХД в непертурбативной области больших расстояний [44]. Основным объектом таких моделей является классическая релятивистская струна, представляющая собой двухмерную поверхность в четырехмерном пространстве Минковского, "натяжение" которой определяет энергию связи адронного состояния. В момент соприкосновения ядер в результате отдельных неупругих нуклон-нуклонных взаимодействий происходят интенсивные кварк-глюонные обмены, приводящие к образованию кварк-глюонных струн с их последующим возбуждением и распадом на адроны в соответствии с заложенными феноменологическими функциями фрагментации (их параметры подбираются из сравнения с e^+e^- - и pp -данными). При этом сечения отдельных процессов вычисляются, как правило, в приближении с квазиэйкональной померонной параметризацией нуклон-нуклонной амплитуды рассеяния [45–48].

Существует возможность включения разного рода коллективных эффектов в струнные модели для согласования получаемых результатов с экспериментальными данными. В частности, если быстрые частицы формируются вне ядра-мишени и ядра-снаряда, то медленные частицы могут образовываться внутри ядра и, взаимодействуя с нуклонами-спектаторами, инициировать раз-

вите "холодного" внутриядерного каскада, учет которого в некоторых струнных моделях (VENUS, DPM) приводит к увеличению множественности в областях быстрой фрагментации мишени или пучка и увеличению относительной доли странных частиц. В то же время "горячее" каскадирование, соответствующее взаимодействию между рожденными частицами, может приводить к некоторым изменениям в импульсном распределении адронов и их составе в центральной области быстрой, при определенных условиях приводя систему в термальное или химическое равновесие [49].

Другими коллективными эффектами, приводящими к более жесткому спектру вторичных адронов по поперечному импульсу и повышенному выходу странных частиц, являются взаимодействие (отталкивание или слияние) струн (QGSM [50] и DPM [51]) и их коллективное излучение — модель "огненных крекеров" (FRITIOF [49]). К сожалению, теория пока не дает однозначного ответа на вопрос, каким именно образом взаимодействие струн может быть корректно включено в существующие модели, хотя необходимость учета этих эффектов при высокой плотности числа струн (и, следовательно, их перекрытии в поперечной плоскости и по быстрой) в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ядер представляется очевидной.

При энергиях коллайдеров ($\sqrt{s} \gtrsim 100$ ГэВ) заметный вклад в формирование конечного адронного состояния вносят жесткие и полужесткие процессы партон-партонного рассеяния с передачей импульса $Q^2 > 1$ (ГэВ/с)² (много больше масштабного параметра КХД $\Lambda \simeq 200$ МэВ), которые включаются в струнные модели либо в рамках реджонного эйконального формализма с обменом "жесткими" померонами (VENUS, QGSM), либо с добавлением вычисленного в пертурбативной КХД инклюзивного сечения образования двух жестких струй в отдельном нуклон-нуклонном субстолкновении (FRITIOF, HIJING). Увеличение энергии сталкивающихся пучков приводит к быстрому росту сечения жестких процессов [39, 52], которые дают вклад примерно в половину поперечной энергии (выделяемой в перпендикулярном относительно оси столкновения ядер направлении) в соударениях тяжелых ионов при энергиях RHIC ($\sqrt{s} \sim 200$ ГэВ/нуклон) и более 80% при энергиях LHC ($\sqrt{s} \sim 6$ ТэВ/нуклон) [53]. В то же время мягкие процессы с малой передачей импульса $Q^2 \sim \Lambda^2$ могут частично или полностью подавляться вследствие экранировки цветового взаимодействия в плотной партонной материи, формируемой из системы министруй на самых ранних стадиях реакции [54]. Таким образом, при энергиях LHC наступает своего рода смерть "мягкой" физики, когда, как ожидается, жесткие и полужесткие процессы рассеяния будут давать определяющий вклад в формирование начального состояния [55]. Применимость струнной феноменологии "мягких" процессов в этом случае, по крайней мере на ранней, "доадронизационной" стадии реакции, вызывает определенные сомнения, и более правомерным подходом при очень высоких

энергиях представляется моделирование эволюции партонных каскадов в рамках теории возмущений КХД [56].

Партонная каскадная модель (РСМ) рассматривает сталкивающиеся ядра как два "облака" валентных и морских кварков и глюонов, которые проходят друг через друга и пертурбативно взаимодействуют, приводя систему к состоянию локального термального равновесия. В качестве примера рассмотрим работу генератора Монте-Карло ядро-ядерных взаимодействий РСМ, разработанного К.Гейгером [37,38,57]. Модель состоит из трех основных блоков.

1) Задание начальной конфигурации ядро-ядерной системы, т.е. определение выхода начальных ароматов кварков, импульсного и пространственного распределения партонов. При этом важную роль в процессе формирования начального состояния играет эффект ядерной экранировки, наблюдавшийся в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию [58], который приводит к модификации ("насыщению") партонных структурных функций нуклона в ядре: $f_i^A(x, Q^2) < Af_i^p(x, Q^2)$ для значений уносимой партоном доли импульса $x \lesssim 0,1$. Качественное объяснение данного эффекта приводится, как правило, на языке "перекрывающихся партонов" (см., например, [55]): если продольная длина волны партона $\sim 1/(xp)$ (p — импульс нуклона) превышает продольный размер нуклона в ядре $\sim 2r_n m_n/p$, экранирование должно наблюдаться при $x \lesssim 1/(2m_n r_n) \sim 0,1$ и усиливаться с уменьшением x . Так как не существует строгих однозначных теоретических предсказаний о конкретном виде модифицированных структурных функций нуклона в ядре, то в моделях они задаются феноменологическим путем на основе аппроксимации имеющихся экспериментальных данных по адрон-ядерным соударениям. Стоит, однако, отметить, что в литературе последнее время активно развиваются представления о структурных функциях ядер как совокупности квантовых флуктуаций на фоне классических глюонных полей Янга — Миллса, генерируемых движущимися со скоростями, близкими к скорости света, $q\bar{q}$ -парами (см., например, обзор [59]).

2) Моделирование пространственно-временной эволюции партонного каскада, основанное на пертурбативных расчетах элементарных актов партон-партонного рассеяния и включающее развитие пространственно- и времени-подобных "ливней" от рассеянных партонов. Математически задача сводится к решению кинетического уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] F_a(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \sum_i C_i(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \quad (3)$$

где одночастичная функция распределения $F_a(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)d^3p d^3r$ — среднее число партонов типа a в пространственном объеме d^3r в окрестности точки $\mathbf{r}$ и в импульсном объеме d^3p в окрестности $\mathbf{p}$ в момент времени t ; скорость $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\sqrt{p^2 + m_a^2}$; $C_i(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ — интеграл столкновений i -го процесса, в ко-

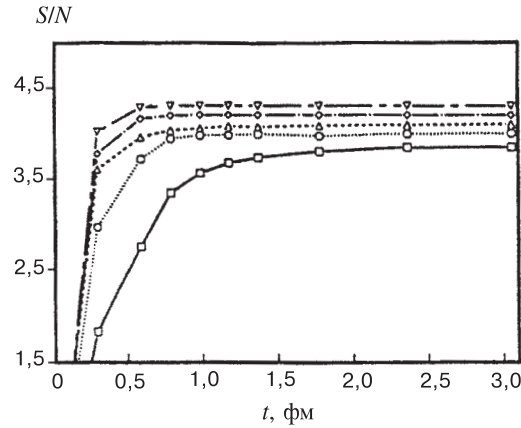


Рис. 2. Зависимость отношения энтропии системы S к множественности партонов N в центральной области быстрот от времени, вычисленная в РСМ для центральных соударений Au—Au при различных энергиях сталкивающихся пучков $\sqrt{s}$ [37]: ($\square$) — 200, ($\circ$) — 1000, ($\triangle$) — 2000, ($\diamond$) — 4000, (∇) — 6300 А·ГэВ

тором и заложена пертурбативная динамика. Заметим, что $F_a^0(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t_0)$ представляет собой структурную функцию партонов типа a в начальный момент $t = t_0$, которая эволюционирует с течением времени по мере развития каскада.

3) Формирование конечного адронного состояния в непертурбативном режиме КХД, выполненное в рамках феноменологической кластер-адронизационной схемы: из партонов в конечном состоянии формируются бесцветные кластеры, и происходит независимая фрагментация каждого кластера на резонансы, распадающиеся впоследствии на конечные адроны [57].

Каскадная модель предсказывает достаточно быструю термализацию глюонной материи в центральной области быстрот в соударениях тяжелых ядер, обусловленную комбинацией индивидуальных партон-партонных рассеяний и глюонной радиацией партонов: предсказываемое время термализации τ_{eq} составляет $0,5 \div 1$ фм/с для RHIC и $0,1 \div 0,5$ фм/с для LHC [37, 38, 53, 55, 60]. В качестве иллюстрации на рис.2 представлена зависимость отношения энтропии системы S к множественности партонов N в центральной области быстрот от времени, вычисленная в РСМ для центральных соударений Au—Au при различных энергиях сталкивающихся пучков $\sqrt{s}$ [37]. Из рис.2 видно, что установившиеся значения $S/N(\tau \geq \tau_{eq})$ близки к результатам для идеального газа безмассовых кварков и глюонов $(S/N)_{ideal}$ (разница составляет менее 10% для энергии RHIC $\sqrt{s} = 200$ А·ГэВ и уменьшается с ростом $\sqrt{s}$). Распределение глюонов по поперечному импульсу $G(p_T, \tau = \tau_{eq})$ хорошо аппроксимируется релятивистским бoльцмановским распределением, в то время

как сильный поток в направлении оси сталкивающихся ядер приводит к "колоколообразной" форме распределения по быстроте $G(y, \tau = \tau_{eq})$:

$$G(y, p_T, \tau = \tau_{eq}) = G_0 \int d\eta \exp \left[-\frac{p_T}{T} \cosh(y - \eta) \right], \quad (4)$$

где $T(\tau)$ — температура, оценки которой составляют $0,3 \div 0,5$ ГэВ для RHIC и $0,8 \div 1$ ГэВ для LHC. Меньшее сечение рассеяния и меньшая вероятность генерации кварков в партонном ливне приводит к тому, что их число в начальной плазме много меньше "равновесного" значения (сценарий "горячей" глюонной плазмы см. в [61], $N_f \simeq 0$), и химически равновесная кварк-глюонная плазма может сформироваться не раньше, чем через несколько фм/с или вообще не сформироваться перед охлаждением системы до критической температуры T_c и началом адронизации. Заметим, что учет высших порядков КХД-процессов типа $2 \rightarrow 2 + (n \geq 1)$ может несколько ускорить процесс термализации [62], но вопрос о возможности достижения системой партонов химического равновесия все же остается открытым даже в столкновениях самых тяжелых ионов при максимальных энергиях LHC.

Отметим также другой интересный аспект, связанный с возможной неомогенностью начальных условий формирования партонной материи: развитие партонных каскадов может приводить к большим флуктуациям локальной плотности энергии ("горячим пятнам") и образованию турбулентностей коллективного потока ("адронных вулканов"), которые могут наблюдаться как нестатистические флуктуации в конечном распределении адронов [63].

Общей проблемой классических каскадных моделей является трудность корректного включения в них квантовых когерентных эффектов, которые могут оказывать существенное влияние на пространственно-временную эволюцию материи [60]. В частности, учет конечного времени формирования излученных глюонов должен приводить к деструктивной интерференции между различными амплитудами рассеяния для глюонов с временем формирования больше длины свободного пробега начального партона (КХД-аналог эффекта Ландау — Померанчука — Мигдала в КЭД [64]). Дело, однако, в том, что интерференция происходит между амплитудами, в которых начальный партон имеет различные виртуальности: времениподобную в конечном состоянии (радиация после очередного акта рассеяния) и пространственноподобную в начальном состоянии (радиация после предшествующего акта рассеяния). В то же время в процессе моделирования Монте-Карло развития каскада партон должен всегда оставаться времениподобным между двумя рассеяниями. Традиционным подходом к решению данного вопроса является отнесение глюонной радиации как в начальном, так и в конечном состоянии к одному акту рассеяния, и интерференционный эффект учитывается при этом путем модификации спектра "тормозных" глюонов; но вопрос о достаточной обоснованности такой процедуры остается открытым.

В заключение отметим, что детальное моделирование развития партонных каскадов представляет собой весьма трудоемкую задачу, требующую значительных компьютерных усилий и большого количества машинного времени. Если в настоящих экспериментах в CERN на ускорителе SPS в центральных столкновениях Pb—Pb регистрируется около 700 заряженных адронов [65], то предсказания различных моделей Монте-Карло для множественности вторичных частиц в соударениях тяжелых ионов составляют уже от нескольких тысяч при энергиях RHIC до нескольких десятков тысяч при энергиях LHC [1]. Очевидно, что в таких условиях трудно построить правильную микроскопическую теорию ядро-ядерных взаимодействий, предсказания которой в любом случае будут носить модельно-зависимый характер. Возможно, на определенном этапе было бы целесообразно перейти от рассмотрения всех деталей динамики ядерных столкновений к макроскопическому анализу реакций и выделению из эксперимента таких макропараметров, как уравнение состояния сильновзаимодействующей материи, энтропия, температура и др. Как, может быть, несколько образно сказал Е.В.Шуряк во вступительной речи на совещании "Кварковая материя'90": "Возможно, кварк-глюонная плазма настолько проще протона, насколько описание процессов течения воды в трубе или ее кипения уравнением состояния проще расчета амплитуды рассеяния молекулы H_2O " [10].

2.2. Макроскопические модели. В основе макроскопического подхода к описанию динамики ядерных реакций лежит концепция коллективного движения сильновзаимодействующей материи, подчиняющегося законам релятивистской гидродинамики [4, 31, 66], когда мы можем локально определить плотность энергии $\varepsilon(x)$ и энтропии $s(x)$, давление $p(x)$, температуру $T(x)$, а также 4-скорость $u_\mu(x)$ как функции координат x . Закон сохранения тензора энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p \quad (5)$$

(здесь $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ — метрический тензор) запишется в виде

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

Используя термодинамические тождества

$$\varepsilon + p = Ts, \quad s = \frac{dp}{dT} \quad (7)$$

(химический потенциал для простоты полагается здесь равным нулю), уравнения (6) можно переписать в виде

$$(u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu})\partial_\mu(\ln T) + u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \quad (8)$$

$$\partial_\mu(su^\mu) = 0, \quad (9)$$

и по определению

$$u_\mu u^\mu = 1. \quad (10)$$

Вместе с уравнением состояния $p = p(\varepsilon)$ уравнения (8)–(10) образуют замкнутую систему, из которой, в принципе, можно определить локальную температуру T и 4-скорость u_μ при задании граничных и начальных условий, выбор которых обычно диктуется типом симметрии задачи. Однако прямое решение гидродинамических уравнений в частных производных (8)–(10) для кварк-глюонной жидкости с фазовым переходом возможно лишь для определенного типа начальных условий, и, как правило, оно приводит к довольно сложным компьютерным расчетам. Поэтому при исследовании эволюции материи, формируемой в симметричных ультрарелятивистских соударениях ядер, когда есть выделенное направление, наиболее широко используется одномерная скейлинговая гидродинамика, описывающая лоренц-инвариантное движение материи вдоль оси столкновения: при лоренц-инвариантных начальных условиях гидродинамические уравнения сохраняют этот тип симметрии*. В скейлинговой гидродинамике формирование частиц происходит на гиперповерхности одинакового собственного времени $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, а все термодинамические величины не зависят от пространственной быстроты $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$ [67]. На рис.3 показаны основные этапы образования и пространственно-временной эволюции материи в релятивистском ядро-ядерном соударении в скейлинговой гидродинамике (формирование и расширение КГП, кварк-адронный фазовый переход, расширение и распад адронной жидкости), определение временного масштаба каждого из которых представляет собой довольно сложную экспериментальную задачу.

При скейлинговом значении 4-скорости

$$u_\mu = \frac{1}{\sqrt{t^2 - z^2}} \{t, 0, 0, z\} \quad (11)$$

из уравнения (9) определяется плотность энтропии

$$s(\tau) = \frac{s(\tau_0) \cdot \tau_0}{\tau}, \quad (12)$$

в то время как уравнению (8) удовлетворяет любая функция $T = \varphi(\tau)$, для нахождения которой требуется задание уравнения состояния. В частности, для ультрарелятивистского уравнения состояния $p = \varepsilon/3$, которое, как следует из решеточных расчетов, является хорошим приближением для КГП при

*Более того, и в трехмерном цилиндрически-симметричном случае центральная область жидкости, до которой не дошел фронт волны разрежения, движется в соответствии с одномерным скейлинг-решением, если скейлинг задается как начальное условие [67].

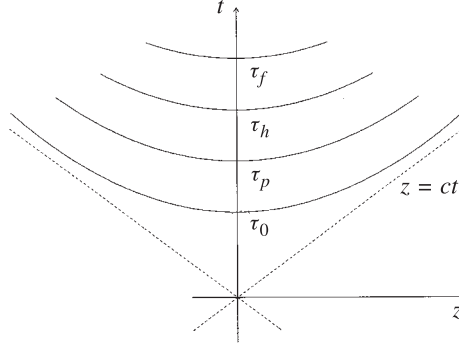


Рис. 3. Схематическая картина основных этапов образования и эволюции материи в релятивистском ядро-ядерном соударении в скейлинговой гидродинамике: собственному времени τ_0 соответствует момент формирования КГП, τ_p — начало кварк-адронного фазового перехода (смешанная фаза), τ_h — завершение смешанной фазы, τ_f — распад адронной жидкости ("вымораживание")

высоких температурах $T \gg T_c$ (см. рис.1), получим:

$$T = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3}, \quad (13)$$

и время жизни системы, охлаждающейся до температуры T_c , может быть определено как $\tau_p = \tau_0 (T_0/T_c)^3$.

Простота скейлинг-решения приводит к возможности рассмотрения на его основе динамики кварк-адронных фазовых переходов в ядерных соударениях [68] с использованием модели "мешков" [69]. В этом случае расширение жидкости определяется продольным потоком большого числа термальных источников (так называемых "файерболов"), каждый из которых представляет собой при $T > T_c$ квазиидеальный кварк-глюонный газ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \sigma_p T^4 + B_0, \quad p_p = \frac{1}{3} \sigma_p T^4 - B_0, \\ s_p &= \frac{4}{3} \sigma_p T^3, \quad \sigma_p = \frac{\pi^2}{30} g_p, \quad g_p = 16 + \frac{21}{2} N_f, \end{aligned} \quad (14)$$

при $T < T_c$ — идеальный газ безмассовых пионов:

$$\varepsilon_h = \sigma_h T^4, \quad p_h = \frac{1}{3} \sigma_h T^4, \quad s_h = \frac{4}{3} \sigma_h T^3, \quad \sigma_h = \frac{\pi^2}{30} g_h, \quad g_h = 3. \quad (15)$$

При повышении температуры выше критической давление "мешка" B_0 (значение которого определяется из условия равенства давлений партонной и

адронной материи в смешанной фазе $p_p(T_c) = p_h(T_c)$ будет не в состоянии удерживать кварки и глюоны в связанном состоянии.

При этом коллективный поток в поперечном (относительно оси столкновения ядер) направлении $\mathbf{r}$ может рассматриваться как некоторая поправка на фоне сильного продольного движения материи. Численное решение гидродинамических уравнений (8)–(10) для трехмерного расширения идеальной цилиндрически-симметричной кварк-глюонной жидкости подтверждает эту картину [70]: центральное плато $|\eta| < \eta_0 - c_s \ln(\tau/\tau_0)$ и $r < R_0 - c_s(\tau - \tau_0)$, т.е. область, до которой не дошел фронт волны разрежения, описывается одномерным скейлинг-решением, если скейлинг задается как начальное условие (η_0 и R_0 — начальная ширина продольного и поперечного плато соответственно, $c_s = \sqrt{dp/d\varepsilon}$ — скорость звука). Однако в случае формирования долгоживущего состояния в ядро-ядерном соударении поперечное расширение может играть существенную роль на более поздних стадиях адронизации и "вымораживания" адронов, и его модельный учет является вполне актуальной задачей.

Одним из распространенных методов приближенного решения трехмерных гидродинамических уравнений является усреднение термодинамических величин по радиальному (для сферической симметрии [71]) или поперечному (для цилиндрической симметрии [72–76]) направлению. В результате применения этой процедуры уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом, как правило, термодинамические величины полагаются однородными в поперечном направлении, т.е. фактически используются некоторые их средние значения, что дает возможность использовать такие модели для относительно простого вычисления интегральных характеристик реакции (например, интенсивности излучения фотонов и дилептонов из всего объема расширяющейся материи, адронных спектров, энергетических потерь жестких партонов в среде). Временем "включения" поперечного расширения τ_{tr} в этом случае можно считать, например, момент, когда в поперечное движение вовлекается половина объема жидкости в соответствии с численным решением уравнений релятивистской гидродинамики со скейлинговым начальным условием при $\tau = \tau_0$ [76], т.е.:

$$\tau_{tr} \cong \tau_0 + \frac{R_0}{c_s} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}. \quad (16)$$

В общем случае профиль коллективной скорости жидкости, заключенной в цилиндре переменного эффективного радиуса $R(\tau)$, в поперечном направлении $\mathbf{r}$ может быть параметризован в виде

$$u^r = \frac{dR}{d\tau} \left(\frac{r}{R} \right)^n \quad (17)$$

(“гидравлическое приближение”). При этом на разных этапах эволюции кварк-глюонной жидкости точному решению гидродинамических уравнений с цилиндрической симметрией может соответствовать различная параметризация профиля поперечной скорости. В частности, случай $n = 1$ соответствует решению нерелятивистского уравнения непрерывности с однородной плотностью и может служить хорошим приближением при не слишком высоких поперечных скоростях [73,75,76]. Заметим, что выбор параметра n не влияет на функциональную зависимость основных характеристик от времени (например, температуры, эффективного радиуса или доли партонной материи в смешанной фазе) с точностью до постоянного численного коэффициента.

В случае формирования высокотемпературного ($T_0 \gg T_c$) начального состояния коллективное поперечное движение может играть важную роль во время смешанной фазы, приводя к значительному уменьшению продолжительности кварк-адронного фазового перехода первого порядка по сравнению с одномерным скейлинг-решением [76]. Следствием этого может стать существенное уменьшение вклада смешанной фазы (по сравнению с начальным высокотемпературным состоянием КТП) в формирование некоторых экспериментально регистрируемых характеристик реакции, как, например, спектр “термальных” дилептонов и фотонов, излучаемых на протяжении всей эволюции сильновзаимодействующей материи [77].

Другим интересным явлением, связанным с существованием сильного коллективного потока адронной материи в поперечном направлении, может стать характерное “выполаживание” p_T -спектра тяжелых адронов (существенно неэкспоненциальный режим) в области поперечных быстрот адрона, не превышающих значения коллективной поперечной быстроты жидкости Y_T : $p_T \lesssim m \sinh Y_T^{\max}$ (т.е. в области доминирования коллективного поперечного движения над “термальным”) [75]. Наблюдение такого эффекта в будущих экспериментах на коллайдерах тяжелых ионов могло бы косвенно свидетельствовать о формировании высокотемпературного состояния на начальной стадии реакции.

Нередко вводится понятие “вязкости” кварк-глюонной жидкости, наличие которой приводит к появлению дополнительного нелинейного члена в гидродинамическом уравнении для эволюции среды. В случае одномерного продольного расширения вязкой кварк-глюонной жидкости уравнение эволюции имеет вид [78–81]:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + p}{\tau} - \frac{\chi}{\tau^2} = 0, \quad (18)$$

где последний нелинейный член, нарушающий скейлинг, содержит коэффициент $\chi(\tau) = 4\eta(\tau)/3 + \zeta(\tau)$; η и ζ — коэффициенты поверхностной и объемной вязкости соответственно, которые могут быть оценены в рамках релятивистской кинетической теории как первый порядок отклонения

от локального термального равновесия в высокотемпературном приближении $T \gg T_c$ [78–81]:

$$\eta(T) = \frac{C_\eta T^3}{\alpha_s^{*2} \ln(1/\alpha_s^*)}, \quad \zeta/\eta \simeq 0, \quad (19)$$

с эффективной термальной константой связи:

$$\alpha_s^* = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln(4T/T_c)^2}. \quad (20)$$

Оценки параметра C_η различаются от $C_\eta = 0,06$ ($C_\eta = 0,35$) в [79] до $C_\eta = 0,34$ ($C_\eta = 1,4$) в [81] для $N_f = 0$ ($N_f = 3$).

Отметим, что непертурбативный анализ результатов решеточных калибровочных теорий [82, 83] указывает на возможность сильного возрастания коэффициентов вязкости вблизи критической температуры кварк-адронного фазового перехода $T \sim T_c$ по сравнению с высокотемпературным приближением (19).

Эффект вязкости, приводящий к некоторому замедлению остывания кварк-глюонной жидкости и увеличению ее времени жизни по сравнению с одномерным скейлинг-решением (13), может играть важную роль при исследовании процессов, чувствительных, главным образом, к ранней партонной динамике, как, например, перерассеяние жестких струй в плотной материи, и этот вопрос будет обсуждаться в разд.5 настоящего обзора.

3. "МЯГКИЕ" ТЕСТЫ ПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СОУДАРЕНИЯХ ЯДЕР

3.1. Спектры адронов. Импульсные спектры конечных адронов рассматриваются как важный инструмент изучения свойств адронной материи, формируемой в ядро-ядерных взаимодействиях при высоких энергиях, в частности, степени ее термализации и коллективных потоковых эффектов [72, 75, 84–89]. В связи с тем, что формирование "долгоживущего" (по сравнению с характерным временем τ_{tr} (16)) высокотемпературного состояния должно приводить к заметному поперечному расширению на поздних стадиях эволюции системы, значительный интерес представляет изучение коллективных потоков в поперечном (относительно оси столкновения ядер) направлении.

В гидродинамической модели спектр конечных адронов задается в виде суперпозиции термального распределения и коллективного движения [84]:

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \int_{\sigma} f(x, p) p^\mu d\sigma_\mu \quad (21)$$

с инвариантной функцией распределения Бозе — Эйнштейна (Ферми — Дирака):

$$f(x, p) = \frac{g_h}{(2\pi)^3} \left(e^{-\frac{u^\mu(x)p_\mu}{T}} - 1 \right)^{-1}, \quad (22)$$

p_μ и u^μ — 4-импульс адрона и локальная 4-скорость жидкости соответственно, g_h — число адронных степеней свободы. Интегрирование проводится по гиперповерхности σ с температурой распада адронной жидкости (так называемая температура "вымораживания") $T = T_f$, которая может быть определена при условии превышения длины свободного пробега адрона (приближенно обратно пропорциональной температуре) над геометрическим размером системы.

Заметим, что предположение об одномоментном "вымораживании" адронов в некоторый фиксированный момент собственного времени τ_f является, вероятнее всего, слишком идеализированным, и в действительности имеет место постепенный распад адронной жидкости, "размазанный" в пространстве и времени [90]. Кроме того, так как сечения взаимодействия адронов (а следовательно, и длины свободного пробега в адронной материи) разного типа различаются, то вполне возможным представляется и соответствующее различие в значении температуры "вымораживания" [87].

Рассмотрим основные характерные особенности спектров адронов в релятивистских центральных столкновениях тяжелых ядер на ускорителях AGS при энергиях $11 \div 15$ ГэВ/нуклон (Si—Al, Si—Au, Au—Au и др.) [91–94] и SPS при энергиях $160 \div 200$ ГэВ/нуклон (S—S, S—Pb, Pb—Pb и др.) [65, 95–101] по сравнению с соответствующими адрон-адронными соударениями.

Распределение по продольной быстрой. Имеет место "колоколообразное" распределение адронов по продольной быстрой в СЦМ $dN/dy_{\text{ЦМ}}$, ширина которого существенно больше, чем наблюдается в соответствующих нуклон-нуклонных соударениях и ожидается для изотропного термального распределения Больцмана, что указывает на наличие сильного продольного коллективного движения адронной материи вдоль оси столкновения ядер (см. рис.4, взятый из работы [102]). При этом средняя коллективная продольная скорость $\langle \beta_l \rangle$ слабо увеличивается с ростом массы сталкивающихся ядер (от Si и S до Pb и Au) и существенно — с ростом энергии пучков, от $\langle \beta_l \rangle = 0,5$ (AGS, Au—Au) до $\langle \beta_l \rangle = 0,75$ (SPS, Pb—Pb). Интересно, что распределение протонов, рожденных в центральных ядро-ядерных соударениях при энергиях AGS и SPS, также имеет "квазиплато" в центральной области быстрой в СЦМ, что свидетельствует о значительной тормозной способности тяжелых ядер в данном диапазоне энергий.

Распределение по поперечному импульсу (поперечной массе). Распределение адронов по поперечной массе $m_T^{-1} dN/dm_T$ ($m_T = \sqrt{p_T^2 + m^2}$) в боль-

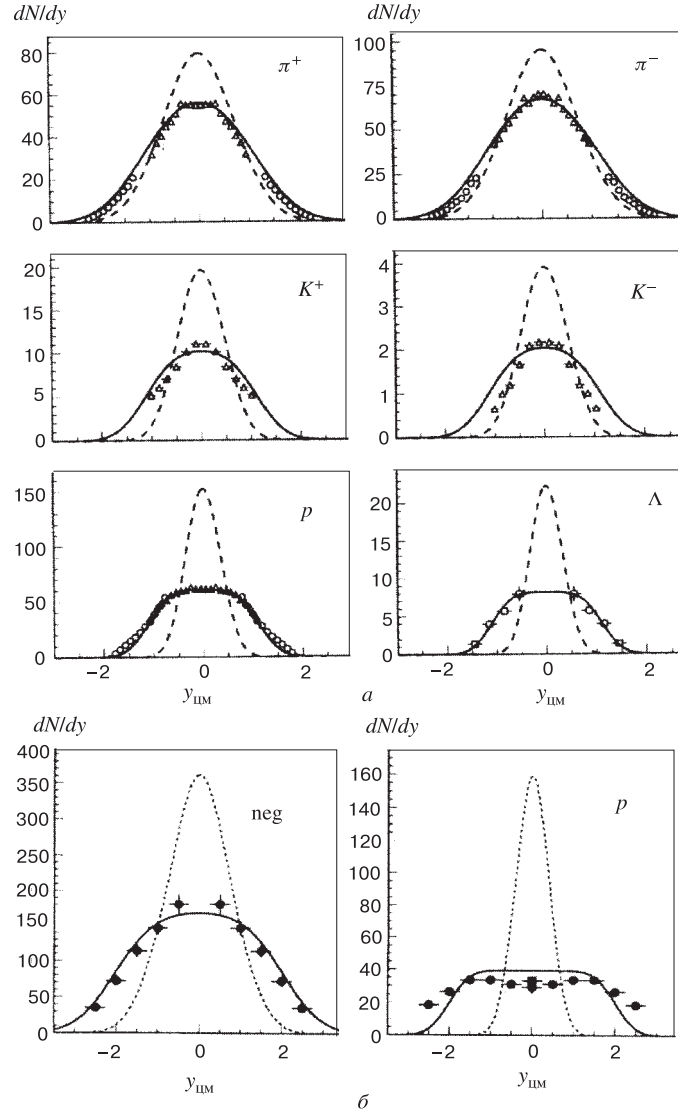


Рис. 4. Спектры адронов по продольной быстрой в с.ц.м. сталкивающихся ядер для центральных соударений: а) Au—Au при энергии AGS 11 A·ГэВ, эксперименты E866 [92], E877 [93] и E891 [94]; б) Pb—Pb при энергии SPS 158 A·ГэВ, эксперимент NA49 [65]. Штриховые кривые — соответствующие распределения для изотропного термального источника при температуре $T = 0,13$ ГэВ (а) или $T = 0,16$ ГэВ (б), сплошные — для продольно расширяющегося со средней скоростью $\beta_l = 0,5$ (а) или $\beta_l = 0,75$ (б) источника [102]

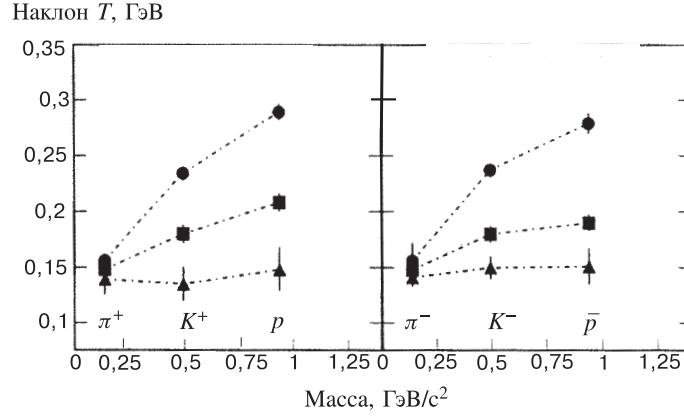


Рис. 5. Наклон T спектра адронов по поперечной массе как функция массы адрона в $p-p$ (▲), центральных $S-S$ (■) и $Pb-Pb$ (●) столкновениях при энергии SPS [100]

шинстве случаев хорошо аппроксимируется экспоненциальной зависимостью, однако наблюдается повышенный выход пионов в области малых поперечных масс $m_T - m \lesssim 200$ МэВ по сравнению с соответствующими нуклон-нуклонными данными при энергиях AGS и SPS, причем эффект проявляется в большей степени для отрицательно заряженных пионов. Наиболее популярным объяснением данного эффекта являются влияние распада резонансов [87] (как, например, $\rho_0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^-$ или $\Delta \rightarrow N \pi^-$), а также кулоновское взаимодействие пионов с сопутствующими протонами [103]. В то же время регистрируется повышенный выход адронов всех типов в центральных ядро-ядерных столкновениях по сравнению с соответствующими нуклон-нуклонными соударениями в области больших поперечных импульсов $p_T \geq 1$ ГэВ, и этот эффект более ярко выражен для самых тяжелых ядер, что вполне согласуется с предположением о существовании поперечного потока адронной материи. При этом экспериментальный факт роста среднего поперечного импульса адрона с увеличением его массы в столкновениях ядер при энергиях AGS и SPS (см., например, [102, 104] и рис.5 [100]) находит естественное и простое объяснение в гидродинамической модели [4], когда изменение импульса $\Delta p_T(\mathbf{r})$ адрона с массой m за счет поперечного движения элемента жидкости в точке $\mathbf{r}$ можно записать в виде $\Delta p_T(\mathbf{r}) = m \sinh Y_T(\mathbf{r})$, где Y_T — коллективная поперечная быстрота.

В связи с возможностью альтернативной интерпретации "уширения" m_T -спектра адронов в релятивистских соударениях тяжелых ядер по сравнению с соответствующими нуклон-нуклонными столкновениями представляет интерес двухкомпонентная модель продольно расширяющегося источника [86], в которой помимо области "вымораживания" адроны излучаются

из смешанной фазы с характерным импульсом, определяющимся критической температурой кварк-адронного фазового перехода T_c , т.е. наклон "хвоста" спектра в этом случае прямо равен T_c . Упомянем также предложенную недавно простую модель случайных блужданий начального состояния термальных "файрболов", в рамках которой вычисляются единым образом спектры адронов в протон-ядерных и ядро-ядерных соударениях без учета поперечного коллективного движения [89]. Данная модель имеет всего лишь один параметр δ , определяющий изменение поперечной быстроты "файрбола" за одно начальное нуклон-нуклонное субстолкновение. Параметр δ извлекается из адрон-ядерных данных. Однако модель [89] не может одновременно воспроизвести спектры пионов, каонов и протонов с одинаковыми значениями "уширения" δ и температуры "вымораживания" T_f для соударений $A - A$ ($A = S, Pb$) [100].

Детальный анализ существующих данных по спектрам адронов при энергии CERN-SPS 200 ГэВ/нуклон (эксперименты WA80 [95], HELIOS [96], NA35 [97]) в рамках трехмерной релятивистской гидродинамики с дополнительными предположениями о свойствах конфайнмента был выполнен, напри-

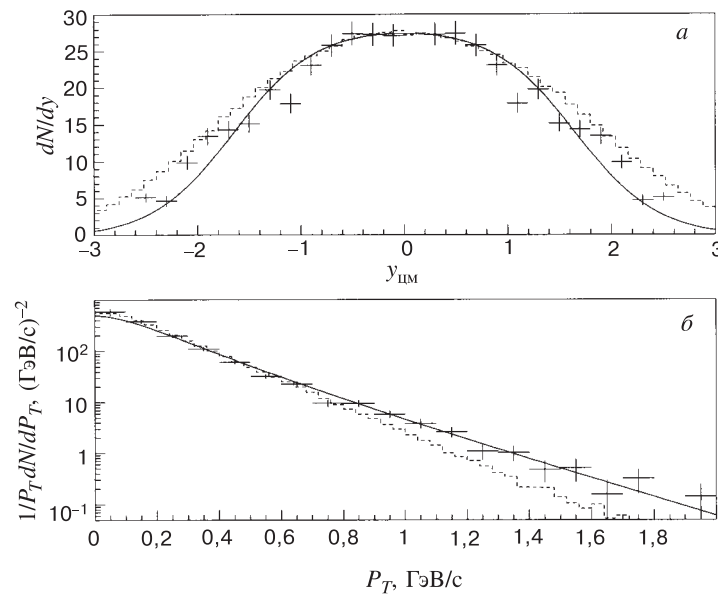


Рис. 6. Распределение по продольной быстройте y_{CM} в с.ц.м. сталкивающихся ядер (а); p_T -распределение ($2 < y_{lab} < 3$) (б) отрицательно заряженных пионов в гидродинамической модели с поперечным расширением [75] и данные эксперимента NA35 S + S 200A· ГэВ [97]. Штриховая гистограмма соответствует результатам FRITIOF_7.02

мер, в работе [88]. При этом данные были описаны с начальными условиями, соответствующими формированию КГП при температуре $T_0 \simeq 170 \div 200$ МэВ для центральных соударений пучков S и O и мишеней от Al до Pb (значения других параметров: $\tau_0 = 1$ фм/с, $T_c = 160$ МэВ, $T_f = m_\pi = 140$ МэВ). Проведенный в работе [105] анализ предварительных данных по спектрам адронов во взаимодействиях Pb—Pb при энергии $158 \text{ А} \cdot \text{ГэВ}$ (эксперимент NA49 [65]) также указывает на возможность их описания в гидродинамической модели с учетом начального формирования кварк-глюонной фазы.

В работе [75] в рамках простой модели учета поперечного расширения кварк-глюонной жидкости с фазовым переходом было показано, что имеющиеся данные могут быть согласованы с формированием смешанной фазы на начальной стадии реакции при $T_0 = T_c = 160$ МэВ. В качестве примера на рис.6 приведено описание данных по спектрам отрицательно заряженных пионов в центральных столкновениях S + S эксперимента NA35 [97] гидродинамической моделью [75] с параметрами "вымораживания" — температурой $T_f = 140$ МэВ и средней коллективной поперечной скоростью $\langle \beta_T \rangle = 0,38$. Для иллюстрации важности учета коллективных эффектов на рисунке представлены также результаты расчета соответствующих спектров, выполненного с помощью лундовской модели Монте-Карло кварк-глюонных струн FRITIOF_7.02 [40] в приближении независимых нуклон-нуклонных субстолкновений. Видно, что FRITIOF_7.02 предсказывает более мягкий p_T -спектр адронов, чем это наблюдается в эксперименте, что привело к необходимости включения в модель дополнительных коллективных эффектов, таких как "горячее" каскадирование адронов и коллективное излучение струн [49]. Заметим, что такого рода эффекты как раз и могут представлять собой микроскопическую реализацию коллективных поперечных потоков сильновзаимодействующей материи.

Важно, однако, отметить, что термализованная система, эволюционируя во времени, не "помнит" о своем предыдущем фазовом состоянии, и регистрируемое в реальном эксперименте конечное адронное состояние не несет прямой и однозначной информации о начальных условиях формирования материи, отражая свойства системы на стадии "вымораживания". Поэтому существует большой набор разного рода начальных условий, которые в рамках тех или иных моделей могут быть согласованы с экспериментальными данными по импульсным спектрам адронов в ядро-ядерных соударениях. В частности, дополнительное включение рождения и распада резонансов в реакции наряду с учетом продольного коллективного расширения адронной материи позволяет описать практически все имеющиеся данные по спектрам адронов при энергиях SPS в рамках простой "термальной" модели [87] без предположений о формировании кварк-глюонной или смешанной фазы на начальном этапе реакции. Измерения адронных спектров в экспериментах на будущих коллайдерах тяжелых ионов (STAR [106], PHOBOS [107], BRAHMS [108] на

RHIC и ALICE [109] на LHC) могут обеспечить нас детальной информацией о коллективных эффектах в системах частиц с множественностью в десятки и сотни раз выше, чем достигается на современных ускорителях.

Двухчастичные корреляции. Традиционным инструментом получения информации о пространственно-временных размерах области источника частиц в адрон-адронных, адрон-ядерных и ядро-ядерных взаимодействиях является двухчастичная интерферометрия идентичных частиц [110–112], идея использования которой происходит из экспериментов по измерению геометрического размера звезд с помощью интерферометрии фотонов. В отличие от астрономических измерений со стационарным источником, в ядерной физике корреляционный анализ определяет не геометрический размер источника, а так называемую "пространственно-временную область гомогенности", из которой испускаются частицы с близкими значениями импульса. Это приводит к тому, что (так как для расширяющегося источника существует зависимость импульса частицы от точки "вымораживания") измеряемый "радиус гомогенности" существенно зависит от импульса пары частиц [90, 113–117].

Идея метода состоит в измерении двухчастичной корреляционной функции

$$C_2 = \frac{\langle n \rangle^2}{\langle n(n-1) \rangle} \frac{d^6 N / (dp_1^3 dp_2^3)}{d^3 N / dp_1^3 d^3 N / dp_2^3} = 1 + \lambda |F_{12}|^2, \quad (23)$$

где n — множественность частиц, $d^3 N / dp_i$ и $d^6 N / (dp_1^3 dp_2^3)$ — одно- и двухчастичные инклюзивные распределения, $F_{12} = \langle \exp(iq_{12}r_k) \rangle_{p_{1,2}}$ — фурье-образ источника, p_i — 4-импульс частицы, λ — параметр, стремящийся к единице для полностью хаотичного источника.

Для источника частиц с гауссовским распределением плотности по пространственно-временным координатам используют обычно стандартную параметризацию корреляционной функции

$$C_2 = 1 + \lambda \exp \left[- \sum_{i,j=l,o,s} R_{i,j}^2 q_i q_j \right], \quad (24)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ — вектор относительного импульса двух частиц, причем q_l — проекция вектора $\mathbf{q}$ на направление оси пучка (чувствительна к продольному размеру источника), q_0 — на направление вдоль суммарного поперечного импульса пары частиц $\mathbf{K}_T$ (чувствительна к времени жизни источника), q_s — на направление, перпендикулярное двум предыдущим (чувствительна к поперечному размеру источника).

Существует также другая форма параметризации корреляционной функции (Фит Яна — Конины — Подгорецкого [118, 119]):

$$C_2 = 1 + \lambda \exp \left[-R_{\perp} q_{\perp} - R_{\parallel} (q_l^2 - (q^0)^2) - (R_0^2 + R_{\parallel}^2) (q \cdot U)^2 \right], \quad (25)$$

где $q_{\perp}^2 = q_0^2 + q_s^2$, $q^0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{K} / \sqrt{m^2 + \mathbf{K}^2}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_T + \mathbf{K}_l = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2$ и 4-скорость источника с продольной компонентой $U(\mathbf{K}) = \gamma(\mathbf{K}) (1, 0, 0, v(\mathbf{K}))$, $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Преимуществом данной параметризации является то, что она не зависит от продольной скорости источника, и измерение параметров $R_{\perp}(\mathbf{K}) = \langle y^2 \rangle^{1/2}$, $R_{\parallel}(\mathbf{K}) \approx \langle z^2 \rangle^{1/2}$ и $R_0(\mathbf{K}) \approx \langle t^2 \rangle^{1/2}$ дает прямое значение эффективных поперечного радиуса, продольного размера и времени жизни источника соответственно. В частности, в случае отсутствия поперечного расширения источника поперечный радиус $R_{\perp}$ не должен зависеть от поперечной массы пары частиц $M_T = \sqrt{K_T^2 + m^2}$ (M_T -скейлинг), в то время как наличие поперечного потока должно приводить к уменьшению $R_{\perp}$ с ростом M_T [114, 116, 117].

На настоящий момент имеются многочисленные экспериментальные данные по корреляционным функциям пионов и каонов в ядро-ядерных соударениях при энергиях AGS и SPS (см, например, [120]), подробный анализ которых выходит за рамки нашего обзора. Отметим лишь, что имеющиеся данные согласуются с моделью продольно расширяющегося источника, значения эффективных поперечного радиуса $R_{\perp} = \sqrt{R_s^2 + R_0^2}$ и продольного размера R_l которого соизмеримы друг с другом и увеличиваются с ростом радиуса налетающего ядра R_A [121, 122]: $R_{\perp} \approx R_l > R_A$. При этом каоны излучаются из более плотных и "горячих" областей, чем пионы, $R_K < R_{\pi}$, что указывает на более раннее "вымораживание" каонов вследствие их меньшего сечения взаимодействия в адронной материи; в то же время параметр "хаотичности" λ заметно отличается от единицы, и его значение несколько больше для каонов, чем для пионов, $\lambda_K > \lambda_{\pi}$, что, вероятно, является следствием влияния долгоживущих резонансов на формирование конечного пионного и, в меньшей степени, каонного состояния [123].

Интересным экспериментальным фактом представляется наблюдаемое слабое нарушение M_T -скейлинга поперечного радиуса $R_{\perp}$ источника пионов, в частности, в столкновениях Pb—Pb на SPS (эксперимент NA49 [124]), что согласуется с предсказанием такого эффекта в случае существования поперечного коллективного движения адронной материи [114, 116, 117].

Подчеркнем, однако, что анализ такого рода корреляционных эффектов является достаточно тонким исследованием, при котором необходимо учитывать вклад всех возможных эффектов в области малых импульсов. Мы уже упомянули о возможном влиянии распада резонансов, приводящем к "смазыванию" общей корреляционной картины, в том числе и к слабому нарушению M_T -скейлинга. Другим важным эффектом, влияющим на поведение корреляционных функций в области малых относительных импульсов q , является кулоновское взаимодействие частиц, которое учитывается простейшим образом обычно введением поправки, так называемого фактора Гамова — квадрата относительной кулоновской волновой функции пары пионов при нулевом пространственном разрешении [125], хотя ряд теоретических работ

был посвящен разработке более корректного алгоритма учета кулоновских поправок, например, [114, 126–128]. Неучет кулоновского взаимодействия возможен лишь при проведении анализа корреляционных эффектов для нейтральных бозонов, таких, как прямые фотоны, но практическое осуществление такого исследования, как правило, представляется малопродуктивным вследствие большого фона от распада адронов, типа $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$. Еще одной проблемой двухчастичной интерферометрии является отсутствие надежных алгоритмов, позволяющих корректно рассчитывать многочастичные корреляционные функции [129, 130], влияние которых на общую корреляционную картину в плотных адронных системах, особенно при энергиях будущих коллайдеров RHIC и LHC, может быть значительным, если не определяющим.

3.2. Спектры лептонов и фотонов. Идея лептонной и фотонной диагностики равновесной ядерной материи в процессах множественного рождения была впервые выдвинута Е.Л.Фейнбергом [131] и затем развита в большом числе работ ([73, 77, 132–138] и др.). В отличие от адронов лептоны и фотоны, не испытывая сильного взаимодействия, могут почти свободно рождаться и покидать ядерную материю на протяжении всех этапов ее эволюции. При этом спектры термальных фотонов и пар лептонов (дилептонов) весьма чувствительны к температуре среды, что создает возможность измерения начальной температуры и других термодинамических характеристик системы, а также исследования пространственно-временного развития динамических процессов в ультрарелятивистских столкновениях ядер с помощью эмиссии фотонов и дилептонов.

Здесь мы не будем останавливаться на анализе современных методов расчета прямых спектров дилептонов и фотонов, которые подробно рассматривались, например, в обзоре [139]. В большинстве работ выход низкоэнергетичных фотонов ($p_T \lesssim 2$ ГэВ/с) и дилептонов небольших инвариантных масс $M_{12} = \sqrt{(E_1^2 + E_2^2) - (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2)} \lesssim 2\text{--}4$ ГэВ/с² вычисляется в мягковолновом приближении [140] и интегрируется по всей пространственно-временной эволюции "горячей" материи. Перечислим лишь основные особенности механизмов генерации лептон-лептонных пар l^+l^- ($l = e, \mu$) и фотонов γ в ядро-ядерных взаимодействиях.

