JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES AND ATOMIC NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.30

PART 5

Six issues per year

DUBNA 1999

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 30

ВЫПУСК 5

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1999

Редакторы Е.К.Аксенова, тел. (09621) 65-165
Э.В.Ивашкевич

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 539.12.01, 530.145

ВАРИАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов[*]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Светлой памяти
Иосифа Норайровича Сисакяна —
замечательного ученого-физика
и верного друга

Представлен обзор полученных в последние годы результатов по применению непертурбативных вариационных разложений в квантовой хромодинамике. Изложение начинается с примеров, которые позволяют понять метод построения вариационных рядов в квантовой теории поля и способы управления свойствами их сходимости с помощью специальных параметров. Затем формулируется вариационная теория возмущений для квантовой хромодинамики, строится непертурбативное разложение по новому малому параметру и рассматриваются различные феноменологические приложения этого подхода.

A review of results obtained in the last years on using variational expansions in quantum chromodynamics is presented. We begin our explanation from elementary examples, which will allow to fall into the course of deal, understand, what is a variational series, and as possible to control of characteristics of their convergence. Then variational perturbation theory is formulated in quantum chromodynamics, a nonperturbative expansion is constructed by using a new small parameter and various phenomenological applications are discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическим фундаментом квантовой теории поля, позволяющим производить расчеты, используя лишь параметры лагранжиана, является теория возмущений. Вместе с процедурой перенормировки ее применение позволило достичь значительных результатов в квантовой электродинамике, в теории электрослабых взаимодействий и при описании пертурбативной области квантовой хромодинамики. Однако специфика квантовой теории поля такова, что рассчитывать на достаточно полное изучение структуры квантово-полевой модели, ограничиваясь лишь рамками теории возмущений, не следует даже в

[*]Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия

теориях с малым значением константы связи. В особенности это относится к современной теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике (КХД). В этом случае непертурбативные эффекты играют решающую роль как в плане ответа на принципиальные вопросы, например, объяснение конфайнмента кварков и глюонов, так и для описания феноменологии адронов и соотнесения теоретических результатов с опытными данными.

Разработке непертурбативных методов в квантовой теории поля уделяется большое внимание. Спектр таких попыток весьма широк, и в литературе можно встретить самые разнообразные подходы к проблеме выхода за рамки теории возмущений. Цель данной работы состоит в обзоре полученных в последние годы результатов, связанных с применением так называемых вариационных или "плавающих" разложений в квантовой хромодинамике. Основная идея, приводящая к возникновению вариационных рядов, достаточна проста. Для того чтобы ее пояснить, напомним вначале, каким образом строится пертурбативное разложение.

В обычном варианте теории возмущений используется разбиение полного действия, соответствующее некоторой физической системе, на свободную часть и часть, которая описывает взаимодействие. Последняя рассматривается как возмущение, а входящая в нее константа связи — как малый параметр разложения. Такое рассмотрение, как правило, приводит к асимптотическим рядам, которые, хотя и не относятся к числу "хороших" рядов, тем не менее широко используются в физике и позволяют извлекать полезную информацию об изучаемой системе в области слабой связи. С ростом константы взаимодействия разложение в ряд теории возмущений становится все менее и менее применимым. Причина этого понятна и состоит в том, что теперь рассмотрение действия взаимодействия в качестве возмущения свободной системы не является более адекватным, так как рассматриваемая физическая система далека по своим свойствам от свободной. В этом случае следует провести иное разбиение полного действия так, чтобы новое "действие взаимодействия" допускало трактовку как возмущения не только при малых значениях константы связи, но и для более широкого ее диапазона. При этом, конечно, следует также позаботиться о том, чтобы такая процедура, подобно обычной теории возмущений, обеспечивала возможность вычисления поправок.

Каким же образом можно отыскать такой функционал, который с бóльшим основанием, чем обычное действие взаимодействия, можно было бы использовать как возмущение? Одна из возможностей, которая реализуется в методе вариационной теории возмущений (ВТВ), состоит в "зондировании системы" с помощью функционала вариационного типа, при изучении ее отклика на изменение параметров "зонда". При этом оказывается, что удобно использовать формализм функционального интегрирования, который в теории поля широко применяется как при рассмотрении общих вопросов [1, 2], так и для нахождения различных аппроксимаций [3–6]. Несмотря на фигурирующее в названии подхода слово “возмущение”, метод ВТВ является непертурбативным, так как, по существу, не опирается на использование константы связи в качестве малого параметра разложения. В методе ВТВ для аппроксимации рассматриваемой величины удается построить отличные от обычной теории возмущений разложения, позволяющие изучать квантовые системы не только в области слабой связи, но и далеко за ее пределами (см. посвященные этому вопросу обзоры [7, 8], в которых в основном рассматривались квантово-механические системы и скалярные модели теории поля). Возможность построения отличных от пертурбативных разложений с иными свойствами сходимостей была отмечена в работе [9]. Случай квантово-механического ангармонического осциллятора рассматривался в работах [10, 11]. Использовать метод функционального интегрирования для описания квантовых систем на основе разложений подобного типа было предложено в [12–14]. Метод вариационного зондирования системы, который основывается на формализме функционального интеграла и допускает естественное обобщение на случай квантовой теории поля, был предложен в [15]. Разработка этого подхода, выполненная в работах [16, 17], а также в последующем в [18–21] и в [22–26], продемонстрировала эффективность метода ВТВ для изучения квантово-полевых моделей.

В настоящее время существуют различные варианты вариационных методов (см., например, ранние работы [27, 28], а также [29–32]), позволяющие выполнять непертурбативные вычисления. К их числу можно отнести и метод гауссовского эффективного потенциала [33–36], который позволяет оценить эффективный потенциал – важную энергетическую характеристику теоретико-полевой модели [37] — вне рамок обычно используемого петлевого разложения. Применение метода ВТВ позволяет получить гауссовский эффективный потенциал уже в первом нетривиальном порядке вариационного разложения для различных способов выбора пробного функционала [21]. Возможность выполнения непертурбативного расчета эффективного потенциала позволяет изучать такие вопросы, как, например, наличие фазовых переходов в теории [38–40], проблема перенормировки вне рамок теории возмущений и тривиальность φ^4-модели в четырехмерии [41–44].

Одна из серьезных проблем многих вариационных методов связана с трудностью оценки точности и устойчивости результатов, получаемых с помощью вариационной процедуры. Причина состоит в том, что далеко не всегда формулировка метода содержит в себе алгоритм вычисления необходимых для этого поправок. В результате затруднен ответ на вопрос, в какой мере так называемый “основной вклад”, найденный вариационным путем, адекватен изучаемому объекту, в особенности, если такой объект не связан непосредственно с некой энергетической характеристикой, и какова область применимости полученных выражений. В этом отношении в методе ВТВ с самого начала определен алгоритм вычисления поправок, что позволяет исследовать влияние поправок к основному вкладу. Более того, ряд ВТВ не является жесткой, раз и навсегда заданной конструкцией. Специальные параметры, характеризующие вариационный "зонд", позволяют управлять свойствами сходимости ВТВ-разложения. Для рядов такого типа, на свойства сходимости которых можно влиять с помощью варьирования специальных параметров, используется термин "вариационный или плавающий ряд". В отличие от характерных для теории возмущений асимптотических разложений ВТВ-подход позволяет в ряде случаев построить аппроксимирующие ряды, имеющие конечную область сходимости [16, 17, 19, 22]. Существует также такая интересная возможность, как построение рядов Лейбница, которые позволяют производить двусторонние оценки рассматриваемой величины, используя уже первые члены ряда. При этом управляющие параметры позволяют такие оценки оптимизировать [7].

Модернизации ординарного пертурбативного разложения, когда в качестве возмущения принимается исходный потенциал взаимодействия, уделялось большое внимание. Так, например, при рассмотрении систем с сингулярными потенциалами обычная теория возмущений оказывается плохо приспособленной для адекватного ее описания [45]. Это связано с тем, что асимптотика свободных волновых функций существенным образом отличается от асимптотики точных решений. Ситуация может быть улучшена, если точно учесть сингулярную часть потенциала и строить пертурбативное разложение по его регулярной части [45]. В числе подходов, позволяющих выходить за пертурбативные рамки, отметим также метод линейного δ-разложения [35, 46, 47], метод самоподобных аппроксимаций [48] и непертурбативный подход, рассматриваемый в работах [49]. Важной чертой обсуждаемого здесь метода ВТВ является тот факт, что он естественным образом сочетает процедуру оптимизации и регулярный способ вычисления поправок.

В данном обзоре рассматривается метод вариационных разложений и его применение к задачам КХД. В этом случае, основываясь на идее метода ВТВ, удается сконструировать такой параметр разложения, который оказывается меньше единицы при любых значениях исходной константы связи [50]. Вначале поясним способ построения такого малого параметра разложения, используя простую модель, которая позволит нам наиболее доступно изложить идею метода. Покажем, что новое разложение не только позволяет существенно "продлить жизнь" теории возмущений и продвинуться при сохранении хорошего уровня аппроксимации в сторону больших значений константы связи, но и дает возможность анализировать предел сильной связи. В случае КХД этот метод позволяет с единых позиций рассматривать как традиционно пертурбативную область, так и выходить далеко за ее пределы [51, 52].

При ренормгрупповом ресуммировании пертурбативного разложения возникает инвариантный заряд, который обладает нефизическими особенностями типа призрачного полюса в однопетлевом приближении. Последующие поправки этой трудности не снимают, а приводят лишь к дополнительным нефизическим разрезам в комплексной Q^2-плоскости. Возможное решение этой проблемы в рамках пертурбативного подхода, состоящее в дополнительном наложении вытекающего из представления Челлена — Лемана требования аналитичности, было предложено в [53], а в контексте метода ренормализационной группы — в работе [54]. Для КХД аналитический подход развивался в работах [55, 56], в которых были найдены новые интересные особенности такого рассмотрения.

Важной чертой подхода ВТВ является тот факт, что в его рамках удается обеспечить правильные аналитические свойства бегущего параметра разложения, которые отражают общие принципы локальной квантовой теории поля [1, 57, 58]. Сохранение таких аналитических свойств позволяет, в частности, определить самосогласованным образом бегущий параметр во времениподобной области [59] и дать непротиворечивое описание инклюзивного распада τ-лептона [60] (см. также [61–64]). Наличие инфракрасной фиксированной точки, соответствующей ВТВ-параметру разложения, хорошо согласуется с низкоэнергетическими, так называемыми "смиринг" экспериментальными данными для процесса e^+e^--аннигиляции в адроны [65], которые могут быть получены при применении специальной процедуры "сглаживания" резонансов. Обобщение на массивный случай с использованием схемы перенормировки с вычитанием в некоторой евклидовой точке рассмотрено в работах [66–68]. Помимо отмеченных вопросов будет дан также обзор других приложений метода. Мы рассмотрим, в частности, возможность вычисления ренормалонного вклада и его роль при описании полулептонного инклюзивного τ-распада [69] (см. также [70, 71]) и применение вариационного подхода для описания спектра масс тяжелых кваркониев на основе метода правил сумм квантовой хромодинамики [72].

План изложения таков. В разд. 2 рассматриваются основные идеи, лежащие в основе метода вариационной теории возмущений. На простом примере показано, каким образом строится новый малый параметр разложения и как это разложение работает в непертурбативной области больших значений константы связи. Затем метод a-разложения формулируется для КХД, рассматривается вопрос его соответствия с представлениями, возникающими в потенциальной модели кваркового конфайнмента, и исследуется проблема стабильности получаемых результатов. Ряд феноменологических приложений метода, таких, как процесс e^+e^--аннигиляции в адроны при низких энергиях, инклюзивный распад τ-лептона и вопрос описания спектра масс тяжелых кваркониев, рассматривается в разделах 3–6. Полученные результаты обсуждаются в заключении, а в приложения вынесен поясняющий материал.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ: ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Для построения вариационных разложений в квантовой теории поля удобно использовать формализм континуального (функционального) интегрирования. Этот аппарат возник в результате обобщения предложенной в 1948 г. Р. Фейнманом в работе [73] формулировки квантовой механики на языке интегралов по траекториям*. Развитие функциональной формулировки квантовой теории поля началось с работ Н.Н. Боголюбова [76], П.Т. Мэтьюса и А. Салама [77], И.М. Гельфанда и Р.А. Минлоса [78], И.М. Халатникова [79] и Е.С. Фрадкина [80]. Сегодня аппарат функционального интегрирования является одним из активно используемых методов квантовой теории поля. Он оказался эффективным не только при решении таких проблем, как квантование калибровочных теорий [81], но также и при разработке различных приближенных методов, позволяющих выполнять в том числе непертурбативный анализ моделей теории поля. Так, на его основе могут быть исследованы различные асимптотические режимы в квантово-полевых моделях, например, поведение функций Грина в инфракрасной области [3], развит метод эйконального приближения [5, 6, 82] и гауссовского эффективного потенциала [33, 34, 36].

В формализме континуального интеграла проведение вычислений в квантовой теории поля основывается на гауссовских функциональных квадратурах вида

$$\int D\varphi \quad \exp \quad \left\{ - \left[\frac{1}{2} < \varphi \hat{K} \varphi > + < \varphi J > \right] \right\} = \tag{2.1}$$

$$= \quad \left[\det \frac{\hat{K}}{-\partial^2 + m^2} \right]^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} < J \hat{K}^{-1} J > \right] .$$

Такие гауссовские интегралы используются при построении рядов теории возмущений, в квазиклассическом анализе и при оценках функциональных интегралов с помощью метода перевала. Гауссовская квадратура (2.1) может быть положена в основу формализма функционального интегрирования в квантовой теории поля. Метод вариационной теории возмущений также базируется на гауссовских функциональных квадратурах типа (2.1).

Построение вариационных разложений. Рассмотрим для конкретности φ^4-модель в евклидовом пространстве. Построим ряд ВТВ для 2ν-точечной функции Грина

$$G_{2\nu} = \int D\varphi \, \{\varphi^{2\nu}\} \exp \left(-S[\varphi] \right) \, , \tag{2.2}$$

*Подробное изложение метода интегрирования по путям можно найти в [74, 75].

где

$$\{\varphi^{2\nu}\} = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2\nu})\,,$$

а функционал действия имеет вид

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= S_0[\varphi] + \frac{m^2}{2}\,S_2[\varphi] + \lambda\,S_4[\varphi]\,, \\ S_0[\varphi] &= \frac{1}{2}\int dx\,(\partial\varphi)^2\,, \qquad S_p[\varphi] = \int dx\,\varphi^p\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Мера интегрирования в (2.2) нормирована так, что выполняется

$$\int D\varphi\exp\left(-S_0[\varphi] - \frac{m^2}{2}\,S_2[\varphi]\right) = 1\,. \tag{2.4}$$

Запишем ВТВ-разложение функции Грина (2.2), вводя вариационный функционал $\tilde{S}[\varphi]$, в виде

$$G_{2\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{2\nu,n}\,, \tag{2.5}$$

где элементы ВТВ-ряда (2.5) представимы в виде функционального интеграла

$$\begin{aligned} G_{2\nu,n} &= \frac{(-1)^n}{n!}\int D\varphi\,\{\varphi^{2\nu}\}\left(\lambda\,S_4[\varphi] - \tilde{S}[\varphi]\right)^n \times \\ &\times\ \exp\left(-S_0[\varphi] - \frac{m^2}{2}\,S_2[\varphi] - \tilde{S}[\varphi]\right)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Исходная функция Грина (2.2) и, следовательно, полная сумма ряда (2.5) не зависят от вида вариационного "зонда" $\tilde{S}[\varphi]$. Этот функционал может быть в достаточной мере произвольным, и его вид ограничен лишь требованием положительной определенности эффективного действия в показателе экспоненты в (2.6). Однако "принцип вычисляемости" существенно сужает произвол в выборе вариационной добавки $\tilde{S}[\varphi]$. Фактически мы должны потребовать, чтобы функциональный интеграл (2.6) был гауссовским или же сводился к нему с помощью некоторого преобразования так, чтобы в конечном итоге было возможно применение определения (2.1). Таким образом, возможны не только вариационные добавки с квадратичными по полям функционалами, но и, например, функционалы, допускающие применение гауссовской квадратуры после фурье-преобразования

$$F\,(A[\varphi]) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\, F(p)\, \exp\,[\,\pm i\,(\,A[\varphi] - p)\; x\,]\;, \tag{2.7}$$

где $A[\varphi]$ — квадратичный по полям функционал.

Выберем ВТВ-функционал $\tilde{S}[\varphi]$ в виде суммы гармонического, квадратичного по полям слагаемого и функционала ангармонического типа, допускающего понижение степени с помощью преобразования (2.7):

$$\tilde{S}[\varphi] \;=\; \frac{M^2}{2}\, S_2[\varphi] + \theta^2\, S_2^2[\varphi]\,. \tag{2.8}$$

Вариационные параметры M и θ в (2.8) фиксируются в последующем на основании той или иной оптимизационной процедуры. Переход к гауссовской квадратуре осуществляется путем преобразования

$$\exp\,\left(-\theta^2 S_2^2[\varphi]\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}}\, \exp\left\{-\frac{u^2}{4} \pm i\,u\,\theta\, S_2[\varphi]\right\}\,. \tag{2.9}$$

В результате ВТВ-ряд для рассматриваемой функции Грина (2.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} G_{2\nu,n} \;\; = \;\; & \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{l!\,k!\,(n-k-l)!} \times \\ \times \;\; & \int D\varphi\{\varphi^{2\nu}\}\,(-\lambda S_4[\varphi])^k\;\theta^{2l}\,(M^2-m^2)^{n-k-l} \left(\frac{S_2[\varphi]}{2}\right)^{n+l-k} \times \\ \times \;\; & \exp\left\{-\left(S_0[\varphi] + \frac{m^2}{2}\,S_2[\varphi] + \theta^2 S_2^2[\varphi]\right)\right\}\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Удобно представить выражение $(\,S_2[\varphi]\,/\,2\,)^{n+l-k}$ в виде операции дифференцирования по параметру M^2, заменив

$$\left(\frac{S_2[\varphi]}{2}\right)^{n+l-k} \longrightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial\, M^2}\right)^{n+l-k}\,. \tag{2.11}$$

Тогда в предэкспоненте в (2.10) помимо $\{\varphi^{2\nu}\}$ останется обычный фактор $(-\lambda\, S_4[\varphi]\,)^k$, возникающий в теории возмущений и генерирующий в диаграммах обычные вершины. Пропагатор, ввиду изменения квадратичной формы в экспоненте, сводящийся к изменению массового параметра на $\chi^2 = M^2 + \mathrm{i}u\theta$, модифицируется, и выражение (2.10) принимает вид

$$G_{2\nu,n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{l!\,(n-k-l)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \times$$

$$\times \quad \theta^{2l} \, \left(M^2 - m^2\right)^{n-k-l} \left(-\frac{\partial}{\partial M^2}\right)^{n+l-k} \tilde{g}_{2\nu}^{(k)}(\chi^2)\,, \qquad (2.12)$$

где

$$\tilde{g}_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2) = \frac{1}{k!} \int D\varphi \{\varphi^{2\nu}\} \left(-\lambda\, S_4[\varphi]\,\right)^k \times$$

$$\times \quad \exp\left\{-\left[S_0[\varphi] + \frac{\chi^2}{2}\, S_2[\varphi]\right]\right\}. \qquad (2.13)$$

Используя (2.1), выражение (2.13) перепишем в виде

$$\tilde{g}_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2) = \det\left[\frac{-\partial^2 + \chi^2}{-\partial^2 + m^2}\right]^{-1/2} g_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2)\,, \qquad (2.14)$$

где $g_{2\nu,n}^{(k)}(\chi^2)$ представляется как набор диаграмм k-го порядка с модифицированным пропагатором

$$\Delta(p,\chi^2) = \frac{1}{p^2 + \chi^2}\,. \qquad (2.15)$$

Таким образом, для построения N-го порядка ВТВ-разложения могут быть использованы диаграммы теории возмущений до N-го порядка включительно с модифицированными пропагаторами, а в более общем случае — и с вершинами. При этом структура ряда ВТВ существенно иная, чем в случае теории возмущений. Возможность применения стандартной диаграммной техники, обусловленная способом построения ВТВ-разложений, важна с технической точки зрения, так как позволяет использовать результаты, полученные в теории возмущений.

Непертурбативное разложение по малому параметру. Для того чтобы продемонстрировать ключевые моменты введения малого непертурбативного параметра разложения, рассмотрим простой пример. Определим “вакуумный функционал” * нульмерной φ^4-теории

$$W(g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-S[x]\right) \qquad (2.16)$$

*Рассматривая этот простой пример, мы постоянно имеем в виду полевую модель и поэтому считаем удобным использовать соответствующую терминологию.

с “функционалом действия” $S[x]$, записанным в виде суммы свободного действия $S_0[x]$ и действия взаимодействия $S_I[x]$:

$$S[x] \,=\, S_0[x] \,+\, S_I[x] \,=\, x^2 \,+\, g\, x^4 \,. \tag{2.17}$$

Так же, как и ранее, будем ориентироваться на гауссовские квадратуры вида

$$\int dx\, P(x)\, \exp\,(\,-\,a\, x^2\,)\,, \tag{2.18}$$

где $P(x)$ — некоторый полином.

Стандартный способ состоит в разложении $\exp(-S[x])$ по степеням константы связи g. При этом, естественно, используются гауссовские интегралы (2.18) и возникает обычный ряд теории возмущений

$$W(g) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \tag{2.19}$$

с коэффициентами

$$\omega_k \,=\, \frac{1}{k!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,(\,-g\, x^4\,)^k\, \exp\,(\,-\, S_0[x]\,)\,. \tag{2.20}$$

Асимптотический характер разложения (2.19) приводит к тому, что функция $W(g)$ не может быть однозначно восстановлена по ряду (2.19), если иметь дело только лишь с рядом (2.19) и не принимать в расчет какую-либо дополнительную информацию о функции $W(g)$. Так, например, тот же ряд (2.19) будет иметь и функция $W(g) + \exp(-1/g)$, обладающая совершенно иным поведением в непертурбативной области. Конечно, в рассматриваемом простейшем примере нетрудно, используя интегральное представление (2.16), отыскать дополнительные условия, позволяющие корректно сформулировать задачу суммирования пертурбативного разложения. Напомним, однако, что в случае теории поля на таком пути встречаются серьезные трудности, когда дополнительная информация, необходимая для однозначного суммирования ряда теории возмущений, может быть найдена лишь для некоторых простых одномерных и двумерных моделей. В определенном смысле задача получения такой информации во многих отношениях эквивалентна решению проблемы сильной связи. Вместе с тем использование гауссовских интегралов (2.18) предоставляет существенно больше возможностей, чем просто получение ряда теории возмущений. Покажем, каким образом можно построить непертурбативный малый параметр разложения, опираясь при этом, как и в случае теории возмущений, на гауссовские квадратуры.

Перепишем исходное действие (2.17) в виде

$$S[x] \,=\, S_0'[x] \,+\, S_I'[x]\,, \tag{2.21}$$

где

$$S_0'[x] \,=\, \zeta^{-1}\, x^2 \tag{2.22}$$

и

$$S_I'[x] \,=\, g\, x^4 \,-\, (\,\zeta^{-1} \,-\, 1\,)\, x^2 \;. \tag{2.23}$$

Полное действие и исходная величина $W(g)$ не зависят от введенного параметра ζ, но при аппроксимации $W(g)$ конечным числом слагаемых ВТВ-ряда зависимость появляется. Можно, однако, воспользоваться свободой в выборе ζ для построения нового параметра разложения. Мы также исследуем вопрос, в какой мере новое разложение позволяет продвинуться в непертурбативную область.

С самого начала ясно, что если оптимальный параметр ζ меньше единицы, то при представлении действия в виде (2.21) с составляющими (2.22) и (2.23), по крайней мере, имеется возможность улучшить пертурбативное разложение, так как новое действие взаимодействия (2.23) может быть рассмотрено как возмущение для более широкого набора конфигураций полей. Вместе с тем понятно, что при фиксированном вариационном параметре ВТВ-ряд по-прежнему останется асимптотическим, хотя по сравнению с теорией возмущений и позволит аппроксимировать $W(g)$ при больших значениях константы связи. Мы уже упоминали, что здесь важную роль играет принцип индуцированной сходимости, позволяющий существенным образом расширить интервал возможных значений константы связи.

Разложение по действию взаимодействия (2.23) приводит к ряду ВТВ для исходной величины (2.16):

$$W(g) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} W_n\,, \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned} W_n \quad &= \quad \frac{1}{n!} \int dx\, (\,-\,S_I'[x]\,)^N\, \exp\left(-S_0'[x]\right) = \qquad (2.25)\\ &= \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!} \int dx (-g\, x^4)^k \left[(\zeta^{-1}-1)x^2\right]^{n-k} \exp\left(-S_0'[x]\right). \end{aligned}$$

Как и ранее, удобно ввести вспомогательный параметр κ, записав свободное действие как

$$S_0'[x] \,=\, \zeta^{-1}\, x^2 \Rightarrow \left[\,1 \,+\, \kappa\,(\,\zeta^{-1} \,-\, 1\,)\right]\, x^2 \tag{2.26}$$

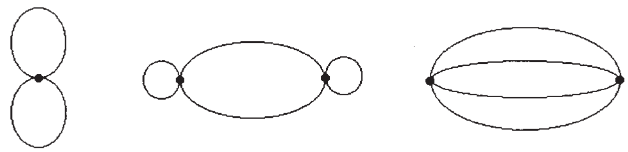

Рис. 1. Диаграммы низших порядков, иллюстрирующие соотношение (2.31) между числом внутренних линий и вершин

и положив $\kappa = 1$ в конце всех вычислений. В этом случае любая степень выражения $[(\zeta^{-1} - 1)x^2]$ в (2.25) может быть получена при помощи соответствующего числа дифференцирований по параметру κ. После чего оставшееся в предэкспоненте (2.25) выражение $(-g\,x^4)^k$ приводит к стандартным диаграммам, но с модифицированным пропагатором

$$\Delta = \frac{1}{1 + \kappa\,(\,\zeta^{-1} - 1\,)}\,. \tag{2.27}$$

При $\kappa = 1$ пропагатор $\Delta = \zeta$.

В результате члены ВТВ-ряда могут быть записаны в виде

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \left(-\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^{n-k} \omega_k\,, \tag{2.28}$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{k!} \int dx\,(\,-g\,x^4\,)^k \exp\left(\,-\,x\,\Delta^{-1}\,x\,\right) \tag{2.29}$$

вычисляются с помощью обычной диаграммной техники с пропагатором (2.27).

Рассмотрим структуру выражения (2.28). Прежде всего отметим, что дифференцирование по параметру κ приводит к появлению дополнительного фактора $(\,1 - \zeta\,)$. В самом деле, из (2.27) следует, что

$$\frac{1}{m!} \left(-\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^m \Delta(\kappa = 1) = (\,1 - \zeta\,)^m\,\Delta(\kappa = 1)\,. \tag{2.30}$$

Также заметим, что в рассматриваемом случае для любой диаграммы с числом внутренних линий I и числом вершин V выполняется соотношение *

$$I = 2\,V\,. \tag{2.31}$$

В низших порядках соотношение (2.31) иллюстрируется рис. 1.

*Мы рассматриваем вакуумный функционал, и, следовательно, все интересующие нас диаграммы являются вакуумными.

Внутренняя линия диаграммы соответствует пропагатору и, следовательно, приводит к фактору ζ, вершина дает фактор g, а одно дифференцирование по κ — множитель $(1-\zeta)$. Таким образом, схематически можем записать

$$W_n \sim (g\,\zeta^2)^n + (1-\zeta)\,(g\,\zeta^2)^{n-1} + \cdots + (1-\zeta)^{n-1}\,(g\,\zeta^2) + (1-\zeta)^n\,. \quad (2.32)$$

Из выражения (2.32) видно, что если выбрать $(1-\zeta)$ пропорциональным $(g\,\zeta^2)$, то выражение W_n будет содержать общий фактор $a^n \equiv (1-\zeta)^n$, и $a \equiv (1-\zeta)$ будет служить параметром разложения в ряд вариационной теории возмущений. Итак, требование существования единого параметра разложения диктует следующее уравнение для ζ:

$$1 - \zeta = C\,g\,\zeta^2 \quad (2.33)$$

с некоторой положительной константой C. Откуда для параметра ВТВ-разложения a получаем уравнение, связывающее его с исходной константой связи:

$$g = \frac{1}{C}\,\frac{a}{(1-a)^2}\,. \quad (2.34)$$

Нетрудно видеть из уравнения (2.34), что для любых положительных значений исходной константы связи g новый параметр разложения a удовлетворяет условию

$$0 \le a < 1\,. \quad (2.35)$$

Оставшийся произвол сосредоточен в параметре C, который может быть определен на основе той или иной процедуры оптимизации, которые описаны в [7].

Рассмотрим здесь еще один способ оптимизации, в котором предполагается, что может быть использована некоторая информация "экспериментального" характера. Именно такой способ удобен в квантовой хромодинамике, в которой можно применить "нормировку", используя экспериментальную информацию. Предположим, что мы знаем "экспериментальное" значение функции $W(g)$ в некоторой точке нормировки g_0:

$$W(g_0) = W_{\rm exp}\,. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36), или в более общем случае минимизация модуля соответствующей разности, позволяет определить вариационный параметр и вычислить величину $W(g)$ для всех других значений константы связи g. Оказывается, что погрешность такой аппроксимации не хуже нескольких процентов для всего интервала изменения константы связи g уже для низших порядков a-разложения. На рис.2 приведены графики относительной погрешности получаемого приближения

$$D(g) = \left|\frac{W^{(N)}(g) - W_{\rm exact}(g)}{W_{\rm exact}(g)}\right|$$

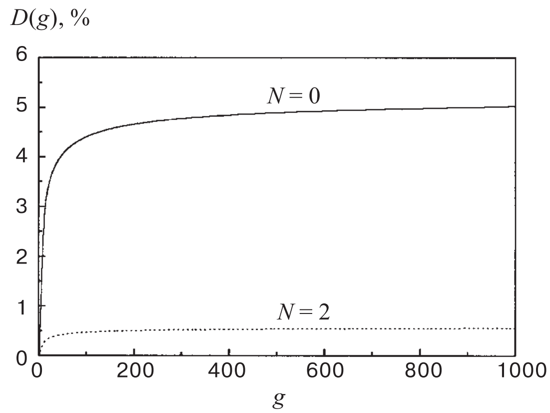

Рис. 2. Относительная погрешность аппроксимации величины (2.16) в низших порядках вариационной теории возмущений

для малых значений порядка аппроксимации $N = 0$ и $N = 2$. В качестве "экспериментального" выбрано значение $W(g)$ в точке $g_0 = 1$.

Подчеркнем, что предложенный метод не только позволил расширить окрестность малых значений константы связи, в которой аппроксимации дают разумные результаты, и тем самым улучшить теорию возмущений, но и продвинуться в существенно непертурбативную область режима сильной связи, когда $g \to \infty$. Причина этого важного обстоятельства связана с индуцированной сходимостью ряда. В этом случае вариационные параметры подстраиваются от порядка к порядку в соответствии с некоторым вариационным принципом, что, несмотря на применяемую гармоническую вариационную процедуру, обеспечивает сходимость ряда. В табл. 1 продемонстрирован факт индуцированной сходимости ряда вариационной теории возмущений для рассмотренного выше случая. Впервые такая эмпирическая сходимость была отмечена в работах [83, 84]. Последовательное рассмотрение этого вопроса и дополнительные ссылки можно найти в [85]. Для случая ангармонического осциллятора также удается провести строгое доказательство индуцированной сходимости вариационного разложения [86, 87].

В табл. 1 приведены результаты расчетов относительной погрешности аппроксимации

$$D(g) = \left| \frac{W_{\rm theor}(g)}{W_{\rm exp}(g)} - 1 \right|$$

для значений константы связи $g = 10$ и 1000, полученные при использовании "экспериментальной" информации при $g_0 = 1$. Параметр $C(N)$ для нечетных N находился из условия минимума $\min \left| W^{(N)}(g_0) - W_{\rm exp} \right|$. Для четных N существует корень уравнения $W^{(N)}(g_0) = W_{\rm exp}$.

Таблица 1. Иллюстрация индуцированной сходимости ряда ВТВ. Приведена относительная погрешность ВТВ-аппроксимации $D(g)$ для различных порядков N при значениях константы связи $g = 10$ и 1000

N	C	D, %	
		$g = 10$	$g = 1000$
0	1,14	2,76	5,01
1	2,64	4,83	6,52
2	3,56	0,26	0,56
3	5,46	0,73	1,13
4	6,12	0,038	0,089
6	8,71	0,006	0,017
8	11,33	0,0012	0,0033

Перед тем как непосредственно перейти к хромодинамике, отметим, что идеи вариационной теории возмущений могут применяться не только в описанном выше контексте — аппроксимации величин, представленных в виде функциональных интегралов, но и для других целей, например, для оптимизации аппроксимаций, получаемых при итерационном решении уравнений (см. приложение А).

3. ВАРИАЦИОННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Множество задач КХД нуждается в применении непертурбативных методов. Данный раздел посвящен применению метода ВТВ для построения вариационных разложений в квантовой хромодинамике и проведению на их основе непертурбативных вычислений. ВТВ-разложение в КХД, приводящее к новому малому параметру, было предложено в [50]. Этот параметр оказывается всегда меньше единицы при любых значениях константы связи. При таком подходе удается не только расширить область применимости вариационного разложения по сравнению с теорией возмущений, стабилизируя ее свойства при масштабах порядка нескольких ГэВ, но и рассмотреть существенно непертурбативные эффекты. Здесь мы обсудим возможность взаимосвязи получаемых в рамках ВТВ-подхода результатов с потенциальной моделью кваркового конфайнмента [51, 52]. Далее, следуя работе [65], рассмотрим проблему описания процесса e^+e^--аннигиляции при низких энергиях. В данном обзоре мы будем использовать безмассовые, принадлежащие классу минимальных схемы перенормировки. Применению так называемой МОМ-схемы перенормировки, в которой вычитание производится в некоторой евклидовой точке, посвящены работы [66–68].

Построение вариационного ряда. Рассмотрим построение ряда ВТВ для КХД на основе вариационной процедуры гармонического типа. Функционал действия квантовой хромодинамики запишем в виде

$$S(A,q,\varphi) \,=\, S_2(A) \,+\, S_2(q) \,+\, S_2(\varphi) \,+\, g\, S_3(A,q,\varphi) \,+\, g^2\, S_4(A)\,, \quad (3.1)$$

где $S_2(A)$, $S_2(q)$ и $S_2(\varphi)$ — свободные функционалы действий глюонного, кваркого и духового полей соответственно. $S_2(A)$ включает в себя также слагаемое, фиксирующее калибровку, в качестве которого мы будем использовать выражение, определяющее ковариантную α_G-калибровку. Функционал $S_3(A,q,\varphi)$ в (3.1) задает юкавское взаимодействие глюонов, глюонов с кварками и глюонов с духами

$$S_3(A,q,\varphi) \,=\, S_3(A) \,+\, S_3(A,q) \,+\, S_3(A,\varphi)\,. \quad (3.2)$$

Функционалы $S_3(A)$, $S_3(A,q)$ и $S_3(A,\varphi)$ генерируют, соответственно, трехглюонные вершины типа (AAA), $(\bar{q}Aq)$ и $(\varphi A\varphi)$. Слагаемое $S_4(A)$ генерирует четырехглюонные вершины $(AAAA)$. Преобразуем это слагаемое, вводя вспомогательные поля $\chi^a_{\mu\nu}$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp\left[ig^2\, S_4(A)\right] \quad &= \quad \int D\chi \;\exp\left\{\frac{i}{2}\,\int dxdy\,\times\right. \\ &\times \quad \chi^a_{\mu\nu}(x)\,[\Delta^{-1}(x,y)]^{ab}_{\mu\nu;\mu_1\nu_1}\,\chi^b_{\mu_1\nu_1}(y)\;+ \\ &+ \quad \left. i\frac{g}{\sqrt{2}}\,\int dx\,\chi^a_{\mu\nu}(x)\,f^{abc}\,A^b_\mu(x)\,A^c_\nu(x)\right\}\,, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\Delta(x,y)$ — глюонный пропагатор в χ-поле

$$[\Delta(x,y)]^{ab}_{\mu\nu;\mu_1\nu_1} \,=\, \delta(x-y)\,\delta^{ab}\,\delta_{\mu\mu_1}\,\delta_{\nu\nu_1}\,. \quad (3.4)$$

После χ-преобразования диаграммное представление функций Грина будет содержать только диаграммы юкавского типа. Помимо обычных трехточечных вершин появятся вершины вида $A\chi A$. Таким образом, некоторую функцию Грина КХД в форме функционального интеграла можно записать в виде

$$\begin{aligned} G(\cdots) \quad &= \quad \int D\chi\, D_{QCD}\,(\cdots)\times \quad (3.5) \\ &\times \quad \exp\,\{i\,[S(A,\chi)+S_2(q)+S_2(\varphi)+S_2(\chi)+gS_3(A,q,\varphi)]\}\,, \end{aligned}$$

где

$$S(A,\chi) \,=\, \frac{1}{2}\,\int dxdy\,A^a_\mu(x)\,\left[D^{-1}(x,y|\chi)\right]^{ab}_{\mu\nu}\,A^b_\nu(y) \quad (3.6)$$

с глюонным пропагатором $D(x, y|\chi)$ в χ-поле

$$\begin{aligned}\left[D^{-1}(x, y|\chi)\right]^{ab}_{\mu\nu} &= \Big[(-\, g_{\mu\nu}\partial^2 + \partial_\mu\partial_\nu)\delta^{ab}\times \\ &+ \quad g\sqrt{2} f^{abc}\chi^c_{\mu\nu} + \text{gauge terms}\Big]\, \delta(x-y)\,, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

где "gauge terms" означает слагаемые, связанные с фиксацией калибровки. Мера интегрирования D_{QCD} в (3.5) задает стандартные интегрирования по глюонным кварковым и духовым полям.

Под знаком χ-усреднения все взаимодействия являются взаимодействиями юкавского типа. Четырехглюонные вершины появляются при раскрытии функционального интеграла по полю χ. Проиллюстрируем эту ситуацию на примере полного пропагатора векторного поля в случае глюодинамики. Для произвольной функции Грина можем записать

$$G(\cdots) \,=\, \langle\, G_{\text{Yuk}}(\cdots|\chi)\,\rangle\ , \qquad (3.8)$$

где $< \cdots >$ означает χ-функциональное усреднение

$$\langle \cdots \rangle \,=\, \int D\chi\,[\cdots]\,\exp\left[\, i\, S_0(\chi)\,\right]\,, \qquad (3.9)$$

а функция Грина в χ-поле

$$G_{\text{Yuk}}(\cdots|\chi) \,=\, \int DA\,[\cdots]\,\exp\left\{\, i\, \left[\, S(A,\chi) \,+\, S^{\text{Yuk}}_{\text{YM}}(A)\right]\,\right\} \qquad (3.10)$$

определяется только лишь диаграммами юкавского типа с глюонным пропагатором $D(x, y|\chi)$.

На рис. 3,*а* показан полный глюонный пропагатор $\langle D_{\text{full}}(x, y|\chi)\rangle$. Диаграммы с четырехглюонными вершинами возникают при разложении $D(x, y|\chi)$ в ряд теории возмущений (рис. 3,*б*). Они добавляются к юкавским диаграммам и возникает стандартное диаграммное представление ряда теории возмущений (рис. 3,*в*).

Перейдем теперь к построению ВТВ-разложения и введем вспомогательные параметры ζ и ξ, переписав функционал действия в выражении (3.5) в виде

$$S(A, q, \varphi, \chi) = S'_0(A, q, \varphi, \chi) \,+\, S'_I(A, q, \varphi, \chi)\,, \qquad (3.11)$$

где

$$S'_0(A, q, \varphi, \chi) \,=\, \zeta^{-1}\left[S(A,\chi) + S_2(q) + S_2(\varphi)\right] + \xi^{-1}\, S_2(\chi) \qquad (3.12)$$

и

$$\begin{aligned}S'_I(A, q, \varphi, \chi) &= g\, S_3(A, q, \varphi) - (\zeta^{-1} - 1)\left[S(A,\chi)\, + \right. \\ &+ \left. S_2(q) + S_2(\varphi)\right] - (\xi^{-1} - 1) S_2(\chi)\,. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

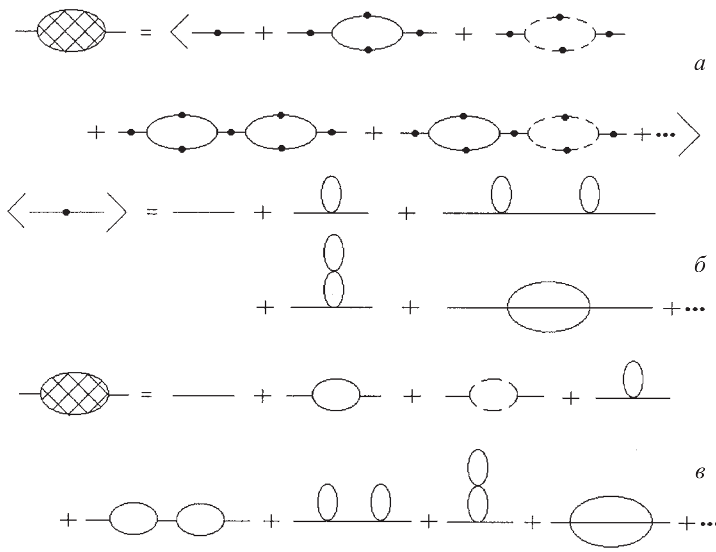

Рис. 3. Диаграммное представление полного глюонного пропагатора в теории возмущений с использованием χ-преобразования. Сплошная линия соответствует глюонному пропагатору, пунктирная — пропагатору духового поля, а функции $D(\chi)$ соответствует линия с точкой

Точное значение рассматриваемой величины, для которой применяется ВТВ-разложение, например некоторой функции Грина, не зависит, конечно, от вспомогательных параметров ζ и ξ. Однако аппроксимация той же величины конечным числом слагаемых ряда ВТВ, получающегося при разложении по степеням действия $S_1'(A, q, \varphi, \chi)$, от этих параметров будет зависеть. Мы можем использовать свободу в выборе параметров ζ и ξ для нашей цели — построения нового малого параметра разложения.

В техническом плане удобно переписать $S_0'(A, q, \varphi, \chi)$, заменив в (3.12) ζ^{-1} на $[1+\kappa(\zeta^{-1}-1)]$ и ξ^{-1} на $[1+\kappa(\xi^{-1}-1)]$ и положив в конце всех вычислений $\kappa = 1$. В этом случае любую степень выражения $(\zeta^{-1} - 1)[S(A, \chi) + S_2(q) + S_2(\varphi)] + (\xi^{-1} - 1)S_2(\chi)$, появляющуюся в предэкспоненте после разложения по степеням (3.13), можно получить, продифференцировав соответствующее число раз по параметру κ. После этого в предэкспоненте под знаком функционального интеграла остаются лишь степени действия $g\, S_3(A, q, \varphi)$, которые генерируют юкавские диаграммы КХД с модифицированными пропагаторами, определяемые соответствующими квадратичными формами в новом "свободном" действии S_0'. Ряд ВТВ для функций Грина запишется в виде

$$\begin{aligned} G(\cdots) &= \sum_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)\,!} \left(-\frac{\partial}{\partial \kappa}\right)^{n-k} \frac{i^k}{k!} \times \\ &\times \int D\chi \, D_{\rm QCD}(\cdots)\ [g\, S_3(A,q,\varphi)]^k \, \exp\,[\,i\, S_0'(A,q,\varphi,\chi)\,]\ , \end{aligned} \tag{3.14}$$

где в $S_0'(A,q,\varphi,\chi)$ выполнена описанная выше замена. Далее удобно произвести рескейлинг полей

$$\begin{aligned} (A,q,\varphi) &\Rightarrow \frac{(A,q,\varphi)}{\sqrt{1\,+\,\kappa\,(\zeta^{-1}-1)}}\,, \\ \chi &\Rightarrow \frac{\chi}{\sqrt{1\,+\,\kappa\,(\xi^{-1}-1)}}\,, \end{aligned} \tag{3.15}$$

в результате чего пропагаторы приобретают стандартный вид, а модифицируются только вершины диаграмм. Интегрируя затем по полю χ, для функции Грина ν полей находим

$$\begin{aligned} G(\cdots) &= \sum_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n\,-\,k)\,!} \left(-\frac{\partial}{\partial\,\kappa}\right)^{n\,-\,k} \frac{1}{[1\,+\,\kappa\,(\zeta^{-1}-1)]^{\nu/2}} \times \\ &\times\ \frac{i^k}{k!} \int D_{\rm QCD}\,(\cdots)\,[g_3\, S_3(A,q,\varphi)]^k \\ &\times\ \exp\left\{\,i\,\left[\,S_0(A,q,\varphi)\,+\,g_4^2\, S_4(A)\,\right]\,\right\}\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь $S_0(A,q,\varphi)$ не содержит уже члена, отвечающего полю χ, и представляет собой обычный функционал свободного действия КХД, а g_3 и g_4, фигурирующие в юкавских и четырехглюонных вершинах, определены следующим образом:

$$g_3\,=\,\frac{g}{\left[\,1\,+\,\kappa\,(\zeta^{-1}-1\,)\,\right]^{3/2}}\ , \qquad g_4\,=\,\frac{g}{\left[\,1\,+\,\kappa\,(\xi^{-1}-1)\right]^{1/2}}\,. \tag{3.17}$$

Анализ структуры возникающего ВТВ-разложения выполнен в работах [50, 51], в которых было показано, что при специальном соотношении между вариационными параметрами и константой связи можно построить новый непертурбативный параметр разложения. Такой параметр оказывается всегда меньше единицы при любых значениях исходной константы связи. Здесь мы покажем, как возникает непертурбативный малый параметр на примере глюодинамики.

Малый параметр разложения в квантовой хромодинамике. Так же, как и в рассмотренном выше примере, операция дифференцирования по параметру κ приводит к некоторым дополнительным факторам. Рассмотрим, какие возникают множители, если использовать первоначальную формулировку до применения процедуры рескейлинга полей (3.15). В этом случае оператор дифференцирования $(-\partial/\partial\,\kappa)^l$ приводит к фактору $(1-\zeta)^l$, когда действует на пропагатор глюона, и к множителю $(1-\xi)^l$ при действии на пропагатор поля χ. Определяя для удобства параметр η, степень которого задает порядок разложения, символически можно записать структуру ВТВ-ряда следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 \quad &+ \quad \eta(1-\zeta)+\eta^2\left[(1-\zeta)^2+g^2\zeta^3+g^2\xi\right]+ \\ &+ \quad \eta^3\left[(1-\zeta)^3+g^2\zeta^3(1-\zeta)+g^2\xi(1-\zeta)+g^2\xi(1-\xi)\right]+\cdots. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Для иллюстрации на рис. 4 изображены диаграммы для полного пропагатора глюона, соответствующие новому разложению. Перечеркнутая линия обозначает дифференцирование по параметру κ и содержит фактор $(1-\zeta)$ для глюонной линии и множитель $(1-\xi)$ в том случае, когда глюонная линия возникла через χ-поле.

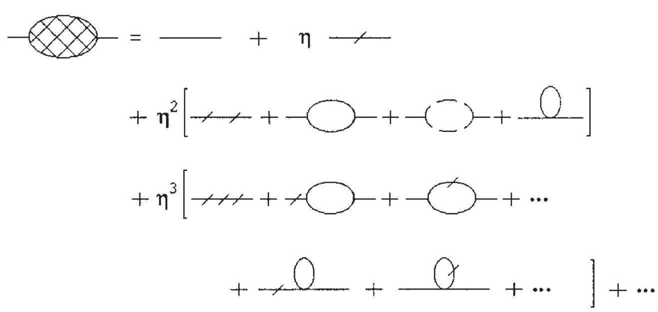

Рис. 4. Диаграммы, соответствующие ВТВ-разложению полного глюонного пропагатора

Из (3.18) видно, что, полагая $\xi=\zeta^3$ и $(1-\zeta)^2\sim g^2\zeta^3$, получаем, что n-й член ряда ВТВ содержит общий множитель $(1-\zeta)^n$, причем второе условие гарантирует выполнение неравенства $(1-\zeta)<1$ для всех положительных значений константы связи.

Аналогичный результат можно получить и в более общем случае, включающем фермионы. Здесь более удобной оказывается формулировка с рескейлингом полей (3.15). Отметим, что в контексте калибровочной инвариантности выбор $\xi=\zeta^3$ служит также для согласования констант во взаимодействиях юкавского типа и четырехглюонного взаимодействия. Такой выбор обеспечивает выполнение для получаемых в рассматриваемом подходе констант перенормировки тождеств Славнова — Тейлора.

Таким образом, возникает новый параметр разложения $a = 1 - \zeta$, связанный с константой связи g посредством уравнения

$$\lambda = \frac{g^2}{(4\pi)^2} = \frac{1}{C}\,\frac{a^2}{(1-a)^3}\,, \quad a = 1 - \zeta\,, \tag{3.19}$$

где C — некоторая положительная константа. Как следует из (3.19), при любых значениях константы связи g новый параметр разложения a удовлетворяет неравенству $0 \le a < 1$.

Приведем результат ВТВ-разложения для функций Грина с точностью $O(a^7)$, которая обеспечивает возможность проведения вычислений на двухпетлевом уровне в данном подходе. Запишем выражение для функций Грина в виде

$$G(\cdots) = \int D_{\mathrm{QCD}}\,(\cdots)\; V(A, q, \varphi)\, \exp\,(i\, S_0)\,, \tag{3.20}$$

тогда, используя (3.16)—(3.19), находим

$$\begin{aligned}
V \;=\;& 1 + a\,A_3 + a^2\left[\frac{1}{2}\,{A_3}^2 + \frac{3}{2}A_3\right] + \\
+\;& a^3\left[\frac{1}{6}{A_3}^3 + \frac{3}{2}{A_3}^2 + A_3A_4 + 3A_4 + \frac{15}{8}A_3\right] + \\
+\;& a^4\left[\frac{1}{24}{A_3}^4 + \frac{1}{2}{A_4}^2 + \frac{1}{2}{A_3}^2A_4 + \frac{3}{4}{A_3}^3 + \right.\\
&\left. + \frac{9}{2}A_3A_4 + 3{A_3}^2 + 6A_4 + \frac{35}{16}A_3\right] + \\
+\;& a^5\left[\frac{1}{120}\,{A_3}^5 + \frac{1}{6}\,{A_3}^3\,A_4 + \frac{1}{2}A_3\,{A_4}^2 + \frac{1}{4}\,{A_3}^4 + 3\,{A_3}^2\,A_4 + \right.\\
&\left. + 3{A_4}^2 + \frac{33}{16}\,{A_3}^3 + \frac{99}{8}\,A_3\,A_4 + 5\,{A_3}^2 + 10\,A_4 + \frac{315}{128}\,A_3\right] + \\
+\;& a^6\left[\frac{1}{720}\,{A_3}^6 + \frac{1}{24}\,{A_3}^4\,A_4 + \frac{1}{4}\,{A_3}^2\,{A_4}^2 + \frac{1}{6}\,{A_4}^3 + \frac{1}{16}\,{A_3}^5 + \right.\\
&+ \frac{5}{4}\,{A_3}^3\,A_4 + \frac{15}{4}\,A_3\,{A_4}^2 + \frac{7}{8}{A_4}^4 + \frac{21}{2}\,{A_3}^2\,A_4 + \frac{21}{2}\,{A_4}^2 + \\
&\left. + \frac{143}{32}\,{A_3}^3 + \frac{129}{16}\,A_3\,A_4\,\frac{15}{2}{A_3}^3 + 15\,A_4 + \frac{693}{256}\,A_3\right] + O(a^7)\,,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $A_3 = 4\pi\,(i\,S_3)/\sqrt{C}\,,\; A_4 = (4\pi)^2\,(i\,S_4)/C\,.$

Нетрудно показать, что N-й порядок ВТВ-ряда совпадает с N-м порядком теории возмущений с точностью $O(\,g^{N+1}\,)$:

$$G^{(N)}_{VPT} \,=\, \sum_{n=0}^{N} G_n \,=\, G^{(N)}_{PT} \,+\, O(\,g^{N+1}\,)\,. \tag{3.22}$$

Поэтому при малых константах связи ВТВ-разложение приведет к тем же результатам, что и стандартная теория возмущений. Однако, как мы увидим в дальнейшем, в непертурбативной области, когда константа связи становится большой и прямое использование теории возмущений оказывается невозможным, построенное a-разложение, так же, как и в рассмотренном ранее простом примере, остается хорошо определенным и позволяет непротиворечивым образом проводить исследования вне рамок слабой связи.

Перенормировка. Применяя размерную регуляризацию с $d\,=\,4\,-\,2\varepsilon$, для констант перенормировки Z_1 и Z_3 в ведущем порядке ВТВ-разложения находим

$$\begin{aligned} Z_1 \quad &= \quad 1 \,+\, \lambda\,\zeta^3 \left[N\,\left(\frac{17}{6} \,-\, \frac{3}{2}\,\alpha_G\right) \,-\, \frac{4}{3}\,N_f\right]\,\frac{1}{2\,\varepsilon}\,, \\ Z_3 \quad &= \quad 1 \,+\, \lambda\,\zeta^3 \left[N\,\left(\frac{13}{3} \,-\, \alpha_G\right) \,-\, \frac{4}{3}\,N_f\right]\,\frac{1}{2\,\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Напомним, что константа связи $\lambda \,\equiv\, \alpha_s/4\pi$ и параметр ζ связаны друг с другом соотношением $(1-\zeta)^2 = C\lambda\zeta^3$.

Из (3.23) получаем

$$\lambda_0 \,=\, \mu^{2\,\varepsilon}\, Z_1^2\, Z_3^{-3}\, \lambda \,=\, \lambda\, \mu^{2\,\varepsilon}\, \left[1 \,-\, \lambda\zeta^3\, \frac{\beta_0}{\varepsilon} \right]\,, \tag{3.24}$$

где $\beta_0 = 11 - 2/3\, N_f$. Откуда для β-функции находим выражение

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) \quad &= \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\, \mu^2\, \frac{\partial\,\lambda}{\partial\,\mu^2} \,= \\ &= \quad -\beta_0\, \left(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\,\lambda} \,-\, 1\right)\,(\,\lambda^2\,\zeta^3\,) \,=\, -\,2\,\beta_0\,\lambda^2\,\frac{\zeta^4}{3\,-\,\zeta}\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Решая соответствующее ренормгрупповое уравнение, получаем

$$\ln\,\frac{Q^2}{\Lambda^2} \,=\, \frac{C}{2\,\beta_0}\,f(\zeta)\,, \tag{3.26}$$

где функция $f(\zeta)$ имеет вид

$$f(\zeta) \,=\, \frac{2}{(1\,-\,\zeta)^2} \,+\, \frac{12}{1\,-\,\zeta} \,+\, 21\,\ln\,\frac{\zeta}{1\,-\,\zeta} \,-\, \frac{9}{\zeta}\,. \tag{3.27}$$

Нетрудно видеть, что в пертурбативной области, когда $Q^2 >> \Lambda^2$ ($\zeta \sim 1$), из приведенных выражений легко получается хорошо известный однопетлевой результат:

$$\lambda(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \,.$$

При уменьшении Q^2 и, соответственно, увеличении значения константы связи ее логарифмический рост, как будет показано далее, сменяется степенным: $\lambda(Q^2) \sim 1/Q^2$. В потенциальной кварковой модели такое поведение в инфракрасной области согласуется с феноменологией мезонной спектроскопии.

Связь с потенциальной кварковой моделью. Для того чтобы фиксировать параметры полученного разложения, будем использовать непертурбативную информацию, связанную с физикой больших расстояний, вытекающую из феноменологии спектроскопии мезонов. Это позволит полностью определить закон эволюции бегущей константы связи $\alpha_s(Q^2)$ без привлечения каких-либо высокоэнергетических экспериментальных данных, которые обычно используются для определения масштабного параметра Λ квантовой хромодинамики. Другими словами, мы найдем связь между универсальной напряженностью σ в линейной части статического кварк-антикваркового потенциала

$$V_{\rm lin}(r) \,=\, \sigma\, r \,, \tag{3.28}$$

который может быть определен из спектроскопии мезонов (см., например, [88, 89] и обзор [90]), и поведением инвариантного заряда в пертурбативной ультрафиолетовой области.

Если принять, что $q\bar{q}$-потенциал в импульсном пространстве может быть записан в виде

$$V(q^2) \,=\, -\,\frac{16\pi}{3}\,\frac{\bar{\alpha}_s(q^2)}{q^2} \,, \tag{3.29}$$

где $\bar{\alpha}_s(q^2)$ описывает область как больших, так и малых q^2, и имеет сингулярное инфракрасное поведение $\bar{\alpha}_s(q^2) \sim q^{-2}$, мы получаем линейно растущий на больших расстояниях потенциал (3.28). Сингулярное поведение инвариантного заряда в инфракрасной области соответствует асимптотическому поведению β-функции

$$\beta(\lambda) \,\simeq\, -\,\lambda \tag{3.30}$$

при больших значениях константы связи.

Описанное выше представление о конфайнменте использовано в ряде подходов. Одна из первых попыток объединить описание малых и больших расстояний, используя единое выражение для инвариантного заряда, предпринята в работе [91], где было предложено простое предписание, согласно которому исходное асимптотически свободное выражение для бегущей константы связи модифицируется следующим образом:

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0}\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \Rightarrow \frac{4\pi}{\beta_0}\frac{1}{\ln(1 + Q^2/\Lambda^2)} \,. \tag{3.31}$$

Для такой модели ультрафиолетовое асимптотически свободное поведение бегущей константы связи сохраняется, а в инфракрасной области у константы связи появляется требуемая для получения линейного потенциала сингулярность. Таким образом, в [91] феноменологический кварк-антикварковый потенциал получен на основе гладкой модельной сшивки пертурбативного поведения при больших импульсах и предполагаемой инфракрасной асимптотики. Конечно, такой подход носит исключительно модельный характер. Более последовательное рассмотрение этого вопроса дано в работах [92–94], где выполнен анализ на основе приближенного решения уравнений Швингера—Дайсона с явным учетом тождеств Славнова—Тейлора. Этот вопрос изучался также и в решеточных вычислениях (см., например, обзор [95]).

Статический потенциал взаимодействия кварков, полученный в первом порядке ВТВ-разложения, был найден в работе [50], он изображен на рис. 5 сплошной линией. Для сравнения точечной линией отмечен феноменологический потенциал, взятый из [89], хорошо согласующийся с данными по мезонной спектроскопии и близкий к ВТВ-потенциалу.

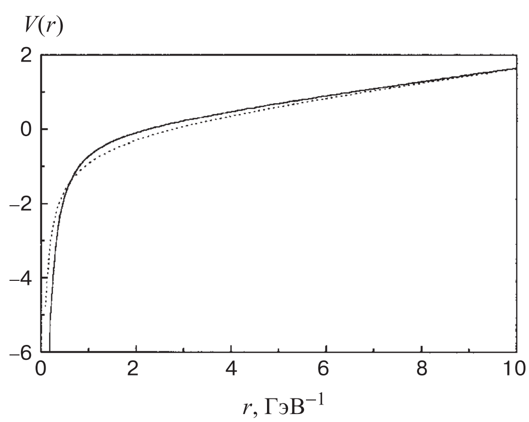

Рис. 5. Статический потенциал взаимодействия кварков. Сплошная линия соответствует ВТВ-потенциалу, точечная — феноменологическому потенциалу [89], который хорошо воспроизводит данные мезонной спектроскопии

Таким образом, в рамках ВТВ-подхода возможно установить поведение инвариантного заряда в ультрафиолетовой области, используя для этого информацию, вытекающую из физики больших расстояний. Прежде чем непосредственно перейти к этому вопросу, важно рассмотреть проблему стабильности получаемых результатов.

Поправки и стабильность. Произвольная функция Грина $G(\cdots)$, отвечающая четному числу полей, с точностью $O(a^5)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} G(\cdots) &= g_0(\cdots) + \frac{a^2}{C}\, g_2(\cdots) + 3\,\frac{a^3}{C}\, g_2(\cdots) + \\ &+ \frac{a^4}{C^2}\,[\, 6\,C\, g_2(\cdots) + g_4(\cdots)\,] + \\ &+ \frac{a^5}{C^2}\,[\, 10\,C\, g_2(\cdots) + 6\, g_4(\cdots)\,]\,, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где $(\cdots)$ обозначает набор аргументов соответствующих полей, а $g_k(\cdots)$ являются коэффициентами пертурбативного разложения с параметром λ, которые в форме функционального интеграла записываются как

$$\begin{aligned} g_0(\cdots) &= \int DA\,(\cdots)\, \exp[\, i\, S_0\,]\,, \\ g_2(\cdots) &= \int DA\,(\cdots) \left[\frac{(iS_3)^2}{2!} + \frac{(iS_4)}{1!} \right] \exp[\, i\, S_0\,]\,, \\ g_4(\cdots) &= \int DA\,(\cdots) \left[\frac{(iS_3)^4}{4!} + \frac{(iS_4)^2}{2!} + \frac{(iS_3)^2}{2!}\, \frac{(iS_4)}{1!} \right] \exp[\, i\, S_0\,]\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Аналогично может быть записано ВТВ-разложение функций Грина с нечетным числом полей.

В соответствии с механизмом индуцированной сходимости [83, 84, 86, 96, 97] вариационный параметр C подстраивается в каждом порядке аппроксимации, исходя из того или иного принципа оптимизации. Здесь мы выполним вычисления на четырех уровнях, соответствующих порядкам аппроксимации $O(a^2)$, $O(a^3)$, $O(a^4)$ и $O(a^5)$, и сравним полученные β-функции.

Применяя размерную регуляризацию, используя результаты работы [98] (см. также обзор [99]) и проводя вычисления в ковариантной калибровке с произвольным калибровочным параметром α_G, находим константу перенормировки заряда Z_λ ($\lambda_0 = \mu^{2\varepsilon} Z_\lambda \lambda$) [51]:

$$\begin{aligned} Z_\lambda^{-1} &= \frac{Z_3\, \tilde{Z}_3^2}{\tilde{Z}_1^2} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{a^2}{3C}(11N - 2N_f) + \frac{a^3}{C}(11N - 2N_f) + \right. \\ &+ \frac{a^4}{6NC^2} \big(34N^3 - 13N^2 N_f + 3N_f + 132CN^2 - 24CNN_f\big) + \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$+ \quad \frac{a^5}{3NC^2}\left(102N^3 - 39N^2N_f + 9N_f + 110CN^2 - 20CNN_f\right)\Bigg],$$

где Z_3 и $\tilde{Z}_3$ — константы перенормировки глюонных и духовых полей, а $\tilde{Z}_1$ — константа перенормировки вершины дух-глюон-дух. Непосредственной проверкой убеждаемся, что, как и ожидалось, константа перенормировки заряда Z_λ не зависит от калибровочного параметра α_G, что служит дополнительным тестом корректности вычислений.

Зная константу перенормировки заряда Z_λ, можно вычислить соответствующую (3.34) β-функцию:

$$\beta(\lambda) = -\frac{1}{C^2}\frac{a^2}{(2+a)(1-a)^2} \times \tag{3.35}$$

$$\times \left[2\beta_0 a^2 + 9\beta_0 a^3 + 4\left(6\beta_0 + \frac{\beta_1}{2C}\right)a^4 + 5\left(10\beta_0 + 6\frac{\beta_1}{2C}\right)a^5\right],$$

где β_0 и $\beta_1 = 102 - 38N_f/3$ — пертурбативные коэффициенты β-функции.

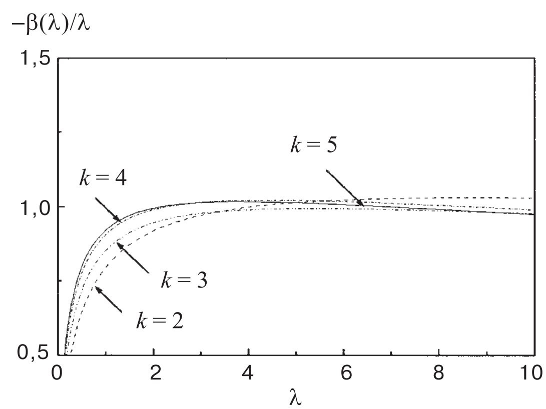

Рис. 6. Поведение функции $-\beta^{(k)}(\lambda)/\lambda$ для $k = 2,\ 3,\ 4,\ 5$

Ограничиваясь в выражении для константы перенормировки (3.34) слагаемыми порядка $O(a^2)$, $O(a^3)$, $O(a^4)$ и $O(a^5)$, получим соответствующие этим приближениям четыре β-функции: $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$, $\beta^{(4)}$ и $\beta^{(5)}$. На рис. 6 показаны функции $-\beta^{(k)}(\lambda)/\lambda$ для параметров $C_2 = 0,977$, $C_3 = 4,1$, $C_4 = 10,4$ и $C_5 = 21,5$. Выход отношения $-\beta^{(k)}(\lambda)/\lambda$ на единицу при больших значениях константы связи соответствует инфракрасной сингулярности бегущего заряда $\bar{\alpha}_s(Q^2) \sim Q^{-2}$ при малых Q^2. Возрастание величины вариационного параметра C_k с ростом порядка аппроксимации вызвано теми же причинами, что и в рассмотренном выше простом примере механизма индуцированной сходимости.

Для полного определения всех параметров из физики больших расстояний рассмотрим параметр σ в линейной части кваркового потенциала $V_{\rm lin}(r) = \sigma r$. Его феноменологическое значение составляет $\sigma \simeq 0,15 \div 0,20$ ГэВ^2 [88–91]. Инвариантный заряд $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ в инфракрасной области ведет себя как

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) \simeq \frac{3}{2}\frac{\sigma}{Q^2}\,. \tag{3.36}$$

Для нормировки при некотором Q_0 будем использовать значение из работы [89] $3/2\sigma = 0,2652$ ГэВ^2 ($\sigma = 0,1768$ ГэВ^2).

Ренормгрупповая эволюция параметра разложения a описывается уравнением

$$Q = Q_0 \exp\left[\phi(a, N_f) \,-\, \phi(a_0, N_f^0)\right]\,, \tag{3.37}$$

где

$$\phi(a, N_f) \,=\, \frac{1}{2}\int^{\lambda} \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)}, \tag{3.38}$$

и β-функция определена согласно (3.35).

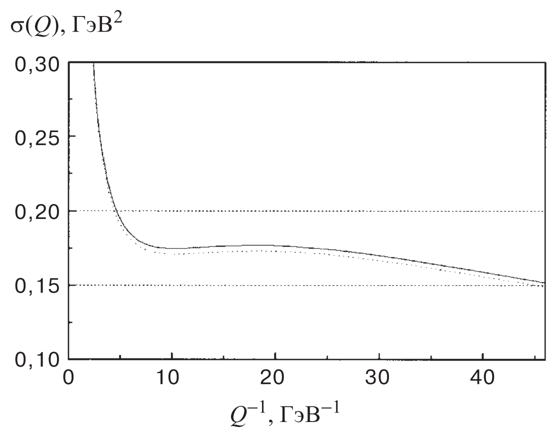

Рис. 7. Параметр $\sigma(Q^2)$ как функция обратного импульса Q^{-1} для точек нормировки: $Q_0 = 50$ МэВ (сплошная кривая) и $Q_0 = 150$ МэВ (пунктирная кривая). Горизонтальными прямыми обозначен интервал значений σ, которые совместимы с имеющимися экспериментальными данными

Поведение $\sigma(Q^2) = 2/3Q^2\alpha_s(Q^2)$ как функции обратного импульса Q^{-1} (чтобы иметь некоторую аналогию с расстоянием) показано на рис. 7 для двух точек нормировки: $Q_0 = 50$ МэВ (сплошная кривая) и $Q_0 = 150$ МэВ (пунктирная кривая). Результат в области малых импульсов укладывается в интервал феноменологических оценок $\sigma \simeq 0,15 \div 0,20$ ГэВ^2 (на рис. 7 соответствующий коридор обозначен двумя горизонтальными прямыми), и, как можно было бы ожидать, слабо зависит от величины Q_0 и соответствующего числа активных кварков N_f^0. Мы провели расчет для $N_f^0 = 3$, что выглядит разумным для наших целей, так как значительная доля информации о нерелятивистском потенциале взаимодействия кварков складывается на основе данных о семействе чармония. Отметим, тем не менее, что сильной чувствительности к числу активных кварков N_f^0 здесь нет, и, например, для $N_f^0 = 2$ возникают близкие результаты.

Таким образом, все параметры найдены на основе информации непертурбативного характера, вытекающей из спектроскопии мезонов. Закон эволюции параметра разложения $a = a(Q^2)$, определяемый уравнением (3.37), позволяет найти инвариантный заряд в ультрафиолетовой области. Так, при найденных выше параметрах на масштабе массы Z-бозона получаем $\bar{\alpha}_s(M_Z = 91,2\,\text{ГэВ}) = 0,126$. Учитывая, что все параметры были фиксированы на основе существенно непертурбативной информации, соответствующей инфракрасной области, найденное значение константы связи в ультрафиолетовой области выглядит вполне разумным. Таким образом, диапазон применимости ВТВ-метода значительно шире, чем в случае обычной теории возмущений. В рамках этого подхода удается с единых позиций рассматривать не только ультрафиолетовую область малых значений константы связи, но и существенно продвинуться в инфракрасную область.

4. e^+e^--АННИГИЛЯЦИЯ В АДРОНЫ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

При аппроксимации некоторой физической величины, например, известного $R(s)$-отношения для процесса e^+e^--аннигиляции в адроны, некоторой частичной суммой ряда теории возмущений, с силу обрыва этого ряда возникает важная проблема зависимости результатов от применяемой ренормализационной схемы. В особенности такая зависимость проявляется вне асимптотической ультрафиолетовой области. С одной стороны, возникающая зависимость физической величины от ренормализационной схемы может рассматриваться как досадный факт. С другой стороны, появляется дополнительная степень свободы, которую можно использовать для построения оптимального разложения, обладающего по сравнению с обычной теорией возмущений более широкой областью применимости. В частности, как показано в работах [100–102], на этом пути удается расширить область, характерную для обычной теории возмущений, и продвинуться в область низких энергий. Полученный в этих работах результат основан на оптимизации схемной зависимости, возникающей в третьем порядке пертурбативной аппроксимации. При этом использовались уточненные пертурбативные коэффициенты [103, 104], а для оптимизации схемной зависимости в работах [101, 102] был выбран принцип минимальной чувствительности [96,97]. В работе [100] для анализа рассматриваемого здесь процесса e^+e^-- аннигиляции применялся также иной способ оптимизации схемной зависимости, использующий метод эффективных зарядов [105]. Отметим здесь, что зависимость от схемы перенормировок может быть существенным образом уменьшена в аналитической теории возмущений [106].

Применим полученные результаты для описания $R(s)$-отношения в процессе e^+e^--аннигиляции в адроны. Для удобства сравнения, так же, как и в [102], будем рассматривать интервал $Q = \sqrt{s}$ от 0 до 6 ГэВ. Использование пертурбативных выражений для непосредственного описания экспериментально наблюдаемой величины $R(s)$ при малых s не представляется возможным ввиду наличия пороговых сингулярностей в пертурбативном разложении вида $(\alpha_s/v)^n$. В работе [107] был предложен так называемый "смиринг"-метод, позволяющий провести сравнение с опытом. Согласно [107] проблема резонансов и пороговых сингулярностей решается следующим образом. Вместо исходной величины $R(s)$, которая определяется через скачок корреляционной функции $\Pi(s)$ на разрезе

$$R(s) = \frac{1}{2i}\,[\,\Pi(s+i\epsilon) - \Pi(s-i\epsilon)\,]\;, \tag{4.1}$$

предлагается ввести "смиринг"-величину

$$R_\Delta(s) = \frac{1}{2i}\,[\,\Pi(s+i\Delta) - \Pi(s-i\Delta)\,] \tag{4.2}$$

с некоторым конечным значением Δ. Для значений s вблизи порога величина (4.1) оказывается очень чувствительной к пороговым сингулярностям, при подходе к которым пертурбативное разложение перестает работать. Отступив в комплексной плоскости q^2 от вещественной оси на конечную величину Δ, как в выражении (4.2), можно рассчитывать на то, что при использовании корректной пертурбативной аппроксимации можно описать $R_\Delta(s)$ (4.2). Оценка параметра Δ, которую следует использовать для эффективного сравнения с экспериментальными данными, дана в работе [107] и имеет порядок $1 \div 3$ ГэВ^2.

"Экспериментальная" кривая, соответствующая (4.2), возникает, если, воспользовавшись дисперсионным соотношением

$$\Pi(q^2) = \mathrm{const} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds\,\frac{R(s)}{s - q^2 - i\,\epsilon}\,, \tag{4.3}$$

переписать выражение (4.2) в виде

$$R_\Delta(s) = \frac{\Delta}{\pi}\int_0^\infty ds' \frac{R(s')}{(s-s')^2+\Delta^2}\,. \tag{4.4}$$

Подставив сюда соответствующий фит экспериментальных данных по e^+e^--аннигиляции $R_{\rm exp}(s)$, можно найти экспериментальную кривую, отвечающую функции (4.2). Для некоторых значений параметра Δ, оценки которого даны в [107], такие кривые были найдены в [101,102]. Будем использовать их для сравнения с полученными на основе рассматриваемого подхода результатами.

При рассмотрении “смиринг”-величин трудности с малыми v не возникает. Тем не менее прямое применение теории возмущений для описания $R_\Delta(s)$ все еще невозможно. Действительно, R-отношение в выражении (4.4), параметризованное с помощью инвариантного заряда с нефизическими сингулярностями, приводит к расходимости интеграла в (4.4). Таким образом, несмотря на то, что использование “смиринг”-величины (4.2) позволяет обойти затруднение с пороговыми сингулярностями, возникает проблема, связанная с поведением бегущей константы в инфракрасной области. Применение метода ВТВ дает возможность избежать этой трудности.

Ограничимся первым нетривиальным порядком, определяемым ВТВ-разложением (3.21). В этом случае получаем

$$R(s) = 3\sum_f Q_f^2\, T(v_f)\,\theta(s-4m_f^2)\left[1+g(v_f)\frac{\alpha_{\rm eff}(Q)}{\pi}\right]. \tag{4.5}$$

Функции $v_f(s)$, $T(v)$ и $g(v)$ определены следующим образом *:

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{1-4m_f^2/s}\,,\\ T(v) &= \frac{v(3-v^2)}{2}\,,\\ g(v) &= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{\pi}{2v}-\frac{3+v}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4\pi}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Для $\alpha_{\rm eff}(Q)/\pi$ рассмотрим два выражения, которые отвечают различным уровням аппроксимации, соответственно, $O(a^2)$ и $O(a^3)$:

$$\frac{\alpha_{\rm eff}^{(2)}}{\pi} = \frac{4}{C_2}\,a^2\,, \quad \frac{\alpha_{\rm eff}^{(3)}}{\pi} = \frac{4}{C_3}\,a^2(1+3\,a)\,. \tag{4.7}$$

---

*Функция $g(v)$ в (4.6) отвечает интерполяционной формуле Швингера [108]. Точные выражения для двухпетлевых массивных корреляторов, которые будут использоваться в дальнейшем при рассмотрении правил сумм квантовой хромодинамики, приведены в приложении В.

Значения параметров C_2 и C_3 не связаны с фитированием e^+e^--экспериментальных данных, а были найдены нами ранее из условия, что ренормгрупповая β-функция ведет себя при достаточно больших значениях константы связи следующим образом: $\beta(\lambda) \simeq -\lambda$. Такое поведение соответствует сингулярному инфракрасному поведению инвариантного заряда $\alpha_s(Q^2) \sim Q^{-2}$ и обеспечивает линейный рост статического кварк-антикваркого потенциала на больших расстояниях. Таким образом, мы фиксируем параметры C_i, фигурирующие в (4.7), основываясь на данных по адронной спектроскопии. Это, как было отмечено выше, дает: $C_2 = 0,977$ и $C_3 = 4,1$. Для масс кварков, так же как и в [102], возьмем следующие значения: $m_u = 5,6$ МэВ, $m_d = 9,9$ МэВ, $m_s = 199$ МэВ, $m_c = 1,350$ ГэВ и $m_b = 4,75$ ГэВ.

Бегущий параметр разложения как функция импульса Q определяется из уравнения

$$Q = Q_0 \, \exp\left\{ \frac{C_i}{4\,\beta_0} \left[\, f_i(a) \, - \, f_i(a_0) \,\right] \right\}, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned} f_2(a) \; &= \; \frac{2}{a^2} + \frac{12}{a} + 21 \ln \frac{1-a}{a} - \frac{9}{1-a}, \\ f_3(a) \; &= \; \frac{2}{a^2} - \frac{6}{a} - 48 \ln a - \frac{18}{11} \frac{1}{1-a} + \frac{624}{121} \ln(1-a) + \\ &+ \; \frac{5184}{121} \ln(1 + \frac{9}{2} a). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Для определения всех параметров воспользуемся нормировкой $\alpha_{\text{eff}}(Q_0) = \alpha_0$, а в качестве Q_0 выберем значение массы Z-бозона $Q_0 = M_Z = 91,2$ ГэВ и $\alpha_0 = 0,12$, после чего свободных параметров не остается. Отметим, что при этом какая-либо информация, вытекающая из низкоэнергетических данных по e^+e^--аннигиляции, не используется.

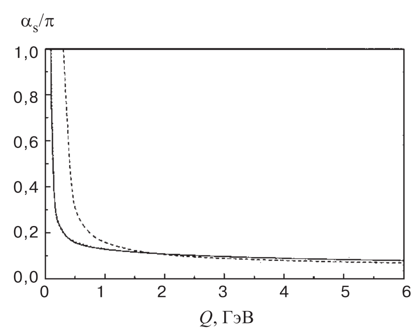

Рис. 8. Поведение функций $\alpha^{(2)}_{\text{eff}}/\pi$ (точечная кривая), $\alpha^{(3)}_{\text{eff}}/\pi$ (сплошная) в ВТВ-подходе и соответствующей однопетлевой пертурбативной константы связи α_s (пунктир)

На рис. 8 приведены графики функций $\alpha^{(2)}_{\text{eff}}/\pi$ и $\alpha^{(3)}_{\text{eff}}/\pi$, определенных согласно (4.7), которые практически совпадают друг с другом. Для сравнения мы также приводим соответствующее пертурбативному случаю поведение однопетлевой константы связи. Близость ВТВ-кривых, представленных на рис. 8, свидетельствует об устойчивости результатов, получаемых в различных порядках ВТВ-аппроксимации. Как мы видели выше, аналогичная картина в широкой области изменения константы связи наблюдается и для β-функций, отвечающих различным уровням приближений. Такая же устойчивость по отношению к учету следующих петлевых поправок имеет место и для "смиринг"-величины (4.4). Поведение найденной функции R_Δ для $\Delta = 3$ ГэВ^2 демонстрируется на рис. 9 (две кривые, отвечающие функциям (4.7), практически совпадают, и мы приводим лишь график, соответствующий $\alpha^{(3)}_{\text{eff}}$). Экспериментальная "смиринг"-кривая взята из [102]. Мы привели также теоретический расчет из этой работы, полученный при оптимизации третьего порядка пертурбативного разложения на основе принципа минимальной чувствительности. Таким образом, результат, найденный уже в первом порядке ВТВ, достаточно хорошо воспроизводит экспериментальную кривую и близок к результату, полученному на основе оптимизации третьего порядка обычной теории возмущений. Интересно, что аналогичная ситуация имеет место и в аналитической теории возмущений [106], в которой, так же, как в ВТВ-подходе, существует инфракрасно-стабильная точка.

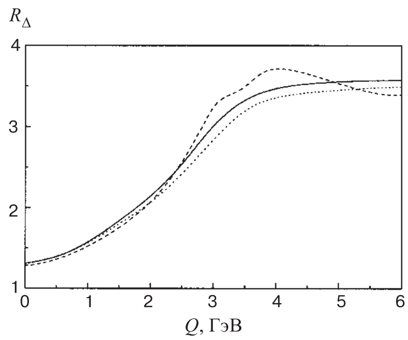

Рис. 9. График "смиринг"-величины R_Δ для $\Delta = 3$ ГэВ^2. Сплошная кривая соответствует ВТВ-результату. Экспериментальная "смиринг"-кривая, обозначенная длинным пунктиром, взята из [102]. Результат оптимизации третьего порядка пертурбативного разложения, выполненный в [102] на основе принципа минимальной чувствительности, обозначен пунктирной линией

В последнее время широко обсуждается вопрос о "заморозке" константы связи КХД при малых энергиях. В необходимости такой "заморозки" нуждаются многие основанные на КХД модельные подходы (см. подробное обсуждение этого вопроса в [102] и цитируемую там литературу). К сожалению, прямой экспериментальной информации о поведении КХД константы связи в глубокоинфракрасной области в настоящее время не имеется. Существуют лишь некоторые интегральные характеристики такого поведения. Одна из них, соответствующая "смиринг"-величине R_Δ, была рассмотрена выше. В качестве другой удобной для сравнения экспериментальной величины будем использовать здесь не зависящий от фитирования данных интеграл [109]:

$$I = \int_0^{1\,\text{ГэВ}} dQ\, \frac{\alpha_s^{\text{eff}}(Q)}{\pi} \simeq 0,2\,\text{ГэВ}\,, \tag{4.10}$$

величину которого ухитряются извлекать из физики струй. В нашем случае для $\alpha_{\rm eff}^{(2)}$ значение этого интеграла равно 0,239 ГэВ, а для $\alpha_{\rm eff}^{(3)}$ интеграл равен 0,237 ГэВ.

Выше мы рассмотрели метод построения вариационных рядов в квантовой хромодинамике, используя ренормализационные предписания из класса MS-схем. Обобщению на случай MOM-схемы перенормировок посвящены работы [64, 66–68]. При этом оказалось, что для функции $R_\Delta(s)$ получается результат, который весьма близок к рассмотренному выше $\overline{\rm MS}$-случаю. Этот факт свидетельствует о схемной стабильности ВТВ-подхода.

5. ИНКЛЮЗИВНЫЙ РАСПАД τ-ЛЕПТОНА

В соответствии с методом ренормализационной группы [1] инвариантный заряд определяется в пространственно-подобной евклидовой области. Для параметризации в рамках квантовой хромодинамики процессов, для которых характерными являются времениподобные импульсы, как, скажем, в процессе e^+e^--аннигиляции, требуется специальная процедура "аналитического продолжения". В рамках пертурбативного подхода этот вопрос рассматривался в работах [103, 110–113]. Как станет понятно из дальнейшего, для самосогласованного выполнения процедуры "аналитического продолжения" принципиально важными оказываются аналитические свойства бегущей константы связи, согласующиеся с представлением Челлена — Лемана, которые, очевидно, разрушаются пертурбативным приближением, приводящим к нефизическим особенностям типа призрачного полюса. В этом разделе рассмотрим вопрос определения инвариантного заряда во времениподобной области, следуя работе [59], а также обсудим применение метода для описания инклюзивного распада τ-лептона [60, 61, 64]*, изучим влияние ренормалонного вклада на извлекаемое из τ-распада значение константы связи [69, 71].

Инвариантный заряд во времениподобной области. Рассмотрим D-функцию [119], связанную с коррелятором векторных токов $\Pi(q^2)$, определенным соотношением

$$i\int d^4x \exp\left(iq\cdot x\right) \langle 0|T\{J_\mu(x)J_\nu(0)\}|0\rangle \propto (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2)\,, \qquad (5.1)$$

*В рамках уже упомянутой выше аналитической теории возмущений вопрос определения инвариантного заряда во времениподобной области изучался в [114, 115], а полулептонный τ-распад рассматривался в [116–118].

следующим образом*:

$$D(q^2) = q^2 \left(-\frac{d}{dq^2} \right) \Pi(q^2)\,. \tag{5.2}$$

Связь D-функции с $R(s)$-отношением определяется дисперсионным интегралом

$$D(q^2) = -q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s-q^2)^2}\, R(s)\,. \tag{5.3}$$

Таким образом, D-функция является аналитической в комплексной q^2-плоскости, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси. Можно разрешить выражение (5.3) относительно $R(s)$ и записать обратное соотношение в виде

$$R(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\,\epsilon}^{s+i\,\epsilon} \frac{dz}{z} D(z)\,. \tag{5.4}$$

Контур интегрирования в (5.4), соединяющий точки $s-i\epsilon$ и $s+i\epsilon$, изображен на рис. 10.

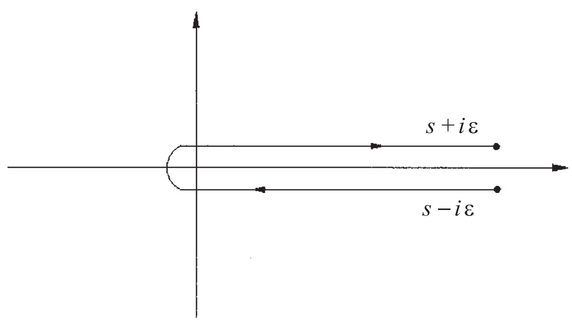

Рис. 10. Контур интегрирования в формуле обращения (5.4)

Представим $D(q^2)$ и $R(s)$ в виде

$$\begin{aligned} D(q^2) \quad &\propto \quad \sum_f Q_f^2 \left[1 + d_0\, \lambda(q^2) + d_1\, \lambda^2(q^2) + \cdots \right] \equiv \\ &\equiv \quad \sum_f Q_f^2 \left[1 + d_0\, \lambda^{\text{eff}}(q^2) \right]\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

*Мы пользуемся общепринятым соглашением $Q^2 = -q^2$, так что евклидовой области соответствуют положительные Q^2.

$$\begin{aligned} R(s) \quad &\propto \quad \sum_f Q_f^2 \left[1 + r_0 \, \lambda_s(s) + r_1 \, \lambda_s^{(2)}(s) + \cdots \right] \equiv \\ &\equiv \quad \sum_f Q_f^2 \left[1 + r_0 \, \lambda_s^{\text{eff}}(s) \right] . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь коэффициенты d_k, r_k и функции λ зависят от числа фермионов f, а индекс s у константы связи в (5.6) означает s-канал. Таким образом, для наблюдаемой $R(s)$, определенной для времениподобных значений аргумента, можно написать представление, аналогичное представлению для евклидовой (t-канальной) величины (5.5)*. Поэтому естественно принять функцию $\lambda_s^{\text{eff}}(s)$ в выражении (5.6) за определение эффективной константы связи во времениподобной области.

Принимая во внимание, что коэффициенты d_0 и r_0 в (5.5) и (5.6) совпадают, получим следующую взаимосвязь между t- и s-канальными константами:

$$\lambda^{\text{eff}}(q^2) \, = \, - \, q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{\left(s - q^2\right)^2} \, \lambda_s^{\text{eff}}(s) \, , \tag{5.7}$$

$$\lambda_s^{\text{eff}}(s) \, = \, - \, \frac{1}{2\pi i} \int_{s - i\,\epsilon}^{s + i\,\epsilon} \frac{dz}{z} \, \lambda^{\text{eff}}(z) \, . \tag{5.8}$$

Для нахождения s-канальной константы связи можно попытаться воспользоваться соотношением (5.8) в теории возмущений, при этом закрыв глаза на нарушение пертурбативной аппроксимацией необходимых для согласования (5.7) и (5.8) аналитических свойств. Такое рассмотрение ведет к известным π^2-вкладам в пертурбативные s-канальные коэффициенты. Этот вклад оказывается весьма существенным с точки зрения феноменологии. Так, на масштабе массы τ-лептона, где $\bar{\alpha}_s(M_\tau^2) \simeq 0,35$, разница между t- и s-канальными константами, обусловленная π^2-вкладами, достигает $20\,\%$. Однако нарушение при пертурбативном рассмотрении вышеупомянутых аналитических свойств приводит к тому, что найденный таким образом s-канальный заряд при подстановке в выражение (5.7) не воспроизведет исходную функцию. Это говорит о том, что при обычном пертурбативном рассмотрении не удается самосогласованным образом определить константу связи во времениподобной области.

---

*Отметим, что $\lambda_s^{(2)}$ в выражении (5.6) не совпадает с квадратом λ_s, и разложение в (5.6) не является степенным. Аналогичная ситуация имеет место и в аналитической теории возмущений. Соответствующие аналитическому подходу нестепенные разложения изучались в [120].

В ВТВ-подходе соответствующий (5.8) s-канальный заряд находится следующим образом [59]:

$$\lambda_s^{(i)}(s) \,=\, \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2\,\beta_0}\,\left[\,\phi^{(i)}(a_+) \,-\, \phi^{(i)}(a_-)\,\right]\,, \tag{5.9}$$

где $a_\pm$ подчиняются уравнению

$$f(a_\pm) \,=\, f(a_0) \,+\, \frac{2\,\beta_0}{C}\,\left[\ln\,\frac{s}{Q_0^2}\,\pm\,i\,\pi\right]\,, \tag{5.10}$$

в котором в низших порядках функции $f(a)$ определены согласно (4.9), а соответствующие им функции $\phi(a)$ имеют вид

$$\phi^{(2)}(a) = \frac{1}{1-a}\left[2 - 11a - 4(1-a)\ln a + 3(1-a)\ln(1-a)\right], \tag{5.11}$$

$$\phi^{(3)}(a) = -4\ln a - \frac{72}{11}\frac{1}{1-a} + \frac{318}{121}\ln(1-a) + \frac{256}{363}\ln\left(1+\frac{9}{2}a\right)\,. \tag{5.12}$$

Константы связи $\lambda(q^2)$ и $\lambda_s(s)$, очевидно, имеют одинаковые, определяемые свойством асимптотической свободы ультрафиолетовые “хвосты” и одни и те же инфракрасные предельные значения. Однако при конечных значениях аргументов эти функции отличаются друг от друга. Так, на масштабе массы τ-лептона это различие составляет порядка 7%, что заметно меньше, чем при пертурбативном рассмотрении, и поэтому важно с точки зрения феноменологии низкоэнергетических процессов. Отметим, что подобная ситуация с t- и s-константами связи имеет место и в аналитическом подходе в квантовой хромодинамике [114, 115].

τ-распад. Единственным известным на сегодняшний день лептоном, который допускает адронную моду распада, является τ-лептон. Инклюзивный τ-распад (соответствующая диаграмма изображена на рис. 11) предоставляет уникальные возможности для низкоэнергетического тестирования квантовой хромодинамики. Масса τ-лептона $M_\tau = 1777,05\,^{+0,29}_{-0,26}$ МэВ [121], с одной стороны, достаточно велика, чтобы были возможны адронные моды распада, а с другой — в шкале хромодинамических масштабов ее значение мало и находится в низкоэнергетической области.

Именно инклюзивный распад τ-лептона является наиболее интересным, так как его описание в принципе возможно без существенных модельных допущений [122–125] и позволяет с довольно высокой точностью находить значение константы связи $\bar{\alpha}_s(M_\tau^2)$. Удобной величиной для исследования является экспериментально измеряемая величина R_τ, которая определяется отношением адронной и лептонной ширин распада:

$$R_\tau = \frac{\Gamma[\,\tau^- \to \nu_\tau\,\mathrm{hadrons}(\gamma)\,]}{\Gamma[\,\tau^- \to \nu_\tau\,e^-\,\overline{\nu}_e\,(\gamma)\,]}. \tag{5.13}$$

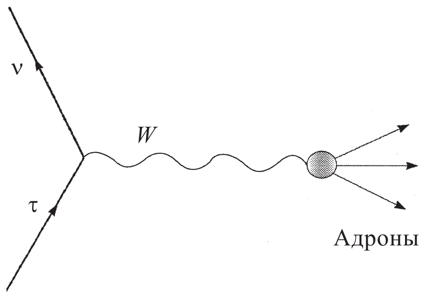

Рис. 11. Диаграмма инклюзивного распада τ-лептона

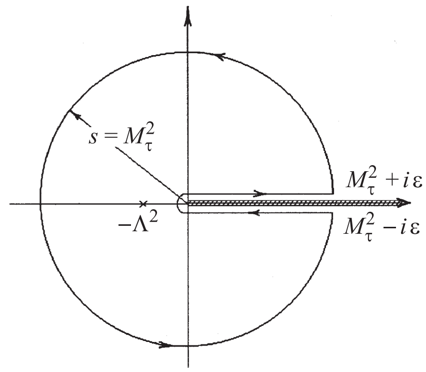

Рис. 12. Переход к контурному представлению для R_τ

Исходным выражением для теоретического анализа служит следующая формула:

$$R_\tau = 2\int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2}\left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) \tilde{R}(s)\,, \tag{5.14}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}(s) &= \frac{\mathrm{N}}{2\pi i}\left[\Pi(s+i\epsilon) - \Pi(s-i\epsilon)\right]\,, \\ \Pi(s) &= \sum_{q=d,s} |V_{uq}|^2 \left(\Pi_{uq,V}(s) + \Pi_{uq,A}(s)\right)\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Здесь V_{uq} — элементы матрицы Кобаяши — Маскава, а нормировочный фактор N определяется таким образом, чтобы на партонном уровне выполнялось $\tilde{R}^{(0)}_{\mathrm{parton}} = 3$. В рассматриваемом ниже случае безмассовых кварков векторный и аксиально-векторный адронные корреляторы в (5.15), $\Pi_{uq,V}$ и $\Pi_{uq,A}$, совпадают.

При пертурбативном анализе полулептонного τ-распада сразу же встречаемся с трудностью применения исходной формулы (5.14). Действительно, параметризация функции $\tilde{R}(s)$, которая в рассматриваемом здесь случае безмассовых кварков просто совпадает с отношением $R(s)$ для процесса e^+e^--аннигиляции в адроны, с помощью пертурбативной константы связи, обладающей нефизическими особенностями, приводит к сингулярностям подынтегрального выражения в (5.14). В [122] был предложен следующий выход из этого затруднения. Интеграл (5.14) можно представить как комбинацию интегралов по берегам разреза в комплексной плоскости s (см. рис. 12). Затем по теореме Коши этот интеграл можно преобразовать к интегралу по контуру

$|s| = M_\tau^2$. В итоге, после интегрирования по частям, приходим к контурному представлению для R_τ через D-функцию (5.2):

$$R_\tau \,=\, \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z}\,(1\,-\,z)^3\,(1\,+\,z)\,D(M_\tau^2 z)\,. \tag{5.16}$$

Запишем D-функцию в виде

$$D(M_\tau^2 z) \,=\, d_0\,\left[\,1\,+\,d_1\,\lambda^{\rm eff}(M_\tau^2 z)\,\right] \tag{5.17}$$

и выделим из R_τ вклад сильных взаимодействий Δ_τ:

$$R_\tau \,=\, R_\tau^{(0)}\,(\,1+\,\Delta_\tau\,)\,, \tag{5.18}$$

где соответствующая партонному уровню величина $R_\tau^{(0)}$ определяется следующим образом:

$$R_\tau^{(0)} \,=\, 3\,(\,|V_{ud}|^2\,+\,|V_{us}|^2\,)\,S_{\rm EW}\,. \tag{5.19}$$

Здесь $S_{\rm EW} = 1,0194$ — известный электрослабый фактор, и матричные элементы Кобаяши — Маскава имеют следующие значения $|V_{ud}| = 0,9753$ и $|V_{us}| = 0,221$ [121, 123].

Для Δ_τ находим выражение

$$\Delta_\tau \,=\, \frac{1}{2\pi i}\,d_1 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}\,(1-z)^3\,(1+z)\,\lambda^{\rm eff}\,(M_\tau^2\,z)\,, \tag{5.20}$$

которое после подстановки $z = -M_\tau^2 \exp{(i\theta)}$ и учета того, что коэффициент $d_1 = 4$, переписывается в удобном для численных расчетов виде

$$\Delta_\tau = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\left(1+2e^{i\theta}-2e^{3i\theta}-e^{4i\theta}\right)\,\lambda^{\rm eff}\left(M_\tau^2 e^{i\theta}\right)\,. \tag{5.21}$$

Для безмассовых схем перенормировки особо следует рассмотреть вопрос о числе активных кварков. Отметим, что в восходящем к Н.Н. Боголюбову массовозависимом ренормгрупповом формализме, развитом Д.В. Ширковым в работах [128, 129], этой проблемы не возникает. Такой алгоритм гладкой “сшивки” был использован в [130] для анализа поведения инвариантного заряда в широком интервале переданных импульсов. Однако в схемах типа MS необходим дополнительный анзац, позволяющий согласованно рассматривать различное число кварков. Обычно используется “сшивка” бегущей константы связи, отвечающей различному числу фермионов, в евклидовой области при $Q = \xi\, m_q$ с некоторым параметром сшивки $1 \le \xi \le 2$ [126] (см. также [127]). Очевидно, что такая процедура приводит к разрыву производной и нарушает упомянутые выше аналитические свойства инвариантного заряда. В ВТВ-подходе этой трудности можно избежать, воспользовавшись возможностью самосогласованного определения эффективного заряда во времениподобной области, в которой число активных кварков непосредственно связано с энергией рождения кварковой пары. При этом переход между областями с различным числом фермионов определяется следующей системой уравнений*:

$$\frac{1}{\beta_0(f-1)}\,\mathrm{Im}\,\phi(a_+^{(f-1)}) = \frac{1}{\beta_0(f)}\,\mathrm{Im}\,\phi(a_+^{(f)}), \tag{5.22}$$

$$\frac{1}{C^{(f-1)}}\,\mathrm{Im}\left[\left(a_+^{(f-1)}\right)^2\left(1+3a_+^{(f-1)}\right)\right] = \frac{1}{C^{(f)}}\,\mathrm{Im}\left[\left(a_+^{(f)}\right)^2\left(1+3a_+^{(f)}\right)\right],$$

которая позволяет установить соотношение между параметрами $C^{(f)}$ и $a_0^{(f)}$, отвечающими областям с различным числом активных кварков. В результате такой процедуры мы приходим к следующей привлекательной с физической точки зрения картине. Бегущий параметр разложения в евклидовой области, восстановленный с помощью дисперсионного интеграла (5.7), как и в массовозависимых схемах, не соответствует какому-то определенному числу фермионов, он будет "знать" обо всех порогах в физической области.

Обработка экспериментальных данных по инклюзивному распаду τ-лептона, выполненная [60] в порядке $O(a^3)$, привела к следующим значениям s- и t-канальных констант связи: $\alpha_s(M_\tau^2) = 0,37$ и $\alpha(M_\tau^2) = 0,40$. Таким образом, значение t-канальной константы связи несколько больше величины инвариантного заряда, определенного во времениподобной области. Отметим, что аналогичный факт имеет место и при проведенном в [116, 117] анализе, основанном на аналитической теории возмущений. Выполненный в [61] расчет с точностью $O(a^5)$ приводит к несколько меньшему значению извлекаемых констант связи. Заметное влияние на величину инвариантного заряда, найденного из тех же экспериментальных данных, оказывает ренормалонный вклад. Эти вопросы обсудим ниже.

Ренормалонный вклад. Рассмотрим теперь способ эффективного учета вклада ренормалонных цепочек [69]. В низшем порядке пертурбативная аппроксимация D-функции имеет вид $D(t,\lambda) = 1 + 4\lambda(\mu^2)$, где $t = Q^2/\mu^2$. Стандартное ренормгрупповое суммирование ведущих логарифмов приводит к подстановке $\lambda(\mu^2) \to \overline{\lambda}(t,\lambda)$. Однако из-за призрачного полюса у бегущей константы связи при $Q^2 = \Lambda_{QCD}^2$ такая подстановка приводит к нарушению

*Здесь мы приводим систему уравнений (5.22), определяющую процедуру сшивки, в порядке $O(a^3)$. Функция $\phi(a)$ в ней определяется выражением (5.12), а a_+ удовлетворяет уравнению (5.10).

аналитических свойств D-функции в комплексной плоскости $q^2 = -Q^2$, в которой D-функция является аналитической с разрезом вдоль положительной части вещественной оси. Эта ситуация может быть исправлена, если заметить, что используемое решение ренормгруппового уравнения, эквивалентное подстановке $\lambda(\mu^2) \to \overline{\lambda}(t,\lambda)$, не является единственным. Общим решением является некоторая функция бегущей константы связи с асимптотическим поведением $1 + 4\lambda$ в области малых λ. Чтобы сохранить аналитические свойства D-функции, запишем ее как дисперсионный интеграл от функции $R(s) = (1/\pi)\,\mathrm{Im}\,\Pi(s + i\epsilon)$. Если теперь для $R(s)$ применить метод ренормгруппы, то получим $D(t,\lambda) = 1 + 4\lambda_{\rm eff}(t,\lambda)$ со следующим представлением Бореля для эффективной константы связи

$$\lambda_{\rm eff}(t,\lambda) \,=\, \int_0^\infty db\, \exp\left[-\frac{b}{\overline{\lambda}(t,\lambda)}\right] B(b)\,, \tag{5.23}$$

где $B(b) = \Gamma(1 + b\beta_0)\,\Gamma(1 - b\beta_0)$.

Таким образом, в борелевской b-плоскости имеются сингулярности в точках $b\beta_0 = -1, -2, ...$ и $b\beta_0 = 1, 2, ...$, которые соответствуют ультрафиолетовым и инфракрасным ренормалонам. Первая инфракрасная ренормалонная сингулярность при $b\beta_0 = 1$ отвечает степенным поправкам $1/Q^2$, которые, как известно, отсутствуют в операторном разложении. Хотя отсутствие сингулярности при $b = 1/\beta_0$ не является строго доказанным фактом (см., например, дискуссию в [125]), разумно для согласования со структурой операторного разложения предположить, что инфракрасные ренормалонные сингулярности начинаются с $b = 2/\beta_0$. Этот факт приводит к дополнительному ограничению на выбор ренормгруппового решения. Интегрируя в исходном дисперсионном представлении D-функции по частям и выбирая затем $R(s)$ в стандартном ренормгрупповом виде, находим следующее выражение для эффективной константы:

$$\lambda_{\rm eff}(t,\lambda) = \int_0^\infty d\,\tau\,\omega(\tau)\frac{\overline{\lambda}(kt,\lambda)}{1 + \overline{\lambda}(kt,\lambda)\beta_0\,\ln\tau}\,. \tag{5.24}$$

Здесь фактор k зависит от выбора ренормализационного предписания. Полученная таким образом функция

$$\omega(\tau) = \frac{2\tau}{(1+\tau)^3} \tag{5.25}$$

описывает распределение виртуальностей в кварковой петле. Эта функция совпадает с используемой в работе [131] и найденной на основе других соображений и, как показано на рис. 13, близка к точной [132].

Функция $B(b)$, возникающая в борелевском преобразовании эффективной константы (5.24), имеет вид

$$B(b) \,=\, \Gamma(1 \,+\, b\beta_0)\,\Gamma(2 \,-\, b\beta_0)\,. \tag{5.26}$$

Таким образом, описанная выше процедура привела к тому, что положение ультрафиолетовых сингулярностей не изменилось, в то время как инфракрасные сингулярности начинаются теперь с $b = 2/\beta_0$. В отличие от пертурбативного подхода, приводящего к сингулярностям подынтегрального выражения в (5.24), в методе a-разложения интеграл (5.24) оказывается хорошо определенным.

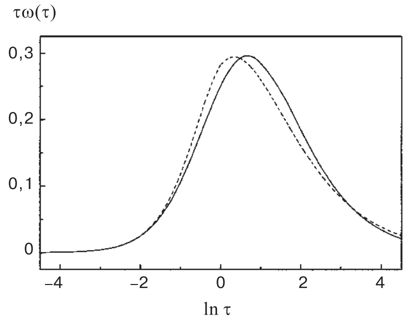

Рис. 13. Функция распределения виртуальностей $\tau\,\omega(\tau)$ в кварковой петле. Сплошная кривая соответствует модельной функции (5.25), пунктирная — точному расчету [132]

Вернемся опять к рассмотрению инклюзивного распада τ-лептона и оценим, воспользовавшись вышеизложенным приемом, влияние ренормалонного вклада на величину извлекаемой из τ-распада константы связи.

Представим, как и ранее, R_τ в виде $R_\tau = R_\tau^0\,(1 + \Delta_\tau)$, где вклад сильного взаимодействия может быть записан следующим образом:

$$\Delta_\tau = 12\,d_1 \int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2} \left(\frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right) \tilde{\lambda}(ks)\,. \tag{5.27}$$

В $\overline{\text{MS}}$-схеме $k = \exp(-5/3)$ [133], а эффективная константа $\tilde{\lambda}$ связана с параметром разложения:

$$\tilde{\lambda}(\sigma) \;=\; \frac{a^2}{C} + 3\frac{a^3}{C} + \frac{a^4}{C}\left(6 \,+\, \frac{1}{C}\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{a^5}{C}\left(10 \,+\, \frac{6}{C}\frac{d_2}{d_1}\right), \tag{5.28}$$

где d_1 и d_2 — коэффициенты пертурбативного разложения D-функции [134]:

$$d_1 = 4\,, \qquad d_2 = \frac{2}{3}\,[365 - 22N_f - 8\zeta(3)\,(33 - 2N_f)]\,. \tag{5.29}$$

Здесь $\zeta(n)$ – ζ-функция Римана и $\zeta(3) \simeq 1,202$.

Зависимость бегущего параметра a от импульсной переменной σ определяется с помощью метода ренормализационной группы и может быть найдена как решение следующего уравнения:

$$\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} \;=\; \frac{C}{2\,\beta_0}\left[\tilde{f}(a) \,-\, \tilde{f}(a_0)\right], \tag{5.30}$$

где σ_0 — некоторая точка нормировки, a_0 — соответствующее ей значение параметра a. Функция $\tilde{f}$ имеет вид

$$\tilde{f}(a) = \frac{1}{5\,(5 + 3B)}\,[\,x_1\,J(a,a_1) + x_2\,J(a,a_2) + x_3\,J(a,a_3)\,]\,, \tag{5.31}$$

где

$$J(a,b) = -\frac{2}{a^2 b} - \frac{4}{ab^2} - \frac{12}{ab} - \frac{9}{(1-a)(1-b)} + \frac{4+12b+21b^2}{b^3}\ln a + \\ + \frac{30 - 21b}{(1-b)^2}\ln(1-a) - \frac{(2+b)^2}{b^3\,(1-b)^2}\ln(a-b)\,. \tag{5.32}$$

В выражении (5.31) параметры a_i являются корнями полинома

$$\phi(a) = 1 + \frac{9}{2}a + 2(6 + a)a^2 + 5\left(5 + 3\frac{\beta_1}{2C\beta_0}\right)a^3 \tag{5.33}$$

и

$$x_i = \frac{1}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}\,, \tag{5.34}$$

где индексы $\{i,j,k\}$ переставляются циклическим образом. Решение уравнения (5.30), определяющее бегущий параметр $a = a(\sigma)$, в силу монотонности функции $\tilde{f}(a)$ является единственным.

Для экспериментального значения $R_\tau^{\exp} = 3,56 \pm 0,03$ [135, 136] * в случае трех активных кварков находим соответствующее значение сильной константы связи на масштабе массы τ-лептона $\alpha_s(M_\tau^2) = 0,326 \pm 0,015$. Это значение можно сравнить с $\alpha_s(M_\tau^2) = 0,40$, найденным в [60] при расчетах с точностью $O(a^3)$ и без учета ренормалонного вклада. Таким образом, вклад ренормалонных цепочек, а также следующих членов a-разложения, оказывается существенным при извлечении константы связи сильного взаимодействия из экспериментальных данных по инклюзивному распаду τ-лептона. Для эволюции найденного значения $\alpha_s(M_\tau^2)$ на масштаб Z-бозона следует учесть пороги, обусловленные тяжелыми c- и b- кварками. Как было отмечено выше, в данном подходе возможна такая процедура сшивки, при которой константа связи, определенная во времениподобной области, и ее производная остаются непрерывными на пороге** $s = 4m_q^2$. Используя следующие значения масс

*Анализ другого экспериментального значения R_τ, отвечающего мировому среднему, приведенному в [137], был выполнен в [69].

**Ранее мы привели соответствующую случаю $O(a^3)$ систему уравнений (5.22). Для рассматриваемого здесь случая $O(a^5)$ определяющая процедуру сшивки система уравнений, а также некоторые другие подробности могут быть найдены в [138].

тяжелых кварков: $m_c = 1,6$ ГэВ и $m_b = 4,5$ ГэВ, для R_Z-отношения получаем значение $R_Z = 20,85 \pm 0,03$, которое находится в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными [121].

6. ПРАВИЛА СУММ КХД И a-РАЗЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим проблему описания $q\bar{q}$-связанных состояний на основе метода правил сумм квантовой хромодинамики [139] (см. также обзорную статью [140]), применяя при этом ВТВ-подход для описания не только пертурбативных, но и, следуя недавней работе [72], существенно непертурбативных вкладов. Здесь следует отметить, что ВТВ-метод дает единое описание системы, и явное разделение (с точки зрения обычного рассмотрения, основанного на операторном разложении) на пертурбативную, содержащую логарифмическую зависимость, и непертурбативную часть, определяемую степенными поправками, не всегда естественно и возможно лишь в простейших случаях, как, например, в приведенном в [72] примере.

Начнем анализ с рассмотрения адронного коррелятора, отвечающего некоторому току с матричной структурой Г, мнимую часть которого на двухпетлевом уровне запишем в виде

$$\mathrm{Im}\Pi^{\Gamma}(s) = \frac{1}{4\pi}\left[\Pi_{\Gamma}^{(0)}(s) + 4\lambda\Pi_{\Gamma}^{(1)}(s)\right]. \tag{6.1}$$

Сводка необходимых для дальнейшего формул для компонент $\Pi^{(0)}$ и $\Pi^{(1)}$ приведена в приложении В.

Рассмотрим первый, связанный с D-функцией момент

$$M_{1+N_\Gamma}^{(\Gamma)}(Q^2) \equiv -\frac{d\Pi^{\Gamma}(Q^2)}{dQ^2} = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{ds}{(s+Q^2)^2}\,\mathrm{Im}\Pi^{\Gamma}(s)\,. \tag{6.2}$$

Определяя переменную $\sigma = s - 4m^2$, которая связывается с виртуальностью в ренормалонном представлении, и $u^2 = \sigma/(\sigma + 4m^2)$, получаем

$$\begin{aligned} M_{1+N_\Gamma}^{(\Gamma)}(Q^2) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} d\sigma \frac{(\sigma+4m^2)^{N_\Gamma}}{(Q^2+\sigma+4m^2)^{2+N_\Gamma}} \times \\ &\times \left[\Pi_{\Gamma}^{(0)}(u) + 4\lambda\Pi_{\Gamma}^{(1)}(u)\right]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Дополнительная проблема, которую следует обсудить особо, связана с так называемыми кулоновскими сингулярностями. Пертурбативное разложение осуществляется по степеням эффективного параметра λ/u. В пертурбативном рассмотрении моментов высшего порядка доминирующей оказывается область малых u, и пертурбативная аппроксимация становится неприменимой [142] (см. также [143, 144]). Таким образом, для непротиворечивого рассмотрения моментов высокого порядка необходимо провести некоторое суммирование кулоновских сингулярностей. Переход к рассмотренному выше ренормалонному представлению позволяет выполнить необходимое суммирование [72]. Это может быть продемонстрировано на простом примере, что мы и делаем в приложении C, где также рассматривается связь с известным фактором Зоммерфельда — Сахарова [145, 146].

Перепишем (6.3) в следующем виде:

$$M^{(\Gamma)}_{1+N_\Gamma}(Q^2) \quad = \quad \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d\sigma \frac{(\sigma+4m^2)^{N_\Gamma}\Pi^{(0)}_\Gamma(u)}{(Q^2+W(\sigma))^{2+N_\Gamma}}, \tag{6.4}$$

где

$$W(\sigma) \quad = \quad (\sigma+4m^2)\left[1-4\lambda\frac{\psi_\Gamma(u)}{\Pi^{(0)}_\Gamma(u)}\right], \tag{6.5}$$

$$\psi_\Gamma(u) \quad = \quad (1-u^2)^{1+N_\Gamma}\int_0^u du \frac{2u}{(1-u^2)^{2+N_\Gamma}}\Pi^{(1)}_\Gamma(u). \tag{6.6}$$

Применение метода ренормгруппы к подынтегральному выражению в (6.4), когда ток имеет нулевую аномальную размерность, приводит к замене константы связи λ и массы m на бегущие параметры $\overline{\lambda}(\sigma)$ и $\overline{m}(\sigma)$, где в рассматриваемой $\overline{MS}$-схеме аргумент σ должен быть масштабирован фактором $k_{\overline{MS}} = \exp(-5/3)$ [133]. В том случае, когда аномальная размерность тока ненулевая, появляется связанный с ней дополнительный общий фактор, который, однако, как будет понятно из дальнейшего, оказывается несущественным для выводов, основанных на анализе моментов с большими номерами n, так что в результате этот фактор не играет роли при таком рассмотрении.

Будем использовать ВТВ бегущие параметры, что не приводит, как было отмечено выше, к каким-либо трудностям, связанным с определением интеграла, когда эти параметры входят в подынтегральное выражение. Таким образом, выражение для момента n-го порядка имеет вид

$$M^{(\Gamma)}_n(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d\sigma \frac{[\sigma+4m^2(k\sigma)]^{N_\Gamma}}{[Q^2+W(\sigma)]^{1+n}}\,\Pi^{(0)}_\Gamma(u)\,. \tag{6.7}$$

Здесь

$$W(\sigma) = \left[\sigma+4m^2(k\sigma)\right]\left[1-4\lambda_{\text{eff}}(k\sigma)\frac{\psi_\Gamma(u)}{\Pi^{(0)}_\Gamma(u)}\right], \tag{6.8}$$

и теперь $u^2 = \sigma/[\sigma + 4m^2(k\sigma)]$. В методе правил сумм масса первого резонанса может быть определена через отношение моментов

$$R_n^\Gamma = \frac{M_{n-1}^\Gamma}{M_n^\Gamma} \tag{6.9}$$

при больших номерах n.

Рассмотрим спектр масс семейств чармония и боттония ($c\bar{c}$- и $b\bar{b}$-связанные состояния). В обсуждаемом подходе параметрами являются: значение константы связи α_0 в некоторой точке нормировки, в качестве которой мы будем брать масштаб массы τ-лептона, а также значение массы тяжелого кварка (в данном случае m_c или m_b), заданного на некотором масштабе (будем использовать для этого 1 ГэВ). При этом, конечно, соответствующие лучшему фиту значения должны согласовываться с другими данными. Что касается параметра C, то мы не будем его варьировать, а примем для него найденное ранее значение $C = 4,1$, соответствующее уровню $O(a^3)$ аппроксимации констант перенормировки [51]. В работе [72] было найдено значение константы связи $\alpha_0(M_\tau^2) = 0,379$. Для масс c- и b-кварков получены значения $m_c = 1,51$ ГэВ и $m_b = 4,72$ ГэВ, которые хорошо согласуются с другими результатами [121].

При больших n основной вклад в моменты определяется окрестностью точки минимума функции $W(\sigma)$: $\sigma = \tilde{\sigma}$. Выполненный в работе [72] анализ различных каналов показал, что для $c\bar{c}$-систем такой минимум достигается при $\tilde{\sigma} \sim 4 \div 6$ ГэВ^2, а для $b\bar{b}$-состояний при $\tilde{\sigma} \sim 20 \div 30$ ГэВ^2. Основной вклад в моменты (6.7) при больших n определяется стационарной точкой, и, очевидно, для отношения моментов можем записать

$$R_n(Q^2) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q^2 + W(\tilde{\sigma})\,. \tag{6.10}$$

Эту величину следует сравнить с соответствующим адронным отношением $R_n^{\mathrm{had}}(Q^2)$, для которого в приближении узких резонансов легко находим

$$R_n^{\mathrm{had}}(Q^2) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q^2 + M_R^2\,. \tag{6.11}$$

Таким образом, при любых значениях Q для массы резонанса получаем

$$M_R = \sqrt{W(\tilde{\sigma})}\,. \tag{6.12}$$

Отметим, что факт выпадения зависимости от Q не является тривиальным. Такая зависимость присутствует при обычном рассмотрении и требует специального анализа (см. обсуждение в [140]).

На рис. 14 и 15 приведены функции $\sqrt{R_n}$ и $\sqrt{W(\sigma)}$ для $c\bar{c}$- и $b\bar{b}$-систем соответственно. Результаты для $c\bar{c}$-систем с массой c-кварка $m_c = 1,51$ ГэВ суммированы в табл.2, а для $b\bar{b}$-систем с массой b-кварка $m_b = 4,72$ ГэВ — в табл.3. Используемые здесь массы c- и b-кварков хорошо согласуются с оценками, даваемыми другими подходами [121].

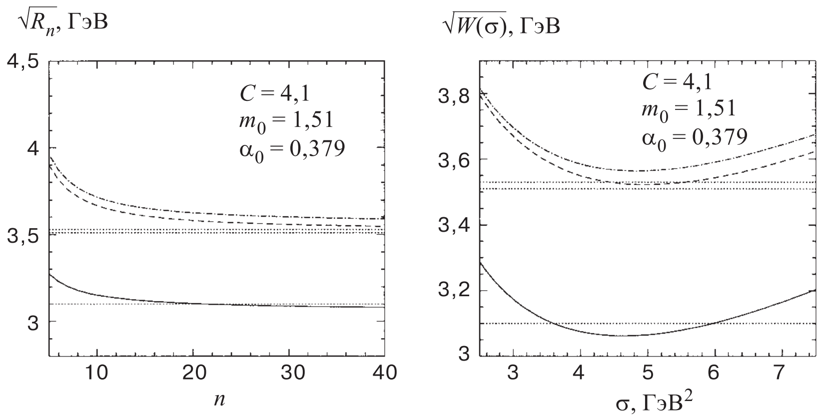

Рис. 14. Поведение функций $\sqrt{R_n}$ в зависимости от номера n и $\sqrt{W(\sigma)}$ как функции σ для связанных $c\bar{c}$-состояний. Сплошная линия соответствует векторному току, пунктир отвечает аксиально-векторному току, а штрихпунктирная кривая — A'-мезону. Горизонтальные прямые отвечают массам соответствующих мезонов, значения которых взяты из [137]

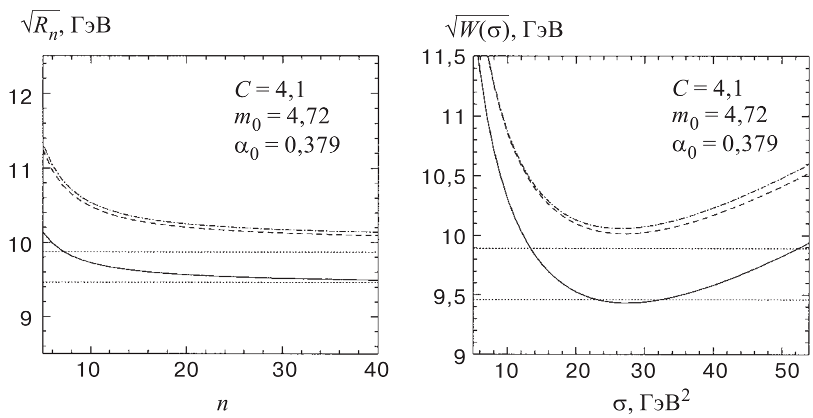

Рис. 15. То же, что и на рис. 14, но для $b\bar{b}$-систем

Подводя краткий итог приведенного в этом разделе анализа, отметим, что при таком подходе область стабильности моментов по переменной n значительно расширилась по сравнению с обычным рассмотрением, при котором интервал стабильности находится, как правило, в районе $n = 6 \div 8$. Положительной чертой также является тот факт, что при больших значениях n Q^2-зависимость для отношения вычисляемых таким образом моментов точно такая же, как и в адронном секторе. Расщепление между векторным, аксиально-векторным и A'-состояниями воспроизводится с хорошей точностью. Отметим, однако, что изложенный в этом разделе подход к описанию спектроскопии кваркониев находится лишь в самом начале своего развития. Ряд вопросов нуждается в уточнении и дальнейшей разработке. Например, более детального изучения требует вопрос, связанный с описанием скалярных и псевдоскалярных состояний, для которых, по-видимому, следует принимать в расчет некоторые другие дополнительные эффекты [72].

Таблица 2. Спектр масс $c\bar{c}$-систем

Ток	$M_{\rm exp}$, ГэВ	$M_{\rm theor} = \sqrt{W(\tilde{\sigma})}$, ГэВ	$\tilde{\sigma}$, ГэВ^2
j_V	3,10	3,06	4,6
j_A	3,51	3,52	4,8
$j_{A'}$	3,53	3,56	4,8
j_S	3,42	3,27	6,0
j_P	2,98	3,19	3,9

Таблица 3. Спектр масс $b\bar{b}$-систем

Ток	$M_{\rm exp}$, ГэВ	$M_{\rm theor} = \sqrt{W(\tilde{\sigma})}$, ГэВ	$\tilde{\sigma}$, ГэВ^2
j_V	9,46	9,43	27
j_A	9,89	10,02	26
$j_{A'}$	–	10,07	26
j_S	9,86	9,80	30
j_P	–	9,56	24

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, при построении пертурбативного разложения в качестве возмущения обычно используется часть полного лагранжиана, называемая лагранжианом взаимодействия, которая содержит высшие степени полей. Свободная система при этом описывается гармонической, квадратичной по полям частью. В результате для моделей с одной константой связи возникает степенное разложение, которое для большинства интересных случаев является асимптотическим. При малых значениях константы связи ряд теории возмущений, несмотря на асимптотический характер, позволяет анализировать довольно широкий круг практически важных задач. Тем не менее для решения многих вопросов необходимо выйти за рамки теории возмущений.

В данной работе представлен обзор результатов, полученных на основе непертурбативных вариационных разложений в квантовой теории поля. Идея такого подхода достаточно проста. Обычное разбиение полного функционала действия, соответствующего некоторой квантовой системе, на свободную, квадратичную по полям часть и часть, описывающую взаимодействие и содержащую высшие степени полей, в известной степени условно. Система описывается полным лагранжианом, и традиционное разбиение его на свободную часть и часть, соответствующую взаимодействию, во многом продиктовано необходимостью нахождения приближенных решений по теории возмущений, когда процедура точного интегрирования неизвестна. В формализме континуального интеграла возможность проведения вычислений связана с гауссовыми функциональными квадратурами. Их очевидное применение, когда под знаком функционального интеграла разложение осуществляется по степеням исходного действия взаимодействия, приводит к традиционной теории возмущений. Однако, как мы показали, теория возмущений — не единственно возможное следствие гауссовского интегрирования. Существует иной способ аппроксимации функциональных интегралов и проведения вычислений в квантовой теории поля. Этот метод опирается на “зондирование” системы с помощью специальных функционалов, содержащих пробные параметры вариационного типа. Изучая отклик системы на изменение таких параметров вариационного “зонда”, можно выбрать их оптимальным образом, так, чтобы вариационная аппроксимация была адекватна рассматриваемой системе не только в области слабой связи.

Рассмотренный подход, названный нами вариационной теорией возмущения, объединяет в себе некоторый вариационный принцип и регулярный метод вычисления поправок. Исходный функционал действия в ВТВ-подходе переписывается с помощью некоторой добавки вариационного типа, и применяется разложение по эффективному действию взаимодействия. Специальные параметры, входящие в вариационный функционал, позволяют управлять свойствами возникающего плавающего ряда. Таким образом, уже с самого начала, в отличие от многих иных непертурбативных подходов, в ВТВ рассматриваемая величина представляется в виде некоторого ряда, что позволяет вычислить необходимые поправки и изучить вопрос устойчивости полученных результатов. Иными словами, рассмотренный здесь метод вариационных разложений предоставляет возможность ответа на вопрос, в какой мере основной вклад, определяемый вариационным путем на основе того или иного принципа оптимизации, адекватен рассматриваемой системе и какова область применимости найденных выражений. Так же, как в стандартной теории возмущений, для построения ВТВ используются лишь гауссовские функциональные квадратуры. При этом, конечно, возникающий ряд обладает иной структурой и, кроме того, модифицируются некоторые фейнмановские правила на уровне пропагаторов и вершин.

В случае КХД применение идеи построения вариационных рядов приводит к новому малому параметру разложения. Этот параметр подчиняется уравнению, решения которого оказываются всегда меньше единицы при любой величине исходной константы связи. По сравнению с теорией возмущений, оставаясь в рамках применимости такого разложения, можно продвинуться в область существенно меньших энергий. Для применяемого здесь метода можно рассчитывать на индуцированную сходимость ВТВ-ряда. На сегодняшний день доказательство такого рода сходимости имеется лишь для простых моделей. В случае квантовой хромодинамики предложить строгое доказательство индуцированной сходимости рассмотренного здесь вариационного разложения пока не представляется возможным. Однако проведенный здесь анализ приводит к некоторым аргументам эмпирического характера в пользу возможного существования сходимости такого типа. Например, поведение непертурбативной β-функции, найденной методом a-разложения в различных порядках ВТВ-аппроксимации, оказалось удивительно устойчивым к влиянию поправок в смысле индуцированной сходимости в широком интервале изменения константы связи. Важной особенностью ВТВ-подхода является тот факт, что для достаточно малых $\bar{\alpha}_s$ вариационное разложение воспроизводит стандартную теорию возмущений, и пертурбативная высокоэнергетическая физика сохраняется. При продвижении в область низких энергий, когда обычная теория возмущений перестает работать ($\bar{\alpha}_s(Q^2) \sim 1$), параметр ВТВ-разложения остается все еще малым, и мы не выходим за рамки применимости метода.

В обзоре рассмотрен ряд феноменологических приложений ВТВ-метода. Одним из его применений является описание процесса e^+e^--аннигиляции в адроны в области низких (для масштабов КХД) энергий. Для возможности сравнения с экспериментальными данными применен специальный метод сглаживания резонансов, так называемая "смиринг"-процедура. Использование "смиринг"-метода позволяет избежать трудностей, связанных с пороговыми сингулярностями в пертурбативном разложении. Однако прямое применение теории возмущений для описания соответствующих экспериментальных данных все еще остается невозможным. Причина этого связана с нефизическими сингулярностями, которые имеются у пертурбативного инвариантного заряда в инфракрасной области. В методе a-разложения такие сингулярности отсутствуют, "смиринг"-интегралы оказываются хорошо определенными, и уже в первом порядке ВТВ-разложения удается добиться хорошего согласия с экспериментальными данными.