Наиболее интересующим нас здесь случаем представляется формирование кварк-глюонной или смешанной фазы в ядро-ядерном соударении, когда интенсивное излучение дилептонов происходит в результате процесса аннигиляции кварк-антикварковых пар $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-$, а излучение фотонов — в результате аннигиляции $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$ и мягкого комптоновского рассеяния $qg \rightarrow q\gamma$. Заметим, что помимо традиционного объемного механизма излучения дилептонов и фотонов на границе "горячей" среды может возникать излучение магнитно-тормозного типа, обусловленное взаимодействием кварков с коллективным цветовым полем, обеспечивающим их удержание [135, 136].

При этом для кварк-глюонных систем с размерами $\sim 1 \div 10$ фм, образование которых ожидается в ультрарелятивистских столкновениях ядер, такое "поверхностное" излучение по интенсивности сравнимо с объемным механизмом и характеризуется для цилиндрически-симметричной КПП большой степенью поляризации фотонов и наличием угловой асимметрии лептонных пар в плоскости, перпендикулярной суммарному импульсу пары. Процессы пион-пионной и каон-каонной аннигиляции, $\pi^+\pi^- \rightarrow l^+l^-$ и $K^+K^- \rightarrow l^+l^-$, а также рассеяния типа $\pi\rho \rightarrow \pi\gamma$ в "горячей" адронной фазе также вносят вклад в спектр дилептонов и фотонов соответственно, величина которого определяется температурой адронного газа.

Кроме тепловых дилептонов и фотонов существенный вклад, определяющий интенсивность излучения в области малых поперечных импульсов фотонов q_T и небольших масс дилептонов $M \leq 0,5$ ГэВ/с², дают далитцевские распады π_0, η, ω типа $\pi_0, \eta \rightarrow l^+l^-\gamma, \omega \rightarrow l^+l^-\pi^0$. На поздних стадиях эволюции адронной системы имеет место прямой распад резонансов $\rho_0, \omega, \phi, \psi$ (а при энергиях коллайдеров и Υ) на пару l^+l^- , дающий вклад в область масс дилептонов, близкий к массе резонанса. Большой вклад в спектр фотонов дает электромагнитный распад нейтральных пионов $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, в то время как влияние некоррелированного распада пионов и каонов $\pi^\pm, K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$ ($\bar{\nu}$) на спектр дилептонов будет существенным только при очень больших значениях множественности вторичных частиц в столкновениях тяжелых ядер при энергиях RHIC и, особенно, LHC. Полулептонный распад пар чармированных адронов $D\bar{D} \rightarrow l^+l^-$ (а при энергиях коллайдеров и $B\bar{B}$) дает основной вклад в промежуточную область масс спектра дилептонов $1,5 \leq M \leq 2,5$ ГэВ/с².

Наконец, процессы начального жесткого рассеяния типа $qg \rightarrow q\gamma, q\bar{q} \rightarrow g\gamma$ и рождение пар Дрелла — Яна $q\bar{q} \rightarrow l^+l^-$, происходящие на самой ранней неравновесной стадии эволюции ядро-ядерного соударения в результате отдельных жестких нуклон-нуклонных рассеяний, доминируют в области больших q_T фотонов и $M \geq 4$ ГэВ/с² дилептонов соответственно.

Таким образом, для надежной диагностики начального термализованного состояния необходимо идентифицировать тепловые дилептоны и фотоны на фоне распада резонансов, некоррелированного распада адронов и жестких КХД-процессов в некотором "окне" инвариантных масс спектра дилептонов и поперечных импульсов фотонов.

Избыток пар лептонов по сравнению с ожидаемым значением от известных нетепловых источников, дающих соответствующий вклад в адрон-адронные и адрон-ядерные соударения, наблюдался в ряде экспериментов по столкновениям ядер с энергией $200A \cdot$ ГэВ на ускорителе SPS в ЦЕРН. В табл.1 представлены величины отношения интенсивности излученных дилептонов к их ожидаемому значению в области инвариантных масс $1,5 < M < 2,5$ ГэВ/с² для $\mu^+\mu^-$ и $0,2 < M < 1,5$ ГэВ/с² для e^+e^- в центральных соударениях ядер. Видно, что наблюдаемый избыток дилептонов лежит за пределами

Таблица 1. Отношения интенсивности излученных дилептонов E к их ожидаемому значению в области масс $1,5 < M < 2,5$ ГэВ/ c^2 для $\mu^+\mu^-$ и $0,2 < M < 1,5$ ГэВ/ c^2 для e^+e^-

Эксперимент	Система	Дилептоны	"Избыток" E	Ссылка
NA38	S – U	$\mu^+\mu^-$	$1,3 \pm 0,1$	[141]
HELIOS-3	S – W	$\mu^+\mu^-$	$2,4 \pm 0,4$	[142]
NA50	Pb—Pb	$\mu^+\mu^-$	$2,0 \pm 0,1$	[143]
CERES	S – Au	e^+e^-	$5,0 \pm 2,7$	[144]
CERES/NA45	Pb – Au	e^+e^-	$4,7 \pm 4,6$	[145]

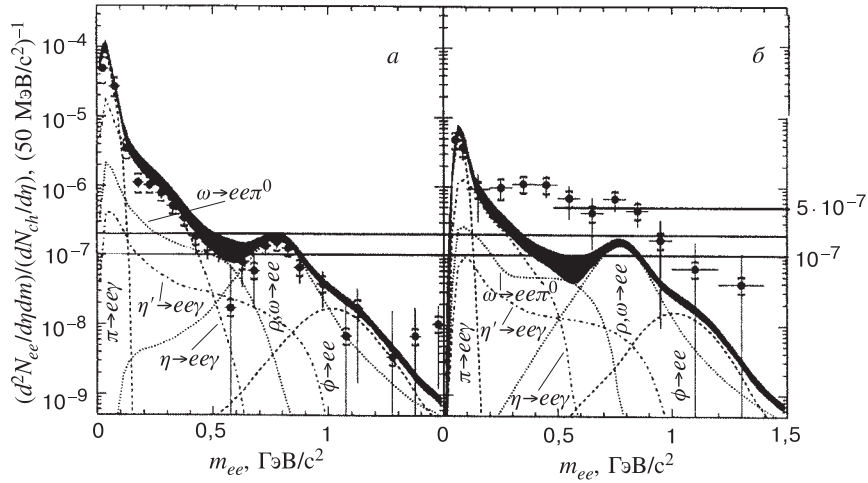


Рис. 7. Спектр масс e^+e^- -пар в столкновениях а) p —Au при 450 ГэВ, $p_\perp > 50$ МэВ/с и б) S—Au при 200 А·ГэВ, $p_\perp > 200$ МэВ/с (эксперимент CERES) в сравнении с вкладом от адронных распадов [144]

статистических и систематических ошибок. В качестве примера на рис.7 показан спектр масс электрон-позитронных пар в столкновениях p —Au при 450 ГэВ и S—Au (эксперимент CERES) в сравнении с различными вкладами от адронных распадов [144]. Интересным фактом при этом является то, что рост множественности e^+e^- -пар с увеличением полной множественности заряженных частиц $dN^\pm/du$ в ядро-ядерных соударениях ближе к квадратичной зависимости, согласующейся с механизмом термальной радиации из "горячей" партонной или адронной материи (интенсивность аннигиляции пропорциональна числу пар частица—античастица [146]), чем к линейной, которая ожидается в результате адронных распадов.

Заметим, однако, что хотя введение дополнительного механизма излучения дилептонов из долгоживущей кварк-глюонной плазмы или смешанной фазы при температуре порядка 160 МэВ [147] заметно улучшает описание экспериментальных данных, полностью согласовать результаты расчетов с наблюдаемым избытком пар мюонов и электронов во всем диапазоне инвариантных масс все же не удастся. В связи с этим представляет значительный интерес возможность модификации свойств векторных мезонов в плотной материи: падение массы и увеличение ширины распада с ростом плотности барионного заряда и увеличением температуры, связанное с частичным восстановлением киральной симметрии [148, 149]. В частности, учет модификации массы ρ -, ω - и η -мезонов в соответствии с результатами правил сумм КХД [149] позволяет описать спектр e^+e^- -пар в ядро-ядерных соударениях без привлечения механизма термальной радиации [150].

В то же время измерения спектров фотонов в столкновениях тяжелых ядер не дают пока оснований говорить об обнаружении прямых тепловых фотонов: не наблюдалось избытка фотонов по сравнению с ожидаемым значением от адронных распадов на уровне 10%-й систематической ошибки в эксперименте CERES [144] (S—Au) в диапазоне $0,4 \leq q_T \leq 2$ ГэВ/с и в эксперименте HELIOS-2 [151] (O—W, S—W) в диапазоне $0,1 \leq q_T \leq 1,5$ ГэВ/с; слабый избыток фотонов 5% в области $0,5 \leq q_T \leq 2,5$ ГэВ/с лежит в пределах 5,8%-й систематической ошибки в эксперименте WA80 [152] (S—Au). При этом множественность фотонов растет линейно с полной множественностью, что вполне согласуется со стандартными механизмами адронных распадов.

Можно надеяться, что будущие эксперименты PHENIX [153] и ALICE [109] на коллайдерах RHIC и LHC дадут дополнительную информацию о механизмах генерации дилептонов и фотонов в ядро-ядерных взаимодействиях. Основной проблемой, возникающей при поиске прямых дилептонов и фотонов от кварк-глюонной плазмы в этом случае, является большой фон от некоррелированного распада адронов, обусловленный огромной множественностью частиц в событии. Решение задачи подавления такого фона относительно электромагнитных сигналов (до уровня $< 0,1\%$) представляется возможным при условии сочетания различных типов детекторов для достижения самой тщательной идентификации треков частиц.

3.3. Рождение странных частиц. Важным следствием достижения деконфайнмента ядерной материи является возможность усиленного рождения адронов, содержащих странные кварки [154, 155]. В случае формирования КГП выход странных адронов должен достигать максимально возможного значения, так как s -кварковая составляющая плазмы быстро приходит в состояние химического равновесия в результате интенсивных глюон-глюонных взаимодействий, $gg \rightarrow s\bar{s}$, в то время как при ненулевой барионной плотности легкие антикварки $\bar{u}$ и $\bar{d}$ должны подавляться в силу принципа Паули.

В химически равновесном адронном газе отношение множественности странных и нестранных частиц должно определяться лишь отношением их масс — например, каоны будут "термально" подавлены по сравнению с пионами в $\exp(m_K/T_f)/\exp(m_\pi/T_f)$ раз, т.е. $K^\pm/\pi^\pm \simeq 0,2$ при $T_f \simeq m_\pi$ ($\simeq 140$ МэВ).

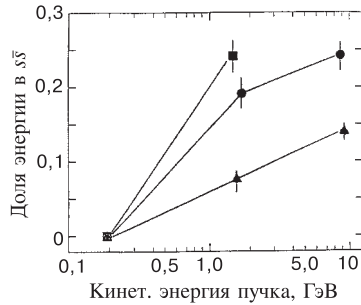


Рис. 8. Доля полной энергии, выделяемой в центральных ядро-ядерных соударениях, которая уносится всеми странными частицами, как функция кинетической энергии в с.ц.м. сталкивающихся нуклонов [104]. Треугольники соответствуют нуклон-нуклонным взаимодействиям, кружки — взаимодействиям легких ядер ($A_l + A_l = \text{Si} + \text{Al}$, $\text{S} + \text{S}$), квадраты — взаимодействиям тяжелых ядер ($A_h + A_h = \text{Au} + \text{Au}$, $\text{Pb} + \text{Pb}$)

сталкивающихся нуклонов $\sqrt{s} \gtrsim 2$ ГэВ доля уносимой странными частицами энергии значительно выше в ядро-ядерных, чем в нуклон-нуклонных столкновениях.

В то же время эксперименты по поиску метастабильной странной материи (странные "ядра" с квантовым числом $S > 1$, барионным числом $B > 1$, отношением заряда к массе $|Z|/M \lesssim 0,1$ (ГэВ/ c^2) $^{-1}$ и временем жизни порядка 10^{-4} с, рождение которых в случае формирования КГП предсказывается рядом моделей [161–164]) E878 [165], E864 [166] на AGS и NA52 [167] на SPS пока не дали положительных результатов.

Отметим, что на настоящий момент нет оснований для однозначной интерпретации усиленного рождения странных частиц в релятивистских столкновениях ядер как сигнала формирования КГП, так как повышенный выход

Избыток странных частиц в столкновениях тяжелых ядер по сравнению с соответствующими адрон-адронными соударениями наблюдался в ряде экспериментов на ускорителях AGS (из последних результатов упомянем данные E866 [92], E877 [93], E891 [94]) и SPS (NA36 [156], WA85 [157], WA94 [158], WA97 [99], NA44 [100], NA49 [65]) для K , Λ , $\bar{\Lambda}$, Ξ , $\bar{\Xi}$, Ω - и $\bar{\Omega}$ -барионов; также наблюдался повышенный выход ϕ -мезонов по отношению к ρ и ω в эксперименте NA38 [168]. Уже при энергиях AGS отношения выхода странных и нестранных частиц в ядро-ядерных взаимодействиях близки к их "термальным" значениям, что свидетельствует о возможном достижении системой адронов химического равновесия в этом случае [102]. На рис.8 показана доля полной выделяемой в центральных ядро-ядерных соударениях энергии, которая уносится всеми странными частицами ($A_l + A_l = \text{Si} + \text{Al}$, $\text{S} + \text{S}$ и $A_h + A_h = \text{Au} + \text{Au}$, $\text{Pb} + \text{Pb}$) [104]. Видно, что уже при энергиях в системе центра масс

большинства странных частиц может быть согласован с результатами адронных каскадных моделей [49, 159, 160], в которых вторичные взаимодействия между рожденными адронами приводят систему к состоянию термального и химического равновесия (например, за счет реакций типа $\pi\pi \rightarrow KK$ или $\pi N \rightarrow K\Sigma$, KL и др.). Однако те же модели сталкиваются с некоторыми трудностями при описании выхода странных антибарионов. Кроме того, скорость формирования странных частиц в адронном газе существенно ниже, чем в КПП, и соответственно для достижения химического равновесия в адронном газе требуется гораздо больше времени. Можно надеяться, что природа повышенного выхода странных частиц в ядро-ядерных соударениях по сравнению с соответствующими адрон-адронными столкновениями будет прояснена в новых экспериментах на коллайдерах RHIC и LHC.

4. "ЖЕСТКИЕ" ТЕСТЫ ПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СОУДАРЕНИЯХ ЯДЕР. I. ТЯЖЕЛЫЕ КВАРКОНИИ

4.1. Феноменология рождения кваркониев в ядерных столкновениях.

В последние годы интенсивно изучаются так называемые "жесткие" тесты сверхплотной ядерной материи — тяжелые кварконии и жесткие партонные струи, которые, не являясь частью термализованной системы, несут информацию о ранних стадиях ее эволюции. Предсказываемое подавление выхода Ψ -резонансов в релятивистских ядро-ядерных соударениях в случае формирования КПП первоначально было основано на простой и красивой идее, что связанное состояние $c\bar{c}$ -пары не может существовать, когда длина цветовой экранировки в плазме r_D меньше, чем радиус связанного состояния $\langle r_\Psi^2 \rangle^{1/2}$ [169, 170]. В последнее время широко рассматривается также динамический механизм диссоциации кваркониев в результате их столкновений с сопутствующими (т.е. движущимися с такой же продольной быстротой) глюонами [171–173]. Сечение расщепления чармония с энергией связи ε_Ψ глюоном с импульсом p_g может быть оценено в соответствии с формулой [171]:

$$\sigma_{g\Psi}(p_g) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{32}{3}\right)^2 \left(\frac{m_c}{\varepsilon_\Psi}\right)^{1/2} \frac{1}{m_c^2} \frac{(p_g/\varepsilon_\Psi - 1)^{3/2}}{(p_g/\varepsilon_\Psi)^5}, \quad (26)$$

где m_c — масса c -кварка. Характерная передача импульса в случае диссоциации в КПП при температуре T примерно равна среднему импульсу "термального" глюона $\langle p_g \rangle_T \simeq 3T$, и уже для $T = 200$ МэВ получим $\langle p_g \rangle_T \simeq 0,6$ ГэВ — порядка энергии связи J/Ψ , $\varepsilon_{J/\Psi} \simeq 0,64$ ГэВ, что достаточно для расщепления связанного состояния. В адронном газе при температуре T средний импульс адрона $\langle p_h \rangle_T \simeq 3T$, а распределение "жестких" глюонов

в пионе ($x = p_g/p_h \rightarrow 1$) имеет вид $g(x) \simeq 0,5(1-x)^3$, т.е. средний импульс "конфайнмированного" глюона составляет $\langle p_g \rangle_h \simeq \langle p_h \rangle / 5 \simeq 3T/5$, что недостаточно для диссоциации J/Ψ при $T \lesssim 1$ ГэВ. В то же время небольшое значение энергии связи Ψ' -резонанса $\varepsilon_{\Psi'} \simeq 0,06$ ГэВ приводит к тому, что он может расщепляться как в партонной, так и в адронной "горячей" материи.

Помимо диссоциации в КПП или адронном газе важным механизмом подавления выхода тяжелых кваркониев является предрезонансное поглощение в "холодной" ядерной материи, которое должно проявляться уже в адрон-ядерных взаимодействиях [174,175]. Вероятность "выживания" Ψ -резонансов в $p-A$ -столкновениях S в рамках модели Глаубера — Ситенко определяется выражением (см., например, [174,176]):

$$S_{pA}^{\text{Gl}} = \frac{\sigma_{pA \rightarrow \Psi}}{A\sigma_{pN \rightarrow \Psi}} = \int d^2b \, dz \, \rho_A(b, z) \exp \left[-(A-1) \int_z^\infty dz' \rho_A(b, z') \sigma_{\text{abs}} \right], \quad (27)$$

где ρ_A — стандартное распределение ядерной плотности Вудса — Саксона, σ_{abs} — сечение поглощения Ψ в ядерном веществе, интегрирование проводится по прицельному параметру b налетающего протона и точке рождения z предрезонансного состояния $c\bar{c}$. Полученное путем сравнения с экспериментальными данными по $p-A$ -взаимодействиям ($A = \text{C, Al, Cu, Ca, Fe, W, U}$) при энергиях налетающего протона 200 (NA38, [177]), 450 (NA38/NA51, [177, 178]) и 800 ГэВ (E772, [179]) сечение поглощения J/Ψ составляет $\sigma_{\text{abs}} = 7,3 \pm 0,6$ мб с $\chi^2/d.f. \simeq 1,4$ [176], что примерно на порядок выше, чем предсказания для сечения поглощения синглетного состояния $c\bar{c}$, полученные на основе правил сумм КХД [171,180]. Кроме того, постоянное (в пределах ошибки) отношение выхода J/Ψ и Ψ' для различных ядер A указывает на одинаковое сечение их поглощения в ядерном веществе, хотя разная энергия связи физических чармониев должна была бы приводить к заметному отличию в степени их подавления. Причиной такого расхождения является то, что в сечение рождения Ψ -резонансов при высоких энергиях существенный вклад дают предрезонансные октетные состояния $c\bar{c}-g$ [181], и этот факт хорошо согласуется с последними данными по $p\bar{p}$ -столкновениям эксперимента CDF на тэватроне [182]. Большое сечение поглощения чармониев в "холодном" ядерном веществе и его одинаковое значение для J/Ψ и Ψ' являются следствием предрезонансного поглощения состояния цветового октета $c\bar{c}-g$.

Действительно, рождение чармония в результате слияния пары партонов (при высоких энергиях преимущественно глюонов) в $c\bar{c}$ -пары (см., например, [183]) происходит практически мгновенно из-за большой массы c -кварка: в системе покоя $c\bar{c}$ -пары время формирования $\tau_c \simeq (2m_c)^{-1} \simeq 0,07$ фм/с. Однако $c\bar{c}$ -пары рождаются, вообще говоря, в цветовом состоянии, и для нейтрализации цвета и формирования синглетного $c\bar{c}$ -состояния J/Ψ или Ψ' требуется уже значительно большее время $\sim 0,3$ фм/с [184]. Таким обра-

зом, при малых поперечных импульсах предрезонансное состояние чармония представляет собой в течение первых 0,3 фм/с в основном связанное состояние цветового октета $c\bar{c}$ с мягким коллинеарным глюоном, обеспечивающим цветовую нейтральность $c\bar{c} - g$ -системы в целом. Для энергий SPS ядро представляет собой лоренц-сжатый вдоль оси столкновения диск толщиной 1 – 2 фм, и спустя 0,5 ÷ 1 фм/с большинство нуклонов пролетит мимо образовавшегося чармония, "увидев" лишь предрезонансное состояние; физическое синглетное состояние Ψ формируется вне ядра в достижимой кинематической области в $p - A$ -столкновениях ($x_F \geq 0$). Предсказываемое сечение поглощения октетного состояния $c\bar{c} - g$ в "холодном" ядерном веществе составляет $\sigma_{\text{abs}} \simeq 6 - 7$ мб [184], что находится в полном соответствии с имеющимися экспериментальными данными. Прямое измерение сечения σ_{abs} для физического синглетного состояния J/Ψ возможно в эксперименте, когда ядро налетает на покоящийся протон, и в достижимой в этом случае кинематической области $x_F \lesssim -0,5$ медленные в системе покоя ядра чармонии практически не должны поглощаться в ядерной материи [176].

В столкновениях двух ядер выход кваркониев может быть измерен как функция центральности столкновения, и вероятность "выживания" Ψ -резонансов в $A - B$ -соударениях при фиксированном прицельном параметре b имеет вид [174, 176]:

$$\begin{aligned} \frac{dS_{AB}^{\text{Gl}}(b)}{d^2b} &= \frac{1}{AB\sigma_{NN \rightarrow \Psi}} \left[\frac{d\sigma_{AB \rightarrow \Psi}}{d^2b} \right] = \\ &= \int d^2s dz dz' \rho_A(\mathbf{s}, z) \rho_B(\mathbf{b} - \mathbf{s}, z') S_A(z, \mathbf{s}) S_B(z', \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (28)$$

где $S_A(z, \mathbf{s}) = \exp[-(A-1) \int_z^\infty dz_A \rho_A(\mathbf{s}, z_A) \sigma_{\text{abs}}]$ и аналогично для $S_B(z', \mathbf{s})$; $\mathbf{s}$ определяет положение точки рождения $c\bar{c}$ -пары в плоскости, перпендикулярной оси столкновения ядер, z и z' — продольные координаты этой точки внутри ядра A и B соответственно. Для того чтобы получить нормированное распределение вероятности "выживания", мы должны поделить $[dS_{AB}^{\text{Gl}}(b)/d^2b]$ на $[dS_{AB}^{\text{Gl}}(b; \sigma_{\text{abs}} = 0)/d^2b]$.

Заметим, что экспериментальное определение центральности взаимодействия производится, как правило, с помощью калориметрических измерений выделенной в событии поперечной энергии E_T , увеличение которой коррелировано с уменьшением прицельного параметра b .

Данные по рождению J/Ψ -резонансов (идентифицируемых как пики в спектре по эффективной массе $\mu^+ \mu^-$ -пар) в ядро-ядерных взаимодействиях при энергии CERN-SPS 200 ГэВ/нуклон согласуются со стандартным сценарием предрезонансного поглощения в "холодном" ядерном веществе вплоть до соударений S—U (NA38, [177, 185, 186]); однако недавно зарегистрировано аномально сильное поглощение J/Ψ (в пределах 10 стандартных отклонений от стандартного сценария) в соударениях Pb—Pb при энергии 158 ГэВ/нуклон

Таблица 2. Вероятность ”выживания” J/Ψ в $A - B$ -соударениях $S_{J/\Psi}^{\text{exp}}$ [177, 187] (данные для всех неупругих взаимодействий) в сравнении с результатами модели предрезонансного поглощения $S_{J/\Psi}^{\text{Gl}}$ (Ф-ла (28)) с сечением $\sigma_{\text{abs}} = 7,3 \pm 0,6$ мб [176]

Система	$S_{J/\Psi}^{\text{exp}}$	$S_{J/\Psi}^{\text{Gl}}$
O — Cu	$0,57 \pm 0,06$	$0,63 \pm 0,02$
O — U	$0,53 \pm 0,05$	$0,52 \pm 0,03$
S — U	$0,46 \pm 0,05$	$0,49 \pm 0,03$
Pb—Pb	$0,27 \pm 0,02$	$0,39 \pm 0,03$

в эксперименте NA50 [187] (см. табл.2 [176] и рис.9 [186]), которое усиливается с ростом центральности проходимо парой $c\bar{c}$ в ядерном веществе столкновения и может быть интерпретировано как результат формирования КГП [176, 188, 189]. Заметим, что экспериментальная нормировка выхода

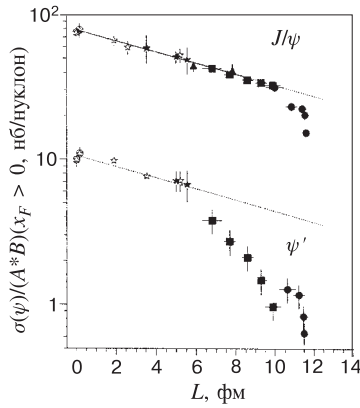


Рис. 9. Сечение рождения J/Ψ и Ψ' в $p - A$ - и $A - B$ -соударениях как функция среднего расстояния L , проходимо парой $c\bar{c}$ в ядерном веществе ($L = (3/4) \times \{R_A(A-1)/A + R_B(B-1)/B\}$ для центральных столкновений и уменьшается с ростом параметра удара b). Пять точек S—U и Pb—Pb соответствуют различным значениям b . Прямые линии соответствуют $\exp(-\rho\sigma_{\text{abs}}L)$ с $\rho\sigma_{\text{abs}} = 0,088$ фм $^{-1}$ [186]

чармониев проводилась на сечение ”неподавляемого” процесса — рождения жестких мюонных пар Дрелла — Яна ($q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-$), которое пропорционально числу бинарных нуклон-нуклонных субстолкновений в ядро-ядерном взаимодействии, $\sigma_{AB \rightarrow \Psi}/\sigma_{AB}^{DY}$ и $\sigma_{AB}^{DY} = AB\sigma_{NN}^{DY}$. В то же время ”аномальное” поглощение Ψ' -резонанса наблюдается уже в столкновениях S—U и усиливается в соударениях Pb—Pb.

Формирование ”горячего” деконфаймированного состояния может произойти в результате многократных неупругих взаимодействий между ”ранеными” нуклонами (нуклонами-участниками), поэтому удобно ввести понятие ”плотности взаимодействий” [176] $\kappa \equiv N_c/N_w \geq 0,5$, где N_c и N_w — число нуклон-нуклонных субстолкновений и ”раненых” нуклонов соответственно. При этом $\kappa = 0,5$ для $p - p$ -соударений, $0,5 \leq \kappa \leq 1$ для $p - A$ -соударений, и κ может быть больше 1 только для $A - B$ -соударений, когда существует увеличивающаяся с центральностью столкновения вероятность перерасеяния ”раненых” нуклонов. Тогда деконфайнмент может достигаться при некотором критическом значе-

нии $\kappa_c = \kappa(b, s_c)$ (s_c — радиус "горячей" области при фиксированном b), и модифицированная вероятность "выживания" Ψ может быть записана в виде

$$S_{\psi}^{\text{dec}}(b)/S_{\text{GI}}(b) = [1 - f_{\Psi}(b)], \quad (29)$$

где доля чармониев внутри "горячей" области по сравнению с полным объемом взаимодействия равна

$$f_{\Psi}(b) = \int_0^{s_c} d^2s N_c(b, s) S_{\text{GI}}(b, s) / \int_0^{\infty} d^2s N_c(b, s) S_{\text{GI}}(b, s). \quad (30)$$

Оцениваемое в работе [176] критическое значение $\kappa_c \simeq 2,9$ для столкновений Pb—Pb дает хорошее согласие с экспериментальными данными по рождению J/Ψ , так же, как и оцениваемая в работе [189] плотность энергии в "горячей" фазе $\varepsilon_c \simeq 3,4$ ГэВ/фм³, значение которой близко к предсказываемому решеточной КХД значению критической плотности энергии кварк-адронного фазового перехода [35, 36].

Хотя интерпретация "аномального" подавления выхода J/Ψ в соударениях Pb—Pb как результат формирования КГП представляется вполне правдоподобной, тем не менее уже предлагаются альтернативные объяснения данного явления за счет Ψ — h -перерассейаний на сопутствующих адронах, $h + \Psi \rightarrow D + \bar{D} + X$, без дополнительного предположения о реализации сценария деконфайнмента [190, 191]. Начальная плотность адронного газа также определяется числом "раненых" нуклонов:

$$n_h(b, s) = N_h \left[\frac{dN_{\omega}(b, s)}{d^2s} \right], \quad (31)$$

где N_h — среднее число адронов, рожденных каждым "раненым" нуклоном. Тогда вероятность "выживания" Ψ в адронном газе, испытывающем квазидномерное скейлинговое расширение, запишется в виде

$$S_{\Psi}^h = \frac{\int d^2s \exp[-v\sigma_{\Psi-h}n_h \ln(n_h/n_f)] \left[\frac{d^2S_{\text{GI}}}{d^2bd^2s}(b, s) \right]}{\left[\int d^2s \frac{d^2S_{\text{GI}}}{d^2bd^2s}(b, s; \sigma_{\text{abs}} = 0) \right]}, \quad (32)$$

где $\sigma_{\Psi-h}$ — сечение расщепления чармония сопутствующими адронами, v — средняя скорость Ψ относительно адронов, n_f — конечная плотность адронного газа на стадии "вымораживания".

В работе [190] S—U и Pb—Pb данные по рождению J/Ψ были описаны единым образом в модели сопутствующих адронов с сечениями поглощения

в "холодном" ядерном веществе и в "горячем" адронном газе $\sigma_{\text{abs}}^{J/\Psi-N} \simeq \simeq 4,8$ мб и $\sigma_{\text{dis}}^{J/\Psi-h} = 2\sigma_{\text{abs}}^{J/\Psi-N}/3 \simeq 3,2$ мб соответственно. Хотя значение сечения предрезонансного поглощения $\sigma_{\text{abs}}^{J/\Psi-N}$ в этом случае представляется несколько заниженным по сравнению с лучшим фитом $p-A$ -данных $7,3$ мб [176], большие ошибки эксперимента оставляют возможность и для $\sigma_{\text{abs}}^{J/\Psi-N} = 4,8$ мб.

Детальное исследование механизма диссоциации Ψ -резонансов в адронном газе, учитывающее вероятности переходов $J/\Psi + \pi \rightarrow \Psi' + X$ и $\Psi' + \pi \rightarrow J/\Psi + X$, было выполнено в работе [191]. Лучшее описание данных по рождению J/Ψ и Ψ' в адрон-ядерных и ядро-ядерных взаимодействиях, включая Pb—Pb, было достигнуто с использованием сечений поглощения $\sigma_{\text{abs}} = 4,1$ мб, $\sigma_{\text{dis}}^{J/\Psi-h} = 0,4$ мб, $\sigma_{\text{dis}}^{\Psi'-h} = 2,6$ мб, а также сечений переходов $\sigma^{J/\Psi \rightarrow \Psi'} = 0,1$ мб и $\sigma^{\Psi' \rightarrow J/\Psi} = 0,65$ мб.

В связи с неоднозначностью интерпретации имеющихся экспериментальных данных по рождению чармониев в ядро-ядерных взаимодействиях возникает необходимость рассмотрения дополнительных характеристик, чувствительных к ранней динамике реакций. В частности, в работе [192] предлагается исследовать распределение чармониев по поперечному импульсу, среднее значение которого должно увеличиваться с ростом выделяемой в событиях поперечной энергии E_T (или с уменьшением параметра удара b) в стандартной модели предрезонансного поглощения и, начиная с некоторого критического значения E_T , падать в "горячей" деконфаймированной среде. Такого характерного изменения в поведении среднего поперечного импульса J/Ψ как функции E_T не наблюдалось (в пределах ошибок) в столкновениях ядер вплоть до S—U, подобный же анализ спектра чармониев, образовавшихся в соударениях Pb—Pb, пока еще только проводится. В любом случае экспериментально наблюдаемое "аномальное" подавление рождения Ψ -резонансов представляется интригующим явлением, природу которого в полной мере только предстоит выяснить.

4.2. Экспериментальные перспективы. Для более тяжелых систем ($b\bar{b}$) подобный эффект подавления в сверхплотной сильновзаимодействующей материи ожидается при более высоких температурах, чем для ($c\bar{c}$), достижение которых ожидается в центральных соударениях тяжелых ионов на будущих коллайдерах RHIC и LHC. При этом степень подавления Υ -, Υ' - и Υ'' -резонансов, имеющих разные радиусы связанного состояния и энергию связи, будет различаться. Регистрация подавления Υ -резонансов в плотной материи является одной из основных задач физической программы по столкновениям тяжелых ионов в эксперименте CMS на коллайдере LHC [193].

Компактный мюонный соленоид (CMS) является одним из двух детекторов, предложенных первоначально для главной цели pp -программы на LHC — поиска хиггсовского бозона [26]. В связи с этим детектор оптимизируется

для точного измерения характеристик высокоэнергичных мюонов, фотонов, электронов и адронных струй, что дает возможность исследования "жестких" тестов КПП в столкновениях тяжелых ионов. Отличительной особенностью установки CMS является наличие мелкогранулированных электромагнитного и адронного калориметров, помещенных в сильное соленоидальное магнитное поле $B = 4$ Тл. Центральная баррель-часть покрывает диапазон быстрот $|\eta| < 1,5$. Экспериментально Υ -резонансы идентифицируются как пики в спектре по эффективной массе мюонных пар (используется канал распада $\Upsilon \rightarrow \mu^+ \mu^-$). Таким образом, для надежной регистрации и точного измерения характеристик Υ -резонансов необходимо решить проблему распознавания мюонных треков при ожидаемой для центральных соударений тяжелых ядер сильной загрузке детекторов трекера. В случае CMS импульс мюона может быть измерен в центральном треkere детектора на расстоянии не более 1,3 м до вершины взаимодействия. Затем мюоны проходят через калориметры и регистрируются в мюонных камерах в диапазоне быстрот $|\eta| < 2,6$. Поперечный импульс мюона может быть определен в этом случае с точностью $\leq 1\%$ в магнитном поле 4 Тл [193].

Оптимизация алгоритма димюонной реконструкции основана на поиске критериев, которые позволили бы получать максимальное количество димюонов от распада Υ и в то же время максимально возможным образом подавить фон от некоррелированных пар мюонов от распада пионов и каонов, давших отклики в мюонных станциях. Эффективность восстановления зависит от множественности вторичных частиц: от 66% для максимальной множественности, соответствующей центральному взаимодействию Pb—Pb, до 90% для множественности в три раза меньшей. При этом эффективность восстановления димюонов от фоновых событий в шесть раз меньше и практически не зависит от множественности. Отношение сигнала к фону при наиболее "пессимистичных" оценках сечения рождения Υ и максимальной множественности не ниже 7% и увеличивается с уменьшением множественности [193], что дает возможность регистрации Υ -резонансов и исследования их свойств в связи с поиском сигналов формирования сверхплотной материи в ядроядерных взаимодействиях на LHC.

5. "ЖЕСТКИЕ" ТЕСТЫ ПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СОУДАРЕНИЯХ ЯДЕР. II. АДРОННЫЕ СТРУИ

5.1. Перерассеяние жестких партонных струй в плотной материи. Наряду с подавлением тяжелых кваркониев одним из процессов, который мог бы дать информацию о самых ранних стадиях эволюции сверхплотной материи, образующейся в ультрарелятивистских столкновениях ядер при энергиях

коллайдеров RHIC и LHC, является прохождение через нее жестких струй цветозаряженных партонов, рождение пар которых происходит в самом начале процесса соударения ($\tau_{\text{form}} \sim 1/p_T \lesssim 0,01$ фм/с) в результате отдельных жестких нуклон-нуклонных (партон-партонных) рассеяний. Такие струи проходят через плотную партонную материю, формируемую из системы мини-струй в течение большого масштаба времени ($\gtrsim 0,1$ фм/с) [37, 38, 53–55, 60], и взаимодействуют с конститuentами среды, изменяя в результате дополнительных перерассеяний свои первоначальные свойства.

Полезным обстоятельством при этом является то, что рождение жестких адронных струй в экспериментах по e^+e^- -аннигиляции, в ep -, pp - и $p\bar{p}$ -взаимодействиях на коллайдерах — достаточно хорошо изученное явление, которое явилось наглядным тестом теории возмущений КХД, подтвердив на опыте справедливость многих ее предсказаний* (см., например, обзоры [194, 195]). Модификация свойств жестких струй, образованных в ядроядерных столкновениях, по сравнению с соответствующими адрон-адронными соударениями свидетельствовала бы о специфических ядерных эффектах, в частности, о перерассеянии струй в среде. Таким образом, поиск возможных инструментов изучения свойств сверхплотной материи приводит к необходимости выявления характеристик партонных струй, чувствительных к ее параметрам и характеру пространственно-временной эволюции.

На рис.10 схематично показана геометрия задачи о прохождении пары жестких партонных струй через цилиндрически-симметричную плотную материю, образование которой ожидается в центральных ультрарелятивистских $A-A$ -соударениях. Пара жестких струй цветозаряженных партонов рождается в результате отдельного жесткого нуклон-нуклонного взаимодействия в вершине $P(R, \varphi)$ (R_T — расстояние от оси столкновения ядер z до вершины P , φ — азимутальный угол, определяющий направление движения струи), θ — полярный угол (для $p_T^{\text{jet}} \gg p_L^{\text{jet}}$, $\theta \sim \pi/2$). В простейшей партонной модели без учета глюонной радиации в начальном состоянии начальное жесткое рассеяние происходит в плоскости, и струи коррелированы по азимутальному углу вылета: $\varphi^{\text{jet1}} + \varphi^{\text{jet2}} = \pi$. Можно определить некомпланарность пары струй K_T как сумму проекций импульсов струй на ось, перпендикулярную плоскости начального рассеяния, и для малых $K_T \ll p_T^{\text{jet1,2}}$ получим

$$K_T \simeq 0,5(p_T^{\text{jet1}} + p_T^{\text{jet2}}) \sin(\varphi^{\text{jet1}} + \varphi^{\text{jet2}}). \quad (33)$$

Заметим, что экспериментально плоскость начального рассеяния определяется как плоскость, в которой минимальна некомпланарность K_T . В

*Корректное сопоставление свойств струй на партонном и адронном уровнях позволяет провести гипотеза "мягкого обесцвечивания", предполагающая, что адронизация не приводит к качественной перестройке распределения частиц в струе.

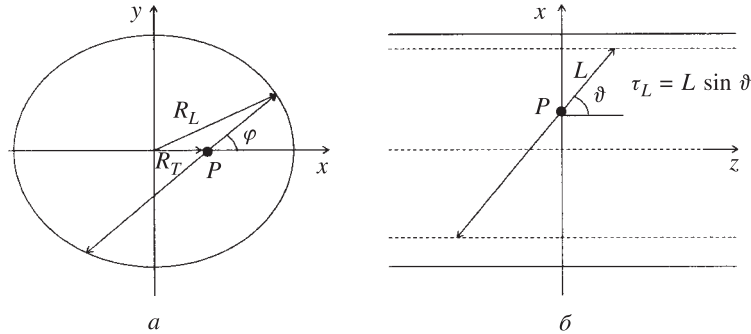


Рис. 10. Схема прохождения жестких струй через цилиндрически-симметричную плотную материю: z — направление оси столкновения ядер, $P(R, \varphi)$ — вершина рождения пары струй: а) срез $z = 0$, б) проекция на плоскость начального рассеяния. Сплошные линии ограничивают область, занимаемую плотной материей, штриховые линии представляют проекцию на плоскость рассеяния прямой, параллельной оси z и проходящей через точку, в которой струя выходит из среды

работе [196] впервые предлагалось использовать распределение по некомпланарности пары жестких струй как диагностическое средство КПП: было показано в простейшей модели сферически-симметричной плазмы, что некомпланарность чувствительна к многократному рассеянию струй на конституентах среды и может быть применена для измерения начальной температуры КПП. Распределения по некомпланарности оценивались также для случая идеальной продольно-расширяющейся плазмы в работе [197] и для случая адронного газа в [198]. В последнее время активно ведутся поиски связанных с некомпланарностью величин, чувствительных к начальным параметрам плотной среды [199,200] и к характеру ее пространственно-временной эволюции [201–203]. Заметим, однако, что извлечение информации о свойствах высокотемпературной среды из распределения по некомпланарности струй в реальном эксперименте сильно затруднено разного рода фоновыми эффектами. В частности, глюонная радиация в начальном и конечном состояниях, ферми-движение нуклонов в ядре и кварков в нуклоне, адронизация, особенности калориметрии и алгоритма поиска струй будут приводить к дополнительной некомпланарности, которая может существенно превышать некомпланарность, связанную с перерассеянием [197–199], вопрос о надежном выделении которой, таким образом, остается открытым.

Другим интересным эффектом, ожидаемым при прохождении жесткой партонной струи через КПП, является развитие динамических неустойчивостей в среде, которые должны приводить к пространственно-неоднородному распределению цветового заряда и сопровождаться характерным излучением пионов и фотонов [204,205]. Однако возможность экспериментальной реги-

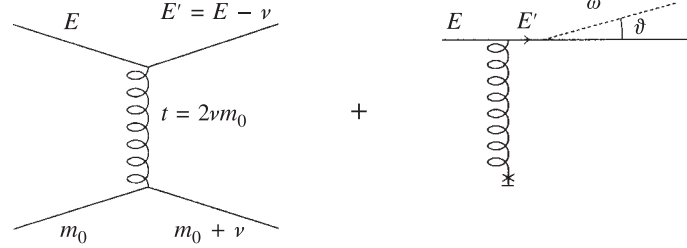


Рис. 11. Фейнмановские диаграммы для элементарного акта рассеяния жесткого партонa с начальной энергией $E \gg m_0 \sim 3T$ в плотной материи при температуре T (m_0 — характерная энергия конститuenta среды) с учетом столкновительных ν и радиационных ω энергетических потерь

страции этого эффекта в ультрарелятивистских соударениях ядер не представляется очевидной, вследствие больших фоновых эффектов, и требует дальнейшего изучения.

Важным вопросом является исследование механизмов энергетических потерь жестких партонa в "горячей" сильновзаимодействующей материи. При этом следует различать столкновительные потери, обусловленные упругим перерассеянием жесткого партонa на конститuentaх среды [202, 203, 206, 207], и радиационные потери, связанные с испусканием "тормозных" глюонов [208–216] (см. рис.11). В работах [208] и [212] было впервые предложено использовать подавление выхода пар жестких струй и повышенное отношение выхода одиночных моноструй к парам струй, соответственно, обусловленные энергетическими потерями партонa в среде, как признак формирования сверхплотного состояния КГП в соударениях ядер. При этом указывалось на возможное изменение механизма радиационных потерь жесткого партонa во время кварк-адронного фазового перехода.

Еще одним существенным следствием интенсивных потерь энергии c - и b -кварков в плотной среде может стать модификация спектра дилептонов в области инвариантных масс $1,5 \leq M \leq 2,5$ ГэВ/с²: доминирование вклада от прямых дилептонов и рассеяния Дрелла — Яна над вкладом от полулептонного распада $D\bar{D} (B\bar{B}) \rightarrow l^+l^-$, обусловленное подавлением выхода чармированных и боттомированных адронов $D\bar{D}$ и $B\bar{B}$ [217, 218].

Хотя глюонная радиация является весьма эффективным механизмом энергетических потерь жесткого партонa в плотной среде [209–211], в асимптотическом режиме Бете — Гайтлера независимых излучений (времена формирования излучаемых глюонов τ_f много меньше длины свободного пробега жесткого партонa λ) "тормозные" глюоны испускаются в узком конусе струи $\theta^{BH} \lesssim \sqrt{m_0/E}$ (m_0 — типичная энергия конститuenta среды), и если измерять энергию струи, суммируя энергию всех адронов в достаточно широ-

ком конусе $\theta > \theta^{BH}$, то основная часть энергии начального партона может быть восстановлена [209]. Однако в недавних работах [213, 214] было показано, что отличительной особенностью энергетического спектра "тормозных" глюонов в КХД-среде является характерное уширение конуса излучения ($\theta^* \gtrsim \sqrt{m_0/E}$), связанное с деструктивной интерференцией между различными амплитудами рассеяния с учетом диаграмм, соответствующих перерассеянию "тормозных" глюонов в материи (КХД-аналог эффекта Ландау — Померанчука — Мигдала в КЭД [64]). В то же время "термальные" частицы, упруго провзаимодействовавшие с жестким партоном, летят преимущественно в направлении, ортогональном направлению движения струи, поэтому большая часть столкновительных потерь, в отличие от радиационных, является "невосстановимой" с экспериментальной точки зрения.

Отметим, что непосредственное измерение энергетических потерь жестких партонов в эксперименте могло бы дать важную информацию о механизме многократного рассеяния цветозаряженного объекта в КХД-среде. В связи с этим несомненный интерес представляет исследование не только двух- и многоструйных событий, но и событий, где партонная струя рождается вместе с "неподавляемой" частицей, которая, не испытывая сильного взаимодействия, может почти свободно покидать плотную материю на протяжении всех этапов ее эволюции, как, например, жесткий фотон [219] (процесс типа $q + g \rightarrow q + \gamma$ или $q + \bar{q} \rightarrow g + \gamma$) или Z^0 -бозон [220] ($q + g \rightarrow q + Z \rightarrow q + \mu^+ + \mu^-$ или $q + \bar{q} \rightarrow g + Z \rightarrow g + \mu^+ + \mu^-$). "Помеченная" таким образом партонная струя испытывает перерассеяние в плотной материи, в то время как летящая в противоположном направлении "неподавляемая" частица регистрируется с энергией, близкой к начальной энергии струи. Заметим, однако, что малое сечение таких процессов (по сравнению с сечением жесткого партон-партонного рассеяния, типа $gg (gq, qq) \rightarrow gg (gq, qq)$ и др.), определяющееся малостью константы электромагнитного взаимодействия, может затруднить задачу получения статистики, необходимой для систематического анализа и однозначной интерпретации данных.

Важно отметить, что в случае адрон-адронных соударений только жесткие партон-партонные взаимодействия с передачей импульса много больше масштабного параметра КХД $\Lambda \simeq 200$ МэВ могут быть рассмотрены в рамках теории возмущений КХД, в то время как мягкие непертурбативные взаимодействия обычно описываются с помощью феноменологических струнных моделей. Однако в сверхплотной кварк-глюонной системе ($n^{1/3} \gg \Lambda$, где n — плотность числа частиц), в которой в силу коллективных эффектов экранируется цветное взаимодействие, партоны полагаются асимптотически свободными, что позволяет рассмотреть задачу о рассеянии жесткого партона в КГП в рамках теории возмущений КХД [209, 210]. При этом дебаевская экранирующая масса μ_D является естественным параметром, регуляризирующим сечение партон-партонного рассеяния.

5.2. Модельный учет потерь энергии жесткой партонной струи в расширяющейся плотной материи. В настоящем разделе мы рассмотрим простую кинетическую модель [197, 202, 203, 216] учета энергетических потерь жесткой партонной струи в цилиндрически-симметричной расширяющейся плотной материи. Изменение 4-импульса струи в результате ее многократного рассеяния на движущихся с такой же продольной быстротой конституентах среды представляет собой результат усреднения по всем возможным вершинам рождения струи и пространственно-временной эволюции материи. Среднее число рассеяний $\langle N_{rsc} \rangle$ жесткого партона струи, образованной в центральном АА-соударении в области быстрот $y \approx 0$, вычисляется по формуле

$$\langle N_{rsc} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{R_A} dR \cdot P_A(R) \int_{\tau_0}^{\tau_L} d\tau \sum_b \sigma_{ab}(\tau) \cdot n_b(\tau), \quad (34)$$

где n_b — плотность b -го сорта конституентов среды, σ_{ab} — сечение взаимодействия партона струи a с конституентом b , τ_0 и τ_L ($> \tau_0$) — собственные времена формирования среды и выхода струи из среды соответственно, R — расстояние от оси столкновения ядер z до вершины рождения струи, φ — азимутальный угол, определяющий направление движения струи, R_A — радиус сталкивающегося ядра (см. рис.10). Так как в начальном жестком партон-партонном рассеянии участвуют два нуклона, то распределение по вершине рождения пары струй $P_A(R) \propto T_A^2(R)$, где $T_A(\mathbf{b}) = A \int dz \rho_A(\mathbf{b}, z)$ — функция ядерной толщины. В случае изотропного распределения плотности нуклонов в ядре, что может служить хорошим приближением для центральных соударений (профиль взаимодействия $\sigma_{pr}^{AA}(|\mathbf{b}| \ll R_A) \approx 1$), получим

$$P_A(R) = \frac{3}{2} \frac{1}{R_A} \left(1 - \frac{R^2}{R_A^2} \right), \quad R \leq R_A. \quad (35)$$

Если мы пренебрегаем поперечным расширением среды на ранних стадиях эволюции, то время выхода τ_L струи из среды

$$\tau_L = \sqrt{R_A^2 - R^2 \sin^2 \varphi} - R \cos \varphi. \quad (36)$$

В качестве метода решения, позволяющего получать распределения по любым кинематическим характеристикам струй (и при необходимости учитывать эффекты адронизации, особенности калориметрии и алгоритма поиска струй, что важно при изучении адронных струй, наблюдаемых в реальном эксперименте), удобно использовать численное моделирование свободного пробега жесткого партона в среде в рамках линейной кинетической теории, когда

интервал между двумя "успешными" перерасеяниями $l_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ определяется в соответствии с плотностью вероятности:

$$\frac{dP}{dl_i} = \lambda^{-1}(\tau_{i+1}) \cdot \exp\left(-\int_0^{l_i} \lambda^{-1}(\tau_i + s) ds\right), \quad (37)$$

где обратная средняя длина свободного пробега $\lambda_a^{-1}(\tau) = \sum_b \sigma_{ab}(\tau) n_b(\tau)$. Если длина свободного пробега значительно превышает дебаевский радиус цветовой экранировки μ_D^{-1} в плазме $\lambda \gg \mu_D^{-1}$, то рассеяния можно рассматривать как независимые, и эффективное цветное поле можно аппроксимировать статическим дебаевским экранирующим потенциалом [210]. В этом случае доминирующий вклад в дифференциальное сечение рассеяния партона струи с энергией E на термальных партонах с энергией $m_0 \sim 3T$ имеет вид

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt} \cong C_{ab} \frac{2\pi\alpha_s^2(t)}{t^2}, \quad (38)$$

где $C_{ab} = 9/4, 1, 4/9$ для gg -, gq - и qq -рассеяний соответственно, t — квадрат переданного 4-импульса, $\alpha_s(t)$ — бегущая константа связи КХД:

$$\alpha_s = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln(t/\Lambda^2)} \quad (39)$$

для N_f активных кварковых ароматов, и $\Lambda \simeq 200$ МэВ — масштабный параметр КХД. При этом интегральное сечение партон-партонного рассеяния

$$\sigma_{ab} = \frac{m_0(\tau)E/2}{\mu_D^2(\tau)} \int dt \frac{d\sigma_{ab}}{dt} \quad (40)$$

регуляризуется квадратом дебаевской экранирующей массы, которая может быть оценена для КПП в низшем порядке теории возмущений КХД [221]:

$$\mu_D^2 \cong 4\pi\alpha_s^* T^2 (1 + N_f/6) \quad (41)$$

с термальной константой связи $\alpha_s^* = \alpha_s(16T^2)$ (20), что довольно близко к результату решеточных вычислений [222] $\mu_D \simeq 2T$ для $N_f = 0$ в высокотемпературной области $T \gg T_c$.

Средние энергетические потери партона струи в расширяющейся цилиндрически-симметричной плотной материи могут быть вычислены как сумма

вкладов столкновительных и радиационных потерь (см. рис.11):

$$\Delta E_{\text{tot}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{R_A} dR \cdot P_A(R) \cdot \Delta E(R, \varphi), \quad (42)$$

$$\Delta E(R, \varphi) = \int_{\tau_0}^{\tau_L} d\tau \left(\sum_b \sigma_{ab}(\tau) \cdot n_b(\tau) \cdot \nu(\tau) + \frac{dE^{\text{rad}}}{dx}(\tau) \right), \quad (43)$$

где термально-усредненная передача энергии партону струи конститuentу среды с энергией m_0 в результате отдельного упругого перерасеяния $\nu(\tau)$ при $E \gg m_0 \sim 3T$ оценивается* как

$$\nu(\tau) = \langle \frac{t}{2m_0} \rangle \simeq \frac{1}{4T(\tau)\sigma_{ab}(\tau)} \int \frac{3T(\tau)E/2}{\mu_D^2(\tau)} dt \frac{d\sigma_{ab}}{dt} t. \quad (44)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны для любой усредняемой характеристики струи (как, например, некомпланарность или угол рассеяния), для численного вычисления которой необходимо задать изменение этой характеристики за индивидуальный акт перерасеяния и уравнения, описывающие пространственно-временную эволюцию среды.

Заметим, что для достаточно высоких начальных температур $T_0 \gg T_c$ можно пренебречь влиянием поперечного расширения материи на интенсивность перерасеяния партонов струи [203] и рассматривать одномерное буст-инвариантное движение кварк-глюонной жидкости. В этом случае струя покидает область, занимаемую плотной материей, перед началом смешанной фазы ($\tau_L \lesssim \tau_p$), и высокотемпературное приближение представляется применимым. В сценарии с учетом поперечного расширения, ускоряющего остывание горячей материи, в принципе, возможна ситуация, когда струя проходит через смешанную фазу, но интенсивность перерасеяния партонов струи в среде является сильно возрастающей функцией температуры T и определяется, главным образом, самыми ранними стадиями эволюции. Влияние на нее смешанной фазы при $T = T_c$ (и тем более фазы адронного газа) по сравнению с "горячей" КГП представляется незначительным.

Вычисленное в работе [202] распределение суммарных столкновительных потерь энергии пары gg -струй с начальной энергией $E_{\text{jet1}} = E_{\text{jet2}} = 100$ ГэВ,

*Мы здесь для простоты не рассматриваем возможность столкновительных потерь энергии в результате мягкого взаимодействия партонов струи с коллективными модами КГП (поляризация плазмы) [206, 207], включение которого не влияет на качественные выводы проводимого исследования.

образованных в центральной области быстрот $y_1 = y_2 = 0$ в соударениях Pb—Pb ($R_A \simeq 1,2 \cdot (207)^{1/3}$ фм), в вязкой продольно расширяющейся кварк-глюонной жидкости для различных значений параметра вязкости C_η представлено на рис.12. При этом начальные условия формирования глюонно-избыточной материи ($N_f \sim 0$) в столкновениях тяжелых ионов (Pb—Pb) при энергии LHC ($\sqrt{s} \simeq 6,4$ ТэВ) были заданы, для определенности, в соответствии с недавними пертурбативными оценками, сделанными в работе [55] и основанными на использовании новых структурных функций из экспериментов по ep -рассеянию на ускорителе HERA [223, 224]: $\tau_0 \sim 0,1$ фм/с, $T_0 \sim 1$ ГэВ*. Столкновительные потери складываются некогерентно в результате многих единичных актов рассеяния на конstituентах плотной материи и практически не зависят от начальной энергии струи E_{jet} при $E_{\text{jet}} \gg T$ (см. ур.(44)), определяясь свойствами среды. Наличие вязкости приводит к значительному замедлению остывания КПП, струя в этом случае проводит больше времени в самых горячих и плотных областях среды, и интенсивность перерассеяния (которая является сильно возрастающей функцией температуры) растет с увеличением коэффициента вязкости.

Более сложной проблемой является корректный учет радиационных потерь струи, которые существенно зависят от ее углового размера. В работах [213,214] было указано на возможность существования трех асимптотических режимов радиационных потерь в пределе $E \rightarrow \infty$: режим Бете — Гайтлера независимых излучений ($dE/dx \propto \mu_b^2$ при $\tau_f \ll \lambda$), режим Ландау — Померанчука когерентного подавления ($dE/dx \propto \sqrt{E}$ при $\lambda \ll \tau_f \ll \tau_L$) и факторизационный режим ($dE/dx \propto E$ с точностью до логарифмиче-

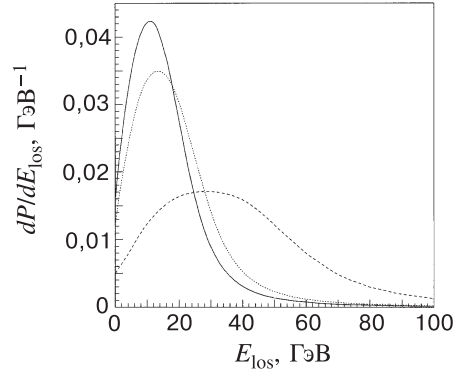


Рис. 12. Распределение суммарных столкновительных энергетических потерь пары gg -струй с начальной энергией $E_{\text{jet1}} = E_{\text{jet2}} = 100$ ГэВ при различных значениях коэффициента вязкости C_η в продольно расширяющейся КПП, $T_0 = 1$ ГэВ [202]: $C_\eta = 0$ (сплошная линия), $0,06$ (пунктирная), $0,34$ (штриховая)

*Следует иметь в виду, что эти оценки являются довольно приближенными и модельно-зависимыми. В частности, учет высших порядков по α_s при вычислении начальной плотности энергии системы министруй, эффект ядерной экранировки и неопределенности структурных функций в области малых бьеркеновских x могут приводить к существенным вариациям начальной температуры T_0 .

ского множителя $\ln E$ при $\tau_f \gg \tau_L$). Возможность реализации какого-либо из асимптотических режимов зависит от частоты излучаемого глюона и от свойств среды. Количественное исследование углового распределения частиц внутри струи осложняется тем, что направление движения излученного глюона является плохо определяемой величиной вследствие когерентных эффектов в КХД-среде [213]. Качественный анализ показывает [216], что радиационные потери очень "узких" струй слабо зависят от свойств среды, определяются, главным образом, начальной энергией струи и могут быть значительными по сравнению со столкновительными потерями: $\Delta E_{\text{rad}}(\Delta\theta_{\text{jet}} \rightarrow 0) \sim \sim E_{\text{jet}} \gg \Delta E_{\text{col}}$. При этом радиационные потери струи быстро падают с увеличением ее углового размера и становятся сравнимыми со столкновительными потерями при $\Delta\theta_{\text{jet}} \gtrsim 5 - 10^\circ$.

"Широкоугольные" потери энергии могут приводить к существенному подавлению выхода пар жестких струй с поперечными импульсами больше порогового значения p_{cut} , $R^{\text{dijet}}(p_{T1}, p_{T2} > p_{\text{cut}})$, и повышенному отношению выхода моноструй $R^{\text{mono}}(p_{T1} > p_{\text{cut}}, p_{T2} < p_{\text{cut}})$ к парам струй в центральных АА-столкновениях:

$$R_{AA}^{\text{dijet}}(p_{T1}, p_{T2} > p_{\text{cut}}, y = 0) =$$

$$= \int dy_1 \int dy_2 \int_{p_{\text{cut}}} dp_{T1} \int_{p_{\text{cut}}} dp_{T2} \sum_{i,j} \left(\frac{dN_{ij}^{\text{dijet}}}{dy_1 dy_2 dp_{T1} dp_{T2}} \right)_{AA}, \quad (45)$$

$$R_{AA}^{\text{mono}}(p_{T1} > p_{\text{cut}}, p_{T2} < p_{\text{cut}}, y = 0) =$$

$$= \int dy_1 \int dy_2 \int_{p_{\text{cut}}} dp_{T1} \int_{p_{\text{cut}}}^{p_{\text{cut}}} dp_{T2} \sum_{i,j} \left(\frac{dN_{ij}^{\text{dijet}}}{dy_1 dy_2 dp_{T1} dp_{T2}} \right)_{AA}, \quad (46)$$

где число пар струй типа ij с импульсами p_{T1}, p_{T2} , образованных в начальных жестких процессах рассеяния, определяется как

$$\frac{dN_{ij}^{\text{dijet}}}{dy_1 dy_2 dp_{T1} dp_{T2}} = T_{AA}(0) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{R_A} dR \cdot P_A(R) \int dp_T^2 \frac{d\sigma_{ij}}{dp_T^2} \delta(p_{T1} - p_T +$$

$$+ \Delta E_i(\varphi, R)) \delta(p_{T2} - p_T + \Delta E_j(\pi - \varphi, R)), \quad (47)$$

$T_{AA}(b) = \int d^2s T_A(\mathbf{s}) T_A(\mathbf{b} - \mathbf{s})$ — стандартная функция ядерного перекрытия с нулевым прицельным параметром $b = 0$, $d\sigma_{ij}/dp_T^2$ — дифференциальное сечение начального партон-партонного рассеяния в отдельном нуклон-нуклонном взаимодействии.

Заметим, что для того, чтобы избежать ошибок, связанных с нормировкой светимости коллайдера для разных ядер, экспериментальное определение фактора подавления пар струй может быть произведено относительно известного сечения какого-либо "неподавляемого" процесса (которое пропорционально числу бинарных нуклон-нуклонных соударений в ядро-ядерном взаимодействии), как, например, рождение жестких мюонных пар Дрелла—Яна ($q\bar{q} \rightarrow \mu^+ \mu^-$) или $Z^0(\rightarrow \mu^+ \mu^-)$ бозона:

$$R_{AA}^{\text{dijet}} / R_{pp}^{\text{dijet}} = \left(\sigma_{AA}^{\text{dijet}} / \sigma_{pp}^{\text{dijet}} \right) / \left(\sigma_{AA}^{DY,Z} / \sigma_{pp}^{DY,Z} \right), \quad (48)$$

в то время как определение отношения $R^{\text{mono}} / R^{\text{dijet}}$ не требует какой-либо внешней нормировки.

5.3. Природа адронных струй в ультрарелятивистских соударениях ядер и экспериментальные перспективы. Напомним, что с экспериментальной точки зрения струя (jet) определяется как совокупность летящих в узком конусе углов частиц (преимущественно адронов), поперечный импульс $K_{\perp i}$ относительно оси струи которых много меньше соответствующего продольного импульса K_{Li} , $K_{\perp i} \ll K_{Li}$. Отбор струйных событий, как правило, основан прежде всего на требовании, чтобы поперечная энергия кластера (совокупности сегментов калориметра) $E_{\text{jet}} = \sum_i E_i \sin \theta_i$ была больше некоторого порога (сумма берется по локальному выделению энергии в ячейках калориметра i , и θ_i — полярный угол, отсчитываемый от направления пучка). Струи определяются в результате комбинации сигналов от соседних ячеек калориметра, начинающихся с ячейки с наибольшей поперечной энергией и отделенных от нее расстоянием $R = \sqrt{(\Delta\eta^2 + \Delta\phi^2)}$, меньшим, чем радиус струи — параметр R_{jet} [225]. Заметим, что в [226] был рассмотрен более общий инвариантный метод выделения струйных событий в пространстве относительных четырехмерных скоростей $u_i = p_i / m_i$ (p_i и m_i — соответственно 4-импульс i -й частицы и ее масса), который, однако, еще не использовался при анализе экспериментальных данных в коллайдерных экспериментах.

Использование характеристик струй для изучения условий формирования сверхплотной материи в реальном эксперименте по ультрарелятивистским столкновениям тяжелых ядер сильно затруднено фоном "ложных" струй — статистических флуктуаций потока поперечной энергии, обусловленных огромной множественностью вторичных частиц в событии (предсказания различных моделей Монте-Карло составляют от 3000 до 8000 заряженных частиц на единицу быстроты в центральных соударениях Pb—Pb для энергии ЛНС $\sqrt{s} = 6A$ ТэВ). Все ячейки калориметра заполнены в этом случае (размер ячейки в пространстве $\eta - \phi$ порядка $\Delta\eta \times \Delta\phi \sim 0,1 \times 0,1$), и отклик калориметра на поток поперечной энергии большого числа "термальных" частиц, попадающих в данную ячейку, может имитировать сигнал от одной частицы

с большим p_T . В таких условиях вопрос об идентификации "истинных" КХД-струй от жесткого партон-партонного рассеяния приобретает особую актуальность для физической программы по столкновениям тяжелых ионов на коллайдерах.

Выделение в эксперименте струй с очень большими поперечными импульсами приводит к малой вероятности таких событий (приближенно $\sigma_{\text{hard}} \propto 1/p_{T \text{ min}}^2$). Однако из-за сильного упорядочения импульсов частиц внутри жесткой КХД-струи такие струи можно отличить от "термальных" слабокоррелированных струй при меньших значениях параметра обрезания по поперечному импульсу, и этим обстоятельством можно воспользоваться для оптимизации алгоритма поиска струй в ядро-ядерных взаимодействиях. Так, в работе [227] на основе сравнительного анализа свойств жестких КХД-струй и "ложных" статистических струй было указано на существенные различия в их внутренней структуре:

1) разная зависимость множественности частиц в струе $\langle n \rangle$ от энергии струи E_{jet} :

$$\langle n \rangle_{\text{QCD}} \propto \exp \sqrt{\frac{2N_c}{\pi b} \ln \frac{E_{\text{jet}}^2}{\Lambda^2}}, \quad (49)$$

$$\langle n \rangle_T \propto \left(\frac{E_{\text{jet}}}{T} \right)^3 (1 - \cos \theta_0); \quad (50)$$

2) разная зависимость положения максимума в распределении по доли уносимого частицей струи продольного импульса z от энергии струи E_{jet} :

$$z_{\text{max QCD}} \simeq \sqrt{\frac{Q_0}{2E_{\text{jet}}}}, \quad (51)$$

$$z_{\text{max T}} \propto \left(\frac{T}{E_{\text{jet}}} \right)^3 (1 - \cos \theta_0)^{-1}; \quad (52)$$

3) разная дисперсия распределения по множественности частиц в струе, $D = \sqrt{(\langle n(n-1) - \langle n \rangle^2 \rangle) / \langle n \rangle^2}$,

$$D_g = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad D_q = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad E_{\text{jet}}^2 \gg Q_0^2 \quad (53)$$

$$D_T \propto \sqrt{\left(\frac{T}{E_{\text{jet}}} \right)^3 (1 - \cos \theta_0)^{-1}}, \quad (54)$$

(индексы g и q относятся, соответственно, к глюонной и кварковой струям);

4) разная зависимость среднего поперечного импульса $\langle K_{\perp} \rangle$ от энергии струи E_{jet} :

$$\langle K_{\perp}^2 \rangle_{\text{QCD}} \propto \frac{E_{\text{jet}}^2}{\ln \frac{E_{\text{jet}}^2}{\Lambda^2}}, \quad (55)$$

$$\langle K_{\perp}^2 \rangle_T \propto E_{\text{jet}}^2, \quad (56)$$

где T — температура системы, θ_0 — угловой размер струи, $\Lambda \simeq 200$ МэВ, $Q_0^2 \simeq 1$ ГэВ², $N_c = 3$, $b = (11N_c - 2N_f)/12\pi$.

При этом отличительные особенности "термальных" и КХД-струй должны проявляться в свойствах регистрируемых адронных струй в условиях реального эксперимента. В частности, в работе [227] было проведено моделирование рождения и детектирования струй в условиях проектируемого эксперимента CMS на коллайдере LHC [193], учитывающее магнитное поле $B = 4$ Тл, энергетическое разрешение, грануляцию и геометрические размеры адронного калориметра, центральную область быстрот $|\eta| < 1,5$, а также описание "термального" фона в центральных соударениях Pb—Pb в рамках гидродинамической модели (средний поперечный импульс "термальных" адронов в этом случае равен $\langle p_T^{\pi} \rangle = 0,5$ ГэВ для пионов и $\langle p_T^K \rangle = 0,7$ ГэВ для каонов, что довольно близко к предсказаниям партонной каскадной модели (PCM) [57] для центральных соударений самых тяжелых ядер, $A \sim 200$, при энергии LHC; при этом каоны полагались "термально" подавленными вследствие их более тяжелой массы, $K^{\pm}/\pi^{\pm} \simeq 0,2$). Заметим, что триггером для центральных событий может служить отбор событий с максимальным выделением поперечной энергии в центральной баррел-части калориметров CMS, увеличение которой коррелировано с уменьшением параметра удара b .

События моделировались как суперпозиция "термального" события и жесткого партон-партонного рассеяния, генерируемого с помощью модели Монте-Карло адрон-адронных взаимодействий PYTHIA [228] (с учетом развития начального жесткого КХД-ливня и адронизации струй в соответствии с лундовской струнной моделью). При этом число начальных жестких партон-партонных рассеяний с энергией $E_{T(\text{hard})} > E_T$ в центральном ядро-ядерном столкновении выражается через соответствующее нуклон-нуклонное сечение $\sigma_{pp}^{\text{jet}}(E_T, \sqrt{s} = 6 \text{ ТэВ})$ (вычисляемое в пертурбативной КХД с помощью PYTHIA) в рамках модели независимых бинарных субстолкновений как

$$N_{AA}^{\text{jet}} = \sigma_{AA}^{\text{jet}}/\sigma_{AA}^{\text{in}}(c) \simeq A^2 \sigma_{pp}^{\text{jet}}/\pi R_A^2, \quad (57)$$

где $R_A \simeq 1,2A^{1/3}$ фм — радиус ядра и $\sigma_{AA}^{\text{in}}(c)$ — неупругое сечение центрального AA-взаимодействия.

Производилась выборка струй с угловым размером конуса $R_{\text{jet}} = 0,5$; при этом если в событии наблюдалось более двух струй, то идентификация пары струй происходила в соответствии с отбором:

- 1) кластера с максимальной поперечной энергией,
- 2) кластера с максимальной проекцией поперечного импульса на направление, противоположное поперечному импульсу первого кластера, т.е.

$$E_{T(\text{jet1})} = \max_{i=1, n} (E_{Ti}),$$

$$E_{T(\text{jet2})} = \max_{i=2, n} (E_{Ti} \cdot \cos(\phi_1 + \phi_i - \pi)). \quad (58)$$

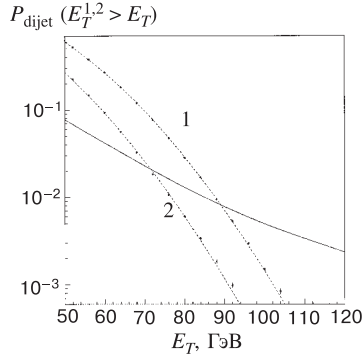


Рис. 13. Интегральные вероятности выхода пары струй в "термальных" событиях Pb—Pb в баррел-части CMS (точки), штриховые линии представляют аппроксимацию функцией Гаусса. Сплошная кривая — вероятность рождения пары жестких КХД-струй с продольными быстройми $|y_{\text{jet1,2}}| < 1,5$ в соударениях Pb—Pb, $E_{\text{jet1,2}} > E_T$ [227]: 1 — $dN^{\pm}/dy = 8000$, 2 — $dN^{\pm}/dy = 3000$

На рис.13 представлены интегральные вероятности выхода пары струй в "термальных" событиях Pb—Pb в баррел-части CMS и рождения пары жестких КХД-струй с продольными быстройми $|y_{\text{jet1,2}}| < 1,5$ в соударениях Pb—Pb при энергии LHC. Существенное различие в форме энергетического спектра "термальных" (хорошо аппроксимируется функцией Гаусса) и КХД-струй (степенная E_T -зависимость) позволяет "распознавать" жесткие двухструйные события в случае, когда энергетические потери партонов струи в среде не учитываются, начиная с минимальной энергии струи $E_{\text{jet}}^{\text{min}} \sim 100$ ГэВ для $dN^{\pm}/dy = 8000$ и $E_{\text{jet}}^{\text{min}} \sim 85$ ГэВ для $dN^{\pm}/dy = 3000$. Топология типичного "жесткого" события Pb—Pb ($dN^{\pm}/dy = 8000$) с $E_{T(\text{hard})} = 100$ ГэВ в пространстве $\eta - \varphi$ калориметра CMS показана на рис.14 (по вертикальной шкале отложена поперечная энергия ячейки). Отбор только одиночных струй (моноструй) или влияние потерь энергии жестких партонов струи в среде на выход пар струй может приводить к заметному повышению энергетического порога "распо-

знавания" КХД-струй, но эффективное разделение "термальных" и жестких струй все же остается возможным при пороге $E_{\text{jet}}^{\text{min}} \sim 100$ ГэВ в случае использования дополнительного критерия, определяемого разной зависимостью среднего поперечного импульса частицы в струе от энергии E_{jet} . В частности,

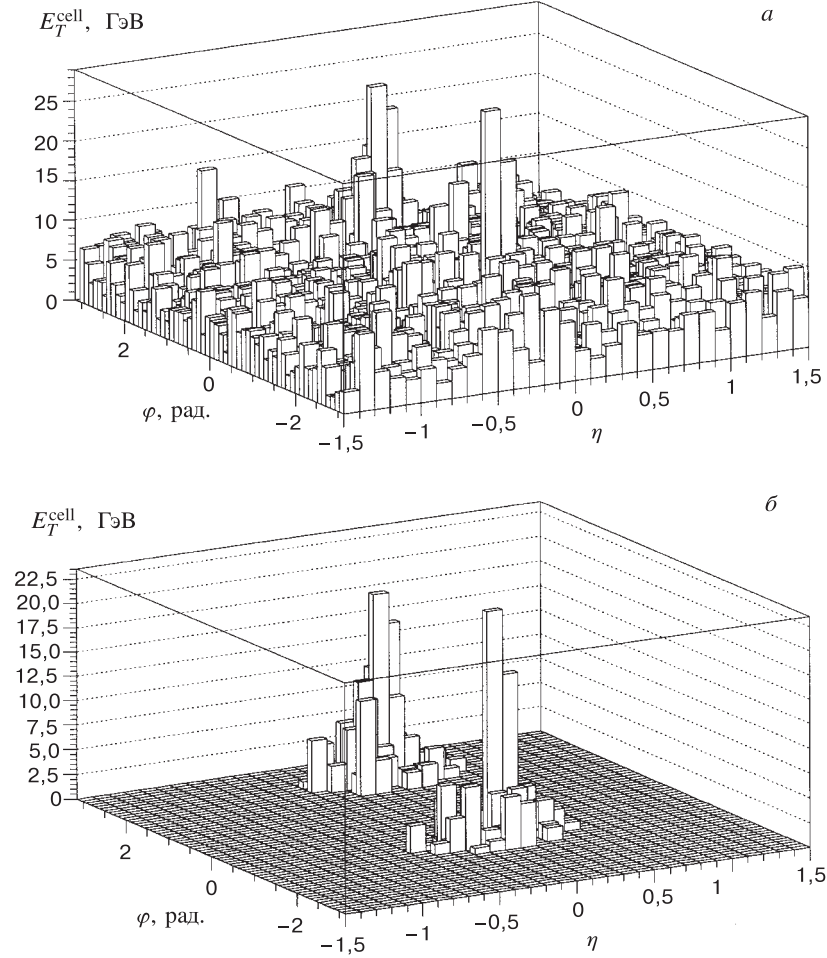


Рис. 14. Топология типичного "жесткого" события Pb—Pb с $E_{T(\text{hard})} = 100$ ГэВ (а) и форма пары струй после удаления "термального" фона (б) в пространстве η — φ калориметра CMS, по вертикальной шкале отложена поперечная энергия ячейки, $dN^{\pm}/dy = 8000$

если мы введем средневзвешенный радиус струи $\langle R \rangle$ как

$$\langle R \rangle = \sum_i R_{i0} \cdot E_i / E_{\text{jet}}, \quad E_{\text{jet}} = \sum_i E_i, \quad (59)$$

где R_{i0} — расстояние между ячейкой струи i и центром струи в пространстве η — φ , то отбор струй с $\langle R \rangle / R_{\text{jet}} \lesssim 0,5$ приведет к удалению

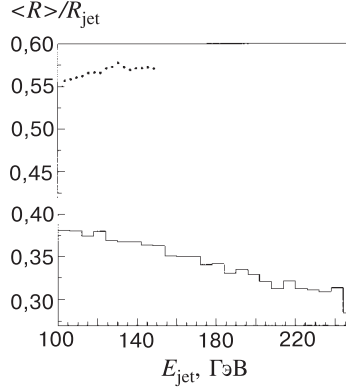


Рис. 15. Средневзвешенный радиус жесткой (гистограммы) и "термальной" (точки) струи $\langle R \rangle$ (59) как функция поперечной энергии E_{jet} , $dN^{\pm}/dy = 8000$ [227]

"ложных" струй с $E_{\text{jet}} \gtrsim 100$ ГэВ (см. рис.15, $dN^{\pm}/dy = 8000$). Эффект перерасеяния партонов в среде приводит к некоторому "уширению" струи, но основной вклад в суммарный поперечный импульс относительно оси струи дает начальный жесткий КХД-ливень, и вывод о различной внутренней структуре "термальных" и КХД-струй и возможности оптимизации на этой основе алгоритма поиска струй в данном случае также представляется справедливым.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Значительный прогресс, достигнутый в последнее время в моделировании КХД-систем на решетке, в частности, с включением динамических кварков, позволяет с большой степенью уверенности утверждать, что достижение деконфайнмента адронной материи и восстановление киральной симметрии должно иметь место при достаточно высоких температурах $T_c \sim 200$ МэВ и (или) плотностях барионного заряда. Предполагается, что условия для реализации кварк-адронного фазового перехода, имевшего, согласно современным космологическим представлениям, место в первые микросекунды эволюции Вселенной, могут быть достигнуты в результате генерации сильновозбужденной материи в экспериментах по ультрарелятивистским столкновениям ядер на действующих (AGS, SPS) и планируемых (RHIC, LHC) ускорителях.

В настоящем обзоре мы рассмотрели основные тесты, предлагаемые для экспериментального изучения свойств сверхплотной ядерной материи. Струнные микроскопические модели Монте-Карло довольно успешно описывают имеющиеся данные по столкновениям тяжелых ионов, в частности, распределения по множественности и инклюзивные спектры вторичных адронов, в

диапазоне энергий $\sqrt{s} \lesssim 10$ ГэВ/нуклон, когда основную часть адронных сечений составляют мягкие процессы. При этом согласование с экспериментом достигается путем модификации сценария независимых нуклон-нуклонных субстолкновений — включением разного рода коллективных эффектов, таких как адронное каскадирование и взаимодействие струн. При энергиях будущих коллайдеров RHIC и LHC, когда определяющий вклад в формирование начального состояния вносят жесткие и полужесткие процессы партон-партонного рассеяния с передачей импульса много больше масштабного параметра КХД, правомерным подходом к описанию ядро-ядерных взаимодействий представляется моделирование партонных каскадов в рамках теории возмущений КХД. Каскадные модели предсказывают достаточно быструю термализацию партонной материи в центральной области быстрот, однако вопрос о возможности достижения системой химического равновесия остается открытым, и наиболее вероятным сценарием представляется формирование "горячей" глюонной плазмы. Детальное моделирование развития партонных каскадов представляет собой весьма трудоемкую задачу, требующую значительных компьютерных усилий и большого количества счетного времени. С другой стороны, в случае, когда система достигает локального термального равновесия, ее дальнейшая эволюция может быть описана в рамках релятивистской гидродинамики. Относительно простые макроскопические гидродинамические модели успешно воспроизводят существующие экспериментальные данные при энергиях AGS и SPS и широко применяются для теоретического исследования физических процессов в ядро-ядерных взаимодействиях при более высоких энергиях.

Импульсные спектры адронов и двухчастичные корреляции идентичных частиц несут информацию о свойствах адронной материи на поздних стадиях "вымораживания", в частности, о степени ее термализации, коллективных потоковых эффектах и пространственно-временных размерах области источника частиц. Имеющиеся экспериментальные данные ("уширение" спектров по сравнению с соответствующими адрон-адронными соударениями и зависимость "радиуса гомогенности" от импульса пары частиц) указывают на локальную термализацию адронной материи в центральных соударениях тяжелых ядер, сильный продольный поток частиц вдоль оси столкновения и, вероятно, слабый поток в поперечном направлении. Наблюдаемый "избыток" дилептонов небольших масс может быть интерпретирован как результат излучения из кварк-глюонной фазы или модификации масс и ширин распада векторных мезонов в плотной материи, связанной с частичным восстановлением киральной симметрии. Усиленное рождение странных адронов также согласуется с предположениями о деконфайнменте и восстановлении киральной симметрии, хотя может быть описано и в рамках стандартных моделей адронных каскадов. Интригующим явлением представляется наблюдаемое в столкновениях Pb—Pb в эксперименте NA50 (SPS) и не согласующееся со

стандартной моделью предрезонансного поглощения в "холодном" ядерном веществе аномальное подавление выхода Ψ -резонансов, природу которого в полной мере еще только предстоит выяснить.

В будущих экспериментах на коллайдерах RHIC и LHC представляется весьма перспективным использование "жестких" тестов сверхплотной материи, несущих информацию о самых ранних стадиях ее эволюции. Наряду с подавлением тяжелых кваркониев Ψ и Υ , примером такого теста является прохождение через среду жестких струй цветозаряженных партонов, которые рождаются в самом начале процесса соударения в результате отдельных жестких нуклон-нуклонных рассеяний, проходят через плотную материю и взаимодействуют с ее сопутствующими конститuentами, что приводит к ряду интересных эффектов: столкновительным и радиационным потерям энергии струи, подавлению выхода пар жестких адронных струй и увеличению выхода моноструй, некомпланарности импульса пары струй, возбуждению динамических неустойчивостей в среде и ее поляризации. Решение проблемы идентификации жестких КХД-струй на фоне "ложных" струй — статистических флуктуаций потока поперечной энергии, обусловленных огромной множественностью вторичных частиц в событии, делает, таким образом, возможным использование характеристик струй для изучения условий формирования сверхплотной материи в проектируемых экспериментах по ультрарелятивистским столкновениям тяжелых ядер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proc. of Pre-Quark Matter'95 Workshop "Physics with the Collider Detectors at RHIC and LHC", ed. by T.Hallman and J.Thomas. Monterey, 1995.
2. Shuryak E.V. — Phys. Rep., 1980, v.61, p.73.
3. Satz H. — Phys. Rep., 1982, v.88, p.349.
4. Розенталь И.Л., Тарасов Ю.А. — УФН, 1993, т.163, с.29.
5. Дремин И.М., Леонидов А.В. — УФН, 1995, т.165, с.759.
6. Muller B. — Rep. Progr. Phys., 1995, v.58, p.611.
7. Harris J.W., Muller B. — Ann. Rev. of Nucl. and Part. Science, 1996, v.46, p.71.
8. Балдин А.М. — ЭЧАЯ, 1977, т.8, с.429.
9. Baldin A.M. — Nucl. Phys., 1986, v.A447, p.207.
10. Shuryak E.V. — In: Proc. of Quark-Matter'90, Nucl.Phys., 1991, v.A525, p.3.
11. Suhonen E. — Phys. Lett., 1982, v.119B, p.81.
12. Cline D.V. — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl.Phys., 1996, v.A610, p.500.
13. Baun G. — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.233.
14. Блохинцев Д.И. — ЖЭТФ, 1957, т.33, с.1295.
15. Ефремов А.В. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, с.613.

16. **Балдин А.М.** — ЭЧАЯ, 1971, т.8, с.429.
17. **Ставинский В.С.** — ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.949.
18. **Jones V.** — Nucl. Phys., 1984, v.A418, p.139.
19. **Takahashi Y.** — Nucl. Phys., 1988, v.A478, p.675.
20. **Burnett T.H. et al. (JACEE Coll.)** — In: Proc. of VIII International Symposium on Very High Energy Cosmic Ray Interactions. Tokyo, 1994, p.513.
21. **Gaisser T.K.** — In: Proc. of 15th International Cosmic Ray Conference. Plovdiv, 1977, p.267.
22. **Lattes C.M.G., Fujimoto Y., Hasegawa S.** — Phys. Rep., 1980, v.65, p.151.
23. **Bjorken J.D., McLerran L.** — Phys. Rev., 1979, v.D200, p.2353.
24. **Gavin S., Muller B.** — Phys. Lett., 1994, v.329B, p.486.
25. Conceptual Design Report of the Relativistic Heavy Ion Collider, Brookhaven National Laboratory Report BNL-52195, 1989.
26. Design study of the Large Hadron Collider, CERN 91-03.
27. **Baldin A.M., Malakhov A.I.** — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl. Phys., 1994, v.A566, p.611.
28. **Heisenberg W.** — Z.Phys., 1949, v.129, p.569.
29. **Fermi E.N.** — Progr. Theor. Phys., 1950, v.A5, p.570.
30. **Померанчук И.Я.** — ДАН СССР, 1951, т.78, с.889.
31. **Ландау Л.Д.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1953, т.179, с.51.
32. **Юкалов В.И., Юкалова Е.П.** — ЭЧАЯ, 1997, т.28, с.89.
33. **Wilson K.** — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.2445.
34. **Laermann E.** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl.Phys. 1996, v.A610, p.1.
35. **Boyd G. et al.** — Nucl. Phys., 1996, v.B469, p.419.
36. **Engels J. et al.** — Phys. Lett., 1997, v.396B, p.210.
37. **Geiger K.** — Phys. Rev., 1992, v.D46, pp.4965,4986.
38. **Geiger K., Muller B.** — Nucl.Phys., 1992, v.B369, p.600.
39. **Wang X.-N., Gyulassy M.** — Phys. Rev., 1991, v.D44, p.3501; Phys. Rev., 1992, v.D45, p.844.
40. **Andersson B., Gustafson G., Hong Pi.** — Z.Phys., 1993, v.C57, p.485.
41. **Werner K.** — Phys. Rep., 1993, v.232, p.87.
42. **Амелин Н.С., Гудима К.К., Тонеев В.Д.** — ЯФ, 1990, т.51, с.1730.
43. **Capella A., Sukhatme U., Tan C.I., Tran Thanh Van J.** — Phys. Rep., 1994, v.236, p.225.
44. **Andersson B., Gustafson G., Ingelman G., Sjostrand T.** — Phys. Rep., 1983, v.97, p.31.
45. **Кайдалов А.Б.** — ЯФ, 1987, т.45, с.1452.
46. **Золлер В.Р.** — ЯФ, 1988, т.48, с.566.
47. **Kaidalov A.** — In: Proc. of Quark-Matter'90, Nucl.Phys., 1991, v.A525, p.39.
48. **Калмыков Н.Н., Остапченко С.С.** — ЯФ, 1993, т.56, с.105.
49. **Andersson B., Tai A.** — Z.Phys., 1996, v.C71, p.155.
50. **Amelin, N.S., Braun M.A., Pajares C.** — Phys. Lett., 1993, v.306B, p.312.
51. **Merino C., Pajares C., Ranft J.** — Phys. Lett., 1992, v.276B, p.168.

52. **Eskola K.J.** — Nucl. Phys., 1991, v.A525, p.393.
53. **Eskola K.J., Wang X.-N.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.1284.
54. **Eskola K.J., Muller B., Wang X.-N.** — Phys.Lett, 1996, v.374B, p.20.
55. **Eskola K.J., Kajantie K., Ruuskanen P.V.** — Phys. Lett., 1994, v.332B, p.191.
56. **Dokshitzer Yu.L., Khoze V.A., Mueller A.H., Troyan S.I.** — Basics of Perturbative QCD, Editions Frontieres, Giff-sur-Yvette, 1991.
57. **Geiger K.** — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.133.
58. **Arneodo M. et al. (EM Coll.)** — Nucl. Phys., 1990, v.B333, p.1;
Amaudruz P. et al. (NM Coll.) — Z.Phys., 1991, v.C51, p.387;
Adams M.R. et al. (E665 Coll.) — Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, p.3266.
59. **Gyulassy M., McLerran L.** — Preprint CU-TH-826, 1997.
60. **Wang X.-N.** — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.47.
61. **Shuryak E.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, p.3270.
62. **Xiong L., Shuryak E.** — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.2207.
63. **Gyulassy M., Rischke D.H., Zhang B.** — Preprint CU-TP-757, 1996.
64. **Ландау Л.Д., Померанчук И.Я.** — ДАН СССР 1953, т.92, с.535,735;
Migdal A.B. — Phys. Rev., 1956, v.103, p.429.
65. **Jones P.G. et al. (NA49 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.188.
66. **Csernai L.P.** — Introduction to Relativistic Heavy Ion Collisions, Bergen University, 1992.
67. **Bjorken J.D.** — Phys. Rev., 1983, v.D27, p.140.
68. **Satz H.** — Phys. Lett., 1982, v.113B, p.245.
69. **Chodos A. et al.** — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.3471.
70. **Kagiyama S., Nakamura A., Minaka A.** — Progr. Theor. Phys., 1986, v.76, p.171.
71. **Biro T., Barz H.W., Lukacs B., Zimanyi J.** — Phys. Rev., 1983, v.C27, p.2695.
72. **van Gersdorff H., McLerran L., Kataja M., Ruusknen P.V.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, p.794.
73. **Kampfer B., Pavlenko O.P.** — Z.Phys., 1994, v.C62, p.491.
74. **Srivastava D.K., Mustafa M.G., Muller B.** — Preprint DUKE-TH-135, 1996.
75. **Lokhtin I.P., Snigirev A.M.** — Phys. Lett., 1996, v.378B, p.247.
76. **Лохтин И.П., Снигирев А.М., Хрущев В.В.** — ЯФ, 1997, т.60, с.125.
77. **Pal D., Roy P.K., Sarkar S., Srivastava D.K., Sinha B.** — Phys. Rev., 1997, v.C55, p.1467.
78. **Danielewicz P., Gyulassy M.** — Phys. Rev., 1985, v.D31, p.53.
79. **Hosoya A., Kajantie K.** — Nucl. Phys., 1985, v.B250, p.666.
80. **Akase Y. et al.** — Progr. Theor. Phys., 1989, v.82, p.591.
81. **Baym G., Monien H., Pethick C., Ravenhall D.** — Phys. Rev. Let., 1990, v.64, p.1867.
82. **Engels J. et al.** — Z.Phys., 1989, v.C42, p.341.
83. **Клейманс Ж.Л., Ильин С.В., Смолянский С.А., Зиновьев Г.М.** — ЯФ, 1995, т.58, с.367.
84. **Cooper F., Frye G., Schonberg E.** — Phys. Rev., 1975, v.D11, p.192.

85. **Staubo E.F., Holme A.K., Csernai L.P., Gong M., Strottman D.** — Phys. Lett., 1989, v.229B, p.351.
86. **Sinyukov Yu.M., Averchenkov V.A., Lorstad B.** — Z.Phys., 1991, v.C49, p.417.
87. **Schnedermann E., Sollfrank J., Heinz U.** — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.2462.
88. **Muroya S., Nakamura H., Namiki M.** — Progr. Theor. Phys. Suppl., 1995, v.120, p.209.
89. **Leonidov A., Nardi M., Satz H.** — Z.Phys., 1997, v.C74, p.535.
90. **Csorgo T., Lorstad B.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.1390.
91. **Braun-Munzinger P., Stachel J., Wessels J.P., Xu N.** — Phys. Lett., 1995, v.344B, p.43.
92. **Akiba Y. et al. (E802 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.139.
93. **Lacasse R. et al. (E877 Coll.)** — Ibid, p. 153.
94. **Ahmad S. et al. (E891 Coll.)** — Phys. Lett., 1996, v.382B, p.35.
95. **Albrecht R. et al. (WA80 Coll.)** — Phys. Lett., 1988, v.202B, p.596; Z.Phys., 1992, v.C55, p.539.
96. **Akesson T. et al. (HELIOS Coll.)** — Nucl. Phys., 1990, v.B342, p.279.
97. **Bachler J. et al. (NA35 Coll.)** — Phys. Rev. Lett., 1994, v.72, p.1419.
98. **Braun-Munzinger P., Stachel J., Wessels J.P., Xu N.** — Phys. Lett., 1996, v.365B, p.1.
99. **Helstrup H. et al. (WA97 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.165.
100. **Xu N. et al. (NA44 Coll.)** — Ibid, p.175.
101. **Peitzmann T. et al. (WA98 Coll.)** — Ibid, p.200.
102. **Stachel J.** — Ibid, p.509.
103. **Videbaek F. et al. (E802 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.249.
104. **Strobele H.** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.102.
105. **Ornik U. et al.** — Phys. Lett., 1996, v.376B, p.212.
106. **STAR Conceptual Design Report, Lawrence Berkeley Laboratory Report PUB-5347, 1992; Harris J. et al.** — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl. Phys., 1994, v.A566, p.311.
107. **PHOBOS Conceptual Design Report, BNL, 1993; Wyslouch B. et al.** — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl. Phys., 1994, v.A566, p.305.
108. **BRAHMS Conceptual Design Report, BNL, 1994; Videbaek F. et al.** — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl. Phys., 1994, v.A566, p.299.
109. **ALICE Technical Proposal, CERN/LHCC 95-71; Schukraft J. et al.** — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl. Phys., 1994, v.A566, p.311.
110. **Hanbury-Brown R., Twiss R.Q.** — Nature, 1956, v.178, p.1046.
111. **Копылов Г.И., Подгорецкий М.И.** — ЯФ, 1973, т.18, с.656; **Kopylov G.I.** — Phys. Lett., 1974, v.50B, p.472.
112. **Boal D., Gelbke C.G., Jennings B.** — Rev. Mod. Phys., 1990, v.62, p.553.
113. **Makhlin A.N., Sinyukov Yu.M.** — Z.Phys., 1988, v.C39, p.69.
114. **Pratt S., Csorgo T., Zimanyi J.** — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.2646.
115. **Akkelin S.V., Sinyukov Yu.M.** — Phys. Lett., 1995, v.356B, p.525.

116. **Wiedemann U.A., Scotto P., Heinz U.** — Phys. Rev., 1996, v.C52, p.918.
117. **Heinz U.** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.264.
118. **Yano F., Koonin S.** — Phys. Lett., 1978, v.B78, p.556.
119. **Подгорецкий М.И.** — ЯФ, 1983, т.37, с.272.
120. **Ferenc D.** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.523.
121. **Miskowiec D. et al. (E877 Coll.)** — Ibid, p.227.
122. **Franz A. et al. (NA44 Coll.)** — Ibid, p.240.
123. **Csorgo T., Lorstad B., Zimanyi J.** — Z.Phys., 1996, v.C71, p.491.
124. **Kadija K. et al. (NA49 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.248.
125. **Gyulassy M., Kauffmann S.K., Wilson L.W.** — Phys. Rev., 1979, v.C20, p.2267.
126. **Anchishkin D., Zinovjev G.** — Phys. Rev., 1995, v.C51, p.2306.
127. **Biyajima M., Mizoguchi T., Osada T., Wilk G.** — Phys. Lett., 1995, v.353B, p.340;
Phys. Lett., 1996, v.366B, p.394.
128. **Baym G., Braun-Munzinger P.** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.286.
129. **Willis W., Chasman C.** — Nucl. Phys., 1984, v.A418, p.413.
130. **Zajc W.A.** — Phys. Rev., 1987, v.D35, p.3396.
131. **Feinberg E.L.** — Nuovo Cim., 1976, v.A34, p.391.
132. **Шуряк Э.В.** — ЯФ, 1978, т.28, с.453.
133. **Hwa R., Kajantie K.** — Phys. Rev. Lett., 1985, v.56, p.696.
134. **McLerran L., Toimela T.** — Phys. Rev., 1985, v.D31, p.545.
135. **Головизин В.В., Зиновьев Г.М., Снигирев А.М.** — ЯФ, 1988, т.47, с.1375.
136. **Головизин В.В., Зиновьев Г.М., Снигирев А.М.** — ЯФ, 1989, т.49, с.840.
137. **Braaten E., Pisarski R., Yuan T.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.2242.
138. **Горенштейн М.И., Кэмпфер Б., Павленко О.П.** — ЯФ, 1990, т.51, с.1403.
139. **Емельянов В., Хаглин К.** — ЭЧАЯ, 1996, т.27, с.1321.
140. **Ruckl R.** — Phys. Lett., 1976, v.64B, p.39.
141. **Lourenco C. et al. (NA38 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl.Phys., 1994, v.A566, p.77.
142. **Masera M. et al. (HELIOS-3 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.93.
143. **Scomparin E. et al. (NA50 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.331.
144. **Agakichiev G. et al. (CERES Coll.)** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.75, p.1272.
145. **Ulrich T. et al. (CERES/NA45 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.317.
146. **Cerny V., Lichard P., Pisut J.** — Z.Phys., 1986, v.C31, p.163.
147. **Srivastava D.K., Sinha B., Gale C.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.567.
148. **Li G.Q., Co C.M., Brown G.E.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.4007.