Применение обычного ренормгруппового ресуммирования в теории возмущений приводит к нефизическим особенностям типа призрачного полюса в поведении инвариантного заряда. Наличие таких особенностей ведет к конфликту с фундаментальными принципами теории. Важной чертой ВТВ-подхода является возможность сохранения продиктованных общими принципами квантовой теории поля аналитических свойств эффективной константы разложения. Именно этот факт позволяет самосогласованным образом ввести определение инвариантного заряда во времениподобной области. Это понятие оказывается удобным для построения процедуры сшивки во времениподобной области, согласно которой число активных кварков непосредственно связано с порогами рождения кварк-антикварковой пары. Такая процедура в отличие от часто используемой сшивки в евклидовой области не разрушает аналитичности. Отсутствие нефизических особенностей при использовании ВТВ-метода играет ключевую роль при получении ренормалонного представления. ВТВ-подход, будучи в своей основе непертурбативным подходом, позволяет по-новому взглянуть на использование метода правил сумм КХД, в частности, на его применение к описанию спектра масс мезонов. Корректные аналитические свойства оказываются принципиально важными для описания инклюзивного распада τ-лептона. Этот процесс предоставляет уникальную возможность для низкоэнергетического тестирования КХД. Здесь точность экспериментальных данных заметно выше, чем для многих других низкоэнергетических процессов, а метод теоретического описания позволяет в принципе избежать допущений модельного характера. Однако использование теории возмущений ведет к вышеупомянутым нефизическим особенностям, и необходимые для непротиворечивого описания свойства аналитичности разрушаются. В рассмотренном здесь методе a-разложения нефизических сингулярностей можно избежать. В этом отношении ВТВ-подход близок к аналитической теории возмущений, в которой ренормгрупповое ресуммирование выполняется таким образом, чтобы не входить в конфликт с общими принципами теории. Это приводит к тому, что корректные аналитические свойства восстанавливаются за счет появляющихся автоматически непертурбативных вкладов. Несмотря на различие этих двух методов, один из которых основывается на вариационном разложении, а другой ставит во главу угла ренормгрупповое суммирование с наложением условия аналитичности, они имеют немало общих черт и зачастую приводят к близким друг к другу следствиям.

Авторы выражают глубокую благодарность Х.Ф. Джоунсу, А. Ритцу и О.П. Соловцовой, в соавторстве с которыми были получены многие из изложенных здесь результатов, а также признательность Б.А. Арбузову, А.М. Балдину, В.Г. Кадышевскому, В.А. Матвееву, К.А. Милтону, М.В. Савельеву, А.Н. Тавхелидзе, А.Т. Филиппову, Д.В. Ширкову и Н.М. Шумейко за интерес к работе и полезные обсуждения затронутых здесь вопросов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-02-17727).

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Решение уравнений методом вариационных итераций. Рассмотрим кратко еще одну возможность, которую предоставляет вариационная теория возмущений. Речь идет о нахождении приближенных решений уравнений, при использовании метода вариационных итераций. Такой прием, как и в случае функциональных интегралов, приводит к "плавающим" разложениям, свойства сходимости которых можно контролировать с помощью специальных вариационных параметров. В наше намерение здесь не входит сколь-нибудь детальное обсуждение этого вопроса. Приведем лишь некоторую иллюстрацию возможностей применения идеи ВТВ для нахождения решений уравнений.

Рассмотрим для конкретности нерелятивистское уравнение Липпмана — Швингера для функции Грина $G(E;\mathbf{p},\mathbf{q})$:

$$\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m}\right) G(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) - \tag{A.1}$$
$$- \int \frac{d\,\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, V(\mathbf{p},\mathbf{q})\, G(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) \;=\; (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,.$$

Итерируя уравнение (A.1), получаем хорошо известный ряд стандартной теории возмущений, который может быть интерпретирован как серия перерассеяний свободной частицы с пропагатором

$$G_0(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) \;=\; \frac{(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})}{E \,-\, \mathbf{p}^2/2m} \tag{A.2}$$

на потенциале $V(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Такое представление возможно в пределе слабой связи, в случае же сильной связи требуется иной подход.

Рассмотрим применение метода вариационной теории возмущений к этой задаче. Запишем уравнение Липпмана — Швингера (A.1) в символическом виде

$$G \,-\, G_0\,V\,G \;=\; G_0\,. \tag{A.3}$$

В соответствии с ВТВ изменим нулевое приближение, записав (A.3) в эквивалентной форме

$$G \,-\, \tilde{G}_0\,\tilde{V}\,G \;=\; \tilde{G}_0\,, \tag{A.4}$$

$$\tilde{V} \;=\; V \,+ \left[\tilde{G}_0^{-1} \,-\, G_0^{-1}\right]. \tag{A.5}$$

Таким образом, итерации этого уравнения могут быть интерпретированы как серия перерассеяний эффективной частицы с пропагатором $\tilde{G}_0$ на новом эффективном потенциале $\tilde{V}$ (см. рис. 16).

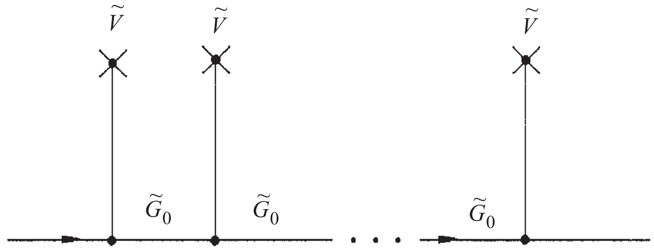

Рис. 16. Диаграммная интерпретация итерационного решения в методе вариационной теории возмущений

Как и в случае гармонической вариационной процедуры, выберем

$$\tilde{G}_0 \;=\; \zeta\, G_0\,. \tag{A.6}$$

В результате ряд ВТВ запишется в виде

$$\begin{aligned} G \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} G_n\,, \\ G_n \;&=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n\,-\,k)!}\left(-\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)^{n-k} g_k\,. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Функции g_k в (A.7) могут быть представлены обычным набором диаграмм с модифицированным пропагатором

$$\tilde{G}_0' \;=\; \frac{1}{1\,+\,\kappa(\zeta^{-1}-1)}\,G_0\,, \tag{A.8}$$

где мы опять для удобства ввели параметр κ, который положим равным единице в конце всех вычислений.

Анализ структуры ВТВ-разложения показывает, что элементы ВТВ-ряда будут пропорциональны новому параметру разложения a в том случае, когда исходная константа g и a связаны соотношением *

$$g \;=\; \frac{1}{C}\frac{a}{1-a}\,. \tag{A.9}$$

Здесь C — параметр вариационного типа, который должен быть определен на основе той или иной процедуры оптимизации.

---

*Рассматриваемая задача о движении частицы во внешнем поле соответствует наиболее простой взаимосвязи нового параметра разложения a и исходной константы связи g.

Чтобы иметь возможность сравнить результат ВТВ, рассмотрим случай сепарабельного взаимодействия

$$V(\mathbf{p},\mathbf{q}) \,=\, g\, f(\mathbf{p}^2)\, f(\mathbf{q}^2)\,. \tag{A.10}$$

В этом случае существует точное решение

$$G(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})}{E\,-\,\mathbf{p}^2/2m} + \frac{g\,f(\mathbf{p})\,f(\mathbf{q})}{(E\,-\,\mathbf{p}^2/2m)\,(E\,-\,\mathbf{q}^2/2m)}\times$$

$$\times\left[1-g\int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{f^2(\mathbf{k}^2)}{E\,-\,\mathbf{k}^2/2m}\right]^{-1}. \tag{A.11}$$

Ограничимся первым нетривиальным порядком ВТВ-приближения, который позволяет получить уравнение на вариационный параметр C и в данном случае соответствует разложению с точностью $O(a^2)$. В этом порядке $(N=2)$ имеем

$$G^{(2)}(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) = g_0(E;\mathbf{p},\mathbf{q})\,+\,a\,\frac{g_1(E;\mathbf{p},\mathbf{q})}{C}+$$

$$+a^2\left[\frac{g_2(E;\mathbf{p},\mathbf{q})}{C^2}\,+\,\frac{g_1(E;\mathbf{p},\mathbf{q})}{C}\right], \tag{A.12}$$

где пертурбативные коэффициенты $g_k(E;\mathbf{p},\mathbf{q})$ имеют вид

$$\begin{aligned}
g_0(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad &= \quad \frac{(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})}{E\,-\,\mathbf{p}^2/2m}\,,\\
g_1(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad &= \quad \frac{g\,f(\mathbf{p}^2)f(\mathbf{q}^2)}{(E\,-\,\mathbf{p}^2/2m)(E\,-\,\mathbf{q}^2/2m)},\\
g_2(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad &= \quad \frac{g^2\,f(\mathbf{p}^2)f(\mathbf{q}^2)}{(E\,-\,\mathbf{p}^2/2m)(E\,-\,\mathbf{q}^2/2m)}\times\\
&\times\quad \int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{f^2(\mathbf{k}^2)}{E\,-\,\mathbf{k}^2/2m}\,.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Принцип минимальной чувствительности

$$\frac{\partial\,G^{(2)}(E;\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial\,C}\,=\,0$$

определяет вариационный параметр C как

$$C\,=\,-\int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{f^2(\mathbf{k}^2)}{E\,-\,\mathbf{k}^2/2m}\,. \tag{A.14}$$

В результате, как нетрудно проверить из сравнения с (А.11), получаем

$$G^{(2)}(E;\mathbf{p},\mathbf{q}) \,=\, G_{\rm exact}(E;\mathbf{p},\mathbf{q})\,, \tag{A.15}$$

а все последующие члены ВТВ-ряда равны нулю.

В. Корреляторы токов массивных кварков. Запишем здесь двухпетлевые выражения для корреляторов токов массивных кварков. Токи, приведенные ниже, соответствуют формату $j_\Gamma = ...(J^{PC})$.

- *Скалярный ток*: $j_S = \overline{\psi}_i \psi_j$ (0^{++}).
- *Псевдоскалярный ток*: $j_P = i\overline{\psi}_i \gamma_5 \psi_j$ (0^{-+}).
- *Векторный ток*: $j_V = \overline{\psi}_i \gamma_\mu \psi_j$ (1^{--}).
- *Аксиально-векторный ток*: $j_A = (q_\mu q_\nu/q^2 - g_{\mu\nu})\overline{\psi}_i \gamma_\nu\gamma_5 \psi_j$ (1^{++}).
- *A'-ток*: $j_{A'} = \overline{\psi}_i \partial_\mu \gamma_5 \psi_j$ (1^{+-}).

Для параметризации общих компонент корреляторов удобно определить функции [140]:

$$\begin{aligned}
A(u) \;&=\; (1+u^2)\left[\frac{\pi^2}{6} + \ln\frac{1+u}{1-u}\ln\frac{1+u}{2} + 2l\left(\frac{1-u}{1+u}\right) + \right.\\
&\quad \left. +2l\left(\frac{1+u}{2}\right) - 2l\left(\frac{1-u}{2}\right) - 4l(u) + l(u^2)\right] + \\
&\quad +3u\ln\frac{1-u^2}{4u} - u\ln u\,,
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
A'(u) \;&=\; (1+u^2)\left[2l\left[\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2\right] - 2l\left(\frac{u-1}{u+1}\right) - \right.\\
&\quad \left. -3\ln\frac{1-u}{1+u}\ln\frac{1+u}{2} + 2\ln\frac{1-u}{1+u}\ln u\right],
\end{aligned} \tag{B.2}$$

где

$$l(x) \;=\; -\int_0^x dt\,\frac{1}{t}\ln(1-t) \tag{B.3}$$

— функция Спенса.

Необходимые нам функции Π^0 и Π^1 имеют следующий вид.

Векторный ток [140] $(\Gamma = \gamma_\mu)$:

$$N_V \;=\; 0, \tag{B.4}$$

$$\Pi_V^0 \;=\; \frac{1}{2}u(3-u^2), \tag{B.5}$$

$$\Pi_V^1 = 2\left[\left(1-\frac{u^2}{3}\right)A(u)+P_V(u)\ln\frac{1+u}{1-u}+Q_V(u)\right], \tag{B.6}$$

$$P_V(u) = \frac{1}{24}(33+22u^2-7u^4), \tag{B.7}$$

$$Q_V(u) = \frac{1}{4}(5u-3u^3). \tag{B.8}$$

Аксиально-векторный ток [140] ($\Gamma = \gamma_5\gamma_\nu(q_\mu q_\nu/q^2 - g_{\mu\nu})$):

$$N_A = 1, \tag{B.9}$$

$$\Pi_A^0 = u^3, \tag{B.10}$$

$$\Pi_A^1 = \frac{4}{3}\left[u^2A(u)+P_A(u)\ln\frac{1+u}{1-u}+Q_A(u)\right], \tag{B.11}$$

$$P_A(u) = \frac{1}{32}(21+59u^2-19u^4-3u^6), \tag{B.12}$$

$$Q_A(u) = \frac{1}{16}(-21u+30u^3+3u^5). \tag{B.13}$$

A'-ток [140] ($\Gamma = \partial_\mu\gamma_5$):

$$N_{A'} = 2, \tag{B.14}$$

$$\Pi_{A'}^0 = \frac{1}{2}u^3, \tag{B.15}$$

$$\Pi_{A'}^1 = \frac{2}{3}\left[u^2A(u)+P_{A'}(u)\ln\frac{1+u}{1-u}+Q_{A'}(u)\right], \tag{B.16}$$

$$P_{A'}(u) = \frac{1}{16}(13+28u^2+17u^4-2u^6), \tag{B.17}$$

$$Q_{A'}(u) = \frac{1}{24}(-39u+47u^3+6u^5). \tag{B.18}$$

Скалярный ток [141] ($\Gamma = \mathbf{1}$):

$$N_S = 1, \tag{B.19}$$

$$\Pi_S^0 = \frac{3}{2}u^3, \tag{B.20}$$

$$\Pi_S^1 = 2\left[u^2A'(u)+P_S(u)\ln\frac{1+u}{1-u}+Q_S(u)\right], \tag{B.21}$$

$$P_S(u) = \frac{1}{16}(3+34u^2-13u^4), \tag{B.22}$$

$$Q_S(u) = \frac{1}{8}(21u-3u^3). \tag{B.23}$$

Псевдоскалярный ток [141] ($\Gamma = \gamma_5$):

$$N_P = 1, \tag{B.24}$$

$$\Pi_P^0 = \frac{3}{2}u, \tag{B.25}$$

$$\Pi_P^1 = 2\left[A'(u) + P_P(u)\ln\frac{1+u}{1-u} + Q_P(u)\right], \tag{B.26}$$

$$P_P(u) = \frac{1}{16}(19 - 48u + 2u^2 + 3u^4), \tag{B.27}$$

$$Q_P(u) = \frac{1}{8}(21u - 3u^3). \tag{B.28}$$

C. Кулоновские сингулярности. Воспользовавшись простой моделью, рассмотрим вопрос о том, как представление (6.4) позволяет обойти упомянутую трудность, связанную с кулоновскими сингулярностями, и непротиворечивым образом рассматривать моменты с большими номерами n.

Как хорошо известно [142] (см. также [143, 144]), пертурбативное разложение для $\operatorname{Im}\Pi(s)$ даже при небольших значениях константы связи является плохо определенным для малых скоростей

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}\,, \tag{C.1}$$

так как эффективным параметром разложения является величина λ/u. Этот факт приводит к тому, что для моментов с большими номерами n, для которых доминирующий вклад определяется областью $u \sim 1/\sqrt{n}$, а соответствующим эффективным параметром разложения служит величина $\sqrt{n}\lambda$, непосредственное применение исходного пертурбативного ряда не кажется оправданным.

Суммирование таких сингулярных выражений для нерелятивистских кулоновских систем осуществляется с помощью фактора Зоммерфельда-–Сахарова [145, 146]:

$$S = \frac{X}{1 - \exp(-X)}\,, \qquad X = \frac{16\pi^2}{3}\frac{\lambda}{u}. \tag{C.2}$$

В применяемом здесь способе описания кваркониев рассмотрим этот вопрос, используя простую модель. Запишем n-й момент в виде

$$M_n(Y) = \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{(\sigma + Y)^{n+1}}\,, \tag{C.3}$$

где виртуальность $\sigma = s - 4m^2$, а через Y обозначим величину $Y = Q^2 + 4m^2$. Выберем далее спектральную функцию $\rho(\sigma)$, нормированную условием

$\rho(\sigma, \lambda = 0) = 1$, в виде

$$\rho(\sigma) = \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda + \sqrt{\sigma}}\right)^p , \tag{C.4}$$

где p — некоторое положительное целое число.

Пертурбативное разложение (C.4), имеющее вид

$$\rho_{\mathrm{pert}}(\sigma) \sim 1 - p\frac{\lambda}{\sqrt{\sigma}} + O\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\sigma}}\right)^2 \sim 1 - \frac{p}{2m}\frac{\lambda}{u} + O\left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 , \tag{C.5}$$

демонстрирует наличие кулоновских сингулярностей при малых u.

Предполагая определенные свойства гладкости у функции $\rho(\sigma)$ [144], моменты для больших n можно записать в виде

$$M_n(Y) \sim Y^{-(n+1)} \int_0^\infty d\sigma \rho(\sigma) \exp\left(-n\frac{\sigma}{Y}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) . \tag{C.6}$$

Доминирующий вклад определяется областью $\sigma \sim Y/n$, что в терминах переменной u соответствует $u \sim 1/\sqrt{n}$. В то же время без использования пертурбативной аппроксимации для исходных моментов M_n^{ex}, определенных согласно (C.3) со спектральной функцией (C.4), аналогичная асимптотическая формула при больших n, когда в интеграле опять-таки доминирует вклад малых скоростей, имеет вид

$$\rho_{\mathrm{ex}} \longrightarrow \left(1 + \sqrt{n}\frac{\lambda}{\sqrt{Y}}\right)^{-p} . \tag{C.7}$$

Если же исходить из пертурбативного выражения, взятого в порядке $O(\lambda)$, то получим

$$\rho_{\mathrm{pert}} \longrightarrow 1 - p\sqrt{n}\frac{\lambda}{\sqrt{Y}} . \tag{C.8}$$

Теперь явно видно, что при достаточно больших n использование пертурбативного выражения (C.8) необоснованно.

Рассмотрим теперь, что же происходит в обсуждаемом здесь подходе. Для соответствия с операторным разложением вначале следует переписать выражение для моментов (C.3) в ренормалонном представлении, которое в данном случае имеет вид

$$M_n^{\mathrm{re}}(Y) = \int_0^\infty d\sigma' \frac{1}{(f(\sigma') + Y)^{n+1}} , \tag{C.9}$$

где функция $f(\sigma')$ определяется неявным образом с помощью уравнения

$$\sigma' = \int_0^{f(\sigma')} d\sigma \rho(\sigma) . \tag{C.10}$$

Это выражение получается при замене переменной $\sigma = f(\sigma')$ и в предположении, что спектральная функция $\rho(\sigma)$ такова, что выполняется $f(\infty) = \infty$ и $f(0) = 0$.

Хотя преобразование, определяемое выражениями (C.9) и (C.10), является точным, нас интересует уровень $O(\lambda)$. В этом приближении для функции $f(\sigma')$ получаем явное выражение

$$f(\sigma') = \sigma' + 2p\lambda\sqrt{\sigma'}\,. \tag{C.11}$$

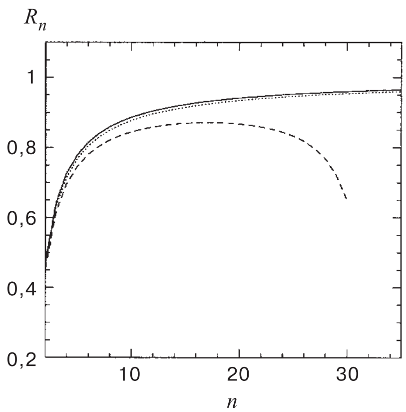

Рис. 17. Отношение моментов $R_n^{\rm ex}$ (сплошная кривая), $R_n^{\rm pert}$ (пунктирная) и $R_n^{\rm re}$ (точечная) для параметров $Y = 1$, $\lambda = 0,1$ и $p = 1$

При таком подходе проблемы кулоновских сингулярностей не возникает, а уже первого приближения оказывается достаточно для воспроизведения n-зависимости моментов для больших значений n. Рассмотрим, как и в методе правил сумм, отношение $R_n = M_n/M_{n-1}$ и вычислим три функции: точную $R_n^{\rm ex}$, пертурбативную $R_n^{\rm pert}$ в порядке $O(\lambda)$ и суммированную на основе ренормалонного представления ($R_n^{\rm re}$) в том же порядке $O(\lambda)$. Эти функции приведены на рис. 17 для параметров $Y = 1$, $\lambda = 0,1$ и $p = 1$. Иной выбор параметров приводит к аналогичному результату.

Отметим, что при использовании ренормалонного представления область $u \sim 1/\sqrt{n}$ не определяет более ведущий вклад в интеграл для моментов при больших n. Теперь перевальная точка определяется некоторым, не зависящим от n значением $\tilde{\sigma}$, что полностью соответствует проведенному анализу правил сумм КХД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1986.
2. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
3. **Барбашов Б.М.** — ЖЭТФ, 1965, т.48, вып.2, с.607.
4. **Блохинцев Д.И., Барбашов Б.М.** — УФН, 1972, т.106, вып.4, с.593.
5. **Барбашов Б.М., Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н.** — ТМФ, 1970, т.3, № 3, с.342;
   Барбашов Б.М., Кулешов С.П., Матвеев В.А. и др. — ТМФ, 1970, т.5, № 3, с.330.

6. **Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н. и др.** — ЭЧАЯ, 1974, т.5, вып.1, с.1.
7. **Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, вып.3, с.1127.
8. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu.** — Int. J. Mod. Phys., 1994, v.A9, No.12, p.1929.
9. **Юкалов В.И.** — Вест. Моск. университета, 1976 т.17, с.270.
10. **Halliday I.J., Suranyi P.** — Phys. Lett., 1979, v.85B, p.421.
11. **Halliday I.J., Suranyi P.** — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.1529.
12. **Shaverdyn B.S., Ushveridze A.G.** — Phys. Lett., 1983, v.123B, p.403.
13. **Ushveridze A.G.** — Phys. Lett., 1984, v. B142, p.403 .
14. **Ушверидзе А.Г., Шубитидзе Н.И.** — ЯФ, 1984, т.40, с.1195.
15. **Соловцов И.Л.** — Изв. вузов, Физика, 1990, №7, с.64.
16. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — Phys.Lett., 1991, v. A157, p. 261.
17. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — Z.Phys., 1992, v. C54, p. 263.
18. **Корсун Л.Д., Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.** — ТМФ, 1992, т.90, с. 37.
19. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu.** — Phys.Lett., 1992, v. B297, p. 305.
20. **Korsun L.D., Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — Int. J. Mod. Phys., 1993, v.A8, No. 29, p. 5129.
21. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu.** — Phys.Lett., 1993, v.B313, p.367.
22. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu.** — Int. J. Mod. Phys., 1994, v. A9, p. 1797.
23. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1994, v. B321, p. 381.
24. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — In: Proc. of the XVI Workshop, Protvino, September 14-17, 1993, Probl. High Energy Phys. and Field Theory, Protvino, 1995, p.138-146.
25. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — In: Bogoliubov Intern. Simp., Dubna, 1994, p. 191.
26. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu.** — In: Intern. Workshop "Symmetry Methods in Physics", Dubna, 1994, v.2, p. 494.
27. **Schiff L.I.** — Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 458.
28. **Rosen G.** — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1632.
29. **Feynman R.P., Kleinert H.** — Phys. Rev., 1986, v. A34, p. 5080.
30. Variational Calculation in Quantum Field Theory, Proc. of the Workshop (Wangerooge, Germany, 1987) Eds. Polley L. and Pottinger E.L., World Scientific, Singapore, 1988.
31. **Ефимов Г.В.** — Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985, с.216.
32. **Efimov G.V.** — Comm. Math. Phys., 1979, v. 65, p.15;
    Ефимов Г.В., Иванов М.А. — Препринт ОИЯИ, Р2-81-707, Дубна, 1981.
33. **Barnes T., Ghandour G.T.** — Phys. Rev., 1980, v. D22, p.924.
34. **Stevenson P.M.** — Phys. Rev., 1984, v. D30, p.1712;
    Hajj G.A., Stevenson P.M. — Phys. Rev., 1988, v. D37, p.413;
    Stancu I., Stevenson P.M. — Phys. Rev., 1990, v. D42, p.2710;
    Stancu I. — Phys. Rev., 1991, v. D43, p.1283.
35. **Stevenson P.M.** — Phys. Rev., 1985, v. D32, p.1389.
36. **Okopinska A.** — Phys. Rev., 1987, v. D35, p.1835; Phys. Rev., 1987, v.D 36, p.1273.

37. **Coleman S., Weinberg E.** — Phys. Rev., 1973, v. D7, p.1888.

38. **Bardeen W.A., Moshe M.** — Phys. Rev., 1983, v. D28, p.1372.

39. **Ganbold G., Efimov G.V.** — Mod. Phys. Lett., 1992, v.A7, p.2189; ЭЧАЯ, 1995, т.26, с.459; **Efimov G.V., Nedelko S.N.** — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.4539; ЭЧАЯ 1994, т.25, с.779.

40. **Dineykhan M., Ganbold G., Efimov G.V., Nedelko S.N.** — Oscillator Representation in Quantum Physics. Lecture Notes in Physics, m 26, Springer, 1995, p.279.

41. **Consoli M.** — Phys. Lett., 1993, v.B305, p.78.

42. **Branchina V., Consoli M., Stivala N. M.** — Z. Phys., 1993, v.C57, p.251;
Agodi A., Andronico G., Cea P., Consoli M., Cosmai L. — Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 1998, v.63, p.637.

43. **Consoli M., Stevenson P.M.** — Z. Phys., 1994, v.C63, p.427; Mod. Phys. Lett., 1996, v.A11, p.2511.

44. **Branchina V., Castorina P., Consoli M., Zappala D.** — Phys. Lett., 1992, v. B274, p. 404.

45. **Филиппов А.Т.** — ЭЧАЯ, 1979, т. 10, вып. 8, с. 501.

46. **Bender C.M., Duncan A., Jones H.F.** — Phys. Rev., 1994, v. D49, p. 4219.

47. **Gromes D.** — Z. Phys., 1996, v. C71, p. 347.

48. **Yukalov V.I., Yukalova E.P., Gluzman S.** — Phys. Rev., 1998, v. A58, p. 96.

49. **Kleinert H.** — Phys. Lett. 1995, v. B360, p. 65; Phys. Rev. 1998, v. D57, No. 4, p. 2264.

50. **Solovtsov I.L.** — Phys. Lett., 1994, v. B327, p.335.

51. **Solovtsov I.L.** — Phys. Lett., 1994, v. B340, p.245.

52. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Mod. Phys. Lett., 1994, v.A9, p.2437.

53. **Redmond P.** — Phys. Rev., 1958, v.112, p.1404.

54. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Ширков Д.В.** — ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 3(9), с.805.

55. **Shirkov D.V., Solovtsov I.L.** — JINR Rapid Comm., No. 2[76]-96, 5, hep-ph/9604363.

56. **Shirkov D.V., Solovtsov I.L.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.1209.

57. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.** — Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969, с.424.

58. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.** — Общие принципы квантовой теории поля, М.: Наука, 1987.

59. **Jones H.F., Solovtsov I.L.** — Phys. Lett., 1995, v. B349, p. 519.

60. **Jones H.F., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1995, v. B357, p. 441.

61. **Jones H.F., Solovtsov I.L.** — In: Proc. of the Int. Europhysics Conference on High Energy Physics, Brussels, July 27 – August 2, 1995, Editors J. Lemonne, C. Vander Velde, F. Verbeure, World Scientific (Singapore, New Jersey, London, Hong Kong) 1996, p.242.

62. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — In: Proc. of the VII Int. Conf. on Symmetry Methods in Physics, July 10 - 16, Dubna, 1995, JINR, Dubna, 1996, v.2, p.513.

63. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — In: Proc. of the XVIII Workshop on High Energy Physics and Field Theory, Protvino, June 26–30, 1995, Protvino, 1996, p.235–242.

64. **Jones H.F., Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Chin. J. Phys., 1996, v.34, No.3-II, p.973.

65. **Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1995, v. B344, p. 377.

66. **Ebert D., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Preprint DESY 96-075, Hamburg, 1996.

67. **Ebert D., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Preprint JINR E2-95-385, Dubna, 1995.

68. **Ebert D., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Nuovo Cimento, 1997, v. 110A, p. 315.

69. **Jones H.F., Ritz A., Solovtsov I.L.** — Mod. Phys. Lett., 1997, v. 12, No. 9, p. 1361.

70. **Jones H.F., Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — In: Proc. of the 28th Int. Conference on High Energy Physics, Warsaw, July 25-31, 1996, Editors Z. Ajduk and A.K. Wroblewski, World Scientific, Singapore, 1997, v.II, p.1650.

71. **Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.** — ЯФ, 1998, т.61, №11, с.2052.

72. **Jones H.F., Ritz A., Solovtsov I.L.** — Int. J. Mod. Phys., 1998, v.A13, p.3929.

73. **Feynman R.** — Rev. Mod. Phys., 1948, v.20, No.2, p.367.

74. **Фейнман Р., Хибс А.** — Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.

75. **Фейнман Р.** — Статистическая механика. М.: Мир, 1975.

76. **Боголюбов Н.Н.** — ДАН СССР, 1954, т.99, №1, с.225.

77. **Matthews P.T., Salam A.** — Nuovo Cimento, 1954, v.12, No.4, p.563.

78. **Гельфанд И.М., Минлос Р.А.** — ДАН СССР, 1954, т.97, №2, с.209.

79. **Халатников И.М.** — ЖЭТФ, 1955, т.28, № 5, с.633.

80. **Фрадкин Е.С.** — Труды ФИАН, 1965, т.29, с.7.

81. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys. Lett., 1967, v.25B, p.30.

82. **Fried H.M.** — Basics of functional methods and eikonal model. Editions Frontières (Singapore), 1990.

83. **Caswell W.E.** — Ann. Phys., 1979, v.123, p.153.

84. **Killingbeck J.** — J. Phys., 1981, v.A14, p.1005;
Austin E.J., Killingbeck J. — J. Phys., 1982, v.A15, p.443.

85. **Buckley I.R.C., Duncan A., Jones H.F.** — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.2554.

86. **Duncan A., Jones H.F.** — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.2560.

87. **Guida R., Konishi K., Suzuki H.** — Ann. Phys., 1995, v.241, p.152; Ann. Phys., 1996, v.249, p.109.

88. **Eichten E., Gottfried K.** — Phys. Lett., 1977, v.66B, p.286;
Eichten E., Gottfried K., Kinoshita T. et al. — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.203;
Deo B.B., Baric B.K. — Phys. Rev., 1983. v.D27, p.249;
Gupta S.N., Radford S.F. — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.781.

89. **Levine R., Tomozawa Y.** — Phys. Rev., 1979, v.D19, p.1572.

90. **Арбузов Б.А.** — ЭЧАЯ, 1988, т.19, вып.1, с.5.

91. **Richardson J.L.** — Phys. Lett., 1979, v.82B, p.272.

92. **Mandelstam S.** — Phys. Rev., 1979, v.D20, p.3223.

93. **Anishetty R., Baker M., Kim S.K. et al.** — Phys. Lett., 1979, v.86B, p.52;
Baker M., Ball J.S., Lucht P., Zachariasen F. — Phys. Lett., 1979, v.86B, p.52;
Ball J.S., Zachariasen F. — Phys. Lett., 1980, v.95B, p.273.

94. **Baker M., Ball J.S., Zachariasen F.** — Nucl. Phys., 1981, v.B186, p.560.

95. **Bander M.** — Phys. Rep., 1981, v.75, p.205.

96. **Stevenson P.M.** — Phys. Rev., 1981, v.D23, p.2916.

97. **Stevenson P.M.** — Nucl. Phys., 1984, v.B231, p.65.
98. **Егорян Э.С., Тарасов О.В.** — ТМФ, 1979, т.41, с.26.
99. **Narison S.** — Phys. Rep., 1982, v.84, p.263.
100. **Chýla J., Kataev A.L., Larin S.A.** — Phys. Lett., 1991, v.B267, p.269.
101. **Mattingly A.C., Stevenson P.M.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.1320.
102. **Mattingly A.C., Stevenson P.M.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.437.
103. **Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A.** — Phys. Lett., 1991, v.B259, p.144.
104. **Surguladze L.R., Samuel M.A.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.560.
105. **Grunberg G.** — Phys. Rev., 1984, v.D29, p.2315.
106. **Solovtsov I.L., Shirkov D.V.** — Phys. Lett., 1998, v.B442 p.344.
107. **Poggio E.C., Quinn H.R., Weinberg S.** — Phys. Rev., 1976, v.D13, p.1958.
108. **Швингер Ю.** — Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1983, т.II.
109. **Dokshitzer Yu.L., Webber B.R.** — Phys. Lett., 1995, v.B352, p.451;
Dokshitzer Yu.L., Khoze V.A., Troyan S.I. — Phys. Rev., 1996, v.D53, p.89.
110. **Pennington M.R., Ross G.G.** — Phys. Lett., 1981, v.102B, p.167.
111. **Radyushkin A.V.** — JINR Preprint, E2-82-159, 1982; JINR Rapid Comm. No. 4[78]-96, p.9.
112. **Krasnikov N.V., Pivovarov A.A.** — Phys. Lett., 1982, v.B116, p.168.
113. **Bjorken J.D.** — Preprint SLAC–PUB–5103, 1989; In: Particle Physics, Proc. of the Cargese Summer Institute, Cargese, France, 1989, ed. M. Levy et al. NATO Advanced Institute, Series B: v.223, Plenum, New York, 1990.
114. **Milton K.A., Solovtsov I.L.** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.5295.
115. **Milton K.A., Solovtsova O.P.** — Phys. Rev., 1998, v.D57, p.5402.
116. **Соловцова О.П.** — Письма в ЖЭТФ, 1996, v.64. p.664.
117. **Milton K.A., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1997, v.B415, p.104.
118. **Milton K.A., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P.** — Talk given at the XXIX Int. Conference on High Energy Physics, Vancouver, B.C., Canada, July 23-29, 1998 (to be published in the Proceedings), hep-ph/9808457.
119. **Adler P.D.** — Phys. Rev., 1974, v.D10, p.3714.
120. **Ширков Д.В.** — ТМФ, 1999, т.119, с.55.
121. Review of Particle Physics — The Europ. Phys. Journal, 1998, v.C3, p.1.
122. **Braaten E.** — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.1606; Phys. Rev., 1989, v.D39, p.1458.
123. **Braaten E., Narison S., Pich A.** — Nucl. Phys. 1992, v.B373, p.581.
124. **Le Diberder F., Pich A.** — Phys. Lett. 1992, v.B286, p.147.
125. **Altarelli G., Nason P., Ridolfi G.** — Z. Phys. C., 1995, v.68, p.257.
126. **Marciano W.J.** — Phys. Rev., 1984, v.D 29, p.580.
127. **Altarelli G.** — Preprint CERN-TH.5290/89, 1989;
Bethke S. — Talk presented at the QCD'94, Montpellier, France, July 7-13, 1994; Preprint PITHA 94/30.
128. **Shirkov D.V.** — Nucl. Phys., 1992, v.B371, p.476.
129. **Ширков Д.В.** —ТМФ, 1992, т.93, с.466.

130. **Shirkov D.V., Mikhailov S.V.** — Z. Phys., 1994, v.C63, p.463.

131. **Bigi I.I., Shifman M.A., Uraltsev N.G., Vainshtein A.I.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.2234.

132. **Neubert M.** — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.5924.

133. **Neubert M.** — Nucl. Phys., 1996, v.B463, p.511.

134. **Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A.** — Nuovo Cimento, 1986, v.A92, p.119.

135. **Particle Data Group.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, Part I.

136. **CLEO Collaboration** — Phys. Lett., 1995, v.B356, p. 580.

137. **Barnett R. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.1.

138. **Jones H.F., Ritz A., Solovtsov I.L.** — Preprint Imperial/TP/95-96/62, 1996, 8p, hep-ph/9608284.

139. **Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.** — Nucl. Phys., 1979, v.B147, p.385; Nucl. Phys., 1979, v.B147, p.448; Nucl. Phys., 1979, v.B147, p.519.

140. **Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S.** — Phys. Rep., 1985, v.127, p.1.

141. **Broadhurst D.J., Generalis S.C.** — Open University Preprint OUT-4102-8/R, 1982.

142. **Novikov V.A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1977, v.38, p.626; Phys. Rep., 1978, v.41C, p.1;
Voloshin M.B., Zaitsev Yu.M. — Sov. Phys. (Usp.) 1987, v.30, p.553.

143. **Voloshin M.B.** — Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10, p.2865;
Jamin M., Pich A. — Nucl. Phys., 1997, v.B507, p.334.

144. **Kuhn J.H., Penin A.A., Pivovarov A.A.** — Preprint: hep-ph/9801356, 1998.

145. **Sommerfeld A.** — Atombau und Spektrallinien. Vieweg, Braunschweig, 1939, v.2.

146. **Сахаров А.Д.** — ЖЭТФ, 1948, т.18, с.631.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 530.145

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А.В.Маршаков

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва
Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Обзор посвящен точным непертурбативным решениям суперсимметричных квантовых калибровочных теорий поля и их формулировке в терминах интегрируемых систем. Обсуждаются общие свойства интегрируемости в контексте возникновения интегрируемых структур в рамках топологических струнных моделей и (близких к реалистическим) суперсимметричных калибровочных теорий поля. Сначала рассматриваются основные свойства струнного континуального интеграла, которые позволяют понять некоторые общие непертурбативные свойства теории и, в дальнейшем, предположить определение точных непертурбативных эффективных действий как решений систем нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений. Показано, что возникающие нелинейные дифференциальные уравнения относятся к классу интегрируемых моделей типа Кадомцева — Петвиашвили или Тоды, подробно обсуждаются различные интегрируемые системы этого класса и, в особенности, появляющиеся в контексте суперсимметричных калибровочных теорий. Рассматриваются представления Лакса и спектральные кривые этих систем и предлагается некоторая классификация точных непертурбативных решений суперсимметричных теорий поля, основанная на их соответствии интегрируемым моделям.

The review is devoted to the exact nonperturbative solutions to supersymmetric quantum gauge theories and their formulation in terms of integrable systems. We discuss general phenomenon of integrability as it appears in the formulation of effective actions for various models of (topological, low-dimensional) string theories and almost realistic supersymmetric gauge field theories. We consider, first, preliminary basic features of the string theory path integral which allow to understand better nonperturbative properties of the theory and, then, propose the formulation of the exact effective actions based on the systems of nonlinear differential equations. It is demonstrated, that arising nonlinear differential equations are from the class of integrable models of, the so-called, Kadomtsev — Petviashvili and Toda type. We discuss various particular models from this class and especially pay attention to the integrable systems, appearing in the context of multidimensional supersymmetric gauge theories. Their Lax representations and spectral curves are considered in detail and some classification of the exact solutions to $N = 2$ supersymmetric gauge theories is proposed along these lines.

1. ВВЕДЕНИЕ

На протяжении последних десятилетий особый интерес в теоретической физике — теории элементарных частиц — вызывают две фундаментальные проблемы: конфайнмент, или проблема невылетания кварков из адронов, и квантовая теория гравитации. Важнейшей их особенностью является то, что прогресс в понимании и решении этих задач невозможен без исследования свойств неабелевой калибровочной теории поля — квантовой хромодинамики и общей теории относительности в области сильной связи, т.е. там, где оказываются неприменимыми, по сути дела, все стандартные теоретико-полевые методы, сыгравшие свою роль в формулировке квантовой электродинамики и модели электрослабых взаимодействий Вайнберга — Салама и основанные на теории возмущений. Тем самым прогресс в понимании ключевых современных задач физики элементарных частиц и теории гравитации невозможен без разработки существенно новых методов, позволяющих исследовать физические теории в непертурбативном режиме.

Исторически важным моментом явилось осознание того факта, что сложные нелинейные уравнения, лежащие в основе классического предела соответствующих квантовых теорий, являются интегрируемыми, более того, по крайней мере часть их решений может быть построена явно. Так, обнаруженные А.Поляковым и др. инстантонные решения классических уравнений [1, 2] (в особенности, найденные, начиная с работы А.Белавина, А.Полякова, А.Шварца и Ю.Тюпкина, инстантонные решения уравнений Янга — Миллса [3]) оказали существенное воздействие на понимание не только классической, но и квантовой структуры σ-моделей и калибровочных теорий поля [4] (см. также [5] и список литературы в этой работе). Кроме того, именно инстантоны впервые продемонстрировали важность применения техники комплексного анализа [6] при решении современных нелинейных задач теоретической физики.

Появление инстантонов и других непертурбативных решений существенно расширило горизонт теории сильных взаимодействий и ясно продемонстрировало, что физика элементарных частиц не сводится к теории возмущения, рамки которой в квантовой хромодинамике (КХД) ограничены областью высоких энергий (режим асимптотической свободы), где хорошо работает стандартная формулировка теории калибровочных полей [7]. Тем не менее инстантонные вычисления оказались лишь следующим приближением в КХД, явно недостаточным для того, чтобы описать конфайнмент кварков и другие эффекты в области сильной связи. Что касается квантования общей теории относительности, то даже появление суперсимметрии [8] как механизма сокращения расходимостей не позволяло надеяться на возникновение согласованной теории квантовой гравитации в рамках квантовой теории поля (см., например, [9]).

Оказалось, что для построения согласованной картины квантовой гравитации необходимо фундаментальное изменение теории на планковских масштабах, в основе которого лежит переход от точечных к одномерным протяженным объектам — струнам. Появление [10] и развитие теории струн прежде всего привело, как было отмечено Дж.Шерком и Дж.Шварцем [11], к объединению теории калибровочных полей и гравитации в единое целое, т.е.

две главные проблемы перестали существовать независимо, так как в спектре струны естественным образом имеются *безмассовые* векторные поля и поля спина 2. Геометрическая структура теории струн была сформулирована А.Поляковым в виде интеграла по двумерным геометриям [12]:

$$F_g = \int Dg_{ab} D\mathbf{x} \mathrm{e}^{-\int_{\Sigma_g} |\partial \mathbf{x}|^2}; \qquad \mathcal{F} = \sum_g \Lambda_{\mathrm{str}}^g F_g, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}$ — поля двумерной конформной теории поля или координаты струны, g_{ab} — двумерные метрики на римановой поверхности Σ_g рода g, классы эквивалентности которых (относительно замен координат на ненаблюдаемых мировых листах) отвечают различным двумерным геометриям, а Λ_{str} — струнная константа связи. По теореме Белавина — Книжника [13] интеграл (1.1) сводится к интегралу по пространству модулей комплексных структур римановых поверхностей специального вида

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} d\mu(y) |f(y)|^2, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{M}_g$ — (конечномерное) пространство модулей комплексных структур римановой поверхности Σ_g, а конкретный вид меры интегрирования зависит от выбора струнной модели. Как будет видно в дальнейшем (разд. 2), формулировка (1.1), (1.2), в принципе, позволяет использовать соображения симметрии для получения непертурбативной информации, хотя по самому своему определению она является пертурбативным разложением в окрестности некоторого вакуума, и интеграл (1.1) вычисляет g-петлевую поправку в теории.

Развитие теории струн привело к появлению более или менее реалистических струнных моделей (см., например, книгу [14] и список литературы в ней), в основе которых лежат представления о реальном мире как о части многомерного пространства-времени (в большинстве случаев десятимерия), оставшиеся измерения которого компактны и представляют собой многообразие специального вида (например, многообразия Калаби — Яо). Структура компактифицированных струнных моделей позволяет предположить, что существует совершенно нетривиальная симметрия (дуальность) [15–17], связывающая между собой различные модели теории струн, в частности, таким образом, что пертурбативный режим в одной из них позволяет делать разумные предположения о непертурбативных эффектах в другой. Другими словами, преобразования дуальности позволяют рассматривать разные струнные модели как пертурбативные разложения (1.1) вокруг различных вакуумов одной и той же теории. Недостатком (на сегодняшний день) этой концепции является пока лишь отсутствие каких бы то ни было строгих в математическом смысле утверждений.

С другой стороны, именно в теории струн (точнее, в некоторых ее простейших моделях) впервые оказалось возможным получить непертурбативную информацию о (точных) корреляционных функциях. Из-за ограниченности прямых методов вычисления — непосредственно из поляковского континуального интеграла (1.1), позволяющих лишь вычислять критические индексы и простейшие корреляционные функции на сфере [19, 20], прогресс был достигнут с помощью изящной дискретизации $c < 1$ струнных моделей или матричных моделей двумерной гравитации [22]:

$$Z[V] = \int DM_1 \ldots DM_k \mathrm{e}^{-V(M_1,\ldots,M_k)} \tag{1.3}$$

(где $DM_\alpha \sim \prod_{i,j} dM_{\alpha,ij}$ обозначает интеграл по конечной матрице, а $V(M_1,\ldots,M_k)$ — обычно полиномиальный потенциал), разложение по петлям в которой воспроизводит (дискретизованную версию) разложения по петлям $c \leq 1$ струнных моделей (c — центральный заряд алгебры Вирасоро — количество степеней свободы соответствующей теории струн). Предложенный В.Казаковым двойной скейлинговый предел формулы (1.3) [23] позволил исследовать непертурбативную статсумму (или, в более общей ситуации, производящую функцию струнных корреляторов) $\mathcal{F} \sim \log Z$, информация о которой, как оказалось, может быть закодирована в нелинейных интегрируемых уравнениях [24–28]. Одним из способов получать дифференциальные уравнения на производящую функцию (1.3) является исследование петлевых уравнений или тождеств Уорда для интеграла (1.3) [25–27] $\langle \delta V \rangle = 0$ (усреднение понимается в смысле статсуммы (1.3)), являющихся, по сути дела, простейшим аналогом тождеств Уорда в калибровочной теории поля [30].

Другим (хотя, как оказалось, связанным с предыдущим) примером прямого появления интегрируемых структур могут служить *топологические* струнные модели [31, 32, 35–37], в которых теория фактически *определяется* тем, что ее корреляционные функции "считают" топологические характеристики пространств модулей комплексных кривых — индексы пересечения, эйлеровские характеристики и т.д. Интеграл по пространству модулей комплексных структур (1.2) (точнее, по его компактификации $\overline{\mathcal{M}}_g$, в качестве которой обычно выбирается компактификация Делиня — Мамфорда) при этом вычисляет классы когомологий $\overline{\mathcal{M}}_g$, а с точки зрения теории поля это означает, что физическим степеням свободы отвечает лишь конечное число топологических операторов, построение которых возможно, например, на языке когомологий БРСТ-оператора [38, 39]. Эффективное построение производящей функции индексов пересечения в виде матричной модели М.Концевичем [40] позволило приступить к формулировке непертурбативных топологических струнных моделей как решений интегрируемых уравнений специального вида [33, 34].

Дальнейшее развитие показало, что именно интегрируемые системы являются адекватным языком для описания непертурбативных решений квантовых теорий. Более того, формулировка в терминах интегрируемых систем является универсальной, т.е. единой для многих струнных моделей, которые *a priori* совершенно не похожи друг на друга. Например, существенный прогресс, достигнутый Э.Виттеном и Н.Зайбергом [41,42] в понимании непертурбативной структуры четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной неабелевой калибровочной теории, позволил сформулировать эти точные непертурбативные результаты на языке, знакомом из $c < 1$ теории струн, т.е. описать их как деформацию решений иерархий интегрируемых уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили или Тоды [43], и указал на существенно струнную природу точных решений квантовой теории поля [44–47].

Следует особо отметить, что, хотя развитие этой области теории струн пока далеко еще от непосредственного обращения к проблемам конфайнмента и реальной квантовой гравитации, заслуживает внимания та универсальность, которая отличает именно данный подход к решению задач неабелевой калибровочной теории поля и общей теории относительности. Идейно подход, основанный на интегрируемых системах, на современном этапе охватывает широкий спектр задач от КХД при высоких энергиях (подход Л.Липатова [48]) до точно решаемых моделей двумерной [23, 34, 40] и трехмерной [49] гравитации.

Преимуществом языка интегрируемых систем является его относительная простота: вместо струнных и полевых систем с бесконечным количеством степеней свободы можно работать с конечномерными (т.к. чаще всего речь идет о редукциях) динамическими системами, для исследования которых существует хорошо разработанный формализм. Наиболее удобным для работы с непертурбативными струнными и полевыми теориями оказался алгеброгеометрический подход (С.Новиков, И.Кричевер, Б.Дубровин и др., см. [50–53]), а также гамильтонов подход ленинградской школы Л.Фаддеева [54, 55] и японский фермионный формализм [56,57], приведший к формулировке решений интегрируемых систем в терминах бесконечномерного грассманиана — универсального пространства модулей [58–60].

Следует также заметить, что развитие непертурбативной квантовой теории поля и теории струн оказало, в свою очередь, существенное воздействие на теорию интегрируемых систем, так как привело к необходимости более детального исследования новых, вообще говоря, сингулярных решений интегрируемых уравнений [34, 40, 63]. Сингулярные свойства этого класса решений (которые в дальнейшем будут называться *струнными* решениями) напрямую связаны с их физическим смыслом — отождествлением с суммой ряда теории возмущений, являющегося в общем случае асимптотическим рядом. Тем не менее оказалось, что в нулевом приближении эти решения отвечают хорошо известным задачам конечнозонного интегрирования, а построение точных решений имеет отношение к уиземовским деформациям конечнозонных решений [36, 51, 61, 62].

Работы последних лет показали (см., например, [23, 25, 34, 40–43, 64, 65]), что существует возможность вычислить *точно* непертурбативные результаты (спектр, корреляционные функции, эффективные действия) в теориях, которые не являются *квантовыми интегрируемыми* моделями [54, 66] в каноническом смысле этого слова. В отличие от "канонических" квантовых интегрируемых систем, где обычно существует (бесконечномерная) квантовая алгебра симметрии, позволяющая отождествить гильбертово пространство теории с пространством ее представлений и наложить достаточное число условий на корреляционные функции, теории, обсуждаемые ниже, не являются квантово-интегрируемыми в этом смысле слова. Однако они представляют несомненный интерес с точки зрения близости к реалистическим моделям теории элементарных частиц и являются точно решаемыми в непертурбативном режиме в следующем смысле.

Для каждого из обсуждаемых примеров *существует* эффективное описание в терминах производящего функционала точных корреляционных функций в теории

$$\langle \mathcal{O}_{i_1} \ldots \mathcal{O}_{i_n} \rangle = \frac{\delta^n \mathcal{F}}{\delta a_1 \ldots \delta a_n} \tag{1.4}$$

и/или эффективного действия. Следует особо отметить, что метод эффективного действия [67] естествен для формулировки струнных теорий, где все струнные эффекты существенны лишь на малых расстояниях. Эффективная теория может быть сформулирована в терминах (классической) интегрируемой системы. Более того, во всех случаях, рассмотренных ниже, эта интегрируемая система оказывается определенной редукцией иерархии интегрируемых уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили (КП) — первое уравнение иерархии

$$3\frac{\partial^2 U}{\partial {T_2}^2} = \frac{\partial}{\partial T_1}\left(4\frac{\partial U}{\partial T_3} - 12U\frac{\partial U}{\partial T_1} - \frac{\partial^3 U}{\partial {T_1}^3}\right) \tag{1.5}$$

или двумерной решетки Тоды, для которой первое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial T_1 \partial \bar{T}_1} = \mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} - \mathrm{e}^{\phi_n - \phi_{n-1}}, \tag{1.6}$$

хотя, вообще говоря, ограничение класса интегрируемых моделей вызвано лишь тем, что мы имеем дело с наиболее простыми, с этой точки зрения, теориями струн: двумерными $(2D)$ топологическими струнными моделями и $c \leq 1$ теориями, взаимодействующими с двумерной квантовой гравитацией (разд. 2, 3), а также $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными неабелевыми калибровочными теориями поля, возникающими в точечном (полевом) пределе реалистических теорий струн (разд. 4). Эффективная формулировка универсальна в том смысле, что она не зависит от очень многих свойств "затравочной" теории, так, например, от размерности пространства-времени: двумерные, четырехмерные и даже пятимерные теории выглядят практически одинаково с этой точки зрения. Более того, полученные эффективные теории во многом напоминают *топологические* теории поля, обладая рядом свойств, присущих двумерным топологическим теориям, хотя затравочные теории являются заведомо многомерными, а главное — в спектре эффективных теорий имеются безмассовые распространяющиеся частицы.

Говоря более точно, под эффективной непертурбативной формулировкой мы будем понимать построение явной зависимости спектра, корреляционных функций, эффективных действий (т.е. эффективных констант связи) как функций параметров (или модулей) теории, являющихся, как правило, низкоэнергетическими значениями фоновых полей в физическом пространстве-времени. Например, в $4D$ суперсимметричных калибровочных теориях — это вакуумные средние хиггсовских полей $h_k = \frac{1}{k}\langle \mathrm{Tr}\, \phi^k \rangle$, в более общих теориях струн — это модули метрики пространства-времени (например, параметры комплексной или кэлеровской структур), калибровочных полей (модули плоских связностей или инстантонов) и т.п. Задача заключается в нахождении точной непертурбативной зависимости физических величин от этих параметров*. Решение этой задачи существенно упрощается тем, что пространственно-временные модули в теориях струн часто могут быть отождествлены с модулями комплексных многообразий, пространство которых обычно является фактором топологически тривиального многообразия по действию дискретной группы. Действие этой дискретной группы гипотетически отождествляется с преобразованиями дуальности [15–17], связывающими между собой различные пертурбативные разложения струнной теории.

Именно комплексно-аналитическая структура, в первую очередь, выделяет класс теорий, для которого ниже будут сформулированы точные непертурбативные результаты. При этом сразу возникает возможность постановки решаемых технически задач, так как многие результаты могут быть сформулированы в терминах *голоморфных* (или мероморфных) функций. Идея работы с голоморфными функциями восходит к применению комплексного анализа в теории инстантонов [6] и теореме Белавина — Книжника [13] в пертурбативной теории струн. Во-вторых, класс рассматриваемых задач еще более ограничен тем, что в нем модули физических теорий могут быть отождествлены с модулями *одномерных* ($1D$) комплексных многообразий —

*Кроме параметрической зависимости от модулей физические величины могут зависеть от топологических (дискретных) характеристик пространств модулей; более того, в простейших топологических струнных моделях существенна именно (и только) эта зависимость, т.е. корреляционные функции являются числами.

(пространственно-временных!) комплексных кривых Σ (или двумерных вещественных многообразий — римановых поверхностей). Здесь необходимо сделать два пояснения: во-первых, пространственно-временные римановы поверхности *a priori* не имеют никакого отношения к мировым листам в теории струн, что, тем не менее, совершенно не мешает при работе с ними использовать тот же самый технический арсенал, что и в пертурбативной теории струн; во-вторых, в принципе, следует ожидать той же самой картины для теорий, где пространства модулей отождествляются с пространствами модулей комплексных многообразий старшей размерности ($K3$, $\dim_{\mathbf{C}} = 3$ многообразий Калаби — Яо и т.д.). Более того, в единой картине теории струн рассматриваемые ниже пространственно-временные комплексные кривые часто следует считать вырожденными случаями многообразий струнной компактификации: когда многообразие Калаби — Яо эффективно вырождается в $1_{\mathbf{C}}D$ кривую Σ [47]. Нетривиальная топологическая структура спектральной кривой Σ является существенно непертурбативной информацией, в теории возмущения спектральная кривая появляется лишь "локально", как масштабный параметр. Это означает, что именно струнные эффекты играют существенную роль в структуре точных непертурбативных решений калибровочной теории поля, а топологические степени свободы, существенные для построения эффективной теории, связаны напрямую с "намотками" струн (и, вообще говоря, D-бран) на нетривиальные циклы многообразий струнной компактификации.

Соотношение между непертурбативными решениями квантовой теории и интегрируемыми системами исследовано детально лишь для некоторых $2D$ топологических теорий и теорий квантовой гравитации, а также для решений Зайберга — Виттена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных неабелевых калибровочных теорий: чистой глюодинамики [41,68], включения взаимодействия с ($N_a = 1$) $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплетом материи в присоединенном представлении калибровочной группы, описываемом в терминах семейства интегрируемых систем Калоджеро — Мозера [69–73]. Когда масса гипермультиплета становится бесконечно большой, он эффективно отщепляется от теории Янга — Миллса, и размерная трансмутация приводит к вырождению эллиптической модели Калоджеро — Мозера в периодическую цепочку Тоды, описывающую чистую четырехмерную $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную глюодинамику [43]. Известно также [74,75], что $N_c = 3$, $N_f = 2$ (N_c, N_f — числа цветов и ароматов соответственно) кривые отвечают интегрируемому волчку Горячева — Чаплыгина, в то время как естественной гипотезой, касающейся семейства моделей $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД [42,76], является ее формулировка в терминах интегрируемых (вообще говоря, неоднородных) $sl(2)$ спиновых цепочек, для которых, опять же, цепочка Тоды является предельным случаем. Идея этого отождествления основана [74] на специальной квадратичной форме алгебраических уравнений, описывающих вложение спектральной кривой в $\mathbf{C}^2$ [42, 76]. Другая возможность [78] — оставаться в рамках динамики цепочки Тоды, меняя граничные условия; на этом пути, однако, встречаются трудности в ситуации, когда $N_f > N_c$.

Поскольку решения формулируются в терминах периодов мероморфных дифференциалов на комплексных кривых (один из возможных выборов координат на пространстве модулей), интегрируемые системы (более того, интегрируемые системы типа КП или Тоды, под которыми мы будем понимать те, в которых лиувиллевский тор (угловые переменные) является вещественным сечением специального комплексного тора — якобиана комплексной кривой) возникают почти по определению, благодаря конструкции Кричевера [50].

На сегодняшний день не существует механизма, который позволяет получать точные непертурбативные результаты, непосредственно стартуя с первопринципов теории струн и квантовой теории поля (возможность получить некоторые непертурбативные результаты, исследуя непосредственно поляковский континуальный интеграл (1.1), будет рассматриваться в разд. 2). Необходимо, однако, отметить бросающуюся в глаза аналогию между возникающими при описании деформации конечнозонных решений уравнениями Уизема — уравнениями гидродинамического типа — и методом ренормгруппы в стандартной теории возмущений [79]. Действительно, масштабная зависимость корреляционных функций связана с их зависимостью от констант связи уравнением первого порядка $\left(\frac{d}{d\log\Lambda} - \sum \beta_i(g)\frac{\partial}{\partial g_i}\right) F(g;\Lambda) = 0$. В точном решении нет явной зависимости от масштаба, и можно было бы считать, что производные по Λ следует заменить на производные по модулям, но даже принимая такую гипотезу, необходимо отметить, что не существует способа определить β-функцию вне рамок теории возмущения. Кроме того, уравнения ассоциативности на эффективное действие скорее приводят к выводу о том, что разгадку механизма возникновения интегрируемых уравнений следует искать в теории струн.

Основные понятия, используемые в обзоре. Струнная теория возмущений (1.1) определена континуальным интегралом [12] по отображениям $\mathbf{x} : \Sigma_g \to X$ мирового листа Σ_g в физическое "пространство-время" X и двумерным геометриям — метрикам g_{ab} в (1.1) или их классам эквивалентности с точностью до репараметризаций — модулям комплексной структуры y на пространстве $\mathcal{M}_g$ в (1.2). Вообще говоря, X не обязано быть четырехмерным пространством Минковского или плоским пространством $\mathbf{R}^4$, оно может иметь нетривиальную метрику (удовлетворяющую в силу двумерных симметрий уравнениям Эйнштейна [67]) или даже быть нетривиальным компактным многообразием (точнее, иметь компактную составляющую), что физически отвечает происхождению внутренних (калибровочных) степеней свободы по схеме Калуцы — Клейна. При этом поляковский интеграл (1.1) следует понимать в *обобщенном* смысле, когда вместо свободной двумерной теории поля $\mathbf{x}$, отвечающей плоскому пространству-времени X, следует рассматривать некоторую общую *двумерную конформную теорию поля* [80], в которой поля, вообще говоря, неявно отвечают σ-модели на нетривиальном многообразии. Аномалия меры интегрирования по двумерной метрике Dg_{ab} также может быть отнесена к гравитационному вкладу в действие двумерной конформной теории, при условии $c_{\mathrm{matter}} + c_{\mathrm{gravity}} - 26 = 0$ двумерная гравитация сокращает конформную аномалию и интеграл (1.1) по-прежнему сводится к (1.2). Отсюда, в частности, следует, что даже при отсутствии материи (чистая) двумерная гравитация является, вообще говоря, нетривиальной теорией струн, и именно такие теории (когда вклад материи мал, $c_{\mathrm{matter}} < 1$, по сравнению с вкладом гравитации) поддаются непертурбативному анализу.

Для конформной теории общего вида следует особо отметить два момента. Во-первых, в теории струн одна и та же конформная теория может отвечать струнам на *разных* многообразиях X_1 и X_2. Такие многообразия называются зеркальными [18], простейшим примером этого случая является свободная теория поля, принимающего значения в окружности: теории на $X_1 = S_R$ и $X_2 = S_{\frac{1}{R}}$ эквивалентны. Во-вторых, несмотря на то, что конформные теории, отвечающие нетривиальным многообразиям, наивным образом не являются свободными, для любой $2D$ конформной теории поля существует техника свободных полей или бозонизация, т.е. пертурбативно теория струн принципиально определена, и интегралы (1.1) и (1.2) могут быть вычислены. Естественно, для конформной теории общего вида это технически очень сложная задача, однако существуют примеры конформных теорий, где интеграл по полям материи и даже возникающий интеграл индуцированной гравитации могут быть вычислены до конца. К таким теориям относятся, прежде всего, свободные

$$S_{CFT} = \int\limits_{\Sigma_g} \bar{\partial}\mathbf{x}\partial\mathbf{x} \equiv \int\limits_{\Sigma_g} \sum_{\mu=1}^{c_{\mathrm{matter}}} \bar{\partial}x^\mu \partial x^\mu \tag{1.7}$$

и некоторые теории с $c < 0$. Наличие "отрицательной" материи приводит к дополнительным сокращениям в мере интегрирования (1.2), что часто позволяет вычислить поляковский континуальный интеграл. Техника бозонизации эффективно сводит вычисления в нетривиальных конформных теориях к вычислениям (достаточно сложных корреляционных функций) в теориях вида (1.7), а более точно с "удлиненным" свободным действием $S_{CFT}(\varphi) = \int \bar{\partial}\varphi\partial\varphi + \alpha_0 R\varphi$, где константа α_0 (для случая многих полей — вектор) связана с центральным зарядом теории $c_{CFT} = 1 - 12{\alpha_0}^2$. Наиболее известным примером конформных теорий этого типа являются так называемые pq-модели [80] с центральным зарядом $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$. Все это приводит к тому, что иногда интеграл (1.1) может быть вычислен явно, и именно примеры таких теорий обсуждаются в этом разделе. Во всех теориях $c_{\mathrm{matter}} < 1$

(в том числе и отрицательный) или целый, а выводы о свойствах теории, сохраняющихся в непертурбативном режиме (корреляционных функциях, к которым нет старших поправок, операторной алгебре), основаны на алгебраической структуре двумерной конформной теории (алгебрах Вирасоро и Каца — Муди [81, 82]) и представлении $2D$ конформных теорий поля свободными полями [83–87].

Как и следовало ожидать, информация, полученная при непосредственном изучении интеграла (1.1), имеет весьма ограниченный характер [19,20,88, 89]. Формулировка непертурбативной теории достаточно не явным образом связана со свойствами теории на мировом листе, и ее можно описать следующим образом. Центральным объектом является производящая функция (1.4) точных физических корреляторов (амплитуд рассеяния), вычисление которой и является главной задачей теории. В случае двумерной гравитации и топологических струнных моделей функционал $\mathcal{F}$ (1.4) является в буквальном смысле функцией, вообще говоря, бесконечного (хотя в данной ситуации и дискретного) набора числовых переменных, и вариационные производные в формуле (1.4) превращаются в обычные частные производные.

Производящая функция зависит от переменных двух типов. Первый тип переменных — источники для физических операторов

$$F_g \to F_g(\mathbf{T}) = \int Dg_{ab} D\mathbf{x} e^{-S_{CFT}(\mathbf{x}, g_{ab}) + \sum T_k \mathcal{O}_k},$$

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}(\Lambda_{\rm str}, \mathbf{T}) = \sum_g \Lambda_{\rm str}^g F_g(\mathbf{T}), \tag{1.8}$$

производные по которым определяют корреляционные функции в теории. Выражение (1.8), безусловно, зависит от выбора базиса $\mathcal{O}_k$ или T_k, и только в специальном базисе (не обязательно удобном с точки зрения формулировки теории на мировом листе) оно может быть элегантно описано на языке нелинейных дифференциальных уравнений или соотношений типа унитарности для корреляторов [25, 26, 28, 32]. Вообще говоря, такие соотношения хорошо известны в традиционной квантовой теории поля (тождества Уорда [30], уравнения Швингера — Дайсона и т.п.), однако в теориях струн ситуация отличается тем, что эти уравнения можно написать в виде *полной* системы *интегрируемых* дифференциальных уравнений, полностью определяющих производящую функцию (1.8). Как функция $\mathbf{T}$, производящая функция (1.4), (1.8) может быть определена лишь в виде формального ряда, коэффициенты которого и отождествляются с корреляционными функциями, а сам ряд имеет, вообще говоря, нулевой радиус сходимости. Этот факт, безусловно, отражает хорошо известные свойства рядов теории возмущения в теории струн и квантовой теории поля, а кроме того, согласован с существующими явными формулами для точных непертурбативных решений, которые, если существуют вообще, имеют обычно интегральную форму и иногда могут быть сведены к матричным интегралам (1.3), т.е. к простейшим аналогам калибровочной теории поля.

Другими параметрами, от которых зависит статсумма или производящая функция, являются физические или пространственно-временные модули теории. Пространство этих параметров обычно конечномерно, в рассматриваемых случаях комплексно и часто может быть интерпретировано как пространство модулей комплексных кривых. Следует особо отметить, что возникающие при этом комплексные кривые или римановы поверхности имеют "пространственно-временную" природу (например, происходят из струнной компактификации) и никак не связаны с мировыми листами в теории струн! Как функция модулей, производящая функция является обычной (например, мероморфной) функцией многих комплексных переменных и часто может быть вычислена более или менее явным образом. Самим модулям можно придать смысл низкоэнергетических значений фоновых полей (хиггсовские средние скаляров, модули физической метрики — комплексные и кэлеровские структуры и т.п.), и, как функция модулей, $\mathcal{F}$ обычно имеет смысл эффективного действия.

В топологической $2D$-гравитации и некоторых топологических струнных моделях (A_p-серии) зависимость от модулей t и источников T практически совпадает ($t+T$-формула [64]). Задачей является нахождение явного вида функции $\mathcal{F}(t,\mathbf{T})$ или хотя бы уравнений, которым она удовлетворяет. В случае топологических теорий эта задача решается явно и ответ выражается через интеграл вида $\int DX \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\,V(X)+\mathrm{Tr}\,\Lambda X}$, где модули t связаны с коэффициентами потенциала $V(X)$, а внешние источники — со следами степеней матрицы Λ. Доказательство $t+T$-формулы является нетривиальной задачей (см. разд. 3).

В общем случае эта зависимость, естественно, различна и интерес представляют обе задачи независимо. В случае эффективной $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории в четырех измерениях существует ответ пока лишь на первый вопрос и чрезвычайно существенным фактом является то, что вильсоновское эффективное действие в безмассовом секторе, являясь функционалом полей, может быть выражено через *функцию* нескольких комплексных переменных (см., например, [41, 42] и ссылки в этих работах). Этот эффект легко понять следующим образом.

Для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории с группой $SU(N_c)$ скалярный потенциал имеет вид $V(\phi)=\mathrm{Tr}\,[\phi,\phi^\dagger]^2$, и его минимумы с точностью до калибровочных преобразований отвечают диагональным бесследовым матрицам $\phi=\mathrm{diag}\,(A_1,\ldots,A_{N_c})$, инварианты которых

$$\det(\lambda-\phi)=P_{N_c}(\lambda)=\sum_{k=0}^{N_c} S_{N_c-k}\lambda^k \tag{1.9}$$

в количестве, равном рангу группы $\mathrm{rank}\, SU(N_c) = N_c - 1$ (или любой другой набор алгебраически независимых инвариантов, например, $h_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\phi}^k$), параметризуют пространство физических модулей. Эффект Хиггса приводит к появлению массы у внедиагональной части калибровочного поля $\mathbf{A}_\mu$, т.к. $[\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_\mu] = (A_i - A_j)\mathbf{A}_\mu^{ij}$, в то же время диагональная часть остается безмассовой, а калибровочная группа нарушается с $G = SU(N_c)$ до $U(1)^{\mathrm{rank}\, G} = U(1)^{N_c-1}$. Таким образом, безмассовый сектор может быть представлен как $\mathcal{N} = 2$ абелева калибровочная теория, эффективный лагранжиан которой определяется в терминах суперполей $\Phi_i = \varphi^i + \vartheta\sigma_{\mu\nu}\tilde{\vartheta}G^i_{\mu\nu} + \ldots$, вакуумные значения которых совпадают с диагональными элементами матрицы $\boldsymbol{\phi}$. Поэтому функция комплексных переменных $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(A)|_{\sum A_i = 0}$ действительно определяет вильсоновское эффективное действие безмассовых полей, которое получается из нее подстановкой

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} \sim \int d^4\vartheta \mathcal{F}(A_i \to \Phi_i) = \ldots \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} G^i_{\mu\nu} G^j_{\mu\nu} + \ldots \tag{1.10}$$

Что касается массивных возбуждений в $\mathcal{N} = 2$ неабелевой калибровочной теории, то оказывается [41,42], что, по крайней мере, спектр БПС-состояний* связан с функцией $\mathcal{F}$ соотношением $M \sim |\mathbf{na} + \mathbf{ma}_D|$, где $\mathbf{a}_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}}$.

Таким образом, именно знание функции комплексных переменных $\mathcal{F}$ как функции модулей и ее всевозможных производных, например, разложение по источникам $\mathbf{T}$, дает наиболее полную непертурбативную информацию о теории. Ниже будет показано, что по крайней мере в некотором классе задач, общие черты которого описаны в данном разделе, главной целью является нахождение и формулировка свойств производящей функции $\mathcal{F}$, которая от части своих переменных зависит как от модулей комплексной структуры некоторой римановой поверхности.

Основной идеей, как уже было сказано, является отождествление функции $\mathcal{F}$, а также других характеристик физической теории с величинами, имеющими смысл в системах интегрируемых уравнений типа КП/Тоды. Для того чтобы сформулировать эту связь, приведем также некоторые определения из теории интегрируемых моделей. В классе рассматриваемых в данном обзоре задач все возникающие уравнения относятся к иерархиям КП (1.5) и Тоды (1.6), точнее, к их редукциям. Понятие иерархии означает, что динамические системы (1.5) и (1.6) обладают бесконечным количеством интегралов движения, которым можно сопоставить бесконечное количество взаимно коммутирующих (и коммутирующих с первыми (1.5) и (1.6)) потоков. Диф-

---

*БПС-состояниями (Богомольного — Прасада — Зоммерфельда) называются состояния, массы которых пропорциональны центральным зарядам расширенной $\mathcal{N} \geq 2$ алгебры суперсимметрии.

ференциальные уравнения по старшим временам T_k имеют более сложный вид, если их писать как уравнения на функции $U(\mathbf{T})$ и $\phi_n(\mathbf{T})$, но существует более изящный способ задания всей иерархии.

Этот способ основан на вспомогательной линейной задаче для иерархии интегрируемых уравнений

$$\frac{\partial}{\partial T_k}\Psi = B_k\Psi, \tag{1.11}$$

где $B_k = B_k[U;\phi]$ — дифференциальные операторы *только* по T_1 в случае КП (1.5) или разностные операторы по дискретному времени n в случае Тоды (1.6), а решение Ψ вспомогательной линейной задачи называется обычно функцией Бейкера — Ахиезера. К уравнениям (1.11) можно добавить уравнение Лакса

$$\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi, \tag{1.12}$$

которое при редукциях возникает как одно из уравнений цепочки (1.11). Иерархия нелинейных интегрируемых уравнений при этом эквивалентна уравнениям Лакса

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial T_k} = [B_k, \mathcal{L}] \tag{1.13}$$

или условиям совместности (Захарова — Шабата)

$$\left[\frac{\partial}{\partial T_k} - B_k, \frac{\partial}{\partial T_l} - B_l\right] = 0. \tag{1.14}$$

Наиболее универсальным объектом в такой формулировке интегрируемых задач является τ-функция Хироты, удовлетворяющая бесконечной цепочке билинейных дифференциальных (разностных) уравнений и генерирующая решения интегрируемой иерархии, функции Бейкера — Ахиезера и т.п. Например, для иерархии КП

$$\Psi = \mathrm{e}^{\sum T_k\lambda^k}\frac{\tau\left(T_k - \frac{1}{k\lambda^k}\right)}{\tau(T)}; \qquad U(\mathbf{T}) = \partial^2\log\tau(\mathbf{T}); \qquad \ldots \tag{1.15}$$

Аналогичные формулы существуют и для других иерархий.

Иерархии Тоды и КП имеют бесконечное число решений, параметризуемых так называемой точкой бесконечномерного грассманиана [58, 59], или, грубо говоря, функцией двух переменных. Частные решения можно выделять дополнительными условиями, часто имеющими вид дополнительных (в основном линейных) уравнений на τ-функцию.

Особую роль играют конечномерные редукции иерархий интегрируемых уравнений, когда только *конечное* число интегралов движения и потоков $\frac{\partial}{\partial T_k}$

являются независимыми. Красивым примером конечномерных редукций иерархий уравнений КП/Тоды являются так называемые конечнозонные решения, определяемые условиями

$$[\mathcal{L}, \mathcal{A}] = 0, \qquad \mathcal{A} = \sum_k^{\text{finite}} c_k B_k, \tag{1.16}$$

где $\mathcal{L}$ — оператор Лакса (1.12), B_k — операторы эволюции функции Бейкера (1.11), а c_k — некоторый *конечный* набор ненулевых констант. Интегрирование конечнозонных решений называется конструкцией Кричевера [50] и сводится к следующим шагам*.

• Совместный спектр коммутирующих операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ (1.16) задается системой уравнений, описывающих комплексную кривую Σ, в простейшем случае $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \mathcal{A}) = 0$.

• Функция Бейкера — Ахиезера является сечением некоторого расслоения над Σ — в используемых ниже случаях почти всегда линейного расслоения.

• Модули комплексной кривой являются интегралами движения системы (1.16).

• Интегрирующей заменой переменных является преобразование Абеля, и лиувиллевский тор (угловые переменные) является вещественным сечением якобиана кривой Σ.

• Гамильтоновская структура конечнозонного решения формулируется с помощью производящего мероморфного 1-дифференциала dS, периоды которого (интегралы по нетривиальным циклам на римановской поверхности) являются переменными действия (каноническим набором интегралов движения) системы.

Возникающие при этом комплексные кривые задаются алгебраическими уравнениями вида

$$\mathcal{P}(\lambda, w) = 0 \tag{1.17}$$

(одно соотношение на две переменные вида (1.17), где $\mathcal{P}$ – полином, коэффициенты которого являются модулями комплексной структуры, задает одномерное комплексное (или двумерное вещественное) многообразие) или системами уравнений на несколько комплексных переменных. Топологически каждая комплексная кривая характеризуется единственным параметром — родом g (количеством приклеенных "ручек"), при этом для поверхности

*Мы приводим здесь лишь "грубую" картину конечнозонного интегрирования исключительно для пояснения утверждений, сделанных в основном тексте, отсылая за точными математическими формулировками к [50–53].

фиксированного рода Σ_g комплексная структура определяется $3g-3$ параметрами — модулями комплексной структуры, т.е. $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_g = 3g-3$. Конечнозонным интегрируемым системам обычно отвечают g-параметрические семейства комплексных кривых (чтобы размерность пространства модулей, равная количеству независимых интегралов движения, совпадала с размерностью якобиана кривой, т.е. числом угловых переменных). Размерность же якобиана совпадает с количеством глобально определенных голоморфных дифференциалов $d\omega_i$, $i=1,\ldots,g$, и равна роду поверхности. На поверхности рода g существует $2g$ независимых нестягиваемых циклов (по два вокруг каждой "ручки"), канонический набор которых отвечает разбиению на так называемые A_i, $i=1,\ldots,g$, и B_i, $i=1,\ldots,g$, циклы с индексом пересечения $A_i \circ B_j = \delta_{ij}$. Голоморфные дифференциалы канонически выбираются нормированными на $\mathbf{A}$-циклы $\oint_{A_j} d\omega_i = \delta_{ij}$, при этом интегралы по $\mathbf{B}$-циклам дают матрицу периодов $\oint_{B_j} d\omega_i = T_{ij}$. Конечнозонные решения являются наиболее простыми решениями интегрируемых систем, из имеющих отношение к непертурбативным квантовым теориям. Вообще говоря, они представляют собой лишь первое приближение к непертурбативным решениям, являющимся основной темой данного обзора, уже позволяя при этом описать часть информации о физических характеристиках эффективной теории. Кроме того, во многих случаях точные решения можно рассматривать как интегрируемые деформации конечнозонных решений, описываемые иерархиями уравнений Уизема. В тех же случаях, когда решение теории струн может быть найдено точно, оно оказывается плохо определенным решением интегрируемой системы (непериодическим, не убывающим, а, наоборот, растущим на бесконечности и т.п.), но в то же время отвечает минимальной деформации уравнения (1.16) — появлению константы в правой части равенства. Такое дополнительное условие называется струнным уравнением [24], при "продлении" его на всю иерархию это условие принимает вид условия инвариантности τ-функции относительно действия линейных дифференциальных операторов, образующих борелевскую ($n \geq -1$) часть алгебры Вирасоро.

О содержании обзора. Мы начнем с формулировки топологической фазы $2D$-гравитации на основе техники двумерной конформной теории поля и теории свободных полей на римановых поверхностях – мировых листах в теории струн. Показано, что корреляторы в теории топологической гравитации имеют представление в терминах $c_{CFT} = -2$ двумерной конформной теории со специальной материей, взаимодействующей с обычной лиувиллевской гравитацией, а также исследовано обобщение двумерной гравитации на случай высших нелинейных двумерных симметрий, отвечающих W-алгебрам. Рассмотрена геометрическая формулировка $2D$- и W-гравитации, при которой естественным образом возникают объекты из теории интегрируемых систем. Исследованы алгебры наблюдаемых в $2D$- и W-гравитации, в частности, показано, что в секторе открытых струн (или голоморфном секторе модели) существуют замкнутые подалгебры, структура которых определяется *моделью* (суммой всех унитарных представлений с единичным весом) соответствующей конечномерной группы (группы G для W_G-гравитации).

Далее в разд.2 мы переходим непосредственно к точной непертурбативной формулировке квантовых теорий в терминах интегрируемых систем и, для начала, рассматриваем появившийся исторически первым пример — модели квантовой $2D$-гравитации. В п.2.3 показано, как точное непертурбативное решение моделей $2D$-гравитации $(2, 2k+1)$-серии (включающих чистую гравитацию — теорию с $k = 1$) формулируется в терминах решения иерархии уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ), инвариантного относительно действия $n \geq 1$ (борелевской) подалгебры алгебры Вирасоро. В этом разделе впервые приведен логарифм τ-функции интегрируемой иерархии, являющийся производящей функцией для корреляторов непертурбативной струнной теории, а также построено непертурбативное эффективное действие для струнного уравнения, позволяющее поставить вопрос об интерполяции между различными критическими точками $(2, 2k+1)$-серии. В п.2.4 доказано, что существует *явное* решение вирасоровских условий, т.е. имеется представление в виде матричного интеграла для τ-функции, для теории *топологической* гравитации, формально производящая функция которой удовлетворяет тем же уравнениям, что и производящая функция квантовой $2D$-гравитации ($(2, 2k+1)$-серии).

Раздел 3 посвящен непертурбативной формулировке топологических $c < 1$ струнных моделей — теорий, где известны не только формулировка непертурбативного режима в терминах систем интегрируемых уравнений, но и найдены явные решения этих уравнений в интегральной форме, позволяющей, в принципе, получить точный ответ для корреляционной функции. В п.3.1 доказана интегрируемость топологических струнных моделей ($A_{(p-1)}$-серии): а именно, что производящая функция является логарифмом τ-функции редуцированной иерархии Кадомцева — Петвиашвили (КП), удовлетворяющей *струнному уравнению* $\sum\limits_k kT_k \frac{\partial \mathcal{F}^{(p)}}{\partial T_{k-p}} + \sum\limits_{a+b=p} aT_a bT_b = 0$. В п.3.2 явно построены решения топологических струнных моделей и их топологические деформации в теории Гинзбурга — Ландау (т.е. определяемые полиномиальным (супер)потенциалом) в виде матрично-интегральных решений иерархии КП. В п.3.3 рассматривается обобщение конструкции на случай нетопологических решений. Показано, что явные решения топологических теорий являются следствием более общей формулы — преобразования pq-дуальности $\Psi^{(p,q)}(\lambda) = \int d\mu(x) \mathrm{e}^{S^{(p,q)}(\lambda,x)} \Psi^{(q,p)}(x)$, формулировка которого и является центральным местом п.3.3. Наконец, в п.3.4 исследован $c \to 1$ предел непертурбативных топологических решений и построена его производящая функция в терминах τ-функции иерархии двумерной решетки Тоды. Кроме того, в п.3.4 предложена интерпретация полученных результатов с точки зрения струнной теории поля.

Наконец, в разд. 4 мы переходим к физически наиболее интересному случаю — четырехмерным $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричным калибровочным теориям поля, являющимся точечным (или полевым) пределом более сложных $c > 1$ теорий струн. В п.4.1 сформулировано непертурбативное решение $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамики в терминах периодических решений цепочки Тоды. Показано, в частности, что модули физических решений (параметры решений классических уравнений движения) в случае $\mathcal{N} = 2$ могут быть отождествлены с интегралами движения цепочки Тоды, и существует изящный формализм такого отождествления в терминах комплексных кривых. В п.4.2 рассмотрена эллиптическая деформация цепочки Тоды в модель Калоджеро — Мозера, отвечающая включению взаимодействия $\mathcal{N} = 2$ неабелевой калибровочной теории с материей в присоединенном представлении калибровочной группы. В п.4.3 исследована альтернативная деформация цепочки Тоды в (классические) спиновые цепочки, и решение соответствующей периодической задачи отождествлено с непертурбативной формулировкой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД.

Таким образом, в разд. 4 непертурбативные решения $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной неабелевой калибровочной теории сформулированы в терминах конечнозонных решений уравнений типа КП/Тоды. Более подробно детали связи калибровочных теорий с интегрируемыми системами будут рассмотрены в дальнейшем [90].

2. ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В $2D$-ГРАВИТАЦИИ И СТРУННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

2.1. $2D$- и W-гравитация в формализме конформных теорий и интегрируемые системы типа КП. Отправной точкой при исследовании квантовой гравитации будем считать то, что теория, сводящаяся по определению к интегрированию по всем метрикам (если мы не находимся в спонтанно нарушенной фазе), по крайней мере, наивно является топологической теорией. Оставим пока в стороне детальное обсуждение топологической природы произвольной теории гравитации, здесь будет решена гораздо более скромная задача, а именно будет показано, что топологические корреляционные функции в самом деле возникают в оригинальном поляковском подходе [12,19–21] к пертурбативной квантовой $2D$-гравитации.

Мы продемонстрируем, что наблюдаемые в топологическом секторе [32] двумерной гравитации связаны с операторами *нулевой* размерности с точки зрения конформной теории, а вычисление многопетлевых топологических корреляционных функций имеет отношение к проблеме представления свободными бозонными полями бозонных систем первого порядка — так называемых $\beta\gamma$-систем [83, 86, 87].

Сформулированные ниже результаты основаны на следующих *постулатах* конформного подхода к двумерной гравитации [19–21].

• Выбор конформной структуры в двумерии эквивалентен выбору комплексной структуры: в координатах z, $\bar{z}$ на поверхности фиксированного рода g метрика g_{ab} может быть заменена на поле Лиувилля $\phi_{\mathcal{L}}$: $g_{ab} = \mathrm{e}^{\phi_{\mathcal{L}}}(g_0)_{ab}$ и духи bc — антикоммутирующие поля спина 2 и -1 и им комплексно-сопряженные. Действие также зависит от опорной метрики $g_0 = g_0(y)$, являющейся функцией модулей комплексной структуры ($\{y\}$ — координаты на $\mathcal{M}_g$ [12, 13]).

Для системы из конформной теории "материи", с действием $S_{CFT}\{\varphi, g\}$, центральным зарядом c, и $2D$-гравитации поляковский континуальный интеграл (1.1) [12, 19, 20] принимает вид

$$F_g\{\mathcal{K}\} = \int\limits_{\Sigma_g} Dg_{ab}\ \mathrm{e}^{-S_{gravity}\{g_{ab}\}} \int D\varphi\ \mathrm{e}^{-S_{CFT}\{\varphi, g_{ab}\}} \tilde{\mathcal{K}}\{\varphi, g_{ab}\} =$$

$$= A_g \int\limits_{\mathcal{M}_p} dy \int D\phi_{\mathcal{L}} D\varphi\ \mathrm{e}^{-\frac{25-c}{48\pi}\int_{d^2z}\left(\frac{1}{2}|\partial\phi_{\mathcal{L}}|^2 + R_0\phi_{\mathcal{L}}\right) - S_{CFT}\{\varphi, g_0\}} \times$$

$$\times \int \left| Db\ Dc\ \mathrm{e}^{\int b\bar{\partial}c} \right|^2 \mathcal{K}\{\varphi, b, c, \phi_{\mathcal{L}}\}, \tag{2.1}$$

где $R_0 = \partial\bar{\partial}\log g_0$, $|\partial\phi_{\mathcal{L}}|^2 \equiv \partial\phi_{\mathcal{L}}\bar{\partial}\phi_{\mathcal{L}}$, а $\tilde{\mathcal{K}}\{\varphi, g_{ab}\}$ обозначает некоторый набор вершинных операторов в теории *. Коэффициент $\frac{25-c}{48\pi}$ перед действием Лиувилля в правой части (2.1) определяется из условия сокращения конформной, голоморфной и гравитационной аномалии [12, 13, 19, 20]. Константа A_g зависит от выбора нормировки континуального интеграла (2.1) и, вообще говоря, не фиксируется в поляковской теории возмущения. Вопрос о фиксации этой нормировки (точнее, относительной нормировки F_g, отвечающих разным родам) решается лишь путем наложения нелинейных уравнений на производящую функцию и будет рассматриваться ниже.

• Основной постулат заключается в том, что $D\phi_{\mathcal{L}}$ — мера для *свободного* скалярного поля, т.е. определяется нормой $\|\delta\phi\|^2 = \int\limits_{d^2z} |\delta\phi|^2$, а не $\int\limits_{d^2z} |\delta\phi|^2 \mathrm{e}^{\phi}$.

Основной (хотя и не вполне убедительный) аргумент в пользу этого постулата — связь $2D$-гравитации с редукцией Дринфельда — Соколова $SL(2, \mathbf{R})$

---

*$\mathcal{K}$ отличается от $\tilde{\mathcal{K}}$ фактором $\prod\limits_{i=1}^{3g-3} \left| \int\limits_{d^2z} \mu_i b \right|^2$, где μ_i — $(-1, 1)$-дифференциалы Бельтрами, связанные с конкретным выбором координат y_i на пространстве модулей $\mathcal{M}_g$.

модели Весса — Зумино — Новикова — Виттена (ВЗНВ) или геометрическим квантованием алгебры Вирасоро [21, 87], из которой следует $SL(2)$-инвариантная мера интегрирования $D\phi_{\mathcal{L}} \sim \prod\limits_z \frac{dF}{F'}(z) \sim (\det\partial)^{-1}\prod\limits_z d\phi_{\mathcal{L}}(z)$, $F'(z) = \partial F(z) = \mathrm{e}^{\phi_{\mathcal{L}}(z)}$, в то время как $\prod\limits_z \mathrm{e}^{\phi_{\mathcal{L}}(z)} d\phi_{\mathcal{L}}(z)$ отвечает $\prod\limits_z \frac{dF}{F'^2}$, которая *не* инвариантна относительно дробно-линейных преобразований $F \to \to \frac{aF+b}{cF+d}$. Кроме всего прочего, этот аргумент применим лишь к "голоморфному квадратному корню" из $D\phi_{\mathcal{L}}$, а не к самой мере.

• Не все наблюдаемые в конформной теории в правой части (2.1) имеют смысл наблюдаемых в квантовой гравитации. Только проинтегрированные по поверхности (1-мерные) операторы или операторы нулевой размерности могут появиться как операторы $\mathcal{K}$ — они не зависят от положения точек на мировой поверхности, например, $\int\limits_{d^2z} \mathcal{O}_\Delta\{b, c, \varphi\}\mathrm{e}^{A_\Delta\phi_{\mathcal{L}}}$, где $\mathcal{O}_\Delta$ — оператор размерности Δ из сектора материи, а A_Δ подбирается так, что

$$\Delta_{\mathcal{L}} + \Delta = 1, \tag{2.2}$$

где размерность лиувиллевской части $\mathrm{e}^{A_\Delta\phi_{\mathcal{L}}}$ определяется тензором энергии-импульса поля Лиувилля

$$T_{\mathcal{L}} = \frac{25-c}{12}\left(-\frac{1}{2}(\partial\phi_{\mathcal{L}})^2 + \partial^2\phi_{\mathcal{L}}\right); \qquad \Delta_{\mathcal{L}} = -\frac{6}{25-c}A_\Delta^2 + A_\Delta \tag{2.3}$$

(заметим, что $\phi_{\mathcal{L}}(z,\bar z)\phi_{\mathcal{L}}(0,0) = -\frac{12}{25-c}\log\ z\bar z + \ldots$). Решая (2.2) относительно A_Δ, получаем

$$A_\Delta = \frac{1}{12}\left[25 - c - \sqrt{(25-c)(1-c+24\Delta)}\,\right], \tag{2.4}$$

где знак перед корнем выбран так, что $A_\Delta = 0$ при $\Delta = 1$.

Рассмотрим операторы, не зависящие от материи. Простейшие локальные операторы, построенные из духов bc, имеют вид

$$s_n(z) = b\ \partial b \ldots \partial^{n-2}b(z), \quad n > 1; \qquad s_n(z) = c\ \partial c \ldots \partial^{|n|}c(z), \quad n < 1;$$

$$\Delta(s_n) = 2(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} - 1 \tag{2.5}$$

или, в представлении одного бозонного поля Φ

$$|b|^2 = \mathrm{e}^{i\Phi}; \quad |c|^2 = \mathrm{e}^{-i\Phi}; \quad T_{bc} = -\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 - i\left(j - \frac{1}{2}\right)\partial^2\Phi; \quad |s_n|^2 = \mathrm{e}^{i(n-1)\Phi}. \tag{2.6}$$

Ситуация сильно упрощается, если операторы $\sigma_n = \mathrm{e}^{B_n \phi_{\mathcal{L}}} |s_n|^2$ имеют *нулевую* размерность и при $c = -2$. Действительно, при этом вместо (2.2) и (2.4) имеем

$$\Delta_{\mathcal{L}} + \Delta = 0; \qquad B_{\Delta} = \frac{1}{12}\left[25 - c - \sqrt{(25-c)(25-c+24\Delta)}\right], \tag{2.7}$$

откуда следует, что

$$B_n = \frac{1}{12}\left(25 - c - \sqrt{(25-c)(1-c+12[n^2+n])}\right) = \frac{3}{2}(1-n). \tag{2.8}$$

Топологический оператор может быть записан в виде

$$\sigma_n = \mathrm{e}^{B_n \phi_{\mathcal{L}}} |s_n|^2 = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(1-n)\phi_{\mathcal{L}}} |s_n|^2 = \mathrm{e}^{(1-n)(\Phi_{\mathcal{L}} - i\Phi)} \tag{2.9}$$

(где введено нормированное поле Лиувилля $\Phi_{\mathcal{L}} = \sqrt{\frac{25-c}{12}}\phi_{\mathcal{L}} = \frac{3}{2}\phi_{\mathcal{L}}$) и, очевидно, имеет нулевую размерность. В отсутствие гравитационной аномалии (случай теории (2.1)) корреляторы операторов нулевой размерности не зависят от положения на поверхности и могут играть роль (части) наблюдаемых в квантовой гравитации.

Операторы σ_n обладают важным свойством: любой их набор $\prod_{i=1}^{N} \sigma_{n_i}(z_i, \bar{z}_i)$, удовлетворяющий правилу отбора $\sum_{i=1}^{N} gh\#(\sigma_{n_i}) = \sum_{i=1}^{N}(n_i - 1) = 3g - 3 = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_g$ по духовому числу, *автоматически* удовлетворяет закону сохранения заряда по полю Лиувилля

$$\sum_{i=1}^{N} A_{n_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{3}{2}(1-n_i) = \frac{25-c}{6}(1-g) = \frac{9}{2}(1-g). \tag{2.10}$$

Это замечательное совпадение происходит только при выделенном значении $c = -2$.

Легко проверить, что древесные ($g = 0$) ненулевые (т.е. удовлетворяющие правилу отбора (2.10)) корреляторы операторов σ_n равны константе — вклад духов в точности сокращается вкладом поля Лиувилля. Это не столь очевидно для многопетлевых корреляционных функций: чтобы обеспечить сокращение между bc- и лиувиллевскими вкладами для старших родов $g > 0$, $\phi_{\mathcal{L}}$ следует рассматривать не как "обычное" скалярное поле со значениями в вещественных числах. Проблема заключается в сокращении инстантонного сектора поля $\Phi - bc$-системы, вклад которого описывается Θ-функцией в следующей формуле:

$$\left\langle \prod_i \mathrm{e}^{i(n_i-1)\Phi(\xi_i)} \right\rangle \sim$$

$$\sim \prod_{i<j} E(\xi_i,\xi_j)^{(1-n_i)(1-n_j)} \Theta\left(2\sqrt{2}\left(\sum_i (1-n_i)\xi_i + 3\sqrt{2}\Delta\right) \mid 4T\right), \quad (2.11)$$

где $E(\xi_i,\xi_j)$ — главная форма на поверхности старшего рода (аналог $\frac{1}{\xi_i-\xi_j}$ на сфере), а Θ обозначает тэта-функцию Римана на якобиане (g-мерном торе) поверхности рода g (см., например, [52, 91, 92]). Оказывается, гораздо более естественно рассматривать поле $\phi_{\mathcal{L}}$ как возникающее при бозонизации $\beta\gamma$-систем и имеющее нетривиальное глобальное поведение при $p > 0$ (см. подробности в [86,87]). В отличие от обычного скалярного поля корреляторы $\Phi_{\mathcal{L}}$ (рассматриваемого как поле, возникающее при бозонизации $\beta\gamma$-системы) вычисляются по формуле [86]:

$$\langle \xi(z) \prod_i \mathrm{e}^{(1-n_i)\Phi_{\mathcal{L}}(\xi_i)} \rangle \sim \prod_{i<j} E(\xi_i,\xi_j)^{-(1-n_i)(1-n_j)} \times$$

$$\times \left(\Theta\left(2\sqrt{2}(\sum_i (1-n_i)\xi_i + 3\sqrt{2}\Delta) \mid 4T\right)\right)^{-1}, \quad (2.12)$$

которая сокращает нетривиальные множители в (2.11) с точностью до константы.

В приведенном выше рассуждении обычная духовая система может быть легко заменена на произвольную систему антикоммутирующих полей спина j $(j \neq 2)$ – $b_j c_{1-j}$ (частный случай $j = 0$ обозначим, следуя [83], как $\eta\xi$-систему ($\eta = b$ — поле спина 1), что отвечает весьма специальному случаю материи с отрицательным центральным зарядом $c = -2$). Для случая $c = -2$ конформной материи, реализованной как $\eta\xi$-система, полное действие имеет следующий вид:

$$S_{\text{total}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{d^2 z} \left(\frac{1}{2}\,|\partial\Phi_{\mathcal{L}}|^2 + \frac{3}{2} R_0 \Phi_{\mathcal{L}} + \eta\bar{\partial}\xi + \text{c.c.} + b\bar{\partial}c + \text{c.c.}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{d^2 z} \left(\beta\bar{\partial}\gamma + b\bar{\partial}c + \text{c.c.}\right). \quad (2.13)$$

Члены, стоящие перед $b\bar{\partial}c$, дают в точности действие, возникающее при бозонизации *коммутирующей* $\beta\gamma$-системы со спином $j = 2$ ($\beta = \partial\xi \mathrm{e}^{\Phi_{\mathcal{L}}}$, $\gamma = \eta\mathrm{e}^{-\Phi_{\mathcal{L}}}$). Таким образом, полная теория превращается в комбинацию bc- и $\beta\gamma$-систем с одним и тем же спином $j = 2$. Довольно естественно предположить, что такая суперсимметричная комбинация представляет собой топологическую теорию.

Мера в континуальном интеграле для подобной $c = -2$ теории с $2D$-гравитацией может быть переписана как

$$Dg_{ab}D(c = -2\ CFT) = (d\mu(y)DbDcD\phi)(D\xi D\eta)$$

или

$$d\mu(y)(DbDc)(D\phi D\xi D\eta) = d\mu(y)(DbDc)(D\beta D\gamma). \tag{2.14}$$

Таким образом, оригинальный континуальный интеграл переписывается в форме интеграла для $bc - \beta\gamma$-системы.

Предложенный подход непосредственно обобщается и на теории с более богатой симметрией на мировом листе — так называемые W-струны, где внутренняя геометрия формулируется в терминах W-гравитации, связанной с расширенными алгебрами Вирасоро или W-алгебрами [93, 94]. W-алгебры тесно связаны с теорией интегрируемых систем [95] (W_N-алгебры с N-редукциями иерархии КП: иерархиями КдФ ($N = 2$), Бусинеска ($N = 3$) и т.п.). Основной целью является получение непертурбативной формулировки или "просуммированной" теории возмущений, основанной на технике *универсального пространства модулей* — бесконечномерного грассманиана [58,59], параметризующего различные решения интегрируемых систем типа КП или Тоды. W-геометрия приводит к появлению вирасоровских условий в физическом пространстве-времени [25–27] (в общем случае, буквально, W-условий: в дальнейшем, если не оговаривается специально, вирасоровскими условиями будем называть условия инвариантности относительно действия "борелевской" $W_{N,k\geq -N+1}$ части генераторов именно W-алгебр, являющихся, буквально, генераторами алгебры Вирасоро только при $N = 2$), возникающих из W_∞-симметрий грассманиана [59, 60].

Начнем с представления топологического сектора W-гравитации в терминах свободных полей. Двумерная гравитация определяется континуальным интегралом (2.1), и, как было показано выше, простейший топологический пример отвечает специальному выбору в (2.1) $\eta\xi$-материи (2.13), при котором топологический подсектор (2.13) формулируется в терминах $j = 2$ bc- и $\beta\gamma$-систем

$$S = S_{\text{gravity}} + S_{\text{matter}} = \int b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma + \text{c.c.}, \tag{2.15}$$

где использованы правила бозонизации

$$\beta = \mathrm{e}^{-\phi}\partial\xi\ , \qquad \gamma = \mathrm{e}^{\phi}\eta\ ,$$

$$c_{\beta\gamma} = -c_{bc} = 2(6j^2 - 6j + 1) = 26 = c_{\text{matter}} + c_{\text{Liouville}}. \tag{2.16}$$

Очевидно, как эти формулы обобщаются на случай W-гравитации. Топологическое действие (2.15) имеет следующий вид:

$$S_{\mathrm{W-gravity}} + S_{\mathrm{matter}} = \int \sum_{j=2}^{N} (b_j \bar{\partial} c_{1-j} + \beta_j \bar{\partial} \gamma_{1-j} + \text{c.c.}) =$$

$$= \int \sum_{j=2}^{N} \left(b_j \bar{\partial} c_{1-j} + \eta \bar{\partial} \xi + \text{c.c.} + \frac{1}{2} |\partial \phi_j|^2 + \left(j - \frac{1}{2} \right) R_0(y) \phi_j \right). \qquad (2.17)$$

Заметим сначала, что полный центральный заряд системы W-духов

$$c_N = \sum_{j=2}^{N} -2(6j^2 - 6j + 1) = 2(1-N)(2N(N+1)+1) \qquad (2.18)$$

(в частности, $c_2 = -26$, $c_3 = -100$, и т.д.) ограничивает возможные значения центрального заряда W-алгебры

$$c_{W_N} = \sum_{j=2}^{N} \left\{ 1 + 12 \left(\frac{j-1}{2} \right)^2 \right\} = 4(N-1)(N^2+N+1) \qquad (2.19)$$

(для $N = 2$ формула (2.19) воспроизводит “топологический” вирасоровский центральный заряд $c = 28$). Число нулевых мод $\{b_j,\ c_{1-j}\}$ духовых полей равно (комплексной) размерности пространства W-модулей. Из теоремы Римана — Роха следует, что

$$\sum_{j=2}^{N} \# b_j^{(0)} = (g-1) \sum_{j=2}^{N} (2j-1) = (g-1)(N^2-1) = (g-1) \dim SL(N) \qquad (2.20)$$

(для $N = 2$, $(g-1) \dim SL(2) = 3g - 3 = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_g$ совпадает с размерностью пространства модулей комплексных структур). Равенство (2.20) было отмечено Н.Хитчиным при изучении пространств модулей плоских $SL(N, \mathbf{R})$ связностей [96] и указывает на связь пространств W_G-модулей и плоских G-связностей на римановых поверхностях.

Наиболее общее выражение для континуального интеграла в конформной W-гравитации имеет вид (ср. с (2.1)):

$$\int\limits_{\mathcal{M}_g} \{dy\} \int D\phi \; \mathrm{e}^{-\int_{d^2z} \left(\frac{1}{2} |\partial \phi|^2 + \beta_0 R_0(y) \boldsymbol{\rho} \phi + \sum_\alpha \mathrm{e}^{\boldsymbol{\alpha} \varphi} \right)} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{N} \int \left| D b_j D c_{1-j} \, \mathrm{e}^{\int b_j \bar{\partial} c_{1-j}} \right|^2 \int D\varphi \; \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{matter}}\{\varphi, g_0\}} \mathcal{K}\{\varphi; \{b_j\}, \{c_{1-j}\}, \phi\}. \qquad (2.21)$$

Перейдем теперь к рассмотрению простейшего примера, позволяющего лучше понять свойства (классической) W-симметрии. Деформируем статсумму теории с W-симметрией

$$\langle\langle 1\rangle\rangle \equiv \langle \mathrm{e}^{\int \mu_2 T+\mu_3 W_3+\dots}\rangle = \int \mathrm{e}^{-S}\mathrm{e}^{\int \mu_2 T+\mu_3 W_3+\dots}, \tag{2.22}$$

где $\mu_n d\bar{z}(dz)^{-n}$ — обобщенные дифференциалы Бельтрами, и рассмотрим сначала случай, когда только μ_2 и μ_3 не равны нулю. Вычислим деформацию в первом порядке

$$\bar\partial u_2 \equiv \bar\partial\langle T(z)\rangle = \int d^2\xi\ \partial_{\bar z}\{\mu_2(\xi)\langle T(z)T(\xi)\rangle + \mu_3(\xi)\langle T(z)W(\xi)\rangle\} + O(\delta y^2) =$$

$$= -\frac{c}{12}\partial^3\mu_2 - 2u_2\partial\mu_2 - \mu_2\partial u_2 - 3\partial\mu_3 u_3 - 2\mu_3\partial u_3 + \dots, \tag{2.23}$$

где

$$u_2(z) = \langle T(z)\rangle, u_3(z) = \langle W_3(z)\rangle, \dots, u_n(z) = \langle W_n(z)\rangle, \tag{2.24}$$

а c — центральный заряд. Аналогично

$$\bar\partial u_3 = 3\partial\mu_2 u_3 + \mu_2\partial u_3 + \frac{c}{360}\partial^5\mu_3 + \frac{1}{3}\partial^3\mu_2 u_2 + \frac{1}{2}\partial^2\mu_3\partial u_2 +$$

$$+\partial\mu_3\left[2b^2\Lambda + \frac{3}{10}\partial^2 u_2\right] + \mu_3\left[b^2\partial\Lambda + \frac{1}{15}\partial^3 u_2\right]. \tag{2.25}$$

При $\mu_3 = 0$, $\mu_2 \equiv \mu$, $u_2 \equiv u$ формула (2.23) превращается в

$$-\bar\partial u = 2\partial\mu\ u + \mu\partial u + \frac{c}{12}\partial^3\mu. \tag{2.26}$$

Это равенство можно рассматривать как условие совместности вспомогательной линейной задачи

$$\left(\frac{c}{6}\partial^2 + u\right)\Psi_{-\frac{1}{2}} = 0; \qquad \left(\bar\partial + \mu\partial - \frac{1}{2}\partial\mu\right)\Psi_{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{2.27}$$

где $\frac{c}{6}$ — известный квазиклассический коэффициент, а $\Psi_{-\frac{1}{2}}$ обозначает $-\frac{1}{2}$-дифференциал. Совместность этих условий имеет смысл согласованности комплексной и проективной структур. Выбирая $\mu = \bar\partial\epsilon$, легко заметить, что последнее равенство в (2.27) является простым следствием закона преобразования $-\frac{1}{2}$-дифференциала

$$\delta\Psi_{-\frac{1}{2}} = \epsilon\partial\Psi_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\partial\epsilon\Psi_{-\frac{1}{2}}. \tag{2.28}$$

Для W_3-тождества Уорда (2.25) вспомогательная линейная задача имеет вид

$$\left(\frac{c}{24}\partial^3 + u_2\partial + \frac{1}{2}\partial u_2 + u_3\right)\Psi_{-1} = 0,$$

$$\left(\bar\partial + \mu_2\partial - \partial\mu_2 - \frac{1}{6}\partial^2\mu_3 + \frac{1}{2}\partial\mu_3\partial - \mu_3\left[\partial^2 - \frac{16}{c}u_2\right]\right)\Psi_{-1} = 0 \qquad (2.29)$$

(с учетом перенормировки $\mu_3 \to \sqrt{\frac{2}{5}}\mu_3$, $u_3 \to \sqrt{\frac{5}{2}}u_3$; коэффициенты в (2.29) упрощаются для специального значения $c = 24$, которое будет использоваться ниже). Второе уравнение в (2.29) отвечает следующему закону преобразования:

$$\delta\Psi_{-1} = \epsilon_2\partial\Psi_{-1} - \epsilon_3(\partial^2 - \frac{2}{3}u_2)\Psi_{-1} + \epsilon\text{-derivative terms}, \qquad (2.30)$$

которое *явно зависит* от “внешнего поля” u_2. В этом заключается главное отличие между случаями W_2 и старших W_n. Общая форма преобразований (2.30) имеет вид

$$\delta f = \sum \epsilon_n D_n(u_0, \ldots, u_{n-1})f + \epsilon\text{-derivative terms}, \qquad (2.31)$$

где

$$D_n(u_0, \ldots, u_{n-1}) = \partial^n + u_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + u_0 \qquad (2.32)$$

— некоторые дифференциальные операторы n-го порядка. Появление в данной ситуации операторов (2.32) с нетривиальными коэффициентами подразумевает связь с иерархией КП и алгеброй псевдодифференциальных операторов [97]:

$$L_{KP} = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\partial^{-i}; \qquad (L^n_{KP})_+ = \partial^n + \ldots + u_0. \qquad (2.33)$$

Действительно, тривиальный дифференциальный оператор ∂^n отвечает выбору тривиальной точки грассманиана $\mathcal{W}_0 = \{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots\}$, в то время как дифференциальный оператор общего вида (2.32) отвечает, вообще говоря, любой точке грассманиана. Таким образом, естественно рассматривать функции на римановой поверхности как объекты, зависящие от точки грассманиана. Возьмем, например, некоторую функцию на кривой и представим ее (локально) в виде интеграла Фурье или Лапласа $f(\xi) = \int e^{\lambda\xi}\hat f(\lambda)d\lambda$. Теперь эту функцию можно поднять до сечения некоторого расслоения над грассманианом, задаваемого потоками иерархии КП $f(t_1, \ldots, t_n) = \int e^{\lambda t_1 + \ldots + \lambda^n t_n + \cdots}\hat f(\lambda)d\lambda$, где $t_1 \equiv \xi$. Тогда симметрии, отвечающие действию дифференциальных операторов старшего порядка по ξ, связаны с действием потоков иерархии КП $\partial_\xi^n f = \partial_{t_1}^n f = \partial_{t_n} f$ на выражение в тривиальной точке грассманиана. В произвольной точке грассманиана вместо выражения следует написать преобразование

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \int \Psi_{\mathcal{W}}(\lambda, \{t_n\}) \hat{f}(\lambda) d\lambda, \tag{2.34}$$

где $\Psi_{\mathcal{W}}(\lambda, \{t_n\})$ — некоторая функция Бейкера — Ахиезера. При такой замене появляются нетривиальные потоки

$$\partial_{t_n} f = (\partial^n + u_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + u_0) f, \tag{2.35}$$

что является следствием перехода к общей точке $\mathcal{W}$. На самом деле, общая точка грассманиана отвечает W_∞-гравитации [59]. Более часто встречающийся случай *конечных* W_N отвечает специальным редукциям W_∞. Рассмотрим, например, специальную редукцию функции Бейкера — Ахиезера

$$\Psi_{\mathcal{W}}(\lambda, \{t_n\}) \mathrm{e}^{\sum \lambda^k t_k} \frac{\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, \ldots, t_n - \frac{1}{n\lambda^n}, \ldots)}{\tau(t_1, \ldots, t_n, \ldots)} =$$

$$= \mathrm{e}^{\sum t_n \lambda^n} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\{t_n\}) \lambda^{-i} \right], \tag{2.36}$$

такую, что сумма в правой части *конечна* — порядка N. Соответствующая τ-функция выражается через решения уравнения $(\partial^N + w_1\partial^{N-1} + \ldots + w_N) f_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$ [98], $\tau = \det_{ij} f_i^{(j-1)}$. Нетрудно вычислить соответствующую Ψ-функцию:

$$\Psi(\lambda, t_1, \ldots, t_n, \ldots) = \mathrm{e}^{\sum \lambda^k t_k} \frac{\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, \ldots, t_n - \frac{1}{n\lambda^n}, \ldots)}{\tau(t_1, \ldots, t_n, \ldots)} =$$

$$= \mathrm{e}^{\sum \lambda^k t_k} \left(1 + \frac{w_1}{\lambda} + \ldots + \frac{w_N}{\lambda^N} \right), \tag{2.37}$$

где $w_{N-i} = \det_{kl} f_k^{(l)} \Big|_{l \neq i} \cdot \left(\det_{kl} f_k^{(l-1)} \right)^{-1}$. $GL(N)$-преобразования функций f_i не меняют значения Ψ-функции. Налагая дополнительное условие $w_1 = 0$, убеждаемся, что $\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = 0$. Существует простое соотношение между выражениями w_n из (2.37) и u_n из (2.32). Разлагая логарифм в обеих частях равенства (2.37) в ряд по $\frac{1}{\lambda}$ и пользуясь равенством $\partial_{t_1}\partial_{t_n} \log \tau = (L_{KP}^n)_{-1}$ (т.е. просто коэффициент перед членом с ∂^{-1}), немедленно получаем

$$w_2 = \partial_{t_1}^2 \log \tau + \partial_{t_2} \log \tau; \quad w_3 = \partial_{t_1}^3 \log \tau + \partial_{t_1}\partial_{t_2} \log \tau + \partial_{t_3} \log \tau; \quad \ldots \tag{2.38}$$

Рассмотрим теперь случай, когда независимой функцией является только u_2 (т.е. $\widehat{SL(2)}$- или КдФ-редукция КП). Тогда $\partial_{t_2} \log \tau = 0$ и $w_2 = u_2$. Аналогично для $\widehat{SL(3)}$-редукции $\partial_{t_3} \log \tau = 0$ и $w_3 = \frac{1}{2}\partial u_2 + u_3$.

2.2. Алгебры наблюдаемых в 2D- и W-гравитации. Перейдем теперь к рассмотрению *алгебр наблюдаемых* в $c = 1$ теориях $2D$-гравитации и теориях W-гравитации с целым центральным зарядом. Эти алгебры можно рассматривать как основные инвариантные характеристики топологических струнных моделей, в том числе *вне* рамок теории возмущений, так как они, в частности, не зависят от порядка члена в пертурбативном разложении. В обсуждаемом подходе примарные поля двумерной конформной теории — (расширенной) алгебры Вирасоро, "одетые" с помощью лиувиллевских полей и духов, являются представителями классов БРСТ-когомологий [38, 100] или физическими операторами. С точки зрения лагранжевского подхода это заметное упрощение, так как множество примарных полей, как правило, обладает дополнительными структурами или симметриями, не заметными при рассмотрении всех полей двумерной конформной теории. Здесь будет показано, что примером подобной структуры является, по сути дела, обнаруженная [101] в $SU(2)$-инвариантной точке $c = 1$ конформной теории *модель* группы $SU(2)$, т.е. прямая сумма всех унитарных представлений $SU(2)$ старшего веса, в которую каждое представление входит только один раз. Структура *модели* сохраняется при "одевании" полем Лиувилля и объединяет некоторый класс наблюдаемых в соответствующей струнной модели, а более точно — в секторе открытых струн. Более того, эта структура определяет до некоторой степени и алгебру наблюдаемых в соответствующей струнной теории. Ниже будет предложено естественное обобщение этой структуры на произвольные группы G (ADE-серии), физически отвечающие $c = \mathrm{rank}\, G$ W_G-гравитации.

Конструкция [101] выглядит следующим образом.

1. Рассмотрим скалярное поле (материи) X, компактифицированное на окружность радиуса $r = \sqrt{2}$ (т.е. $X \sim X + 2\pi r = X + 2\pi\sqrt{2}$), с тензором энергии-импульса $-\dfrac{1}{2}(\partial X)^2$. При таком радиусе очевидная симметрия $U(1) \times U(1)$ возрастает до $SU(2) \times SU(2)$ и мы можем рассмотреть киральный сектор с $SU(2)$-симметрией. Это отвечает самодуальной точке $c = 1$ гауссовской модели [102], где $SU(2) \times SU(2)$ естественно действует на вирасоровские примарные поля. Ниже мы рассмотрим голоморфный сектор в такой теории (сектор открытых струн), в котором естественно действует "левая" (или "правая") группа $SU(2)$. При этом все киральные примарные вершинные операторы в теории образуют *модель* $SU(2)$: $M[SU(2)]$.

2. Для выделения структуры примарных полей можно избавиться от потомков, введя взаимодействие с $2D$-гравитацией, т.е. перейти к теории струн. Среди струнных наблюдаемых существует подсектор, состоящий из интегра-

лов по поверхности (для голоморфного сектора по контурам) от гравитационно-одетых примарных полей с полной единичной размерностью. Соответствующие вершинные операторы имеют вид

$$q_{J,m} = \oint \psi_{J,m}(x) \mathrm{e}^{(J-1)\sqrt{2}\phi} \ . \tag{2.39}$$

3. Эти операторы образуют *алгебру Ли* $\mathcal{G}$ (в отличие от операторного разложения (OPE) в конформной теории), структурные константы которой являются трехточечными корреляторами на сфере. Таким образом, мы получили отображение $M[SU(2)]$ в некоторую алгебру (части) наблюдаемых, которая является алгеброй Ли $\mathcal{G}[SU(2)]$. Более того, отображение $M[SU(2)] \hookrightarrow \mathcal{G}[SU(2)]$ является представлением, т.е. сохраняет структуру модели: а) $q_{1,m} = Q_m$ образует *присоединенное* представление $SU(2)$ в $\mathcal{G}[SU(2)]$; б) поскольку Q_m действуют тривиально на лиувиллевское поле ϕ, $\{q_{J,m}\}$ образуют *модель* $SU(2)$: набор представлений старшего веса спина J.

4. Благодаря специальным правилам отбора, определяемым свойствами лиувиллевского сектора, коммутатор $[q_{J',m'}, q_{J'',m''}]$ содержит единственный член $q_{J,m}$ с $J = J' + J'' - 1$ (и $m = m' + m''$):

$$[q_{J',m'},\, q_{J'',m''}] = C^{J'+J''-1}_{J',J''} q_{J'+J''-1,m'+m''} \ . \tag{2.40}$$

Коэффициенты $C[SU(2)]$ являются $3j$-символами (коэффициентами Клебша — Гордана) группы $SU(2)$ в некотором базисе.

5. Структурные константы, заданные $3j$-символами $C^{J'+J``-1}_{J',J``}$, имеют также интерпретацию структурных констант алгебры диффеоморфизмов двумерной плоскости $\mathbf{R}^2 \sim \mathbf{C}$, сохраняющих площадь (т.е. алгебры гамильтоновых векторных полей на плоскости, часто отождествляемой с алгеброй W_∞) *.

Рассмотрим подробнее теорию одного свободного скалярного поля X, компактифицированного на окружность, с лагранжианом $\int \partial X \bar{\partial} X$. В такой теории киральная алгебра обычно содержит $\hat{U}(1) \times \hat{U}(1)$, генерируемую током $\mathcal{J}_0 = \partial X$, и алгебру Вирасоро, генерируемую $T = -\frac{1}{2}(\partial X)^2$ (плюс соответствующие им сопряженные). Стандартный набор примарных полей в этой теории задается экспонентами $\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{e}^{i\bar{p}\bar{x}}$ **, где

$$p + \bar{p} = \frac{n}{R}, \qquad p - \bar{p} = 2mR, \tag{2.41}$$

---

*Кроме того, $\mathcal{G}[SU(2)]$ является алгеброй производных вакуумного кольца, образуемого другой частью алгебры наблюдаемых: физических вершинных операторов нулевой размерности и нулевого духового числа [100, 101], изоморфного, на самом деле, кольцу гамильтонианов (полиномов на $\mathbf{R}^2 \sim \mathbf{C}$).

**x и $\bar{x}$ обозначают голоморфную и антиголоморфную части X соответственно.

$n, m \in \mathbf{Z}$, а R — так называемый радиус компактификации [102] (заметим, что на самом деле эта величина является *половиной* настоящего радиуса компактификации: $x \sim x + 2\pi R$ и $\bar{x} \sim \bar{x} + 2\pi R$ означает, что $x + \bar{x} = X \sim X + 2\pi r$, где $r = 2R$). Однако в некоторых случаях голоморфная киральная алгебра возрастает до $S\hat{U}(2)_{k=1}$, образуемая токами $\mathcal{J}_{\pm} = \mathrm{e}^{\pm i\sqrt{2}x}$ и $\mathcal{J}_0$. Это происходит в самодуальной точке при $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (в которой теория связана с $\hat{S}U(2)_{k=1}$ моделью ВЗНВ). При этом множество примарных полей становится $SU(2) \times SU(2)$-инвариантным, а для голоморфного сектора (или соответствующей теории открытых струн) это означает, что для каждого e^{ipx} спектр содержит все ненулевые $(Q_-)^k \mathrm{e}^{ipx}$ (при $p > 0$, или $(Q_+)^k \mathrm{e}^{ipx}$ при $p < 0$; $Q_{\pm} = \oint \mathcal{J}_{\pm}$ являются генераторами $SU(2)$ и коммутируют с тензором энергии-импульса). Если $p = \mathrm{integer} \times \sqrt{2}$, эта последовательность конечна: $k \leq \frac{|p|}{\sqrt{2}}$ и образует представление $SU(2)$ спина J ($J = |p|/2$). Каждое представление возникает один раз, и мы получаем *модель* $SU(2)$.

Этот вывод подтверждается вычислением однопетлевой статсуммы в теории. Действительно [87, 102, 103], для $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем ($q = \mathrm{e}^{2\pi i\tau}$):

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{\left|\theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](2\tau)\right|^2 + \left|\theta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](2\tau)\right|^2}{|\eta(q)|^2}, \tag{2.42}$$

где θ — тэта-функция Якоби, и совпадает со статсуммой $SU(2)_{k=1}$ модели ВЗНВ. Введем величину

$$Z(\tau) = \frac{\theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](2\tau)}{\eta(q)} + \frac{\theta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](2\tau)}{\eta(q)}\ , \tag{2.43}$$

которую можно интерпретировать как "голоморфный квадратный корень" статсуммы или, что практически то же самое, как статсумму соответствующей модели открытых струн [104]. Эта голоморфная статсумма может быть представлена как сумма вирасоровских характеров по всем вирасоровским примарным полям из спектра теории. В соответствии с приведенными выше аргументами (2.43) является в точности статсуммой *модели* или всех представлений $SU(2)$:

$$Z(\tau) = \sum_{J \in \mathbf{Z}_+/2} (2J+1)\chi_J(\tau), \tag{2.44}$$

где $\chi_J(\tau)$ обозначают характеры представлений алгебры Вирасоро при $c = 1$, $\chi_J(\tau) = \frac{q^{J^2} - q^{(J+1)^2}}{\eta(q)}$ [105], а множитель $(2J+1) = \dim R_J$ буквально отражает тот факт, что мы имеем дело с *моделью* $SU(2)$. Таким образом, получаем

$$\eta(q)Z(\tau)=\frac{1}{2}\left(\sum_{J\in \boldsymbol{Z}_{+}/2}(2J+1)\chi_J(\tau)+(J\to -J-1)\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n/2)^2}=\theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(\tau/2)=\theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(2\tau)+\theta\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}(2\tau) \qquad (2.45)$$

в соответствии с (2.43).

Перейдем к случаю произвольной ADE-алгебры Ли G, а именно рассмотрим $r_G=\mathrm{rank}(G)$ *свободных* скалярных полей $\mathbf{X}=\{X_1,\ldots,X_{r_G}\}$ с лагранжианом $\int\partial\mathbf{X}\bar\partial\mathbf{X}$. Обычно киральная алгебра в r_G-мерной свободной теории есть $\hat U(1)^{r_G}\times\hat U(1)^{r_G}$, а генератором алгебры Вирасоро является $T=-\frac{1}{2}\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{X}$. В случае многих полей более естественно рассматривать не вирасоровскую подалгебру киральной алгебры, а алгебру (высших спинов) W_G, образуемую генераторами вида $\sum(\boldsymbol{\mu}\partial\mathbf{X})^n$. При компактификации на r-мерную решетку $\Gamma=\{\boldsymbol{\gamma}\}$: $\mathbf{X}\sim\mathbf{X}+2\pi\boldsymbol{\gamma}$ примарными полями Вирасоро являются $\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\mathrm{e}^{i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}}$, когда

$$\mathbf{p}=\boldsymbol{\gamma}^*+\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\ ,\qquad \bar{\mathbf{p}}=\boldsymbol{\gamma}^*-\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\ ;\qquad \boldsymbol{\gamma}\in\Gamma,\ \ \boldsymbol{\gamma}^*\in\Gamma^*\ , \qquad (2.46)$$

где Γ^* — дуальная к Γ решетка, т.е. $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^*=$ целое число. Однако в случае специальных решеток киральная алгебра возрастает до $\hat G_{k=1}$ с генераторами $\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha}}=\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}}$, $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\partial\mathbf{x}$, где α — все корни G, а $\boldsymbol{\nu}$ — некоторый базис в картановской (гипер)плоскости. Это происходит, когда Γ ($\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$) является *решеткой корней* алгебры G; тогда заряды $Q_{\boldsymbol{\alpha}}=\oint\mathcal{J}_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $Q_{\boldsymbol{\nu}}=\oint\mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu}}$, являющиеся генераторами алгебры глобальной симметрии G, коммутируют с тензором энергии-импульса, а вирасоровские примарные поля образуют представление G. Это подразумевает, что, как и в случае $SU(2)$, наряду с "наивными" примарными полями (или тахионами) $\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\mathrm{e}^{i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}}$ существуют и другие, образуемые действием G. Когда $r_G>1$, ситуация этим не исчерпывается, а именно: примарных полей *Вирасоро* гораздо больше (гравитоны и т.п. — все старшие спины). Чтобы сузить класс примарных полей и заметить структуру *модели* группы G, нужно перейти к примарным полям W_G-алгебры. Генераторами W_G-алгебры являются комбинации типа $\sum_{a=0}(\boldsymbol{\nu}_a\partial\mathbf{x})^n$, где $n=1,\ldots,r_G$ (а $\boldsymbol{\nu}_a$ — некоторые векторы в картановской (гипер)плоскости, связанные с фундаментальными весами). Сама W_G-алгебра (или ее универсальная обертывающая) определяется как часть киральной алгебры (в нашем случае универсальная обертывающая $\hat G_1$), коммутирующая с зарядами $Q_{\boldsymbol{\alpha}}$, $Q_{\boldsymbol{\nu}}$. Поэтому примарные поля W_G по-прежнему образуют мультиплеты G, а полный их набор — *модель* $M[G]$. Чтобы продемонстрировать это, обратимся опять к формулам для однопетлевых статсумм:

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = |\eta(q)^{-r_G}|^2 \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \left|\Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\epsilon}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}(\tau)\right|^2, \tag{2.47}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ пробегает по векторам $\{\frac{1}{2}\mathbf{e}_i\}$ и $\mathbf{0}$ ($\{\mathbf{e}_i\}$ — базис решетки Γ) [87, 103]. Член с $\boldsymbol{\epsilon}=0$

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = |\eta(q)^{-r_G}|^2 \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma} \left|\Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}(\tau)\right|^2 \tag{2.48}$$

модулярно-инвариантен и является однопетлевой статсуммой $k=1$ модели ВЗНВ для ADE-группы G. Соответствующая однопетлевая статсумма в "киральном" или "открытом" секторе есть

$$Z(\tau) \equiv \eta(q)^{-r_G} \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma} \Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ 0\end{bmatrix}(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda}\in\Gamma_*} D_{\boldsymbol{\Lambda}}\chi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau), \tag{2.49}$$

где представление старшего веса $R_G[\boldsymbol{\Lambda}]$ группы G — взаимно однозначно старший вектор $\boldsymbol{\Lambda}$, лежащий в "положительной" камере Вейля Γ^+. Размерность представления $R_G[\boldsymbol{\Lambda}]$ вычисляется как произведение по всем *положительным* корням $\boldsymbol{\alpha}$ [106]:

$$D_{\boldsymbol{\Lambda}} = \prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+} \frac{\langle\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle} \tag{2.50}$$

($\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+}\boldsymbol{\alpha}$, $\langle,\rangle$ — скалярное произведение в картановской (гипер)плоскости). Согласно приведенным выше аргументам, те же самые векторы $\boldsymbol{\Lambda}$ отвечают примарным полям алгебры W_G или неприводимым представлениям $\mathcal{R}_{W_G}[\boldsymbol{\Lambda}]$ с $c=r_G$. (Заметим, однако, что сами *представления* $\mathcal{R}_{W_G}[\boldsymbol{\Lambda}]$ и $R_G[\boldsymbol{\Lambda}]$ не совпадают: являются представлениями различных алгебр!) Обозначим $\chi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau)$ аналоги вирасоровских характеров Каца — Роша — Кариди для неприводимых представлений $\mathcal{R}_{W_G}[\boldsymbol{\Lambda}]$ с конформными размерностями $\Delta_{\boldsymbol{\Lambda}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^2$:

$$\chi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau) = \eta(q)^{-r_G} \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \det(\sigma)\, q^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\rho}-\sigma(\boldsymbol{\rho}))^2}, \tag{2.51}$$

где $\mathcal{W}$ — группа Вейля алгебры G, а $\det(\sigma)$ обозначает детерминант преобразования $\sigma\in\mathcal{W}$. Эти характеры зависят только от размерности Δ, поэтому они одинаковы для всех примарных полей $D_{\boldsymbol{\Lambda}}$, представления $R[\boldsymbol{\Lambda}]$ и дают одинаковый вклад в (2.49), приводя к появлению множителей $D_{\mathbf{\Lambda}}$. Формула (2.49) доказывает, что W_G-примарные поля образуют *модель* группы G.