149. Cassing W., Eehalt W., Kralik I. — Phys. Lett., 1996, v.337B, p.5.
150. Ko C.M., Li G.Q., Brown G.E., Sorge H. — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.342.
151. Akesson T. et al. (HELIOS-2 Coll.) — Z.Phys., 1990, v.C46, p.369.
152. Awes T.C. et al. (WA80 Coll.) — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.81.
153. PHENIX Conceptual Design Report, BNL, 1993;
Nagamiya S. et al. — In: Proc. of Quark-Matter'93, Nucl. Phys., 1994, v.A566, p.287.
154. Koch P., Muller B., Rafelski J. — Phys.Rep., 1986, v.142, p.167.
155. Gazdizicki M., Rohrich D. — Z.Phys., 1995, v.C65, p.215.
156. Judd E.G. et al. (NA36 Coll.) — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.291.
157. Bari D.P. et al. (WA85 Coll.) — Ibid, p.307.
158. Kinson J.B. et al. (WA94 Coll.) — Ibid, p.317.
159. Mattiello R., Sorge H., Stocker H., Greiner W. — Phys. Rev. Lett., 1989, v.63, p.1459.
160. Werner K., Aichelin J. — Phys. Lett., 1993, v.308B, p.372.
161. Chin S.A., Kerman A.K. — Phys. Rev. Lett., 1979, v.43, p.1137.
162. Farhi E., Jaffe R.L. — Phys. Rev., 1984, v.D30, p.2379; Phys. Rev., 1985, v.D32, p.2452.
163. Witten E. — Phys. Rev., 1984, v.D30, p.272.
164. Greiner C., Koch P., Stocker H. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.1825.
165. Kumar B.S. — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.29.
166. Rotondo F.S. et al. (E864 Coll.) — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.297.
167. Klingenberg R. — Ibid, p.306.
168. Baglin C. et al. (NA38 Coll.) — Phys. Lett., 1991, v.272B, p.449.
169. Matsui T., Satz H. — Phys. Lett., 1986, v.178B, p.416.
170. Karch F., Mehr M.T., Satz H. — Z.Phys., 1988, v.C37, p.617.
171. Kharzeev D., Satz H. — Phys. Lett., 1994, v.B334, p.155.
172. Kharzeev D., McLerran L., Satz H. — Phys. Lett., 1995, v.356B, p.349.
173. Kharzeev D., Satz H., Xu X.-M., Wang X.-N. — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.3051.
174. Capella A. et al. — Phys. Lett., 1988, v.206B, p.354.
175. Gerschel C., Hofner J. — Phys. Lett., 1988, v.207B, p.253.
176. Kharzeev D., Lourenco C., Nardi M., Satz H. — Z.Phys., 1997, v.C74, p.307.
177. Baglin C. et al. (NA38 Coll.) — Phys. Lett., 1989, v.220B, p.471; 1990, v.251B, p.465,472; 1991, v.255B, p.459.
178. Baldin A. et al. (NA51 Coll.) — Phys. Lett., 1994, v.332B, p.244.
179. Alde D.M. et al. (E772 Coll.) — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p. 133, 2285;
McGaughey L. et al. (E772 Coll.) — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.3038.
180. Kharzeev D., Satz H., Syamtomov A., Zinovjev G. — Phys. Lett., 1996, v.389B, p.595.
181. Braaten E., Fleming S., Yuan T.C. — Ann. Rev. of Nucl. and Part. Science, 1996, v.46, p.197.

182. **Sansoni A. et al. (CDF Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.373.
183. **Gavai R.V. et al. (Hard Prob Coll.)** — Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10, p.3043.
184. **Kharzeev D., Satz H.** — Phys. Lett., 1996, v.366B, p.316.
185. **Ramos S. et al. (NA38 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.117.
186. **Lourenco C.** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.552.
187. **Gonin M. et al. (NA50 Coll.)** — In: Proc. of Quark-Matter'96, Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.404.
188. **Blaizot J.-P., Ollitrault J.-Y.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.1703.
189. **Wong, C.-Y.** — Phys. Rev., 1997, v.C55, p.2621.
190. **Gavin S., Vogt R.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.1006.
191. **Capella A., Kaidalov A., Kouider Akil A., Gerschel C.** — Phys. Lett., 1997, v.393B, p.431.
192. **Kharzeev D., Nardi M., Satz H.** — Phys. Lett., 1997, v.405B, p.14.
193. CMS Collaboration, Technical Proposal, CERN/LHCC 94-38.
194. **Jacob M.** — Preprint CERN-TH-5821, 1990.
195. **Монсеев А.М.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.1168.
196. **Appel D.A.** — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.717.
197. **Blaizot J.P., McLerran L.D.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, p.2739.
198. **Rammerstorfer M., Heinz U.** — Phys. Rev., 1990, v.D50, p.306.
199. **Pan J., Gale C.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.3235.
200. **Gupta S.** — Phys. Lett., 1995, v.347B, p.381.
201. **Лохтин И.П., Снигирев А.М.** — ЯФ, 1996, т.59, с.1823.
202. **Лохтин И.П., Снигирев А.М.** — ЯФ, 1997, т.60, с.360.
203. **Lokhtin I.P., Snigirev A.M.** — Z.Phys., 1997, v.C73, p.315.
204. **Павленко О.П.** — ЯФ, 1991, т.54, с.1448.
205. **Павленко О.П.** — ЯФ, 1992, т.55, с.2239.
206. **Mrowczynsky S.** — Phys. Lett., 1991, v.269B, p.383.
207. **Thoma M.H.** — Phys. Lett., 1991, v.273B, p.128.
208. **Gyulassy M., Plumer M.** — Phys. Lett., 1990, v.243B, p.432.
209. **Рыскин М.Г.** — ЯФ, 1990, т.52, с.219.
210. **Gyulassy M., Wang X.-N.** — Nucl. Phys., 1994, v.B420, p.583.
211. **Wang X.-N., Gyulassy M., Plumer M.** — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.3436.
212. **Plumer M., Gyulassy M., Wang X.-N.** — In: Proc. of Quark-Matter'95, Nucl.Phys., 1995, v.A590, p.511.
213. **Baier R., Dokshitzer Yu.L., Peigne S., Schiff D.** — Phys. Lett., 1995, v.345B, p.277.
214. **Baier R., Dokshitzer Yu.L., Mueller A.H., Peigne S., Schiff D.** — Nucl. Phys., 1997, v.B483, p.291.
215. **Baier R., Dokshitzer Yu.L., Mueller A.H., Peigne S., Schiff D.** — Nucl. Phys., 1997, v.B484, p.265.

216. **Lokhtin I.P., Snigirev A.M.** — Phys. Lett., 1998, v.440B, p.163.
217. **Shuryak E.** — Phys. Rev., 1997, v.C55, p.961.
218. **Lin Z., Vogt R., Wang X.-N.** — Phys. Rev., 1998, v.C57, p.899.
219. **Wang X.-N., Huang Z., Sarcevic I.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.321.
220. **Kartvelishvili V., Kvatadze R., Shanidze R.** — Phys. Lett., 1995, v.356B, p.589.
221. **Nadkarni S.** — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.3738.
222. **Gao M.** — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.626.
223. **Abt I. et al. (H1 Coll.)** — Nucl. Phys., 1993, v.B407, p.515.
224. **Derrick M. et al. (ZEUS Coll.)** — Phys. Lett., 1993, v.316B, p.412.
225. **Flaughar B., Meier K.** — In: Proc. of the Summer Study on Physics... Snowmass, 1990.
226. **Балдин А.М. и др.** — ЯФ, 1985, т.44, с.995; 1988, т.48, с.841.
227. **Kruglov N.A., Lokhtin I.P., Sarycheva L.I., Snigirev A.M.** — Z.Phys., 1997, v.C76, p.99.
228. **Sjostrand T., van Zijl M.** — Phys. Rev., 1987, v.D36, p.2019;
Sjostrand T. — Comp. Phys. Com., 1994, v.82, p.74.

FINITE TEMPERATURE QCD ON THE LATTICE*

E. Laermann

Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Postfach 100 131,
33501 Bielefeld, Germany

The article summarizes the current status of lattice investigations of Quantum Chromo Dynamics at finite temperature. After a brief introduction into the formulation of QCD on the lattice and into the treatment of lattice QCD in numerical simulations, the current knowledge about the critical temperature of the transition from the hadron to the quark gluon plasma phase is presented. The status of investigations of the nature of this transition is discussed. Moreover, analyses of the equation of state in the high temperature phase as well as computations of the excitation spectrum at nonvanishing temperature are presented.

В работе рассматривается современное состояние решеточных исследований КХД при конечной температуре. После обозрения формулировки и численного моделирования КХД на решетке рассмотрено современное представление о критической температуре перехода от адронной фазы к фазе кварк-глюонной плазмы. Обсуждается состояние исследований природы этого перехода. Кроме того, представлены как анализ уравнения состояния в высокотемпературной фазе, так и вычисления спектра возбуждений при конечной температуре.

1. INTRODUCTION

The transition from hadronic matter to a new state of matter, the quark gluon plasma, at some finite temperature T_c is a phenomenon which is governed by long range interactions. As such, its understanding requires a nonperturbative treatment of QCD. Due to the asymptotic freedom of QCD which predicts that the temperature dependent coupling $g(T)$ vanishes in the limit $T \rightarrow \infty$, at very high temperatures one expects only weakly interacting gas of quarks and gluons. However, it is not clear at which value of the temperature one may apply perturbation theory reliably. This holds, in particular, in the temperature regime which can be accessed by the forthcoming heavy ion collision experiments at RHIC and LHC. Moreover, finite temperature perturbative calculations are usually plagued by infrared divergencies which seem to be curable only nonperturbatively. Thus, nonperturbative analyses of QCD are also requested in order to obtain information on the properties of the plasma phase.

*Lectures presented at the "Research Workshop on Deconfinement at Finite Temperature and Density", Dubna, Russia, October 1–29, 1997

The lattice approach to QCD distinguishes itself from other nonperturbative treatments by the principal absence of any approximation to QCD. Of course, due to the ever present limitations of computational power to evaluate the QCD path integral numerically, systematic errors of lattice QCD arise from the necessary constraints on the lattice volume, the finite lattice spacing a and the quark mass. In particular, since the computations which take into account virtual quark loops are very time consuming, many lattice analyses have been carried out in the pure gauge sector of QCD, the quenched approximation. This has delivered nontrivial results as the pure glue system is confining and chiral symmetry breaking. In particular, bulk properties of gluons at finite temperature can be regarded as being solved: the system has a well-established first-order transition [1], the equation of state is known in the continuum limit [2], and the critical temperature in the continuum limit has been determined with only a few percent uncertainty [3, 4]. Clearly, more detailed questions like, e.g., the nature of excitations in the plasma deserve further work, also in the quenched approximation. Yet, the emphasis of recent research has shifted towards studies of full QCD including staggered as well as Wilson quarks. These studies have not yet reached the quality of quenched simulations. In particular, the quark masses could not yet be tuned to their physical values. Moreover, at the moment these studies are carried out at considerably larger lattice spacings for technical reasons. Therefore, with the standard discretizations, extrapolations to the continuum limit (vanishing lattice spacing) will be more difficult than in the quenched case. Thus, the search for improved actions has received much attention recently also in the context of finite temperature QCD.

These lectures attempt to summarize the current status of knowledge in finite temperature lattice QCD and the current developments to improve on these results. In section 2 a short introduction into lattice techniques is given. Section 3 summarizes estimates of the critical temperature. In section 4 the present status of knowledge about the nature of the chiral transition is discussed. Section 5 describes studies of energy density and pressure at high temperature while section 6 reviews some results on screening lengths and masses. Conclusions are given in section 7.

2. LATTICE SIMULATIONS

The partition function $Z(V, T)$ of a generic Quantum Field Theory with elementary fields Φ in a given spatial volume V at temperature T is given by the path integral

$$Z(V, T) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E(V, T)}. \quad (1)$$

Here S_E is the Euclidean action, which defines the field theory in terms of a 4-dimensional integral over the Lagrangian, $\mathcal{L}$,

$$S_E(V, T) = \int_0^{1/T} dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\Phi). \quad (2)$$

The Lagrangian depends only on the fundamental fields $\Phi(t, \vec{x})$ and a set of coupling constants. The temperature and volume of a thermodynamic system enter through the restriction of the fundamental fields to a finite (3+1)-dimensional region of space-time. In particular, the temperature enters by restricting the Euclidean time interval to the range $t \in [0, 1/T]$ and by demanding periodic (antiperiodic) boundary conditions for bosonic (fermionic) fields in this direction. Thermodynamic quantities can then be obtained as derivatives of the partition function. For instance, the energy density and the pressure are given by

$$\epsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial}{\partial T} \ln Z, \quad p = T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z. \quad (3)$$

The quantum field theory, defined formally by the above relations, can be regularized by introducing a discrete space-time lattice with a finite lattice spacing a . This spacing acts as a coordinate cut-off which has to be removed at the end, i.e., the continuum limit $a \rightarrow 0$ has to be taken. On the lattice, the number of degrees of freedom is reduced to a large but finite set. This gives a well defined statistical interpretation to the path integral and to most observables of interest, which can be viewed as expectation values calculated in a statistical ensemble with Boltzmann weights $\exp(-S_E)$.

On a 4-dimensional space-time lattice with a lattice spacing a , the fields $\Phi(x)$ are restricted to the discrete set of points, $(x_0, \vec{x}) \rightarrow na \equiv (n_0a, n_1a, n_2a, n_3a)$. Accordingly, $\Phi(x)$ gets replaced by $\phi(n)$ and the measure in the path integral $\mathcal{D}\Phi$ becomes $\prod_n d\phi(n)$. The partition function of this system reads

$$Z(V, T) = \int \prod_n d\phi(n) e^{-S_E(V, T)}, \quad (4)$$

where the temperature of a lattice of size $N_\tau \times N_\sigma^3$ is determined by the temporal extent, $T = 1/N_\tau a$, and the spatial volume is given by $V = (N_\sigma a)^3$.

The crucial step in formulating a lattice regularized quantum field theory is the proper discretization of the Euclidean action, S_E . This can be achieved in a straightforward way for a scalar field theory by discretizing the integral in Eq. (2) and replacing derivatives of fields by finite differences. The action of the ϕ^4 -theory for instance, may be discretized as

$$\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\mu (\partial_\mu \Phi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2(x) + \frac{g}{4!} \Phi^4(x) \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{n=(n_0, \dots, n_3)} a^4 \left\{ -\frac{1}{a^2} \sum_{\mu=0}^3 \phi(n) \phi(n + \hat{\mu}) + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{8}{a^2} \right) \phi^2(n) + \frac{g}{4!} \phi^4(n) \right\}, \quad (5)$$

with $\hat{\mu}$ denoting the unit vector pointing to neighbouring sites in a 4-dimensional lattice, m being the particle mass and g the coupling constant.

In the case of a gauge theory the discretization is not at all so obvious. In fact, it is important to choose a discretization such that the basic symmetries of the continuum action are preserved. This is not always possible as, e.g., for fermionic theories. However, the most important step clearly is to construct a discretized action which preserves local gauge invariance [5].

Gauge fields mediate the interactions between matter. It is thus suggestive to introduce them as variables on the links (n, μ) of the lattice rather than on the sites. Gauge fields, $A_\mu(x)$, can then be related to elements $U_\mu(n)$ of a gauge group. In the case of an $SU(N)$ gauge theory, the relation between $U_\mu(n)$ and $A_\mu(x)$ is given by

$$U_\mu(n) = \exp \left[-iga \int_{na}^{na+\hat{\mu}a} dx_\mu A_\mu(x) \right], \quad (6)$$

where g is the bare coupling constant. Expanding this relation in the lattice spacing one can verify that the single plaquette action proposed by Wilson [5]

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{2N}{g^2} \sum_{n; 0 \leq \mu < \nu \leq 3} \boxed{\square} = \\ &= \frac{2N}{g^2} \sum_{n; 0 \leq \mu < \nu \leq 3} \frac{1}{N} \text{Re tr} U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu^{-1}(n + \hat{\nu}) U_\nu^{-1}(n), \end{aligned} \quad (7)$$

approximates the continuum action for the gauge fields up to terms of $O(a^2)$,

$$S_G = \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + O(a^2). \quad (8)$$

In the continuum limit, $a \rightarrow 0$, these higher order corrections become irrelevant.

Wilson also suggested a discretization scheme for fermionic actions. While it is easy to preserve local gauge invariance also in this case, it is not possible to preserve all the chiral properties of fermionic actions. Fermion actions contain only first derivatives of the fields. As a consequence, a straightforward discretization, similar to the scalar case described in Eq. (5), leads to additional poles in the lattice fermion propagator. In the continuum limit these additional poles will give rise to 15 additional, unwanted fermion species rather than only the one we started with. It could be shown [6] that this is a general phenomenon when in addition to such elementary assumptions as locality, hermiticity and translational

invariance also a continuous chiral symmetry of the action is required. There are however certain loopholes. Wilson proposed a discretization scheme for fermions, in which a second-order derivative term is added to the naively discretized fermion action S_F ,

$$S_F^{(W)} = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \{ \bar{\psi}(n) \gamma_\mu U_\mu(n) \psi(n + \hat{\mu}) - \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu^{-1}(n) \psi(n) \} + \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \{ 2\bar{\psi}(n) \psi(n) - \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) U_\mu^{-1}(n) \psi(n) - \bar{\psi}(n) U_\mu(n) \psi(n + \hat{\mu}) \}. \quad (9)$$

While the first term approximates the continuum action $\bar{\psi}(x)[\partial_\mu + igA_\mu(x)]\psi(x) + \mathcal{O}(a^2)$, the second term is $\mathcal{O}(a)$ relative to the first one and becomes irrelevant in the (naive) continuum limit. Its effect is that the 15 additional fermions acquire a large mass of $\mathcal{O}(1/a)$, which diverges in the continuum limit, and thus would decouple from the dynamics of the theory. However, chiral invariance of the action is lost at finite lattice spacing and is to be recovered in the continuum limit. Usually, including a mass term, Wilson's fermion action is rewritten as

$$S_F^{(W)} = \bar{\psi}(n) \psi(n) - \kappa \sum_{n,\mu} \{ \bar{\psi}(n) (1 - \gamma_\mu) U_\mu(n) \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (1 + \gamma_\mu) U_\mu^{-1}(n) \psi(n) \}. \quad (10)$$

The hopping parameter κ contains the quark mass and, in the free case, is given by $\kappa^{-1} = 8 + 2m_q a$.

Another approach is due to Kogut and Susskind [7]. By distributing four components of the continuum spinor over different sites of the lattice it is possible to reduce the number of additional species. If one introduces one staggered fermion species on the lattice, the Kogut — Susskind or staggered lattice action will lead to $N_F = 4$ species of fermions in the continuum limit. Moreover it preserves a global $U(1) \times U(1)$ chiral symmetry, i.e., an Abelian subgroup of the continuum chiral symmetry. For studies of chiral symmetry breaking on the lattice it is convenient to work with such a lattice action which preserves at least part of the $SU(N_F) \times SU(N_F)$ chiral symmetry of the continuum action. The staggered fermion action, obtained after a diagonalization in the Dirac indices, becomes

$$S_F^{(KS)} = \sum_{n,l} \bar{\chi}(n) M(n, l) \chi(l). \quad (11)$$

Here the fermion fields, χ , $\bar{\chi}$, are single-component anticommuting Grassmann variables defined on the sites of the lattice and the fermion matrix $M(n, l)$ is given by

$$M(n, l) = \sum_{\mu=0}^3 D_\mu(n, l) + m\delta(n, l). \quad (12)$$

The hopping matrices $D_\mu(n, l)$ mediate the nearest neighbour interactions and have nonzero elements only for $l = n \pm \hat{\mu}$,

$$D_\mu(n, l) = \frac{1}{2} \eta_\mu(n) [U_\mu(n) \delta(n + \hat{\mu}, l) - U_\mu^{-1}(l) \delta(n - \hat{\mu}, l)]. \quad (13)$$

The phase factors $\eta_\mu(n) = (-1)^{n_0 + \dots + n_{\mu-1}}$ for $\mu > 0$ and $\eta_0(n) = 1$ are remnants of the γ_μ matrices. Note that the fermion action in the Wilson discretization, Eq. (9) can be written in a similar form with a slightly more complicated hopping term which also carries spinor indices.

Finally, the partition function of QCD takes on the form

$$Z = \int \prod_{n, \mu} dU_\mu(n) \prod_n d\chi(n) d\bar{\chi}(n) e^{-[S_G + S_F]}, \quad (14)$$

where for Wilson's formulation the χ fields are to be replaced by the ψ spinors. As the fermionic part of the action is bilinear in the fields $\bar{\chi}(n)$, $\chi(n)$, these can be integrated out and the partition function can be represented in terms of bosonic degrees of freedom only,

$$Z = \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \det M e^{-S_G}. \quad (15)$$

In this form the partition function is well suited for numerical studies. A major problem is, however, caused by the presence of the fermion determinant, which in general cannot be calculated exactly. Algorithms for the numerical integration, which circumvent the explicit calculation of this determinant, are thus required.

In the lattice regularization, the Feynman path integral, Eq. (4), becomes a well-defined meaning as an ordinary integral. Because of the high dimensionality, its numerical evaluation, however, is a formidable task. Imagine a lattice of just 10^4 lattice points, then Eq. (4) represents a 10^4 fold integral times the number of internal degrees of freedom. Many field configurations $\{\phi\}$ will contribute to the integral with rather small Boltzmann weights, $\exp\{-S(\phi)\}$, though. Thus an efficient way to compute the integral would consist in generating a sequence of field configurations $\{\phi\}^{(k)}$ which are distributed according to this weight factor. The expectation value of an observable $\mathcal{O}(\phi)$ can then be approximated by the ensemble average

$$\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathcal{O}(\{\phi\}^{(k)}). \quad (16)$$

Such a series of field configurations is obtained by means of the so-called Markov chains. Starting from some arbitrary initial configuration $\{\phi\}^{(0)}$ one generates, one after the other, new sets of ϕ fields. Under certain conditions, the sets $\{\phi\}^{(k)}$

will be distributed according to the equilibrium probability $\exp\{-S(\phi)\}$, once a number of not-yet equilibrated initial configurations has been discarded.

It may suffice here to demonstrate the principles of this procedure by presenting the prototype Metropolis algorithm [8]. It consists of two steps: site by site (i) choose a trial update ϕ' according to some normalized probability distribution $P_{trial}(\phi \rightarrow \phi') = P_{trial}(\phi' \rightarrow \phi)$ and (ii) accept ϕ' with the conditional probability

$$P_{accept} = \min \left\{ 1, \frac{e^{-S(\phi')}}{e^{-S(\phi)}} \right\}. \quad (17)$$

The trial distribution P_{trial} must be chosen in such a way that the whole configuration space can be covered. The conditional accept probability P_{accept} favors configurations with lower action and thus higher Boltzmann weight but allows also for configurations with a smaller Boltzmann weight to be included in the set. This is necessary in order to account for the quantum fluctuations. Finally, the algorithm satisfies detailed balance, ($P = P_{trial} * P_{accept}$)

$$e^{-S(\phi)} P(\phi \rightarrow \phi') = e^{-S(\phi')} P(\phi' \rightarrow \phi), \quad (18)$$

which is a sufficient condition for convergence to the equilibrium distribution.

As new configurations are calculated from previous ones, it is clear that subsequent “snapshots” of the system are not statistically independent of each other. In order to carry out a correct statistical error analysis it is therefore desirable to step through configuration space rather quickly, minimizing the number of intermediate configurations which have to be discarded because they do not provide information independent of the previous state. The Metropolis algorithm is local and can be implemented efficiently. However, either the new value ϕ' is close to the old one, in which case the change in the action is small and its acceptance is likely, or the new ϕ' is far from the old one. In the latter case the change in the action is large, however, and the acceptance rate drops exponentially. Both choices result in a slow exploration of configuration space. These autocorrelation times between subsequent configurations can in general be decreased by using algorithms which mix stochastic updatings with deterministic ones.

In the full theory, with dynamical fermions, one has to deal with the fermion determinant, Eq. (15). Here, most simulations make use of the hybrid Monte Carlo algorithm [9, 10]. As a prerequisite the determinant is re-expressed by a path integral over pseudofermion fields, i.e., bosonic (commuting) fields which interact via the inverse fermion matrix*,

$$\det\{D + m\} = \int \prod_n d\phi(n) d\phi^*(n) \exp\{-\phi^*(D + m)^{-1}\phi\}. \quad (19)$$

*As the fermion matrix is not positive definite, one first has to square the determinant in order to obtain a regular Boltzmann weight factor. This minor complication will be neglected in the following.

Because of the nonlocality of the inverse Dirac matrix, any local updating scheme for the gauge fields in Eq. (15) would though require to recalculate the inverse after each local change in the U 's. Alternatively, one could change a whole gauge field configuration at once and then recalculate the inverse. However, with ordinary, local updating procedures, the acceptance probability of a global change would drop to zero very quickly with the lattice size. The hybrid Monte Carlo algorithm solves this problem by deliberately preparing a new configuration for a global accept/reject decision, Eq. (17). For this purpose one adds a quadratic term to the action,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \text{tr} \pi_\mu^2(n) + S_G(U) + \phi^* (D + m)^{-1} \phi, \quad (20)$$

which can be integrated out analytically and does not change expectation values. This expression, Eq. (20), is now taken as a Hamiltonian, with $\pi_\mu(n)$ being the momenta conjugate to the gauge fields, from which the Hamiltonian equations of motion* in a fictitious time τ are derived [11],

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} U_\mu(n) &= i\pi_\mu(n) U_\mu(n) \\ i \frac{d}{d\tau} \pi_\mu(n) &= U_\mu(n) \frac{\partial}{\partial U_\mu(n)} \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (21)$$

By numerically integrating the Hamilton equations over some time interval the whole of the gauge fields are evolved relatively fast through phase space. Since Hamilton's equations are energy conserving, $\mathcal{H} = \text{const}$, the new values for the gauge fields would be accepted with probability 1 if one could do the integration exactly. Discretization errors, however, cause slight violations of energy conservation which are corrected for in a global Metropolis acceptance decision, Eq. (17). By controlling the discretization step width $d\tau$ one can keep the energy conservation violations small and maintain a large acceptance probability. Finally, the molecular dynamics evolution, Eq. (21), is supplemented by random refreshments of the momenta π and the pseudofermions ϕ in order to guarantee ergodicity.

In simulations with dynamical fermions, by far the largest fraction of computing time goes into repeatedly calculating the inverse of the Dirac matrix. For that purpose, solvers which iteratively explore the Krylov space like, e.g., the conjugate gradient algorithm are used [12]. The numerical effort for the inversion

*Eq. (21) represents a slight modification of Hamilton's equations in order to preserve the gauge fields as elements of the gauge group.

depends on the fermion mass via the condition number,

$$\frac{|\lambda|_{max}}{|\lambda|_{min}} \sim \frac{1}{m}, \quad (22)$$

where λ denotes an eigenvalue of the Dirac matrix. This explains the high cost of simulations with small fermion masses.

As the numerical effort required for the simulation of fermions is quite large, many lattice investigations have been using the so-called quenched approximation. This approximation amounts to setting the determinant equal to 1,

$$\det\{D + m\} = \exp [\text{tr} \log(D + m)] \stackrel{!}{=} 1. \quad (23)$$

Expanding the exponent leads to

$$\text{tr} \log(D + m) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k} \text{tr} D^{2k} \stackrel{!}{=} 0. \quad (24)$$

The Dirac matrix D connects neighbouring lattice sites via a gauge link and in a way describes the hopping of a fermion from one site to the next. Because of the trace, only closed loops contribute in Eq. (24). Thus, the seemingly crude quenched approximation amounts to neglecting virtual quark loops and treats fermions as static degrees of freedom. Properties of the theory which depend crucially on the fermion dynamics are thus not accessible by studies in the quenched approximation. On the other hand, basic properties of QCD which are dominated by the non-abelian gluon dynamics should and do survive the approximation. Quenched studies therefore serve as important guides for many nonperturbative aspects of the theory. Of course, the results have to be checked by calculations in the full theory.

The statistical accuracy of computations notably in the quenched approximation has nowadays become so good that the major uncertainty of the results is the systematic error arising from finite lattice spacings. There are attempts to reduce this error by using the so-called improved actions. A detailed presentation of this rather technical issue is beyond the scope of these lectures, yet it might be useful to demonstrate some ideas.

Improved actions are targeted at reducing the deviations between the continuum and the lattice action to higher orders in the lattice spacing. In principle, e.g., for a generic scalar action, this can be achieved by using better finite difference approximants to the derivative. With

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2a} [\phi(x + \hat{\mu}) - \phi(x - \hat{\mu})] &= \partial_{\mu} \phi + \frac{a^2}{6} \partial_{\mu}^3 \phi + \mathcal{O}(a^4) \\ S_2 &= \frac{1}{6a} [\phi(x + 3\hat{\mu}) - \phi(x - 3\hat{\mu})] &= \partial_{\mu} \phi + \frac{3a^2}{2} \partial_{\mu}^3 \phi + \mathcal{O}(a^4) \end{aligned} \quad (25)$$

one obtains

$$\frac{9}{8}S_1 - \frac{1}{8}S_2 = \partial_\mu \phi + \mathcal{O}(a^4) \quad (26)$$

and thus reduces the deviations from $\mathcal{O}(a^2)$ to $\mathcal{O}(a^4)$. Clearly, this procedure is not unique and can be iterated towards increasingly better approximants. The price to be paid are successively more extended lattice operators and correspondingly more computational effort per lattice site. The same principle applies to gauge fields although the generalization is perhaps not so immediate because gauge invariance ought to be preserved. Here one adds larger loops to the simple plaquette term, Eq. (7), in the simplest case

$$S_G \sim \frac{4}{3} \left[\text{square} \right] - \frac{1}{6} \left[\text{rectangle} \right] \sim S_G^{\text{cont}} + \mathcal{O}(a^4). \quad (27)$$

The coefficients of the two loops have been adjusted at tree level so as to improve the classical action. In the path integral, however, quantum corrections introduce deviations of order $a^2 g^{2n}$. In principle [13] these can be eliminated order by order in perturbation theory. For on-shell quantities this program was carried out at one-loop level [14]. However, lattice perturbation theory in the bare gauge coupling is badly converging in the parameter range usually explored in numerical studies. The bad convergence can be traced back to the expansion of the link variable U_μ , Eq. (6), in terms of the gauge potential A_μ ,

$$U_\mu \simeq 1 + iagA_\mu - \frac{1}{2}a^2g^2A_\mu^2 + \dots \quad (28)$$

The higher orders lead to vertices not present in continuum perturbation theory. Their contributions are not small at gauge couplings of $\mathcal{O}(1)$. Moreover, they lead to “tadpole” diagrams [15] which enhance $\mathcal{O}(a^2g^{2n})$ corrections to $\mathcal{O}(g^{2n})$. These unwanted terms can partly be eliminated by the so-called tadpole improvement. In this approach the link variables are renormalized by their mean field value (which in the lowest nontrivial order is given by the tadpole contribution) and the perturbative series is carried out in a renormalized coupling. It is however *a priori* not known whether nonperturbative quantities are sufficiently improved by this recipe.

Similar improvement programs have been suggested for fermion actions [16, 17]. This seems important in particular for the Wilson discretization which deviates from the continuum action in $\mathcal{O}(a)$, compared to staggered fermions at $\mathcal{O}(a^2)$. Here, also a nonperturbative determination of the coefficients in the action by requiring certain Ward identities to hold have been advocated [18] and are being explored.

Finally, renormalization group ideas have been used to construct improved actions [19]. Integrating out high momentum fluctuations leads to coarse grained lattices and defines a renormalization group flow in a multidimensional parameter

space. In principle one could thus derive a perfect action which at a given value for the lattice spacing “sits” on the renormalized trajectory. In practice one has to truncate the set of different lattice operators to some manageable number. Again, this approach is also being used and tested.

3. CRITICAL TEMPERATURE

One of the basic quantities to be derived from finite temperature lattice QCD is the value of the critical temperature. The critical temperature is obtained from the location where a certain order parameter vanishes. In the case of the pure $SU(N)$ gauge theory this order parameter is the expectation value of the Polyakov loop

$$\langle L \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \prod_{n_0=1}^{N_\tau} U_0(n_0) \right\rangle. \quad (29)$$

Below the phase transition its vanishing signals that the theory is invariant under the center symmetry $Z(N)$ of $SU(N)$: $U_0(N_\tau) \rightarrow zU_0(N_\tau)$ with $z \in Z(N)$. Above T_c the finite value of $\langle L \rangle$ shows breakdown of that symmetry. Moreover, the Polyakov loop is related to the free energy F_q of a single quark

$$\langle L \rangle = \exp(-F_q/T) \quad (30)$$

so that $\langle L \rangle = 0$ below T_c is equivalent to an infinite F_q , i.e., one has confinement. Above the transition, F_q can be finite because of deconfinement, hence $\langle L \rangle \neq 0$.

The fermionic part of the action breaks the center symmetry explicitly. Thus the Polyakov loop is not an order parameter in the symmetry sense anymore. The relation with the free energy still holds. However, in the chiral limit the QCD Lagrangian is invariant under chiral flavor transformations. These symmetries are spontaneously broken at $T = 0$ leading to a nonvanishing chiral condensate, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, and to massless Goldstone bosons, the pions. At high temperature one expects that the chiral invariance is restored indicated by $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \rightarrow 0$ at the critical temperature.

Because on a finite lattice the Polyakov loop can tunnel through all different $Z(N)$ vacua one usually analyzes $\langle |L| \rangle$. In simulations with fermions one cannot run at vanishing quark mass. Both leads to nonvanishing tails of the order parameters in the “other” phase. Therefore, the corresponding susceptibilities $\chi_L = \langle |L|^2 \rangle - \langle |L| \rangle^2$ and $\chi_m = \langle (\bar{\psi}\psi)^2 \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2$ are more sensitive to the location of the critical temperature where they develop a peak.

In Fig.1 the Polyakov loop and the chiral condensate as well as the corresponding susceptibilities are plotted as a function of the coupling. The data originates from a simulation with two flavors of dynamical staggered quarks. Note that in principle the deconfinement and the chiral transition are two different

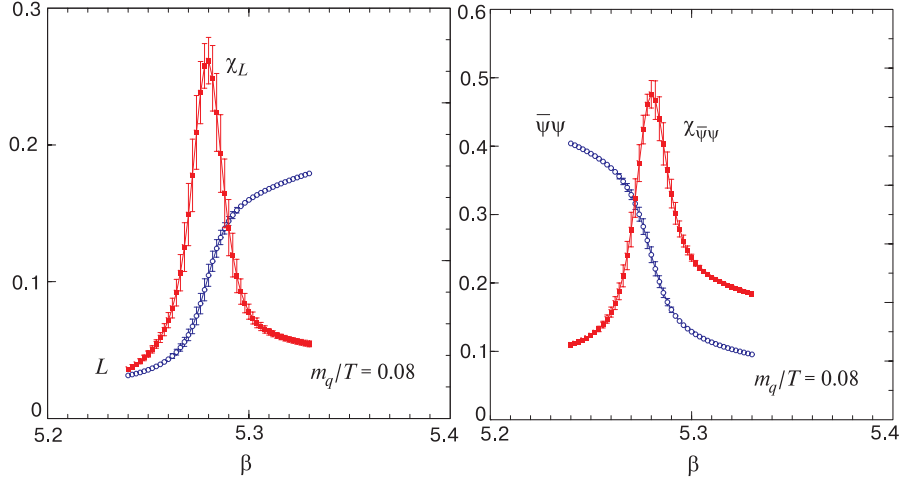


Fig. 1. Polyakov loop and chiral condensate together with the corresponding susceptibilities as a function of the coupling $\beta = 6/g^2$ from a simulation with two flavors of dynamical staggered quarks

phenomena, yet, one observes the peaks in both susceptibilities (with fermions in the fundamental color representation) at the same location.

Once the critical bare coupling is known, one needs to turn that value into a physical number for the temperature. Recall that the temperature of a lattice is given by the relation $T = 1/(N_\tau a(\beta))$ where the lattice spacing is dependent on the bare coupling $\beta = 6/g^2$ by dimensional transmutation. In order to vary T one can change N_τ in discrete steps or tune a by varying β . For each N_τ one needs a different value for a hence for β to tune to the same temperature. For a physical value of T or T_c a physical number for the lattice spacing has to be known. This is obtained by computing a quantity with nontrivial dimension like, e.g., a hadron mass m_H or the string tension σ on a lattice with the same bare coupling but at $T = 0$. This yields these quantities in lattice units, e.g., $\sigma_{\text{lat}} = \sigma a^2(\beta)$. In ratios like $T_c/\sqrt{\sigma} = 1/(N_\tau \sqrt{\sigma_{\text{lat}}})$ the lattice spacing drops out and the ratios should become independent of a . Due to nonuniversal scaling, i.e., an observable-dependent relation between a and β and due to lattice discretization effects these ratios need not be constant however. To obtain continuum numbers one has to extrapolate to $a \rightarrow 0$.

Figure 2 summarizes the current status of analysis in the quenched approximation. It shows the ratio $T_c/\sqrt{\sigma}$ for various actions where σ is the string tension extracted from the static quark potential at $T = 0$. For all data points the value of the critical coupling has been extrapolated to its infinite (spatial) volume limit at which then the string tension was determined. The lowest set

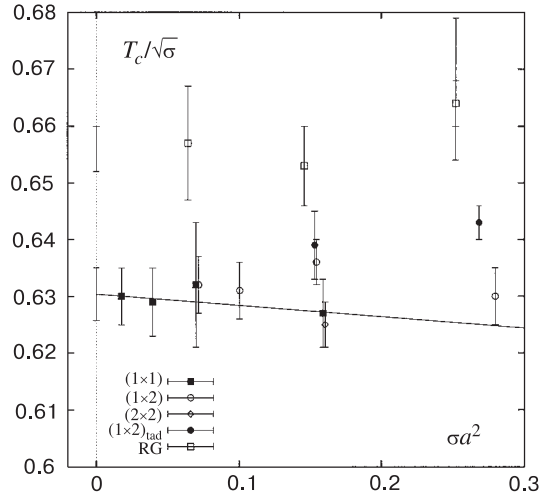


Fig. 2. The quenched critical temperature in units of the square root of the string tension for various gauge actions versus the lattice spacing squared

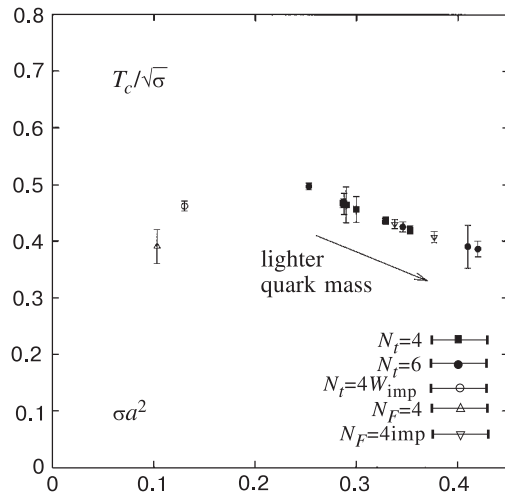


Fig. 3. The critical temperature in units of the square root of the string tension for dynamical fermions versus the square of the lattice spacing (for further explanations see text)

of data points originates from simulations with the standard Wilson gauge action [2,4]. An extrapolation in the lattice spacing to the continuum limit gives $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.630(5)$. The data is compared with results from simulations with a variety of Symanzik-improved actions [4,21]. Note that in this particular ratio, $T_c/\sqrt{\sigma}$, no strong cut-off dependence is seen in neither case. Also the continuum

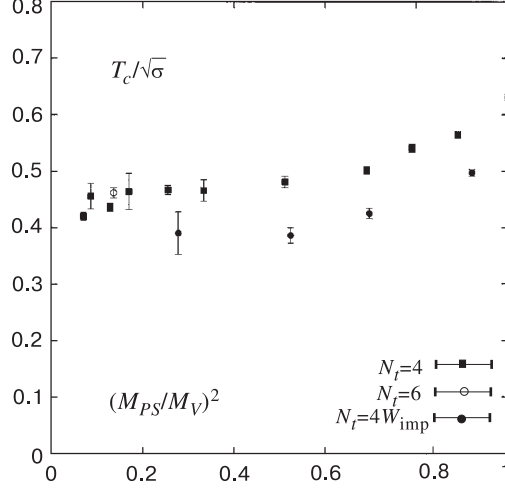


Fig. 4. The critical temperature in units of the square root of the string tension for dynamical fermions plotted versus $(M_{PS}/M_V)^2$. The point at $(M_{PS}/M_V)^2 = 1$ is the $N_\tau = 4$ quenched value

extrapolations are in agreement with each other. Likewise, the results [3] from Iwasaki's RG-improved action are consistent with a constant behavior in a , but they deliver a value of the critical temperature of $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.656(4)$ which is about 3% higher than the number from the standard action. Since the procedure to extract the string tension has not been the same for the two numbers, one might suspect that the difference in the quoted values for T_c , $T_c = 276(2)$ MeV versus 266(2) MeV, is mainly due to differences in the analysis of the static quark potential [22] rather than to differences in the improvement scheme.

The current situation with dynamical fermions is depicted in Fig.3. The plot summarizes data from simulations with 2 flavors of quarks, staggered fermions at $N_\tau = 4$ and 6 [23,24] as well as improved Wilson fermions at $N_\tau = 4$ [23], plus $N_F = 4$ staggered results obtained from $N_\tau = 4$ lattices with an improved action [25] in addition to an old number [26] from $N_\tau = 8$ and a standard action. Compared to the equivalent quenched plot, Figure 3 shows that the lattice spacings at which T_c has been determined so far are considerably larger than in pure gauge theory simulations. Moreover, the investigations have not been carried out at the physical quark masses. The arrow in Figure 3 indicates that at fixed N_τ the transition takes place at larger lattice spacings when the quark mass is decreased. Thus the critical temperature is decreasing when the quark mass is lowered.

The same data is shown again in Fig.4 as a function of the pseudoscalar Goldstone boson to vector meson mass ratio $(M_{PS}/M_V)^2$ which is proportional

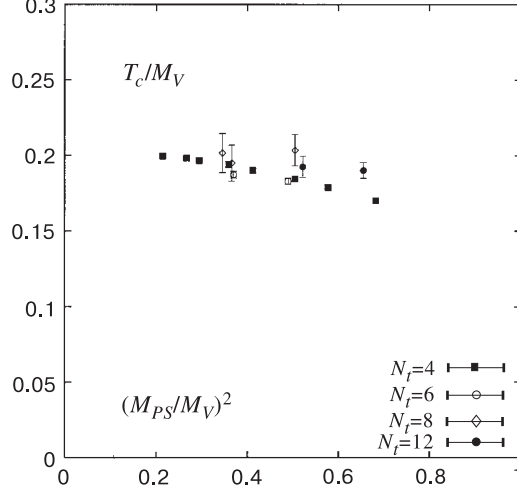


Fig. 5. The critical temperature in units of the vector meson mass for staggered fermions plotted versus $(M_{PS}/M_V)^2$

to the physical quark mass. Here now, at fixed N_τ , smaller lattice spacings are to the right of the figure. The $N_\tau = 4$ staggered data indicate that T_c over $\sqrt{\sigma}$ tends to lower values as the quark mass decreases. The same trend is observed for the Wilson improved results, although at larger $(M_{PS}/M_V)^2$ ratios. On the other hand, the $N_\tau = 6$ data point seems to indicate that, at a given quark mass, decreasing of the lattice spacing increases $T_c/\sqrt{\sigma}$ only slightly. At the moment, one would therefore estimate a physical value for the critical temperature of $T_c/\sqrt{\sigma} \lesssim 0.4$ or $T_c \lesssim 170$ MeV.

The critical temperature has also been estimated from the ratio to the vector meson mass. In this case one ought to go (close) to the chiral limit in order to extract a physical number because the vector meson mass depends on the quark mass. In the case of using the string tension to set the scale one might argue that the string tension is considerably less affected by the quark mass. Figure 5 shows T_c/M_V for $N_F = 2$ staggered fermions [24, 27–31], plotted as function of $(M_{PS}/M_V)^2$. As the quark mass is decreased this ratio rises. Recall that the infinite quark mass, quenched data point corresponds to $M_{PS}/M_V = 1$ and $T_c/M_V = 0$. As the lattice spacing is decreased, T_c/M_V stays remarkably constant. Extrapolating the $N_\tau = 4$ data to the chiral limit suggests a value of $T_c/M_V \simeq 0.2$ or $T_c \simeq 150$ MeV. Note that this value disagrees somewhat with the number extracted from the string tension.

The corresponding data for dynamical Wilson quarks [23, 32–34] are given in Fig. 6. Although some unexpected crossover behavior at the critical temperature

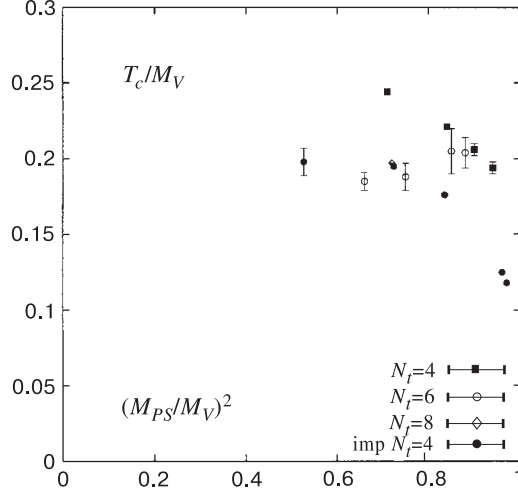


Fig. 6. The critical temperature in units of the vector meson mass for Wilson fermions versus $(M_{PS}/M_V)^2$

was observed with the standard Wilson fermion action, at least the results for $N_\tau = 6$ and 8 as well as the first data with improved Wilson fermions [23] are not in disagreement with the staggered data.

In summary, studies with dynamical fermions consistently have lead to an estimate of the critical temperature of order 150 MeV for 2 flavors so far. This value is considerably lower than the quenched number of $T_c = 270(5)\text{MeV}$. Because of the relation $T = 1/(aN_\tau)$ of the temperature T to lattice spacing a and temporal extent N_τ of the lattice, dynamical fermion simulations in the vicinity of the transition are correspondingly, at a given N_τ , carried out at considerably larger lattice spacings.

4. PHASE TRANSITION

The studies presented in this section are aiming at establishing the order of the transition to the plasma phase. A first order transition has discontinuities at the "critical" temperature, e.g., a latent heat, and the two phases are coexisting at T_c . At a second order transition the correlation length and certain response functions diverge while other quantities show a continuous behavior. These differences lead to observable consequences in the cooling of the early universe as well as in heavy ion collision experiments.

In the quenched approximation it has been clarified that the deconfinement transition is of first order [1]. In the full theory the nature of the transition is a

subject of active research. The most advanced studies so far have concentrated on two flavors of light quarks as one is expecting that the restoration of chiral symmetry is the important phenomenon also in the realistic case of two light, up and down quarks plus the heavier strange quark.

4.1. Staggered $N_F = 2$: Critical Behavior. The theoretical expectations on the scaling behavior of QCD at the chiral transition are based on the σ model in three dimensions. For the case of two light flavors, if the transition is of second order, it is expected to show scaling behavior with $SU(2) \times SU(2) \simeq O(4)$ exponents. On the other hand, if the anomalous $U_A(1)$ symmetry were effectively restored, the relevant symmetry group would be $U_A(1) \times SU(2) \times SU(2) \simeq O(2) \times O(4)$ and the transition could be of first order [35].

It has been attempted to analyze the critical behavior of two flavor staggered QCD by studying the scaling behavior of various quantities and determining critical exponents [36]. These scaling relations are derived from the scaling of the singular part of the free energy density under an arbitrary change of scale b ,

$$f(t, h) = -\frac{T}{V} \ln Z = b^{-1} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h). \quad (31)$$

Here, t is the reduced temperature, $t = (T - T_c)/T_c$, with T_c as the critical temperature in the chiral limit, and h is the symmetry breaking field, $h = m/T$. In the vicinity of the critical point, thermodynamic quantities should be governed by the thermal (y_t) and the magnetic (y_h) critical exponent. In the staggered version of lattice regularized QCD, for the dimensionless couplings t and h one uses

$$\begin{aligned} t &= \frac{6}{g^2} - \frac{6}{g_c^2(0)} \\ h &= maN_\tau, \end{aligned} \quad (32)$$

where $g_c(0)$ denotes the critical coupling on a lattice with fixed temporal extent in the limit of vanishing quark mass. At nonvanishing quark mass, a pseudo-critical coupling $g_c(m)$ is defined as the location of a peak in, e.g., the Polyakov loop susceptibility.

Quantities from which one can extract critical exponents are various susceptibilities, in particular, the magnetic or chiral susceptibility

$$\chi_m = \frac{T}{V} \sum_{i=1}^{N_F} \frac{\partial^2}{\partial m_i^2} \ln Z \quad (33)$$

and the thermal susceptibility

$$\chi_t = -\frac{T}{V} \sum_{i=1}^{N_F} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial (1/T)} \ln Z. \quad (34)$$

Table. Critical exponents for $O(2)$, $O(4)$ and mean field (MF). The numerical 2 flavor QCD results are given separately for each spatial lattice size, with upper values denoting the JLQCD and the lower ones — the Bielefeld group numbers [40,41]

	O(2)	O(4)	MF	L=8	L=12	L=16
z_g	0.60	0.54	2/3	0.70(11)	0.74(6)	0.64(5)
					0.63(6)	
z_m	0.79	0.79	2/3	0.70(4)	0.99(8)	1.03(9)
				0.84(5)	1.06(7)	0.93(8)
z_t	0.39	0.34	1/3	0.47(5)	0.81(9)	0.83(12)
				0.63(7)	0.94(12)	0.85(12)

Assuming that the free energy is dominated by its singular part, Eq. (31) then leads to the scaling predictions for the peak heights of the susceptibilities at the line of pseudocritical couplings

$$\begin{aligned}\chi_m^{\text{peak}} &\sim m^{-z_m} \\ \chi_t^{\text{peak}} &\sim m^{-z_t},\end{aligned}\quad (35)$$

where the exponents are given by $z_m = 2 - 1/y_h$ and $z_t = (y_t - 1)/y_h + 1$. The pseudocritical line itself is expected to follow

$$\frac{6}{g_c^2(m)} = \frac{6}{g_c^2(0)} + c m^{z_g} \quad (36)$$

with $z_g = y_t/y_h$. The values of these exponents for various symmetries [37] are given in the Table. At finite lattice spacing the exact chiral symmetry of the staggered fermion action is $U(1) \simeq O(2)$. However, sufficiently close to the continuum limit one expects $O(4)$ exponents. The possibility of mean-field (MF) exponents arbitrarily close to the transition has been raised by [38].

Earlier investigations of the exponents on small lattices ($8^3 \times 4$) had observed partial agreement with $O(4)$ scaling [39]. These studies have been repeated on larger spatial volumes, $L = 12, 16$ by the JLQCD collaboration [40] and by the Bielefeld group [41]. In addition to the quark mass values 0.02, 0.0375 and 0.075 in lattice units JLQCD also ran at $m = 0.01$. The volume dependence of the chiral susceptibility at peak is shown in Fig.7, similar results are available for the other quantities. For $m \geq 0.02$, the susceptibility rises when the volume is increased from 8^3 to 12^3 , but then stays approximately constant. Thus, a phase transition does not occur in this mass range, in agreement with earlier claims [42]. At $m = 0.01$ the linear increase in the peak height as the volume is enlarged continues up to $L = 16$. As such, this observation could suggest a first order transition. JLQCD however have studied the volume dependence of a double-peak structure in the distribution of the chiral order parameter and conclude that a first order transition is likely to be absent [40].

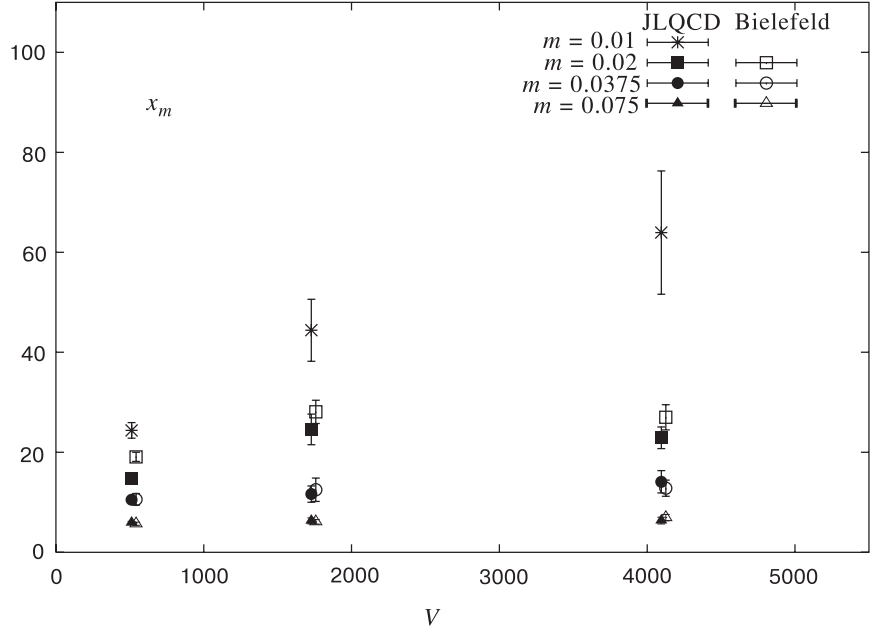


Fig. 7. Volume dependence of the chiral susceptibility χ_m at peak for two flavors of staggered quarks

The quark mass dependence of χ_m^{peak} is shown in Fig.8, expected scaling behavior, Eq. (35). The resulting values for the critical exponents are also summarized in the Table. For z_g , within two standard deviations, agreement with all three predictions is obtained. For the other two exponents, both groups consistently observe a drastic change when the spatial extent is increased from $L = 8$ to $L = 12, 16$. While for the small volume the value for z_m is in rough agreement with $O(2)$ and $O(4)$, the results from $L = 12$ and 16 do not agree with any of the predicted numbers. Indeed, the observed value $z_m \simeq 1$ would be expected for a first order transition. The thermal exponent z_t is larger than any of the predictions for all volumes.

Another way to study the scaling behavior is to compute the (magnetic) equation of state [43]

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle h^{-1/\delta} = \phi(th^{-1/\beta\delta}), \quad (37)$$

where the critical exponents δ and $\beta\delta$ are related to y_t and y_h as $1/\delta = 1/y_h - 1$ and $1/\beta\delta = y_t/y_h$. The scaling function ϕ was determined from a parametrization of $O(4)$ simulation results [44] and is universal, except that two nonuniversal normalization constants have to be adjusted. This has been done by the MILC

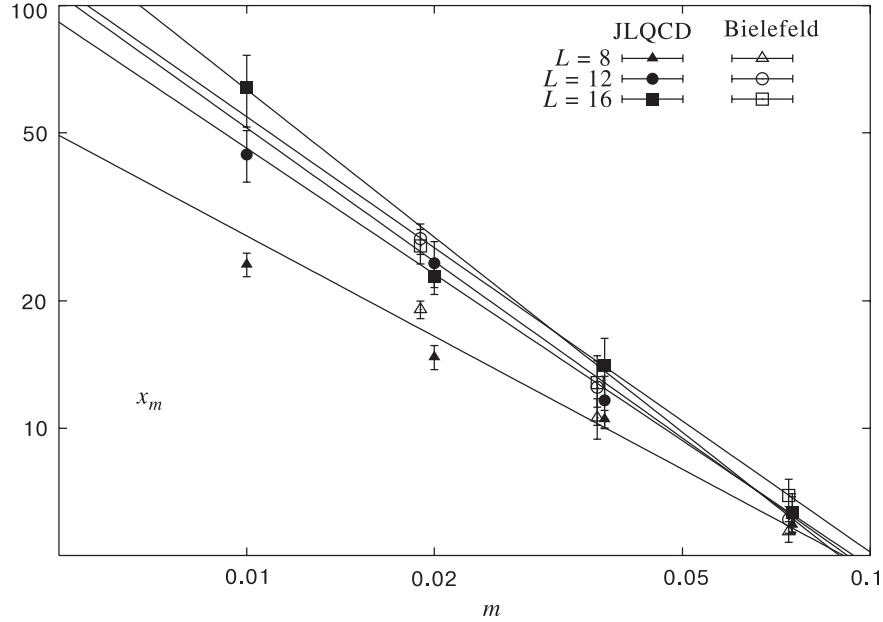


Fig. 8. Mass dependence of the chiral susceptibility χ_m at peak. The upper 4 lines are fit results with Eq. (35) to the $N_\sigma = L = 12$ and 16 data while the lowest line shows the slope of $O(4)$ scaling

Collaboration [45] for $N_\tau = 4, 6, 8$ and 12. The results are shown in Fig.9. While at $N_\tau = 4$ the data for the larger quark masses and smaller volumes are compatible with $O(4)$, the new data at smaller quark masses and larger lattice extent again show drastic disagreement. When N_τ is increased, thus going to smaller lattice spacings, the agreement becomes increasingly better [45], but it should be remarked that the data at $N_\tau = 12$ originates from physical quark mass values $m/T \simeq 0.1$ which are of about the same size as the larger quark masses used at $N_\tau = 4$. Also, even at large spacing one would expect $O(2)$ behavior which is indistinguishable from $O(4)$ with the current precision of the data.

At the moment there is no convincing explanation for these discrepancies at hand. In view of the results presented in section 4.3 obtained with an improved gauge action and Wilson fermions one might speculate that at strong coupling and for the standard action the relation between the QCD parameters and the thermodynamic variables, Eq. (32), as they enter the singular part of the free energy is strongly distorted. More studies at weaker coupling or with improved actions would be needed to solve this important question.

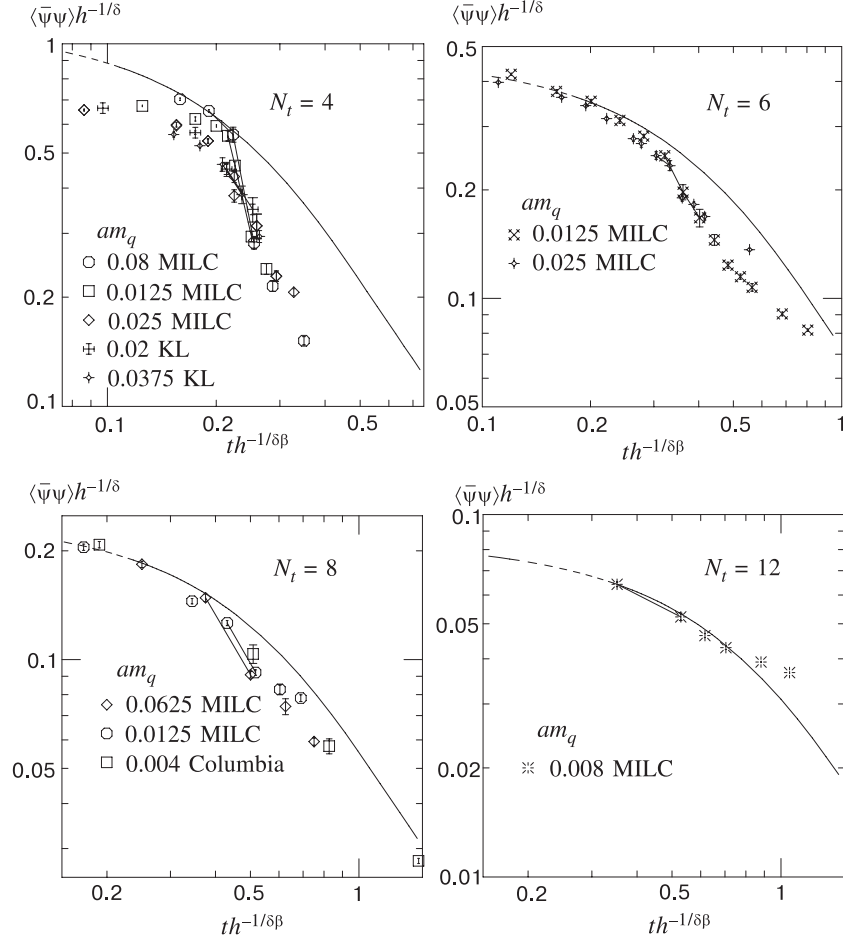


Fig. 9. The magnetic equation of state, Eq. (37), for $N_t = 4, 6, 8$ and 12 [45]. The line in each plot is the $O(4)$ scaling prediction. It can be moved horizontally as well as vertically by adjusting two free normalization constants

4.2. $U_A(1)$ Restoration. The nature of the chiral transition for two flavors is strongly affected by the realization of the $U_A(1)$ symmetry [35]. This symmetry is present in the classical continuum action but is destroyed by the famous triangle anomaly. At very high temperatures topologically nontrivial configurations are suppressed. This could lead to the effective restoration of the symmetry despite the anomaly. For 2 light quark flavors the effective restoration of $U_A(1)$ is reflected in the degeneracy of the pion and the isovector-scalar $a_0(\delta)$ mass [46].

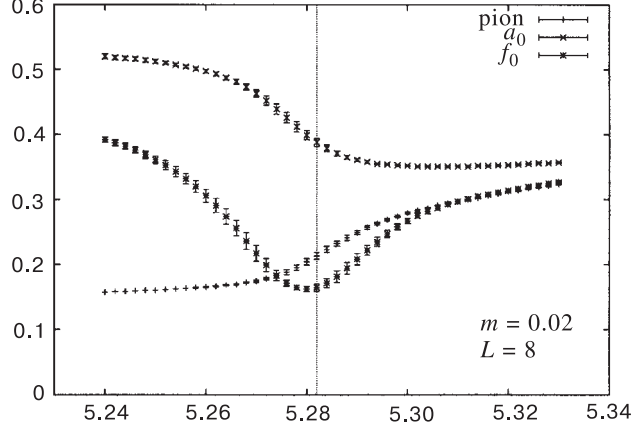


Fig. 10. Masses of π , a_0 and f_0 taken from the generalized susceptibilities, Eq. (38), for two flavors of staggered quarks as a function of the coupling. The critical coupling is indicated by the vertical line

This degeneracy can also be detected by comparing generalized susceptibilities defined via integrated propagators of a hadron H

$$\chi_H = \int d^4x \langle H(x) H^\dagger(0) \rangle \sim \frac{1}{M_H^2}. \quad (38)$$

The susceptibilities have been computed by various groups [41, 47, 48] and a set of results is shown in Fig. 10. At the critical temperature, π and f_0 become (almost) degenerate reflecting $SU_A(2)$ restoration while there remains a significant difference between a_0 and π in the investigated temperature range.

These results were obtained at finite quark mass and need to be extrapolated into the chiral limit. This was attempted in [47, 48]. Figure 11 shows the latest results by the Columbia group for the difference between π and a_0 ,

$$\omega = \int d^4x (\langle \pi(x) \pi^\dagger(0) \rangle - \langle a_0(x) a_0^\dagger(0) \rangle). \quad (39)$$

If $U_A(1)$ is restored this quantity should vanish in the chiral limit. In the continuum, the susceptibility ω is expected to be an analytic and, for $N_F = 2$, even function in the quark mass. Indeed, fits with a quadratic m dependence work and lead to a finite intercept in the chiral limit. However, the data look strikingly linear and fitting them with a linear ansatz results in a vanishing of the susceptibility at $m = 0$. At finite lattice spacing, due to zero-mode shifts and perhaps also due to taking the square root of the determinant the approach towards the chiral limit is not so clear however [48]. Therefore one should continue to study

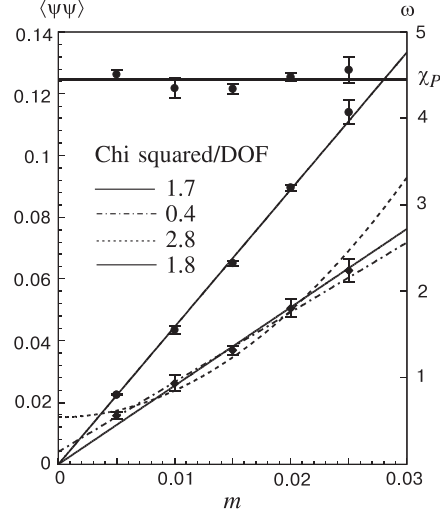


Fig. 11. The quantity ω , Eq. (39), which measures the breaking of the $U_A(1)$ symmetry plotted versus the quark mass (lowest data) together with various fits [48]. Also shown are the results for the integrated pion correlator, χ_P , and the chiral condensate. The data were obtained on a $16^3 \times 4$ lattice at fixed β slightly above β_c

the quark mass dependence at even smaller quark masses as well as at smaller lattice spacings.

The approach chosen in [49,50] is to determine screening masses. Above the critical temperature, the difference between π and a_0 mass drops considerably, but a nondegeneracy remains at finite quark mass, thus confirming the findings originating from the analysis of the susceptibilities. In order to address the problem of the chiral limit from a different angle, Ref. 50 also computed the lowest eigenvalues λ and corresponding eigenvectors ψ_λ of the fermion matrix D . In the continuum, in the phase symmetric with respect to the axial $SU(2)$, the chiral limit of ω is given by the zero-modes,

$$\omega = \left\langle \sum_{\lambda=0} \frac{\bar{\psi}_\lambda \gamma_5 \psi_\lambda}{i\lambda + m} \right\rangle. \quad (40)$$

In [50] it is then verified that ω obtained from Eq. (39) is saturated by the contribution from low eigenmodes at finite a and m_q . Thus it seems that the continuum relation between the $U_A(1)$ and the eigenmodes is satisfied on the lattice. This supports that the vanishing of ω when the chiral limit is carried out at finite lattice spacing is caused by the absence of exact zero modes at finite a . Taking the continuum limit prior to the chiral one would therefore presumably

lead to nonvanishing ω . In this manner the results of [50] indicate that the $U_A(1)$ symmetry is not restored at the chiral transition.

4.3. Wilson Fermions $N_F = 2$. Wilson's discretization of the action for fermions breaks chiral symmetry explicitly. Therefore, the value for the hopping parameter κ which corresponds to the chiral limit is shifted away from its free field value $\kappa_c(\beta \rightarrow \infty) = 1/8$ to a coupling constant dependent $\kappa_c(\beta)$ which has to be tuned at each β value. At zero temperature one usually defines the chiral limit by means of the pion mass which vanishes according to

$$m_\pi^2 \approx \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c}. \quad (41)$$

At sufficiently large temperatures this definition does not work anymore. For instance, at fixed and large enough β , when one lowers the quark mass by increasing κ , one reaches the transition to the plasma phase at which point the pion mass starts to increase because in the plasma phase the pion ceases to be a Goldstone particle and acquires a finite mass even in the limit of vanishing quark mass.

This results in the phase diagram as shown in Fig.12, which has been clarified by [51]. At finite N_τ , the line $\kappa_c(\beta)$ defined through the vanishing of the pion mass starts off at $1/4$ at $\beta = 0$ and extends to $\kappa_c \simeq 0.22$ at about $\beta \simeq 4.0$ where it bends backwards again to the region of stronger couplings (see also [52]). On the other hand, coming from the confined phase, at the thermal line $\kappa_t(\beta)$

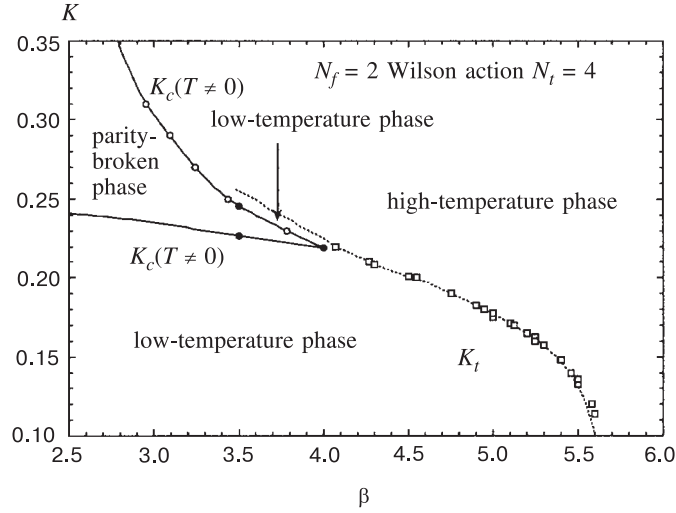


Fig. 12. The finite temperature phase diagram in the (β, κ) plane for standard Wilson fermions [51]

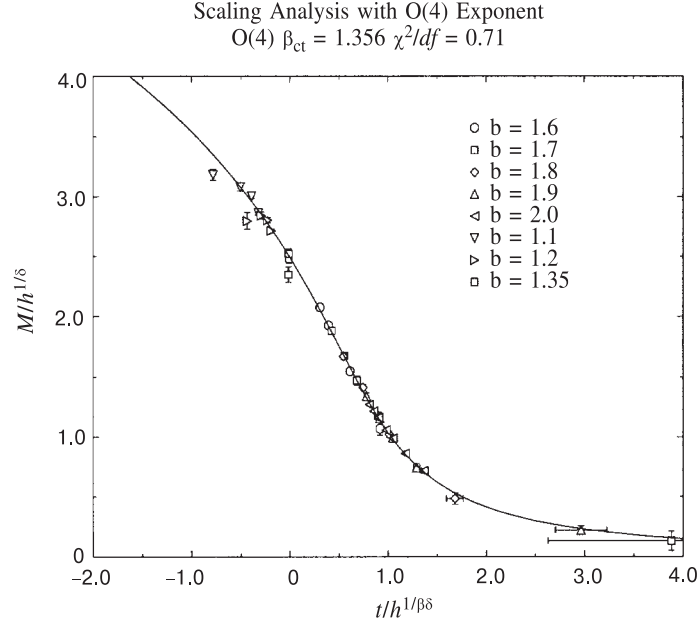


Fig. 13. The magnetic equation of state, Eq. (37), with two flavors of standard Wilson fermions on improved glue [54]. The various symbols denote data obtained at different values of the gauge coupling $b = 6/g^2$

where the Polyakov loop develops a nonvanishing expectation value the pion mass increases rapidly due to the approximate restoration of chiral symmetry. Only in the region where the thermal line is close to κ_c does the theory have a pion with a small mass. Thus, the chiral transition can only be explored in that region. Unfortunately, this region is at strong coupling for $N_\tau = 4$ and moves towards smaller coupling only very slowly with increasing temporal extent of the lattice [53], rendering a study of the transition in the vicinity of continuum physics prohibitively expensive. For that reason and for the well-known pathologies [34] several groups have started to work with improved actions.

In [54] the standard Wilson fermion action with RG-improved glue was simulated. Qualitatively, the phase diagram is very similar to the standard one so that small pion masses again are obtained in the vicinity of the finite temperature κ_c cusp. In addition to the phase diagram the group has also investigated the magnetic equation of state, Eq. (37). For Wilson fermions quark mass and chiral order parameter have to be obtained from chiral Ward identities [55]. This involves renormalization constants for which the lowest order perturbative values have been used in [54]. The results are shown in Fig.13. The agreement with

the $O(4)$ scaling curve is remarkable. The analysis was carried out on lattices of size $8^3 \times 4$ and with mainly not very small quark masses. It would be very interesting to continue the investigation on larger lattices and with more data at smaller quark masses.

4.4. More than 2 Flavors. The phase transition has also been studied for the number of flavors differing from 2. Regarding the nature of the chiral transition, for $N_F \geq 3$ and degenerate quark masses one expects first order in the continuum limit [35].

Early results in the staggered discretization (for a summary see, e.g., [56]) indeed show a behavior which is consistent with this expectation. Recently, the cases $N_F = 3$ and 4 with degenerate Wilson quarks have been studied in [57]. In both cases the phase diagram is very similar to the one with 2 flavors, in particular the κ_c line forms a cusp. At large quark masses, away from the cusp, one indeed observes first order behavior. When the quark mass is lowered however, the $N_F = 4$ data show a weakening of first-order signals. For $N_F = 3$ it seems that the first-order signal weakens when the discretization errors inherent to the approximate algorithm one has to use in this case are decreased. Thus, for both $N_F = 3$ and 4 Wilson quarks the order of the transition is still unclear.

The physically realistic case is the one of $N_F = 2 + 1$, meaning two flavors with almost vanishing mass and a strange quark about 25 times heavier. In the limit of a heavy strange quark the strange quark ceases to play a significant role in the chiral transition and one is approaching the two flavor case, hence expecting a second order transition. On the other hand, if up, down and strange quarks become degenerate (and light) one would expect the $N_F = 3$ transition with supposedly first order. The transition's nature thus depends crucially on the quark masses. The physical value of the quark mass is not easy to determine precisely in a lattice simulation. Moreover, running at about the physical value for the two light quarks is at best possible at strong coupling so far. Therefore, it is perhaps not too surprising that the two dedicated efforts to study the $2 + 1$ case, [58, 59], come to different conclusions. Ref. 58 is simulating staggered quarks and suggest a crossover or second order behavior while in the simulation with Wilson fermions [59] a first order behavior is favored. More work clearly is needed here.

5. EQUATION OF STATE

A quantitative understanding of the equation of state of QCD is one of the central goals in finite temperature field theory. The intuitive picture of the high temperature phase of QCD behaving like a gas of weakly interacting quarks and gluons is based on leading order perturbation theory. However, the well-known infrared problems of QCD result in a poor convergence of the perturbative

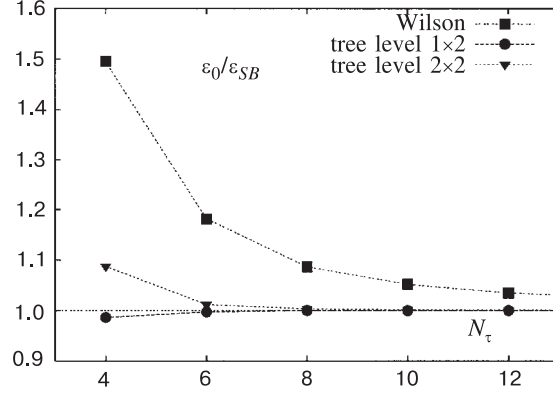


Fig. 14. The gluonic part of the energy density in the infinite temperature limit, computed on lattices with finite temporal extent and normalized to the continuum Stefan — Boltzmann value, for various gauge actions [65]

expansion of the thermodynamic potential even at temperatures very much higher than T_c [60].

Lattice calculations of energy density (ϵ), pressure (p) and other thermodynamic variables at high temperature, on the other hand, are hampered by ultra-violet cut-off effects. As these quantities receive substantial contributions from high momentum modes $\sim T$ the effects of finite lattice spacings can be large. For instance, the energy density in the infinite temperature limit deviates considerably from the continuum Stefan-Boltzmann value. For the pure gauge theory in the standard Wilson discretization the corrections are

$$\epsilon_0^G = \epsilon_{SB}^G \left[1 + \frac{10}{21} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^2 + \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 \right) \right]. \quad (42)$$

Recall that $\pi/N_\tau = \pi T a$. As can be seen from Fig.14 the corrections can be as large as 50 % for $N_\tau = 4$. On the other hand, the nonperturbative determination of, e.g., the pressure makes use of the following formula [61]

$$\frac{p}{T^4} \Big|_{g_0}^g \equiv - \frac{f}{T^4} \Big|_{g_0}^g = N_\tau^4 \int_{6/g_0^2}^{6/g^2} d(6/g'^2) (S_0 - S_T), \quad (43)$$

where S_0 is the expectation value of the action at zero and S_T the same quantity at finite temperature. From Eq. (43) it is clear that the signal decreases $\sim 1/N_\tau^4$ with increasing N_τ , i.e., decreasing a .

In order to determine quantitatively the size of the deviation of the energy density or pressure from the ideal gas value an extrapolation to the continuum limit

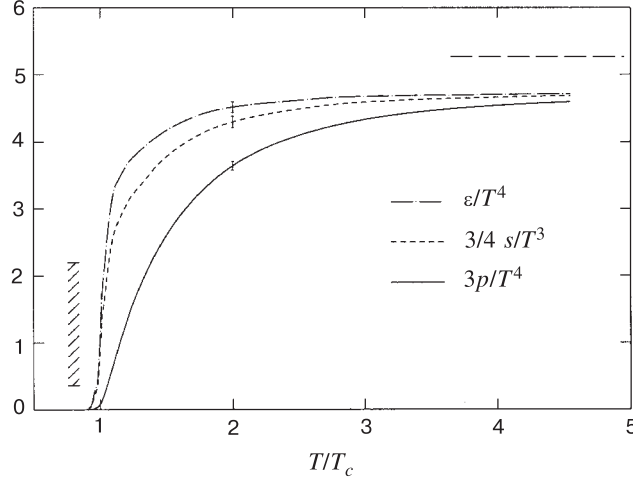


Fig. 15. The extrapolated continuum limit of energy density, entropy density and pressure in the pure glue theory [2]. The dashed horizontal line shows the ideal gas limit. The hatched vertical band indicates the size of the discontinuity in ϵ/T^4 (latent heat) at T_c [62]

is mandatory. The result of such an extrapolation for the pure gauge theory [2] is shown in Fig.15. The energy density rapidly rises to about 85 % of the ideal gas value at $2T_c$ and then shows a rather slow increase which is consistent with a logarithmic behavior as one would expect from a leading order perturbative correction. The pressure rises much more slowly near T_c and even at $T \simeq 3T_c$ shows sizeable deviations from the ideal gas relation $\epsilon = 3p$.

As stated in section 2, improved actions aim at reducing the differences between the continuum and lattice action due to finite lattice spacings. Since the pressure is related to the action, Eq. (43), any improvement in the action will reduce the finite lattice spacing effects on the high-momentum contribution to, e.g., the pressure in the ideal gas limit. This is indicated in Fig.14, where the analytical results in the infinite temperature limit for some improved actions are compared with the standard action. As can be seen, by use of an improved action the finite a corrections can be brought down to the level of a few per cent already at temporal extents of $N_\tau = 4$.

The improvement seems to work not only in the high temperature limit but also already close to T_c . Figure 16 summarizes the results of numerical simulations of a variety of improved actions [67]. Although the lattice extent in the temporal direction was only 4, the improved actions lead to values quite close to the continuum extrapolation of the standard action results. This in turn gives strong support to the continuum extrapolation presented above. Tree-level improvement seems to be the leading effect, although one would have

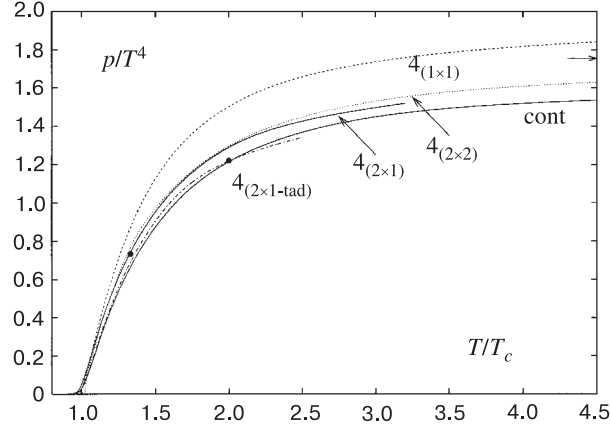


Fig. 16. The pressure in SU(3) pure gauge theory on lattices with $N_\tau = 4$ for various actions [67] indicated by the subscripts. The solid line shows the continuum extrapolation obtained from the standard plaquette action. The dots result from a calculation with a classical fixed point action on a lattice with $N_\tau = 3$ [87]

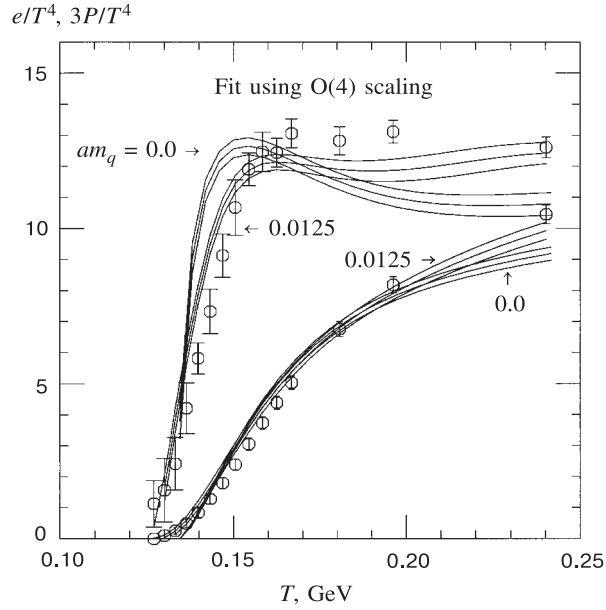


Fig. 17. Energy density and pressure from a simulation with the 2 flavor staggered standard action. The results are extrapolated to the chiral limit by means of an $O(4)$ ansatz. Fit and data at the lowest quark mass $ma = 0.0125$ are also shown. The triplets of curves represent the central value and the one standard deviation error [64]

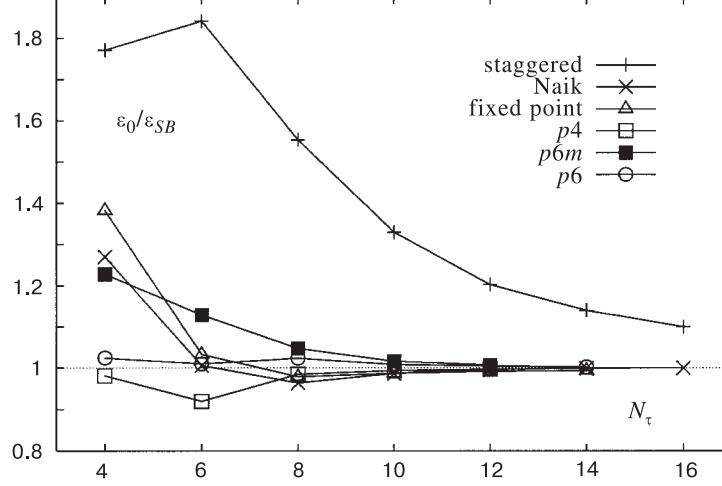


Fig. 18. The fermionic part of the energy density in the infinite temperature limit, computed on lattices with finite temporal extent and normalized to the continuum Stefan — Boltzmann value, for various staggered fermion actions [66]

expected that close to the transition infrared modes and their improvement would be more important. Tadpole improvement has an effect though for the interface tension [68].

The equation of state has also been investigated with dynamical quarks in the staggered discretization. For two flavors the standard action was used on lattices with temporal extent $N_\tau = 4$ and 6 [63, 64]. The data for the energy density on the $N_\tau = 4$ lattices showed an overshooting above the ideal gas limit at temperatures just above T_c . This bump is not present anymore in the newest data for $N_\tau = 6$ and at the smallest quark mass, Fig.17. The extrapolation to the chiral limit shown in this figure does have a peak again but this effect is attributed to an artefact of the extrapolation.

The extrapolation to the continuum limit, however, is difficult with the (fermionic) standard action. The finite lattice spacing corrections in the high temperature limit are large

$$\epsilon_0^F = \epsilon_{SB}^F \left[1 + \frac{465}{441} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 \right) \right] \quad (44)$$

and only very slowly decreasing with N_τ as can also be seen from Fig.18 [66]. This makes analyses based on improved actions even more desirable than in the quenched case. Indeed, in the high temperature limit, the deviations from the continuum Stefan — Boltzmann prediction can be brought down to the level of less than 10 % at $N_\tau = 4$, Fig.18.

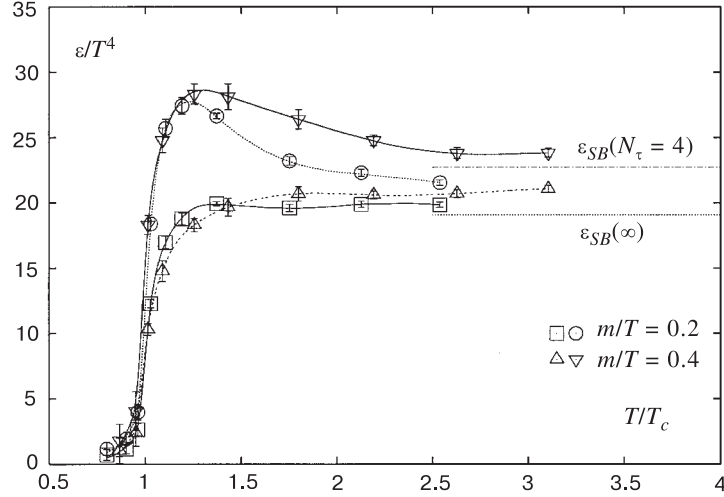


Fig. 19. Energy density for 4 flavors of quarks, obtained from a calculation at $N_\tau = 4$ with an improved action [25]. The upper two curves show the energy density at the given quark masses, the lower set is obtained by neglecting the contribution to the energy density which is proportional to the quark mass and vanishes in the chiral limit. The horizontal lines give the ideal gas limit at $N_\tau = 4$ and in the continuum limit

A first attempt to analyze bulk thermodynamic quantities in the vicinity of T_c by means of simulations with an improved fermion discretization scheme, the Naik action, has been carried out in [25]. The results are shown in Fig.19.

At the moment, there are investigations under way which try to estimate the effect of various improvement strategies on the restoration of flavor symmetry [66, 69–71]. It remains to be seen how much this can help to extract energy density or pressure closer to the continuum limit at finite temperatures.

6. SCREENING LENGTHS AND MASSES

An important goal of analytical as well as lattice investigations has been to understand the nature of excitations characterizing the structure of hot QCD in the vicinity of the transition and in the plasma phase. At high temperature, due to asymptotic freedom the effective coupling constant $g(T)$ should become small and one is lead to expect that the plasma consists of a gas of only weakly interacting quarks and gluons. On the other hand, there are indications that even at high temperatures the excitation spectrum might be more complicated in particular because of nonperturbative effects in the chromomagnetic sector of QCD.

The definition of a chromoelectric and a chromomagnetic mass beyond perturbation theory is somewhat ambiguous. A possible choice is to extract the chromoelectric or Debye mass from the heavy quark potential. At the deconfinement temperature the potential between heavy, nonrelativistic quarks changes from a linear rising, confining form to a screened Coulombic behavior,

$$V(R) \sim T \left(\frac{g^2}{R} \right)^2 \exp\{-2m_e R\}, \quad (45)$$

which is obtained from two-gluon exchange in resummed lowest order perturbation theory. Here, m_e denotes the Debye-mass, for which (lowest order) perturbation theory predicts

$$m_{e0} = \sqrt{\frac{N_c}{3} + \frac{N_F}{6}} gT. \quad (46)$$

The (color averaged) heavy quark potential is obtained from Polyakov loop correlations,

$$V_{av}(\vec{x}) = -T \ln \frac{\langle L(\vec{x}) L(\vec{0}) \rangle}{\langle L \rangle^2}, \quad (47)$$

with $L(\vec{x})$ being the Polyakov loop at spatial coordinates $\vec{x}$, see Eq. (29). Indeed, the potential data [72] show the anticipated decrease in the linear rise, i.e. the string tension decreases, when the critical temperature is approached from below, see Fig. 20. Above T_c screening $\sim \exp(-\mu R)$ clearly is observed. Moreover, comparing the potentials at different temperatures, one can verify that the screening mass μ depends on the temperature as $\mu \sim T$. However, when analyzed in detail, the data does not follow Eqs. (45),(46) in so far neither the power 2 of the Coulomb term nor the prediction for the coefficient in the exponential is observed. One might conclude that at the temperatures investigated the behavior of the Polyakov loop correlations is not described properly by simple perturbation theory.

For an alternative definition of the effective gluon masses at high temperature one can refrain to the exponential decrease of a gluon-gluon correlation function. That enables one to distinguish between the electric sector defined via

$$G_e(x) = \langle A_0(x) A_0(0) \rangle \quad (48)$$

and the magnetic one ($k = 1, 2, 3$)

$$G_m(x) = \langle A_k(x) A_k(0) \rangle, \quad (49)$$

where $A_\mu, \mu = 0, \dots, 3$ denotes the gluon field. The gluon correlation function is gauge variant so that one has to fix to a definite gauge, usually the Landau gauge.

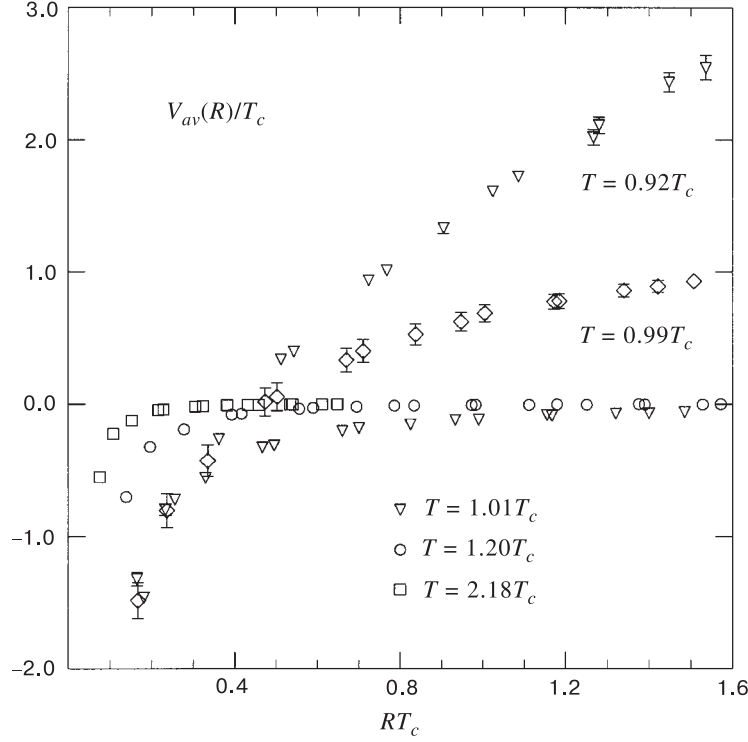


Fig. 20. The heavy quark potential of the pure glue theory at various temperatures below the phase transition and in the deconfined phase

The correlation functions (48),(49) have been analyzed in the simpler color group $SU(2)$ [73]. In the magnetic sector, a nonvanishing chromomagnetic gluon mass with a temperature variation of $m_m(T) \simeq 0.5g^2(T)T$ was found. Such a mass is widely expected and cures the well-known infrared problems of high temperature perturbation theory at this order. If m_m is nonvanishing next-to-leading order perturbation theory, then predicts [74] for the electric mass

$$m_e^2 = m_{e0}^2 \left(1 + g \frac{N}{2\pi} \sqrt{\frac{6}{2N + N_F}} \left[\ln \frac{2m_e}{m_m} - \frac{1}{2} \right] \right), \quad (50)$$

where m_{e0} denotes the leading term, Eq. (46). The results of [73] show that at best at very high temperatures of $\mathcal{O}(10^4 T_c)$ contact can be made with this prediction, Fig. 21. In general, the data can be described by the formula $\sqrt{1.7}g(T)T$ indicating that the screening mechanism is a highly nonperturbative effect even at large temperatures.

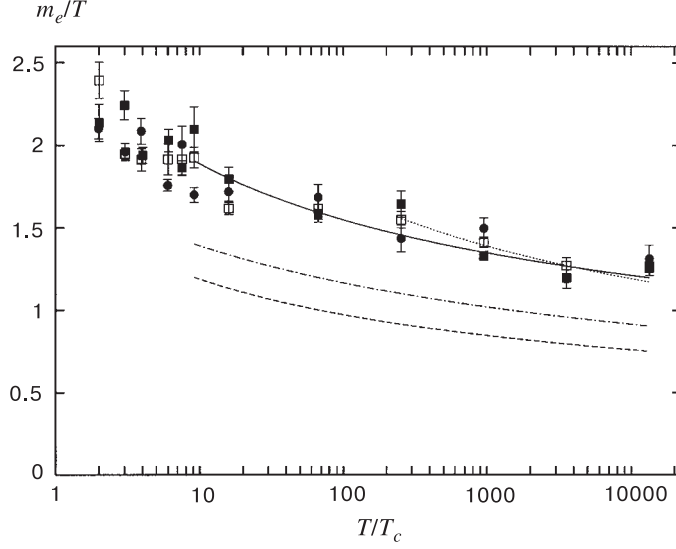


Fig. 21. The electric gluon mass in units of the temperature versus T/T_c [73]. Squares denote results from simulations with the standard Wilson action at two different lattice volumes, the circles originate from a simulation with an improved action. The lines represent analytic predictions at tree level, Eq. (46) (dashed) and at next-to-leading order, Eq. (50) with a magnetic mass determined in the same simulation (dashed-dotted) or fit results with an ansatz $m_e = \text{const} \times g(T)T$ (solid) and an ansatz summarizing ad hoc higher contributions to Eq. (50) (dotted)

A third definition for the (electric) screening mass is applied in [75]. Here the Debye mass is extracted from the correlation of a gauge-invariant operator [76] which is odd under the Euclidean equivalent of time reversal and charge conjugation. Moreover, [75] apply dimensional reduction and simulate the 3rd effective theory. Although the results quantitatively differ somewhat from those of [73] the conclusion is the same in both cases.

Hadron correlation functions at high temperature but below the transition are interesting for phenomenological reasons. For instance, a temperature dependent ρ meson mass and width could perhaps explain the dilepton spectra found in nucleus-nucleus collisions at high energy. Detailed lattice investigations (of spatial correlators, see below) have been carried out in the quenched approximation so far [77]. Based on the staggered fermion discretization, these studies show that the investigated quantities remain unaffected by the temperature up to T_c . Some recent work with Wilson fermions confirms this observation, although at one temperature value only so far [78]. As these analyses work in the quenched approximation where the transition has been determined to be of first order, dy-

namical quarks could alter that picture somewhat because in this case a continuous transition is expected.

Correlation functions of operators with the quantum numbers of hadrons have, in the plasma phase, been investigated in a variety of papers. Due to the limited extent of the lattice in the temporal direction $0 \leq x_0 \leq 1/T$ one cannot study the correlations at large time separations which is what one would like to do in order to isolate the contribution of the state with the lowest energy or mass. Therefore, one usually focussed on the long distance behavior of spatial correlators

$$\langle H(z)H^\dagger(0) \rangle \sim \exp(-M_{\text{sc}}z) \quad (51)$$

which decay with the screening mass M_{sc} . (For exceptions see [79, 80].) These screening masses would coincide with the masses if the zero temperature dispersion relation were applicable. In any case, the spatial correlators depend on the same spectral density as the masses and thus deliver information about it. As noted above, at sufficiently high temperature one expects that the plasma consists of a gas of weakly interacting quarks and gluons. In this case, the spatial correlation function should be described by the exchange of two (almost) free quarks. Since quarks propagating in the spatial direction carry nonvanishing “momenta” of $(2n+1)\pi T$ because they obey antiperiodic boundary conditions in the temporal direction, the minimum contribution to the correlator is given by

$$M_{\text{sc}} = l\sqrt{m_q^2 + (\pi T)^2} \quad (52)$$

in the continuum limit, where $l = 2$ for mesons and $l = 3$ for baryons. Indeed, lattice results [81] in the vector and axial vector channel as well as for baryonic excitations are compatible with this expectation, see Fig. 22. However, the scalar and pseudoscalar channels show substantial deviations. This might indicate the existence of bound states as bosonic bound states would have vanishing Matsubara frequencies and hence could have a lower screening mass. Also, one could have substantial spin dependent interactions.

On the other hand, the spatial wave functions of the states contributing to the spatial correlator, Eq. (51), were analyzed [82]. Here one finds the same behavior as at zero temperature, an exponential decay which is not expected from leading order perturbation theory and which suggests that the relevant hadronic excitations are bound states also in the plasma phase, at least at temperatures just above T_c . According to [83], this behavior could be explained by the fact that the dimensionally reduced, 3-D effective theory and correspondingly spatial Wilson loops in 3+1 dimensions [84] show confinement. Solving then a two-dimensional Schrödinger equation with a potential which includes a temperature-dependent (spatial) string tension leads to spatial wavefunctions

$$|\psi(R)| \sim \exp(-\sqrt{\sigma_{\text{spat}}(T)\pi T}R^{3/2}) \quad (53)$$

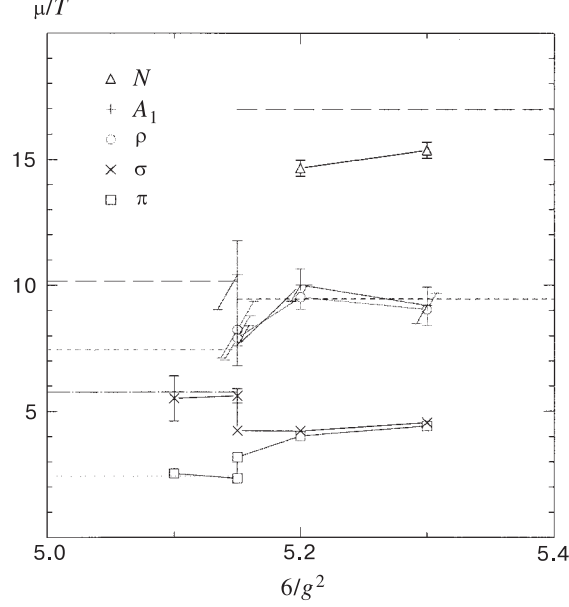


Fig. 22. A representative set of hadronic screening masses [81] from a staggered 4 flavor simulation. The masses are plotted versus the gauge coupling across the transition at $6/g^2 \simeq 5.15$. The lines to the left indicate the zero temperature values for the masses, the lines to the right show the expectation for free quarks, $\mu/T = 2\pi$ and 3π for mesons and baryons respectively, corrected for finite lattice effects

and to screening masses, which differ from Eq. (52) by terms of $\mathcal{O}(\sqrt{\sigma_{\text{spat}}(T)})$. A quantitative test of this suggestion is not yet available though.