Для доказательства (2.49) вычислим сумму в правой части. Сначала перепишем ее как сумму по всей решетке весов, используя то, что вследствие (2.50) и (2.51) для любого $\sigma \in \mathcal{W}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеем

$$D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = D_{\boldsymbol{\nu}_\sigma}\chi_{\boldsymbol{\nu}_\sigma}(\tau), \tag{2.52}$$

где $\boldsymbol{\nu}_\sigma \equiv \sigma(\boldsymbol{\nu}) + \sigma(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}$. Это дает для любой решетки $\mathcal{T}$

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{T}_+} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \frac{1}{\operatorname{ord}\mathcal{W}}\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\hat{\mathcal{T}}} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)\right), \tag{2.53}$$

где $\operatorname{ord}\mathcal{W}$ — порядок (число элементов) группы Вейля, $\mathcal{T}_+$ — пересечение $\mathcal{T}$ с камерой Вейля, а

$$\hat{\mathcal{T}} = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{W}} [\sigma(\mathcal{T}_+) + \sigma(\boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}]. \tag{2.54}$$

Вообще говоря, $\hat{\mathcal{T}}$ не совпадает с изначальной решеткой $\mathcal{T}$: это верно для решетки *корней* $\hat{\Gamma} = \Gamma$, но не для $\hat{\Gamma}^* \neq \Gamma^*$. (В простейшем примере $SU(2)$ $\Gamma^* = \{n/\sqrt{2}, n \in \mathbf{Z}\}$, $\rho = 1/\sqrt{2}$, $\Gamma^*_+ = \{n/\sqrt{2}, n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0\}$, а $\hat{\Gamma}^*_+ = \{n/\sqrt{2}, n \in \mathbf{Z},\ n \neq -1\}$. Тем не менее разница между Γ^*_+ и $\hat{\Gamma}^*_+$ состоит из единственной точки $\nu = -\rho$, а согласно (2.50) в этой точке $D_{-\rho} = 0$, т.е. она не дает вклада в сумму в правой части (2.53), так что суммирование может проводиться по всей решетке Γ^*_+.) Последнее утверждение верно для произвольных ADE-алгебр G: в общем случае разница между Γ^*_+ и $\hat{\Gamma}^*_+$ уже не точка, а состоит из гиперплоскостей коразмерности 1, так что для любого $\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^* - \hat{\Gamma}^*$ сумма $\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\rho}$ ортогональна по крайней мере одному из положительных корней, а поэтому согласно (2.50) соответствующий $D_{\boldsymbol{\nu}} = 0$, и суммирование в правой части (2.53) может производиться по полной решетке Γ^* вместо $\hat{\Gamma}^*$. После этого имеем

$$Z(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*_+} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \frac{1}{\operatorname{ord}\mathcal{W}}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\hat{\Gamma}^*} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \frac{1}{\operatorname{ord}\mathcal{W}}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*} D_{\boldsymbol{\nu}}\chi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau), \tag{2.55}$$

где также использовано, что $D_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ для $\boldsymbol{\nu} \in \Gamma^* - \hat{\Gamma}^*$. Подставляя (2.55) и делая замену переменной суммирования $\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\rho} - s(\boldsymbol{\rho})$, получаем

$$\eta(q)^{r_G} Z(\tau) = \frac{1}{\operatorname{ord}\mathcal{W}}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*}\sum_{s\in\mathcal{W}}\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+}\frac{\langle\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle}\det(s) q^{\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\rho}-s(\boldsymbol{\rho})]^2} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ord}\mathcal{W}}\sum_{s\in\mathcal{W}}\det(s)\sum_{\mathbf{\Lambda}\in\Gamma^*}\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_+}\frac{\langle\mathbf{\Lambda}+s(\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha}\rangle} q^{\frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}^2} = \sum_{\mathbf{\Lambda}\in\Gamma^*} q^{\frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}^2}, \tag{2.56}$$

где использовано, что $s^2 = 1$ для $s \in \mathcal{W}$, а также

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{W}} \det(\sigma)\frac{\langle \mathbf{\Lambda} + \sigma(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\alpha}\rangle}{\langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}\rangle} = \operatorname{ord}\mathcal{W} \tag{2.57}$$

для любого $\mathbf{\Lambda}$. Наконец, для правой части (2.56) получаем

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*} q^{\boldsymbol{\nu}^2/2} = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Gamma} q^{(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\nu})^2/2}\right) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma^*/\Gamma}\Theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}(\tau), \tag{2.58}$$

где появилась *решеточная* Θ-функция, определенная как сумма по решетке *корней* Γ.

Характеры неприводимых представлений алгебры W_G (2.51) можно получить предельным переходом $c \to r_G$ или $\alpha_0 \to 0$, а именно используя характеры "минимальной" серии, возникающие при значениях $c = r_G - 12\alpha_0^2\boldsymbol{\rho}^2 = r_G - 6\frac{(p-p')^2}{pp'}\boldsymbol{\rho}^2$. Согласно [94]

$$\chi_{\mathbf{\Lambda}_1,\mathbf{\Lambda}_2}(\tau) = \eta(q)^{-r_G}\sum_{s_1,s_2\in\mathcal{W}}\frac{\det(s_1)\det(s_2)}{\operatorname{ord}\mathcal{W}}\Theta\begin{bmatrix}ps_1\mathbf{\Lambda}_1 - p's_2\mathbf{\Lambda}_2\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}(pp'\tau) =$$

$$= \eta(q)^{-r_G}\sum_{s\in\mathcal{W}}\det(s)\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Gamma}\exp\left(\frac{i\pi\tau}{pp'}(ps\mathbf{\Lambda}_1 - p'\mathbf{\Lambda}_2 - 2pp'\boldsymbol{\alpha})^2\right), \tag{2.59}$$

откуда в пределе $p \to \infty$, $p' \to \infty$ при фиксированной разности $p'-p$ остается лишь член с $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Переопределив $\mathbf{\Lambda}_i \to \mathbf{\Lambda}_i + \boldsymbol{\rho}$ и положив $\mathbf{\Lambda}_1 = 0$ ($n = 1$ в случае $SU(2)$), а $\mathbf{\Lambda}_2 \equiv \mathbf{\Lambda}$, приходим к формуле (2.51).

Взаимодействие с W_G-гравитацией. Наконец, чтобы выделить структуру *модели*, необходимо избавиться от потомков: сделать W_G-симметрию калибровочной или перейти к W_G-струнам. Главным отличием W_G-гравитации от обычной $2D$-гравитации является проблема с формулировкой, в которой физические операторы (наблюдаемые) представляются как проинтегрированные простые операторы единичной размерности, не содержащие духовых полей. В действительности бездуховые операторы имеют естественную размерность $\Delta^{\{G\}} = 2\boldsymbol{\rho}^2 = \dfrac{1}{6}C_V[G]\dim G$. Даже трехточечные корреляционные функции таких операторов содержат нетривиальную духовую часть (т.е. пространство модулей W_G-гравитации нетривиально уже для сферы с тремя отмеченными точками).

Аналогом действия Лиувилля является действие конформной G-тодовской теории поля (2.21):

$$\int_{d^2z}\left(|\partial\boldsymbol{\phi}|^2 + \beta_0 R_0(y)\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\phi} + \sum_{\text{simple }\boldsymbol{\alpha}}\eta_i \mathrm{e}^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\phi}}\right), \tag{2.60}$$

где суммирование производится по r_G *простым* корням G, и, как обычно, в формализме ДДК рассматривается точка, где все $\eta_i = 0$. Кроме r_G-компонентного поля W-Тоды $\boldsymbol{\phi}$, следует ввести r_G духовых пар — bc-систем $\int\limits_{d^2z} \sum\limits_{j\in S_G} \left(b_j\bar{\partial}c_{1-j} + \text{c.c.}\right)$ со спинами $j \in S_G$, где в общем случае S_G — множество G-инвариантов, или казимиров, для трех A-, D- и E-серий: $SU(r+1) - j = 2,\ldots,r_G+1$ (ср. с (2.17)); $SO(2r) - j = 2,4,\ldots,2r-2$ и r; $E_6 - j = 2,5,6,8,9,12$; $E_7 - j = 2,6,8,10,12,14,18$; $E_8 - j = 2,8,12,14,18,20,24,30$ соответственно. Центральный заряд духовой системы в общем случае равен $c_{\text{ghosts}} = \sum\limits_{j\in S_G}[-2(6j^2-6j+1)] = -48\boldsymbol{\rho}^2 - 2r_G$, а центральный заряд полей W-Тоды — $c_{\boldsymbol{\phi}} = r_G + 48\beta_0^2\boldsymbol{\rho}^2$. Из условия $c_{\text{matter}} + c_{\boldsymbol{\phi}} + c_{\text{ghosts}} = 0$ имеем $48(\beta_0^2-1)\boldsymbol{\rho}^2 = c_{\text{matter}} - r_G$, а следовательно, для $c_{\text{matter}} = r_G$ получаем $\beta_0 = \pm 1$.

Для построения наблюдаемых в W_G-струнной модели естественное обобщение формализма ДДК приводит к следующему алгоритму:

А) Выберем любое W_G-примарное поле материи $\Psi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \prod\limits_{i=1}^{r_G}(Q_{-\boldsymbol{\alpha}_i})^{(\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\xi})}\Psi_{\boldsymbol{\nu},\mathbf{0}}$, $\Psi_{\boldsymbol{\nu},\mathbf{0}} = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}$, где $\boldsymbol{\nu}$ отвечает представлению $R_{\boldsymbol{\nu}}[G]$ со старшим вектором $\boldsymbol{\nu}$, а $\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{\xi}_R$ — элементу этого представления, при этом конформная размерность $\Delta_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\nu}^2/2$ не зависит от $\boldsymbol{\xi}$.

Б) "Оденем" поле материи W-тодовской экспонентой $\Xi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x},\phi) = \Psi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\phi}}$ так, чтобы поле $\Xi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}$ было фиксированной размерности $\Delta^{\{G\}}$. Это дает условие $\Delta_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}^2 - 2\boldsymbol{\beta}_0\beta_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\rho} = \Delta^{\{G\}}$, или, в нашем случае, когда $\Delta_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^2$ и $\beta_0 = 1$,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}} + 2\boldsymbol{\rho})^2 + (\Delta^{\{G\}} - 2\boldsymbol{\rho}^2). \tag{2.61}$$

Безусловно, это единственное (скалярное) уравнение на r_G величин (вектор) $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}$ (при фиксированном $\boldsymbol{\nu}$) имеет много решений, тем не менее существует выделенная ситуация, когда $\Delta^{\{G\}} = 2\boldsymbol{\rho}^2$, а

$$\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\rho}. \tag{2.62}$$

В) Добавим духовый множитель, чтобы образовать из $\Delta^{\{G\}}$ оператор нулевой размерности. В обычной гравитации с $\Delta^{\{SU(2)\}} = 1$ достаточно умножить $\Xi(x,\phi)$ на духовое поле, отвечающее репараметризациям, $c_{-1} \equiv c$:

$$\mathcal{O}_{\nu,\xi}(x,\phi,c) = \Xi_{\nu,\xi}(x,\phi)c_{-1} = \psi_{\nu,\xi}(x)\mathrm{e}^{\beta_\nu\phi}c_{-1}. \tag{2.63}$$

При этом корреляционные функции наблюдаемых вычисляются с дополнительными вставками вида $\prod\limits_{\alpha=1}^{N^{(2)}}\int_{d^2z} b_2\mu_\alpha^{(2)}$, где $\mu_\alpha^{(2)}$ — дифференциалы Бельтрами, а $N^{(2)}$ — размерность пространства модулей. Альтернативным определением

$$\hat{\mathcal{O}}_{\nu,\xi}(x,\phi) = \int\limits_{dz} \Xi_{\nu,\xi}(x,\phi) = \int\limits_{dz} \psi_{\nu,\xi}(x)\mathrm{e}^{\beta_\nu \phi} \tag{2.64}$$

является проинтегрированный бездуховый оператор единичной размерности.

Для $G \neq SU(2)$ ситуация более сложная, так как не существует (по крайней мере, на данный момент) естественного определения вида (2.64) и остается лишь формулировка БРСТ-типа, аналогичная (2.63). Теперь вместо одевания $\Xi(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi})$ единственным духовым полем c_{-1} следует использовать комбинацию духовых полей:

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi},c) = \Xi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}) \prod_{j\in S_j} \left(c_{1-j}\partial c_{1-j}\partial^2 c_{1-j}\ldots\partial^{j-2}c_{1-j}\right) =$$

$$= \psi_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{\nu}-2\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\phi}}\mathrm{e}^{i\sum(j-1)\varphi_j}. \tag{2.65}$$

В последнем равенстве учтена явная формула (2.62) для $\boldsymbol{\beta_\nu}$ и бозонизация духовых полей, т.е. $b_j = \mathrm{e}^{-i\varphi_j}$, $c_{1-j} = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$. Размерность комбинации $\{c_{1-j}\partial c_{1-j}\partial^2 c_{1-j}\ldots\partial^{j-2}c_{1-j}\} =: (c_{1-j})^{j-1} := \mathrm{e}^{i(j-1)\varphi_j}$ равна $\Delta_j = -j(j-1)/2$, и произведение духовых вкладов в (2.65) приобретает размерность

$$\sum_{j\in S_G}\Delta_j = \frac{1}{24}\sum_{j\in S_G}[-2(6j^2-6j+1)+2] = \frac{1}{24}(c_{\text{ghosts}}+2r_G) = -2\boldsymbol{\rho}^2. \tag{2.66}$$

Таким образом, оператор, отвечающий наблюдаемой, оказывается нулевой размерности, но приобретает при этом большой духовый заряд. Этот духовый заряд при вычислении корреляторов компенсируется вставками $\prod\limits_{j\in S_G}\left(\prod\limits_{\alpha=1}^{N^{(j)}}\int\limits_{d^2z} b_j\mu_\alpha^{(j)}\right)$, которые теперь включают дифференциалы Бельтрами, отвечающие модулям W-структур. Заметим, что операторы наблюдаемых (2.65) в W_G-струнах с $c = r_G$ можно выбирать в качестве представителей классов БРСТ-когомологий (по крайней мере, для случая $G = SU(3)$ [107]). Операторная алгебра в секторе, определяемом моделью группы G, сводится к правилам произведения представлений соответствующей группы, но при этом вычисление структурных констант затруднено из-за отсутствия или громоздкости формул для коэффициентов Клебша — Гордана во всех случаях, кроме $SL(2)$.

2.3. Непертурбативная формулировка квантовой 2D-гравитации: решение условий Вирасоро. По определению непертурбативная статсумма (или производящая функция для физических амплитуд) может быть записана в виде суммы ряда, каждый член в котором представлен поляковским континуальным интегралом на римановой поверхности определенного рода (см. (2.1)):

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sum_{\text{genus}} \lambda^g F_g; \qquad F_g = \int\limits_{\Sigma_p} Dg \exp \gamma \int R\Delta^{-1}R. \tag{2.67}$$

Выше было продемонстрировано, что континуальный интеграл (2.1), (2.67) даже пертурбативно (т.е. каждый член в отдельности) может быть вычислен лишь для некоторых специальных случаев в простейших теориях $2D$-гравитации. Вычисление же *непертурбативных* эффектов или суммирование ряда (2.67) является сложной задачей, которая на сегодняшний день не имеет прямого решения. Вычисление точного ответа может быть сделано лишь косвенными методами, из которых исторически первым появилась формулировка в терминах матричных моделей [22], когда вместо непрерывной теории (2.67) рассматривается ее эффективная дискретизация, являющаяся в некотором смысле точной для простейших струнных моделей, т.е. при специальных требованиях на пространство-время (например, на размерность пространства-времени: эффективные матричные теории известны лишь для пространств малой размерности — в пределе для случая чистой гравитации (2.67)).

Проблемы с непрерывной формулировкой (2.67), как правило, связаны с тем, что она несет "избыточную" информацию, связанную с "внутренней" структурой мирового листа (например, информацию о структуре представлений киральной алгебры $2D$ конформной теории поля), которая не является существенной для формулировки конечной "эффективной" теории уже непосредственно в физическом пространстве-времени. Другими словами, взаимодействие с гравитацией превращает конформные потомки в "калибровочные" степени свободы, которые не несут физической нагрузки, и появляется надежда на возможность эффективной формулировки, "забывающей" про структуры на мировом листе, которая (при удаче) появляется и записывается в терминах интегрируемой системы. В некотором смысле интегрируемость можно рассматривать как дополнительный принцип, позволяющий определить сумму ряда (2.67), а именно, если найдется дифференциальное уравнение, для которого (асимптотический) ряд (2.67) является решением, то его точное решение отвечает непертурбативному режиму.

Сначала мы рассмотрим пример, где эффективная теория дается непрерывным пределом матричных моделей, определенных интегралами типа (1.3), более точно в случае одной матрицы имеющим вид

$$Z_N = \int DM_{N\times N} \exp -\mathrm{Tr} \sum t_k M^k; \qquad DM_{N\times N} \equiv \frac{\prod dM_{ij}}{\mathrm{Vol}\ U(N)}. \tag{2.68}$$

Непрерывный предел, в частности, предполагающий $N \to \infty$, $\log Z \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}$, дает точное *непертурбативное* решение (2.67) для класса $(2, 2k+1)$ моделей [23].

Основным различием между непрерывной (2.67) и эффективной матричной формулировками является то, что первая предполагает некоторый дополнительный набор условий унитарности или факторизации, чтобы связать между собой нормировку различных членов в сумме по топологиям в (2.67), в то время как в матричной формулировке (2.68) эти соотношения возникают *автоматически*. Более того, по крайней мере для известных решений они имеют вид так называемых вирасоровских (в общем случае W) условий *, которые на самом деле можно рассматривать как *определение* непертурбативной теории. В дальнейшем решения иерархий интегрируемых уравнений, удовлетворяющие вирасоровским условиям, будем называть струнными решениями.

Ниже мы определим непертурбативные теории как решения вирасоровских условий. Оказывается, эти условия непосредственно приводят к *интегрируемости* соответствующих эффективных теорий, в частности, решения вирасоровских условий оказываются τ-функциями хорошо известных иерархий интегрируемых уравнений [24–26].

В терминах производящей функции (2.67) это означает, что $\mathcal{F}(T) = \log\tau(T)$, где $T \equiv \{T_k\}$ является набором *времен* интегрируемой иерархии или набором констант связи непертурбативной теории $2D$-гравитации. Именно появление интегрируемой системы является той новой чертой эффективной формулировки, которая позволяет гораздо дальше продвинуться в изучении свойств (2.68), нежели оригинальной формулировки (2.67).

Решение так называемых "дискретных" вирасоровских условий [27]:

$$L_n Z_N(t) = 0, \quad n \geq -1; \qquad L_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{a+b=n} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \tag{2.69}$$

с дополнительным условием (придающим смысл переменной t_0) $\frac{\partial Z_N}{\partial t_0} = -N Z_N$ (где N следует отождествлять с размером матриц в формуле (2.68)) в специальном двойном скейлинговом пределе [23] дает непертурбативную формулировку квантовой $2D$-гравитации как решения дифференциальных уравнений

*Этот эффект ясно указывает на наличие определенной дуальности между мировым листом и пространством-временем, при которой репараметризации мирового листа и преобразования в пространстве констант связи меняются местами.

$$\mathcal{L}_n\tau = 0, \quad n \geq -1,$$

$$\mathcal{L}_n = \sum_{k=0} \left(k + \frac{1}{2}\right) T_{2k+1} \frac{\partial}{\partial T_{2(k+n)+1}} +$$

$$+G \sum_{0\leq k\leq n-1} \frac{\partial^2}{\partial T_{2k+1} \partial T_{2(n-k)-1}} + \frac{\delta_{0,n}}{16} + \frac{\delta_{-1,n} T_1^2}{16G}, \tag{2.70}$$

где τ — τ-функция иерархии КдФ, т.е. помимо (2.70) удовлетворяет еще и бесконечной системе нелинейных дифференциальных уравнений (билинейных соотношений Хироты, см., например, [56]). Окончательная формулировка данного семейства моделей $2D$-гравитации в терминах интегрируемых систем основана на следующих утверждениях.

• Производящая функция матричной модели (2.69) как функция времен является τ-функцией полубесконечной цепочки Тоды. Соответствующая проблема Римана — Гильберта задается скалярным произведением

$$\langle A(\lambda), B(\lambda)\rangle = \oint A(\lambda) B^*(\lambda) \mathrm{e}^{-V(\lambda)}; \qquad V(\lambda) \equiv \sum_{k\geq 0} t_k \lambda^k. \tag{2.71}$$

Это скалярное произведение позволяет ввести набор ортогональных полиномов $P_n(\lambda) = \lambda^n + O(\lambda^{n-1})$, отличающихся нормировкой от стандартных функций Бейкера — Ахиезера $\Psi_n(\lambda) = P_n(\lambda)\, \mathrm{e}^{-\frac{V(\lambda)}{2} - \frac{\phi_n}{2}}$:

$$\langle P_n(\lambda), P_m(\lambda)\rangle = \mathrm{e}^{\phi_n} \delta_{mn}, \tag{2.72}$$

так что

$$Z_N(t) = \tau_N(t) = \tau_0 \prod_{n=1}^{N-1} \mathrm{e}^{\phi_n}, \tag{2.73}$$

а переменные ϕ_n как функции времен $\{t_k\}$ удовлетворяют уравнениям иерархии цепочки Тоды

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t_1^2} = \mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} - \mathrm{e}^{\phi_n - \phi_{n-1}} \equiv R_{n+1} - R_n,$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t_2} = -\left(\mathrm{e}^{\phi_{n+1}-\phi_n} + \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t_1}\right)^2 - \mathrm{e}^{\phi_n-\phi_{n-1}}\right) \equiv -(R_{n+1} + p_n^2 - R_n) \tag{2.74}$$

и т.д. В редуцированной модели система (2.74) вырождается в иерархию Вольтерра, первое уравнение которой (в переменных $R_n\{t_{2k}\} \equiv \mathrm{e}^{\phi_n - \phi_{n-1}}\{t_{2k}\}$) имеет вид $\frac{\partial R_n}{\partial t_2} = -R_n(R_{n+1} - R_{n-1})$. Совместность между уравнениями Тоды и вирасоровскими условиями (2.69) дает "струнное уравнение" [27].

• Непрерывный предел определяется как *двойной скейлинговый* предел [23], при котором $N \to \infty$ одновременно с условием, что константы связи достигают своих критических значений так, что струнная константа связи (параметр разложения по родам) фиксирована. "Непрерывные" величины получаются из "дискретных" перенормировкой, являющейся следствием нетривиальной замены времен $\{\boldsymbol{t}\} \to \{\tilde{\boldsymbol{T}}\} \to \{\boldsymbol{T}\}$ и перенормировки производящей функции. Более точно ниже будет введен параметр a такой, что $a \to 0$ в непрерывном пределе, а все дискретные величины являются некоторыми функциями параметра a, например, дискретные времена $t_k \equiv t_k(a, \boldsymbol{T})$, размер матрицы $N \equiv N(a, \boldsymbol{T}) \underset{a\to 0}{\to} \infty$ и т.п. Этот предел нетривиален как для тодовских уравнений*, так и для вирасоровских условий. Простейшим случаем, когда он может быть определен и приводит к семейству $(2, 2k+1)$ моделей $2D$-гравитации, является одноматричная эрмитовская модель с нулевыми нечетными временами [28]. Связь между дискретными и непрерывными теориями на языке свободных скалярных полей, отвечающих "бозонизации" вирасоровских условий (2.69) и (2.70), задается заменой спектрального параметра $u^2 = 1 + az$. При этом непрерывные генераторы алгебры Вирасоро (2.70) являются модами тензора энергии-импульса

$$T(z) = \frac{1}{2} :\partial\Phi^2(z): - \frac{1}{16z^2} = \sum \frac{\mathcal{L}_n}{z^{n+2}}. \tag{2.75}$$

Подробности процедуры непрерывного предела можно найти в [28, 29].

• Условие совместности уравнений Тоды и вирасоровских условий — дискретное струнное уравнение

$$n + \frac{1}{2} = G_n^{(k)}\{R\} \quad \text{или} \quad 1 = G_{n+1}^{(k)}\{R\} - G_{n-1}^{(k)}\{R\} \tag{2.76}$$

эквивалентно условию экстремума $\frac{\delta S}{\delta \log R_n} = 0$ функционала

$$S = \sum_n \left(\phi_n + \sum_k t_k G_n^{(k)}\{R\} \right). \tag{2.77}$$

Действие (2.77), записанное в терминах оператора Лакса L со стандартной нормировкой матричных элементов $L_{mn} \equiv \frac{\langle m|\lambda|n\rangle}{\sqrt{\langle m|m\rangle\langle n|n\rangle}}$ [27], приобретает вид

$$S = \sum_n \left(\phi_n + \frac{1}{2} \sum_k t_k \operatorname{Tr}\ L^{2k} \right). \tag{2.78}$$

*Это хорошо известный предел в теории интегрируемых систем, отвечающий "слиянию" двух особых точек (особенностей функции Бейкера — Ахиезера и т.п.) в теории Тоды в одну, отвечающую иерархии КдФ при соответствующем переопределении времен.

Таким образом, явно представлена конструкция, в которой семейство решений интегрируемой системы (являющейся некоторой редукцией иерархии КП или двумерной решетки Тоды), выделяемое условием инвариантности соответствующих τ-функций относительно действия части генераторов алгебры Вирасоро (W-алгебры) $L_n\tau = 0$, $n \geq -1$, формулируется на лагранжевском языке, т.е. в виде уравнений движения $\delta S = 0$. Действие, как обычно, позволяет выйти за рамки уравнений движения: континуальный интеграл вида $\int \mathcal{D}\phi\ \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S\{\phi\}\right)$ при ненулевой постоянной Планка $\hbar \neq 0$, в принципе, позволяет исследовать динамику в конфигурационном пространстве струнной теории поля. В частности, можно надеяться, что, меняя с помощью ренормгруппы значения параметров t в (2.78), можно описывать переходы между различными мультикритическими точками, или между различными точками эффективной теории двумерной гравитации. В построенной формулировке эти деформации действия $S\{\phi\}$ задаются производными по временам T, т.е. (взаимно коммутирующими) потоками интегрируемых иерархий.

2.4. Топологическая 2D-гравитация как явное решение вирасоровских условий. Здесь мы построим решение непрерывных условий Вирасоро вне всякой связи с их дискретными аналогами, т.е. будет предложена совершенно отличная от приведенной выше процедура построения решения непертурбативной двумерной квантовой гравитации как предела из вспомогательной дискретной задачи с более простыми "условиями унитарности". В отличие от дискретных условий Вирасоро, где решение сразу находится в виде конформного коррелятора обычных скалярных полей [108], непрерывный случай оказывается гораздо более сложным. Основная причина заключается в том, что непрерывный случай отличается от дискретного (по явному виду: ср. (2.69) и (2.70)) заменой обычного скалярного поля на скалярное поле с *антипериодическими* граничными условиями — именно в таком сингулярном преобразовании и заключается смысл двойного скейлингового предела. В полях с антипериодическими граничными условиями построить конформное решение гораздо сложнее*, поэтому ниже для решения непрерывной проблемы воспользуемся другим методом.

Оказывается, что непрерывные условия Вирасоро (в специальных переменных Мивы, которые будут подробно обсуждены ниже) могут быть "просуммированы" в определенные *матричные* дифференциальные операторы. Конкретно для $W^{(p)}$-алгебры ($Vir = W^{(2)}$) эти операторы связаны с лапласианами (или казимирами) соответствующих конечномерных алгебр ($SL(n)$ для $W^{(n)}$) и имеют вид

$$\frac{\partial^p}{\partial\Lambda^p} + ..., \tag{2.79}$$

*Одной из причин является отсутствие сильно упрощающего правила отбора по нулевой моде скалярного поля.

где Λ — эрмитова матрица размера $N \times N$ (для случая $SL(N)$). Условия инвариантности относительно действия операторов (2.79) могут быть интерпретированы как тождества Уорда в некоторых эффективных матричных теориях.

Таким образом, ниже будет доказано, что из (системы) уравнений инвариантности функции относительно действия оператора типа (2.79)

$$\mathrm{Tr}\ \epsilon(\Lambda)\left(W\left(\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}\right)-\Lambda\right)\mathcal{Z}[\Lambda]=0 \tag{2.80}$$

(где $W(X)$ — некоторый полином, а $(\Lambda_{\mathrm{tr}})_{ij} \equiv \Lambda_{ji}$), следует (строго говоря, в пределе $N \to \infty$), что эта функция является решением непрерывных вирасоровских (или W) условий. Из формы уравнения (2.80) следует, что оно может быть переписано как тождество Уорда для матричного интеграла, который (при определенной нормировке) дает точное непертурбативное решение $2D$ (топологической)-гравитации. Точная формула для соответствующей производящей функции имеет вид [34] ($W(M) \equiv V'(M)$):

$$Z^{(N)}[V|M] \equiv C^{(N)}[V|M]\, \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\ V(M)-\mathrm{Tr}\ MW(M)} \int DX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\ V(X)+\mathrm{Tr}\ W(M)X}, \tag{2.81}$$

где интегрирование производится по пространству $N \times N$ "эрмитовых" матриц, а нормировочный множитель может быть записан в виде гауссовского интеграла

$$C^{(N)}[V|M]^{-1} \equiv \int DY\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\ U_2[M,Y]},$$

$$U_2 \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}\,\mathrm{Tr}\ [V(M+\epsilon Y)-V(M)-\epsilon YV'(M)]. \tag{2.82}$$

Сначала мы обсудим только специальные потенциалы мономиального вида $V_p(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$, приводящие после подстановки в (2.80) к уравнениям типа (2.79) *.

В простейшем случае $p = 2$ имеется квадратичный дифференциальный оператор (лапласиан), и, следовательно, нужно доказать равенство

$$\frac{1}{\mathcal{Z}}\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\frac{\partial^2}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}^2}-\epsilon\Lambda\right)\mathcal{Z} = \frac{1}{Z}\sum_{n\geq -1}\mathcal{L}_n Z\ \mathrm{Tr}\ (\epsilon\Lambda^{-n-2}) \tag{2.83}$$

*Доказательство инвариантности относительно вирасоровских условий для потенциалов общего вида основано на использовании интегрируемости и будет приведено ниже.

для

$$\mathcal{Z}^{\{2\}}\{\Lambda\} \equiv \int DX \ \exp\left(-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\ X^3 + \mathrm{Tr}\ \Lambda X\right) =$$

$$= C[\sqrt{\Lambda}] \exp\left(\frac{2}{3}\ \mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}\right) Z^{\{2\}}(T_m),$$

$$T_m = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}\ M^{-m} = \frac{1}{m}\ \mathrm{Tr}\ \Lambda^{-m/2}, \quad m - \text{нечет.} \tag{2.84}$$

при

$$C[\sqrt{\Lambda}] = \det\left(\sqrt{\Lambda} \otimes I + I \otimes \sqrt{\Lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.85}$$

и

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k > \delta_{n+1,0} \\ k \ \text{нечет.}}} kT_k \frac{\partial}{\partial T_{k+2n}} +$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{\substack{a+b=2n \\ a,b>0;\ a,b\ \text{нечет.}}} \frac{\partial^2}{\partial T_a \partial T_b} + \delta_{n+1,0}\frac{T_1^2}{4} + \delta_{n,0}\frac{1}{16} - \frac{\partial}{\partial T_{2n+3}}. \tag{2.86}$$

Уравнение (2.83) верно для *любого* размера матриц Λ^*, более того, в пределе бесконечно большого размера матрицы Λ ($N \to \infty$) все величины $\mathrm{Tr}\,(\epsilon\Lambda^{-n-2})$, например, $\mathrm{Tr}\,\Lambda^{p-n-2}$ для $\epsilon = \Lambda^p$, становятся алгебраически независимыми, так что из уравнения (2.83) следует, что $\mathcal{L}_n Z\{T\} = 0$, $n \geq -1$. Заметим, что функция $\mathcal{Z}\{\Lambda\}$, которую нужно продифференцировать в формуле (2.84), чтобы доказать выполнение тождеств Вирасоро (2.83), зависит только от собственных значений $\{\lambda_k\}$ матрицы Λ. Поэтому естественно рассмотреть уравнение (2.83) в "диагональной точке" $\Lambda_{ij} = 0$, когда $i \neq j$. Единственный "недиагональный" кусок в формуле (2.83), выживающий после диагонализации, пропорционален

$$\left.\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}}\right|_{\Lambda_{mn}=0,\ m\neq n} = \frac{\delta_{ki} - \delta_{kj}}{\lambda_i - \lambda_j} \ \text{для} \ \ i \neq j. \tag{2.87}$$

Формула (2.87) есть не что иное, как хорошо знакомая из курса квантовой механики поправка второго порядка к собственному значению гамильтониана в традиционной квантово-механической теории возмущения. Эта формула может быть легко выведена из вариации детерминанта:

$$\delta \log\left(\det\ \Lambda\right) = \mathrm{Tr}\ \frac{1}{\Lambda}\delta\Lambda - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\Lambda}\delta\Lambda\frac{1}{\Lambda}\delta\Lambda\right) + \ldots. \tag{2.88}$$

---

*Все, что необходимо потребовать — это то, чтобы матричный дифференциальный оператор действовал на функции переменных T_k (с точностью до нормировки).

Для диагональной $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, но, вообще говоря, недиагональной $\delta\Lambda_{ij}$, уравнение (2.88) дает

$$\sum_k \frac{\delta\lambda_k}{\lambda_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\delta\Lambda_{ij}\delta\Lambda_{ji}}{\lambda_i\lambda_j} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right)\frac{\delta\Lambda_{ij}\delta\Lambda_{ji}}{\lambda_i - \lambda_j} + \ldots, \qquad (2.89)$$

что и доказывает формулу (2.87).

Поскольку *матрица* ϵ произвольна (а значит, может быть функцией Λ), ее можно выбрать зависящей лишь от собственных значений λ_i. Таким образом, мы реально используем только два условия:

1) конкретную форму нормировочного множителя (2.82);

2) тот факт, что производящая функция $Z[T(\lambda_i)]$ является *сложной* функцией, т.е. ее нужно дифференцировать как зависящую от собственных значений $\{\lambda_i\}$ только через переменные T_k.

После выполнения этих условий формула (2.83) может быть переписана в виде

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}}{C(\sqrt{\Lambda})Z\{T\}}\left[\mathrm{Tr}\ \epsilon\left\{\frac{\partial^2}{\partial\Lambda^2} - \Lambda\right\}\right]C(\sqrt{\Lambda})\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}Z\{T\} =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{a,b>0}\frac{\partial^2 Z}{\partial T_a \partial T_b}\sum_i \epsilon(\lambda_i)\frac{\partial T_a}{\partial\lambda_i}\frac{\partial T_b}{\partial\lambda_i} +$$

$$+\frac{1}{Z}\sum_{n\geq 0}\frac{\partial Z}{\partial T_n}\left[\sum_{i,j}\epsilon(\lambda_i)\frac{\partial^2 T_n}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}} + 2\sum_i \epsilon(\lambda_i)\frac{\partial T_n}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\log C}{\partial\lambda_i} +\right.$$

$$\left. + 2\sum_i \epsilon(\lambda_i)\frac{\partial T_n}{\partial\lambda_i}\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\,\mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}\right] +$$

$$+\left[\sum_i \epsilon(\lambda_i)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}\right)^2 - \sum_i \lambda_i\epsilon(\lambda_i) + \right.$$

$$+\sum_{i,j}\epsilon(\lambda_i)\left(\frac{\partial^2}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}}\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}\right) +$$

$$\left. + 2\sum_i \epsilon(\lambda_i)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\partial\,\mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2}}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\log C}{\partial\lambda_i} + \frac{1}{C}\sum_{i,j}\epsilon(\lambda_i)\frac{\partial^2 C}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{ji}}\right], \qquad (2.90)$$

где $\mathrm{Tr}\ \Lambda^{3/2} = \sum_k \lambda_k^{3/2}$, а $C = \prod_{i,j}(\sqrt{\lambda}_i + \sqrt{\lambda}_j)^{-\frac{1}{2}}$. Теперь вычисление всех величин в формуле (2.90) сводится к упражнению по дифференцированию с использованием формулы (2.87). Явное вычисление показывает, что после дифференцирования возникающие члены содержат лишь *отрицательные* степени $\sqrt{\lambda_i}$ и могут быть "поглощены", т.е. переписаны через времена T_k. В результате имеем

$$\frac{e^{-\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}}{C(\sqrt{\Lambda})Z\{T\}}\left[\mathrm{Tr}\,\epsilon\left\{\frac{\partial^2}{\partial\Lambda^2}-\Lambda\right\}\right]C(\sqrt{\Lambda})e^{\frac{2}{3}\mathrm{Tr}\,\Lambda^{3/2}}Z\{T\}=$$

$$=\frac{1}{Z}\sum_{n\geq -1}\mathrm{Tr}\left(\epsilon_p\Lambda^{-n-2}\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{k>\delta_{n+1,0}}kT_k\frac{\partial}{\partial T_{2n+k}}+\frac{1}{4}\sum_{\substack{a+b=2n\\ a>0,b>0}}\frac{\partial^2}{\partial T_a\partial T_b}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\delta_{n,0}+\frac{1}{4}\delta_{n+1,0}T_1^2-\frac{\partial}{\partial T_{2n+3}}\right)Z(T)=0, \tag{2.91}$$

а именно "башню" непрерывных условий Вирасоро для случая $p=2$.

Для произвольного значения p вывод полностью аналогичен и содержит следующие этапы.

• Представим $\mathcal{Z}[\Lambda]$ в виде $\mathcal{Z}^{\{p\}}[\Lambda]=g_p[\Lambda]Z^{\{p\}}(T_n)$, где

$$g_p[\Lambda]=\frac{\Delta(M)}{\Delta(\Lambda)}\prod_i\left[V''(\mu_i)^{-\frac{1}{2}}e^{(\mu_iV'(\mu_i)-V(\mu_i))}\right]=$$

$$=\frac{\Delta(\Lambda^{1/p})}{\Delta(\Lambda)}\prod_i\left[\lambda_i^{-\frac{p-1}{2p}}e^{\frac{p}{p+1}\lambda_i^{1+1/p}}\right], \tag{2.92}$$

т.е. явно отделим нормировочный префактор от функции времен.

• Подставим выражение $\mathcal{Z}^{\{p\}}[\Lambda]$ в уравнение (2.80), которое в случае мономиального потенциала $V_p(X)=\dfrac{X^{p+1}}{p+1}$ имеет вид

$$\left\{\mathrm{Tr}\ \epsilon(\Lambda)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}\right)^p-\Lambda\right]\right\}g_p[\Lambda]Z^{\{p\}}(T_n)=0. \tag{2.93}$$

Старшие производные $\dfrac{\partial^iZ}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}^i}$ вычисляются с помощью соотношений типа (2.87).

• Сдвинем переменные

$$T_n\to\hat{T}_n=T_n-\frac{p}{n}\delta_{n,p+1} \tag{2.94}$$

(эта процедура не меняет производных).

• После всех подстановок левая часть равенства (2.93) принимает форму бесконечного ряда, в котором каждый член представляет собой произведение

$\mathrm{Tr}\,[\tilde{\epsilon}(M)M^{-k}]$ на линейную комбинацию генераторов W_p-алгебры, действующих на $Z^{\{p\}}(T_n)$. Например, если $p = 3$, полученное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{27}\mathrm{Tr}\,\left[\tilde{\epsilon}(M)M^{-3}\left(\sum M^{-3n}\mathcal{W}^{(3)}_{3n} + 9\sum M^{-3n-1/3}\times\right.\right.$$
$$\times\left(\sum(3k-2)\hat{T}_{3k-2}\mathcal{W}^{(2)}_{3n+3k} + \sum\frac{\partial}{\partial T_{3a+1}}\mathcal{W}^{(2)}_{3b-3}\right) + 9\sum M^{-3n-2/3}\times$$
$$\left.\left.\times\left(\sum(3k-2)\hat{T}_{3k-2}\mathcal{W}^{(2)}_{3n+3k} + \sum\frac{\partial}{\partial T_{3a+1}}\mathcal{W}^{(2)}_{3b-3}\right)\right)\right] Z^{\{3\}} = 0. \qquad (2.95)$$

• В пределе $N \to \infty$ все выражения $\mathrm{Tr}\,\tilde{\epsilon}(M)M^{-k}$ с фиксированным k и произвольным $\tilde{\epsilon}(M)$ становятся независимыми, и уравнение (2.93) дает "башню" условий инвариантности относительно действия W-генераторов. Точное доказательство для случая $p = 3$ предложенным здесь методом было получено А.Михайловым [109]. Ниже в разд. 3 будет представлено другое доказательство существования вирасоровских условий, использующее интегрируемость топологических струнных теорий, которое существует для любого p.

Наконец, обсудим, какое значение имеет сдвиг (2.94). В предыдущем разделе рассматривалась сложная процедура получения точных непертурбативных решений квантовой $2D$-гравитации как решений непрерывных условий Вирасоро; для этих решений не получили явных представлений. В данном разделе мы доказали, что у непрерывных условий Вирасоро существуют явные решения, по крайней мере, имеющие явное интегральное представление. Для случая $p = 2$ это представление дает решение чистой *топологической* гравитации и называется моделью Концевича [40]. Таким образом, мы доказали, что производящие функции двумерной квантовой и топологической гравитации удовлетворяют одним и тем же вирасоровским условиям и, в этом смысле, *эквивалентны*. Тем не менее при более детальном рассмотрении оказывается, что пертурбативные разложения для топологической и квантовой гравитации происходят в совершенно разных точках (см. ниже) и сдвиг времен (2.94) отвечает именно топологической гравитации.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУННЫХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Интегрируемость топологических струнных моделей. В данном разделе будет доказано, что рассмотренные выше вирасоровские условия (2.70), (2.86) и (2.95), определяющие непертурбативные струнные решения, задают вполне конкретное решение интегрируемой иерархии КП, а именно:

— статсумма $Z_N^V[M]$ (2.81) как функция времени [57]:

$$T_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\ M^{-k}, \qquad k \geq 1, \tag{3.1}$$

является (при любом N) τ-функцией иерархии КП при *любом* потенциале $V[X]$;

— если потенциал $V[X]$ оказывается однородным полиномом степени $p+1$, то статсумма $Z_N^{\{V\}}[M] = Z_N^{\{p\}}[M]$ на самом деле является τ-функцией p-редуцированной иерархии КП, или, что то же самое, иерархии p-го уравнения КдФ [59] *.

Для доказательства мы сначала перепишем равенство (2.81) в виде детерминантной формулы

$$Z_N^{\{V\}}[M] = \frac{\det_{(ij)} \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)}, \quad i,j = 1,...,N, \tag{3.2}$$

а затем покажем, что эта форма в некотором смысле является определением *любой* τ-функции иерархии КП, записанной в переменных Мивы **.

Главной особенностью, выделяющей именно струнные решения иерархий интегрируемых уравнений типа КП, является специальный вид функций $\{\phi_i(\mu)\}$ в (3.2), которые отнюдь не произвольны. Более того, в рассматриваемом случае весь *бесконечный* набор функций в (3.2) выражается через единственную функцию — потенциал $V[X]$ (т.е. вместо произвольной *матрицы* A_{ij}, определяющей $\phi_i(\mu) = \sum A_{ij}\mu^j$, в общем случае решения, отвечающие непертурбативному режиму, в (топологических) теориях струн параметризуются *вектором* V_i или функцией $V[\mu] = \sum V_i\mu^i$). Эта выделенность определяется наличием дополнительных $\mathcal{L}_{-1}$- и других $\mathcal{W}$-условий (которые в контексте интегрируемых иерархий типа КП могут рассматриваться как следствие $\mathcal{L}_{-1}$). Все эти условия, в частности, являются следствием тождеств Уорда (2.80).

Для доказательства сначала сведем представление в виде матричного интеграла

$$\mathcal{Z}_N^{\{V\}}[\Lambda] \equiv \int DX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\ [V(X) - Tr\,\Lambda X]}, \tag{3.3}$$

---

*Более того, в данном случае равенство $\dfrac{\partial Z^{\{p\}}}{\partial T_{np}} = 0$ выполняется буквально.

**В качестве проверки можно достаточно легко убедиться (см. [34]), что детерминантная формула (3.2) с *любым* набором функций $\{\phi_i(\mu)\}$ удовлетворяет билинейным соотношениям Хироты.

где по "угловым" $U(N)$-матрицам можно легко проинтегрировать [110], к N-кратному интегралу по собственным значениям матриц X и Λ (обозначенным как $\{x_i\}$ и $\{\lambda_i\}$ соответственно). Интеграл (3.3) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta(\Lambda)}\left(\prod_{i=1}^{N}\int dx_i \mathrm{e}^{-V(x_i)+\lambda_i x_i}\right)\Delta(X), \tag{3.4}$$

где $\Delta(X)$ и $\Delta(\Lambda)$ — детерминанты Вандермонда, например: $\Delta(X) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

Теперь формула (3.4) может быть переписана в виде

$$\Delta^{-1}(\Lambda)\Delta\left(\frac{\partial}{\partial\Lambda}\right)\prod_i\int dx_i \mathrm{e}^{-V(x_i)+\lambda_i x_i} = \Delta^{-1}(\Lambda)\det{}_{(ij)}F_i(\lambda_j) \tag{3.5}$$

с матричными элементами

$$F_{i+1}(\lambda) \equiv \int dx\ x^i \mathrm{e}^{-V(x)+\lambda x} = (\frac{\partial}{\partial\lambda})^i F_1(\lambda). \tag{3.6}$$

Отметим, что $F_1(\lambda) = \mathcal{Z}_{N=1}^{\{V\}}[\lambda]$. Вспоминая, что $\Lambda = V'(M)$, и переходя к собственным значениям матрицы M — $\{\mu_i\}$, получаем

$$\mathcal{Z}_N^{\{V\}}[V'(M)] = \frac{\det\ \tilde{\Phi}_i(\mu_j)}{\prod_{i>j}(V'(\mu_i) - V'(\mu_j))}, \tag{3.7}$$

где

$$\tilde{\Phi}_i(\mu) = F_i(V'(\mu)). \tag{3.8}$$

Перейдем теперь к нормировке (2.82), задаваемой гауссовским интегралом:

$$C^{(N)}[V|M]^{-1} \equiv \int DX\ \mathrm{e}^{-U_2(M,X)}. \tag{3.9}$$

Используя $U(N)$-инвариантность меры Хаара dX, можно легко диагонализовать M. После этого гауссовский интеграл (3.9) легко вычисляется:

$$\int DX\ \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i,j}^{N} U_{ij}X_{ij}X_{ji}} \sim \prod_{i,j}^{N} U_{ij}^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

и остается подставить явный вид $U_{ij}(M)$. Если потенциал представляется в виде формального ряда $V(X) = \sum \frac{v_n}{n}X^n$, то

$$U_2(M,X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1}\left(\sum_{a+b=n-1}\mathrm{Tr}\ M^a X M^b X\right),$$

$$U_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \left(\sum_{a+b=n-1} \mu_i^a \mu_j^b \right) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \frac{\mu_i^n - \mu_j^n}{\mu_i - \mu_j} = \frac{V'(\mu_i) - V'(\mu_j)}{\mu_i - \mu_j}. \tag{3.11}$$

Возвращаясь к (2.81), получаем

$$Z_N^{\{V\}}[M] = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\;[V(M) - MV'(M)]} C^{(N)}[V|M] \mathcal{Z}_N[V'(M)] \sim$$

$$\sim [\det\, \tilde{\Phi}_i(\mu_j)] \prod_{i>j}^{N} \frac{U_{ij}}{(V'(\mu_i) - V'(\mu_j))} \prod_{i=1} s(\mu_i) = \frac{[\det\, \tilde{\Phi}_i(\mu_j)]}{\Delta(M)} \prod_{i=1}^{N} s(\mu_i), \tag{3.12}$$

$$s(\mu) = [V''(\mu)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{V(\mu) - \mu V'(\mu)}. \tag{3.13}$$

Произведение s-факторов в правой части (3.12) может быть включено в определение $\tilde{\Phi}$-функций:

$$Z_N^{\{V\}}[M] = \frac{\det \Phi_i(\mu_j)}{\Delta(M)}, \tag{3.14}$$

где

$$\Phi_i(\mu) = s(\mu)\tilde{\Phi}_i(\mu) \underset{\mu \to \infty}{\longrightarrow} \mu^{i-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu} \right) \right), \tag{3.15}$$

и асимптотика существенна для того, чтобы детерминант (3.14) давал решение иерархии КП в смысле [58, 59].

Из уравнений (3.8), (3.13) и (3.15) следует, что $\Phi_i(\mu)$ могут быть получены из основной функции $\Phi_1(\mu)$ с помощью следующего соотношения:

$$\Phi_i(\mu) = [V''(\mu)]^{\frac{1}{2}} \int x^{i-1} \mathrm{e}^{-V(x) + xV'(\mu)} dx = A_{\{V\}}^{i-1}(\mu) \Phi_1(\mu)\;, \tag{3.16}$$

где $A_{\{V\}}(\mu)$ — дифференциальный оператор первого порядка:

$$A_{\{V\}}(\mu) = s \frac{\partial}{\partial \lambda} s^{-1} = \frac{\mathrm{e}^{V(\mu) - \mu V'(m)}}{[V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\mathrm{e}^{-V(\mu) + \mu V'(\mu)}}{[V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{V''(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu - \frac{V'''(\mu)}{2[V''(\mu)]^2}. \tag{3.17}$$

В частном случае $V(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ оператор $A_{\{p\}}(\mu) = \frac{1}{p\mu^{p-1}} \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu - \frac{p-1}{2p\mu^p}$ совпадает (с точностью до масштабного преобразования μ и $A_{\{p\}}(\mu)$) с оператором, выделяющим конечномерное подпространство в бесконечномерном грассманиане [63]. Следует особо отметить, что именно соотношение $\Phi_{i+1}(\mu) = A_{\{V\}}(\mu)\Phi_i(\mu)$ ($F_{i+1}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} F_i(\lambda)$) ответственно за выделение статсуммы топологической (W)-гравитации – GKM среди решений (и τ-функций) общего вида, записанных в переменных Мивы

$$\tau_N^{\{\phi_i\}}[M] = \frac{[\det\, \phi_i(\mu_j)]}{\Delta(M)} \tag{3.18}$$

с произвольным набором функций $\phi_i(\mu)$. Ниже будет показано, что выражение (3.18) в точности является τ-функцией иерархии КП в представлении Мивы.

Наиболее известно представление (общей) τ-функции иерархии КП в виде фермионного коррелятора $\tau^G\{T_n\} = \langle 0| : \mathrm{e}^{\sum\, T_n J_n} : G|0\rangle$ [56], где

$$J(z) = \tilde{\psi}(z)\psi(z), \qquad G = :\exp\, \mathcal{G}_{mn}\tilde{\psi}_m\psi_n : \tag{3.19}$$

в (двумерной) теории свободных фермионных полей $\psi(z)$, $\tilde{\psi}(z)$ с (голоморфным) действием $\int \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi$. Вакуумные состояния определяются условиями $\psi_n|0\rangle = 0$, $n < 0$ и $\tilde{\psi}_n|0\rangle = 0$, $n \geq 0$, где $\psi(z) = \sum\limits_{\boldsymbol{Z}} \psi_n z^n\ dz^{\frac{1}{2}}$, $\tilde{\psi}(z) = \sum\limits_{\boldsymbol{Z}} \tilde{\psi}_n z^{-n-1}\ dz^{\frac{1}{2}}$. Существенным ограничением на вид коррелятора со вставками (3.19) является тот факт, что оператор $: \mathrm{e}^{\sum\, T_n J_n} : G$ гауссовский, и его вставка может рассматриваться как модификация квадратичного действия и фермионного пропагатора $\langle\tilde{\psi}\psi\rangle$, так что по-прежнему применима теорема Вика, а именно: корреляторы $\langle 0| \prod_i \tilde{\psi}(\mu_i)\psi(\lambda_i)G|0\rangle$ для *любого* подходящего оператора G выражаются через парные

$$\langle 0| \prod_i \tilde{\psi}(\mu_i)\psi(\lambda_i)G|0\rangle = \det{}_{(ij)}\langle 0|\tilde{\psi}(\mu_i)\psi(\lambda_j)G|0\rangle. \tag{3.20}$$

Для того чтобы понять, что происходит с оператором $\mathrm{e}^{\sum T_n J_n}$ после преобразования Мивы (3.1), проще всего перейти к представлению с помощью свободных бозонных (скалярных) полей тока $J(z) = \partial\varphi(z)$. Тогда

$$\sum T_n J_n = \sum_i \left(\sum_n \frac{1}{n\cdot\mu_i^n}\varphi_n\right) = \sum_i \varphi(\mu_i)$$

и

$$: \mathrm{e}^{\sum\limits_i \varphi(\mu_i)} := \frac{1}{\prod\limits_{i<j}(\mu_i - \mu_j)} \prod_i : \mathrm{e}^{\varphi(\mu_i)} : \ . \tag{3.21}$$

В фермионном представлении лучше начать с

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_i \left(\frac{1}{\mu_i^n} - \frac{1}{\tilde{\mu}_i^n}\right) \tag{3.22}$$

вместо (3.1). Тогда

$$: \mathrm{e}^{\sum T_n J_n} := \frac{\prod\limits_{i,j}^{N}(\tilde{\mu}_i - \mu_j)}{\prod\limits_{i>j}(\mu_i - \mu_j)\prod\limits_{i>j}(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_j)} \prod_i \tilde{\psi}(\tilde{\mu}_i)\psi(\mu_i), \tag{3.23}$$

а для восстановления формы замены (3.1) необходимо путем предельного перехода загнать все $\tilde{\mu}_i$ в бесконечность. На другом языке это означает, что левый вакуум заменяется на

$$\langle N| \sim \langle 0|\tilde{\psi}(\infty)\tilde{\psi}'(\infty)...\tilde{\psi}^{(N-1)}(\infty). \tag{3.24}$$

Теперь τ-функция может быть представлена в форме:

$$\tau_N^G[M] = \langle 0| : \mathrm{e}^{\sum T_n J_n} : G|0\rangle = \Delta(M)^{-1}\langle N|\prod_i : \mathrm{e}^{\varphi(\mu_i)} : G|0\rangle =$$

$$= \lim_{\tilde{\mu}_j\to\infty} \frac{\prod\limits_{i,j}(\tilde{\mu}_i - \mu_j)}{\prod\limits_{i>j}(\mu_i - \mu_j)\prod\limits_{i>j}(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_j)}\langle 0|\prod_i \tilde{\psi}(\tilde{\mu}_i)\psi(\mu_i)G|0\rangle, \tag{3.25}$$

где, применяя теорему Вика (3.20) и переходя к пределу $\tilde{\mu}_i \to \infty$, получаем

$$\tau_N^G[M] = \frac{\det\, \phi_i(\mu_j)}{\Delta(M)} \tag{3.26}$$

с элементами матрицы — функциями

$$\phi_i(\mu) \sim \langle 0|\tilde{\psi}^{(i-1)}(\infty)\psi(\mu)G|0\rangle \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{i-1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \tag{3.27}$$

Таким образом, мы доказали, что τ-функция иерархии КП в переменных Мивы (3.1) принимает детерминантную форму (3.2), или, что то же самое, (3.2) является τ-функцией иерархии КП. Теперь мы сформулируем, как от общей точки грассманиана, описываемой (бесконечной) матрицей $G = \exp\sum A_{ij}\tilde{\psi}_i\psi_j$ с двумя индексами (∞^2), перейти к специальным решениям, определяемым, в частности, единственной (∞) (или двумя) функциями одного переменного ($2\times\infty$).

Вернемся к вопросу о выделении струнных решений среди всех решений иерархии КП — т.е., в некотором смысле, заданию дополнительных условий. Используя интегрируемость, достаточно доказать лишь одно из бесконечного набора дополнительных условий, так называемое струнное уравнение или действие $\mathcal{L}_{-1}$-го генератора алгебры Вирасоро, вся остальная "башня" вирасоровских условий следует из этих двух свойств по индукции [25, 111].

Действие $\mathcal{L}_{-1}$-го генератора Вирасоро (дифференцирование по спектральному параметру) связано с оператором

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}} = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{V''(M)}\frac{\partial}{\partial M_t r}, \tag{3.28}$$

поэтому естественно сначала ответить на вопрос, как оператор (3.28) действует на статсумму

$$Z^{\{V\}}[M] = \frac{\det\,\tilde{\Phi}_i(\mu_j)}{\Delta(M)}\prod_i s(\mu_i),$$

$$s(\mu) = (V''(\mu))^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)},$$

$$\tilde{\Phi}_i(\mu) = F_i(\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{i-1} F_1(\lambda),\ \ \lambda = V'(\mu). \tag{3.29}$$

Во-первых, если рассматривать $Z^{\{V\}}$ как функцию времен T, то

$$\frac{1}{Z^{\{V\}}}\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{tr}}Z^{\{V\}} = -\sum_{n\geq 1}\mathrm{Tr}\,\left[\frac{1}{V''(M)M^{n+1}}\right]\frac{\partial\log Z^{\{V\}}}{\partial T_n}. \tag{3.30}$$

С другой стороны, применяя непосредственно (3.28) к явной формуле (3.29), получаем

$$\frac{1}{Z^{\{V\}}}\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}Z^{\{V\}} =$$

$$= -\mathrm{Tr}\,\ M + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{V''(\mu_i)V''(\mu_j)}\frac{V''(\mu_i)-V''(\mu_j)}{\mu_i-\mu_j}+$$

$$+\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{tr}}\log\ \det\,F_i(\lambda_j). \tag{3.31}$$

Ниже будет показано, что формула

$$\frac{1}{Z^{\{V\}}}\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}Z^{\{V\}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial T_1}\log\ Z^{\{V\}} + \mathrm{Tr}\,M - \mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\Lambda_{\mathrm{tr}}}\log\ \det\,F_i(\lambda_j) \tag{3.32}$$

может быть использована для определения универсального оператора $\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}$. Это определение имеет вид

$$\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}} = \sum_{n\geq 1} \mathrm{Tr} \left[\frac{1}{V''(M)M^{n+1}}\right] \frac{\partial}{\partial T_n} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{1}{V''(\mu_i)V''(\mu_j)} \frac{V''(\mu_i)-V''(\mu_j)}{\mu_i-\mu_j} - \frac{\partial}{\partial T_1}, \tag{3.33}$$

и это выражение превращается в уже известное для мономиальных потенциалов $V(X) = \frac{X^{p+1}}{(p+1)}$ (отметим, что члены с $i = j$ включены в суммирование в правой части (3.33)).

Таким образом, для доказательства $\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}$-условия остается показать, что правая часть (3.32) равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \log\ Z_N^{\{V\}} = \mathrm{Tr}\ M - \mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial \Lambda_{tr}} \log\ \det\ F_i(\lambda_j). \tag{3.34}$$

Для того чтобы доказать это, очень существенно, что статсумма является τ-функцией: $Z_N^{\{V\}} = \tau_N^{\{V\}}$. При этом левая часть равенства может быть представлена в виде вычета отношения τ-функций

$$\mathrm{res}_\mu \frac{\tau_N^{\{V\}}(T_n+\mu^{-n}/n)}{\tau_N^{\{V\}}(T_n)} = \frac{\partial}{\partial T_1} \log\ \tau_N^{\{V\}}(T_n). \tag{3.35}$$

Теперь, если перейти к переменным Мивы, τ-функция в числителе выражается той же самой формулой, что и в знаменателе, но с дополнительным параметром μ, т.е. она равна $\tau_{N+1}^{\{V\}}$. Этого наблюдения почти достаточно, чтобы вывести (3.34). Для простейшего случая $N = 1$ имеем ($\lambda = V'(\mu)$):

$$\tau_1^{\{V\}}(T_n) = \tau_1^{\{V\}}[\mu_1] = \mathrm{e}^{V(\mu_1)-\mu_1 V'(\mu_1)}[V''(\mu_1)]^{\frac{1}{2}} F(\lambda_1), \tag{3.36}$$

$$\tau_1^{\{V\}}(T_n+\mu^{-n}/n) = \tau_2^{\{V\}}[\mu_1,\mu] =$$

$$= \mathrm{e}^{V(\mu_1)-\mu_1 V'(\mu_1)} \mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)} \frac{[V''(\mu_1)V''(\mu)]^{\frac{1}{2}}}{\mu-\mu_1} \left[F(\lambda_1)\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda} - F(\lambda)\frac{\partial F(\lambda_1)}{\partial \lambda_1}\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}[V''(\mu)]^{\frac{1}{2}} F(\lambda)}{\mu-\mu_1} \tau_1^{\{V\}}[\mu_1] \left[-\frac{\partial \log F(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \log F(\lambda)}{\partial \lambda}\right]. \tag{3.37}$$

Функция F имеет следующую асимптотику:

$$F(\lambda) = \int dx\ \mathrm{e}^{-V(x)+\lambda x} \sim \mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}[V''(\mu)]^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + O\left(\frac{V''''}{V''V''}\right)\right\}. \tag{3.38}$$

Если $V(\mu)$ растет на бесконечности $\mu \to \infty$ как μ^n, то $\frac{V''''}{(V'')^2} \sim \mu^{-n}$, и для дальнейшего достаточно, чтобы $n = p + 1 > 1$, так что в скобках в правой части (3.38) асимптотика имеет вид $\{1 + o(\frac{1}{\mu})\}$, где $\mu \cdot o(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Числитель правой части (3.37) устроен как $\sim 1 + o(1/\mu)$, в то время как второй член в квадратных скобках ведет себя как $\frac{\partial \log F(\lambda)}{\partial \lambda} \sim \mu(1 + o(\frac{1}{\mu}))$. Собирая все вместе, получаем

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \log\ \tau_1^{\{V\}} = \mathrm{res}_\mu \left(\frac{1 + o(\frac{1}{\mu})}{\mu - \mu_1} \left(-\frac{\partial \log F(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} + \mu \left(1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\right)\right) = \\ = \mu_1 - \frac{\partial \log F(\lambda_1)}{\partial \lambda_1}, \tag{3.39}$$

т.е. мы доказали (3.34) для частного случая $N = 1$.

Для произвольного N доказательство практически не меняется: после простого, но длинного вычисления получим

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \log \tau_N^{\{V\}} = \mathrm{res}_\mu \left(\frac{1 + o(1/\mu)}{\prod_{j=1}(\mu - \mu_j)} \mu^N \left([1 + o(1/\mu)] - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{\mu} \left[\mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}} \log\ \det\ F_i(\lambda_j) \right] \cdot [1 + \mathcal{O}(1/\mu)] \right)\right) = \\ = \sum_{j=1}^N \mu_j - \mathrm{Tr}\ \frac{\partial}{\partial \Lambda_{\mathrm{tr}}} \log\ \det\ F_i(\lambda_j), \tag{3.40}$$

что завершает доказательство уравнения (3.34) и вывод формы универсального дополнительного условия – $\mathcal{L}_{-1}^{\{V\}}$-оператора.

В частном случае мономиального потенциала $V \equiv V_p = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ общая формула (3.33) обретает более привычный вид [25, 26]:

$$\mathcal{L}_{-1}^{\{p\}} = \frac{1}{p} \sum_{n \geq 1} (n + p) T_{n+p} \frac{\partial}{\partial T_n} + \frac{1}{2p} \sum_{\substack{a+b=p \\ a,b \geq 0}} a T_a b T_b - \frac{\partial}{\partial T_1}. \tag{3.41}$$

3.2. Точные решения топологических $(p, 1)$-моделей и их деформации в теории типа Гинзбурга — Ландау. Для разных потенциалов $V(X)$ модель (2.81) формально воспроизводит различные теории (p, q)-серии следующим образом: потенциал $V(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ задает целую серию (p, q) струнных моделей с фиксированным p и всеми возможными q. Для того чтобы зафиксировать q, необходимо специальным образом зафиксировать времена T: положить все $T_k = 0$, кроме T_1 и T_{p+q} (заметим, что эта процедура нарушает симметрию между p и q, присущую конформной теории).

Рассмотрим для иллюстрации два простых примера. Сначала положим $p = 2$, т.е. начнем со случая КдФ-редукции иерархии КП. В этом случае струнное уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{\tau_{\rm KdV}}\mathcal{L}_{-1}\tau_{\rm KdV} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k>1\\ k\ \rm odd}} kT_k \frac{\partial}{\partial T_{k-2}} \log\tau_{\rm KdV} + \frac{T_1^2}{4} = 0, \tag{3.42}$$

или, дифференцируя еще раз по T_1, получим

$$\sum_{\substack{k>1\\ k\ \rm odd}} kT_k \frac{\partial^2}{\partial T_{k-2}\partial T_1} \log\tau_{\rm KdV} + T_1 = 0. \tag{3.43}$$

Используя определение полиномов Гельфанда — Дикого

$$\frac{\partial^2}{\partial T_{k-2}\partial T_1}\log\tau_{\rm KdV} = \left[L^{2m-1}\right]_{-1} \equiv \mathcal{R}_m[u], \tag{3.44}$$

имеем

$$\sum_{m\geq 0}(2m+1)T_{2m+1}\mathcal{R}_m[u] = 0. \tag{3.45}$$

Теперь уже можно использовать "правила" выделения (p, q) критических точек [25] для $p = 2$ и $q = 2m - 1$, т.е. $(2, 2m - 1)$ решений из (3.43), (3.45). Самый простой случай: $m = 1$, когда $3T_3\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\log\tau_{\rm KdV} + T_1 = 0$. Используя $u \sim \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\log\tau_{\rm KdV}$, находим решение уравнения КдФ $u \sim \frac{T_1}{T_3}$, или, фиксируя T_3, получаем $F = \log\tau \sim T_1^3$, что совпадает с результатами второго раздела (2.10) для $c = -2$ теории, взаимодействующей с $2D$-гравитацией, в которой $\langle P^3\rangle = 1$, где P — единичный оператор (2.9), $P = c\bar{c}e^{\phi}$. Этот пример — наиболее известный случай чистой *топологической* гравитации.

Менее тривиальный пример — $(2, 3)$-теория с $m = 2$, в которой (3.45) и явное выражение $\mathcal{R}_2 \sim u^2 + u''$ приводят к появлению первого уравнения Пенлеве $u^2 + u'' = T_1$. Данный пример отвечает теории чистой (физической) гравитации, где решение, как видно, уже гораздо менее тривиально, чем в предыдущем случае.

С рассмотренной точки зрения наличие всех (p, q) критических точек в модели (2.81) является чисто формальным утверждением. Для потенциала $V(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ статсумма $Z[V|T_k] = \tau_V[T_k] \equiv \tau_p[T_k]$ удовлетворяет следующему струнному уравнению:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k(p-k)T_kT_{p-k} + \sum_{k=1}^{\infty}(p+k)\left(T_{p+k} - \frac{p}{p+1}\delta_{k,1}\right)\frac{\partial}{\partial T_k}\log\ \tau_p[T] = 0, \tag{3.46}$$

т.е. τ-функция определена как разложение по (малым) временам Мивы (3.1) в окрестности нулевых значений всех времен, кроме T_{p+1}, которое сдвинуто на некоторый конечный фактор ($\frac{p}{p+1}$), что отвечает в силу приведенных выше аргументов $(p,1)$-модели. Таким образом, мы видим, что матричное интегральное представление типа Концевича отвечает решению $(p,1)$ струнных моделей, которые описывают взаимодействие (A_n-) топологической материи с топологической гравитацией или топологическую W-гравитацию.

Теперь перейдем к рассмотрению деформаций чистой $(p,1)$-теории [64, 112], связанной с деформацией потенциала и так называемыми p- или уиземовскими временами, которые непосредственно связаны с деформацией *модулей* решений. На самом деле существует *a priori* другая интегрируемая структура в модели (2.81), где потоки описываются временами, связанными с нетривиальными коэффициентами потенциала V. В результате теории с мономиальным потенциалом $V_p(X) = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ и произвольным полиномом степени $(p+1)$ оказываются тесно связанными друг с другом.

Для того чтобы убедиться в этом, вернемся к вопросу о вычислении производных Z_{GKM} по временам T_k. Эти производные определяют непертурбативные корреляционные функции в струнной теории и представляют определенный интерес с "внутренней" точки зрения в интегрируемой системе. Производные по временам T_k с $k \geq p+1$ (отвечающие корреляторам иррелевантных операторов) вычисляются достаточно сложно, напротив, для времен T_k при $1 \leq k \leq p$ ситуация гораздо проще. Используя очевидное определение "среднего", такое, что статсумма (2.81) $Z_{GKM} = \langle 1 \rangle$, имеем

$$\left.\frac{\partial Z_{GKM}}{\partial T_k}\right|_V = \langle \operatorname{Tr} M^k - \operatorname{Tr} X^k \rangle, \quad 1 \leq k \leq p. \tag{3.47}$$

При этом подразумевается, что производная в левой части вычисляется при *фиксированном* потенциале $V(x) = \sum^{p+1} \frac{v_k}{k} X^k$.

Правая часть равенства (3.47) может быть также представлена в виде

$$\left.\frac{\partial Z_{GKM}}{\partial T_k}\right|_V = \left\langle \operatorname{Tr} \frac{\partial V(M)}{\partial v_k} - \operatorname{Tr} \frac{\partial V(X)}{\partial v_k} \right\rangle, \qquad 1 \leq k \leq p, \tag{3.48}$$

что уже очень похоже, но на самом деле не совпадает с выражением $-\frac{\partial}{\partial v_k} Z_{GKM}$, которое отличается от (3.48) на некоторые поправочные факторы. Проблема заключается в том, что в выражении $\frac{\partial}{\partial v_k} Z_{GKM}$ есть вклады не только от дифференцирования $V(X) - V(M)$ из экспоненты (2.81), но и вклад от члена $V'(M)(X-M) \equiv W(M)(X-M)$, а также производная нормировочного множителя (2.82). Эти поправки можно разделить на две части:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial}{\partial v_k} W\right) + \text{"квантовые поправки"}. \tag{3.49}$$

Первую часть можно убрать, если ввести новый "спектральный параметр" $W(M) = \tilde{M}^p$, в результате чего естественным образом возникают новые времена $\tilde{T}_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\ \tilde{M}^{-k}$. Глядя на формулу (3.49), становится ясно, что не сами $\{v_k\}$ являются "правильными" переменными для произвольного потенциала. Легко убедиться, что гораздо удобнее работать с их линейными комбинациями $\{t_k\}$, определенными следующим образом [36]:

$$t_k = -\frac{p}{k(p-k)}\mathrm{res}\ W^{1-k/p}(\mu)d\mu. \tag{3.50}$$

Используя (3.50), легко получить

$$\mu = \frac{1}{p}\sum_{-\infty}^{p+1} kt_k\tilde{\mu}^{k-p}, \qquad V(\mu) - \mu V'(\mu) = -\sum_{-\infty}^{p+1} t_k\tilde{\mu}^k. \tag{3.51}$$

Выражение (3.51) говорит о том, что экспоненциальный множитель в формуле (2.81) есть не что иное, как стандартная существенная особенность функции Бейкера — Ахиезера для иерархии, где интегрируемые потоки параметризуются p-временами.

Наконец, прямым вычислением получаем

$$Z[V|T_k] = \tau_V[T_k] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum A_{ij}(t)(t_i + \tilde{T}_i)(t_j + \tilde{T}_j)\right)\tau_p[t_k + \tilde{T}_k], \tag{3.52}$$

где $A_{ij} = \mathrm{res}_\mu W^{i/p}dW_+^{j/p}$, а $f(\mu)_+$ обозначает неотрицательную часть ряда Лорана $f(\mu) = \Sigma\ f_i\mu^i$: $f(\mu)_+ = \Sigma_{i\geq 0}\ f_i\mu^i$. Теперь уже легко убедиться, что $\tau_p[T] \equiv \tau_{V_p}[T]$ является τ-функцией p-редукции иерархии КП (иерархии p-го уравнения КдФ).

Смысл формулы (3.52) заключается в том, что "сдвинутая" потоками p-времен (3.50) τ-функция достаточно просто выражается через τ-функцию p-редукции, зависящей уже только от суммы времен $\tilde{T}_k$ и t_k. Замена спектрального параметра $M \to \tilde{M} = f(M) = W^{1/p}(M)$ (и соответствующая замена времен $T_k \to \tilde{T}_k$) является естественной операцией при построении эквивалентных иерархий [113].

Действительно, связь между τ-функциями эквивалентных иерархий может быть получена из следующего тождественного преобразования:

$$\tau(T) = \frac{\Delta(\tilde{\mu})}{\Delta(\mu)}\prod_i [f'(\mu_i)]^{\frac{1}{2}}\tilde{\tau}(\tilde{T}), \tag{3.53}$$

где детерминантное представление $\tilde{\tau}(\tilde{T})$ как функции времен $\tilde{T}$ (3.2) строится из базисных векторов $\tilde{\phi}(\tilde{\mu}) = [f'(\mu(\tilde{\mu}))]^{\frac{1}{2}}\phi_i(\mu(\tilde{\mu}))$. Прямым вычислением можно убедиться, что множитель перед τ-функцией в правой части формулы (3.53) переписывается в виде

$$\frac{\Delta(\tilde{\mu})}{\Delta(\mu)}\prod_i [f'(\mu_i)]^{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j\right), \tag{3.54}$$

где $A_{ij} = \mathrm{res}\, f^i(\lambda) d_\lambda f_+^j(\lambda)$. Из (3.53) следует, что

$$\tau(T(\tilde{T})) = \tilde{\tau}(\tilde{T})\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j\right). \tag{3.55}$$

Введем τ-функцию $\hat{\tau}(\tilde{T})$ p-редуцированной иерархии КП, определенную как

$$\tilde{\tau}(\tilde{T}) \equiv \frac{\hat{\tau}(\tilde{T})}{\tau_0(t)}\exp\left(\sum_j jt_{-j}\tilde{T}_j\right), \qquad \tau_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum A_{ij}t_it_j\right), \tag{3.56}$$

для которой вместо

$$\tau_V[T] = \frac{\det\ \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)} \tag{3.57}$$

имеем

$$\frac{\tau_p[t+\tilde{T}]}{\tau_p[t]} = \frac{\det \hat{\phi}_i(\tilde{\mu}_j)}{\Delta(\tilde{\mu})}, \tag{3.58}$$

а соответствующие (3.57) и (3.58) точки грассманиана определяются базисными векторами

$$\phi_i(\mu) = [W'(\mu)]^{\frac{1}{2}}\exp\left(V(\mu) - \mu W(\mu)\right)\int x^{i-1}\exp\left(-V(x) + xW(\mu)\right)dx \tag{3.59}$$

и

$$\hat{\phi}_i(\tilde{\mu}) = [p\tilde{\mu}^{p-1}]^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\sum_{j=1}^{p+1} t_j\tilde{\mu}_j\right)\int x^{i-1}\exp\left(-V(x) + x\tilde{\mu}^p\right)dx. \tag{3.60}$$

При этом легко показать, что $\hat{\tau}_p(T)$ удовлетворяет струнному уравнению (L_{-1}-условию) со следующим образом сдвинутыми КП-временами:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k(p-k)(t_k+\tilde{T}_k)(t_{p-k}+\tilde{T}_{p-k}) + \sum_{k=1}^{\infty}(p+k)(t_{p+k}+\tilde{T}_{p+k})\frac{\partial}{\partial\tilde{T}_k}\log\hat{\tau}_p\,[t+\tilde{T}] = 0, \tag{3.61}$$

причем t_i, определенные в (3.50), *тождественно* равны нулю при $i \geq p+2$.

Из формул (3.52), (3.61) можно извлечь как минимум два различных следствия. Во-первых, производящая функция в случае деформации мономиального потенциала ($\equiv$ полинома той же степени) выражается через τ-функцию эквивалентной (в смысле [113]) p-редуцированной иерархии КП; во-вторых, в деформированном случае не только t_{p+1}, а все t_k с номерами $k \leq p+1$ отличны от нуля. Подобные теории будем называть *топологически деформированными* $(p,1)$-моделями (чтобы не путать с *собственно* $(p,1)$-моделями, задаваемыми мономиальными потенциалами $V_p(X)$), так как деформация является топологической в том смысле, что сохраняет все свойства топологических моделей. С точки зрения полевых теорий эти модели отвечают двумерным $N=2$ твистованным теориям Гинзбурга — Ландау, взаимодействующим с топологической гравитацией. В сферическом пределе полученное выше соотношение было воспроизведено другим способом в [35].

3.3. Нетопологические решения и *pq*-дуальность. Приведенная выше схема построения топологических решений имеет ясную интерпретацию на языке канонического квантования. В самом деле, точные непертурбативные решения топологических $(p,1)$-теорий описываются производящей функцией (2.81), которую можно рассматривать в определенном смысле как представление функционального интеграла для уравнений [24] $[\hat{P},\hat{Q}]=1$, т.е. просто алгебры Гейзенберга в реализации, где $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ – дифференциальные операторы конечного порядка (p и q соответственно), причем p-й порядок оператора $\hat{P}$ задает p-редукцию, в то время как q отвечает за q-ю критическую точку. Квазиклассически коммутатор превращается в скобку Пуассона [36, 114] $\{P,Q\}=1$, где уже $P(x)$ и $Q(x)$ — определенные функции (полиномы). Легко видеть, что рассмотренный выше случай отвечает ситуации, когда $Q(x) \equiv x$ является полиномом первого порядка, а полином степени p — $P(x)$ следует отождествить* с $W(x) \equiv V'(x)$. При этом выражение, стоящее в экспоненте в формулах (2.81), (3.59) и (3.60), приобретает естественный смысл функционала действия

$$S_{p,1}(x,\mu) = -V(x) + xW(\mu) = -\int\limits_0^x dy\ W(y)Q'(y) + Q(x)W(\mu),$$

*Например: $W(\mu)=\mu^2+t_1$, $Q(\mu)=\mu$, тогда

$$\{W,Q\} = \frac{\partial W}{\partial t_1}\frac{\partial Q}{\partial \mu} - \frac{\partial Q}{\partial t_1}\frac{\partial W}{\partial \mu} = 1.$$

$$W(x) = V'(x) = x^p + \sum_{k=1}^{p} v_k x^{k-1}, \quad Q(x) = x^q, \tag{3.62}$$

и, естественным образом, его обобщение на случай произвольных (p, q) моделей имеет вид

$$S_{W,Q} = -\int_0^x dy\ W(y)Q'(y) + Q(x)W(\mu),$$

$$W(x) = V'(x) = x^p + \sum_{k=1}^{p} v_k x^{k-1}, \quad Q(x) = x^q + \sum_{k=1}^{q} \bar{v}_k x^{k-1}. \tag{3.63}$$

Вариация действия (3.63) по-прежнему дает $W(x) = W(\mu)$ с одним из решений $x = \mu$, а значение действия на экстремали $x = \mu$ имеет вид

$$S_{W,Q}|_{x=\mu} = \int_0^\mu dy\ W'(y)Q(y) = \sum_{k=-\infty}^{p+q} t_k \tilde{\mu}^k, \tag{3.64}$$

где $\tilde{\mu}^p = W(\mu)$, а

$$t_k \equiv t_k^{(W,Q)} = -\frac{p}{k(p-k)} \operatorname{res} W^{1-k/p} dQ. \tag{3.65}$$

Необходимо заметить, что значение действия (3.63) на экстремали, записанное в форме (3.64), определяет квазиклассический (или бездисперсионный) предел p-редуцированной иерархии КП [36, 114] с $p + q - 1$ независимыми потоками. Выше было показано, что в случае топологически деформированной $(p, 1)$-модели квазиклассическая иерархия является *точной* в следующем смысле: решения иерархии, где потоки определяются p-временами, являются также решениями *полных* уравнений иерархии КП ($t + T$-формула (3.52)), а первый из набора базисных векторов является в точности функцией Бейкера — Ахиезера, ограниченной на "малое" фазовое пространство. Это, безусловно, не так для общего случая (p, q)-моделей: здесь квазиклассика уже не точна, и для того, чтобы найти явный вид базисных векторов, необходимо решить "полную" задачу — найти точные решения полной иерархии (редуцированного) КП вдоль первых $p + q - 1$ потоков. Тем не менее наличие "квазиклассической компоненты" в полной интегрируемой структуре данных моделей может дать, в принципе, некоторую полезную информацию: например, можно предположить, что коэффициенты асимптотических разложений базисных векторов выражаются только через производные квазиклассической τ-функции.

Возвращаясь к уравнению (3.65), сразу заметим, что теперь только для $k \geq p+q+1$ p-времена тождественно равны нулю, а для $k = p+q$-го значения времени имеем

$$t_{p+q} \equiv t_{p+q}^{(W,Q)} = \frac{p}{p+q}, \tag{3.66}$$

и корректное критическое поведение получается при "подкрутке" всех времен $\{t_k\}$ с $k < p+q$, так что они становятся равными нулю. Точная формула для векторов базиса в грассманиане для общего случая (p,q)-моделей принимает вид

$$\phi_i(\mu) = [W'(\mu)]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\left. S_{W,Q}\right|_{x=\mu}\right) \int d\mathcal{M}_Q(x) f_i(x) \exp\ S_{W,Q}(x,\mu), \tag{3.67}$$

где $d\mathcal{M}_Q(x)$ — мера интегрирования. Как будет видно в дальнейшем, для общего случая (p,q)-моделей мера определяется *двумя* полиномами W и Q и имеет следующий вид:

$$d\mathcal{M}_Q(z) = [Q'(z)]^{\frac{1}{2}} dz, \tag{3.68}$$

что следует из струнного уравнения. При выборе меры в виде (3.68), для того чтобы обеспечить правильное асимптотическое поведение базисных векторов $\phi_i(\mu)$, следует выбрать функции $f_i(x)$ (не обязательно мономы или полиномы!), удовлетворяющие такому же асимптотическому условию: $f_i(x) \sim \sim x^{i-1}(1+O(1/x))$. Наконец, для того, чтобы базисные векторы удовлетворяли струнному уравнению, необходимо выполнить два условия: условие редукции

$$W(\mu)\phi_i(\mu) = \sum_j C_{ij}\phi_j(\mu) \tag{3.69}$$

и инвариантность относительно действия оператора Каца — Шварца (3.17)

$$A^{(W,Q)}\phi_i(\mu) = \sum A_{ij}\phi_j(\mu), \tag{3.70}$$

где

$$A^{(W,Q)} \equiv N^{(W,Q)}(\mu)\frac{1}{W'(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}[N^{(W,Q)}(\mu)]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{W'(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{W''(\mu)}{W'(\mu)^2} + Q(\mu),$$

$$N^{(W,Q)}(\mu) \equiv [W'(\mu)]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\left. S_{W,Q}\right|_{x=\mu}\right). \tag{3.71}$$

Струнное уравнение является следствием (3.69), (3.70). Немедленно структура действия приводит к тому, что

$$A^{(W,Q)}\phi_i(\mu) = N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)Q(z)f_i(z)\exp\ S_{W,Q}(z,\mu), \qquad (3.72)$$

и условие (3.70) может быть переформулировано как свойство Q-редукции (дуального) базиса $\{f_i(z)\}$:

$$Q(z)f_i(z) = \sum A_{ij}f_i(z). \qquad (3.73)$$

Теперь вернемся к условию W-редукции. Умножая $\phi_i(\mu)$ на $W(\mu)$ и интегрируя по частям, получаем

$$W(\mu)\phi_i(\mu) = N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)f_i(z)\frac{1}{Q'(z)}\frac{\partial}{\partial z}[\exp\ Q(z)W(\mu)]\times$$
$$\times\exp\left[-\int\limits_0^z dy\ W(y)Q'(y)\right] = -N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)\exp\left[S_{W,Q}(z,\mu)\right]\times$$
$$\times\left(\frac{1}{Q'(z)}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{Q''(z)}{Q'(z)^2}-W(z)\right)f_i(z)\equiv$$
$$\equiv -N^{(W,Q)}(\mu)\int d\mathcal{M}_Q(z)\exp\left[S_{W,Q}(z,\mu)\right]A^{(Q,W)}f_i(z). \qquad (3.74)$$

Таким образом, для дуального базиса $\{f_i(z)\}$ условие (3.69) превращается в

$$A^{(Q,W)}f_i(z) = -\sum C_{ij}f_j(z), \qquad (3.75)$$

где мы ввели обозначение $A^{(Q,W)}$ ($\neq A^{(W,Q)}$) для дуального оператора Каца — Шварца:

$$A^{(Q,W)} = \frac{1}{Q'(z)}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{Q''(z)}{Q'(z)^2}-W(z). \qquad (3.76)$$

Формулы (3.67), (3.68) представляют собой точные интегральные выражения для базисных векторов, являющихся решениями (p,q) струнных моделей [112]. Смысл этих формул заключается в явном виде интегрального преобразования, связывающего дуальные (p,q) и (q,p) непертурбативные точные струнные решения. Мы будем называть это преобразование — преобразованием pq-дуальности (в общем случае $W-Q$-дуальности) для точных непертурбативных производящих функций (см. также [115]). В качестве основного следствия из приведенных выше формул можно заключить, что *общее решение* $c\leq 1$ $2D$ непертурбативной струнной теории формулируется с помощью *двух* (полиномиальных) функций: $W(x)$ и $Q(x)$.

3.4. Струнная теория поля и предел $c \to 1$. Наконец, перейдем к обсуждению вопроса, почему предложенная выше схема единого описания непертурбативного режима в некотором классе струнных моделей может рассматриваться как попытка построения *струнной теории поля* или эффективной формулировки теории струн, в которой мировая поверхность струны уже не присутствует явно. С самого начала необходимо заметить, что под струнной теорией поля будет пониматься нечто большее, чем ее традиционное определение как полевой теории функционалов, определенных на струнных петлях; ниже под струнной теорией поля будет пониматься некоторая эффективная теория, позволяющая с единой точки зрения рассматривать струнные вакуумы (решения классических уравнений движения струнной теории поля — $2D$ конформные теории поля, взаимодействующие с $2D$-гравитацией) и предлагающая ответ для эффективного действия — некоторой функции, имеющей (пертурбативные) разложения вокруг данных струнных вакуумов. Такая теория, в частности, должна уметь описывать переходы между различными струнными вакуумами и другие непертурбативные эффекты.

Рассмотренная выше схема может претендовать на то, чтобы называться *струнной* теорией поля, так как в основе ее лежит двумерная геометрия мировой поверхности, приводящая к тому, что корреляторы (в топологическом секторе) можно выразить через интегралы от дифференциальных форм на пространстве модулей [40]. Это основное отличие от обычной теории поля, где нет ограничений, налагаемых двумерной геометрией: общий вид представленной выше конструкции связан с клеточным разбиением пространства модулей [40, 116].

Таким образом, на данный момент мы имеем дело с теорией, описывающей различные (p, q)-модели, взаимодействующие с $2D$-гравитацией, вне рамок теории возмущения и технически основанной на (дифференциальных) уравнениях в пространстве констант связи, налагаемых на производящую функцию физических корреляторов. Основным утверждением является отождествление производящей функции с τ-функцией интегрируемой иерархии типа КП/Тоды, которая не определяется как *глобальная* функция в пространстве констант связи, а имеет некоторое фиксированное разложение вокруг каждой критической точки, воспроизводящее ряд теории возмущений оригинальной первично-квантованной теории (2.67). Однако при не строгих переходах в пространстве констант связи от одного решения к другому появляются препятствия, связанные с плохой сходимостью пертурбативных разложений, т.е. возникает необходимость нетривиального аналитического продолжения, при которой и появляются собственно непертурбативные вклады. Для простейших топологических $(p, 1)$-теорий эту схему можно описать на языке эффективного интегрального представления, которое сводится к интегралу по эрмитовым матрицам (2.81), точные интегральные формулы для общего случая устроены гораздо более сложным образом.

Эта схема, в принципе, применима и к "граничному" $c = 1$ случаю. Однако $c = 1$ теория общего вида является гораздо более "насыщенной", чем $c < 1$ топологические модели, поэтому наивный предел из $c < 1$ эффективных матричных моделей приводит лишь к формулировке сильно вырожденных $c = 1$ теорий.

Все эти случаи более или менее основаны на обобщениях модели Пеннера, вычисляющей эйлеровские характеристики пространств модулей комплексных кривых. В самом деле, детерминантное представление статсуммы модели Пеннера [116] уже само по себе предполагает, что (при фиксированных временах) эта статсумма является τ-функцией решетки Тоды. Наличие интегрального представления модели Пеннера говорит о том, что эта теория является в определенном смысле аналогом обобщенной модели Концевича. Действительно, решение модели Пеннера

$$\mathcal{Z} \sim \det\ \mathcal{H}_{ij}^{(\alpha)} \tag{3.77}$$

с $\mathcal{H}_{ij}^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha + i + j - 1)$ является частным случаем топологических теорий, которые были рассмотрены выше.

Для того чтобы продемонстрировать это, сначала заметим, что для любого решения иерархии КП существует явное соотношение между детерминантным представлением в τ-функции переменных Мивы

$$\tau_{KP}[T_k] = \frac{\det_{ij} \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)} \tag{3.78}$$

и детерминантным представлением τ-функции, характерным для решений решетки Тоды

$$\tau_N[T_{-k}, T_k] = \det_{ij} H_{i+N,j+N}[T_{-k}, T_k], \tag{3.79}$$

где

$$\Delta(\mu) = \prod_{i>j}(\mu_i - \mu_j), \quad \phi_i(\mu) = \mu^{i-1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right), \quad T_k = \frac{1}{k}\sum_i \mu_i^{-k}, \quad k > 0 \tag{3.80}$$

и

$$\partial H_{ij}/\partial T_k = H_{i,j-k}, \quad j > k > 0, \quad \partial H_{ij}/\partial T_{-k} = H_{i-k,j}, \quad i > k > 0. \tag{3.81}$$

Соотношение между представлениями (3.78) и (3.79) проще всего формулируется с помощью полиномов Шура, определяемых следующей формулой:

$$\mathcal{P}[z|T_k] \equiv \exp\left\{\sum_{k>0} T_k z^k\right\} = \sum z^k P_k[T], \tag{3.82}$$

в частности, $P_{-n} = 0$ при любых $n > 0$; $P_0[T] = 1$; $P_1[T] = T_1$; $P_2[T] = T_2 + \frac{1}{2}T_1^2$; $P_3[T] = T_3 + T_2T_1 + \frac{1}{6}T_1^3$ и т.д. Важным свойством полиномов Шура является равенство $\frac{\partial P_k}{\partial T_n} = P_{k-n}$, следующее из того, что $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T_k} = z^k\mathcal{P}$. Это свойство позволяет выразить зависимость от времен матрицы $H_{ij}[T]$, удовлетворяющей уравнениям (3.81), через полиномы Шура:

$$H_{ij}[T_{-p}, T_p] = \sum_{\substack{k \le i \\ l \ge -j}} P_{i-k}[T_{-p}]H_{kl}P_{l+j}[T_p], \tag{3.83}$$

где $H_{kl} \equiv H_{kl}[0,0]$ уже является матрицей, не зависящей от времен T.

Рассмотрим сначала случай нулевых отрицательных времен и нулевого времени $N = T_{-k} = 0$, а затем разрешим нулевому времени принимать любые (целые положительные) * значения $N > 0$ и введем отрицательные времена T_{-k}.

Для заданной системы базисных векторов $\phi_i(\mu)$ при $i > 0$ введем по определению

$$H_{ij}[T_{-k} = 0, T_k] = \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_i(z)z^{-j}\mathcal{P}[z|T_k]dz, \quad i > 0. \tag{3.84}$$

Контур интегрирования, проходящий вокруг нуля, может быть деформирован к бесконечно удаленной точке, при этом интеграл также будет определяться особенностями функции $\mathcal{P}[z]$, если они имеются. Подставив определение (3.82) функции $\mathcal{P}[z]$ в (3.84), получим формулу (3.83), в которой $P_{k-i}[T_{-m} = 0] = \delta_{ki}$, а также

$$H_{kl} = \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_k(z)z^l dz. \tag{3.85}$$

Чтобы доказать равенство выражений (3.78) и (3.79), перейдем в формуле (3.82) к переменным Мивы (3.80)

$$\mathcal{P}[z|T_k] = \frac{\det\ M}{\det(M - Iz)} = \prod_i \frac{\mu_i}{(\mu_i - z)} = \left[\prod_i \mu_i\right] \sum_k \frac{(-)^k}{(z - \mu_k)} \frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta(\mu)}, \tag{3.86}$$

где $\Delta_k(\mu) \equiv \prod\limits_{i>j;i,j\neq k} (\mu_i - \mu_j)$. Теперь вклад в интеграл (3.84) дается только полюсами функции $\mathcal{P}[z|T_k]$ в точках μ_k:

$$H_{ij}[T_{-k} = 0, T_k] = \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_i(z)z^{-j}\mathcal{P}[z|T_k]dz = \frac{\prod\limits_i \mu_i}{\Delta(\mu)} \sum_k (-)^k \phi_i(\mu_k) \frac{\Delta_k(\mu)}{\mu_k^j}. \tag{3.87}$$

*Обсуждение случая $N < 0$ см. в [117].

Сумма в правой части (3.87) имеет вид произведения матриц, следовательно,

$$\det\ H_{ij} = \det\ \phi_i(\mu_k) \prod_k \left[\frac{\prod\limits_i \mu_i}{\Delta(\mu)} (-)^k \Delta_k(\mu) \right] \det\ \frac{1}{\mu_k^j}. \tag{3.88}$$

Последний детерминант в правой части (3.88) равен $\Delta(1/\mu) \sim \sim \Delta(\mu) \left[\prod\limits_k \mu_k^N \right]^{-1}$, заметим также, что $\prod\limits_k \left[\frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta(\mu)} \right] = \Delta(\mu)^{-2}$, и, собирая все вместе, убедимся в существовании равенства $\det\ H_{ij} = \frac{\det\ \phi_i(\mu_j)}{\Delta(\mu)}$, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к введению нулевого и отрицательных времен. Нулевое время n возникает просто как одновременный сдвиг индексов i и j матрицы H_{ij}: $H_{ij} \to H_{i+N,j+N}$. Поэтому можно написать

$$H_{i+N,j+N}[0, T_k] = \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_i^{\{N\}}(z) z^{-j} \mathcal{P}[z] dz \tag{3.89}$$

с векторами $\phi_i^{\{N\}}(z) = z^{-N} \phi_{i+N}(z)$. Это полностью решает проблему нулевого времени N при положительных целых значениях N.

Что касается отрицательных времен, как только определена матрица H_{kl}, они могут быть введены с помощью соотношения (3.83), так что

$$H_{i+N,j+N}[T_{-k}, T_k] \equiv \sum_{k \le i} P_{i-k}[T_{-p}] H_{k+N,j+N}[0, T_l] =$$

$$= \oint_{z \hookrightarrow 0} \phi_i^{\{T_{-k},N\}}(z) z^{-j} \mathcal{P}\left[\frac{1}{z}|T_{-k}\right] \mathcal{P}[z|T_k] dz \tag{3.90}$$

с базисными векторами

$$\phi_i^{\{T_{-k},N\}}(z) \equiv \left(\mathcal{P}\left[\frac{1}{z}|T_{-k}\right] \right)^{-1} \sum P_{i-k}[T_{-l}] \phi_k^{[N]} =$$

$$= z^{-N} \exp\left(-\sum_{k>0} T_{-k} z^{-k} \right) \sum P_k[T_{-l}] \phi_{i+N-k}(z). \tag{3.91}$$

В определение базисных векторов (3.91) введен дополнительный экспоненциальный множитель, чтобы обеспечить правильное асимптотическое поведение $\phi_i^{\{T_{-k},N\}}(z) = z^{i-1}\{1 + \mathcal{O}(\frac{1}{z})\}$.

Важным частным случаем иерархии решетки Тоды является ее редукция к цепочке Тоды (см., например, [98]). Редукция к цепочке Тоды может быть легко описана в терминах задающего точку грассманиана фермионного оператора G, удовлетворяющего условию $[G, J_k + J_{-k}] = 0$, а также на детерминантном языке. В последнем случае налагается условие симметрии

$$[H\ ,\ \Lambda + \Lambda^{-1}] = 0, \tag{3.92}$$

где Λ — матрица сдвига $\Lambda_{ij} \equiv \delta_{i,j-1}$. Выполнение этого условия приводит к появлению τ-функции иерархии цепочки Тоды, которая уже зависит лишь от суммы положительных и отрицательных времен $t_k = \frac{1}{2}(T_k + T_{-k})$, и не зависит от их разности (можно рассматривать это как определяющее свойство цепочки Тоды). Заметим, что решением условия (3.92) является $H_{i,j} = \mathcal{H}_{i-j}$.

Теперь уже легко восстановить зависимость от отрицательных и нулевого времени в интегральных формулах для струнных решений иерархии КП, так что статсумма эффективной теории превратится в τ-функцию иерархии решетки Тоды. Соответствующий набор функций — базисных векторов в точке грассманиане, отвечающей обобщенной модели Концевича, задается интегральными формулами

$$\phi_i^{\{V\}}(\mu) = \mathrm{e}^{V(\mu)-\mu V'(\mu)}\sqrt{V''(\mu)}\int dx\ x^{i-1}\mathrm{e}^{-V(x)+xV'(\mu)} \equiv$$

$$\equiv s(\mu)\int dx\ x^{i-1}\mathrm{e}^{-V(x)+xV'(\mu)} \equiv \left\langle x^{i-1}\right\rangle_\mu . \tag{3.93}$$

Зависимость от N и T_{-k} вводится по следующему правилу *:

$$\phi_i^{\{V,N,T_{-k}\}}(\mu) \equiv \left\langle x^{i-1}\left[\frac{x}{\mu}\right]^N \exp\left(\sum_{l>0} T_{-l}(x^{-l} - \mu^{-l})\right)\right\rangle_\mu =$$

$$= \frac{\sqrt{V''(\mu)}\exp\left(V(\mu) - \mu V'(\mu)\right)}{\mu^N}\times$$

$$\times\int dx\ x^{N+i-1}\exp\left(-V(x) + xV'(\mu)\right)\exp\left(\sum_{l>0} T_{-l}(x^{-l} - \mu^{-l})\right) =$$

$$= \exp\left(\hat{V}(\mu) - \mu V'(\mu)\right)\sqrt{V''(\mu)}\int dx\ x^{i-1}\exp\left(-\hat{V}(x) + xV'(\mu)\right), \tag{3.94}$$

---

*Заметим, что экспонента от отрицательных степеней в нормировке не оказывает существенного влияния на τ-функцию иерархии КП, так как этот фактор сводится к экспоненте от тривиальной билинейной формы по временам и отвечает свободе в ее определении. Действительно, $\tau \sim \det\left(\exp\left[\sum_k a_k z_j^{-k}\right]\phi_i(z_j)\right) \sim \prod_l \exp\left[\sum a_k z_l^{-k}\right]\det\phi_i(z_j) \sim \exp\left[\sum k a_k T_k\right]\det\phi_i(z_j)$.

где $\hat{V}(X) \equiv V(X) - N \log X - \sum\limits_{k>0} t_{-k} X^{-k}$. Начальный потенциал V отождествляется с $\hat{V}_+$. Из формулы (3.94) немедленно следует, что статсумма обобщенной модели Концевича с учтенной зависимостью от нулевого и отрицательных времен (автоматически являющаяся τ-функцией иерархии решетки Тоды) есть

$$\hat{Z}_{\{\hat{V}\}}[M] = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,\hat{V}(M) - \mathrm{Tr}\,M\hat{V}'_+(M)} \frac{\int DX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\,\hat{V}(X) + \mathrm{Tr}\,\hat{V}'_+(M)X}}{\int dX\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\,\hat{U}_{+,2}(X,M)}}. \tag{3.95}$$

Теперь уже легко ввести зависимость от положительных и отрицательных времен в модели Пеннера (3.77) и восстановить $\Phi_k^{\{V\}}(z)$ из (3.91). Действительно,

$$h_{ij}^{(\alpha)} = \mathcal{H}_{ij}^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha - 1 + i + j) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\,\mathrm{e}^{-y} y^{\alpha-1+i+j} = \oint \phi_i^{(\alpha)}(z) z^j \tag{3.96}$$

сразу дает

$$\phi_i^{(\alpha)}(z) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\,\mathrm{e}^{zy-y} y^{\alpha-1+i}, \tag{3.97}$$

что является уже представлением в духе топологических моделей, изучавшихся выше. Существенная разница с рассмотренными выше $c < 1$ примерами заключается в определении контура интегрирования в формуле (3.97), а также в том, что зависимость от параметра z тривиальна, так как интеграл легко вычисляется, приводя к результату

$$\phi_i^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{(z-1)^{\alpha+i}} \equiv \phi_{\alpha+i}(z)\ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j \phi_i^{(\alpha)}(z) = (-)^j \phi_{i+j}^{(\alpha)}(z) = (-)^j \frac{\Gamma(\alpha+i+j)}{(z-1)^{\alpha+i+j}}. \tag{3.98}$$

Вводя отрицательные времена, получаем [118]

$$\phi_i^{(\alpha)}(z|T_{-p}) = z^{-\alpha} \exp\left(-\sum_{p>0} T_{-p} z^{-p}\right) \sum_k P_k[T_{-p}] \phi_{i-k}^{(\alpha)}(z) \tag{3.99}$$

или

$$Z_{c=1} \sim \int DY \exp \mathrm{Tr}\, ZY + \alpha\, \mathrm{Tr}\, \log Y + \sum_{k>0} T_{-k}\, \mathrm{Tr}\, Y^{-k} \tag{3.100}$$

с положительными временами $T_{+k} = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\, Z^k$. Следует заметить, что формула (3.100) была независимо получена путем сравнения с результатами вычисления "тахионных" амплитуд в $c = 1$ теории [119].

Наконец, сделаем еще несколько замечаний по поводу $c = 1$ теорий. Вообще говоря, в этом случае мы ожидали получить наиболее общую (нередуцированную) τ-функцию иерархии КП или решетки Тоды, удовлетворяющую некоторому (опять же нередуцированному) струнному уравнению. Такая ситуация отвечала бы скорее взятию "прямой суммы" различных (p, q)-теорий, а не пределу из области $c < 1$. Однако в некоторых вырожденных случаях рассмотренный выше прямой предел $c \to 1$ также имеет смысл. Эти вырожденные случаи оказываются, по сути дела, $c = 1$ аналогами (p, q) струнных моделей и отвечают топологическому сектору $c = 1$ теории.

Действительно, легко видеть, что в специальном случае, когда $p = \pm q$, уравнения (3.69) и (3.70) сильно упрощаются и система вырождается в единственное уравнение. Безусловно, этот случай не отвечает минимальной серии, где пара (p, q) должна быть взаимно простыми числами. Тем не менее можно по-прежнему удовлетворить обоим условиям: редукции и инвариантности относительно действия оператора Каца — Шварца; полученные же решения, если посмотреть на формулу для центрального заряда материи, формально отвечают $c = 1$ для $p = q$ и $c = 25$ для $p = -q$.

Простейший пример опять возникает при $q = 1$. В этом случае $c = 1$ теория оказывается эквивалентной вспомогательной дискретной матричной модели [117], в то время как $c = 25$ буквально отвечает тому, что ожидается из развития подхода Пеннера [118, 119]. Действительно, если взять в общем случае (неполиномиальные) функции $W(x) = x^{-\beta}$ и $Q(x) = x^{\beta}$, действие приобретает логарифмический член $S_{-\beta,\beta} = -\beta \log x + \frac{x^{\beta}}{\mu^{\beta}}$, а уравнения (3.69) и (3.70) приводят к простым рациональным решениям. Легко видеть, что $\beta = 1$ сразу дает модель Пеннера во внешнем поле, что, как мы видели, скорее отвечает "дуальной" к $c = 1$ теории с центральным зарядом материи $c_{\mathrm{matter}} = 25$ и сильно неунитарной реализацией конформной материи *.

4. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В 4D N=2 СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ: КОМПЛЕКСНЫЕ КРИВЫЕ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

В предыдущих разделах были рассмотрены непертурбативные решения топологических струнных моделей, для которых существуют *явные* точные

---

*Эта дуальность между моделями с $c = 1$ и $c = 25$, вполне вероятно, связана с известным фактом, что решение $c = 1$ матричной модели Гросса и Клебанова связано [120] с решением модели Пеннера [116] преобразованием Лежандра.

формулы, описывающие производящие функции *всех* корреляторов. Эта связано, в первую очередь, с тем, что эти решения можно рассматривать как деформацию тривиальных конечнозонных решений, для которых спектральная кривая Σ является комплексной сферой, и, в частности, поэтому существенны лишь параметры, связанные с вычетами в отмеченных точках (3.65), а собственные значения операторов, определяющих производящий дифференциал, — полиномиальные функции (3.63) на сфере CP^1. При этом препотенциал — логарифм квазиклассической τ-функции — является простой полиномиальной функцией времен $\mathcal{F} = \frac{t_1^3}{6} + \ldots$, а топологические корреляционные функции — коэффициенты разложения препотенциала, как было видно, это числа, отвечающие индексам пересечений на пространстве модулей комплексных структур. Соответствующая теория называется *топологической* гравитацией [31, 32, 34, 40].

В случае *физической* ($c < 1$ или pq) гравитации известно гораздо меньше явных формул, эти теории отвечают уже нетривиальным спектральным кривым * $\Sigma_{g=\frac{(p-1)(q-1)}{2}}$ [121]. Формально $2D$ топологические теории с нетривиальными спектральными кривыми, отвечающими пространству-времени, были построены в [36, 37].

В данном разделе (см. также [90]) будет подробно рассмотрен более интересный пример непертурбативных решений, связанный с появлением нетривиальных комплексных кривых старшего рода — в эффективных решениях Виттена — Зайберга [41, 42] $4D$ $\mathcal{N} \geq 2$ суперсимметричных калибровочных теориях поля с затравочным лагранжианом

$$\mathcal{L} = \int d^4\vartheta F(\Phi_i) = \ldots \frac{1}{g^2} \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{F}_{\mu\nu}^2 + i\theta\, \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tilde{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} + \ldots \tag{4.1}$$

(где суперполе $\Phi_i = \varphi^i + \vartheta\sigma_{\mu\nu}\tilde{\vartheta}G^i_{\mu\nu} + \ldots$), для которого непертурбативное точное решение формально определено как отображение

$$G, \tau, h_k \to a_i,\ a_i^D,\ a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \tag{4.2}$$

(G — калибровочная группа, τ — ультрафиолетовая константа связи, $h_k = \frac{1}{k}\langle \mathrm{Tr}\, \Phi^k \rangle$ — вакуумные значения поля Хиггса), и существует его элегантное описание в терминах кривой $\Sigma_{g=\mathrm{rank}\, G}$, у которой h_k параметризует некоторые (чаще всего гиперэллиптические) модули комплексной структуры. Периоды

$$a_i = \oint_{A_i} dS, \qquad a_i^D = \oint_{B_i} dS \tag{4.3}$$

---

*В этом случае явно известно лишь преобразование *дуальности*, связывающее производящие функции дуальных теорий и имеющее вид преобразования Фурье с экспонентой $S = \int^{\lambda} dS$ (3.63).

производящего мероморфного 1-дифференциала

$$dS = \lambda d \log w = \mathrm{Tr}\ \mathcal{L} d\ \log T, \tag{4.4}$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial dS}{\partial h_k} \cong d\omega_k, \tag{4.5}$$

где $d\omega_k$ — голоморфные дифференциалы на Σ, определяют спектр массивных БПС-состояний

$$M \sim |\boldsymbol{n}a + \boldsymbol{m}a^D|, \tag{4.6}$$

а формула $a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a^i}$ — препотенциал $\mathcal{F}$, определяющий низкоэнергетическое действие (см. разд. 1 по поводу более подробного пояснения основных понятий) и, тем самым, набор эффективных констант связи

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial a_i^D}{\partial a_j}. \tag{4.7}$$

В данном разделе показано, что возникающие в решениях Виттена — Зайберга кривые являются спектральными кривыми конечнозонных решений периодической цепочки Тоды и ее естественных деформаций в эллиптическую модель Калоджеро — Мозера и (классические) спиновые цепочки.

4.1. N=2 суперсимметричная глюодинамика и периодическая цепочка Тоды. Начнем анализ с простейшего случая периодической цепочки Тоды, отвечающей непертурбативному решению $4D$ $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамики. Периодическая задача в цепочке Тоды может быть сформулирована *двумя* различными способами, которые естественным образом "деформируются" в двух различных направлениях. С физической точки зрения различные деформации цепочки Тоды отвечают включению взаимодействия $4D$ $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории двух типов: с материей в присоединенном и фундаментальном представлениях калибровочной группы.

Цепочка Тоды задается уравнениями движения

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = p_i\ , \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \mathrm{e}^{\phi_{i+1} - \phi_i} - \mathrm{e}^{\phi_i - \phi_{i-1}}, \tag{4.8}$$

где для периодической задачи (с периодом N_c по "номеру" частицы) накладываются условия $\phi_{i+N_c} = \phi_i$ и $p_{i+N_c} = p_i$. Цепочка Тоды является вполне интегрируемой системой с N_c взаимно коммутирующими (относительно скобки Пуассона) гамильтонианами, $h_1^{\mathrm{TC}} = \sum p_i$, $h_2^{\mathrm{TC}} = \sum \left(\frac{1}{2} p_i^2 + \mathrm{e}^{\phi_i - \phi_{i-1}}\right)$ и т.д. Как любое конечнозонное решение, периодическая задача в цепочке Тоды может быть описана в терминах (собственных значений и собственных функций) двух операторов: оператора Лакса $\mathcal{L}$ (или вспомогательной линейной задачи для (4.8))

$$\lambda\psi_n^\pm = \sum_k \mathcal{L}_{nk}\psi_k^\pm = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_{n+1}-\phi_n)}\psi_{n+1}^\pm + p_n\psi_n^\pm + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_n-\phi_{n-1})}\psi_{n-1}^\pm \; (= \pm\frac{\partial}{\partial t}\psi_n^\pm) \tag{4.9}$$

и оператора *монодромии* (или граничных условий) — в данном случае просто сдвига по дискретной переменной "номера" частицы $T\phi_n = \phi_{n+N_c}$, $Tp_n = p_{n+N_c}$, $T\psi_n = \psi_{n+N_c}$. Условие совместного спектра этих двух операторов

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi \;, \quad T\psi = w\psi \;, \quad [\mathcal{L}, T] = 0 \tag{4.10}$$

означает, что между ними существует соотношение $\mathcal{P}(\mathcal{L}, T) = 0$, которое может быть строго сформулировано в терминах спектральной кривой Σ: $\mathcal{P}(\lambda, w) = 0$ [50, 53]. Производящая функция интегралов движения может быть выписана в терминах $\mathcal{L}$- и T-операторов, и для цепочки Тоды существуют две различные формулировки такого типа.

В первом варианте (который можно рассматривать как предельный случай систем Хитчина [96]) оператор Лакса (4.9) записывается в базисе собственных функций T-оператора. Для цепочки длиной N_c он становится при этом матрицей с размером $N_c \times N_c$:

$$\mathcal{L}^{TC}(w) = \begin{pmatrix} p_1 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)} & 0 & & w\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_1-\phi_{N_c})} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)} & p_2 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_3-\phi_2)} & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_3-\phi_2)} & p_3 & & 0 \\ & & \dots & & \\ \frac{1}{w}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi_1-\phi_{N_c})} & 0 & 0 & & p_{N_c} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

определенной на цилиндре. Скобки Пуассона $\{p_i, \phi_j\} = \delta_{ij}$ эквивалентны пуассоновскому соотношению на оператор Лакса $\left\{\mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w) \overset{\otimes}{,} \mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w')\right\} = \left[\mathcal{R}(w,w'), \mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w)\otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w')\right]$ с числовой тригонометрической $\mathcal{R}$-матрицей

$$\mathcal{R}(w,w') = \frac{w\sum(\delta_{i,i+1}\otimes\delta_{i+1,i}) + (w'\sum\delta_{i+1,i}\otimes\delta_{i,i+1})}{w-w'}, \tag{4.12}$$

а собственные числа оператора Лакса, определяемые спектральным уравнением

$$\mathcal{P}(\lambda, w) = \det_{N_c\times N_c}\left(\mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w) - \lambda\right) = 0, \tag{4.13}$$

коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона. Подставляя явное выражение (4.11) в (4.13), получаем [122]

$$w + \frac{1}{w} = 2P_{N_c}(\lambda) \tag{4.14}$$

или

$$y^2 = P_{N_c}^2(\lambda) - 1, \qquad 2y = w - \frac{1}{w}, \tag{4.15}$$

где $P_{N_c}(\lambda)$ — полином степени N_c, коэффициенты которого — полиномы Шура $S_j(h)$ от гамильтонианов $h_k = \sum\limits_{i=1}^{N_c} p_i^k + \ldots$:

$$P_{N_c}(\lambda) = \sum_{k=0}^{N_c} S_{N_c-k}(h)\lambda^k = \left(\lambda^{N_c} + h_1\lambda^{N_c-1} + \frac{1}{2}(h_2 - h_1^2)\lambda^{N_c-2} + \ldots\right). \tag{4.16}$$

Спектральное уравнение зависит только от взаимно коммутирующих комбинаций динамических переменных — гамильтонианов или переменных действия, параметризующих подпространство в пространстве модулей комплексных структур гиперэллиптических кривых Σ^{TC} рода $N_c - 1 = \mathrm{rank}\ SU(N_c)$.

Альтернативное описание той же системы возникает, если явно *решить* вспомогательную линейную задачу (4.9), являющуюся разностным уравнением второго порядка, решить которое можно, просто переписав его в виде $\tilde{\psi}_{i+1} = L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda)\tilde{\psi}_i$, т.е. с помощью цепочки "матриц Лакса" 2×2 [54], имеющих (после простого "калибровочного преобразования") вид

$$L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda) = \begin{pmatrix} p_i + \lambda & \mathrm{e}^{\phi_i} \\ \mathrm{e}^{-\phi_i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, N_c. \tag{4.17}$$

Эти матрицы удовлетворяют *квадратичному* пуассоновскому соотношению r-матричного типа [55]:

$$\left\{L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda) \overset{\otimes}{,} L_j^{\mathrm{TC}}(\lambda')\right\} = \delta_{ij}\left[r(\lambda - \lambda'), L_i^{\mathrm{TC}}(\lambda) \otimes L_j^{\mathrm{TC}}(\lambda')\right] \tag{4.18}$$

с (не зависящей от номера i!) числовой рациональной r-матрицей, удовлетворяющей классическому уравнению Янга — Бакстера $r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{a=1}^{3} \sigma_a \otimes \sigma^a$. Как следствие, матрица монодромии (обычно определяемая для неоднородной решетки с неоднородностями λ_i)

$$T_{N_c}(\lambda) = \prod_{N_c \geq i \geq 1} L_i(\lambda - \lambda_i) \tag{4.19}$$

удовлетворяет тому же соотношению:

$$\left\{T_{N_c}(\lambda) \overset{\otimes}{,} T_{N_c}(\lambda')\right\} = \left[r(\lambda - \lambda'), T_{N_c}(\lambda) \otimes T_{N_c}(\lambda')\right], \tag{4.20}$$

а интегралы движения цепочки Тоды генерируются спектральным уравнением в другой форме:

$$\det_{2\times 2}\left(T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) - w\right) = w^2 - w\,\mathrm{Tr}\,T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) + \det T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) = w^2 - w\,\mathrm{Tr}\,T_{N_c}^{\mathrm{TC}}(\lambda) + 1 = 0 \tag{4.21}$$

или

$$\mathcal{P}(\lambda, w) = w + \frac{1}{w} - \operatorname{Tr} T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda) = w + \frac{1}{w} - 2P_{N_c}(\lambda) = 0. \tag{4.22}$$

(Здесь использовано, что $\det_{2\times 2} L^{\mathrm{TC}}(\lambda) = 1$ приводит к $\det_{2\times 2} T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda) = 1$.) Правая часть (4.22) представляет собой полином по λ степени N_c, коэффициенты которого — интегралы движения, т.к.

$$\begin{aligned}\{\operatorname{Tr} T_{N_c}(\lambda), \operatorname{Tr} T_{N_c}(\lambda')\} = \operatorname{Tr}\, \left\{T_{N_c}(\lambda) \overset{\otimes}{,} T_{N_c}(\lambda')\right\} = \\ = \operatorname{Tr}\, [r(\lambda - \lambda'), T_{N_c}(\lambda) \otimes T_{N_c}(\lambda')] = 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Для частного случая L-матриц (4.17) неоднородности цепочки λ_i сводятся к тривиальному сдвигу импульсов $p_i \to p_i - \lambda_i$.

Ниже мы рассмотрим возможные эллиптические деформации двух различных представлений Лакса цепочки Тоды. Деформация представления $N_c \times N_c$ приводит к модели Калоджеро — Мозера, в то время как деформация представления 2×2 — к XYZ-модели и алгебре Склянина.

В дополнение к уравнению спектральной кривой (4.13), (4.14), (4.15) и (4.22), чтобы определить цепочку Тоды, минимальный набор данных дается производящим 1-дифференциалом dS^{TC}. Свойства этого дифференциала будут подробно изучены в [90], заметим сейчас только, что $dS^{\mathrm{TC}} = \lambda \frac{dw}{w}$ в случае цепочки Тоды имеет, буквально, вид (4.4), где λ является гиперэллиптической координатой в представлениях (4.14) и (4.15). Периоды этого дифференциала

$$\boldsymbol{a} = \oint_{\boldsymbol{A}} dS^{\mathrm{TC}} = \oint_{\boldsymbol{A}} \lambda \frac{dw}{w}, \qquad \boldsymbol{a}_D = \oint_{\boldsymbol{B}} dS^{\mathrm{TC}} = \oint_{\boldsymbol{B}} \lambda \frac{dw}{w} \tag{4.24}$$

задают массивный БПС-спектр (4.6) и определяют препотенциал и эффективные константы связи (4.7) в низкоэнергетическом пределе $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамики — эффективной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории с (абелевой) калибровочной группой $U(1)^{\operatorname{rank} G}$.

4.2. Эллиптическая деформация представления $N_c \times N_c$: модель Калоджеро — Мозера и взаимодействие с присоединенной материей. $N_c \times N_c$ матричный оператор Лакса для $GL(N_c)$-системы Калоджеро, явно зависящий от спектрального параметра, имеет вид [123]

$$\mathcal{L}^{\mathrm{Cal}}(\xi) = \left(\boldsymbol{p}H + \sum_{\boldsymbol{\alpha}} F(\boldsymbol{q}\boldsymbol{\alpha}|\xi) E_{\boldsymbol{\alpha}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 & F(q_1 - q_2|\xi) & \dots & F(q_1 - q_{N_c}|\xi) \\ F(q_2 - q_1|\xi) & p_2 & \dots & F(q_2 - q_{N_c}|\xi) \\ & & \dots & \\ F(q_{N_c} - q_1|\xi) & F(q_{N_c} - q_2|\xi) & \dots & p_{N_c} \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Его матричные элементы $F(q|\xi) = \frac{g}{\omega}\frac{\sigma(q+\xi)}{\sigma(q)\sigma(\xi)}\,\mathrm{e}^{\zeta(q)\xi}$ выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса, т.е. оператор Лакса $\mathcal{L}(\xi)$ определен на эллиптической кривой $E(\tau)$ (комплексном торе с периодами ω, ω' и модулем $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$). Константа взаимодействия в системе Калоджеро $\frac{g^2}{\omega^2} \sim m^2$, с точки зрения $4D$-интерпретации выражается через массу m присоединенного $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплета, нарушающего $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию до $\mathcal{N} = 2$ [69].

Из (4.25) сразу следует, что спектральная кривая Σ^{Cal} для $GL(N_c)$ системы Калоджеро имеет вид

$$\det_{N_c\times N_c}\left(\mathcal{L}^{\mathrm{Cal}}(\xi) - \lambda\right) = 0, \tag{4.26}$$

а массы БПС-состояний (4.6) ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_D$) задаются периодами производящего 1-дифференциала

$$dS^{\mathrm{Cal}} \cong \lambda d\xi \tag{4.27}$$

по нестягиваемым контурам на Σ^{Cal}. Интегрируемость модели Калоджеро — Мозера может быть описана на языке пуассоновской структуры

$$\left\{\mathcal{L}(\xi) \overset{\otimes}{,} \mathcal{L}(\xi')\right\} = \left[\mathcal{R}^{\mathrm{Cal}}_{12}(\xi,\xi'),\ \mathcal{L}(\xi)\otimes\mathbf{1}\right] - \left[\mathcal{R}^{\mathrm{Cal}}_{21}(\xi,\xi'),\ \mathbf{1}\otimes\mathcal{L}(\xi')\right], \tag{4.28}$$

определяемой *динамической* эллиптической $\mathcal{R}$-матрицей [124], обеспечивающей инволюцию собственных значений матрицы $\mathcal{L}$.

Периодическая цепочка Тоды получается из эллиптической модели Калоджеро в специальном двойном скейлинговом пределе [125], когда $g \sim m \to \infty$, $-i\tau \to \infty$, а $q_i - q_j = \frac{1}{2}\left[(i-j)\log g + (\phi_i - \phi_j)\right]$, так что безразмерная константа связи τ переходит в размерный параметр $\Lambda^{N_c} \sim m^{N_c}\mathrm{e}^{i\pi\tau}$. В этом пределе эллиптическая кривая $E(\tau)$ вырождается в цилиндр с координатой $w = \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{e}^{i\pi\tau}$, а производящий 1-дифференциал $dS^{\mathrm{Cal}} \to dS^{\mathrm{TC}} \cong \lambda\frac{dw}{w}$ в производящий дифференциал цепочки Тоды. Оператор Лакса системы Калоджеро переходит в оператор Лакса (4.11): $\mathcal{L}^{\mathrm{Cal}}(\xi)d\xi \to \mathcal{L}^{\mathrm{TC}}(w)\frac{dw}{w}$, а спектральная кривая приобретает форму (4.13). В отличие от цепочки Тоды, формула (4.26) *не может* быть переписана в виде (4.14), т.е. специфическая зависимость от w спектрального уравнения (4.13) не сохраняется при вложении цепочки Тоды в систему частиц Калоджеро — Мозера. Однако форма (4.14) естественным образом сохраняется при интерпретации цепочки Тоды как частного случая спиновых моделей.

Для описания другой "эллиптической деформации" ниже будет использована нестандартная нормировка $\wp$-функции Вейерштрасса:

$$\wp(\xi|\tau) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi+m+n\tau)^2} - {\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}}'\frac{1}{(m+n\tau)^2}, \tag{4.29}$$

двоякопериодической по ξ функции с периодами 1 и $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ (это отличается от стандартного определения фактором ω^{-2} и переопределением $\xi \to \omega\xi$). Согласно (4.29) значения $\wp(\xi|\tau)$ в полупериодах, $e_a = e_a(\tau)$, $a = 1, 2, 3$, являются функциями только модулярного параметра τ, также отличаясь множителем ω^{-2} от стандартного определения. Комплексный тор $E(\tau)$ может быть представлен как фактор $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{Z} \oplus \tau\boldsymbol{Z}$ с "плоской" координатой ξ, определенной по модулю $(1, \tau)$. Кроме того, тор (с отмеченной точкой) может быть задан эллиптической кривой

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad x = \wp(\xi), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi), \quad d\xi = \frac{dx}{2y}. \tag{4.30}$$

Существуют три интересных вырождения эллиптической картины.

Рациональный предел: оба периода $\omega, \omega' \to \infty$, ξ переопределяется как $\xi = \omega^{-1}\zeta$ при конечном $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ и ζ. Тогда

$$x = \wp(\xi) = \frac{\omega^2}{\zeta^2}(1 + o(\omega^{-1})), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi) = -\frac{\omega^3}{\zeta^3}(1 + o(\omega^{-1})). \tag{4.31}$$

В двух других пределах $\tau \to +i\infty$, т.е. $q = \mathrm{e}^{i\pi\tau} \to 0$.

Тригонометрический предел: ξ конечно при $q \to 0$,

$$x = \wp(\xi) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sin^2 \pi\xi} + o(q), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi) = -\pi\frac{\cos \pi\xi}{\sin^3 \pi\xi} + o(q). \tag{4.32}$$

Двойной скейлинговый предел: $\xi = \log(qw)$, точки ветвления

$$e_{1,2} \to -\frac{1}{3} \pm 8q + o(q^2), \qquad e_3 \to +\frac{2}{3} + o(q^2), \tag{4.33}$$

кроме того,

$$x = \wp(\xi) = -\frac{1}{3} + 4q(w + w^{-1}) + o(q^2), \quad y = \frac{1}{2}\wp'(\xi) = 4q(w - w^{-1}) + o(q^2), \tag{4.34}$$

так что $d\xi = \frac{dw}{w}(1 + \mathcal{O}(q))$. В простейшем примере $N_c = 2$ у кривой Σ^{Cal} род 2. Действительно, в этом частном случае (4.26) превращается в выражение

$$\mathcal{P}(\lambda, x) = \lambda^2 - h_2 + \frac{g^2}{\omega^2}x = \lambda^2 - h_2 + \frac{g^2}{\omega^2}\wp(\xi) = 0, \tag{4.35}$$

устанавливающее, что каждому значению x отвечают две точки на кривой Σ^{Cal}, $\lambda = \pm\sqrt{h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}x}$, т.е. задает Σ^{cal} как двойное накрытие эллиптической кривой $E(\tau)$ с точками ветвления $x = \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2$ и $x = \infty$. На самом деле, так как сама координата x является эллиптической на $E(\tau)$ (когда эллиптическая кривая рассматривается как двойное накрытие сферы CP^1), $x = \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2$ отвечает *паре* точек на $E(\tau)$, различаемых знаком y. Это было бы верно и для $x = \infty$, но $x = \infty$ — одна из точек ветвления в параметризации (4.30) кривой $E(\tau)$. Таким образом, *два* разреза между $x = \left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2$ и $x = \infty$ на каждом из листов $E(\tau)$ эффективно сливаются в *единственный* между точками $\left(\left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2, +\right)$ и $\left(\left(\frac{\omega}{g}\right)^2 h_2, -\right)$. Поэтому кривую $\Sigma^{\rm Cal}$ можно рассматривать как два тора $E(\tau)$, склеенные вдоль одного разреза, т.е. $\Sigma^{\rm Cal}_{N_c=2}$ является кривой рода 2.

Аналитически кривая $\Sigma^{\rm Cal}$ для $N_c = 2$ задается системой уравнений (4.30), (4.35), и, случайно, эта кривая опять оказывается гиперэллиптической (только для $N_c = 2!$), после подстановки x из (4.35) в (4.30).