Finally, heavy quarks in the range $m_c < m < m_b$ at temperatures around the critical one have for the first time been investigated in [85]. The heavy quarks are simulated by means of a nonrelativistic approximation to QCD [86], applied to quenched configurations. The propagation of quarkonia states is followed in the time direction. For that purpose, the investigation is carried out on anisotropic lattices with a large anisotropy ratio $\xi = a_\sigma/a_\tau = 4.65$ in order to have enough Matsubara frequencies. So far, the analysis was done for the 3S_1 ground and first excited state. Below T_c , at about $0.8T_c$ no temperature effect was seen. At $1.2T_c$, the propagator which is dominated by the ground state at large time separations t from the source becomes flatter than the zero temperature propagator at large t . This effect can be interpreted as a decrease in the mass by a small amount of about 12 MeV at the lightest quark mass simulated. The effect becomes weaker with increasing quark mass. The first excited state, projected on by the same trial wave function as at $T = 0$, undergoes a larger change of about - 240 MeV at the

charm quark mass. Thus, at least qualitatively, the results are in accord with the expectations from a Debye-screened potential model, namely that smaller states feel the screening less.

7. CONCLUSIONS

In these lectures, the current status of lattice investigations of QCD at finite temperature has been reviewed. Bulk properties of the pure gluon system are known to rather high precision. Thus, the emphasis of these studies recently has shifted towards simulations of the full theory including dynamical fermions.

At currently accessible quark masses, these investigations have led to an estimate for the critical temperature for 2 flavors of around 150 MeV. This number is almost a factor of two smaller than the quenched value of 270(5) MeV. Thus, at fixed temporal extent of the lattice, simulations of full QCD in the vicinity of the critical temperature have to be carried out at considerably larger lattice spacings than in the quenched case.

Analyses of the critical behavior at the chiral transition suggest a second order transition. However, at present the estimates for the critical exponents are in disagreement with theoretical expectations. This holds for simulations in the staggered discretization of quarks while first results with Wilson fermions seem to support the anticipated universality with $O(4)$. Concerning the anomalous axial $U(1)$, at present it is not yet entirely clear whether or not this symmetry is effectively restored at the chiral transition. Further studies at smaller quark mass values are required to shed more light on these important issues.

In addition, lattice results of investigations of various screening lengths have been presented. At temperatures which are accessible in present and future heavy ion collision experiments the data consistently show sizable deviations from simple perturbative expectations. Nonperturbative effects therefore need to be taken into account in the interesting temperature range.

This also holds for energy density and pressure. Moreover, analytic studies of the infinite temperature limit of these quantities on finite lattices reveal discretization effects which are particularly large in the fermionic part of the energy density if standard discretizations of the fermion action are used. This, together with the observation of a small value of the critical temperature in two-flavor QCD has stimulated activities to explore improved actions also in the context of finite temperature studies.

8. ACKNOWLEDGEMENTS

It is a pleasure to thank the organizers of the workshop for their outstanding hospitality in Dubna, including an introduction into the Russian tradition of a БАНА.

REFERENCES

1. **Ukawa A.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1990, v.17, p.118 and references therein.
2. **Boyd G. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.4169; Nucl. Phys., 1996, v.B469, p.419.
3. **Iwasaki Y. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.D56, p.151.
4. **Beinlich B. et al.** — hep-lat/9707023.
5. **Wilson K.** — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.2445.
6. **Nielsen H.R., Ninomiya M.** — Nucl. Phys., 1981, v.B193, p.173.
7. **Kogut J.B., Susskind L.** — Phys. Rev., 1975, v.D11, p.395.
8. **Metropolis N. et al.** — J. Chem. Phys., 1953, v.21, p.1087.
9. **Duane S. et al.** — Phys. Lett., 1987, v.B195, p.216.
10. For an alternative algorithm see **Lüscher M.** — Nucl. Phys., 1994, v.B418, p.637.
11. **Gottlieb S. et al.** — Phys. Rev., 1987, v.D35, p.2531.
12. For overviews see, e.g., **Ph.de Frocrand** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1996, v.47, p.228;
Frommer A. — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1997, v.53, p.120.
13. **Symanzik K.** — Nucl. Phys., 1983, v.B226, p.187; *ibid* p.205.
14. **Lüscher M., Weisz P.** — Comm. Math. Phys., 1985, v.97, p.19; Phys. Lett., 1985, v.B158, p.250.
15. **Lepage G.P., Mackenzie P.B.** — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.2250.
16. **Sheikholeslami B., Wohlert R.** — Nucl. Phys., 1985, v.B259, p.572.
17. **Naik S.** — Nucl. Phys., 1989, v.B316, p.238.
18. **Lüscher M. et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.B491, p.323.
19. For a recent overview see **Hasenfratz P.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.53.
20. **Ukawa A.** — Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 1997, v.53, p.106.
21. **Cella G. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.B333, p.457.
22. **Legeland C. et al.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.260.
23. **MILC Collaboration** — Phys. Rev., 1997, v.D56, p.5584.
24. **Bielefeld results**, unpublished.
25. **Engels J. et al.** — Phys. Lett., 1997, v.B396, p.210.
26. **Born K.D. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.B329, p.325.
27. **Bernard C. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.4585.
28. **Gottlieb S. et al.** — Phys. Rev.Lett., 1987, v.59, p.1513.
29. **Bernard C. et al.** — Phys. Rev., 1992, v.D45, p.3854.
30. **HTMCGC Collaboration** — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.3619; Nucl.Phys. B (Proc.Suppl.), 1993, v.30, p.315.
31. **Mawhinney R.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1993, v.30, p.331.
32. **Bitar K.M. et al.** — Phys. Rev., 1991, v.D43, p.2396.
33. **Bernard C. et al.** — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.4741.
34. **Blum T. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.3377.

35. **Pisarski R.D., Wilczek F.** — Phys. Rev., 1984, v.D29, p.338;
Wilczek F. — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.3911;
Rajagopal K., Wilczek F. — Nucl. Phys., 1993, v.B399, p.395.
36. **Karsch F.** — Phys. Rev., 1993, v.D49, p.3791.
37. **Baker G.A., Nickel B.G., Meiron D.I.** — Phys. Rev., 1978, v.B17, p.1365;
Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. — Phys. Rev., 1980, v.B21, p.3976;
Kanaya K., Kaya S. — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.2404.
38. **Kocić A., Kogut J.B.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.3109; Nucl. Phys., 1995, v.B455, p.229.
39. **Karsch F., Laermann E.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.6954.
40. **JLQCD Collaboration** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.60, p.188; *ibid.* 1998, v.63, p.403.
41. **Laermann E.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.60, p.180.
42. **Fukugita M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.816; Phys. Rev., 1990, v.D42, p.2936;
Brown F.R. et al. — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.2491.
43. **DeTar C.** — Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 1995, v.42, p.73.
44. **Toussaint D.** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.362.
45. **DeTar C. et al.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.400; *see also*
Toussaint D. et al. — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.60, 1998, p.195.
46. **Shuryak E.V.** — Comments Nucl. Phys., 1994, v.21, p.235;
Lee S.H., Hatsuda T. — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.1871;
Evans N., Hsu S.D.H., Schwetz M. — Phys. Lett, 1996, v.B375, p.262;
Birse M.C., Cohen T.D., McGovern J.A. — Phys. Lett., 1996, v.B388, p.137.
47. **Bernard C.B. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.598.
48. **Christ N.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.60, p.203.
49. **Gottlieb S. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.6852.
50. **Kogut J.B., Lagaë J.-F., Sinclair D.K.** — hep-lat/9801020.
51. **Aoki S., Ukawa A., Umemura T.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.76, p.873 and references therein.
52. **Bitar K.** — Phys. Rev., 1997, v.D56, p.2736.
53. **Iwasaki Y. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.7010.
54. **Iwasaki Y. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.17.
55. **Bohicchio M. et al.** — Nucl. Phys., 1985, v.B262, p.331;
Itoh S. et al. — Nucl. Phys., 1986, v.B274, p.33.
56. **Gottlieb S.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1991 v.20, p.247.
57. **Aoki S.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.60, p.206 and references therein;
Aoki S. et al. — private communication.
58. **Brown F.R. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.2491.
59. **Iwasaki Y. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.7010.
60. **Arnold P., Zhai C.-X.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.7603.
61. **Engels J., Karsch F., Redlich K.** — Nucl. Phys., 1995, v.B435, p.295.
62. **Iwasaki Y. et al.** — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.4657.
63. **MILC Collaboration** — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.5153.

-
64. **MILC Collaboration** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.6861.
 65. **Karsch F.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.60, p.169.
 66. **Peikert A. et al.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.895.
 67. **Beinlich B. et al.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.922.
 68. **Beinlich B., Karsch F. Peikert A.** — Phys. Lett., 1997, v.B390, p.268.
 69. **Luo Y.** — Phys. Rev., 1998, v.D57, p.265.
 70. **Lagaë J.-F., Sinclair D.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.892.
 71. **Blum T. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.1133.
 72. **Laermann E. et al.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1995, v.42, p.120.
 73. **Heller U., Karsch F., Rank J.** — Phys. Rev., 1998, v.D57, p.1438.
 74. **Rebhan A.K.** — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.R3967.
 75. **Kajantie K. et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.B503, p.357.
 76. **Arnold P., Yaffe L.G.** — Phys. Rev., 1995, v.D52, p.7208.
 77. **Gupta S.** — Phys. Lett., 1991, v.B288, p.171;
Boyd G. et al. — Phys. Lett., 1995, v.B349, p.170.
 78. **Schmidt P., Laermann E.** — Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.), 1998, v.63, p.391.
 79. **Hashimoto T., Nakamura T., Stamatescu I.O.** — Nucl. Phys., 1993, v.B400, p.267.
 80. **Boyd G. et al.** — Z. Phys., 1994, v.C64, p.331.
 81. **Gocksch A., Rossi P., Heller U.M.** — Phys. Lett., 1988, v.B205, p.334;
Gottlieb S. et al. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.59, p.1881;
DeTar C., Kogut J.B. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.59, p.399;
Born K.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1991, v.67, p.302.
 82. **Bernard C. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, p.2125.
 83. **Koch V. et al.** — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.3169.
 84. **Borgs C.** — Nucl. Phys., 1985, v.B261, p.455;
Manousakis E., Polonyi J. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.847;
Karsch F., Laermann E., Lütgemeier M. — Phys. Lett., 1995, v.B346, p.94.
 85. **Fingberg J.** — hep-lat/9707012.
 86. **Davies C.T.H. et al.** — Phys. Rev., 1995, v.D52, p.6519.
 87. **Papa A.** — Nucl. Phys., 1996, v.B478, p.335.

КРИОГЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ УСКОРИТЕЛЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЯДЕР — НУКЛОТРОНЕ

Н.Н.Аганов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Нуклотрон — первый синхротрон со сверхпроводящими магнитами, специально созданный для ускорения ядер и тяжелых ионов. Этот ускоритель, предназначенный для получения пучков релятивистских частиц с энергией до 6 ГэВ на нуклон, был пущен в эксплуатацию шесть лет назад в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне.

Криогенная система нуклотрона основана на трех гелиевых рефрижераторах, каждый из которых имеет номинальную холодопроизводительность 1600 Вт при температуре 4,5 К. Рефрижераторы охлаждают кольцевой ускоритель с периметром 251,5 м и «холодной» массой около 80 тонн. Кольцо ускорителя состоит из 96 дипольных магнитов длиной 1,5 м и 64 квадрупольных линз длиной 0,45 м. Магнитное поле до 2 Тл формируется железным сердечником и обмоткой возбуждения из полого сверхпроводника, внутри которого течет жидкий гелий. Кроме того, имеется 28 корректирующих магнитов длиной 0,31 м с 3 или 4 типами обмоток в каждом, 12 охлаждаемых тоководов с током 6 кА, 234 токовода с током 100 А для корректирующих обмоток, а также около 600 датчиков криогенной температуры.

Дан обзор новых технических решений, впервые примененных в проекте криогенной системы нуклотрона.

The Nuclotron is the first superconducting synchrotron intended for acceleration of high energy nuclei and heavy ions. The accelerator designed to provide beams of relativistic particles with energies up to 6 GeV per nucleon, was put into operation six years ago at the Joint Institute for Nuclear Research in Dubna near Moscow.

Cryogenic system of the Nuclotron includes three helium refrigerators. Each of them has a nominal capacity of 1600 W at 4.5 K. These refrigerators cool the accelerator ring, which has a perimeter of 251,5 m and a «cold» mass of about 80 tons. The ring of the Nuclotron comprises 96 dipole magnets 1.5 m long and 64 quadrupole lenses 0.45 m long. The magnetic field of about 2 T is formed with a «cold» iron yoke and a hollow superconductor with the two-phase helium flows inside. There are 28 correctors 0.31 m long with 3 or 4 types of windings in each, twelve 6 kA helium-cooled current leads, 234 leads of 100 A current for correcting windings, and also about 600 sensors of cryogenic temperatures.

The experience of using novel technical solutions in the design of the Nuclotron cryogenic system is described.

ВВЕДЕНИЕ

Проект развития базовых установок Лаборатории высоких энергий ОИЯИ предусматривал последовательное создание новых ускорителей — СПИН, нуклотрон и супернуклотрон [1–3] — с использованием в них как основных элементов магнитов со сверхпроводящими обмотками, охлаждаемыми до температуры жидкого гелия. Такие магниты по сравнению с «теплыми», работающими при температуре окружающей среды, имеют ряд преимуществ: во-первых, значительное уменьшение капитальных затрат и металлоемкости; во-вторых, существенное снижение эксплуатационных затрат, основную долю которых определяет расход электроэнергии. Нельзя не отметить и многократное уменьшение габаритов магнитной системы, позволяющее изготовить практически все ее элементы на простом станочном оборудовании средних размеров. Это дает высокую точность и, в конечном итоге, хорошее качество магнитного поля. Большое значение имеет также и возможность изготовления таких не крупногабаритных изделий в институте, т.е. без размещения дорогостоящих заказов в промышленности.

Использование сверхпроводимости связано с необходимостью охлаждать ускоритель до весьма низких температур (около 4,5 К), получаемых только при помощи жидкого гелия. Для этого нужны сложные криогенные системы большой холодопроизводительности. Они требуют значительных капиталовложений. Как показал опыт строительства нуклотрона, капитальные затраты на создание таких криогенных систем достигают 30 % общих затрат на ускоритель. К тому же соответствующее криогенное оборудование чаще всего промышленностью выпускается в виде единичных, единственных в своем роде образцов. Естественно, что в отсутствие серийного производства трудно достичь уровня работы «под ключ»: поставляемое оборудование во многих случаях требует значительных усилий по доработке, доводке, исследованию и оптимизации режимов, а также взаимосогласованию машин и аппаратов, приобретаемых у различных заводов-изготовителей. Более того, ввиду экономической и технической целесообразности значительная часть криогенного оборудования разрабатывалась и изготавливалась своими силами.

В связи с этим в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ традиционно развивалось направление по разработке и исследованию криогенных технологий применительно к создаваемым сверхпроводящим ускорителям. Часть полученных результатов изложена в настоящем обзоре. Главный из них — создание и запуск криогенной системы нуклотрона [54–56] — первого на территории России и третьего в мировой практике действующего ускорителя со сверхпроводящими магнитами: в числе более ранних [26,31] известны лишь Tevatron (США, 1983) и HERA (Германия, 1991).

Нуклотрон, основные параметры которого приведены в табл. 1, предназначен для ускорения тяжелых ядер и многозарядных ионов. Он сооружен в

ЛВЭ ОИЯИ в период 1987–1992 гг. Проектная энергия заряженных частиц с отношением заряда к массе $z/A=1/2$ составляет 6 ГэВ/нуклон. Параметры ускорителя и программа физических исследований на нем были представлены в [4,5].

Таблица 1. Основные параметры нуклотрона

Проектная энергия частиц, ГэВ/нуклон	6
Периметр, м	251,5
Максимальное магнитное поле, Тл	2,0
Запасенная энергия, МДж	2,35
Температура, К	4,5
Общий статический теплоприток, кВт	1,75
Динамическое тепловыделение при 0,5 Гц, кВт	2,9
Частота повторения циклов, Гц	до 1,0
Суммарная «холодная» масса, т	80
Время охлаждения до рабочей температуры, ч	80

В соответствии с планами развития ускорительного комплекса ЛВЭ кольцо нуклотрона размещено в цокольном этаже синхрофазотрона (рис.1). Периметр ускорителя составляет 251,5 м. Кольцо состоит из 96 полутораметровых дипольных магнитов, 64 квадрупольных линз длиной по 0,45 м, 28 мультипольных корректоров (0,31 м) с тремя или четырьмя типами обмоток в каждом. Питание основных магнитов и вывод энергии обеспечивают 12 токовыводов на 6 кА, охлаждаемых холодными парами гелия. Токовыводы на 100 А (234 шт.) питают корректирующие обмотки. Кроме того, имеются специальные устройства для инъекции пучка, ускорения, диагностики и вывода. Для измерения температур по периметру кольца установлено около 600 криогенных термометров.

Для криостатирования кольца ускорителя от системы криогенного обеспечения требовалось выполнение следующих условий:

1) Холодопроизводительность на гелиевом температурном уровне в рабочем режиме от 1750 до 4620 Вт, в том числе:

- а) компенсация теплопритоков из окружающей среды 1750 Вт;
- б) компенсация динамических тепловыделений до 2870 Вт при частоте изменения магнитного поля 0,5 Гц.

2) Производство дополнительно до 100 л/ч жидкого гелия, отводимого из криостата для охлаждения токовыводов.

3) Охлаждение магнитной системы весом около 80 тонн от температуры окружающей среды до 4,5 К за период не более 80–100 часов.

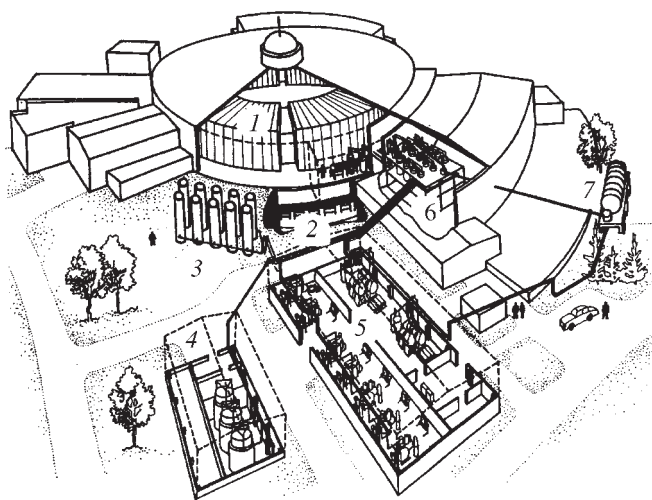


Рис.1. Общий вид системы криогенного обеспечения нуклотрона: 1 — синхрофазотрон; 2 — кольцо сверхпроводящих магнитов нуклотрона; 3 — ресиверы сжатого гелия; 4 — здание газгольдерной; 5 — компрессорный цех; 6 — блоки охлаждения установок КГУ-1600/4,5; 7 — танк жидкого гелия

1. ОСОБЕННОСТИ КРИОСТАТИРОВАНИЯ ЖИДКИМ ГЕЛИЕМ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ МАГНИТОВ НУКЛОТРОНА

Криогенные системы отводят тепло, выделяющееся в обмотках сверхпроводящих магнитов при изменении магнитного поля и при торможении рассеянных ускоренных частиц, а также тепло, притекающее из окружающей среды через теплоизоляцию, тоководы, опоры и подвески.

Весь комплекс проблем, возникающий при создании подобных систем, логически разделяется на две части. Одна из них связана с самим криостатируемым объектом — сверхпроводящей магнитной системой ускорителя. Другая — с производящим холод рефрижератором.

В первой части наиболее важны такие проблемы: равномерное распределение низкой температуры по периметру, эффективность использования холода (минимизация теплопритоков и тепловыделений), безопасность эвакуации энергии магнитного поля и аварийной порчи вакуума в теплоизоляционном кожухе. Во второй части важны энергетическая эффективность получения холода, многорежимность, высокий уровень надежности.

Следует отметить, что каждое из перечисленных условий находится в технических противоречиях с другими. Например, в интересах повышения

надежности приходится отказываться от использования более эффективных поршневых машин и применять имеющие сравнительно низкий к.п.д. винтовые компрессоры и детандеры турбинного типа, безопасность эвакуации энергии требует большего количества тоководов, а это существенно увеличивает теплопритоки и т.д. Поэтому задача создания криогенной системы нуклотрона состояла не только в том, чтобы продвинуться вперед в решении каждой из перечисленных проблем, но и достичь в системе в целом оптимального компромисса между ними в рамках существующей технико-экономической ситуации.

При криостатировании сверхпроводящих ускорителей различают два способа отвода тепла:

1) Традиционный метод криостатирования сверхпроводящих магнитов с погружением их в кипящий гелий. В сильно протяженных системах он неприменим: ввиду чрезвычайно малой плотности жидкого гелия становится невозможным поддерживать его одинаковый уровень в разных точках криостата, т.к. по периметру системы всегда существует некоторая разность давлений. Этот способ можно использовать только для сравнительно компактных систем.

2) Другой способ, при котором тепло отводится путем циркуляции криоагента по расположенным внутри или около обмоток каналам, применяется повсеместно. Его дополнительное преимущество — существенное уменьшение количества гелия, требующегося для заполнения системы. Это снижает опасность повышения давления гелия при самопроизвольных переходах магнитов из сверхпроводящего в нормальное состояние и в случаях разгерметизации теплоизолирующего вакуумного кожуха.

Принципиально существуют две разновидности циркуляционных систем криостатирования, отличающиеся фазовым состоянием криоагента. В одних подвод тепла к циркулирующему гелию не вызывает фазового перехода, в других этот процесс происходит при кипении парожидкостного потока. До создания нуклотрона неоднократно высказывались опасения, что при использовании двухфазной парожидкостной смеси может возникать неустойчивость режима течения, которая характеризуется пульсирующим изменением расхода криоагента, его давления и температуры, или блокированием некоторых из параллельных каналов «паровыми пробками».

Из-за этих опасений в описанных ранее системах сверхпроводящих ускорителей отвод тепла осуществлялся, как правило, к однофазному потоку жидкого гелия. Поскольку температура такого потока при этом возрастает (она не должна повышаться более чем на несколько десятых градуса из-за снижения критической плотности тока в сверхпроводящих обмотках), применяются специальные меры для ее понижения. Низкую температуру поддерживают путем теплообмена внутри магнита между жидким и кипящим двухфазным гелием или после каждой группы магнитов устанавливают теплообменники.

Чтобы исключить промежуточный теплообмен и тем самым значительно упростить схему криостатирования и конструкцию магнитной системы, можно применять многократную циркуляцию жидкого гелия посредством специальных насосов. В этом направлении известен целый ряд работ [6,7], в том числе и наше предложение [8–10] — использовать в качестве насоса жидкого гелия струйные аппараты. Однако способ многократной циркуляции широкой практической реализации не получил, ввиду необходимости существенно расширять каналы в магнитах во избежание значительного роста гидравлического сопротивления из-за увеличения расхода.

Наш анализ всевозможных вариантов схем криостатирования показал, что имеется ряд причин, по которым все-таки предпочтительнее осуществлять отвод тепла непосредственно к кипящему гелию. Наиболее существенная из них — возможность получения при прочих равных условиях более низкой и равномерно распределенной по периметру температуры магнитов. Кроме того, возможные локальные тепловыделения в случае кипящего гелия сравнительно менее опасны, т.к. температура не может повыситься, пока не испарится вся жидкость.

Именно из этих соображений для вновь создаваемых в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ ускорителей — модельного синхротрона СПИН и нуклотрона — отдавалось предпочтение криостатированию путем отвода тепла непосредственно к кипящему гелию. Концепция криостатирования первого из них основывалась на применении «погружного» способа. Однако уже и при создании ускорителя СПИН стало ясно, что его 60-метровый периметр — предельный случай применения такого способа [11], и в дальнейшем для нуклотрона, имеющего периметр более 250 метров, необходимо перейти на циркуляционный способ. Ряд дополнительных экспериментальных исследований, как на одиночных магнитах [12], так и с группами магнитов, показал, что опасения, связанные с применением потока кипящего гелия, были преувеличены. Между тем допустимость подвода к парожидкостному потоку сравнительно большого количества тепла позволяет резко уменьшить количество гелия, которое необходимо прокачивать через магнитную систему, и, как следствие, отказаться от каких бы то ни было промежуточных охладителей и специальных циркуляционных устройств. В результате для нуклотрона, впервые для аналогичных систем, был выбран способ криостатирования сверхпроводящих магнитов посредством циркуляции парожидкостного потока гелия.

Особенности работы при гелиевых температурах в существенной мере ужесточают требование высокой термодинамической эффективности. Действительно, даже при идеальном проведении всех процессов затраты энергии на получение холода достаточно велики. Как известно, минимальные энергозатраты на единицу вырабатываемого холода определяются соотношением

$$\epsilon = |1 - T_{0.c} / T|,$$

где $T_{0.c}$ — температура окружающей среды; T — температура криостатирования.

Например, при $T = 4,5$ К энергозатраты составляют 64 Вт на 1 Вт холода. С учетом же пока еще довольно низкого (10–20 %) к.п.д. криогенных гелиевых рефрижераторов они достигают 320–640 Вт/Вт [13]. Получать и распределять холод необходимо очень экономно. Чтобы снизить затраты энергии, современные криогенные установки, как правило, строятся из сложных каскадов трех-пяти ступеней адиабатного расширения газа на различных температурных уровнях. В большинстве случаев процесс дросселирования Джоуля — Томсона для производства холода в ступени окончательного охлаждения заменен расширением в детандере. В связи с большими затратами на получение холода при разработке элементов нуклотрона большое внимание уделено борьбе с теплопритоками по мостам и опорам, по тоководам, в трубопроводах, тщательного исследованы динамические тепловыделения в магнитах, возникающие из-за переменного тока в обмотках.

Высокая эффективность должна быть обеспечена не в одном, а в различных режимах работы криогенной системы. Из-за большой охлаждаемой массы и протяженности нуклотрона его охлаждение до рабочих температур требует довольно много времени. В ходе пускового периода используется весьма широкий спектр режимов: охлаждение, режим сжижения гелия, рефрижераторный режим и различные их сочетания. Кроме того, в зависимости от настройки ускорителя (энергии частиц и частоты изменения токов магнитов) требуется различная холодопроизводительность. Исследование переменных режимов гелиевых рефрижераторов впервые проводилось нами в [14,15] и постоянно развивалось в ходе создания нуклотрона.

Из-за больших затрат, сложности и трудоемкости процессов ввода в рабочий режим всей системы, в качестве максимальной задачи, было бы желательно постоянно поддерживать низкие температуры всех элементов ускорителя. Во всяком случае, рефрижераторные установки должны обладать таким уровнем надежности, который обеспечивает непрерывное поддержание рабочих температур магнитной системы не менее чем 4000–5000 часов в году. В случае отказов каких-либо машин и аппаратов система криогенного обеспечения должна предусматривать возможности их ремонта или замены без остановки всего комплекса. Такие возможности дает применение в системе некоторого заранее запасенного количества жидкого гелия или его подача от параллельно работающего ожижителя гелия. Соответствующие этому случаю так называемые «спутниковые» режимы рассмотрены в [16].

2. КРИОГЕННАЯ СИСТЕМА КОЛЬЦА НУКЛОТРОНА

Общее представление о принципиальной схеме криостатирования ускорителя [17–19] дает рис.2. В основу криогенной системы положены три агрегата охлаждения КГУ-1600/4,5. Каждый из них состоит из трех газовых турбодетандеров $T1$, $T2$ и $T3$, ванны жидкого азота, двух- и трехпоточных

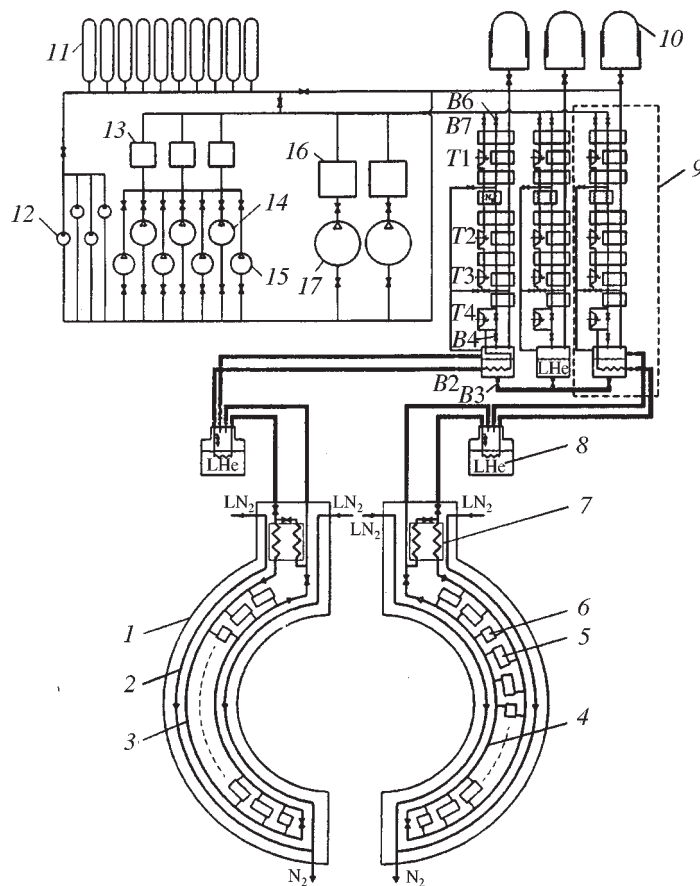


Рис.2. Принципиальная схема криогенной гелиевой системы нуклотрона: 1 — вакуумный кожух; 2 — теплозащитный экран; 3 — коллектор прямого потока; 4 — коллектор обратного потока; 5 — дипольный магнит; 6 — квадрупольный магнит; 7 — переохладитель; 8 — сепаратор; 9 — блок охлаждения КГУ-1600/4,5; 10 — газгольдер; 11 — ресивер; 12 — поршневой компрессор 1ВУВ-45/150; 13 — блок осушки; 14 — поршневой компрессор 305НП-20/30; 15 — поршневой компрессор 2ГМ4-12/31; 16 — блок маслоочистки МО-800; 17 — винтовой компрессор «Каскад-80/25»

теплообменников, парожидкостного турбодетандера $T4$ и сборника жидкого гелия объемом около 1000 л. Сжатый гелий после компрессоров, пройдя очистку от масла и влаги, на входе в каждый агрегат охлаждения КГУ-1600/4,5 разделяется на две части, одна из которых — турбодетандерный поток после вентилей $B7$ расширяется последовательно в трех турбодетандерах с давления 2,5 МПа до 0,13 МПа. Основной поток подается через вентиль $B6$, охлаждается за счет теплообмена с обратным потоком гелия до температуры 5,5–8,5 К и расширяется в парожидкостном турбодетандере с давления 2,5 МПа до 0,13–0,17 МПа. В дальнейшем одна часть основного потока отводится в сборник жидкого гелия (вентиль $B4$), а другая часть (вентиль $B2$) подается по теплоизолированному трубопроводу в промежуточный сепаратор (8), после охлаждения в котором направляется в коллектор (3) прямого потока криостатной системы нуклотрона.

Каждая из двух установок КГУ-1600/4,5 подключена к своему полукольцу. Третья установка — резервная. Она предназначена для работы в ожигательном режиме с подачей жидкого гелия вентилем $B3$ по теплоизолированному трубопроводу в любую из установок, подключенных непосредственно к полукольцу ускорителя. При подаче жидкого гелия от резервной КГУ-1600/4,5 каждая из двух оставшихся может быть переведена в «сателлитный» режим. Это обеспечивает продолжение циркуляции необходимого количества жидкого гелия на соответствующем полукольце нуклотрона в течение останова турбодетандеров, возможных вследствие их выхода из строя или во время замены по другим причинам. Кроме того, подключение резервной КГУ-1600/4,5 обеспечивает при необходимости повышение холодопроизводительности всей системы в целом.

В криогенной системе нуклотрона задействованы компрессоры различных типов и модификаций. Основой системы компримирования служит винтовой компрессорный агрегат (17 на рис.2) «Каскад-80/25» производства казанского объединения АО «НИИТУРБОКОМПРЕССОР» [21]. Для ступенчатого регулирования расхода сжатого гелия и резервирования используются поршневые компрессоры меньшей производительности: 3О5НП-20/30 и 2ГМ4-12/31 (14), (15). Закачка испарившегося гелия в ресиверы осуществляется небольшими поршневыми компрессорами 1ВУВ-45/150 (12), способными работать при более высоком давлении на нагнетании.

Основные технические характеристики применяемых компрессоров даны в табл. 2. К настоящему времени на криогенной системе нуклотрона установлен один агрегат «Каскад-80/25», вторую машину планируется ввести в действие в 2000 году. Суммарная производительность компрессоров, расположенных в машинном зале нуклотрона, установленная мощность и расход охлаждающей воды составляют 12240 Нм³/ч, 2,6 МВт и 155 м³/ч. После того как будет задействован второй агрегат «Каскад-80/25», эти значения увеличатся, соответственно, до 17280 Нм³/ч, 3,85 МВт и 215 м³/ч.

**Таблица 2. Основные технические характеристики компрессоров
криогенной системы нуклотрона**

Характеристики	«Каскад-80/25»	305НП-80/25	2ГМ-12/31	1ВУВ-45/150
Количество, шт.	2	3	4	4
Тип	Винт.	Поршн.	Поршн.	Поршн.
Производительность (при условиях всасывания), м ³ /ч	5040	1200	840	45
Давление нагнетания, МПа	2,5	3,0	3,1	15,0
Установленная мощность электродвигателя, кВт	2 × 630	200	160	22
Напряжение электродвигателя, В	6000	380	380	380
Число ступеней сжатия	2	3	3	3
Число оборотов компрессора, об./мин	2970	500	740	620
Расход охлаждающей воды, м ³ /ч	60	15	7,2	1,5

Винтовой компрессорный агрегат «Каскад-80/25» имеет на выходе систему очистки от масла и влаги, основным элементом которой является блок МО-800 (16) производства НПО «Криогенмаш» [22]. Окончательная очистка от паров масла осуществляется в этом блоке посредством двух угольных адсорберов, каждый из которых рассчитан на длительность работы 2500 часов. По истечении указанного времени адсорберы переключаются, и пришедший в негодность уголь заменяется новым. Очистка от влаги осуществляется в двух цеолитовых адсорберах блока МО-800. Каждый из них рассчитан на работу в течение 10 суток, а затем подвергается регенерации. Очистка от влаги сжатого гелия, получаемого от поршневых компрессоров, производится в трех параллельно включенных блоках осушки (13). Система хранения газообразного гелия рассчитана на 6000 Нм³. Она состоит из 10 ресиверов (11) с объемом по 20 м³ и рабочим давлением 3,0 МПа. Кроме того, имеются три маслonaполненных газгольдера (10) с объемом по 20 м³. Основная работа производится только на одном из них, два других используются для испытаний на герметичность отдельных компрессоров после их ремонта.

Естественно, работа с газгольдером такого небольшого объема на описываемой довольно крупной системе криогенного обеспечения на первом этапе вызывала некоторые затруднения. Однако мы не посчитали возможным пойти по такому пути, как, например, на установке «Токамак-15», где в аналогичной по масштабу криогенной системе [23] использован маслonaполненный газ-

гольдер объемом 1000 м^3 . Во-первых, весьма значительны капитальные затраты как на такое устройство, так и на здание, где оно должно размещаться. Во-вторых, как это отмечал П.Л. Капица [24] еще в 1936 г. при описании его первого детандерного ожижителя гелия, воздух через масло газгольдера имеет возможность диффундировать в систему. При большом объеме газгольдера загрязнение гелия воздухом из окружающей среды могло оказаться весьма значительными. В некоторой степени функцию газгольдера выполняет и подсоединенный к обратному потоку ресивер емкостью 100 м^3 , используемый в моменты запуска агрегата «Каскад-80/25».

На рис.3 показан план размещения оборудования системы криогенного обеспечения нуклотрона. Машины и аппараты располагаются в трех корпусах: в корпусе синхрофазотрона на имевшихся уже площадях и в двух новых, специально построенных, — корпусе компрессорной и корпусе газгольдерной. Часть оборудования размещена на прилегающей к корпусам территории. В частности, вблизи корпуса компрессорной располагается система хранения и раздачи жидкого азота (34) и (35), неподалеку установлены ресиверы (21)–(30) для хранения газообразного гелия.

Кольцевая магнитокриостатная система [4,5,18,19]. Как показано на рис.2, каждый из дипольных и квадрупольных магнитов питается жидким гелием из коллектора, проложенного по всей длине ускорителя. В расчетном режиме из сверхпроводящего кабеля гелий выходит с массовым паросодержанием $\sim 0,35$ и далее охлаждает железное ярмо соответствующего магнита, после чего с паросодержанием до $0,9$ отводится в обратный коллектор.

Элементы магнитной оптики ускорителя, а также гелиевые коллекторы прямого и обратного потоков размещены в кольцевом криостате, образуемом горизонтальными цилиндрическими участками из нержавеющей стали. Кроме того, по всему периметру кольцевого криостата имеется теплозащитный экран, охлаждаемый жидким азотом. Цилиндрические участки имеют длины, соответствующие длинам магнитов, и в сборе образуют единые магнитокриостатные блоки, которые соединяются между собой посредством сильфонных развязок. Статический теплоприток из окружающей среды к магнитокриостатному блоку диполя составляет $6,6 \text{ Вт}$, квадруполь — $5,8 \text{ Вт}$.

В магнитокриостатном блоке (рис.4) магнит закрепляется посредством восьми тяг (9) так, что после охлаждения до рабочих температур положение его магнитной оси в пространстве не изменяется. К торцам вакуумного кожуха (8) с помощью накидных фланцев, позволяющих поворачивать блок вокруг оси, присоединены гибкие сильфонные элементы (1), которые дают возможность взаимного перемещения блоков, что необходимо для юстировки. Конструкция устанавливается на имеющую юстировочное приспособление подставку (15). Вакуумные кожухи блоков соединяются разъемными муфтами (5). Они обеспечивают доступ к соединениям электрических и криогенных коммуникаций, расположенным в коротких промежутках между магнитами.

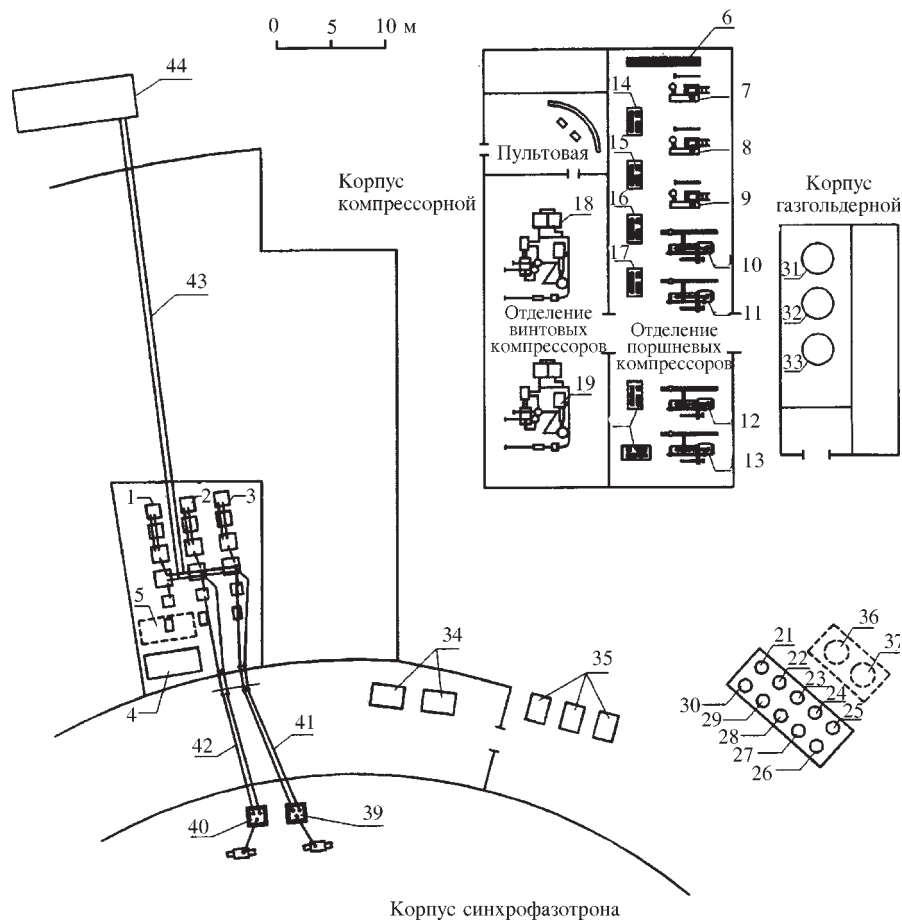


Рис.3. План размещения основного оборудования криогенной системы нуклотрона: 1–3 — гелиевые установки КГУ1600/4,5; 4–5 — блоки очистки МО-800; 6 — силовые электротехнические шкафы; 7–9 — поршневые компрессоры 3О5НП-20/30; 10–13 — поршневые компрессоры 2ГМ4-12/31; 14–17 — закачные поршневые компрессоры 1БУВ-45/150; 18–19 — винтовые компрессорные агрегаты «Каскад-80/25»; 21–30 — ресиверы хранения сжатого газа; 31–33 — газгольдеры; 34,35 — танки жидкого азота; 36,37 — ресиверы на обратном потоке; 38 — насосы для подачи охлаждающей воды; 39,40 — промежуточные сепараторы жидкого гелия; 41–43 — трубопроводы жидкого гелия; 44 — танк жидкого гелия

Имеется три типа магнитокриостатных блоков: дипольных, фокусирующих и дефокусирующих магнитов. Каждый блок перед установкой в кольцо ускорителя подвергнут комплексной проверке (гидравлическое сопротивление

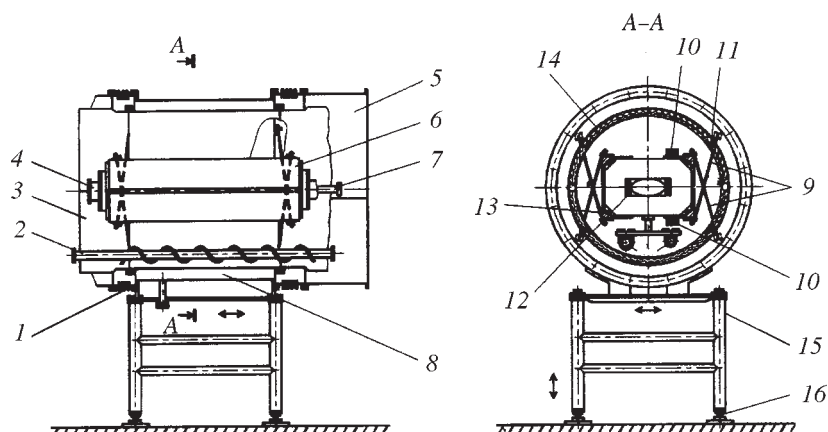


Рис.4. Магнитокриостатный блок нуклотрона: 1 — сильфон; 2 — гелиевые коллекторы; 3 — теплоизолирующий экран; 4 — вакуумная камера ионпровода; 5 — муфта; 6 — железное ярмо; 7 — трубопровод жидкого азота; 8 — вакуумный кожух; 9 — тяга; 10 — сверхпроводящий кабель электрической связи магнитов; 11 — тепловой мост; 12 — обмотка; 13 — трубка для охлаждения ярма; 14 — суперизоляция; 15 — подставка; 16 — домкрат

ние, электрическая прочность, магнитные измерения и др.) при температуре жидкого гелия на специальных стендах. В ходе окончательной сборки кольца производилась стыковка лишь ограниченного количества элементов: гелиевых коллекторов (2), трубопровода жидкого азота (7), вакуумной камеры (4) и разъёмных муфт (5).

Все магниты ускорителя соединяются по группам в три электрические цепи: *B*, *BR* — отклоняющие магниты, *F* — фокусирующие и *D* — дефокусирующие магниты. В каждом блоке помимо электрической цепи собственного магнита имеются транзитные кабели электрической связи магнитов других групп (рис.5). Для электрического соединения соседних блоков в каждом промежутке между магнитами выполняются четыре спая сверхпроводящих кабелей. Очень важно, что все гелиевые каналы блока соединены с гелиевыми коллекторами внутри блока, и эти соединения проверены на герметичность в ходе предварительных тестовых низкотемпературных испытаний. Такая технология исключает гелиевые течи в окружающее магниты вакуумное пространство с большой степенью вероятности.

Так же, как и в установке СПИН [3,32], в нуклотроне использованы простые и экономичные магниты типа «Дубна», в которых поле формируется посредством железного ярма. Они характеризуются минимальным расходом сверхпроводника, хотя и ограничены по условиям насыщения железа величи-

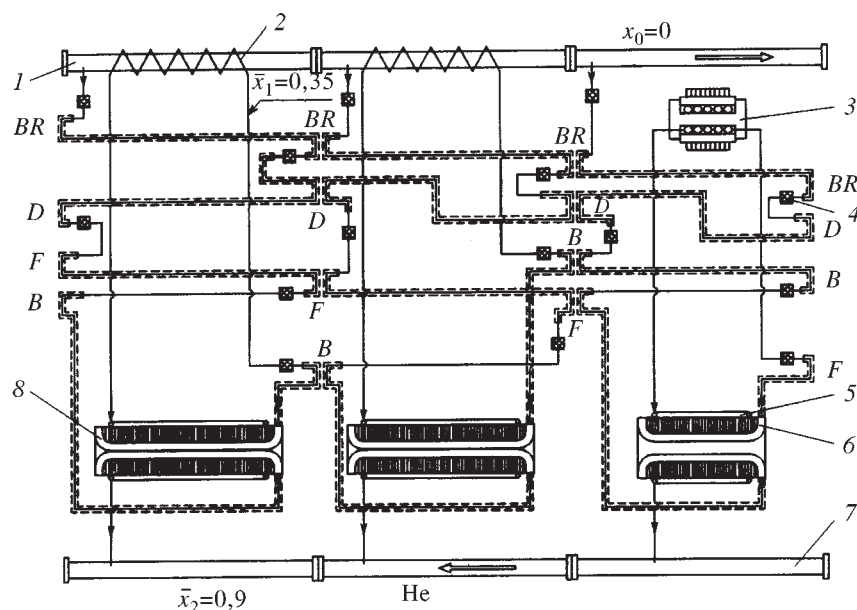


Рис.5. Схема электрических и гелиевых коммуникаций магнитокриостатных блоков: 1 — питающий коллектор; 2 — трубка для охлаждения коллектора; 3 — мультипольный корректор; 4 — металлокерамическая электроизоляционная трубка; 5 — трубка для охлаждения железного ядра; 6 — обмотка квадруполь; 7 — отводящий коллектор; 8 — обмотка диполя; x — массовое паросодержание потоков гелия

ной индукции магнитного поля (до 2,3 Тл). Основные элементы таких магнитов — сверхпроводящая обмотка и железное ярмо, обеспечивающее магнитное поле высокой однородности и воспринимающее магнитные силы, действующие на обмотку. Однако в отличие от установки СПИН конструкция магнитов нуклотрона предусматривает криостатирование более прогрессивным циркуляционным способом. Сверхпроводящий кабель создан на основе мельхиоровой трубки диаметром 5х0,5 мм, внутри которой циркулирует парожидкостный поток гелия. На эту трубку спирально намотан сверхпроводящий кабель, представляющий собой медную проволочную матрицу диаметром 0,5 мм, содержащую внутри 1045 тонких ниобиево-титановых волокон толщиной 10 мкм (рис.6). Номинальный ток такого сверхпроводящего кабеля — 6 кА, переход магнитов в нормальное состояние наблюдается при подаче тока около 7,5 кА.

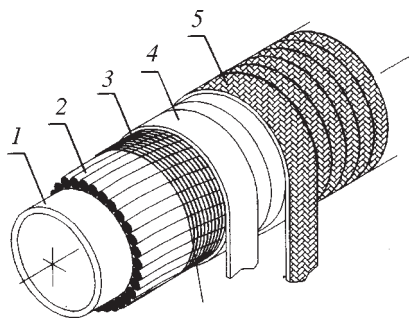


Рис.6. Конструкция сверхпроводящего кабеля нуклотрона: 1 — мельхиоровая трубка; 2 — сверхпроводящая проволока; 3 — нихромовая проволока; 4 — каптоновая лента; 5 — стеклолента

Поперечное сечение дипольных магнитов и квадрупольных линз приведено на рис.7. Магниты имеют разборную конструкцию. Железное ярмо диполей состоит из двух соединенных посредством болтов симметричных частей, смонтированных из пластин электротехнической стали толщиной 0,5 мм. Железо квадруполь имеет четыре симметричные части. Основные характеристики магнитов приведены в табл. 3. На рис.8 представлена зависимость суммы статического теплопритока и динамических тепловыделений полного кольца от режима работы ускорителя. Потребная холодопроизводительность изменяется от величины статического теплопритока (1750 Вт) при

редком следовании импульсов тока в магнитах до 4620 Вт при частоте 0,5 Гц.