В качестве двух голоморфных 1-дифференциалов на $\Sigma^{\rm Cal}$ можно выбрать

$$v = \frac{dx}{y} \sim \frac{\lambda d\lambda}{y}, \qquad V = \frac{dx}{y\lambda} \sim \frac{d\lambda}{y}, \tag{4.36}$$

так что

$$dS \cong \lambda d\xi = \sqrt{h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}\wp(\xi)}\, d\xi = \frac{dx}{y}\sqrt{h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}\, x}. \tag{4.37}$$

Легко проверить, что $\frac{\partial dS}{\partial h_2} \cong \frac{1}{2}\frac{dx}{y\lambda}$. Наличие лишь одного из двух голоморфных дифференциалов (4.36) в правой части связано с их различной четностью относительно $\boldsymbol{Z}_2 \otimes \boldsymbol{Z}_2$ симметрии $\Sigma^{\rm Cal}$: $y \to -y$ и $\lambda \to -\lambda$. Так как dS имеет определенную четность, его периоды вдоль двух из четырех элементарных циклов на $\Sigma^{\rm Cal}$ автоматически равны нулю, оставляя лишь два нетривиальных периода a и a_D, что в точности отвечает двум независимым переменным в четырехмерной интерпретации. Более того, два ненулевых периода могут быть определены в терминах "редуцированной" кривой рода 1: $Y^2 = (y\lambda)^2 = \left(h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}x\right)\prod\limits_{a=1}^{3}(x - e_a)$, на которой $dS \cong \left(h_2 - \frac{g^2}{\omega^2}x\right)\frac{dx}{Y}$. Так как для нее $x = \infty$ уже не является точкой ветвления, dS имеет простые полюса в $x = \infty$ (на двух разных листах $\Sigma^{\rm Cal}_{\rm reduced}$) с вычетами $\pm\frac{g}{\omega} \sim \pm m$.

В "противоположном" пределе системы Калоджеро — Мозера $g^2 \sim m^2 \to 0$, что отвечает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга — Миллса с тождественно нулевой β-функцией. Соответствующая интегрируемая система представляет собой систему *свободных* частиц, а производящий 1-дифференциал $dS \cong \sqrt{h_2} \cdot d\xi$ является просто *голоморфным* дифференциалом на (N_c копиях) $E(\tau)$.

4.3. От Тоды к спиновым цепочкам и суперсимметричной КХД: случай $N_f < 2N_c$ и XXX-спиновые модели. Перейдем теперь к другой деформации цепочки Тоды, отвечающей включению взаимодействия с $\mathcal{N}=2$ гипермультиплетами материи в фундаментальном представлении калибровочной группы — $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной КХД. Согласно [42, 76], спектральные кривые для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной КХД при $N_f < 2N_c$ имеют ту же структуру, что и (4.10) с менее тривиальной матрицей монодромии, удовлетворяющей условиям

$$\mathrm{Tr}\ T_{N_c}(\lambda) = 2P_{N_c}(\lambda) + R_{N_c-1}(\lambda), \qquad \det T_{N_c}(\lambda) = Q_{N_f}(\lambda), \tag{4.38}$$

где $Q_{N_f}(\lambda)$ и $R_{N_c-1}(\lambda)$ — некоторые *не зависящие от* h полиномы по λ (напомним, что для цепочки Тоды с матрицей Лакса (4.17) $\det_{2\times 2} T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{N_c} \det_{2\times 2} L^{\mathrm{TC}}_i(\lambda - \lambda_i) = 1$ и $\mathrm{Tr}\ T^{\mathrm{TC}}_{N_c}(\lambda) = P_{N_c}(\lambda)$). Две формулировки (4.13) и (4.21) эквивалентны для цепочки Тоды, но их *деформации* уже различны: представление в виде "цепочки" 2×2 матриц (4.21), (4.22) естественным образом обобщается на случай семейства XYZ спиновых моделей [54, 55].

Общая идея деформации представления матрицами 2×2 заключается в модификации уравнений (4.18) — (4.23) при сохранении скобок Пуассона

$$\left\{L(\lambda) \overset{\otimes}{,} L(\lambda')\right\} = \left[r(\lambda-\lambda'),\ L(\lambda)\otimes L(\lambda')\right],$$

$$\left\{T_{N_c}(\lambda) \overset{\otimes}{,} T_{N_c}(\lambda')\right\} = \left[r(\lambda-\lambda'),\ T_{N_c}(\lambda)\otimes T_{N_c}(\lambda')\right], \tag{4.39}$$

и, тем самым, возможности построения матрицы монодромии $T(\lambda)$ путем перемножения матриц $L_i(\lambda)$ по всем узлам. Уравнение спектральной кривой для периодической неоднородной спиновой цепочки приобретает вид

$$\det\left(T_{N_c}(\lambda) - w\right) = 0 \tag{4.40}$$

с T-матрицей $T_{N_c}(\lambda) = \prod\limits_{i=N_c}^{1} L_i(\lambda-\lambda_i)$, по-прежнему удовлетворяющей (4.39). Для $sl(2)$-цепочек спектральные уравнения выписываются более явно:

$$w + \frac{\det_{2\times 2} T_{N_c}(\lambda)}{w} = \mathrm{Tr}_{\,2\times 2}\, T_{N_c}(\lambda), \tag{4.41}$$

или

$$W + \frac{1}{W} = \frac{\mathrm{Tr}_{\,2\times 2} T_{N_c}(\lambda)}{\sqrt{\det_{2\times 2}\ T_{N_c}(\lambda)}}, \tag{4.42}$$

а производящий 1-дифференциал теперь $dS = \lambda \frac{dW}{W}$, $W = \frac{w}{\sqrt{\det T_{N_c}(\lambda)}}$. Как и ранее, уравнения содержат динамические переменные спиновой системы только в виде специальных комбинаций — интегралов движения и инвариантов. Именно специальная форма этих уравнений (квадратичная зависимость от параметров w и W) [74] позволяет идентифицировать периодические спиновые цепочки с решениями задачи Виттена — Зайберга с фундаментальной материей.

Матрица Лакса 2×2 для $sl(2)$ XXX-цепочки имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda \cdot \mathbf{1} + \sum_{a=1}^{3} S_a \cdot \sigma^a. \tag{4.43}$$

Скобки Пуассона динамических переменных S_a, $a = 1, 2, 3$ (принимающих значения в алгебре функций) следуют из соотношения (4.39) с рациональной r-матрицей

$$r(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{a=1}^{3} \sigma^a \otimes \sigma^a \tag{4.44}$$

и (в случае $sl(2)$) превращаются в

$$\{S_a, S_b\} = i\epsilon_{abc} S_c, \tag{4.45}$$

т.е. $\{S_a\}$ имеют смысл момента количества движения (“или классического спина”). В алгебре (4.45) имеются операторы Казимира (т.е. инвариантные и имеющие нулевую скобку Пуассона со всеми генераторами S_a) $K^2 = \boldsymbol{S}^2 = \sum\limits_{a=1}^{3} S_a S_a$, так что

$$\det_{2\times 2} L(\lambda) = \lambda^2 - K^2, \ \det_{2\times 2} T_{N_c}(\lambda) = \prod_{i=1}^{N_c} \det_{2\times 2} L_i(\lambda - \lambda_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N_c} \left((\lambda - \lambda_i)^2 - K_i^2 \right) = \prod_{i=1}^{N_c} (\lambda + m_i^+)(\lambda + m_i^-) = Q_{2N_c}(\lambda), \tag{4.46}$$

где имеется в виду, что значения спина K могут отличаться в различных узлах цепочки и*

$$m_i^{\pm} = -\lambda_i \mp K_i. \tag{4.47}$$

В то время как детерминант (4.46) зависит лишь от инвариантов Казимира K_i пуассоновской алгебры, след матрицы монодромии $\mathcal{T}_{N_c}(\lambda) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\,2\times 2}\, T_{N_c}(\lambda)$ не является инвариантом, а, как обычно в интегрируемых системах, зависит от переменных $S_a^{(i)}$ только через интегралы движения, которые, в отличие от казимиров, коммутируют только друг с другом.

*Формула (4.47) демонстрирует, что в пределе нулевых масс $m_i^{\pm} = 0$ цепочка становится *однородной* (все $\lambda_i = 0$) и с нулевыми спинами в каждом узле (все $K_i = 0$).

Для того чтобы получить ясное представление о гамильтонианах, ниже будут разобраны явные примеры матриц монодромии для $N_c = 2$ и $N_c = 3$. Интегралы движения нетривиально зависят от неоднородностей цепочки λ_i, а коэффициенты спектрального уравнения (4.40) зависят только от интегралов движения и симметрических функций массовых параметров m (4.47). Это свойство существенно для отождествления параметров m с массами гипермультиплетов материи в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД. Явные примеры $N_c = 2, 3$ были разобраны в [77].

4.4. $\mathbf{N}_f$ = $\mathbf{2N}_c$: спиновые цепочки общего вида и алгебра Склянина. Приведенная выше конструкция не может быть, однако, законченной без изучения наименее исследованного "эллиптического" случая $N_f = 2N_c$, когда $4D$-теория является ультрафиолетово-конечной (по крайней мере, при определенных значениях модулей) и обладает дополнительным *безразмерным* параметром — UV неабелевой константой связи $\tau = \frac{8\pi i}{\mathrm{e}^2} + \frac{\theta}{\pi}$.

Наиболее общая теория такого вида известна — это XYZ спиновая цепочка, в которой элементарная L-матрица определена на эллиптической кривой $E(\tau)$ и имеет вид [54, 55, 126]:

$$L^{\mathrm{Skl}}(\xi) = S^0\mathbf{1} + i\sum_{a=1}^{3} W_a(\xi) S^a \sigma_a, \tag{4.48}$$

где

$$W_a(\xi) = \sqrt{e_a - \wp\,(\xi|\tau)} = i\,\frac{\theta'_{11}(0)\theta_{a+1}\,(\xi)}{\theta_{a+1}(0)\theta_{11}\,(\xi)}. \tag{4.49}$$

Матрица Лакса (4.48) удовлетворяет скобке Пуассона (4.18) с числовой *эллиптической* r-матрицей

$$r(\xi) = i\frac{g}{\omega}\sum_{a=1}^{3} W_a(\xi)\sigma_a \otimes \sigma_a,$$

откуда следует, что S^0, S^a образуют (классическую) алгебру Склянина [55, 126]:

$$\left\{S^a, S^0\right\} = 2i\left(e_b - e_c\right) S^b S^c, \qquad \left\{S^a, S^b\right\} = 2iS^0 S^c \tag{4.50}$$

с естественным обозначением: abc является тройкой 123 или ее циклической перестановкой.

Соответственно с рассмотренными выше предельными случаями (вырождениями) эллиптической кривой (4.31) — (4.34) можно рассматривать три интересных вырождения алгебры Склянина.

Рациональный предел. Оба периода $\omega, \omega' \to \infty$, тогда (4.50) превращается в

$$\{S^a, S^0\} = 0, \qquad \{S^a, S^b\} = 2i\epsilon^{abc} S^0 S^c, \tag{4.51}$$

т.е. генератор S^0 превращается в оператор Казимира (константу, например, $\frac{1}{2}$), а остальные S^a образуют алгебру классических спинов (4.45). Соответствующая матрица Лакса (4.43) $L \equiv \lambda L_{XXX} = \lambda \mathbf{1} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ описывает XXX спиновую модель с рациональной r-матрицей (4.44).

Тригонометрический предел. При $\tau \to +i\infty$, а $q \to 0$, алгебра Склянина (4.50) переходит в

$$\begin{aligned}
\{\hat S^3, \hat S^0\} &= 32iq\hat S^1\hat S^2 + \mathcal{O}(q) \to 0, & \{\hat S^1, \hat S^0\} &= -2i\hat S^2\hat S^3 + \mathcal{O}(q),\\
\{\hat S^2, \hat S^0\} &= 2i\hat S^3\hat S^1 + \mathcal{O}(q), & \{\hat S^1, \hat S^2\} &= 2i\hat S^0\hat S^3 + \mathcal{O}(q),\\
\{\hat S^1, \hat S^3\} &= -2i\hat S^0\hat S^2 + \mathcal{O}(q), & \{\hat S^2, \hat S^3\} &= 2i\hat S^0\hat S^1 + \mathcal{O}(q).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Соответствующая матрица Лакса есть

$$L_{XXZ} = \hat S^0\mathbf{1} - \frac{1}{\sin\pi\xi}\left(\hat S^1\sigma_1 + \hat S^2\sigma_2 + \cos\pi\xi\hat S^3\sigma_3\right), \tag{4.53}$$

а r-матрица

$$r(\xi) = \frac{i}{\sin\pi\xi}\left(\sigma_1\otimes\sigma_1 + \sigma_2\otimes\sigma_2 + \cos\pi\xi\sigma_3\otimes\sigma_3\right). \tag{4.54}$$

Двойной скейлинговый предел. Используя (4.33) и (4.34), находим

$$\sqrt{e_{1,2} - \wp(\xi)} = 2\sqrt{q}\left(\sqrt{w} \pm \frac{1}{\sqrt{w}}\right) + \mathcal{O}(q), \quad \sqrt{e_3 - \wp(\xi)} = 1 + \mathcal{O}(q), \tag{4.55}$$

поэтому алгебра Склянина (4.50), после переопределения $\hat S^{1,2} = \frac{1}{4\sqrt{q}}\bar S^{1,2}$, принимает вид

$$\begin{aligned}
\{\bar S^2, \bar S^3\} &= 2i\bar S^0\bar S^1 + \mathcal{O}(q), & \{\bar S^1, \bar S^0\} &= -2i\bar S^2\bar S^3 + \mathcal{O}(q),\\
\{\bar S^2, \bar S^0\} &= 2i\bar S^3\bar S^1 + \mathcal{O}(q), & \{\bar S^1, \bar S^2\} &= 32iq\bar S^0\bar S^3 + \mathcal{O}(q) \to 0,\\
\{\bar S^1, \bar S^3\} &= -2i\bar S^0\bar S^2 + \mathcal{O}(q), & \{\bar S^3, \bar S^0\} &= 2i\bar S^1\bar S^2,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

с матрицей Лакса

$$L_{ds} = \bar S^0\mathbf{1} + i\bar S^3\sigma_3 + \frac{i}{2}\left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)\bar S^1\sigma_1 + \frac{i}{2}\left(\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}\right)\bar S^2\sigma_2. \tag{4.57}$$

Легко заметить, что (4.53) и (4.57) практически совпадают. В частности, матрица Лакса (4.57) удовлетворяет квадратичным пуассоновским соотношениям (4.18) с тригонометрической r-матрицей (4.54). Действительно, эти две матрицы Лакса связаны простым преобразованием $L_{ds} = -\sin(\pi\xi\sigma_2)\, L_{XXZ}$, где w отождествляется с $\mathrm{e}^{2i\xi}$, а $\bar{S}^0$, $\bar{S}^1$, $\bar{S}^2$, $\bar{S}^3$ с $\hat{S}^2$, $\hat{S}^3$, $\hat{S}^0$, $\hat{S}^1$ соответственно. Заметим также, что матрица (4.57) является L-матрицей решеточной модели синус-Гордона.

Детерминант

$$\det_{2\times 2} \hat{L}(\xi) = \hat{S}_0^2 + \sum_{a=1}^{3} e_a \hat{S}_a^2 - \wp(\xi) \sum_{a=1}^{3} \hat{S}_a^2 = K - M^2\wp(\xi) = K - M^2 x, \quad (4.58)$$

где

$$K = \hat{S}_0^2 + \sum_{a=1}^{3} e_a(\tau)\hat{S}_a^2, \qquad M^2 = \sum_{a=1}^{3} \hat{S}_a^2 \quad (4.59)$$

— операторы Казимира алгебры Склянина (пуассоново-коммутирующие со всеми генераторами $\hat{S}^0$, $\hat{S}^1$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}^3$). Детерминант матрицы монодромии (4.19), в свою очередь, равен

$$Q(\xi) = \det_{2\times 2} T_{N_c}(\xi) = \prod_{i=1}^{N_c} \det_{2\times 2} \hat{L}(\xi - \xi_i) = \prod_{i=1}^{N_c} \left(K_i - M_i^2 \wp(\xi - \xi_i)\right), \quad (4.60)$$

а ее след $P(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi)$ генерирует интегралы движения, так как по-прежнему

$$\{\mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi),\ \mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi')\} = 0. \quad (4.61)$$

Например, в случае *однородной* цепочки (все $\xi_i = 0$ в (4.60)) $\mathrm{Tr}\, T_{N_c}(\xi)$ является комбинацией полиномов $P(\xi) = \mathrm{Pol}^{(1)}_{\left[\frac{N_c}{2}\right]}(x) + y\mathrm{Pol}^{(2)}_{\left[\frac{N_c-3}{2}\right]}(x)$, где $\left[\frac{N_c}{2}\right]$ — целая часть $\frac{N_c}{2}$, а коэффициенты $\mathrm{Pol}^{(1)}$ и $\mathrm{Pol}^{(2)}$ — интегралы движения XYZ-модели *. В результате спектральное уравнение (4.42) для XYZ-цепочки принимает вид

$$w + \frac{Q(\xi)}{w} = 2P(\xi), \quad (4.62)$$

где для однородной цепочки P и Q — полиномы по $x = \wp(\xi)$ и $y = \frac{1}{2}\wp'(\xi)$. Уравнение (4.62) описывает двойное накрытие эллиптической кривой $E(\tau)$:

---

*Для неоднородной цепочки явное выражение для следа устроено более сложно, его можно упростить с помощью формул типа

$$\wp(\xi - \xi_i) = \left(\frac{\wp'(\xi) + \wp'(\xi_i)}{\wp(\xi) - \wp(\xi_i)}\right)^2 - \wp(\xi) - \wp(\xi_i) = 4\left(\frac{y + y_i}{x - x_i}\right)^2 - x - x_i.$$

каждой точке общего положения $\xi \in E(\tau)$ соответствуют две точки на Σ^{XYZ}, отвечающие двум корням $w_\pm$ уравнения (4.62). Точками ветвления являются $w_+ = w_- = \pm\sqrt{Q}$ или $Y = \frac{1}{2}\left(w - \frac{Q}{w}\right) = \sqrt{P^2 - Q} = 0$.

Кривая (4.62) похожа на спектральную кривую $N_c = 2$ модели Калоджеро — Мозера (4.35), однако существенное различие заключается в том, что теперь $x = \infty$ уже *не* является точкой ветвления, поэтому полное число разрезов на обеих копиях $E(\tau)$ — N_c, а род спектральной кривой — $N_c + 1$.

Аналитически Σ^{XYZ} можно описать системой уравнений

$$y^2 = \prod_{a=1}^{3}(x - e_a), \qquad Y^2 = P^2 - Q, \tag{4.63}$$

а набор голоморфных 1-дифференциалов на Σ^{XYZ} можно выбрать в виде

$$v = \frac{dx}{y}, \quad V_\alpha = \frac{x^\alpha dx}{yY}, \quad \alpha = 0, \ldots, \left[\frac{N_c}{2}\right],$$

$$\tilde{V}_\beta = \frac{x^\beta dx}{Y}, \quad \beta = 0, \ldots, \left[\frac{N_c - 3}{2}\right]. \tag{4.64}$$

Полное число этих дифференциалов $1 + \left(\left[\frac{N_c}{2}\right] + 1\right) + \left(\left[\frac{N_c - 3}{2}\right] + 1\right) = N_c + 1$ равно роду Σ^{XYZ}.

Наконец, имея спектральную кривую, можно попытаться написать производящий 1-дифференциал dS, обладающий определяющим свойством (4.5). Для цепочки Тоды существуют два возможных выбора:

$$d\Sigma^{\mathrm{TC}} \cong d\lambda \log w, \qquad dS^{\mathrm{TC}} \cong \lambda \frac{dw}{w}, \qquad d\Sigma^{\mathrm{TC}} = -dS^{\mathrm{TC}} + df^{\mathrm{TC}}. \tag{4.65}$$

Оба дифференциала $d\Sigma^{\mathrm{TC}}$ и dS^{TC} удовлетворяют условию (4.5), а функция f^{TC} определена так, что ее вариация $\delta f^{\mathrm{TC}} = \lambda \frac{\delta w}{w}$ является (мероморфной) однозначной функцией на Σ^{TC}.

В случае XXX-модели свойства производящего дифференциала по сравнению с (4.65) практически не меняются:

$$d\Sigma^{XXX} \cong d\lambda \log W, \qquad dS^{XXX} \cong \lambda \frac{dW}{W}, \qquad d\Sigma^{XXX} = -dS^{XXX} + df^{XXX}. \tag{4.66}$$

Для XYZ-модели (4.62) производящий(е) дифференциал(ы) dS^{XYZ} можно определить как

$$d\Sigma^{XYZ} \cong d\xi \log W, \qquad dS^{XYZ} \cong \xi \frac{dW}{W} = -d\Sigma^{XYZ} + d(\xi \log W). \tag{4.67}$$

Теперь при вариации по модулям (которые все содержатся в P)

$$\delta(d\Sigma^{XYZ}) \cong \frac{\delta W}{W} d\xi = \frac{\delta P(\xi)}{\sqrt{P(\xi)^2 - Q(\xi)}}\, d\xi = \frac{dx}{yY}\delta P, \qquad (4.68)$$

и, согласно (4.4), правая часть является *голоморфным* 1-дифференциалом на спектральной кривой (4.62).

Особенности $d\Sigma^{XYZ}$ расположены в точках $W = 0$ или $W = \infty$, т.е. в нулях $Q(\xi)$ или полюсах $P(\xi)$. В окрестности особых точек $d\Sigma^{XYZ}$ неоднозначен, т.е. при обходе вокруг особой точки приобретает добавку $2\pi i d\xi$. Разность между $d\Sigma$ и dS опять является полной производной, но ее вариация $\delta f^{XYZ} = \xi \frac{\delta W}{W}$ уже неоднозначна на кривой. В отличие от $d\Sigma^{XYZ}$, dS^{XYZ} имеет простые полюсы в $W = 0, \infty$ с вычетами $\xi|_{w=0,\infty}$, определенными по модулю $1, \tau$. Более того, сам дифференциал dS^{XYZ} неоднозначен: меняется на $(1, \tau) \times \frac{dW}{W}$ при обходе по нестягиваемым контурам на $E(\tau)$.

Таким образом, ни $d\Sigma^{XYZ}$, ни dS^{XYZ} не являются в буквальном смысле 1-формами Виттена — Зайберга, которые должны иметь хорошо определенные вычеты, отвечающие массам гипермультиплетов [42].

В простейшем примере $N_c = 2$ второе уравнение (4.63) имеет вид

$$Y^2 = P^2 - Q = (H_0 - H_2 x)^2 - (K_1 - M_1^2 x)(K_2 - M_2^2 x) \equiv A(x - x_1)(x - x_2) \qquad (4.69)$$

и представляет собой кривую рода $N_c + 1 = 3$, полученную склеиванием двух копий $E(\tau)$ вдоль двух разрезов: между $x = x_1$ и $x = x_2$ на каждом из листов $E(\tau)$. В формуле (4.69)

$$H_0 = \hat{S}_1^0 \hat{S}_2^0 + \sum_{a=1}^{3} e_a \hat{S}_1^a \hat{S}_2^a, \qquad H_2 = \sum_{a=1}^{3} \hat{S}_1^a \hat{S}_2^a \qquad (4.70)$$

и, сравнивая с (4.59), естественно считать, что $H_2 = M_1 M_2 \cos h$. Такое разделение зависимости от казимиров (M) и модулей (h) основано на рассмотрении различных пределов: конформного — все $M_i \to 0$ и "размерной трансмутации", когда $M_i \to \infty$ при $\tau \to +i\infty$.

Когда $\tau \to +i\infty$ или $q = \mathrm{e}^{i\pi\tau} \to 0$, точки ветвления e_1 и e_2 стремятся друг к другу: $e_1 - e_2 = 16q + \mathcal{O}(q^3)$ и правильными координатами на Σ^{XYZ} становятся $x = -\frac{1}{3} + q\check{x}$, $y = q\check{y}$. Тогда уравнение (4.30) для $E(\tau)$ превращается в $\check{y}^2 = \check{x}^2 - 1$ и описывает двойное накрытие CP^1, являющееся опять CP^1. Каноническая голоморфная 1-форма $d\xi = 2\frac{dx}{y}$ переходит в мероморфный дифференциал на CP^1 $2\frac{d\check{x}}{\check{y}} = 2\frac{d\check{x}}{\sqrt{\check{x}^2-1}} = 2\frac{dz}{z}$, где $\check{x} = z + z^{-1}$.

Двойной скейлинговый предел предполагает, что точки ветвления x_1 и x_2 также ведут себя специальным образом при $q \to 0$. Пусть $x_i = -\frac{1}{3} + q\check{x}_i$, тогда, переопределяя $Y = q\check{Y}$, для Σ^{XYZ} в двойном скейлинговом пределе получим $\check{y}^2 = \check{x}^2 - 1$, $\check{Y}^2 = A(\check{x} - \check{x}_1)(\check{x} - \check{x}_2)$. Эти уравнения описывают две копии CP^1, склеенные вдоль двух разрезов (между $\check{x} = \check{A}_1$ и $\check{x} = \check{A}_2$ на каждом из листов), т.е. эллиптическую кривую рода 1. Производящий 1-дифференциал

$$d\Sigma^{XYZ} \cong d\xi logW \to d\Sigma^{\mathrm{TC}} \cong \frac{dz}{z} \log W. \tag{4.71}$$

Для старших N_c мультискейлинговый предел может быть определен аналогично, т.е. считая, что спектральная кривая рода $N_c + 1$ — двойное накрытие $E(\tau)$ — вырождается в двойное накрытие CP^1 рода $N_c - 1$, ассоциируемое с цепочкой Тоды. Производящие дифференциалы $d\Sigma^{XYZ}$ и dS^{XYZ} также переходят в соответствующие 1-формы (4.65).

Таким образом, естественно предположить, что XYZ-цепочка, являющаяся эллиптическим обобщением XXX-цепочки, описывающей $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную КХД с $N_f < 2N_c$, может быть связана со случаем $N_f = 2N_c$ (см., например, [127], где эта теория рассмотрена более подробно в контексте многомерных обобщений решений Виттена — Зайберга).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном обзоре была сделана попытка объяснить, как интегрируемые системы типа иерархии КП или цепочки Тоды возникают при описании точных непертурбативных эффектов в теории струн (простейших моделях) и суперсимметричной калибровочной теории поля. Мы продемонстрировали, что подобно моделям непертурбативной двумерной квантовой и топологической гравитации в четырехмерной расширенно-суперсимметричной неабелевой калибровочной теории эффективное действие легких полей может быть задано (логарифмом) тау-функции хорошо известных интегрируемых систем уиземовского типа, связанных с цепочками Тоды.

Более конкретно БПС-спектр и низкоэнергетическое эффективное действие определяются в терминах вспомогательной римановой поверхности — спектральной поверхности интегрируемой системы (в случае двумерных моделей, рассмотренных подробно в первых двух разделах обзора, соответствующая спектральная поверхность является просто римановой комплексной сферой с отмеченными точками) и производящей 1-формы. Мы подробно рассмотрели римановы поверхности, возникающие при описании непертурбативного поведения в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной глюодинамике, а также в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД и теории с материей в присоединенном представлении — нарушенной до $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией полей Янга — Миллса, и связанные с этими поверхностями интегрируемые системы.

В работе [90] обсуждаются более тонкие вопросы формулировки суперсимметричных калибровочных теорий в терминах интегрируемых систем. Именно эти вопросы: свойства производящего дифференциала, явные уравнения (ассоциативности), которым удовлетворяет эффективное действие в случае "старших" калибровочных групп, а также связь точных решений Виттена — Зайберга и соответствующих им интегрируемых систем с общими идеями современной непертурбативной теории струн (М-теории), представляют наибольший интерес с точки зрения современной теории элементарных частиц.

Автор благодарен своему учителю В.Я.Файнбергу и своим соавторам А.А.Герасимову, А.С.Горскому, А.В.Забродину, И.М.Кричеверу, А.М.Левину, Ю.М.Макеенко, А.Д.Миронову, А.Ю.Морозову, М.А.Ольшанецкому, А.Ю.Орлову, В.Н.Рубцову и С.М.Харчеву, результаты работы с которыми легли в основу данного обзора, а также Я.Амбьорну, И.А.Баталину, Д.В.Булатову, А.И.Вайнштейну, Б.Л.Воронову, К.Вафе, А.В.Гуревичу, Б.А.Дубровину, Д.Р.Лебедеву, А.С.Лосеву, В.В.Лосякову, Н.А.Некрасову, С.П.Новикову, С.З.Пакуляку, И.В.Полюбину, А.А.Рослому, А.Саньотти, Н.А.Славнову, А.В.Смилге, М.А.Соловьеву, И.В.Тютину, Л.Д.Фаддееву, В.В.Фоку, Д.Фонгу, С.М.Хорошкину, Дж.Шварцу, Й.Шниттгеру, А.И.Юнгу за полезные обсуждения. Автор хотел бы особо поблагодарить А.П.Исаева за интересные обсуждения и предложение написать данный обзор.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №98-01-00344 и INTAS, 96-482.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поляков А.** — Калибровочные поля и струны. М., ИТФ им.Л.Д.Ландау, 1995.
2. **Polyakov A.** — Phys.Lett., 1975, v.B59 p.79;
   Белавин А., Поляков А. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.22, с.503.
3. **Belavin A., Polyakov A., Schwarz A., Tyupkin Yu.** — Phys.Lett. 1975, v.B59, p.85;
   t'Hooft G. — Phys.Rev., 1976, v.D14, p.3432;
   Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu. — Phys.Lett., 1978, v.A65, p.185.
4. **Jackiw R., Rebbi C.** — Phys.Rev.Lett., 1976, v.37, p.172;
   Callan C., Dashen R., Gross D. — Phys.Rev., 1979, v.D19, p.1826.
5. **Вайнштейн А., Захаров В., Новиков В., Шифман М.** — УФН, 1982, т.136, с.553; ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.472.
6. **Atiyah M., Ward R.** — Comm.Math.Phys., 1977, v.55, p.117;
   Atiyah M., Hitchin N., Singer I. — Proc.R.Soc.Lond., 1978, v.A362, p.425.
7. **Славнов А., Фаддеев Л.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
8. **Гольфанд Ю., Лихтман Е.** — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452;
   Волков Д., Акулов В. — Phys.Lett., 1973, v.46B, p.109;

Wess J., Zumino B. — Nucl.Phys., 1974, v.B70, p.39;
Огиевецкий В., Мезинческу Л. — УФН, 1975, т.117, с.637;
Ferrara S., Freedman D., van Nieuwenhuizen P. — Phys.Rev., 1976, v.D13, p.3214;
Deser S., Zumino B. -– Phys.Lett., 1976, v.62B, p.335.

9. **Шерк Дж.** — В сб.: Геометрические идеи в физике. М.: Мир, 1983.
10. **Veneziano G.** — Nuovo Cim., 1968, v.57A, p.190;
Nambu Y. — Proc.Int.Conf. on Symmetries and Quark Models. Wayne State Univ., Gordon and Beach, 1970, p.269;
Goto T. — Progr.Theor.Phys., 1971, v.46, p.1560.
11. **Sherk J., Schwarz J.** — Nucl.Phys., 1974, v.B81, p.118.
12. **Polyakov A.** — Phys.Lett., 1981, v.B103, p.207; 211.
13. **Белавин А. Книжник В.** — ЖЭТФ, 1986, т.91, с.364;
Книжник В. — УФН, 1989, т.32, с.401.
14. **Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.** — Теория суперструн, М.: Мир, 1990, т.1,2.
15. **Cremmer E., Ferrara S., Sherk J.** — Phys.Lett., 1978, v.74B, p.48.
16. **Font A., Ibañez L., Lust D., Quevedo F.** — Phys.Lett., 1990, v.249, p.35.
17. **Schwarz J.** — Lectures on Superstring and M Theory Dualities. hepth/9607201 and references therein.
18. **Dixon L.** — In: Proc.of the 1987 ICTP Summer Workshop in High Enegry Physics and Cosmology, World Scientific, 1988;
Lerche W., Vafa C., Warner N. — Nucl.Phys., 1989, v.B324, p.427.
19. **Polyakov A.** — Mod.Phys.Lett., 1987, v.A2, p.893;
Knizhnik V., Polyakov A., Zamolodchikov A. — Mod.Phys.Lett., 1988, v.A3, p.819.
20. **David F.** — Mod.Phys.Lett., 1988, v.A3, p.1651;
Distler J., Kawai H. — Nucl.Phys., 1989, v.B231, p.509.
21. **Alekseev A., Shatashvili S.** — Nucl.Phys., 1989, v.B323, p.719.
22. **Ambjørn J., Durhuus B., Frolich J.** — Nucl.Phys., 1985, v.B257[FS14], p.433;
David F. -– Nucl.Phys., 1985, v.B257[FS14], p.45;
Kazakov V. — Phys.Lett., 1985, v.150B, p.282;
Kazakov V., Kostov I., Migdal A. — Phys.Lett., 1985, v.157B, p.295.
23. **Kazakov V.** — Mod.Phys.Lett., 1989, v.A4, p.2125;
Brezin E., Kazakov V. — Phys.Lett., 1990, v.B236, p.144;
Douglas M., Shenker S. — Nucl.Phys., 1990, v.B335, p.635;
Gross D., Migdal A. — Phys.Rev.Lett., 1990, v.64, p.127.
24. **Douglas M.** — Phys.Lett., 1990, v.B238, p.176.
25. **Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.** — Int.J.Mod.Phys., 1991, v.A6, p.1385.
26. **Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E.** — Nucl.Phys., 1991, v.B348, p.435.
27. **Gerasimov A., Marshakov A., Mironov A. et al.** — Nucl.Phys., 1991, v.B357, p.565.
28. **Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Nucl.Phys., 1991, v.B356, p.574.
29. **Миронов А.** — Част. сооб. (готовится к печати).
30. **Ward J.** — Phys.Rev., 1950, v.77, p.2931;
Фрадкин Е. — ЖЭТФ, 1955, т.29, с.288;
Takahashi Y. — Nuovo Cim., 1957, v.6, p.370;
Славнов А. — Теор. и мат.физ., 1972, т.10, с.99; 1972, т.13, с.174;
Taylor J. — Nucl.Phys., 1971, v.B33, p.436.

31. **Witten E.** — Surv.Diff.Geom., 1991, v.1, p.243;
Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. — Nucl.Phys., 1991, v.B352, p.59.

32. **Witten E.** — Nucl.Phys., 1990, v.340, p.281;
Dijkgraaf R., Witten E. — Nucl.Phys., 1990, v.342, p.486.

33. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1992, v.B274, p.280.

34. **Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al.** — Nucl. Phys., 1992, v.B380, p.181.

35. **Лосев А.** — ТМФ, 1993, т.95, с.307;
Losev A., Polyubin I. — Int.J.Mod.Phys., 1995, v.A10, p.4161.

36. **Кричевер И.** — Функ. ан. и прилож., 1988, т.22, с.37; Comm.Math.Phys., 1991, v.143, p.415; Comm.Pure Appl.Math., 1994, v.47, p.437; hep-th/9205110.

37. **Dubrovin B.** — hepth/9407018.

38. **Becchi C., Rouet A., Stora R.** — Comm.Math.Phys., 1975, v.42, p.127;
Тютин И. — Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке, Препринт ФИАН №39, 1975.

39. **Batalin I., Vilkovysky G.** — Phys.Rev., 1983, v.D28, p.2567.

40. **Концевич М.** — Функ. ан. и прилож., 1991, т.25, с.50; Comm. Math.Phys. 1992, v.147, p.1.

41. **Seiberg N., Witten E.** — Nucl.Phys., 1994, v.B426, p.19.

42. **Seiberg N., Witten E.** — Nucl.Phys., 1994, v.B431, p.484.

43. **Gorsky A., Krichever I., Marshakov A. et al.** — Phys.Lett., 1995, v.B355, p.466.

44. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1996, v.B389, p.43.

45. **Marshakov A.** — hepth/9608161; Int.J.Mod.Phys., 1997, v.A12, p.1607.

46. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — hepth/9701123.

47. **Kachru S., Vafa C.** — hepth/9505105;
Ferrara S., Harvey J., Strominger A., Vafa C. — hepth/9505162;
Klemm A., Lerche W., Mayr P. et al. — hepth/9604034.

48. **Lipatov L.** — Pomeron in Quantum Chromodynamics, in Perturbative QCD, World Scientific, 1989, p.411; Phys.Lett., 1990, v.B251, p.284; 1993, v.B309, p.394; Письма в ЖЭТФ, 1994, т.59, с.596;
Faddeev L., Korchemsky G. — Phys.Lett., 1994, v.B342, p.311;
Korchemsky G. — Nucl.Phys., 1995, v.B443, p.255.

49. **Turaev V., Viro O.** — Topology, 1992, v.31, p.865.

50. **Кричевер И.** — Функ.ан. и прилож., 1977, т.11, с.15; УМН, 1977, т.32, с.180.

51. **Новиков С., Манаков С., Питаевский Л., Захаров В.** — Теория солитонов. М.: Наука, 1980.

52. **Дубровин Б.** — УМН, 1981, т.36, №2, 12.

53. **Дубровин Б., Кричевер И., Новиков С.** — Современные проблемы математики (ВИНИТИ), Динамические системы - 4, 1985, с.179.

54. **Тахтаджян Л., Фаддеев Л.** — Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

55. **Sklyanin E.** — J.Sov.Math., 1989, v.47, p.2473.

56. **Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.** — Preprint RIMS-358, 1981.

57. **Miwa T.** — In: Proc. of Japan Academy, 1982, v.A58, p.9.

58. **Sato M.** — RIMS Kokyuroku, 1981, v.439, p.30;
Sato M., Sato Y. — Lect.Not.Num.Appl.Anal., 1982, v.5, p.259.

59. **Segal G., Wilson G.** — Publ.I.H.E.S., 1985, v.61, p.1;
Прессли Э., Сигал Г. — Группы петель. М.: Мир, 1990.

60. **Orlov A., Schulman E.** — Lett.Math.Phys., 1986, v.12, p.171;
Grinevich P., Orlov A. — Cornell University Preprint, September, 1988;
Orlov A. — In: Proc. of Kiev International Workshop, 1987, World Scientific, 1988, p.116.

61. **Гуревич А., Питаевский Л.** — ЖЭТФ, 1973, т.65, с.590; Письма в ЖЭТФ, 1973, т.17, с.268; см. также [51].

62. **Дубровин Б., Новиков С.** — УМН, 1989, т.44, №6, с.29.

63. **Kac V., Schwarz A.** — Phys.Lett., 1991, v.B257, p.329;
Schwarz A. — Mod.Phys.Lett., 1991, v.A6, p.611; 1991, v.A6, p.2713.

64. **Маршаков А., Миронов А., Морозов А., Харчев С.** — ТМФ, 1993, т.95, с.280.

65. **Vafa C., Witten E.** — Nucl.Phys., 1994, v.B431, p.3.

66. **Smirnov F.** — Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory, Adv.Series in Math.Phys., 1992, v.14, World Scientific;
Its A., Izergin A., Korepin V., Slavnov N. — Phys.Rev.Lett., 1993, v.70, p.1704 and references therein;
Jimbo M., Miwa T. — Regional Conf.Series in Math., 1995, v.85;
Khoroshkin S., Lebedev D., Pakuliak S. — q-alg/9602030 and references therein.

67. **Fradkin E., Tseytlin A.** — Nucl.Phys., 1985, v.261, p.1.

68. **Klemm A., Lerche W., Theisen S., Yankielowicz S.** — Phys.Lett., 1995, v.344B, p.169;
Argyres P., Faraggi A. — Phys.Rev.Lett., 1995, v.73, p.3931.

69. **Donagi R., Witten E.** — hepth/9510101.

70. **Martinec E.** — hepth/9510204.

71. **Gorsky A., Marshakov A.** — Phys.Lett., 1996, v.B375, p.127.

72. **Martinec E., Warner N.** — hepth/9511052.

73. **Itoyama H., Morozov A.** — hepth/9511126/9512161/9601168.

74. **Marshakov A.** — Mod.Phys.Lett., 1996, v.A11, p.1169.

75. **Ann C., Nam S.** — hepth/9603028.

76. **Hanany A., Oz Y.** — hepth/9505075.

77. **Gorsky A., Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys. Lett., 1996, v.B380, p.75.

78. **Krichever I., Phong D.** — hepth/9604199.

79. **Gell-Mann M., Low F.** — Phys.Rev., 1954, v.95, p.1300;
Боголюбов Н., Ширков Д. — ДАН, 1955, т.103 с.203, 391; Nuovo Cim. 1956, v.3, p.845;
Овсянников Л. — ДАН, 1956, т.109, с.112;
Callan C. — Phys.Rev., 1970, v.D2, p.1542;
Symanzik H. — Comm.Math.Phys., 1970, v.18, p.227;
Боголюбов Н., Ширков Д. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984;
Владимиров А., Ширков Д. — УФН, 1979, т.129, с.407.

80. **Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A.** — Nucl.Phys., 1984, v.B241, p.333.

81. **Кац В.** — Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.

82. **Knizhnik V., Zamolodchikov A.** — Nucl.Phys., 1984, v.247, p.83.

83. **Friedan D., Martinec E., Shenker S.** — Nucl.Phys., 1986, v.B271, p.93.
84. **Фейгин Б., Фукс Д.** — Функ.ан. и прилож., 1982, т.16, с.47.
85. **Dotsenko Vl., Fateev V.** — Nucl.Phys., 1984, v.B240, p.312; 1985, v.251, p.691.
86. **Verlinde E., Verlinde H.** — Phys.Lett., 1987, v.B192, p.95.
87. **Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A. et al.** — Int. J. Mod. Phys., 1990, v.A5, p.2495.
88. **Distler J.** — Nucl.Phys, 1990, v.B342, p.523.
89. **Gerasimov A., Marshakov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1990, v.B242, p.345.
90. **Marshakov A.** — Seiberg — Witten Theory and Integrable Systems. World Scientific, 1999, 260pp.
91. **Fay J.** — Theta-Functions on Riemann Surfaces. Lect. Notes Math., Springer, N.Y., 1973, v.352.
92. **Мамфорд Д.** — Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
93. **Замолодчиков А.** — Теор.и мат.физ., 1985, т.63, с.347;
    Fateev V., Zamolodchikov A. — Nucl.Phys., 1987, v.B280[FS18], p.644.
94. **Fateev V., Lukyanov S.** — Int.J.Mod.Phys., 1988, v.A3, p.507; Препринты ИТФ АН УССР, ИТФ-88-74Р–76Р, Киев, 1988.
95. **Дринфельд В., Соколов В,** — Современные проблемы математики (ВИНИТИ), 1984, т.24.
96. **Hitchin N.** — Duke.Math.Journ., 1987, v.54, p.91;
    Hitchin N. — Comm.Math.Phys., 1990, v.131, p.347.
97. **Lebedev D., Manin Yu.** — Preprint ITEP, 1976.
98. **Ueno K., Takasaki K.** — Adv.Studies in Pure Math., 1984, v.4, p.1.
99. **Маршаков А., Морозов А.** — ЖЭТФ, 1990, т.97, с.721.
100. **Lian B., Zuckerman G.** — Phys.Lett., 1991, v.B254, p.417; 1991, v.B266, p.21;
    Bouwknegt P., McCarthy J., Pilch K. — Preprint CERN-TH-6196/91.
101. **Klebanov I., Polyakov A.** — Mod.Phys.Lett., 1991, v.A6, p.3273;
    Witten E. — Nucl.Phys., 1992, v.373, p.187.
102. **Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.** — Comm.Math.Phys., 1988, v.115, p.649;
    Ginsparg P. — Nucl.Phys., 1988, v.B295[FS21], p.153.
103. **Morozov A., Olshanetsky M.** — Nucl.Phys., 1988, v,B299, p.389.
104. **Морозов А., Рослый А.** — ЯФ, 1989, т.49, с.256;
    Cardy J. — Nucl.Phys., 1989, v.B324, p.581;
    Sagnotti A. — Preprint ROM2F-91/11 and references therein.
105. **Kac V.** — Lect.Notes in Physics, 1979, v.94, p.441; см.также [81]
106. **Желобенко Д.П., Штерн А.И.** — Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
107. **Thierry-Mieg J.** — Phys.Lett., 1987, v.B197, p.368.
108. **Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Phys.Lett., 1991, v.B265, p.99;
    Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al. — Nucl.Phys., 1993, v.B404, p.717.
109. **Mikhailov A.** — Int.J.Mod.Phys., 1994, v.A9, p.873.
110. **Itzyzson C., Zuber J.-B.** — J.Math.Phys., 1980, v.21, p.411;
    Mehta M. — Commun.Math.Phys., 1981, v.79, p.327.
111. **Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.** — Comm.Math.Phys., 1992, v.143, p.371.

112. **Kharchev S., Marshakov A.** — In: String Theory, Quantum Gravity and the Unification of Fundamental Interactions. World Scientific, 1993, p.331; Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10, p.1219.

113. **Shiota T.** — Invent.Math., 1986, v.83, p.333; см. также [92];
Takebe T. — Preprint RIMS-779, 1991.

114. **Takasaki K., Takebe T.** — Preprint RIMS-814, 1991; Preprint KUCP-0050/92.

115. **Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.** — Comm.Math.Phys., 1992, v.148, p.101.

116. **Harer J., Zagier D.** — Invent.Math., 1986, v.85, p.457;
Penner R. — Comm.Math.Phys., 1987, v.113, p.299; J.Diff.Geom., 1988, v.27, p.35;
Distler J., Vafa C. — Mod.Phys.Lett., 1991, v.A6, p.259.

117. **Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Morozov A.** — Nucl.Phys., 1993, v.B397, p.339.

118. **Marshakov A.** — In: Pathways to Fundamental Theories. World Scientific, 1993, p.251.

119. **Dijkgraaf R., Moore G., Plessner R.** — Preprint IASSNS-HEP-92/48, 1992.

120. **Gross D., Klebanov I.** — Nucl.Phys., 1990, v.B344, p.475.

121. **Krichever I.** — On Heisenberg Relations for the Ordinary Linear Differential Operators, Preprint ETH, 1990;
Новиков С. — Функ.ан. и прилож., 1990, т.24, с.43;
Moore G. — Comm.Math.Phys., 1990, v.133, p.261;
Schimmrigk R. — Phys.Rev.Lett., 1990, v.65, p.2483.

122. **Кричевер И.** — См. [52], приложение.

123. **Кричевер И.** — Функ.ан. и прилож., 1980, т.14, с.282.

124. **Sklyanin E.** — Alg.Anal., 1994, v.6, p.227;
Braden H., Suzuki T. — Lett.Math.Phys., 1994, v.30, p.147;
Enriquez B., Rubtsov V. — alg-geom/9503010;
Nekrasov N. — hepth/9503157;
Arutyunov G., Medvedev P. — hepth/9511070.

125. **Inozemtsev V.** — Comm.Math.Phys., 1989, v.121, p.629.

126. **Склянин Е.** — Функ.ан. и прилож., 1982, т.16, с.27; Функ.ан. и прилож., 1983, т.17, с.34.

127. **Marshakov A., Mironov A.** — Nucl. Phys., 1998, v.B518, p.59.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 514.7; 514.8

ПРОСТРАНСТВА С КОНТРАВАРИАНТНОЙ И КОВАРИАНТНОЙ АФФИННЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ И МЕТРИКАМИ

*С.Манов**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре детально рассмотрена возможность введения на дифференцируемом многообразии пары контравариантной и ковариантной аффинных связностей, различающихся не только знаком. Теория пространств с такими парами связностей детально разработана здесь в объеме, необходимом для построения кинематики векторных полей и лагранжевой теории тензорных полей в таких пространствах. Введены оператор ковариантного дифференцирования и дифференциальный оператор Ли. Исследуется их действие на тензорные поля. В пространствах с разными связностями рассмотрено действие девиационного оператора, играющего существенную роль для уравнений девиации в гравитационной физике. Введены понятия ковариантной и контравариантной метрик с соответствующими им проективными метриками. Определено действие ковариантного оператора дифференцирования и дифференциального оператора Ли на этих метриках. Дана классификация переносов и перемещений метрик. Рассмотрены разложения ковариантной производной от метрики на основные структуры, имеющие отношение к связностям. Введен расширенный ковариантный дифференциальный оператор. Исследованы изменения элементарного объема под действием ковариантного оператора дифференцирования и дифференциального оператора Ли. Введены ковариантный оператор дифференцирования и дифференциальный оператор Ли, не изменяющие элементарный объем. Рассмотрены инвариантные операторы Ли и ковариантные дифференциальные операторы, действующие как изоморфизмы на контравариантные и ковариантные тензорные плотности.

The theory of spaces with different contravariant and covariant affine connections, whose components differ not only by sign, and metrics [$(\overline{L}_n, g)$-spaces] is worked out within the framework of the tensor analysis over differentiable manifolds and in a volume necessary for the further considerations of the kinematics of vector fields and the Lagrangian theory of tensor fields over $(\overline{L}_n, g)$-spaces. The possibility of introducing affine connections, whose components differ not only by sign, for contravariant and covariant tensor fields over differentiable manifolds with finite dimensions is discussed. The action of the deviation operator, having an important role for deviation equations in gravitational physics, is considered for the case of contravariant and covariant vector fields over differentiable manifolds with different affine connections (called $\overline{L}_n$-spaces). A deviation identity for contravariant vector fields is obtained. The notions covariant, contravariant, covariant projective and contravariant projective metric are introduced in $(\overline{L}_n, g)$-spaces. The action of the covariant and the Lie differential operator on the different type of metrics is found. The notions of symmetric covariant and contravariant (Riemannian) connection are determined and presented by means of the covariant and contravariant metric and the corresponding torsion tensors. The different types of relative tensor fields

*Permanent address: Bulgarian Academy of Sciences, Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Department of Theoretical Physics, Blvd. Tzarigradsko Chaussee 72, 1784 Sofia, Bulgaria
E-mail address: smanov@inrne.bas.bg.

(tensor densities) as well as the invariant differential operators acting on them are considered. The invariant volume element and its properties under the action of different differential operators are investigated.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре рассматриваются дифференцируемые многообразия, на каждом из которых задана пара аффинных связностей. Одна из них относится к векторным (контравариантным векторным), а другая — к ковекторным (ковариантным векторным) полям, причем различаются эти связности не только знаком. Наряду со связностями на рассматриваемых многообразиях могут быть введены ковариантная и контравариантная метрики. Такие пространства обозначаются как $(\overline{L}_n, g)$-пространства и рассматриваются в качестве моделей пространства-времени. На основе дифференциально-геометрической структуры $(\overline{L}_n, g)$-пространств разработана кинематика векторных полей и динамика тензорных полей, полезные для математических моделей физических взаимодействий и, в частности, для описания гравитационного взаимодействия в современных теориях гравитации. Основные объекты в таких исследованиях можно расположить по следующей схеме.

Пространства с контравариантной и ковариантной
аффинными связностями и метриками
дифференциальные операторы,
ковариантный дифференциальный оператор,
дифференциальный оператор Ли,
оператор кривизны,
оператор девиации,
расширенный оператор,
аффинные связности, метрики,
специальные тензорные поля, тензорные плотности,
инвариантный элемент объема
|
Кинематические характеристики
контравариантных тензорных полей
относительная скорость *(скорость сдвига, вращения и расширения),*
относительное ускорение *(ускорение сдвига, вращения и расширения),*
уравнения девиации,
уравнения геодезических и автопараллельных линий,
переносы Ферми — Уолкера,
конформные переносы
|
Лагранжевы теории тензорных полей
лагранжева плотность,
вариационные методы,
уравнения Эйлера — Лагранжа,
тензоры энергии-импульса.

Здесь, однако, мы рассмотрим только вопросы из первой части вышеприведенной схемы, так что этот обзор является введением в теорию $(\overline{L}_n, g)$-пространств. В нем содержатся формулы, необходимые для развития механики тензорных полей и построения математических моделей динамических систем, которые описываются с помощью объектов, перечисленных в первой части схемы. Основные результаты, найденые для $(\overline{L}_n, g)$-пространств, могут быть специализированы для пространств с одной только связностью, но с ковариантной и контравариантной метриками. Такие пространства называют (L_n, g)-пространствами. Равным образом, их можно специализировать для (псевдо)римановых пространств как без кручения, так и с кручением (для V_n- и U_n-пространств). Большинство результатов записаны или в безындексной форме, или в координатном (голономном) или некоординатном (неголономном) базисах. Это сделано для того, чтобы читатель мог использовать эти результаты по своему усмотрению в той форме, которая ему понадобится в его собственных исследованиях. Главные выводы подытожены в последнем разделе.

$(\overline{L}_n, g)$-пространства имеют интересные свойства. Они могут быть использованы в теоретической физике вообще и в частности — в теории гравитации. В таких пространствах возможно введение несимметричной контравариантной аффинной связности для контравариантных тензорных полей и симметричной (Римана, Кристоффеля) для ковариантных тензорных полей. На этой основе мы можем рассматривать плоские пространства ($(\overline{M}_n, g)$-пространства) с кручением для векторных полей и без кручения для ковекторных полей. Аналогичным образом такие объекты связности можно ввести и в (псевдо)римановых пространствах ($(\overline{V}_n, g)$-пространствах).

1.1. Геометрия пространства-времени и дифференциальная геометрия. Дифференциальная геометрия развивалась в большой степени благодаря попыткам объяснить ее средствами разные типы физических взаимодействий. Созданная в начале 20-го века теория относительности основана на гипотезах ряда геометров о связи геометрии пространства-времени с физическими свойствами материальных систем (Лобачевский, Гаусс, Риман, Клиффорд). С другой стороны, она основана на гипотезах ряда физиков (Нордстрем, Эйнштейн, Фоккер и др.) о возможности описания физических систем с помощью дифференциальных геометрических структур [1–3].

Попытки развить и обобщить теорию относительности, а также установить ее связь с теориями негравитационных взаимодействий [1–3] базировались на использовании новых геометрических понятий и объектов (расслоенные пространства, неримановы геометрии [4,5], комплексные многообразия, неголономные базисы векторных и тензорных полей, пары метрик и связностей на многообразиях) [6–10]. Применялись различные методы с использованием новых дифференциальных геометрических структур на многообразиях (специальные векторные, тензорные, спинорные и другие поля). Проблемы, возникавшие при решении уравнений современных гравитационных теорий, способствовали открытию новых подходов к старым математическим моделям и привели к новым дифференциальным геометрическим методам [11, 12].

В течение последнего столетия математические модели пространства-времени эволюционировали от евклидовых и римановых до более сложных пространств с аффинными связностями и метриками [13–18]. На переходе от ньютоновской теории гравитации к эйнштейновской был сделан важный шаг к введению в теорию пространства-времени двух геометрических объектов — метрики и связности. Метрика определяет расстояние между двумя точками пространства-времени. Связность задает перенос геометрических объектов от одной точки пространства-времени к другой. В римановой геометрии связность определяется через метрику символами Кристоффеля. Этот факт, будучи основным в эйнштейновской теории гравитации (ЭТГ), явился основным и в других теориях гравитации, построенных в рамках римановой геометрии. Позднее теория гравитации развивалась в двух направлениях: в одном из них в пространстве-времени задаются две метрики (биметрическая теория гравитации) [19–21], в другом — задаются симметричная метрика и, независимо от нее, симметричная связность [22]. В последние годы вновь были сделаны попытки возродить идеи Вейля об использовании в теории гравитации симметричной метрики и, независимо от нее, несимметричной связности [15,23,24]. На многообразиях с такими объектами связность для ковекторных полей (дуальных к касательным векторным полям) отличается от связности для векторных (касательных) полей только знаком. Последний факт является следствием определения дуальных векторных базисов в дуальных векторных пространствах. При этом определение дуальности векторных базисов на многообразиях совпадает с алгебраическим определением их дуальности [25–28]. С одной стороны, вся современная дифференциальная геометрия построена как логически жесткая структура, одной из главных предпосылок которой является каноническое определение дуальных базисов в алгебраически дуальных векторных пространствах (с одинаковой размерностью) [10]. С другой стороны, возможность введения неканонического определения дуальных базисов в алгебраически дуальных векторных пространствах (с одинаковой конечной размерностью) была отмечена многими математиками [11], которые, однако, не использовали эту возможность для развития дифференциальных геометрических структур и их приложений. Каноническое определение дуальных базисов в алгебраически дуальных векторных пространствах так естественно входило в основания дифференциальной геометрии, что не замечалась возможность его изменения [12–15]. Но в последнее время при развитии математических моделей, описывающих гравитационное взаимодействие на классическом уровне, проявилась тенденция к использованию в теории гравитации пространств с метрикой и независимой от нее связностью. Заметим при этом, что геометрию таких пространств можно обобщить, прибегая к свободе выбора некоторых предпосылок в основаниях дифференциальной геометрии. Как было доказано, компоненты аффинной связности можно преобразовать к нулю как в отдельной точке, так и на наперед заданной кривой не только в римановых пространствах (где это обстоятельство связано с принципом эквивалентности в ЭТГ), но и в пространствах с одной аффинной связностью и метрикой, если подобрать специальный базис [18–20]. Последнее свойство аффинной связности означает, что принцип эквивалентности в ЭТГ можно рассматривать как физическую интерпретацию одного из следствий математического аппарата в ЭТГ. Следовательно, *каждое дифференцируемое многообразие с одной аффинной связностью и метрикой может быть использовано в качестве модели пространства-времени, причем принцип эквивалентности будет автоматически выполняться.* Но в $(\overline{L}_n, g)$-пространствах ситуация изменяется и в этом общем случае требуется дополнительное исследование.

Основные понятия дифференциальной геометрии — векторные, ковекторные и тензорные поля — определены в учебниках и специальных монографиях (см., например, [21–27]).

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДУАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОПЕРАТОР СВЕРТКИ

Понятие алгебраического дуального векторного пространства может быть введено подобно [7], где два векторных пространства (исходное и дуальное к нему векторное пространство) являются двумя независимыми векторными пространствами одинаковой (конечной) размерности. Пусть X и X^* — два векторных пространства с одинаковой размерностью $\dim X = \dim X^* = n$. Пусть S — оператор (отображение), ставящий каждой паре элементов $u \in X$ и $p \in X^*$ элемент поля K (R или C), то есть

$$S : (u, p) \to z \in K, \quad u \in X, \quad p \in X^*. \tag{1}$$

Дефиниция. *Оператор (отображение)* S называется *оператором свертки* S, если он является билинейным симметричным отображением, то есть если выполняются следующие условия:

a) $S(u, p_1 + p_2) = S(u, p_1) + S(u, p_2)$, $\forall u \in X$, $\forall p_i \in X^*$, $i = 1, 2$;

b) $S(u_1 + u_2, p) = S(u_1, p) + S(u_2, p)$, $\forall u_i \in X$, $i = 1, 2$, $\forall p \in X^*$;

c) $S(\alpha u, p) = S(u, \alpha p) = \alpha S(u, p)$, $\alpha \in K$;

d) невырожденность: если $u_1, ..., u_n$ являются линейно независимыми элементами в X и $S(u_1, p) = 0$, ..., $S(u_n, p) = 0$, то p является нулевым элементом в X^*. Аналогично, если $p_1, ..., p_n$ являются линейно независимыми элементами в X^* и $S(u, p_1) = 0$, ... , $S(u, p_n) = 0$, то u является нулевым элементом в X;

e) симметричность: $S(u,p) = S(p,u)$, $\forall u \in X$, $\forall p \in X^*$.

Пусть $e_1, ..., e_n$ — произвольный базис в X, и пусть $e^1, ..., e^n$ — произвольный базис в X^*. Пусть $u = u^i e_i \in X$ и $p = p_k e^k \in X^*$. При этом из свойств (a) — (c) следует, что

$$S(u,p) = f^k{}_i . u^i . p_k, \tag{2}$$

где

$$f^k{}_i = S(e_i, e^k) = S(e^k, e_i) \in K. \tag{3}$$

Таким образом, результат действия оператора свертки S представляется в виде билинейной формы. Свойство невырожденности (d) означает невырожденность этой билинейной формы. Результат $S(u,p)$ отображения S можно определить в виде (3), произвольно выбирая числа $f^k{}_i \in K$, лишь бы определитель det $(f^k{}_i) \neq 0$. При этом условия (a) — (d) будут выполнены.

Дефиниция. *(Взаимно) дуальные алгебраические векторные пространства.* Пространства X и X^* называются (взаимно) дуальными, если задан действующий на них оператор свертки и они рассматриваются вместе с этим оператором (то есть набор (X, X^*, S) при условии dim $X = n = \dim X^*$ определяет два (взаимно) дуальных пространства X и X^*).

Это определение (взаимно) дуальных алгебраических пространств позволяет для данного векторного пространства X построить бесконечно много векторных пространств X^*, по-разному дуальных к X . Чтобы избежать такой неединственности, Ефимов и Розендорн [7] ввели понятие эквивалентности дуальных векторных пространств (что является дополнительным условием к определению (взаимно) дуальных пространств).

Эквивалентные дуальные к X векторные пространства. Пусть X_1^* и X_2^* — два n-мерных векторных пространства, дуальных к X. Если между ними существует линейный изоморфизм, такой, что

$$S(u,p) = S(u,p'), \quad \forall u \in X, \quad \forall p \in X_1^*, \quad p' \in X_2^*, \tag{4}$$

где p' есть элемент из X_2^*, который соответствует элементу p из X_1^* в согласии с упомянутым изоморфизмом, то X_1^* и X_2^* называются эквивалентно дуальными к X векторными пространствами.

Предложение. *Все линейные (векторные) пространства, дуальные к данному векторному пространству X, эквивалентны друг другу.*

Для доказательства этого предложения достаточно показать, что если для X и X^* произвольно задан оператор свертки S, то для произвольного базиса $e_1, ..., e_n \in X$ можно найти единственный дуальный к нему базис $e^1, ..., e^n$ в пространстве X^*, то есть $e^1, ..., e^n \in X^*$ может быть найден единственным образом, так что $S(e_i, e^k) = f^k{}_i$, где $f^k{}_i \in K$ — наперед заданные числа [28].

Это доказательство аналогично доказательству, предложенному Ефимовым и Розендорном [7] для частного случая $S = C : C(e_k, e^i) = g^i_k$, $g^i_k = 1$ для $k = i$, $g^i_k = 0$ для $k \neq i$. $C(e_k, e^i) = g^i_k$ означает, что дуальное к $\{e_k\}$ базисное векторное поле e^i ортогонально ко всем базисным векторам e_k, для которых $k \neq i$. Оператор свертки C соответствует каноническому подходу к понятию оператора (отображения) свертки

$$C(u, p) = C(p, u) = p(u) = p_i.u^i \ . \tag{5}$$

Новое определение алгебраических дуальных пространств фактически соответствует общему подходу к понятию дуальных пространств. Только в общем случае дуальный базисный вектор e^i не ортогонален к базисным векторам $e_k : S(e_k, e^i) = f^i{}_k \neq g^i_k$. Достаточно заметить, что для произвольного элемента $p \in X^*$ соответствующая линейная форма

$$S(u, p) = p_i.u^{\bar{i}} = p_i.f^i{}_k.u^k = p_{\bar{i}}.u^i \tag{6}$$

задана, где $p_1, ..., p_n$ — постоянные компоненты заданного вектора $p \in X^*$. Последнее равенство можно записать также в форме

$$S(u, p) = S(p, u) = p(u) = p_i.u^{\bar{i}} \ . \tag{7}$$

Замечание. Обобщение понятия алгебраически дуальных пространств в случае векторных полей на дифференцируемом многообразии тривиально. Векторные поля рассматриваются как сечения в векторных расслоениях на многообразии. Векторные базисы становятся зависимыми от точки многообразия, и числа $f^i{}_j$ рассматриваются как функции на многообразии.