В [33] содержатся подробные данные магнитных измерений диполей и квадруполь нуклотрона, рассмотрен алгоритм расстановки магнитов с целью

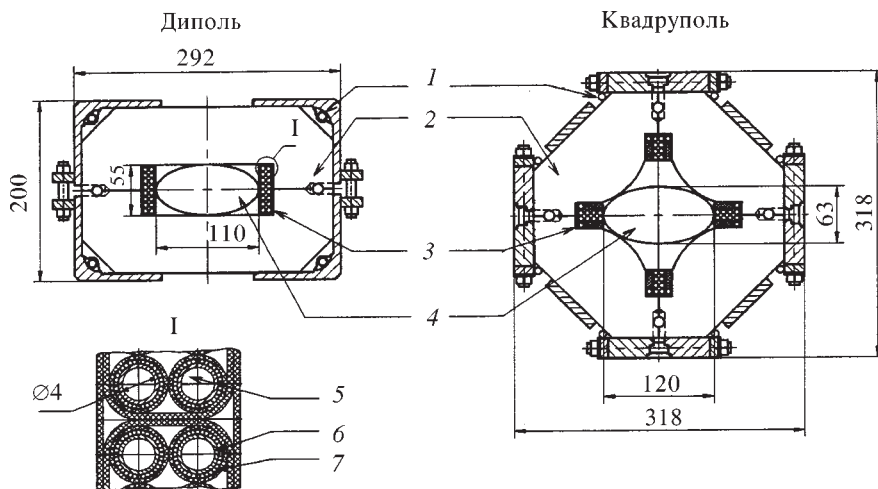


Рис.7. Поперечные разрезы дипольного и квадрупольного магнитов: 1 — охлаждающая трубка; 2 — железное ярмо; 3 — сверхпроводящая обмотка; 4 — ионопровод; 5 — двухфазный гелий; 6 — мельхиоровая трубка; 7 — сверхпроводящий кабель

уменьшения искажения замкнутой орбиты из-за разброса их эффективных длин. Возможности дальнейшего совершенствования описанного типа магнитов, увеличивающие магнитное поле до величин 3,5–5 Тл, предложены в [34].

Таблица 3. Основные характеристики магнитов нуклотрона

Характеристики	Диполь	Квадруполь
Количество элементов	96	64
Масса, кг	500	200
Апертура, мм	110×55	120×63
Длина железного ярма, мм	1370	430
Физическая длина, мм	1462	450
Число витков в обмотке	2×8	4×5
Длина сверхпроводящего кабеля в обмотке, м	62	24
Индукция при номинальном токе 6 кА, Тл	1,98	—
Градиент при номинальном токе 5,6 кА, Тл/м	—	33,4
Запасенная энергия, кДж	19,8	6,9
Динамические тепловыделения в цикле с частотой 0,5 Гц, Вт	21	12
Статический теплоприток (при нулевом токе), Вт	6,6	5,2

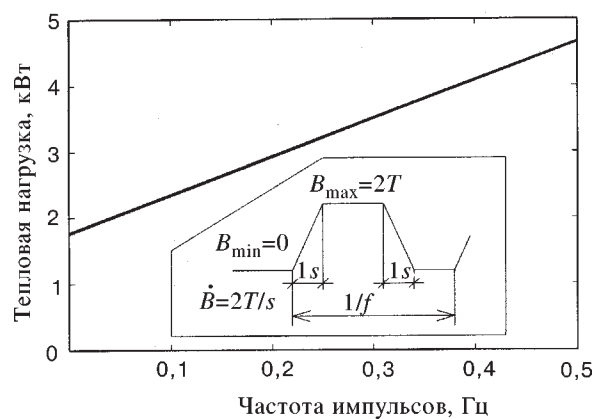


Рис.8. Потребная холодопроизводительность криогенной системы нуклотрона в зависимости от частоты повторения импульсов тока в магнитах

Сверхпроводящие мультипольные магниты для коррекции орбиты частиц [63]. Для обеспечения коррекции орбиты частиц в кольце нуклотрона смонтировано 28 мультипольных корректоров с тремя или четырьмя типами

Таблица 4. Основные параметры сверхпроводящих корректирующих магнитов нуклотрона

Внутренняя трубка, мм	132
Внутренний диаметр обмотки, мм	147
Длина обмотки, мм	310
Максимальный расчетный ток, А	100
Обмотки	D/S/O
Максимальное поле, Тл	0,15/0,4/0,1
Ампер-витки, кА	9/8,2/1,5

обмоток в каждом. В составе корректоров в разных комбинациях имеются дипольные (D), квадрупольные (Q), секступольные (S) и октупольные обмотки (O). Каждая из них запитывается электрическим током независимо от других. Корректоры смонтированы на базовых квадрупольных магнитах.

Основные параметры мультипольных корректоров приводятся в табл. 4, конструкция показана на рис.9.

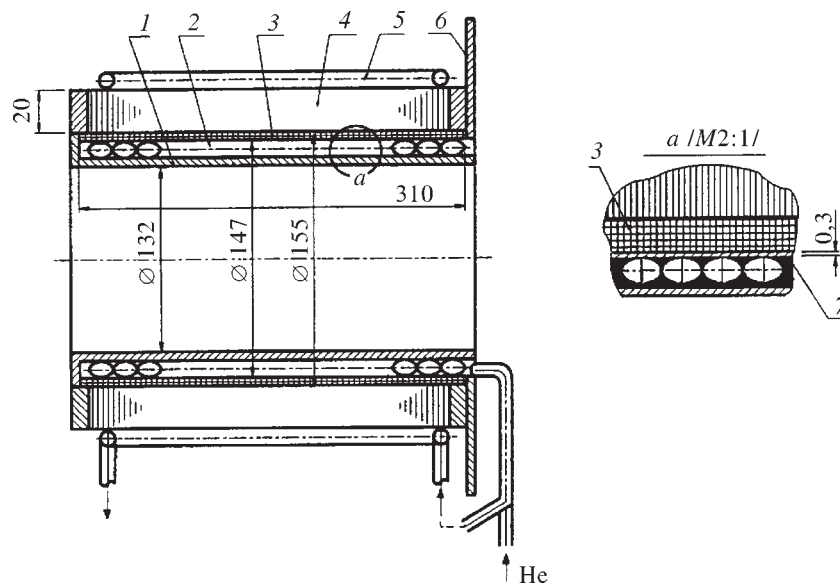


Рис.9. Конструкция мультипольного корректирующего магнита: 1 — поддерживающий цилиндр; 2 — змеевик с двухфазным гелием; 3 — сверхпроводящие обмотки; 4 — железное ярмо, 5 — теплообменник охлаждения железного ярма, 6 — фланец, 7 — электроизоляция

Обмотки выполнены из сверхпроводящего провода диаметром 0,5 мм в одном слое. Они пропитаны эпоксидным компаундом и приклеены к змеевику (2), по которому проходит двухфазный гелий при температуре 4,5 К. Трубка (2) диаметром 5х0,5 мм припаяна к цилиндру (1), изготовленному из нержавеющей стали. Обмотки окружены железным ярмом из листовой электротехнической стали толщиной 0,5 мм. Листы соединены путем сварки. Охлаждение железного ярма осуществляется посредством припаянной к нему медной трубки диаметром 6х1 мм.

Токовводы [45–47]. Ввод больших по величине электрических токов от работающих при температуре окружающей среды источников питания в охлаждаемые жидким гелием сверхпроводящие магниты — довольно сложная задача. Чем больше площадь сечения и меньше длина проводника, тем большее количество тепла притекает извне в магнитокриостатную систему. Однако и чрезмерное уменьшение площади сечения может приводить к большим теплопритокам из-за разогрева токоввода при прохождении электрического тока. Задача создания токовводов состоит в обеспечении их способности пропускать требуемый электрический ток с минимальными затратами холода. Для ее решения обычно применяют охлаждаемые токовводы, в которых основная часть джоулева тепла и теплопритока из окружающей среды снимается отводимым из криостата низкотемпературным потоком паров гелия, нагревающимся при прохождении токоввода в направлении, противоположном потоку тепла. При оптимизации затрат следует учитывать, что производство в рефрижераторе охлаждающего потока, так же, как и производство холода, связано со значительными энергетическими затратами. Поэтому задача оптимизации корректно может быть решена только в том случае, когда на единицу подводимого к магниту электрического тока расходуется минимальная энергия на приводе криогенного рефрижератора.

В литературе подобный подход встречается редко. Авторы публикаций обычно ограничиваются минимизацией величины теплопритоков на единицу электрического тока, а ведь энергозатраты, обусловленные только величиной теплопритока, составляют лишь малую долю общих затрат на криостатирование токоввода. В этой связи полезно определить, каким единым критерием методически верно можно охарактеризовать эффективность работы токоввода. Как известно [49], минимальная работа получения единицы холода e_q (эксергия холода) и жидкого гелия e_g (эксергия потока) выражается формулами:

$$e_q = T_{0,c} / T - 1,$$

$$e_g = i - i_{0,c} - T_{0,c} (s - s_{0,c}),$$

где T , $T_{0,c}$ — температура криостатирования и окружающей среды; i , $i_{0,c}$ — удельная энтальпия жидкого гелия и гелия при параметрах окружающей среды; s , $s_{0,c}$ — удельная энтропия жидкого гелия и гелия при параметрах окружающей среды.

Для гелия при температуре 4,2 К эти величины составляют $e_q = 70,4$, $e_g = 6805$ Дж/г. Общие затраты эксергии на токоввод определяются как сумма составляющих

$$E = Qe_q + Ge_g,$$

где Q — теплоприток в криостат по токовводу; G — расход гелия, отводимого по токовводу.

С учетом этих составляющих эффективность токоввода характеризуется величиной $e_i = E/I$ затрат эксергии на единицу вводимого электрического тока. Обычно эта величина составляет $0,35 \div 0,5$ Вт/А.

Оперируя величиной e_i , достаточно просто определить дополнительные энергозатраты на приводе гелиевого рефрижератора, связанные с обслуживанием токовводов: $A = e_i I / \eta$, где η — эксергетический к.п.д. рефрижератора ($0,10 \div 0,20$). Например, если $e_i = 0,48$ Вт/А, при восьми основных токовводах нуклотрона для тока в каждом из них 6 кА и режима рефрижератора с к.п.д., равным 0,15, они составляют около 154 кВт.

На практике для организации эффективного теплообмена токоведущих частей с охлаждающим газом в конструкции токовводов используют оплетки из тонкой медной проволоки. Однако в [48] показано, что при увеличении поверхности теплообмена с помощью оплеток удлиняется путь тока, который идет зигзагообразно, и соответственно растут джоулевы потери. Таким образом, недостатки известных токовводов были обусловлены одновременным выполнением оплеткой функций токоведущего элемента и теплообменника. Для уменьшения джоулевых потерь авторами предложено использовать токоведущие медные пластины, соединенные по всей длине со сплюснутыми обмотками. Электрическое сопротивление пластин значительно меньше сопротивления пакета оплеток, и большая часть тока протекает по этим пластинам, а оплетки используются только для интенсификации теплообмена.

Конструкция примененного для нуклотрона токоввода показана на рис.10. Токоведущие элементы состоят из двух медных полос (1) и четырех сплюснутых оплеток (2), торцы которых сварены. В результате образуется короб, охватывающий теплообменник с удельной поверхностью около $55 \text{ см}^2/\text{см}^3$. Поскольку сварка торцов не обеспечивает необходимой герметичности для находящегося под вакуумом криостата, токоведущий элемент помещен в тонкостенную трубу (3) из нержавеющей стали. Небольшое отверстие в стенке короба позволяет выравнивать давление внутри и вне короба, что обеспечивает его целостность при повышении давления. Допустимое внутреннее давление токоввода составляет 2,5 МПа.

Электрические изоляторы (4)–(7) выполнены из капролона. Изоляторы проверены на электрическую прочность в воздухе. Сухой изолятор выдерживает постоянное напряжение 20 кВ, смоченный водой — 2,5 кВ (имеется в ви-

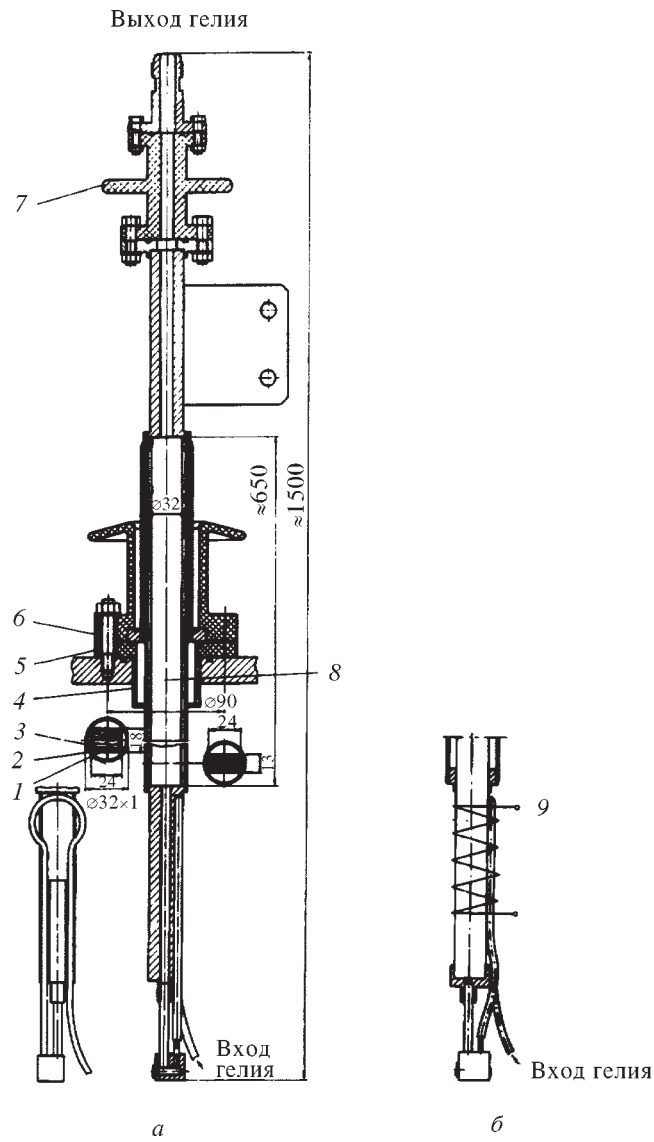


Рис.10. Конструкция токоввода: 1 — полоса медная; 2 — оплетка; 3 — труба; 4–7 — капролоновые электроизоляторы, 8 — теплообменник, 9 — нагреватель

ду возможность образования снеговой шубы в верхней части токоввода при выходе холодного гелия).

Для проведения испытаний отдельных магнитов на стендах и для кольца ускорителя было создано несколько модификаций описанной конструкции. Полученные параметры тоководов приведены в табл. 5. Отдельная часть тоководов нуклотрона предназначена лишь для кратковременной (несколько секунд) работы в ходе эвакуации энергии магнитной системы при потере сверхпроводимости. Эти тоководы [46], обеспечивающие вывод тока 8 кА за 1–2 с, отличаются пониженным статическим теплопритоком в криостат.

Таблица 5. Основные параметры тоководов

Оптимальный ток, кА	4,0	6,0	7,0	9,0
Эффективная длина, мм	600	600	650	820
Сечение токоведущего элемента, мм				
Верх	105	160	130	160
Низ	75	110	100	120
Поперечные размеры токонесущего элемента (верх), мм	20 × 15	28 × 15	27 × 17	27 × 22
Расход гелия на охлаждение токовода, г/с	0,2	0,3	0,316 (5 кА)	0,351 (6 кА)
Теплоприток на единицу тока, Вт/кА	1,0	1,0	1,12	1,17
Теплоприток без тока, Вт/кА	2,5	4,0	3,5	6,0
Гидравлическое сопротивление, кПа	10	12	10	11
Расход эксергии на единицу тока (эффективность), Вт/А	0,41	0,41	0,51	0,48

Особенность тоководов для мультипольных корректоров состоит в том, что в этом случае охлаждение потоком гелия не применяется [63]. Отвод тепла осуществляется на уровне 80 К посредством тепловых мостов к теплоизолирующему азотному экрану криостата нуклотрона.

Термометрия [50–52,65]. В ходе развития работ по созданию нуклотрона потребовалось большое количество точных, надежных, доступных по цене термометров, способных работать в широком интервале температур и по возможности не изменяющих свои характеристики в магнитных и радиационных полях. Поскольку отечественных термометров, в полной мере удовлетворявших этим требованиям, не существовало, был проведен цикл исследовательских работ по созданию собственной базы термометрии. В результате в качестве датчиков температуры было предложено использовать отечественные резисторы [53] типа ТВО (теплостойкий, влагостойкий, объемный). Исследования и опыт применения в течение более десяти лет показали, что основ-

ные характеристики предложенных термометров не хуже, чем у зарубежных аналогов, а в отношении рабочего интервала температур и стабильности их превосходят.

Резисторы типа ТВО, предназначенные для работы в электронных устройствах в цепях постоянного и переменного тока, а также в импульсных режимах, выпускаются промышленностью с номинальными мощностями от 0,125 до 60 Вт. Существенные достоинства этих резисторов состоят в малой индуктивности, хорошей электрической изоляции конструкции и высокой надежности. Для целей низкотемпературных измерений наиболее подходят резисторы с номиналом 0,125 Вт, имеющие минимальные размеры. Максимальное удобство стыковки с измерительной системой при хорошей чувствительности обеспечивают резисторы с номинальным сопротивлением 1000 Ом.

Как показано на рис. 11, резистор ТВО-0,125 представляет собой стержень прямоугольной формы с запрессованными по торцам выводами (1). Объемная токопроводящая композиция (2) прямоугольного сечения герметично защищена керамической оболочкой (3) и слоем стеклоэмали (4) толщиной 0,2 мм. Электрические контакты между проводящей композицией (2) и платиновыми выводами (1) осуществляются путем диффузии серебряного порошка (5) при спекании и прессовании в процессе производства, поэтому они герметичны и имеют повышенную прочность. Токопроводящая композиция состоит из мелкодисперсной (50–200 Å) газовой сажи (3–5%), борно-свинцового флюса и корундового микропорошка. Масса резистора составляет 0,075 г. Величину его теплоемкости при низких температурах можно описать эмпирической зависимостью

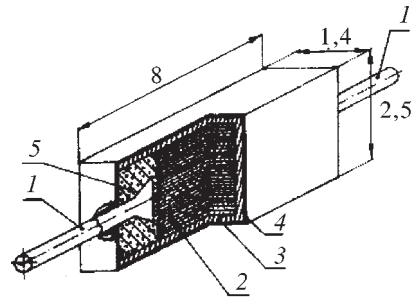


Рис. 11. Конструкция и размеры композитного резистора ТВО-0,125: 1 — платиновые выводы; 2 — токопроводящая объемная композиция; 3 — керамическая оболочка; 4 — стеклоэмаль; 5 — серебряный порошок

$$C_T = 10^{-6} (0,99T + 1,70T^3) [\text{Дж/г} \cdot \text{К}].$$

При температуре 4,2 К эта величина составляет $1,3 \cdot 10^{-4}$ Дж/г·К.

Сопротивление резистора ТВО нелинейно растет с понижением температуры. Зависимости $R = f(T)$ ТВО и часто применяемых для измерения низких температур резисторов фирмы «Аллен-Бредли» аналогичны: в обоих случаях они имеют вид, близкий к гиперболе. Изменение чувствительности резисторов в зависимости от измеряемой температуры показано в табл. 6.

Таблица 6. Чувствительность резисторов ТВО и «Аллен-Бредли», Ом/К

Температура, К	4,2	20,4	77,4	273	400
Резистор ТВО (1000 Ом)	714	26,5	3,8	0,8	0,5
«Аллен-Бредли» (100 Ом)	360	7,0	0,47	0,04	—

Поскольку промышленность выпускает резисторы ТВО с отклонениями от номинальных сопротивлений от 5 до 20%, каждый термопреобразователь, создаваемый на их основе, требует индивидуальной градуировки. Для описания результатов градуировки используется уравнение

$$T = \sum K_n (R_0 / R)^n,$$

где коэффициенты K_n полинома определяются по калибровочным данным методом наименьших квадратов, обычно $R_0 = 1000$ Ом. Для интерполяции с погрешностью по температуре до 0,5% в интервале $4,2 \div 300$ К необходимо брать семь коэффициентов полинома.

Для градуировки термометров в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ создан специальный стенд, измерения на котором производятся одновременно для партии из 20 термопреобразователей. Используется четырехпроводная схема с питанием постоянным измерительным током 10 мкА со стабильностью не хуже 10^{-5} . Температура контролируется по образцовому германиевому термометру ТСГ-1 в диапазоне $4,2 \div 30$ К с точностью 0,02 К и в диапазоне $30 \div 273$ К по платиновому термометру ТСПН-3 с точностью 0,05 К. Производительность стенда и разработанные программы для обработки получаемых результатов позволили не только оснастить все системы нуклотрона необходимой термометрией, но и предоставить термометры для целого ряда исследований, ведущихся в ОИЯИ и многих других организациях в России.

3. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВНЕШНЕЙ КРИОГЕННОЙ СИСТЕМЫ

Гелиевый рефрижератор КГУ-1600/4,5[20]. Криогенная гелиевая установка КГУ-1600/4,5 спроектирована московским объединением НПО «Гелиймаш» по заказу и с участием специалистов Лаборатории высоких энергий ОИЯИ. Головной образец, испытания которого были начаты в 1980 г., предназначался для криостатирования сверхпроводящего модельного синхротрона СПИН и сжижения гелия для нужд различных экспериментальных стендов ОИЯИ, работавших как для исследований сверхпроводящих магнитов в рамках программы создания нуклотрона, так и для других целей. Впоследствии на криогенном комплексе нуклотрона были смонтированы еще три такие установки.

Агрегат охлаждения КГУ-1600/4,5 включает пять основных блоков (рис.12), заключенных в собственные вакуумные теплоизолирующие кожухи и соединенных с другими посредством теплоизолированных трубопроводов. Блок (1) представляет собой состоящую из двух- и трехпоточных витых теплообменников гирлянду, из соответствующих мест которой по расположенному в центре вакуумному кожуху отходят три пары трубопроводов входа и выхода гелия турбодетандеров ступени предварительного охлаждения. Турбодетандерный блок (2) конструктивно размещен в верхней части блока (1).

Очистка гелия от примесей при температуре жидкого азота осуществляется в двух переключающихся блоках 3(1) и 3(2) с размещенными в них угольными адсорберами. Во время работы одного блока второй находится в процессе регенерации. Она производится прогревом горячим газом и последующим вакуумированием. Адсорбер очистки от примесей Ne и H_2 установлен внутри блока сжижения (4). Возможностей его регенерации в ходе работы не преду-

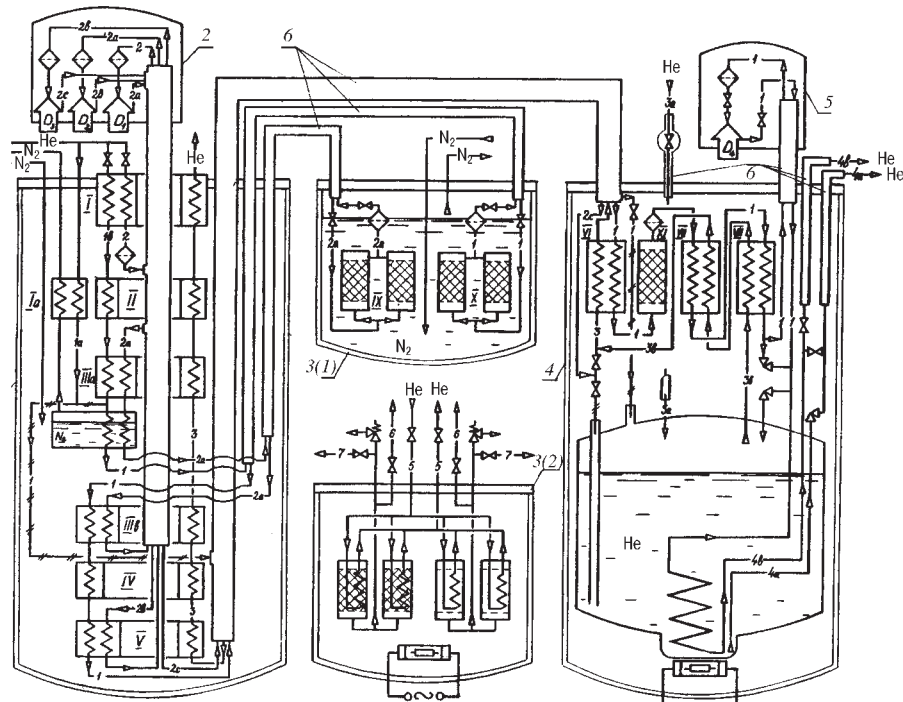


Рис.12. Схема установки КГУ-1600/4,5: 1 — основной блок теплообменников; 2 — турбодетандерный блок; 3 — блоки очистки от примесей N_2 и O_2 ; 4 — блок сжижения; 5 — блок парожидкостного турбодетандера

смаatrивалось: как правило, она осуществляется на теплой установке перед каждым длительным сеансом эксплуатации. Блок сжижения (4), кроме того, включает сборник жидкого гелия объемом около 1000 литров, теплообменники и низкотемпературную арматуру управления установкой и распределения жидкого гелия по потребителям. К блоку сжижения примыкает блок парожидкостного турбодетандера (5).

Как известно, при криостатировании сверхпроводящих магнитных систем гелиевые рефрижераторы работают в таких режимах, когда одновременно с производством холода дополнительно вырабатывается и некоторое количество жидкого гелия, которое необходимо для заполнения криостатов и охлаждения тоководов. Поэтому были экспериментально изучены характеристики установки КГУ-1600/4,5 при работе в подобных комбинированных режимах.

Методика измерений состояла в том, что при каком-то значении холодопроизводительности, имитируемом встроенным в сборник жидкого гелия электронагревателем, измеряется количество сжижаемого гелия. Полученные таким образом результаты представлены на рис.13. Давление сжатого газа на входе в установку в процессе измерений поддерживалось около 2,0 МПа, суммарная производительность компрессоров составляла 3600 Нм³/час.

Характеристика (1) соответствует режимам с дросселированием в степени окончательного охлаждения. При замене дросселя на парожидкостный турбодетандер (кривая 2) холодопроизводительность существенно возрастает: в чисто рефрижераторном режиме — с 1100 до 1700 Вт, т.е. более чем в 1,5 раза.

Для форсирования установки в дроссельном режиме можно подключить резервный компрессор (кривая 3), увеличив расход гелия до 4800 Нм³/ч. Холодопроизводительность при этом возрастает примерно на 400 Вт, однако увеличивается давление в сборнике жидкого гелия с 0,028 до 0,044 МПа, что повышает температуру криостатирования на 0,13 К.

С применением парожидкостного детандера поршневого типа (кривая 4) установка КГУ-1600/4,5 обладает несколько большей холодопроизводительностью и энергетической эффективностью, чем в случае парожидкостного турбодетандера. Однако из соображений надежности нами, как правило, были использованы турбомашины.

Приведенные выше характеристики получены в режимах, когда в степени предварительного охлаждения используется жидкий азот. Осуществить эффективную работу на различных точках характеристики в отсутствие жидкого азота в цикле довольно сложно. Это обусловлено нерегулируемостью проходных сечений сопловых аппаратов последовательно включенных турбодетандеров: при переходе от одного режима к другому требуется существенное перераспределение потоков. Путем расчетного анализа переменных режимов

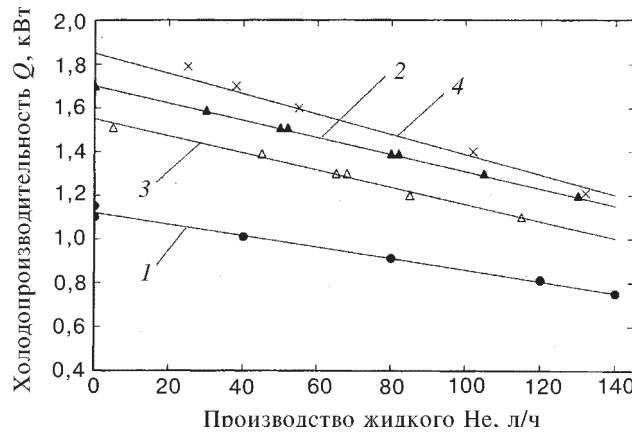


Рис.13. Характеристики установки КГУ-1600/4,5 при одновременном производстве холода на уровне 4,5 К и жидкого гелия: 1 — режимы с дросселированием в ступени окончательного охлаждения; 2 — с расширением в парожидкостном турбодетандере; 3 — дроссельные режимы при повышенном расходе сжатого гелия (четыре компрессора 305НП20/30); 4 — с поршневым парожидкостным детандером

рефрижераторов найдены и реализованы технические решения, которые позволят эффективно работать на значительной части характеристики и без потребления жидкого азота. Методические основы анализа переменных режимов и результаты расчетов для КГУ-1600/4,5 рассмотрены ниже.

Достижение высокой эффективности рефрижераторов обеспечено современным уровнем разработок таких его основных элементов, как турбодетандеры и теплообменная аппаратура.

Турбодетандеры [35,39,58] установки КГУ-1600/4,5 являются высокоскоростными малоразмерными турбинами, не имеющими аналогов в мировой практике. Проточная часть турбомашин с радиально-осевым рабочим колесом имеет специальную профилировку, обеспечивающую высокую эффективность расширения рабочего тела.

Конструктивно турбодетандеры выполнены по однотипной схеме. Рабочее колесо турбодетандера консольно закреплено на вертикально расположенном валу, опирающемся на радиальный газостатический и радиально-осевой гидростатический масляный подшипники. Газовый подшипник расположен непосредственно у рабочего колеса и хорошо герметизирует низкотемпературную проточную часть от попадания паров масла. Он малочувствителен к изменениям температуры и выделяет незначительное количество теплоты трения, что уменьшает теплоприток к криогенной части турбины. Высокая виброустойчивость ротора в основном обеспечивается специаль-

ным гидростатическим подшипником, в котором в рабочем режиме происходит интенсивное образование эмульсии масла, благодаря чему существенно снижается момент сопротивления вращению ротора. Гидростатический подшипник воспринимает все радиальные и осевые нагрузки со стороны турбины. Мощность, развиваемая турбиной, расходуется на трение в подшипниках и нагрев масла, циркуляция и охлаждение которого осуществляется герметичной системой маслообеспечения.

Холодная и теплая части турбодетандера разделены на валу двухсекционным лабиринтным уплотнением с промежуточной камерой, предназначенной для подвода теплого гелия под давлением с целью создания дополнительного газового затвора. Рабочее колесо и направляющий аппарат, а также система подвески ротора и нагрузочное устройство выполнены в едином блоке — модуле. Тем самым существенно упрощена технология изготовления конструкции; ремонт осуществляется простой заменой модуля без нарушения герметизации вакуумного теплоизоляционного кожуха.

Благодаря оптимальному выбору зазоров в подшипниках, давлению масла и распределению роторных масс удалось при весьма высоких скоростях ротора добиться вращения практически без прецессии. Турбины способны длительно работать при частоте вращения ротора до 300000 об/мин. Рабочие частоты вращения существенно ниже, поэтому турбодетандеры обладают высокой надежностью работы и способны выдерживать существенные перегрузки.

Турбинные ступени смонтированы в вакуумном кожухе, который объединен с системой циркуляции и охлаждения масла в единый блок — турбодетандерный агрегат.

Особым достижением следует считать создание уникального парожидкостного турбодетандера [35]. Как известно, для повышения энергетической эффективности криогенных рефрижераторов и ожижителей большое значение имеет возможность замены связанного с большими потерями эксергии процесса дросселирования Джоуля — Томсона на более совершенный процесс адиабатного расширения в детандере. В 1965 г. замена дросселя на детандер была предложена и реализована в цикле водородного ожижителя в ОИЯИ [36]. На гелиевом ожижителе такую модернизацию впервые (1970 г.) удалось произвести С.Коллинзу [37], в итоге повысившему производительность установки в ожижительном режиме с 60 до 80 л/ч, а в рефрижераторном — со 180 до 250 Вт. В обоих случаях были использованы детандеры поршневого типа.

Поршневые детандеры вместо дросселя применялись и в первоначальном варианте головного образца рефрижератора КГУ-1600/4,5. Следует отметить, что было достигнуто довольно высокое (рис.13) повышение эффективности (около 70%) по сравнению с дроссельным режимом.

Между тем фирма «Зульцер» сообщила (1980 г.) об успешной замене дросселирования Джоуля — Томсона на расширение в турбодетандерах сразу в нескольких гелиевых системах. Автор сообщения [38] отмечал, что во избежание технических проблем, которые могут проявиться при расширении потока в двухфазной парожидкостной области, предпочтительнее осуществлять работу турбины только в однофазной области. Это достигалось тем, что на выходе детандера устанавливался клапан, посредством которого давление после турбомшины поддерживалось около 0,25 МПа, т.е. чуть выше, чем критическое давление гелия. Впрочем, в ходе экспериментов были случаи, когда клапан был открыт слишком сильно, и детандер входил в парожидкостную область. В течение непродолжительного времени, когда это случалось, каких-либо проблем с работоспособностью турбины не возникало.

В 1985 г. мы также попытались заменить поршневой парожидкостный гелиевый детандер установки КГУ-1600/4,5 на детандер турбинного типа. Наряду с проблемой надежности такая модернизация позволяла разрешить и значительные эксплуатационные трудности, возникающие в моменты поломок поршневых машин: подобные случаи, как правило, вызывали резкое повышение давления сжатого газа на входе в установку и, соответственно, быстрое понижение уровня газгольдера вплоть до срабатывания концевых выключателей, блокирующих возможное всасывание масла и атмосферного воздуха в гелиевую систему и, во избежание аварии, отключающих все работающие компрессоры. В случае же самопроизвольной остановки машины турбинного типа это неприятное последствие отсутствует: сопловый аппарат продолжает пропускать необходимое количество гелия, т.е. турбина как бы сама превращается в дроссель.

Опытный образец парожидкостного гелиевого турбодетандера был создан в НПО «Гелиймаш» по заказу ОИЯИ и проходил доводку и испытания в составе системы криогенного обеспечения установки СПИН. Турбодетандер был рассчитан для рефрижераторного режима работы КГУ-1600/4,5 с одновременным частичным получением жидкого гелия и имел следующие проектные параметры: давление на входе — 1,8 МПа, температура на входе — 5,2 К, давление на выходе — 0,15 МПа, расход рабочей среды — 2400 Нм³/ч, мощность — 0,85 кВт.

В целях обеспечения однотипности расширительных машин, комплектующих установки КГУ-1600/4,5, гелиевый парожидкостный турбодетандер был выполнен по принципиальной схеме, принятой ранее и для газовых турбодетандеров предварительного охлаждения. В турбодетандере использована центростремительная реактивная турбинная ступень с радиально-осевым полуоткрытым колесом. Наружный диаметр колеса 15 мм, частота вращения 140000–180000 об/мин, высота лопаток направляющего аппарата 0,5 мм.

Из рис.13 видно, что в рефрижераторном режиме эффективность КГУ-1600/4,5 с парожидкостным турбодетандером по сравнению с дросселем более чем на 50% выше. Принципиально важно, что, несмотря на отсутствие возможностей регулирования проходных сечений соплового аппарата турбодетандера, эффективная работа установки КГУ-1600/4,5 обеспечивается на всех точках характеристики. Такой эффект «саморегулирования» потоков в переменных режимах объясняется тем, что при максимальном расходе гелия через турбину (рефрижераторный режим) оптимальная температура на входе минимальна и составляет 5,2 К. При переходе к ожижительному режиму требуемый расход гелия в ступени окончательного охлаждения довольно существенно уменьшается, но это компенсируется ростом оптимальной температуры на входе турбомашин, достигающей в этом случае 8,5 К. Этот рост температуры на входе снижает количество перерабатываемого гелия как раз настолько, чтобы эффективно перераспределить потоки.

Полученный нами положительный опыт применения парожидкостного гелиевого турбодетандера на головном образце КГУ-1600/4,5 позволил в дальнейших работах по созданию нуклотрона целиком отказаться от расширительных машин поршневого типа, что существенно сказалось на повышении надежности всей системы. Длительная работа показала абсолютное отсутствие каких-либо технических проблем, которых можно было ожидать в режимах с окончанием процесса расширения в двухфазной парожидкостной области.

Теплообменная аппаратура [59] криогенной гелиевой установки КГУ-1600/4,5 состоит из оригинальных высокоэффективных витых трубчатых теплообменников. Они выполнены из медных труб малого диаметра, оребренных медной проволокой. Намотка труб многослойная, без дистанционных проставок между слоями. Спирально навитая на каждую трубу медная проволока образует хорошо обтекаемую форму оребрения и является не только интенсификатором теплообмена, но и дистанционным элементом между слоями труб.

Такая конструкция позволяет обеспечить малый эквивалентный диаметр межтрубного пространства. Эти особенности определяют высокую компактность теплообменников. В конструкции теплообменников предусмотрена навивка труб по специальной методике с переменными значениями продольного и поперечного шагов, что сводит к предельно минимальным значениям неравномерность распределения газов по каналам межтрубного пространства и продольную теплопроводность по элементам конструкции. Благодаря этому достигается высокая эффективность теплообменников.

Теплообменники отличаются высокой надежностью в криогенных условиях работы, поскольку обладают самокомпенсацией температурных напряжений в широком диапазоне температур благодаря естественной деформируемости выводов концов труб на коллекторы.

В рефрижераторе КГУ-1600/4,5 более десятка криогенных теплообменников, но их компактность позволяет свести криогенные блоки к сравнительно небольшим размерам.

Винтовой компрессорный агрегат «Каскад-80/25» [21,40-43]. Опытная эксплуатация головного образца криогенной гелиевой установки КГУ-1600/4,5 показала, что главные проблемы с надежностью связаны с применением компрессоров поршневого типа, в которых имелось большое количество требующих частой замены и ремонта впускных и выпускных клапанов. Поэтому дальнейшее развитие привело к необходимости перехода на винтовое компрессорное оборудование.

Гелиевый винтовой маслозаполненный компрессорный агрегат «Каскад-80/25» разработан в НПО «Казанькомпрессормаш» применительно к системе криогенного обеспечения ускорительно-накопительного комплекса УНК [44], создававшегося в Институте физики высоких энергий в Протвино. Для этого сооружения предполагалось выпустить серию таких машин в количестве 60 шт. В рамках протокола о совместной научно-исследовательской работе между ИФВЭ и ОИЯИ испытания и доводка головного образца компрессорного агрегата «Каскад-80/25» проводилась в ЛВЭ ОИЯИ. Условиями протокола была предусмотрена последующая эксплуатация агрегата в составе криогенного комплекса нуклотрона.

Винтовой компрессорный агрегат «Каскад-80/25» — машина второго поколения отечественных винтовых маслозаполненных компрессоров, используемых в криогенных установках для компримирования гелия [21]. В криогенной системе установки «Токамак-15» применен [23] компрессорный агрегат с аналогичными по производительности параметрами, состоящий из двух двухступенчатых установок «Каскад-40/16» и одной дожимающей машины «Каскад-6/16-25». В отличие от него «Каскад-80/25» выполнен в двухступенчатом варианте с одним маслоотделителем и общей маслосистемой компрессоров первой и второй ступени.

Агрегат «Каскад-80/25» состоит из четырех основных блоков: первой ступени, второй ступени, блока маслоохладителей и блока управления. Первая ступень содержит два параллельно работающих компрессора, приводящихся в действие одним электродвигателем мощностью 0,63 МВт с напряжением питания 6 кВ.

Вторая ступень состоит из одного винтового компрессора с золотниковым регулятором производительности, вертикального маслоотделителя и электродвигателя с теми же параметрами, что и на первой ступени. В блок маслоохладителей входят четыре прямоточных теплообменника с водяным охлаждением. Система автоматики осуществляет постоянный контроль основных параметров, защиту от аварийных режимов и автоматическое поддержание номинального давления нагнетания компрессоров первой ступени (промежуточного давления).

Испытания винтового компрессорного агрегата «Каскад-80/25» проводились по замкнутой схеме (рис. 14). Требуемое давление на всасывании первой ступени обеспечивалось ресиверами (10) общим объемом около 160 м³. Газообразный гелий из ресиверов поступает в первую ступень, где сжимается до давления 0,6–0,7 МПа и одновременно охлаждается маслом, впрыскиваемым под давлением в полость сжатия, а затем — во вторую ступень. Здесь маслогазовая смесь сжимается до конечных параметров и поступает в маслоотделитель (2). Отделившийся газ проходит сепаратор (3), концевой холодильник (4) и через вентиль вновь поступает на вход компрессора. Масло из маслоотделителя сливается в маслобак и через фильтр грубой очистки (5) поступает в маслоохладители (9), где охлаждается водой. На первую ступень масло поступает, пройдя жиклер (13) и разделившись на две линии: по одной масло впрыскивается непосредственно в камеру сжатия, по второй линии, пройдя фильтры тонкой очистки (6), поступает на смазку подшипников и создание масляного затвора в концевом уплотнении. Во вторую ступень масло подается посредством шестеренчатого насоса (8), где давление его повышается на

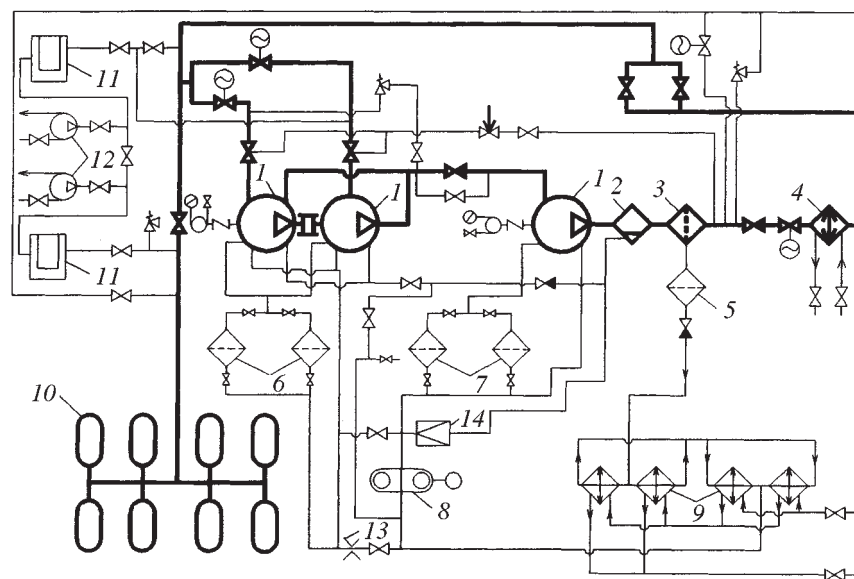


Рис. 14. Принципиальная схема агрегата «Каскад-80/25» и стенда для испытаний: 1 — компрессор; 2 — маслоотделитель; 3 — сепаратор; 4 — концевой холодильник; 5 — фильтр грубой очистки; 6 — фильтр тонкой очистки первой ступени; 7 — фильтр тонкой очистки второй ступени; 8 — шестеренчатый масляный насос; 9 — маслоохладители; 10 — ресиверы на всасывании; 11 — вакуумные ловушки; 12 — насос вакуумный; 13 — жиклер; 14 — клапан перепускной

0,4–0,5 МПа. В камеру сжатия масло впрыскивается непосредственно, а на смазку подшипников, золотника и концевой уплотнения — через фильтр тонкой очистки (7).

Вакуумные насосы (12) и ловушки (11) предназначены для постановки стенда под гелий. Кроме того, они весьма эффективно используются при подготовке системы к пуску для удаления влаги из масла, которым заполняется компрессор. Для этого в холодильники (9) подается горячая вода, и циркулирующее при включенном насосе (8) масло нагревается до температуры 70–80 °С. При последующей откачке влага задерживается в ловушке (11), заливаемой жидким азотом. Марка применяемого масла — турбинное Т-30.

Головной образец винтового компрессорного агрегата «Каскад-80/25» хорошо зарекомендовал себя в ходе испытаний и последующей интенсивной эксплуатации. Изотермический к.п.д., полученный при давлении на всасывании 0,072–0,0875 МПа, составил 0,52–0,55. Замеры шумовых характеристик, проведенные в точках на расстоянии 1 м от агрегата, показали, что уровни звуковой мощности составляют не более 81–102 дБ. Так, в течение одного года агрегат «Каскад-80/25» отработал для нужд криогенного комплекса нуклотрона около 5000 часов при производстве более 50 плановых включений и выключений. При этом не выявлено ни одного случая отказов или отклонения параметров машины от нормы. Таким образом, агрегат «Каскад-80/25» стал не только основой компрессорного обеспечения криогенной системы нуклотрона, но и рекомендован для серийного производства и применения в других крупных криогенных системах.

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КРИОГЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАБОТЕ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Охлаждение сверхпроводящих магнитов нуклотрона до рабочей температуры [60,61]. Для описанных выше магнитов нуклотрона практически нет каких-либо ограничений по времени охлаждения в связи с температурными градиентами и напряжениями в конструкциях. Все они проходили испытания при времени охлаждения до гелиевых температур не более 10 часов. Поэтому было решено охлаждать всю магнитную систему ускорителя за минимально возможное время. Анализ показал, что наиболее приемлемо в нашем случае 80–100 часов. Это рекордно короткое время охлаждения по сравнению с аналогичными системами. Принятая схема (рис.15) использует принудительный поток газообразного гелия, охлажденный в установках КГУ-1600/4,5 посредством испарения около 80 м³ заранее запасенного жидкого азота.

Процесс охлаждения реализуется без какого-либо дополнительного оснащения: используется только штатное оборудование гелиевых рефрижераторов. Прямой и обратный потоки имеют те же направления, что и при обычной

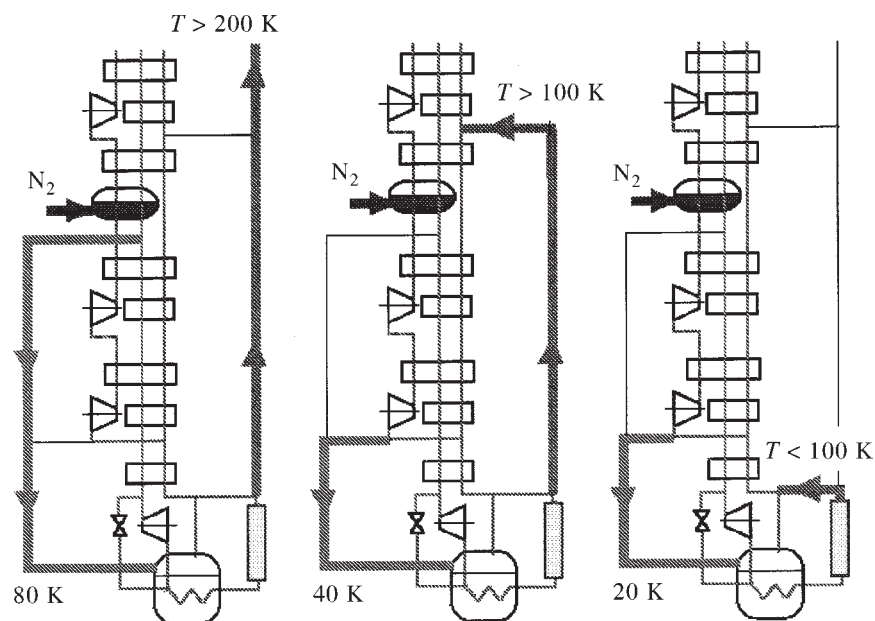


Рис.15. Принципиальные схемы переключений потоков при охлаждении кольца нуклотрона до рабочей температуры

работе в номинальном режиме, т.е. при криостатировании магнитов на гелиевом температурном уровне. Однако чтобы ускорить охлаждение, установки КГУ-1600/4,5 снабжены обводными линиями, показанными на рис.15. Кольцо ускорителя вводится в рабочий режим в три этапа, каждому из которых соответствует одна из схем этого рисунка.

На рис.16 приведено распределение температур магнитов по периметру кольца в зависимости от времени охлаждения. Как видно из рисунка, в рассматриваемом случае время ввода в режим составило около 80 часов. На рис.17 показано, как изменяется температура потока гелия по мере прохождения разных точек внутренних каналов магнитов: на входе, выходе из полого сверхпроводящего кабеля и выходе из трубки охлаждения железного ярма.

Режимы с избыточным обратным потоком («сателлитные») [16]. При криостатировании крупных ускорителей со сверхпроводящими магнитами предпочтение иногда отдают криогенным системам из равномерно расположенных по периметру кольца рефрижераторов с избыточным обратным потоком — сателлитов [25,26]. Они работают за счет жидкого гелия, получаемого от центрального ожижителя, что позволяет в каждом из таких рефрижераторов

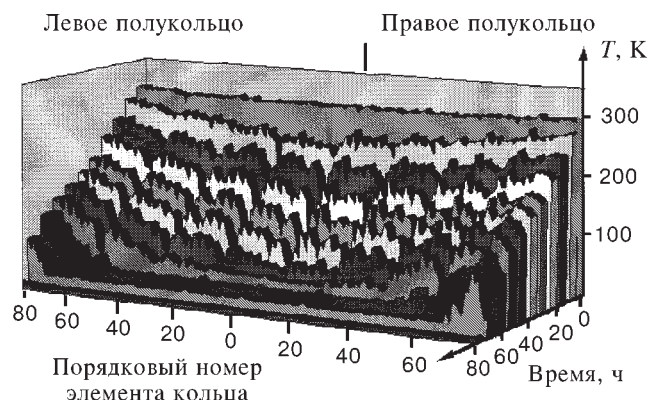


Рис.16 Распределение температур магнитов по периметру кольца в зависимости от времени охлаждения

обойтись минимумом оборудования в ступенях предварительного охлаждения. В этом случае рефрижератор, чаще всего состоящий только из теплообменников и сборника жидкого гелия, обладает высокой надежностью и не требует обслуживания, т.к. наименее надежные и требующие обслуживания элементы криогенной системы сосредоточены на центральном ожижителе. Важно, что при этом сохраняется высокая термодинамическая эффективность: благодаря тому, что теплоемкость (произведение расхода на удельную

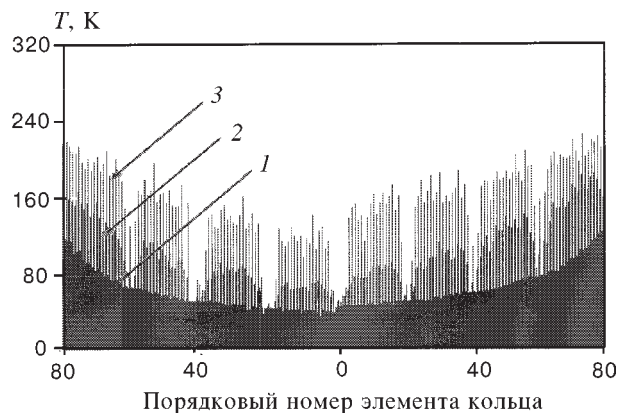


Рис.17. Температура потока гелия по мере прохождения разных точек внутренних каналов магнитов: на входе (1), выходе из полого сверхпроводящего кабеля (2) и выходе из трубки охлаждения железного ярма (3)

теплоемкость) обратного потока всегда несколько выше теплоемкости прямого потока, самостоятельно устанавливается наиболее оптимальное распределение температур [62] в теплообменнике, когда разность температур между потоками изменяется пропорционально температуре обратного потока.

Даже если в номинальном режиме рефрижератор работает по обычной схеме, когда общий расход в прямом потоке больше или равен расходу в обратном потоке, полезным бывает его применение и в сателлитном режиме. Такая потребность возникает, например, когда выходят из строя детандеры ступени предварительного охлаждения, а работу по криостатированию объекта необходимо продолжать. В этом случае используется заранее запасенный жидкий гелий или же он подливается от параллельно работающего на тот же объект рефрижератора. В частности, такой способ резервирования предусмотрен и схемой криостатирования нуклотрона (рис.2).

Вопросы применения рефрижераторов с избыточным обратным потоком рассматривались многими авторами. Подробный термодинамический анализ опубликован в [27], где приводятся сведения об оптимальных параметрах сателлитных рефрижераторов, удельных расходах энергии и необходимых поверхностях теплообменников. Однако полученные здесь данные нельзя считать достаточными в силу того, что в качестве одного из критериев при сопоставлении различных вариантов выбиралась минимальная разность температур между потоками в теплообменнике сателлита. Между тем при одинаковой минимальной разности температур необходимая поверхность теплообмена существенно зависит от соотношения потоков в этом теплообменнике, увеличиваясь по мере уменьшения количества используемого жидкого гелия. Поэтому различные варианты параметров и энергетических показателей сателлитных рефрижераторов можно корректно сравнивать лишь тогда, когда каждому из них будет соответствовать одинаковая поверхность теплообмена. Кроме того, большой практический интерес вызывает анализ роста или ухудшения энергетической эффективности одной и той же сателлитной рефрижераторной установки с изменением ее режима. Таким образом, необходимые условия методически верного сопоставления вариантов соблюдаются только в том случае, когда в качестве исходных данных взяты коэффициент теплопередачи и поверхность теплообмена теплообменников рефрижератора. Такой подход изложен в [16]. В своей работе по настройке режимов криогенной системы нуклотрона мы руководствовались полученными здесь данными.

По этим данным для сателлитного рефрижератора, схема которого показана на рис.18, расчетные параметры приводятся на рис.19 и 20. Первый из них показывает зависимость расхода $g = G / Q$ сжатого газа на единицу холодопроизводительности от относительного количества потребляемого жидкого гелия (обозначения даны на рис.18).

В качестве исходных данных принято $kF/Q = 100 \text{ K}^{-1}$, где kF — произведение коэффициента теплопередачи и поверхности теплообмена теплообменника; температура окружающей среды $T_3 = 293 \text{ K}$; температура в испарителе $T_2 = 4,4 \text{ K}$; давление в точке (4) — 0,105 МПа.

На рис.20 показаны результаты расчетов по затратам энергии на получение холода в спутном рефрижераторе. Кроме принятых выше исходных данных, мы положили: адиабатический к.п.д. турбодетандера — 0,7, изотермический к.п.д. винтового компрессора — 0,5, эксергетический к.п.д. ожижителя гелия — 0,15. Как видно из рисунка, имеются минимумы энергетических затрат как при использовании дросселя, так и в режимах с парожидкостным турбодетандером. Для случая с дросселированием оптимальные параметры работы — давление в прямом потоке 1,2 МПа и коэффициент $\alpha = 10,5 \%$. Эти параметры существенно изменяются при использовании парожидкостного детандера. В этом случае они составляют, соответственно, 2,5 МПа и 4–6 %. Минимумы энергетических затрат носят достаточно пологий характер. Это позволяет получать близкую к оптимальному значению эффективность даже в тех случаях, когда система функционирует с большим разбросом параметров. Так, в схеме с расширением в детандере изменения величины α в пределах 3–8% и давления 1,5–2,5 МПа не приводят к большому изменению общей эффективности системы.

По данным рис.19 и 20 легко оптимизировать параметры системы. Однако для нуклотрона необходимо учитывать одно ограничение: величина массового паросодержания на выходе из магнитов по условиям работы нуклотрона ограничена $x_5 \leq 90 \%$. Расход сжатого газа на единицу холодопроизводительности может быть определен как $g \approx 1/rx_5 = 0,057 \text{ [г·с}^{-1}\text{·Вт}^{-1}\text{]}$, где r — теплота парообразования. Таким образом, если $g < 0,057$, паросодержание на выходе из магнитов будет превышать величину, принятую как предельно допустимая. Область, где паросодержание x_5 выше предельного, отмечена на рис.19 серым цветом. В цикле с детандером, к сожалению, нельзя работать непосредственно при оптимальных условиях, однако на границе разрешенной области

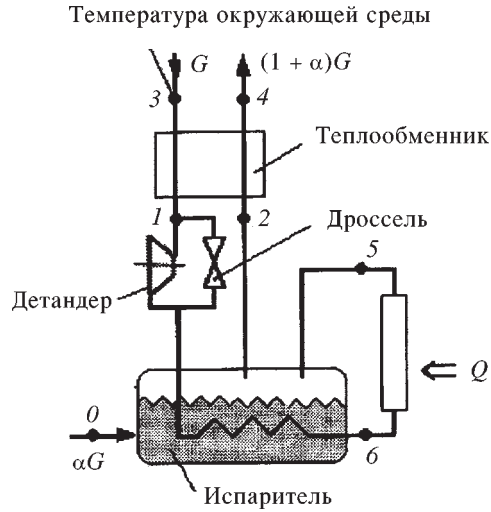


Рис.18. Расчетная схема сателлитного рефрижератора: G — количество сжатого газа из компрессора; Q — холодопроизводительность; α — доля подводимого жидкого гелия от расхода сжатого газа

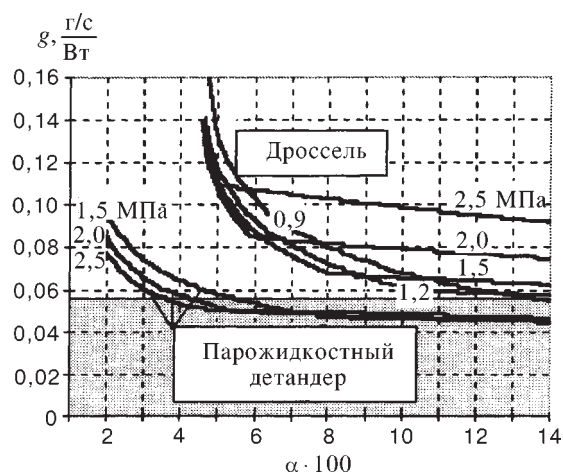


Рис.19. Зависимость расхода $g = G/Q$ сжатого газа на единицу холодопроизводительности для различных давлений в прямом потоке спутникового рефрижератора

($\alpha = 3,6\%$ для 2,5 МПа, 4,4 % для 2,0 МПа и 5,5% для 1,5 МПа) эффективность лишь незначительно ниже благодаря тому, что, как уже отмечалось, минимумы энергетических затрат носят достаточно пологий характер.

Высокая энергетическая эффективность позволяет успешно использовать спутничные режимы для регулирования общей холодопроизводительности

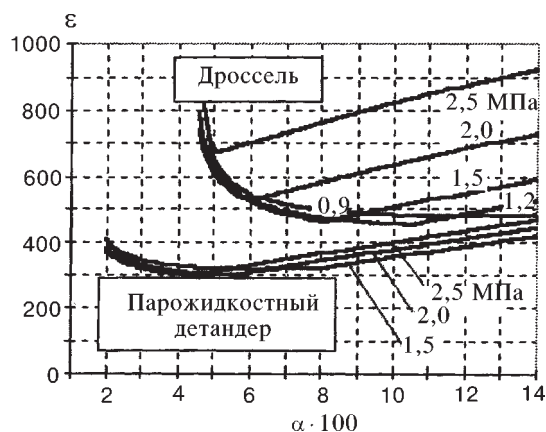


Рис.20. Удельный расход энергии в зависимости от количества потребляемого в спутничном рефрижераторе жидкого гелия для различных давлений в прямом потоке рефрижератора

криогенной системы. Так, весьма часто требуется работать в режимах с пониженной — до 2,0 кВт — холодопроизводительностью. Обычно в такой ситуации задействовано два рефрижератора. Первый работает в своем номинальном режиме, он охлаждает первое полукольцо и дополнительно производит жидкий гелий. Характеристики такого «смешанного» режима были представлены на рис.13. Второй рефрижератор, получающий жидкий гелий от первого, работает в сателлитном режиме с дросселем или парожидкостным турбодетандером.

В течение всех сеансов работы на физические эксперименты и для исследований собственно ускорителя на нуклотроне практически не было простоев по причинам, связанным с криогенной системой. Обычно в резерве имелось достаточное количество жидкого гелия, чтобы переключить любой из рефрижераторов в сателлитный режим и продолжать криостатирование кольца ускорителя при одновременно проводимых восстановительных или регламентных работах на элементах системы криогенного обеспечения.

Характеристики рефрижератора при комбинированном производстве холода и жидкого гелия [13-15]. Криогенный гелиевый рефрижератор создают на основе расчета соответствующего термодинамического цикла. Если его предполагается использовать в нескольких различных режимах, то анализируют все варианты цикла и проектирование продолжают по тому из них, который требует наибольшей теплопередающей поверхности теплообменников. Действительный же цикл работы рефрижератора может существенно отличаться от расчетного как вследствие отклонения фактических параметров машин и аппаратов от принятых в расчете, так и из-за изменений условий работы потребителя. При криостатировании сверхпроводящих магнитных систем гелиевые рефрижераторы работают в различных комбинированных режимах, когда одновременно с производством холода осуществляется и сжижение гелия. Зависимость холодопроизводительности от количества одновременно вырабатываемого жидкого гелия принято называть характеристикой рефрижератора.

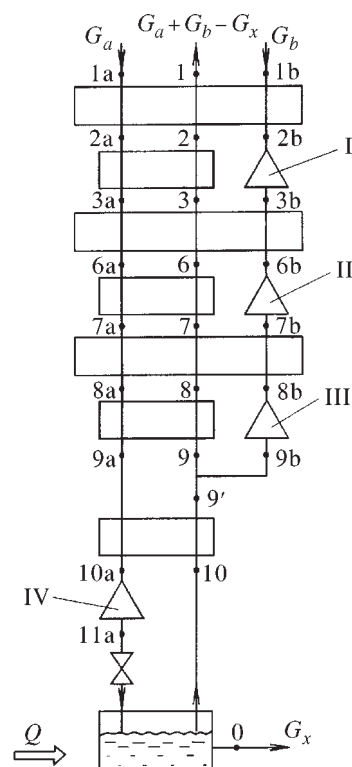
Подобные характеристики дают наглядную методическую основу анализа криогенных систем, состоящих из рефрижератора и криостатируемого объекта. По ним, например, можно определить скорость накопления жидкости при заданном теплопритоке и, следовательно, количественно оценить ту часть пускового периода, которая соответствует времени накопления необходимого уровня жидкого гелия в криостате. Полезно использование характеристик и в системах с охлаждаемыми тоководами.

Характеристики рефрижератора могут быть получены как экспериментальным, так и расчетным путем. Ранее на рис.13 уже приводились экспериментальные характеристики, снятые нами в ходе исследования режимов криогенной гелиевой установки КГУ-1600/4,5. Получение характеристик путем расчетов — довольно сложная задача, но необходимость ее решения проявля-

ется, по крайней мере, в двух аспектах. Во-первых, экспериментальное изучение характеристик крупных установок связано с большими затратами электроэнергии и другими эксплуатационными затратами. Во-вторых, это единственное средство изучения в тех случаях, когда исследуемые режимы еще не реализованы на практике.

Методика расчета режимов рефрижераторов основана на совместном решении уравнений теплопередачи и энергетического баланса теплообменников [14].

Ниже приводятся расчетные данные по работе КГУ-1600/4,5 в режимах без жидкого азота на различных точках характеристики, полученные с целью последующего наиболее рационального проектирования турбомашин. Расчетная схема приведена на рис.21. В качестве исходных данных использовались площади поверхностей теплообмена теплообменников КГУ-1600/4,5,



коэффициенты теплопередачи и гидравлического сопротивления теплообменников для основного проектного режима, в котором при суммарной производительности компрессоров 3600 Нм³/ч установка без использования жидкого азота одновременно должна производить 1850 Вт холода на уровне 4,5 К и 50 л/ч жидкого гелия. Расход сжатого гелия принимался равным 0,17 кг/с, давление после компрессоров — 2,5 МПа, адиабатный к.п.д. всех турбодетандеров — 0,65.

Если принять обозначения: G_k — количество сжатого гелия, подаваемого из компрессора, G_x — количество жидкого гелия, выводимого из цикла, Q — холодопроизводительность, $q=Q/G_k$ — удельная холодопроизводительность, $x=G_x/G_k$ — степень ожигения, оптимизация параметров сводится к определению при заданном значении x максимума функции трех переменных $q=f(T_{2b}, T_{6b}, T_{8b})$, где T_{2b} , T_{6b} , T_{8b} — температуры сжатого гелия на входе в турбодетандеры ступени предварительного охлаждения.

Рис.21. Расчетная схема рефрижератора КГУ-1600/4,5 при работе без использования жидкого азота

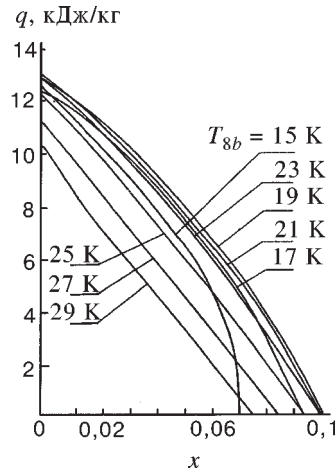


Рис.22. Расчетные характеристики КГУ-1600/4,5 при различных значениях температуры T_{8b} перед турбодетандером III ступени предварительного охлаждения и использовании парожидкостного турбодетандера IV. Оптимальные значения температур $T_{6b} = 50$ К и $T_{2b} = 140$ К

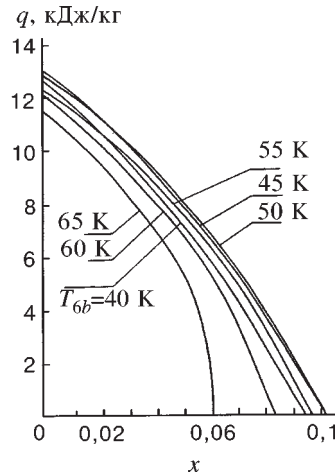


Рис.23. Расчетные характеристики КГУ-1600/4,5 при различных значениях температуры T_{6b} перед турбодетандером II ступени предварительного охлаждения и использовании парожидкостного турбодетандера IV. Оптимальные значения температур $T_{8b} = 19$ К и $T_{2b} = 140$ К

тандеров эффективная работа без потребления жидкого азота может быть достигнута во всех точках характеристики. В чисто рефрижераторном режиме при максимальном значении $q = 12,8$ кДж/кг, холодопроизводительность КГУ-1600/4,5 составляет $Q = qG_k = 12,8 \times 0,17 = 2,18$ кВт. Максимальное значение $x = 0,1$ соответствует производительности в ожежительном режиме $G_x = xG_k = 0,1 \times 0,17 = 0,017$ кг/с = 490 л/ч.

Эффективность установки при этом достаточно высока. Удельные затраты на получение холода и жидкого гелия составят 306 Вт/Вт холода при 4,5 К и 1,36 кВт/ч на литр жидкости (при изотермическом к.п.д. компрессора 50% — случай винтовой машины).

Из полученных результатов следует, что температуры включения детандеров ступени предварительного охлаждения, обеспечивающие оптимальную характеристику, составляют 140, 50 и 19 К. Они практически не зависят от величины x , т.е. приблизительно одинаковы как для чисто рефрижераторного, так и для ожежительного режимов. Вблизи оптимума функция

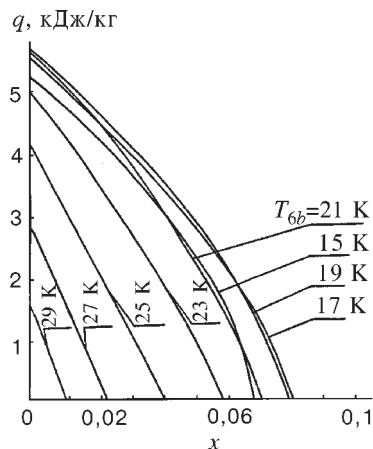


Рис.24. Расчетные характеристики КГУ-1600/4,5 при различных значениях температуры T_{2b} перед турбодетандером I ступени предварительного охлаждения и использовании парожидкостного турбодетандера IV. Оптимальные значения температур $T_{8b} = 19$ К и $T_{6b} = 50$ К

$q = f(T_{2b}, T_{6b}, T_{8b})$ достаточно полого, и для получения эффективных режимов может быть вполне допустимо, если проточные части включенных последовательно турбодетандеров будут обеспечивать распределение температур не более чем с 10% точностью: $T_{2b} = (140 \pm 20)$ К; $T_{6b} = (50 \pm 5)$ К; $T_{8b} = (19 \pm 2)$ К.

Следует отметить, что оптимальные значения температур T_{2b} , T_{6b} и T_{8b} , определенные для случая с применением парожидкостного детандера, остаются практически неизменными и в случае дросселирования в ступени окончательного охлаждения. Это свидетельствует о том, что указанные значения могут быть рекомендованы вне зависимости не только от количества x выводимого из цикла жидкого гелия, но и от величины к.п.д. парожидкостного детандера. При дросселировании в ступени окончательного охлаждения максимально достижимая холодопроизводительность составляет лишь $q = 5,6$ кДж/кг, а коэффициент сжижения $x = 0,08$. Как ви-

дим, при переходе к дросселированию наиболее существенно снижение производительности для рефрижераторного режима, при котором наибольшая часть потока проходит по ступени окончательного охлаждения и, следовательно, велики термодинамические потери.

Ввиду нерегулируемости сопловых аппаратов для работы в каждой точке из приведенных выше характеристик необходим свой индивидуальный комплект из трех турбодетандеров. Расход через турбину жестко определен геометрией проточной части машины и параметрами на входе — давлением и температурой. Приближенные зависимости для расхода как функции давления и температуры на входе приводятся в [28,29]. Результаты расчетов с учетом этих ограничений показаны на рис.25 штриховыми линиями (2). Как видим, в максимуме эти кривые касаются оптимальной характеристики, но слева и справа от него эффективность установки резко снижается. Это происходит потому, что при изменении x становится другой оптимальной долей газа, отводимого на детандеры предварительного охлаждения, а эта оптимальная доля не может быть обеспечена ввиду нерегулируемости турбин. Поэтому параметры установки быстро уходят от оптимальных значений.

Поднять эффективность установки при работе с одним комплектом турбодетандеров на достаточно большом участке характеристики можно путем изменения количества сжатого гелия, поступающего на установку от компрессоров, в зависимости от текущего режима. На рис.25 такой вариант показан кривыми (3). На средней из них при $x = 0,01$ количество перерабатываемого газа равно 0,22 кг/с, а при $x = 0,07$ уменьшено до 0,13 кг/с. Указанный способ получения оптимальной характеристики, впервые продемонстрирован на опыте с подобной установкой меньшего масштаба в [57]. В криогенной системе нуклотрона он применим достаточно просто, т.к. в качестве резервного оборудования система содержит семь сравнительно небольших поршневых компрессоров, последовательное подключение которых обеспечивает возможность эффективно и в широких пределах изменять производительность компрессорного цеха.

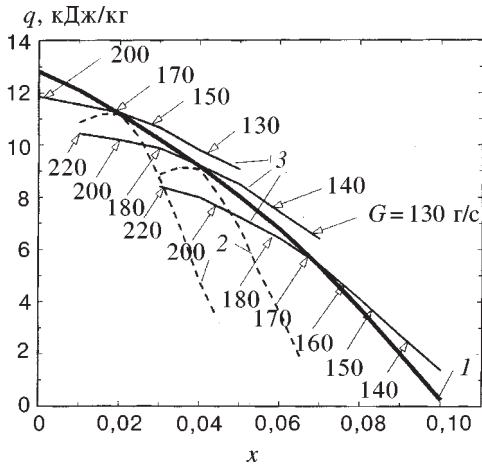


Рис.25. Сравнение оптимальной (1) характеристики установки КГУ-1600/4,5 с характеристиками для заданных комплектов турбодетандеров при постоянном (2) и переменном (3) расходе газа, перерабатываемого установкой

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первое охлаждение полного кольца нуклотрона после сборки всех элементов в тоннеле и комплексной проверки подсистем было начато 17 марта 1993 г. За 100 часов на всех элементах была достигнута температура около 4,5 К, а вакуум в камере ускорителя составил $10^{-9} — 10^{-10}$ Тор.

Диполи и магнитные линзы были запитаны постоянным током 90 А. Затем в вакуумную камеру нуклотрона был инжектирован пучок дейтронов с энергией 5 МэВ и началась работа по проводке пучка. 26 марта были зарегистрированы первые обороты пучка в кольце — эта дата общепризнана как дата ввода в действие нового сверхпроводящего ускорителя тяжелых ядер [54–56].

Успешному запуску в марте 1993 г. предшествовала тщательно спланированная и целенаправленная работа по тестированию всех элементов кольца ускорителя. При гелиевых температурах на специально созданных стендах

были испытаны (иногда неоднократно) все магнитокриостатные элементы: 96 дипольных, 56 квадрупольных, целый ряд нестандартных элементов и тоководы. Проведены испытания цепочек магнитов различной длины. В феврале 1990 г. на отдельном стенде был испытан ряд из 12 дипольных и 4 квадрупольных магнитов — одна восьмая часть полной магнитной системы ускорителя. Магниты выдержали $2 \cdot 10^5$ циклов возбуждения с рабочим током 6,5 кА. В феврале 1992 г. уже на своем месте в тоннеле был смонтирован первый квадрант нуклотрона, состоящий из 28 диполей и 11 квадрупольных. После охлаждения до рабочей температуры в квадрант был инжектирован и проведен по всей длине пучок поляризованных дейтронов.

В течение времени, прошедшего после первого запуска полного кольца, сеансы работы нуклотрона проводятся регулярно. На этих сеансах криогенная система была задействована в течение более 3000 часов. Кроме того, по заявкам других потребителей отработано около 5000 часов при годовом производстве до 1 млн. литров жидкого гелия. При этом не зафиксировано отказов, приводивших к простоям оборудования или срыву плановых работ.

Подводя итог, необходимо сказать, что криогенная система нуклотрона представляет собой довольно дерзкий проект с большим количеством ранее не применявшихся технических идей и решений. Эта система описывается в таких основных терминах, как «быстроциклирующие сверхпроводящие магниты», «криостатирование потоком двухфазного гелия», «весьма короткое время охлаждения до рабочей температуры», «параллельное соединение всех магнитов», «парожидкостные турбодетандеры», «винтовой компрессор со степенью повышения давления более 25 в двух ступенях». Эти технические решения [66] позволили создать не только весьма эффективную и надежную систему, но и сделать ее необычно дешево. Это принципиально важно для осуществимости будущих ускорителей. Важно настолько, что «низкая стоимость» присутствует в самом названии одного из таких проектов [30], рассчитанного на использование кольца длиной около 1000 км с отклоняющими магнитами, создающими поля менее 2 Тл. В качестве прототипа такого магнита рассматриваются сверхпроводящие магниты типа нуклотрона [64].

Автор благодарен за дополнительную поддержку данной работы отделом физики многочастичных систем ФИАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Балдин А.М. и др.** — В сб.: Труды IV Всесоюз. сов. по ускорителям заряженных частиц. М.: Наука, 1975, т. II, с.4.
2. **Балдин А.М. и др.** — Предложения по программе Лаборатории высоких энергий Объединенного института ядерных исследований в 1991-95 гг., Дубна, 1989, с. 210.
3. **Шелаев И. А.** — В сб.: Труды XIII Межд. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Новосибирск: Наука, 1987, т.2, с.24.

4. **Baldin A.M. et al.** — IEEE Trans. on Nucl. Sci., 1983, v. NS-30, No.4, p.3247.
5. **Smirnov A.A. et al.** — J. de Physique, 1984, col. C1, sup. No.1, No.45, p.279.
6. **Dinaburg L.B. et al.** — Cryogenics, 1977, v.17, No.7, p.439.
7. **Dean J.W.** — Cryogenics, 1974, v.14, No.6, p.307.
8. **Агапов Н.Н. и др.** — В сб.: Труды X Межд. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Серпухов, 1977, т.П, с.241.
9. **Agarov N.N. et al.** — Cryogenics, 1978, v.18, No.8, p.491.
10. **Agarov N.N. et al.** — Cryogenics, 1980, v.20, No.4, p.200.
11. **Агапов Н.Н. и др.** — Сообщение ОИЯИ 8-83-702, Дубна, 1983.
12. **Дьячков Е.И. и др.** — Сообщение ОИЯИ 8-82-169, Дубна, 1982.
13. **Агапов Н.Н., Белушкин В.А., Зельдович А. Г.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.5, с.982.
14. **Агапов Н.Н., Белушкин В.А., Зельдович А.Г.** — Препринт ОИЯИ 8-9436, Дубна, 1976.
15. **Агапов Н.Н., Баландилов Н.И., Белушкин В.А. и др.** — Криогенные приборы и устройства в ядерной физике. М.: Энергоиздат, 1982.
16. **Agarov N.N.** — Adv. in Criog. Eng., 1998, v.43A, p.557.
17. **Агапов Н.Н. и др.** — Тез. докл. Межд. научно-практической конф. «Криогенная техника — науке и производству», ЦИНТИХИМНЕФТЕМАШ, М., 1991; Сообщение ОИЯИ P8-90-481, Дубна, 1990.
18. **Смирнов А.А., Ходжибагян Г.Г.** — Препринт ОИЯИ 9-88-344, Дубна, 1988.
19. **Baldin A.M. et al.** — Adv. in Cryog. Eng., 1994, v.39a, p.501; JINR Preprint E9-93-273, Dubna, 1993.
20. **Краковский Б.Д., Пронько В.Г.** — В сб.: Труды III Сов. по использованию ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, ОИЯИ, 1979, с.347.
21. **Шнепп В.Б. и др.** — Химическое и нефтяное машиностроение, 1980, №11, с.25.
22. **Архаров А.Н. и др.** — Криогенные системы. М.: Машиностроение, 1987.
23. **Беляков В.П.** — Криогенная техника и технология. М.: Энергоиздат, 1982.
24. **Капица П.Л.** — УФН, 1936, т.XVI, вып.2, с.145.
25. **Агеев А.И. и др.** — В сб.: Труды VII Всесоюзн.сов. по ускорителям заряженных частиц. М.: Изд-во АН СССР, 1980, с.11.
26. **Rode C., Brindza P., Richied D.** — Advances in Cryogenic Engineering, 1980, v.25, p.326.
27. **Агеев А.И., Шамичев А.Н.** — Препринт ИФВЭ 82-159, Серпухов, 1982.
28. **Вайнштейн Г.Е. и др.** — Холодильная техника и технология. Киев: Техника, 1980, вып.31, с.45.
29. **Вайнштейн Г.Е. и др.** — Известия ВУЗов СССР. Энергетика, 1982, №5, с. 66.
30. **Foster G.W., Malamud E.** — Preprint Fermilab TM-1976, Batavia, 1996.
31. **Barton H.R. et al.** — Advances in Cryogenic Engineering, 1986, vol.31, p.634.
32. **Аверичев С. А. и др.** — Препринт ОИЯИ P8-11700, Дубна, 1978.
33. **Донягин А.М., Коваленко А.Д. и др.** — Сообщение ОИЯИ P9-94-329, Дубна, 1994.
34. **Коваленко А.Д., Аверичев С.А.** — Сообщение ОИЯИ P9-93-280, Дубна, 1993.
35. **Давыдов А.Б. и др.** — Химическое и нефтяное машиностроение, 1989, №4, с.23; Сообщение ОИЯИ 8-86-711, Дубна, 1986.
36. **Balandikov N.I. et al.** — Cryogenics, 1966, v. 6, p.158.
37. **Johnson R.W., Collins S.C., Smith J.L.** — Advances in Cryogenic Engineering, 1971, v.16, p.171.

38. **Quack H.** — In: Proc. of the VIII Int. Conf. in Cryogenic Engineering, 1980, p.343.
39. **Давыдов А.Б. и др.** — Авт. свид. СССР №361367 от 02.02.71. Бюл. ОИПОТЗ, 1973, №1, с. 98.
40. **Агапов Н. Н. и др.** — Сообщение ОИЯИ 8-90-304, Дубна, 1990.
41. **Агапов Н.Н. и др.** — Химическое и нефтяное машиностроение, 1991, №1, с.18.
42. **Агапов Н.Н. и др.** — Сообщение ОИЯИ P8-91-510, Дубна, 1991.
43. **Агапов Н.Н. и др.** — Сообщение ОИЯИ P8-91-509, Дубна, 1991.
44. **Агеев А.И. и др.** — В сб.: Труды XIII Межд. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Новосибирск: Наука, 1987, т.2., с. 332.
45. **Bartenev V.D., Shishov Yu.A.** — Cryogenics, 1991, v.31, p.985.
46. **Бартнев В.Д.** — Препринт ОИЯИ P8-94-37, Дубна, 1994.
47. **Бартнев В.Д., Шишов Ю.А.** — В сб.: Труды XI Всесоюзн. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Дубна, 1989, т.2, с.260.
48. **Бартнев В.Д., Дацков В.И., Шишов Ю. А.** — ПТЭ, 1984, №5, с.228.
49. **Соколов Е. Я., Бродянский В.М.** — Энергетические основы трансформации тепла и процессов охлаждения. М.: Энергоиздат, 1981.
50. **Дацков В.И.** — ПТЭ, 1981, №4, с.253.
51. **Дацков В. И.** — Труды 2-й Всесоюзн. конф. по техническому использованию сверхпроводимости. Л., 1984, т.2, с.250.
52. **Дацков В.И. и др.** — Сообщение ОИЯИ P8-87-604, Дубна, 1987.
53. **Гребенкина В.Г. и др.** — Объемные резисторы. Киев: Наукова думка, 1976, с.26.
54. **Нуклотрон — ускоритель релятивистских ядер** — Новости ОИЯИ, 1993, №1, с.1.
55. **Dubna — Nuclotron** — CERN COURIER, 1993, v.33, No.6, p.9.
56. **Dubna — Relativistic Deuterons in the NUCLOTRON** — CERN COURIER, 1994, v.34, No.6, p.21.
57. **Агеев А.И. и др.** — Препринт ОИЯИ 8-10790, Дубна, 1977.
58. **Давыдов А.Б., Кобулашвили А.Ш., Шерстюк А.Н.** — Расчет и конструирование турбодетандеров. М.: Машиностроение, 1987.
59. **Красникова О.К. и др.** — Химическое и нефтяное машиностроение, 1975, №5, с.17.
60. **Agapov N.N. et al.** — In: Proc. of the 16th Int. Engineering Conf., 1996, part 1, p.139.
61. **Agapov N.N. et al.** — IEEE Transactions on Magnetism, 1996, part 1, v.32, No.4, h.3113.
62. **Grassman P. and Kopp J.** — Kältetechnik, 1957, No.10, p.306.
63. **Baldin A.M. et al.** — IEEE Transactions on Magnetism, 1996, vol.32, No.4, p.2197.
64. **Baldin A.M. et al.** — Preprint JINR E9-96-343, Dubna, 1996.
65. **Агапов Н.Н. и др.** — Сообщение ОИЯИ P10-97-91, Дубна, 1997.
66. **Agapov et al.** — JINR Rapid Communications, 1998, No.3(89).

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

Непертурбативные эффекты в КХД при конечной температуре и плотности.

Робертс К.Д. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.3, с.537.

В работе показано применение уравнений Дайсона–Швингера в КХД. Большая часть обзора посвящена изложению современного подхода, основанного на решении уравнения Бете–Солпитера, воспроизводящего точные массовые формулы КХД, описывающие одновременно как легкие, так и тяжелые псевдоскалярные мезоны, и на вычислении электромагнитного формфактора пиона и сечения электророждения векторных мезонов при нулевой температуре и химическом потенциале. Эти исследования, которые объединяют такие разные явления, качественно указывают на важность импульсной зависимости одетых элементарных функций Швингера в КХД. Они обеспечивают прочную основу для обобщения рассматриваемого подхода на случай ненулевой температуры и химического потенциала. Существенно, что описаны формальные элементы используемого подхода и приведены четыре примера в качестве иллюстрации метода и его эффективности. С их помощью изучается граница фазового перехода для деконфайнмента и восстановления киральной симметрии, вычисляется набор термодинамических свойств кварк-глюонной плазмы и зависимость π - и ρ -мезонных наблюдаемых от T и μ . Аналогичным образом введены непрерывный параметр порядка для деконфайнмента, антикорреляция между зависимостью масс и констант распада от T и их же зависимостью от μ и (T, μ) -зависимость для малых и ультрарелятивистских значений термодинамических величин. Рассмотренные эффекты также ограничиваются импульсной зависимостью одетых элементарных функций Швингера.

Табл.5. Ил.41. Библиогр.:83.

УДК 539.171.1

Квазипотенциальный подход в формализме квантовой теории поля на нуль-плоскости. *Гарсеванишвили В.Р., Тавхелидзе А.Н.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.3, с.613.

В обзоре обсуждается ряд принципиальных проблем, касающихся описания процессов рассеяния с участием связанных состояний в рамках квазипотенциальной формулировки теории поля на нуль-плоскости. Основное внимание уделено построению упругих и неупругих амплитуд в терминах волновых функций и операторов. Подробно описано построение электромагнитных формфакторов связанных состояний, и получены представления для глубоко неупругих формфакторов. С помощью этих представлений изучены вопросы асимптотического поведения сечений и приближений, приводящих к кварк-партоновой картине.

Ил.9. Библиогр.: 49.

УДК 539.17

Диагностика сверхплотной материи в ультрарелятивистских столкновениях ядер. *Лохтин И.П., Сарычева Л.И., Снигирев А.М.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.3, с.660.

Исследование процессов рождения частиц в ядро-ядерных взаимодействиях при высоких энергиях представляется актуальной проблемой в связи с возможностью ге-

нерации сверхплотной материи в объемах, которые являются квазимакроскопическими по отношению к характерным адронным масштабам. Это открывает путь для проверки основных предсказаний статистической КХД: кваркового деконфайнмента и восстановления киральной симметрии для систем с достаточно высокой температурой и (или) плотностью барионного заряда. В обзоре рассматриваются способы регистрации и определения основных параметров сверхплотной адронной материи, образующейся в ультрарелятивистских столкновениях ядер. Во введении обсуждаются общие вопросы, связанные с кварк-адронным фазовым переходом и условиями его реализации (ранняя Вселенная, плотные нейтронные звезды, экзотические события в экспериментах с космическими лучами, ускорители ультрарелятивистских ядер). Второй раздел посвящен анализу различных подходов для описания эволюции ядро-ядерных соударений: микроскопических генераторов Монте-Карло и макроскопических гидродинамических моделей. В третьем разделе рассматриваются «мягкие» тесты, предлагаемые для экспериментального изучения свойств ядерной материи, находящейся в экстремальных условиях: спектры адронов и бозонная интерферометрия, спектры фотонов и дилептонов, рождение странных частиц.

Большое внимание уделяется «жестким» тестам, дающим информацию о ранних стадиях эволюции «горячей» сильновзаимодействующей материи: рождении тяжелых кваркониев (четвертый раздел) и адронных струй (пятый раздел). Приводятся возможные интерпретации особенностей, наблюдаемых в экспериментах по релятивистским столкновениям ядер на действующих ускорителях (AGS, SPS), по сравнению с соответствующими адрон-адронными соударениями: уширения импульсных спектров адронов, повышенного выхода дилептонов небольших масс, усиленного рождения странных частиц, подавления выхода Ψ -резонансов и др. Обсуждаются перспективы будущих экспериментов на коллайдерах RHIC и LHC. На основе модельных представлений анализируются эффекты, возникающие в результате прохождения жестких струй цветозаряженных партонов через плотную среду: некомпланарность пары струй, возбуждение динамических неустойчивостей в среде, столкновительные и радиационные потери энергии струи, подавление выхода пар струй и увеличение выхода моноструй. Определяются параметры среды, влияющие в первую очередь на изменение характеристик струй и возможность их экспериментального обнаружения. Обсуждаются также вопрос идентификации жестких КХД-струй в столкновениях тяжелых ионов на фоне больших статистических флуктуаций потока поперечной энергии, обусловленных большой множественностью вторичных частиц.

Табл.2. Ил 15. Библиогр.:228.

УДК 539.12.01

КХД при конечной температуре на решетке. *Лаерманн Э.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.3, с.720.

В работе рассматривается современное состояние решеточных исследований КХД при конечной температуре. После обозрения формулировки и численного моделирования КХД на решетке рассмотрено современное представление о критической температуре перехода от адронной фазы к фазе кварк-глюонной плазмы. Обсуждается состояние исследований природы этого перехода. Кроме того, представлены как анализ уравнения состояния в высокотемпературной фазе, так и вычисления спектра возбуждений при конечной температуре.

Табл.1. Ил.22. Библиогр.: 87.

УДК 621.384.63; 537.312.62

Криогенные технологии в сверхпроводящем ускорителе релятивистских ядер — нуклотроне. *Агапов Н.Н.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.3, с.760.

Система криогенного обеспечения нуклотрона основана на трех гелиевых рефрижераторах, каждый из которых имеет номинальную холодопроизводительность 1600 Вт при температуре 4,5 К. Рефрижераторы охлаждают кольцевой ускоритель с периметром 251,5 м и «холодной» массой около 80 тонн. Кольцо ускорителя состоит из 96 дипольных магнитов длиной 1,5 м и 64 квадрупольных линз длиной 0,45 м. Магнитное поле до 2,0 Тл формируется железным сердечником и обмоткой возбуждения из полого сверхпроводника, внутри которого течет жидкий гелий. Кроме того, имеется 28 корректирующих магнитов длиной 0,31 м с 3 или 4 типами обмоток в каждом, 12 охлаждаемых токовводов с током 6 кА, 234 токоввода с током 100 А для корректирующих обмоток, а также около 600 датчиков криогенной температуры.

Отмечено, что криогенная система нуклотрона представляет собой довольно дерзкий проект с большим количеством ранее не применявшихся технических идей и решений. Система описывается в таких основных терминах, как «быстроциклирующие сверхпроводящие магниты», «криостатирование потоком двухфазного гелия», «весьма короткое время охлаждения до рабочей температуры», «параллельное соединение всех магнитов», «парожидкостные турбодетандеры», «винтовой компрессор со степенью повышения давления более 25 в двух ступенях».

Дан обзор новых технических решений, впервые примененных в проекте криогенной системы нуклотрона.

Табл.6. Ил.25. Библиогр.: 66.

СОДЕРЖАНИЕ

Робертс К.Д.

**Непертурбативные эффекты в КХД
при конечной температуре и плотности 537**

Гарсеванишвили В.Р., Тавхелидзе А.Н.

**Квазипотенциальный подход в формализме
квантовой теории поля на нуль-плоскости 613**

Лохтин И.П., Сарычева Л.И., Снигирев А.М.

**Диагностика сверхплотной материи
в ультрарелятивистских столкновениях ядер 660**

Лаерманн Э.

КХД при конечной температуре на решетке 720

Агапов Н.Н.

**Криогенные технологии в сверхпроводящем ускорителе
релятивистских ядер — нуклотроне 760**

CONTENTS

Roberts C.D.

**Nonperturbative Effects in QCD
at Finite Temperature and Density 537**

Garsevanishvili V.R., Tavkhelidze A.N.

**Light-Front Formalism in the Quasipotential Approach
in Quantum Field Theory 613**

Lokhtin I.P., Sarycheva L.I., Snigirev A.M.

**Diagnostic of Super Dense Matter
in Ultrarelativistic Nuclei Collisions 660**

Laermann E.

Finite Temperature QCD on the Lattice 720

Agapov N.N.

**Cryogenic Technologies of the Nuclotron — Superconducting
Accelerator of Relativistic Nuclei 760**

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с одной стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркиваются двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\vec{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например, ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами: не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год

издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbine A.V.** — Comm. Math. Phys., 1988, v.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 23.12.98. Подписано в печать 26.04.99. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,5. Уч.-изд.л. 21,05.
Тираж 400. Заказ 51341. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1999. Том 30. Вып.3. 533—812.

NONPERTURBATIVE EFFECTS IN QCD AT FINITE TEMPERATURE AND DENSITY

C.D.Roberts

Physics Division 203, Argonne National Laboratory,
Argonne IL 60439-4843, USA

INTRODUCTION	538
ESSENTIAL ELEMENTS OF THE DSEs	539
Gluon Propagator	540
Quark Propagator	542
Confinement	545
Hadrons: Bound States	547
A QCD MASS FORMULA	548
Dynamical Chiral Symmetry Breaking and Goldstone's Theorem	549
Nonzero Quark Masses: A Mass Formula	550
AN ILLUSTRATIVE MODEL	552
Solving the Quark DSE	553
Solving the Pseudoscalar Meson BSE	556
ADDITIONAL PHENOMENOLOGICAL APPLICATIONS	562
Pion Electromagnetic Form Factor	563
Electroproduction of Vector Mesons	570
FINITE TEMPERATURE AND CHEMICAL POTENTIAL	575
Notes on Field Theory	579
Some Lattice Results	582
DSEs AT FINITE T AND μ	584
Quark DSE	584
Phase Transitions and Order Parameters	586
Illustration at $(T \neq 0, \mu = 0)$	588
Complementary study at $(T = 0, \mu \neq 0)$	592
Simultaneous study of $(T \neq 0, \mu \neq 0)$	597
π and ρ properties	603
CLOSING REMARKS	609
REFERENCES	611

LIGHT-FRONT FORMALISM
IN THE QUASI-POTENTIAL APPROACH
IN QUANTUM FIELD THEORY

V.R.Garsevanishvili, A.N.Tavkhelidze

Mathematical Institute of the Georgian Academy of Sciences,
M.Alexidze Str. 1, 380093 Tbilisi, Georgia
E-mail: garse@rmi.acnet.ge
E-mail: aleko@presid.acnet.ge

INTRODUCTION	613
LIGHT-FRONT FORMULATION OF BOUND STATE AND SCATTERING PROBLEMS	615
Equation for the Two-Body Bound State Wave Function	615
Equation for the Scattering Amplitude and Relation to the	
Equation in the Infinite Momentum Frame	618
Equation for the Many-Body Bound State Wave Function	620
Spectral and Projective Properties of the	
Two-Time Green Functions	623
RELATIVISTIC ELASTIC FORM FACTORS AND SCATTERING AMPLITUDES FOR COMPOSITE SYSTEMS	630
Formulation of the Method	630
Elastic Form Factor in the Impulse Approximation	633
Relativistic Form Factor for the Many-Body System	634
Scattering of Relativistic Composite Systems	637
Constituent Interchange Mechanism	640
DEEP INELASTIC FORM FACTORS OF COMPOSITE SYSTEMS	641
Construction of the Tensor $W_{\mu\nu}$	642
Lowest Order in the Electromagnetic Interaction	645
Model Parametrisation of the Wave Function	648
INCLUSIVE PROCESSES IN LIGHT-FRONT FORMALISM	649
Some Preliminary Relations	649
Production of Leading Hadrons with Large Transverse	
Momenta	650
Production of Hadron Systems with Large Transverse	
Momenta	653
REFERENCES	657

ДИАГНОСТИКА СВЕРХПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР

И.П.Лохтин, Л.И.Сарычева, А.М.Снигирев

Научно-исследовательский институт ядерной физики, МГУ, Москва

ВВЕДЕНИЕ	661
МОДЕЛИ ЯДРО-ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ	665
Микроскопические модели	665
Макроскопические модели	671
”МЯГКИЕ” ТЕСТЫ ПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СОУДАРЕНИЯХ ЯДЕР	676
Спектры адронов	676
Спектры лептонов и фотонов	684
Рождение странных частиц	687
”ЖЕСТКИЕ” ТЕСТЫ ПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СОУДАРЕНИЯХ ЯДЕР.	
I. ТЯЖЕЛЫЕ КВАРКОНИИ	689
Феноменология рождения кваркониюв в ядерных столкновениях	689
Экспериментальные перспективы	694
”ЖЕСТКИЕ” ТЕСТЫ ПЛОТНОЙ МАТЕРИИ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ СОУДАРЕНИЯХ ЯДЕР.	
II. АДРОННЫЕ СТРУИ	695
Перерасcеяние жестких партонных струй в плотной материи	695
Модельный учет потерь энергии жесткой партонной струи в расширяющейся плотной материи	700
Природа адронных струй в ультрарелятивистских соударениях ядер и экспериментальные перспективы	705
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	710
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	712

FINITE TEMPERATURE QCD ON THE LATTICE*

E.Laermann

Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Postfach 100 131,
33501 Bielefeld, Germany

INTRODUCTION	720
LATTICE SIMULATIONS	721
CRITICAL TEMPERATURE	730
PHASE TRANSITION	735
Staggered $N_F = 2$: Critical Behavior.	736
$U_A(1)$ Restoration.	740
Wilson Fermions $N_F = 2$.	743
More than 2 Flavors.	745
EQUATION OF STATE	745
SCREENING LENGTHS AND MASSES	750
CONCLUSIONS	756
ACKNOWLEDGEMENTS	756
REFERENCES	757

*Lectures presented at the "Research Workshop on Deconfinement at Finite Temperature and Density", Dubna, Russia, October 1–29, 1997

УДК 621.384.63.537.312.62

КРИОГЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ УСКОРИТЕЛЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЯДЕР — НУКЛОТРОНЕ

Н.Н.Аганов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	761
ОСОБЕННОСТИ КРИОСТАТИРОВАНИЯ ЖИДКИМ ГЕЛИЕМ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ МАГНИТОВ НУКЛОТРОНА	763
КРИОГЕННАЯ СИСТЕМА КОЛЬЦА НУКЛОТРОНА	767
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВНЕШНЕЙ КРИОГЕННОЙ СИСТЕМЫ	782
ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КРИОГЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАБОТЕ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ	791
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	801
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	802