Замечание. Если базисные векторы в касательном пространстве $T_x(M)$ в точке x многообразия M (dim $M = n$) являются координатными векторными полями ∂_i , а в дуальном (кокасательном) векторном пространстве $T^*_x(M)$ базис $\{dx^k\}$ определяется как дуальный к базису $\{\partial_i\}$, где dx^k являются дифференциалами координат x^k точки x в данной карте, то $S(\partial_i, dx^k) = f^k{}_i$ $[f^k{}_i \in C^r(M)]$. После умножения последнего равенства на $f_k{}^l$, приняв в расчет соотношение $f^k{}_i.f_k{}^l = g^l_i$, получим условие $S(\partial_i, f_k{}^l.dx^k) = g^l_i$, что эквивалентно результату действия оператора свертки C на векторы ∂_i и e^l, где $e^l = f^l{}_k.dx^k$. Новые векторы e^l в общем случае не являются дифференциалами координат x^l в $x \in M$. Они были бы дифференциалами новых координат $x^{l'} = x^{l'}(x^k)$, если бы соотношение $dx^{l'} = A_k{}^{l'}.dx^k$ согласовывалось с условием $e^l = dx^{l'}$ и $x^{l'} = \int dx^{l'}$. Аналогично в случае, когда $S(f^i_l.\partial_i, dx^k) = g^k_l$, новые векторы $e_l = f_l{}^i.\partial_i$ не являются вновь координатными векторными полями $\partial_{i'}$. Поля e_l были бы вновь координатными векторными полями, если бы при изменении координатной карты выполнялось в точке $x \in M$ условие $f_l{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}$.

Таким образом, в определение алгебраических дуальных векторных полей на многообразиях посредством оператора свертки S, выступающего в качестве обобщения оператора свертки C, нужно вводить $f^i{}_j(x^k)$ взамен символа Кронекера g^i_j.

Оператор свертки S может быть легко обобщен до *мультилинейного* оператора свертки S.

3. КОНТРАВАРИАНТНАЯ И КОВАРИАНТНАЯ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ. КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

3.1. Аффинная связность. Ковариантный дифференциальный оператор. Хотя понятие аффинной связности можно определить различными способами, одно требуется неизменно: во всех определениях должно быть задано линейное отображение, которое каждому данному вектору векторного пространства над точкой x многообразия M сопоставляет соответствующий вектор из того же самого векторного пространства над той же точкой. Соответствующий вектор отождествляется с вектором векторного пространства над другой точкой многообразия M. Способ отождествления называется *переносом* из одной точки многообразия в другую.

Векторные и тензорные поля на дифференцируемом многообразии наделяются структурой линейного (векторного) пространства с помощью определения соответствующих операций в каждой точке многообразия.

Дефиниция. *Аффинная связность* на дифференцируемом многообразии M. Пусть $V(M)$ (dim $M = n$) — множество всех (гладких) векторных полей на многообразии M. Отображение $\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M)$ с помощью $\nabla(u, w) \to \nabla_u w$, $u, w \in V(M)$, где ∇_u выступает в качестве ковариантного дифференциального оператора вдоль векторного поля u (определение см. ниже), называется *аффинной связностью* на многообразии M.

Дефиниция. *Ковариантный дифференциальный оператор (вдоль векторного поля u).* Линейный дифференциальный оператор (отображение) ∇_u, обладающий следующими свойствами:

a) $\nabla_u(v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w, \quad u, v, w \in V(M)$,

b) $\nabla_u(f.v) = (uf).v + f.\nabla_u v$, $f \in C^r(M)$, $r \geq 1$,

c) $\nabla_{u+v} w = \nabla_u w + \nabla_v w$,

d) $\nabla_{fu} v = f.\nabla_u v$,

e) $\nabla_u f = uf$, $f \in C^r(M)$, $r \geq 1$,

f) $\nabla_u(v \otimes w) = \nabla_u v \otimes w + v \otimes \nabla_u w$ (правило Лейбница), $\otimes$ означает тензорное произведение, называется *ковариантным дифференциальным оператором вдоль векторного поля u*.

Результат действия ковариантного дифференциального оператора $\nabla_u v$ часто, и даже как правило, называют *ковариантной производной векторного поля* v вдоль векторного поля u.

В заданной карте (координатной системе) по определению $\nabla_{e_\alpha} e_\beta$ в базисе $\{e_\alpha\}$ вычисляются компоненты $\nabla^{\alpha}_{\beta\gamma}$ аффинной связности ∇:

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \nabla^{\gamma}_{\alpha\beta}.e_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n \ . \tag{8}$$

$\{\nabla^{\gamma}_{\alpha\beta}\}$ преобразуются как линейные дифференциальные геометрические объекты $[21, 29]$.

Дефиниция. *Пространство с аффинной связностью.* Дифференцируемое многообразие M, наделенное аффинной связностью ∇, то есть пара (M, ∇), называется пространством с аффинной связностью.

3.2. Контравариантная и ковариантная аффинные связности. Действие ковариантного дифференциального оператора на контравариантное (касательное) координатное базисное векторное поле ∂_i на M вдоль другого контравариантного координатного базисного векторного поля ∂_j определяется аффинной связностью $\nabla = \Gamma$ с компонентами Γ^k_{ij}, которые в заданной карте определяются через выражение

$$\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma^k_{ij}.\partial_k \ . \tag{9}$$

Для некоординатного контравариантного базиса $e_\alpha \in T(M)$, $T(M) = \cup_{x\in M} T_x(M)$,

$$\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}.e_\gamma \ . \tag{10}$$

Дефиниция. *Контравариантная аффинная связность.* Аффинная связность $\nabla = \Gamma$, вводимая при действии ковариантного дифференциального оператора на контравариантные векторные поля, называется контравариантной аффинной связностью.

Действие ковариантного дифференциального оператора на ковариантное (дуальное к контравариантному базисному векторному полю) базисное векторное поле e^α $[e^\alpha \in T^*(M),\ T^*(M) = \cup_{x\in M} T^*_x(M)]$ по направлению контравариантного (некоординатного) векторного поля e_β определяется аффинной связностью $\nabla = P$ с компонентами $P^{\alpha}_{\beta\gamma}$, задаваемыми выражением

$$\nabla_{e_\beta} e^\alpha = P^{\alpha}_{\gamma\beta}.e^\gamma \ . \tag{11}$$

Для координатного ковариантного базиса dx^i

$$\nabla_{\partial_j} dx^i = P^i_{kj}.dx^k \ . \tag{12}$$

Дефиниция. *Коваринтная аффинная связность*. Аффинная связность $\nabla = P$, вводимая при действии ковариантного дифференциального оператора на ковариантные векторные поля, называется ковариантной аффинной связностью.

Дефиниция. *Пространство с контравариантной и ковариантной аффинными связностями* ($\overline{L}_n$-пространство). Дифференцируемое многообразие, наделенное контравариантной Γ и ковариантной P аффинными связностями, называется пространством с контравариантной и ковариантной аффинными связностями.

Связь между двумя связностями Γ и P основывается на задаваемой оператором свертки S связи между двумя дуальными пространствами $T(M)$ и $T^*(M)$. Обычно между оператором свертки и оператором ковариантного дифференцирования задаются *коммутационные соотношения* в следующем виде:

$$S \circ \nabla_u = \nabla_u \circ S \ . \tag{13}$$

Если последнее операторное равенство взять в виде $\nabla_{\partial_k} \circ S = S \circ \nabla_{\partial_k}$ и применить его к тензорному произведению $dx^i \otimes \partial_j$ двух базисных векторных полей $dx^i \in T^*(M)$ и $\partial_j \in T(M)$, то получится равенство

$$f^i{}_{j,k} = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j, \quad f^i{}_{j,k} := \partial_k f^i{}_j \text{ (в координатном базисе)}. \tag{14}$$

На это равенство можно посмотреть с двух разных точек зрения.

1. Если $P^i_{jk}(x^l)$ и $\Gamma^i_{jk}(x^l)$ заданы как функции координат на M, то рассматриваемое равенство выглядит как система уравнений для неизвестных функций $f^i{}_j(x^l)$. Решение этих уравнений определяет действие оператора свертки S на базисные векторные поля при заданных компонентах обеих связностей. Условия интегрируемости этих уравнений можно записать в виде

$$R^m{}_{jkl}.f^i{}_m + P^i{}_{mkl}.f^m{}_j = 0 \ , \tag{15}$$

где $R^m{}_{jkl}$ — компоненты контравариантного тензора кривизны, построенного с помощью контравариантной аффинной связности Γ, и $P^i{}_{mkl}$ — компоненты ковариантного тензора кривизны, построенного с помощью ковариантной аффинной связности P, причем $[R(\partial_i, \partial_j)]dx^k = P^k{}_{lij}.dx^l$, $[R(\partial_i, \partial_j)]\partial_k = R^l{}_{kij}.\partial_l$, $R(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}$.

2. Если $f^i{}_j(x^l)$ рассматривать как заданные функции координат на M, то условия для $f^i{}_j$ определяют связь между компонентами контравариантной аффинной связности Γ и компонентами ковариантной аффинной связности P с помощью заранее определенного действия оператора свертки S на базисные векторные поля.

Если $S = C$, т.е. $f^i{}_j = g^i_j$, то условия для $f^i{}_j$ выполняются для всех $P = -\Gamma$, т.е.

$$P^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk} \ . \tag{16}$$

Этот факт можно сформулировать следующим образом.

Предложение. *$S = C$ является достаточным условием для $P = -\Gamma$ ($P^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}$).*

Следствие. *Если $P \neq -\Gamma$, то $S \neq C$, т.е. если ковариантная связность P отличается от контравариантной связности Γ не только знаком, то оператор свертки S должен отличаться от канонического оператора свертки C (если S коммутирует с оператором ковариантного дифференцирования).*

Это следствие позволяет ввести отличающиеся друг от друга не только по знаку контравариантную и ковариантную аффинные связности с оператором свертки S, отличным от канонического оператора свертки C.

Если $f^i{}_j = e^\varphi.g^i_j$, где $\varphi \in C^r(M)$, $\varphi \neq 0$, то $P^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk} + \varphi_{,k}.g^i_j$.

3.3. Ковариантные производные контравариантных тензорных полей . *Действие* ковариантного дифференциального оператора вдоль контравариантного векторного поля u называется *переносом вдоль контравариантного векторного поля u* (или *переносом вдоль u*).

Результат действия ковариантного дифференциального оператора на тензорное поле называется *ковариантной производной* этого тензорного поля.

Результат $\nabla_u V$ действия ∇_u на контравариантное тензорное поле V называется *ковариантной производной контравариантного тензорного поля V вдоль контравариантного векторного поля u* (или *ковариантной производной V вдоль u*).

Действие оператора ковариантного дифференцирования на контравариантные тензорные поля ранга > 1 можно описать тривиальным способом по правилу Лейбница, которому оператор подчиняется.

Так, действие оператора ∇_{∂_j} на тензорный базис $\partial_A = \partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_l}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_j}\partial_A = \nabla_{\partial_j}[\partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_l}] = (\nabla_{\partial_j}\partial_{j_1} \otimes \partial_{j_2} ... \otimes \partial_{j_l}) + \\ + (\partial_{j_1} \otimes \nabla_{\partial_j}\partial_{j_2} \otimes ... \otimes \partial_{j_l}) + ... + (\partial_{j_1} \otimes ... \otimes \nabla_{\partial_j}\partial_{j_l}) = \\ = \Gamma^{i_1}_{j_1 j}.\partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_l} + ... + \Gamma^{i_l}_{j_l j}.\partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_l} = \\ = \left(\sum_{k=1}^{l} g^i_{j_k}.g^{i_k}_m.g^{i_1}_{j_1}.g^{i_2}_{j_2}...g^{i_{k-1}}_{j_{k-1}}.g^{i_{k+1}}_{j_{k+1}}...g^{i_l}_{j_l}.\right).\Gamma^m_{ij}.(\partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_l}). \end{aligned}$$

Если мы обозначим для краткости

$$S_{Am}{}^{Bi} = -\sum_{k=1}^{l} g^i_{j_k}.g^{i_k}_m.g^{i_1}_{j_1}.g^{i_2}_{j_2}...g^{i_{k-1}}_{j_{k-1}}.g^{i_{k+1}}_{j_{k+1}}...g^{i_l}_{j_l}, \tag{17}$$

$$\Gamma^{B}_{Aj} = -S_{Am}{}^{Bi}.\Gamma^{m}_{ij}, \qquad A = j_1...j_l, \qquad B = i_1...i_l, \tag{18}$$

то $\nabla_{\partial_j}\partial_A$ можно записать в виде

$$\nabla_{\partial_j}\partial_A = \Gamma^{B}_{Aj}.\partial_B = -S_{Am}{}^{Bi}.\Gamma^{m}_{ij}.\partial_B \ . \tag{19}$$

Величины $S_{Am}{}^{Bi}$ удовлетворяют следующим соотношениям:
a) $S_{Bi}{}^{Aj}.S_{Ak}{}^{Cl} = -g^{l}_{i}.S_{Bk}{}^{Cj}$, $\dim M = n$, $l = 1, ..., N$,
b) $S_{Bi}{}^{Bj} = -N.n^{N-1}.g^{j}_{i}$,
c) $S_{Bi}{}^{Ai} = -N.g^{A}_{B}$, где

$$g^{A}_{B} = g^{j_1}_{i_1}...g^{j_{m-1}}_{i_{m-1}}.g^{j_m}_{i_m}.g^{j_{m+1}}_{i_{m+1}}...g^{j_l}_{i_l} \tag{20}$$

определены как *мультисимволы Кронекера* ранга l,

$$\begin{aligned} g^{A}_{B} \quad &= \quad 1, \;\; i_k = j_k \quad (\text{для всех } k \text{ одновременно}) \\ &= \quad 0, \;\; i_k \neq j_k, \quad k = 1, \ldots, l \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Ковариантную производную вдоль векторного поля u от контравариантного тензорного поля $V = V^A.\partial_A$ можно записать в координатном базисе в виде

$$\nabla_u V = (V^{A}{}_{,i} + \Gamma^{A}_{Bi}.V^B).u^i.\partial_A = V^{A}{}_{;i}.u^i.\partial_A \ , \tag{22}$$

где выражение

$$V^{A}{}_{;i} = V^{A}{}_{,i} + \Gamma^{A}_{Bi}.V^B \tag{23}$$

называется первой ковариантной производной компонент V^A контравариантного тензорного поля V по направлению контравариантного координатного базисного векторного поля ∂_i:

$$\nabla_{\partial_i} V = V^{A}{}_{;i}.\partial_A \ . \tag{24}$$

Аналогичным образом находим вторую ковариантную производную:

$$\nabla_\xi \nabla_u V = (V^{A}{}_{;j;i}.u^j + V^{A}{}_{;j}.u^{j}{}_{;i}).\xi^i.\partial_A = (V^{A}{}_{;j}.u^j)_{;i}.\xi^i.\partial_A \ ,$$

где

$$V^{A}{}_{;j;i} = (V^{A}{}_{;j})_{,i} + \Gamma^{A}_{Bi}.V^{B}{}_{;j} - \Gamma^{k}_{ji}.V^{A}{}_{;k} \tag{25}$$

является второй ковариантной производной компонент V^A векторного поля V. Отсюда следует

$$\nabla_\xi \nabla_u V - \nabla_u \nabla_\xi V = [(V^{A}{}_{;i;j} - V^{A}{}_{;j;i}).u^i.\xi^j + V^{A}{}_{;j}.(u^{j}{}_{;i}.\xi^i - \xi^{j}{}_{;i}.u^i)].\partial_A \ . \tag{26}$$

3.4. Ковариантные производные ковариантных тензорных полей . Ковариантную производную ковекторного поля можно записать (в координатном базисе) в виде

$$\nabla_u p = (p_{i,j} + P^k_{ij}.p_k).u^j.dx^i = p_{i;j}.u^j.dx^i, \quad p \in T^*(M). \tag{27}$$

Действие оператора ковариантного дифференцирования на ковариантные тензорные поля ранга > 1 обобщается тривиально с помощью правила Лейбница, которое применимо и к этому оператору. Вследствие этого действие оператора ∇_{∂_j} на базис $dx^A = dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_l}$ можно записать в виде

$$\nabla_{\partial_j} dx^B = P^B_{Aj}.dx^A = -S_{Am}{}^{Bi}.P^m_{ij}.dx^A \ , \tag{28}$$

где $P^B_{Aj} = -S_{Am}{}^{Bi}.P^m_{ij}$.

Ковариантную производную ковариантного тензорного поля $W = W_A.dx^A = W_B.e^B$ можно записать (в координатном базисе) в виде

$$\nabla_u W = (W_{A,j} + P^B_{Aj}.W_B).u^j.dx^A = W_{A;j}.u^j.dx^A. \tag{29}$$

Вид ковариантной производной смешанного тензорного поля следует из того, как образуется производная контравариантного и ковариантного базисов тензорных полей, и из правила Лейбница (в координатном базисе):

$$\nabla_u K = \nabla_u(K^A{}_B.\partial_A \otimes dx^B) = K^A_{B;j}.u^j.\partial_A \otimes dx^B =$$

$$= (K^A{}_{B,j} + \Gamma^A_{Cj}.K^C{}_B + P^D_{Bj}.K^A{}_D).u^j.\partial_A \otimes dx^B. \tag{30}$$

Если *тензор Кронекера* определить в виде

$$\mathrm{Kr} = g^i_j.\partial_i \otimes dx^j = g^\alpha_\beta.e_\alpha \otimes e^\beta \ , \tag{31}$$

то компоненты контравариантной и ковариантной аффинных связностей будут отличаться друг от друга компонентами ковариантной производной тензора Кронекера, т.е.

$$\Gamma^i_{jk} + P^i_{jk} = g^i_{j;k}, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + P^\alpha_{\beta\gamma} = g^\alpha_{\beta/\gamma}. \tag{32}$$

Замечание. *В специальном случае, когда $S = C$, и в каноническом подходе $g^i_{j;k} = 0$ ($g^\alpha_{\beta/\gamma} = 0$).*

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ЛИ

Дифференциальный оператор Ли $\pounds_\xi$, т.е. производная Ли вдоль векторного поля ξ, является другим оператором, который можно построить с помощью векторного поля. Его определение можно рассматривать как обобщение понятия производной Ли тензорного поля [11, 21, 30, 31].

Дефиниция. $\pounds_\xi$:= *дифференциальный оператор Ли вдоль векторного поля* ξ с присущими ему свойствами.

a) $\pounds_\xi : V \to \overline{V} = \pounds_\xi V,\ V, \overline{V} \in \otimes^l(M)$.

b) $\pounds_\xi : W \to \overline{W} = \pounds_\xi W,\ W, \overline{W} \in \otimes_k(M)$.

c) $\pounds_\xi : K \to \overline{K} = \pounds_\xi K, \quad K,\ \overline{K} \in \otimes^l{}_k(M)$.

d) Линейный оператор по отношению к тензорным полям:

$\pounds_\xi(\alpha.V_1 + \beta.V_2) = \alpha.\pounds_\xi V_1 + \beta.\pounds_\xi V_2,\ \alpha, \beta \in F(R$ или $C),\ V_i \in \otimes^l(M)$, $i = 1, 2$,

$\pounds_\xi(\alpha.W_1 + \beta.W_2) = \alpha.\pounds_\xi W_1 + \beta.\pounds_\xi W_2,\ W_i \in \otimes_k(M),\ i = 1, 2$,

$\pounds_\xi(\alpha.K_1 + \beta.K_2) = \alpha.\pounds_\xi K_1 + \beta.\pounds_\xi K_2,\ K_i \in \otimes^l{}_k(M),\ i = 1, 2$.

e) Линейный оператор по отношению к векторному полю ξ:

$\pounds_{\alpha.\xi+\beta.u} = \alpha.\pounds_\xi + \beta.\pounds_u,\ \alpha, \beta \in F(R$ или $C),\ \xi, u \in T(M)$.

f) Дифференциальный оператор, действующий по правилу Лейбница:

$\pounds_\xi(S \otimes U) = \pounds_\xi S \otimes U + S \otimes \pounds_\xi U, \quad S \in \otimes^m q(M), \quad U \in \otimes^k_l(M)$.

g) Действие на функцию $f \in C^r(M),\ r \geq 1$:

$\pounds_\xi f = \xi f, \quad \xi \in T(M)$.

h) Действие на векторное поле:

$\pounds_\xi u = [\xi, u]\ ,\ \xi, u \in T(M),\ [\xi, u] = \xi \circ u - u \circ \xi$,

$\pounds_\xi e_\alpha = [\xi, e_\alpha] = -\left(e_\alpha \xi^\beta - \xi^\gamma.C_{\gamma\alpha}{}^\beta\right).e_\beta$,

$\pounds_{e_\alpha} e_\beta = [e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^\gamma.e_\gamma,\ C_{a\beta}{}^\gamma \in C^r(M)$,

$\pounds_\xi \partial_i = -\xi^j{}_{,i}.\partial_j,\ \pounds_{\partial_i}\partial_j = [\partial_i, \partial_j] = 0$.

i) Действие на ковариантное базисное векторное поле:

$\pounds_\xi e^\alpha = k^\alpha{}_\beta(\xi).e^\beta,\ \pounds_{e_\gamma} e^\alpha = k^\alpha{}_{\beta\gamma}.e^\beta$,

$\pounds_\xi dx^i = k^i{}_j(\xi).dx^j\ ,\ \pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_{jk}.dx^j$.

Действие дифференциального оператора Ли на ковариантное базисное векторное поле определяется его же действием на контравариантное базисное векторное поле и перестановочными соотношениями между дифференциальным оператором и оператором свертки S.

4.1. Производные Ли от контравариантных тензорных полей. Дифференциальный оператор Ли $\pounds_\xi$ вдоль векторного поля ξ является, как уже было сказано, еще одним оператором, который можно построить с помощью векторного поля. Это есть оператор, отображающий контравариантное тензорное поле V в контравариантное тензорное поле $\widetilde{V} = \pounds_\xi V$.

Действие дифференциального оператора Ли вдоль контравариантного векторного поля ξ называется *смещением вдоль векторного поля* ξ (или *смещением вдоль* ξ).

Результат действия $(\pounds_\xi V)$ дифференциального оператора Ли $\pounds_\xi$ на V называется *производной Ли от контравариантного тензорного поля V вдоль векторного поля ξ* (или *производной Ли от V вдоль ξ*).

Коммутатор двух дифференциальных операторов Ли

$$[\pounds_\xi, \pounds_u] = \pounds_\xi \circ \pounds_u - \pounds_u \circ \pounds_\xi \tag{33}$$

имеет следующие свойства.

a) Действие на функцию:

$$[\pounds_\xi, \pounds_u]f = (\pounds_\xi \circ \pounds_u - \pounds_u \circ \pounds_\xi)f = [\xi, u]f = (\pounds_\xi u)f = [\nabla_\xi, \nabla_u]f,$$
$$f \in C^r(M)\ , \quad r \geq 2.$$

b) Действие на векторное поле:

$$[\pounds_\xi, \pounds_u]v = (\pounds_\xi \circ \pounds_u - \pounds_u \circ \pounds_\xi)v = \pounds_\xi \pounds_u v - \pounds_u \pounds_\xi v =$$
$$= \pounds_v \pounds_u \xi = -\pounds_{\pounds_u \xi} v = \pounds_{\pounds_\xi u} v.$$

c) Тождество Якоби:

$$< [\pounds_\xi, [\pounds_u, \pounds_v]] > \equiv [\pounds_\xi, [\pounds_u, \pounds_v]] + [\pounds_v, [\pounds_\xi, \pounds_u]] + [\pounds_u, [\pounds_v, \pounds_\xi]] \equiv 0. \tag{34}$$

В разложении производной Ли от векторного поля u по базису ∂_i

$$\pounds_\xi u = [\xi, u] = (\pounds_\xi u^i).\partial_i = (\xi^k.u^i{}_{,k} - u^k.\xi^i{}_{,k}).\partial_i \tag{35}$$

величина

$$\pounds_\xi u^i = \xi^k.u^i{}_{,k} - u^k.\xi^i{}_{,k} \tag{36}$$

называется *производной Ли от компонент u^i* векторного поля u вдоль векторного поля ξ (или производной Ли от компонент u^i вдоль ξ) *в координатном базисе*.

В некоординатном базисе производная Ли может быть записана аналогично тому, как это было сделано в координатном базисе:

$$\pounds_\xi u = [\xi, u] = (\pounds_\xi u^\alpha).e_\alpha = (\xi^\beta.e_\beta u^\alpha - u^\beta.e_\beta \xi^\alpha + C_{\beta\gamma}{}^\alpha.\xi^\beta.u^\gamma).e_\alpha, \tag{37}$$

где

$$\pounds_\xi u^\alpha = \xi^\beta.e_\beta u^\alpha - u^\beta.e_\beta \xi^\alpha + C_{\beta\gamma}{}^\alpha.\xi^\beta.u^\gamma \tag{38}$$

называется *производной Ли от компонент u^α векторного поля u вдоль векторного поля ξ в некоординатном базисе* (или *производной Ли от компонент u^α вдоль ξ*).

Производная $\pounds_{e_\beta} u$ может быть записана в виде

$$\pounds_{e_\beta} u = (e_\beta u^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha . u^\gamma).e_\alpha = u^\alpha{}_{//\beta}.e_\alpha = -\pounds_u e_\beta = (\pounds_{e_\beta} u^\alpha).e_\alpha \ , \quad (39)$$

где

$$\pounds_{e_\beta} u^\alpha = u^\alpha{}_{//\beta} = e_\beta u^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha . u^\gamma \ . \quad (40)$$

Вторая производная Ли $\pounds_\xi \pounds_u v$ в некоординатном базисе будет иметь вид

$$\pounds_\xi \pounds_u v = [\xi^\beta . e_\beta (\pounds_u v^\alpha) - (\pounds_u v^\beta).e_\beta \xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha .(\pounds_u v^\gamma).\xi^\beta].e_\alpha =$$
$$= (\pounds_\xi \pounds_u v^\alpha).e_\alpha, \quad (41)$$

где $\pounds_\xi \pounds_u v^\alpha = \xi^\beta . e_\beta (\pounds_u v^\alpha) - (\pounds_u v^\beta).e_\beta \xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha .(\pounds_u v^\gamma).\xi^\beta$ называется *второй производной Ли компонент v^α вдоль u и ξ в некоординатном базисе*.

Действие дифференциального оператора Ли на контравариантное тензорное поле ранга $k > 1$ можно обобщить ввиду применимости правила Лейбница при действии этого оператора на базисы тензорных полей.

Результат действия оператора $\pounds_\xi$ на базис $\partial_A = \partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_l$ можно найти с помощью уже известного соотношения $\pounds_\xi \partial_{j_k} = -\pounds_{\partial_{j_k}} \xi = -\xi^m{}_{,j_k}.\partial_m$. Затем берем $\pounds_\xi \partial_A = S_{Am}{}^{Bn}.\xi^m{}_{,n}.\partial_B$, и

$$\pounds_\xi V = \pounds_\xi (V^A.\partial_A) = (\pounds_\xi V^A).\partial_A = (\xi^k.V^A{}_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.V^B.\xi^k{}_{,l}).\partial_A, \quad (42)$$

где $\pounds_\xi V^A = \xi^k.V^A{}_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.V^B.\xi^k{}_{,l}$ есть *производная Ли от компонент V^A контравариантного тензорного поля V вдоль векторного поля ξ в координатном базисе* (или *производная Ли от компонент V^A вдоль ξ в координатном базисе*).

Для $\pounds_\xi \pounds_u V$ получаем

$$\pounds_\xi \pounds_u V = (\pounds_\xi \pounds_u V^A).\partial_A = [\xi^k (\pounds_u V^A)_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.(\pounds_u V^B).\xi^k{}_{,l}].\partial_A \ , \quad (43)$$

где выражение $\pounds_\xi \pounds_u V^A = \xi^k (\pounds_u V^A)_{,k} + S_{Bk}{}^{Al}.(\pounds_u V^B).\xi^k{}_{,l}$ называется *второй производной Ли от компонент V^A вдоль u и ξ в координатном базисе*.

Результат действия дифференциального оператора $\pounds_\xi$ на некоординатный базис e_A можно найти аналогично тому, как это было сделано для базиса координатного. Так как

$$\pounds_\xi e_\beta = -\xi^\alpha{}_{//\beta}.e_\alpha \ , \ \ \xi^\alpha{}_{//\beta} = e_\beta \xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha . \xi^\gamma \ , \quad (44)$$

$$\pounds_\xi e_A = \pounds_\xi [e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_l}] = (\pounds_\xi e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_2} \otimes ... \otimes e_{\alpha_l}) +$$
$$+ (e_{\alpha_1} \otimes \pounds_\xi e_{\alpha_2} \otimes ... \otimes e_{\alpha_l}) + ... + (e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes \pounds_\xi e_{\alpha_l}) = S_{A\alpha}{}^{B\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta}.e_B,$$
$$A = \alpha_1 ... \alpha_l \ , \ \ B = \beta_1 ... \beta_l \ , \ \ e_B = e_{\beta_1} \otimes ... \otimes e_{\beta_l} \ ,$$
$$(45)$$

то

$$\pounds_\xi e_A = S_{A\alpha}{}^{B\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta}.e_B \quad \text{и} \quad \pounds_\xi V = \pounds_\xi(V^A.e_A) = (\pounds_\xi V^A).e_A =$$
$$= (\xi^\alpha.e_\alpha V^A + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.\xi^\alpha{}_{//\beta}).e_A \ . \tag{46}$$

В явном виде выражения $S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta}$ можно представить в виде

$$S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta} = S_{B\alpha}{}^{A\beta}.e_\beta\xi^\alpha - S_{B\alpha}{}^{A\beta}.C_{\gamma\beta}{}^\alpha.\xi^\gamma \ , \tag{47}$$

и если мы введем сокращенные обозначения

$$C_{B\gamma}{}^A = S_{B\alpha}{}^{A\beta}.C_{\gamma\beta}{}^\alpha = -S_{B\alpha}{}^{A\beta}.C_{\beta\gamma}{}^\alpha \ , \tag{48}$$

$$S_{B\alpha}{}^{A\beta}.\xi^\alpha{}_{//\beta} = S_{B\alpha}{}^{A\beta}.e_\beta\xi^\alpha - C_{B\alpha}{}^A.\xi^\alpha \ , \tag{49}$$

то $\pounds_\xi V^A$ можно записать в форме

$$\pounds_\xi V^A = \xi^\alpha.e_\alpha V^A + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.\xi^\alpha{}_{//\beta} =$$
$$= \xi^\alpha.e_\alpha V^A + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.(e_\beta\xi^\alpha - C_{\gamma\beta}{}^\alpha.\xi^\gamma) =$$
$$= \xi^\alpha.(e_\alpha V^A - S_{B\beta}{}^{A\gamma}.V^B.C_{\alpha\gamma}{}^\beta) + S_{B\beta}{}^{A\gamma}.V^B.e_\gamma\xi^\beta =$$
$$= \xi^\alpha.V^A{}_{//\alpha} + S_{B\alpha}{}^{A\beta}.V^B.e_\beta\xi^\alpha \ . \tag{50}$$

$\pounds_\xi V^A$ называются *производными Ли от компонент* V^A *контравариантного тензорного поля* V *вдоль* ξ *в некоординатном базисе*. Здесь

$$V^A{}_{//\alpha} = e_\alpha V^A - S_{B\beta}{}^{A\gamma}.V^B.C_{\alpha\gamma}{}^\beta = e_\alpha V^A - C_{B\alpha}{}^A.V^B \ . \tag{51}$$

В некоординатном базисе выполняются следующие соотношения:

$$\pounds_{e_\alpha} V = V^A{}_{//\alpha}.e_A \ , \quad \pounds_{e_\alpha} e_A = - \ C_{A\alpha}{}^B.e_B \ . \tag{52}$$

Величина

$$S_{B\alpha}{}^{A\beta} = -\sum_{k=1}^{l} g^{i_1}_{j_1}...g^{i_{k-1}}_{j_{k-1}}.g^{i_k}_\alpha.g^\beta_{j_k}.g^{i_{k+1}}_{j_{k+1}}...g^{i_l}_{j_l} \ , \tag{53}$$

где $l = 1, ..., N$, $B = j_1...j_l$, $A = i_1...i_l$, называется *мультисимволом свертки ранга* N.

4.2. Связь между ковариантным дифференцированием и дифференцированием Ли. Действие оператора ковариантного дифференцирования и действие дифференциального оператора Ли на функции отождествляются с действием же векторного поля, участвующего в конструкции обоих операторов. Что касается векторного поля, то он действует как дифференциальный оператор на функции, заданные на дифференцируемом многообразии M, по правилу

$$\nabla_\xi f = \xi f = \pounds_\xi f = \xi^i . \partial_i f = \xi^\alpha . e_\alpha f \ , \quad f \in C^r(M) \ , \ \ \xi \in T(M) \ .$$

Если мы сравним производную Ли с ковариантной производной векторного поля в некоординатном (или координатном) базисе

$$\begin{gathered}\pounds_\xi u = (\pounds_\xi u^\alpha).e_\alpha = (\xi^\beta . e_\beta u^\alpha - u^\beta . e_\beta \xi^\alpha + C_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma).e_\alpha \ , \\ \nabla_\xi u = (u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta).e_\alpha = (\xi^\beta . e_\beta u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} . u^\gamma . \xi^\beta).e_\alpha \ ,\end{gathered} \tag{54}$$

то увидим, что оба выражения имеют общую часть типа $\xi u^\alpha = \xi^\beta . e_\beta u^\alpha$, позволяющую установить связь между двумя производными.

После подстановки $e_\beta u^\alpha$ и $e_\beta \xi^\alpha$ из равенств $e_\beta u^\alpha = u^\alpha{}_{/\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} . u^\gamma$ и $e_\beta \xi^\alpha = \xi^\alpha{}_{/\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} . \xi^\gamma$ в выражение для $\pounds_\xi u$ получим

$$\begin{gathered}\pounds_\xi u^\alpha = u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta - \xi^\alpha{}_{/\beta} . u^\beta - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma = \\ = u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta - (\xi^\alpha{}_{/\beta} - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\gamma).u^\beta,\end{gathered} \tag{55}$$

где

$$T_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - C_{\beta\gamma}{}^\alpha = -T_{\gamma\beta}{}^\alpha, \tag{56}$$

$$\begin{gathered}\pounds_\xi u = (\pounds_\xi u^\alpha).e_\alpha = (u^\alpha{}_{/\beta} . \xi^\beta - \xi^\alpha{}_{/\beta} . u^\beta - T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma).e_\alpha = \\ = \nabla_\xi u - \nabla_u \xi - T(\xi, u) \ ,\end{gathered} \tag{57}$$

причем

$$T(\xi, u) = T_{\beta\gamma}{}^\alpha . \xi^\beta . u^\gamma . e_\alpha = -T(u, \xi), \quad T(e_\beta, e_\gamma) = T_{\beta\gamma}{}^\alpha . e_\alpha \ . \tag{58}$$

Векторное поле $T(\xi, u)$ называется *векторным полем кручения*.

Если подставить равенство, следующее из выражения для $\pounds_u v^\beta$, а именно

$$v^\beta{}_{/\gamma} . u^\gamma - u^\beta{}_{/\gamma} . v^\gamma = \pounds_u v^\beta + T_{\alpha\gamma}{}^\beta . u^\alpha . v^\gamma \ , \tag{59}$$

в выражение

$$\begin{gathered}\nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi = \\ = [(\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta . u^\gamma + \xi^\alpha{}_{/\beta} . (v^\beta{}_{/\gamma} . u^\gamma - u^\beta{}_{/\gamma} . v^\gamma)].e_\alpha,\end{gathered}$$

то получим

$$\begin{gathered}\nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi = \\ = [(\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma + \xi^\alpha{}_{/\beta}.(\pounds_u v^\beta + T_{\gamma\delta}{}^\beta.u^\gamma.v^\delta)].e_\alpha = \\ = [(\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma + \xi^\alpha{}_{/\beta}.(\pounds_u v^\beta + T^\beta(u,v)].e_\alpha \ , \\ T^\beta(u,v) = T_{\delta\gamma}{}^\beta.u^\delta.v^\gamma \ , \quad \nabla_{T(u,v)}\xi = \xi^\alpha{}_{/\beta}.T_{\gamma\delta}{}^\beta.u^\gamma.v^\delta.e_\alpha \ , \\ \nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi - \nabla_{\pounds_u v}\xi = (\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma.e_\alpha + \nabla_{T(u,v)}\xi \ ,\end{gathered} \tag{60}$$

или

$$\begin{gathered}\nabla_u \nabla_v \xi - \nabla_v \nabla_u \xi - \nabla_{\pounds_u v}\xi - \nabla_{T(u,v)}\xi = (\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).v^\beta.u^\gamma.e_\alpha \ , \\ \nabla_{e_\gamma} \nabla_{e_\beta} \xi - \nabla_{e_\beta} \nabla_{e_\gamma} \xi - \nabla_{\pounds_{e_\gamma} e_\beta}\xi - \nabla_{T(e_\gamma,e_\beta)}\xi = (\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - \xi^\alpha{}_{/\gamma/\beta}).e_\alpha \ .\end{gathered} \tag{61}$$

В координатном базисе векторное поле кручения имеет вид

$$T(\xi,u) = T_{kl}{}^i.\xi^k.u^l.\partial_i = (\Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{kl}).\xi^k.u^l.\partial_i \ , \tag{62}$$

$$T_{kl}{}^i = \Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{kl}, \qquad T(\partial_k, \partial_l) = T_{kl}{}^i.\partial_i \ . \tag{63}$$

Производную Ли $\pounds_\xi u$ можно написать теперь в виде

$$\begin{gathered}\pounds_\xi u = (\pounds_\xi u^i).\partial_i = (u^i{}_{;k}.\xi^k - u^k.\xi^i{}_{;k} - T_{kl}{}^i.\xi^k.u^l).\partial_i \ , \\ \pounds_\xi u^i = u^i{}_{;k}.\xi^k - u^k.\xi^i{}_{;k} - T_{kl}{}^i.\xi^k.u^l \ .\end{gathered} \tag{64}$$

Связь между ковариантной производной и производной Ли от контравариантного тензорного поля можно установить аналогично тому, как это было сделано в случае с векторным полем.

4.3. Производные Ли от ковариантных базисных векторных полей. *Производные Ли от ковариантных координатных базисных векторных полей.*

Перестановочные соотношения между дифференциальным оператором Ли $\pounds_\xi$ и оператором свертки S в случае базисных (как координатных, так и некоординатных) векторных полей можно написать в виде

$$\begin{gathered}\pounds_\xi \circ S(dx^i \otimes \partial_j) = S \circ \pounds_\xi (dx^i \otimes \partial_j) \ , \\ \pounds_\xi \circ S(e^\alpha \otimes e_\beta) = S \circ \pounds_\xi (e^\alpha \otimes e_\beta) \ ,\end{gathered} \tag{65}$$

где

$$\begin{gathered}\pounds_\xi \circ S(dx^i \otimes \partial_j) = \xi f^i{}_j = f^i{}_{j,k}.\xi^k \ , \\ S \circ \pounds_\xi (dx^i \otimes \partial_j) = S(\pounds_\xi dx^i \otimes \partial_j) + S(dx^i \otimes \pounds_\xi \partial_j) \ .\end{gathered} \tag{66}$$

С помощью (невырожденной) обратной матрицы $(f^i{}_j)^{-1} = (f_j{}^i)$ и соотношений $f^i{}_k.f_j{}^k = g^i_j$, $f^k{}_i.f_k{}^j = g^j_i$, после умножения равенства для $k^i{}_l(\xi)$ на $f_m{}^j$ и суммирования по j выражение для $k^i{}_j(\xi)$ получается в следующем явном виде:

$$k^i{}_j(\xi) = f_j{}^l.\xi^k{}_{,l}.f^i{}_k + f_j{}^l.f^i{}_{l,k}.\xi^k \ . \tag{67}$$

Для $\pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_j(\partial_k).dx^j = k^i_{jk}.dx^j$ получается, соответственно,

$$\begin{aligned} \pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_{jk}.dx^j = f_j{}^l.f^i{}_{l,k}.dx^j \ , \\ k^i{}_{jk} = f_j{}^l.f^i{}_{l,k} \ . \end{aligned} \tag{68}$$

С другой стороны, из коммутационных соотношений между S и оператором ковариантного дифференцирования ∇_ξ следует связь между частными производными от $f^i{}_j$ и компонентами контравариантной и ковариантной связностей Γ и P:

$$f^i{}_{l,k} = P^i_{mk}.f^m{}_l + \Gamma^m_{lk}.f^i{}_m. \tag{69}$$

После подстановки последнего выражения для $k^i{}_j(\xi)$ и $k^i{}_{jk}$ соответствующие величины получаются в виде

$$k^i{}_j(\xi) = f_j{}^l.\xi^k{}_{,l}.f^i{}_k + (P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m).\xi^k \ , \tag{70}$$

$$k^i{}_j(\partial_k) = k^i{}_{jk} = P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m \ ,$$

$$\pounds_\xi dx^i = [f_j{}^l.\xi^k{}_{,l}.f^i{}_k + (P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m).\xi^k].dx^j \ , \tag{71}$$

$$\pounds_{\partial_k} dx^i = k^i{}_{jk}.dx^j = (P^i_{jk} + f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m).dx^j \ . \tag{72}$$

Если мы обозначим

$$\xi^{\overline{i}}{}_{,\underline{j}} = f^i{}_k.\xi^k{}_{,l}.f_j{}^l \ , \qquad \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = f_j{}^l.\Gamma^m_{lk}.f^i{}_m \ , \tag{73}$$

то производные Ли от ковариантных координатных базисных векторных полей dx^i вдоль векторных полей ξ и ∂_k можно записать в следующем виде:

$$\pounds_\xi dx^i = [\xi^{\overline{i}}{}_{,\underline{j}} + (P^i_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k}).\xi^k].dx^j, \quad \pounds_{\partial_k} dx^i = (P^i_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k}).dx^j \ . \tag{74}$$

Производные Ли от ковариантных некоординатных базисных векторных полей. Аналогично случаю ковариантных координатных базисных векторных полей производные Ли от ковариантных некоординатных базисных векторных полей можно получить в виде

$$\begin{aligned}
\pounds_\xi e^\alpha &= [\xi^{\overline{\alpha}}{}_{//\underline{\beta}} + (P^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma}).\xi^\gamma].e^\beta = \\
&= [e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} + (P^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}).\xi^\gamma].e^\beta \ ,
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\pounds_{e_\gamma} e^\alpha = (P^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}).e^\beta \ , \tag{76}$$

где

$$\begin{gathered}
\xi^{\overline{\alpha}}{}_{//\underline{\beta}} = f^\alpha{}_\gamma.\xi^\gamma{}_{//\delta}.f_\beta{}^\delta = f^\alpha{}_\gamma.(e_\delta\xi^\gamma).f_\beta{}^\delta + f^\alpha{}_\gamma.C_{\delta\sigma}{}^\gamma.f_\beta{}^\delta.\xi^\sigma = \\
= e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} + C_{\underline{\beta}\sigma}{}^{\overline{\alpha}}.\xi^\sigma \ , \\
e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} = f^\alpha{}_\gamma.(e_\delta\xi^\gamma).f_\beta{}^\delta, \qquad C_{\underline{\beta}\sigma}{}^{\overline{\alpha}} = f^\alpha{}_\gamma.C_{\delta\sigma}{}^\gamma.f_\beta{}^\delta \ , \\
\Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} = f_\beta{}^\delta.\Gamma^\sigma_{\delta\gamma}.f^\alpha{}_\sigma.
\end{gathered} \tag{77}$$

4.4. Производные Ли от ковариантных тензорных полей. Действие дифференциального оператора Ли на ковариантные векторные и тензорные поля определяется его же действием на ковариантные базисные векторные поля и на функции на M.

В координатном базисе производная Ли от ковекторного поля p вдоль векторного поля ξ может быть написана по-разному:

$$\begin{aligned}
\pounds_\xi p &= \pounds_\xi(p_i.dx^i) = (\pounds_\xi p_i).dx^i = \\
&= [p_{i,k}.\xi^k + p_j.\xi^{\overline{j}}{}_{,\underline{i}} + p_j.(P^j_{ik} + \Gamma^{\overline{j}}_{\underline{i}k}).\xi^k].dx^i = \\
&= [p_{i;k}.\xi^k + \xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{i}}.p_k + T_{k\underline{i}}{}^{\overline{j}}.p_j.\xi^k].dx^i \ ,
\end{aligned} \tag{78}$$

где

$$\begin{aligned}
&\xi^{\overline{j}}{}_{;\underline{i}} = f^j{}_k.\xi^k{}_{;l}.f_i{}^l, \qquad T_{k\underline{i}}{}^{\overline{j}} = f^j{}_l.T_{km}{}^l.f_i{}^m, \\
&T_{ki}{}^j = \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki} \ \ (\text{в координатном базисе}).
\end{aligned} \tag{79}$$

В некоординатном базисе производная Ли $\pounds_\xi p$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\pounds_\xi p = \pounds_\xi(p_\alpha.e^\alpha) = (\pounds_\xi p_\alpha).e^\alpha = \\
&= \{(e_\gamma p_\alpha + P^\beta_{\alpha\gamma}.p_\beta).\xi^\gamma + p_\beta.[e_{\underline{\alpha}}\xi^{\overline{\beta}} + (\Gamma^{\overline{\beta}}_{\underline{\alpha}\gamma} + C_{\underline{\alpha}\gamma}{}^{\overline{\beta}}).\xi^\gamma]\}.e^\alpha = \\
&= (p_{\alpha/\beta}.\xi^\beta + \xi^{\overline{\beta}}{}_{/\underline{\alpha}}.p_\beta + T_{\gamma\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}.p_\beta.\xi^\gamma).e^\alpha \ ,
\end{aligned} \tag{80}$$

где

$$\xi^{\overline{\beta}}{}_{/\underline{\alpha}} = f^{\beta}{}_{\delta}.\xi^{\delta}{}_{/\gamma}.f_{\alpha}{}^{\gamma}, \qquad T_{\gamma\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} = f_{\alpha}{}^{\delta}.T_{\gamma\delta}{}^{\sigma}.f^{\beta}{}_{\sigma} \ ,$$
$$T_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - C_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \quad \text{(в некоординатном базисе).} \tag{81}$$

Действие дифференциального оператора Ли на ковариантные тензорные поля определяется его же действием на базисные тензорные поля.

В координатном базисе

$$\pounds_{\xi}W = \pounds_{\xi}(W_A.dx^A) = (\xi W_A).dx^A + W_A.\pounds_{\xi}dx^A =$$
$$= (\pounds_{\xi}W_A).dx^A \ , \qquad W \in \otimes_k(M) \ ,$$
$$\pounds_{\xi}dx^B = -k^m{}_n(\xi).S_{Am}{}^{Bn}.dx^A \ , \quad \pounds_{\xi}dx^m = k^m{}_n(\xi).dx^n \ ,$$
$$\pounds_{\xi}dx^B = [-\xi^{\overline{k}}{}_{,\underline{l}}.S_{Ak}{}^{Bl} - S_{Am}{}^{Bn}.(P^m_{nl} + \Gamma^{\overline{m}}_{\underline{nl}}).\xi^l].dx^A \ . \tag{82}$$

Обозначив

$$\widetilde{\Gamma}{}^{B}_{Ak} = -S_{Ai}{}^{Bj}.\Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} \ , \qquad P^B_{Ak} = -S_{Ai}{}^{Bj}.P^i_{jk} \ , \tag{83}$$

можно записать $\pounds_{\xi}W$ в виде

$$\pounds_{\xi}W = (\pounds_{\xi}W_A).dx^A =$$
$$= [\xi^k.W_{A}{}_{,k} - \xi^{\overline{k}}{}_{,\underline{l}}.S_{Ak}{}^{Bl}.W_B + (P^B_{Al} + \widetilde{\Gamma}^B_{Al}).W_B.\xi^l].dx^A \ , \tag{84}$$

где

$$\pounds_{\xi}W_A = \xi^k.W_{A,k} - \xi^{\overline{k}}{}_{,\underline{l}}.S_{Ak}{}^{Bl}.W_B + (P^B_{Al} + \widetilde{\Gamma}{}^{B}_{Al}).W_B.\xi^l =$$
$$= \xi^k.W_{A;k} - S_{A\overline{k}}{}^{B\underline{l}}.W_B.(\xi^k{}_{;l} - T^k_{lj}.\xi^j) =$$
$$= \xi^k.W_{A;k} - S_{Ak}{}^{Bl}.W_B.(\xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{l}} - T^{\overline{k}}_{\underline{lj}}.\xi^j) \ , \tag{85}$$

$$\pounds_{\partial_j}W_A = W_{A,j} + (P^B_{Aj} + \widetilde{\Gamma}{}^{B}_{Aj}).W_B \ ,$$
$$\pounds_{\partial_j}dx^B = -S_{Ai}{}^{Bl}.(P^i_{lj} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{lj}}).dx^A = (P^{\ B}_{Aj} + \widetilde{\Gamma}{}^{B}_{Aj}).dx^A \ . \tag{86}$$

Вторая производная Ли от компонент W_A ковариантного тензорного поля W может быть записана в форме

$$\pounds_{\xi}\pounds_{u}W_A = \xi^k.(\pounds_u W_A)_{,k} - \xi\overline{k}_{,\underline{l}}.S^{Bl}_{Ak}.\pounds_u W_B + (P^B_{Al} + \widetilde{\Gamma}{}^{B}_{Al}).\xi^l.\pounds_u W_B \ . \tag{87}$$

В некоординатном базисе $\pounds_{\xi}W$ имеет вид

$$\pounds_{\xi}W = (\xi W_A).e^A + W_B.(\pounds_{\xi}e^B) = (\pounds_{\xi}W_A).e^A \ , \tag{88}$$

где

$$
\begin{gathered}
\pounds_\xi W_A = \xi^\beta.e_\beta W_A - S_{A\alpha}{}^{B\beta}.W_B.e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} + (P^B_{A\gamma} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\gamma} + \widetilde{C}_{A\gamma}{}^B).W_B.\xi^\gamma \ , \\
\widetilde{\Gamma}{}^B_{A\gamma} = -S_{A\alpha}{}^{B\beta}.\Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} \ , \qquad \widetilde{C}_{A\gamma}{}^B = -S_{A\alpha}{}^{B\beta}.C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} \ , \\
\pounds_{e_\beta} e^B = (P^B_{A\beta} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\beta} + \widetilde{C}_{A\beta}{}^B).e^A \ , \\
\pounds_{e_\beta} W_A = e_\beta W_A + (P^B_{A\beta} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\beta} + \widetilde{C}_{A\beta}{}^B).W_B \ .
\end{gathered}
\tag{89}
$$

Вторая производная Ли от W_A в некоординатном базисе имеет вид

$$
\begin{aligned}
\pounds_\xi \pounds_u W_A \quad = \quad & \xi^\beta.e_\beta(\pounds_u W_A) - S_{A\alpha}{}^{B\beta}.(\pounds_u W_B).e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}} + \\
& +(P^B_{A\gamma} + \widetilde{\Gamma}{}^B_{A\gamma} + \widetilde{C}_{A\gamma}{}^B).\xi^\gamma.\pounds_u W_B \ .
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Производные Ли от ковариантных базисных тензорных полей можно выразить через ковариантные производные от компонент векторного поля ξ и тензор кручения

$$
\pounds_\xi e^B = [-S_{A\alpha}{}^{B\beta}.\xi^{\overline{\alpha}}{}_{/\underline{\beta}} + P^B_{A\gamma}.\xi^\gamma + \widetilde{T}{}_{A\gamma}{}^B.\xi^\gamma].e^A \ , \tag{91}
$$

где $\widetilde{T}{}_{A\gamma}{}^B = S_{A\alpha}{}^{B\beta}.T_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} = S_{A\overline{\alpha}}{}^{B\underline{\beta}}.T_{\beta\gamma}{}^\alpha$.

Производная $\pounds_\xi W_A$ тогда будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
\pounds_\xi W_A &= \xi^\beta.W_{A/\beta} - S_{A\overline{\alpha}}{}^{B\underline{\beta}}.W_B.(\xi^\alpha{}_{/\beta} - T_{\beta\gamma}{}^\alpha.\xi^\gamma) = \\
&= \xi^\beta.W_{A/\beta} - S_{A\alpha}{}^{B\beta}.W_B.(\xi^{\overline{\alpha}}{}_{/\underline{\beta}} - T_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}.\xi^\gamma) \ .
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Обобщение производных Ли на случай смешанных тензорных полей получается аналогично тому, как это было сделано для ковариантных производных от смешанных тензорных полей.

4.5. Классификация линейных переносов и смещений в зависимости от связи между контравариантной и ковариантной аффинными связностями. С помощью производных Ли от ковариантных базисных векторных полей мы можем разбить на классы возможные связи между компонентами Γ^i_{jk} ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$) контравариантной связности Γ и компонентами P^i_{jk} ($P^\alpha_{\beta\gamma}$) ковариантной аффинной связности P. На этой основе можно классифицировать линейные переносы, генерируемые оператором ковариантного дифференцирования, и смещения, генерируемые дифференциальным оператором Ли, в зависимости от коммутационных соотношений этих операторов с оператором свертки S. Результат классификации можно представить в виде следующей таблицы. Подобная классификация была предложена Схоутеном [29] и рассмотрена Шмутцером [32] на основе иных соображений.

Таблица 1. Соотношения между условиями для переносов и типами смещений

Условия для переносов	Типы смещений и переносов
	Перенос с произвольным смещением
$P^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}} = \overline{F}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$\pounds_{e_\gamma} e^{\alpha} = \overline{F}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}.e^{\beta}$
$P^{i}_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = \overline{F}{}^{i}_{jk}$	$\pounds_{\partial_k} dx^{i} = \overline{F}{}^{i}_{jk}.dx^{j}$
	Перенос с коллинеарным смещением
$P^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} = \overline{A}_{\gamma}.g^{\alpha}_{\beta}$	$\pounds_{e_\gamma} e^{\alpha} = \overline{A}_{\gamma}.e^{\alpha} + C_{\underline{\beta}\gamma}{}^{\overline{\alpha}}.e^{\beta}$
$P^{i}_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = \overline{A}_{k}.g^{i}_{j}$	$\pounds_{\partial_k} dx^{i} = \overline{A}_{k}.dx^{i}$
	Перенос без смещения
$P^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\gamma} = 0$	$\pounds_{e_\gamma} e^{\alpha} = C_{\beta\gamma}{}^{\overline{\alpha}}.e^{\beta}$
$P^{i}_{jk} + \Gamma^{\overline{i}}_{\underline{j}k} = 0$	$\pounds_{\partial_k} dx^{i} = 0$

5. ОПЕРАТОР КРИВИЗНЫ. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

5.1. Оператор кривизны. Одним из хорошо известных операторов, конструируемых на дифференцируемых многообразиях с помощью коввариантного диффренциального оператора и дифференциального оператора Ли, является оператор кривизны.

Дефиниция. Оператор

$$R(\xi, u) = \nabla_{\xi}\nabla_{u} - \nabla_{u}\nabla_{\xi} - \nabla_{\pounds_{\xi}u} = [\nabla_{\xi}, \nabla_{u}] - \nabla_{[\xi,u]} \ , \quad \xi,\, u \in T(M) \ , \tag{93}$$

называется *оператором кривизны*.

1. Действие оператора кривизны на функцию класса $C^r(M)$, $r \geq 2$, на многообразии M:

$$[R(\xi, u)]f = 0, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 2 \ .$$

2. $[R(\xi, u)]fv = f.[R(\xi, u)]v, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 2, \quad v \in T(M)$.
3. Действие оператора кривизны на векторное поле:

$$\begin{aligned} [R(\xi, u)]v &= \nabla_{\xi}\nabla_{u}v - \nabla_{u}\nabla_{\xi}v - \nabla_{\pounds_{\xi}u}v = \\ &= [(v^{\delta}{}_{/\beta/\gamma} - v^{\delta}{}_{/\gamma/\beta}).u^{\beta}.\xi^{\gamma} + v^{\delta}{}_{/\alpha}.T_{\beta\gamma}{}^{\alpha}.\xi^{\beta}.u^{\gamma}].e_{\delta} = \\ &= [(v^{i}{}_{;j;k} - v^{i}{}_{;k;j}).u^{j}.\xi^{k} + v^{i}{}_{;j}.T_{kl}{}^{j}.\xi^{k}.u^{l}].\partial_{i} \ . \end{aligned} \tag{94}$$

Таким образом, для $\forall\, \xi \in (M)$ и $\forall\, u \in T(M)$ мы можем найти в координатном базисе соотношение

$$v^{i}{}_{;k;l} - v^{i}{}_{;l;k} = -\, v^{j}.R^{i}{}_{jkl} + v^{i}{}_{;j}.T_{kl}{}^{j} \ , \tag{95}$$

где величины

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^m_{jl}.\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}.\Gamma^i_{ml} \tag{96}$$

называются *компонентами (контравариантного) тензора кривизны (тензора Римана) в координатном базисе*.

4. Действие оператора кривизны на контравариантные тензорные поля.

Для $V = V^A.e_A = V^B.\partial_B$, $V \in \otimes^l(M)$ и базисов e_A и ∂_B, учитывая свойства величин $S_{Ak}{}^{Bl}$ и Γ^B_{Ai}, можно доказать следующие соотношения:

$$[R(\xi, u)](f.V) = f.[R(\xi, u)]V, \tag{97}$$

$$[R(\xi, u)]V = V^A.[R(\xi, u)]e_A = V^B.[R(\xi, u)]\partial_B \ , \tag{98}$$

$$[R(\partial_j, \partial_i)]\partial_A = R^B{}_{Aji}.\partial_B = -\, S_{Ak}{}^{Bl}.R^k{}_{lji}.\partial_B \ , \tag{99}$$

где

$$R^B{}_{Aji} = -\, S_{Ak}{}^{Bl}.R^k{}_{lji} \ , \qquad S_{Ak}{}^{Bl}{}_{,i} = 0 \ , \tag{100}$$

$$R^B{}_{Aji} = \Gamma^B_{Ai,j} - \Gamma^B_{Aj,i} + \Gamma^C_{Ai}.\Gamma^B_{Cj} - \Gamma^C_{Aj}.\Gamma^B_{Ci} \ , \tag{101}$$

$$[R(\xi, u)]V = -\ S_{Bk}{}^{Al}.V^B.R^k{}_{lij}.\xi^i.u^j.\partial_A \ . \tag{102}$$

С другой стороны, как это следует из явного выражения для $[R(\xi, u)]V$,

$$\begin{gathered} [R(\xi, u)]V = (V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i} + V^A{}_{;k}.T_{ji}{}^k).u^i.\xi^j.\partial_A \ , \\ V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i} = -\ S_{Bk}{}^{Al}.V^B.R^k{}_{lji} - T_{ji}{}^k.V^A{}_{;k} \ , \\ [R(\partial_j, \partial_i)] - \nabla_{T(\partial_j, \partial_i)}]V = (V^A{}_{;i;j} - V^A{}_{;j;i}).\partial_A \ . \end{gathered} \tag{103}$$

5. Действие оператора кривизны на ковекторные поля определяется его структурой и действием оператора ковариантного дифференцирования на ковариантное тензорное поле. В координатном базисе имеем

$$\begin{aligned} [R(\xi, u)]p &= (\nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u})p = p_l.P^l{}_{ikj}.\xi^k.u^j.dx^i = \\ &= (p_{i;j;k} - p_{i;k;j} + T_{kj}{}^l.p_{i;l}).u^j.\xi^k.dx^i \ , \end{aligned} \tag{104}$$

$$[R(\partial_k, \partial_l)]dx^i = P^i{}_{jkl}.dx^j \ , \tag{105}$$

где величины

$$P^i{}_{jkl} = P^i_{jl,k} - P^i_{jk,l} + P^m_{jk}.P^i_{ml} - P^m_{jl}.P^i_{mk} = -P^i{}_{jlk} \tag{106}$$

называются компонентами *ковариантного тензора кривизны* в координатном базисе.

Специальный случай: $S = C : f^i{}_j = g^i_j : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = 0$.

$$P^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jkl}\ . \tag{107}$$

В некоординатном базисе:

$$\begin{aligned}[R(\xi,u)]p = p_\delta.P^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}.\xi^\beta.u^\gamma.e^\alpha = \\ = (p_{\alpha/\gamma/\beta} - p_{\alpha/\beta/\gamma} + T_{\beta\gamma}{}^\delta.p_{\alpha/\delta}).\xi^\beta.u^\gamma.e^\alpha\ ,\end{aligned} \tag{108}$$

$$P^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} = e_\beta P^\alpha_{\delta\gamma} - e_\gamma P^\alpha_{\delta\beta} + P^\sigma_{\delta\beta}.P^\alpha_{\sigma\gamma} - P^\sigma_{\delta\gamma}.P^\alpha_{\sigma\beta} - C_{\beta\gamma}{}^\sigma.P^\alpha_{\delta\sigma}\ . \tag{109}$$

Величины $P^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} = -P^\alpha{}_{\delta\gamma\beta}$ называются компонентами *ковариантного тензора кривизны* в некоординатном базисе.

Для ковариантного тензорного поля $W = W_A.dx^A = W_C.e^C \in \otimes_k(M)$ имеем соотношение

$$W_{A;i;j} - W_{A;j;i} = S_{Am}{}^{Bn}.W_B.P^m{}_{nij} + W_{A;l}.T_{ij}{}^l \tag{110}$$

в координатном базисе и соотношение

$$W_{A/\beta/\gamma} - W_{A/\gamma/\beta} = S_{A\alpha}{}^{B\delta}.W_B.P^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} + W_{A/\delta}.T_{\beta\gamma}{}^\delta \tag{111}$$

в некоординатном базисе.

5.2. Тождества Бианки. Если мы напишем цикл действия оператора кривизны на векторные поля:

$$< [R(\xi,u)]v >= [R(\xi,u)]v + [R(v,\xi)]u + [R(u,v)]\,\xi \tag{112}$$

и приведем в явном виде каждое слагаемое в этом цикле, а затем воспользуемся оператором ковариантного дифференцирования и дифференциальным оператором Ли, то после некоторых (не таких уж и трудных) расчетов мы сможем найти тождества типа

$$\begin{aligned}[R(\xi,u)]\,v + [R(v,\xi)]\,u + [R(u,v)]\,\xi \equiv \\ \equiv T(T(\xi,u),v) + T(T(v,\xi),u) + T(T(u,v),\xi) + \\ + (\nabla_\xi T)(u,v) + (\nabla_v T)(\xi,u) + (\nabla_u T)(v,\xi)\ ,\end{aligned} \tag{113}$$

или

$$< [R(\xi, u)]\, v > \equiv < T(T(\xi, u), v) > + < (\nabla_\xi T)(u, v) > \ . \qquad (114)$$

Эти тождества называются *тождествами Бианки первого типа* (или *типа 1*), где

$$< T(T(\xi, u), v) > \equiv T(T(\xi, u), v) + T(T(v, \xi), u) + T(T(u, v), \xi) \ ,$$
$$< (\nabla_\xi T)(u, v) > \equiv \ (\nabla_\xi T)(u, v) + \ (\nabla_v T)(\xi, u) + \ (\nabla_u T)(v, \xi) \ ,$$
$$\nabla_\xi [T(u, v)] = (\nabla_\xi T)(u, v) + T(\nabla_\xi u, v) + T(u, \nabla_\xi v) \ .$$

С помощью оператора кривизны и оператора ковариантного дифференцирования можно построить новый оператор $(\nabla_w R)(\xi, u)$ в следующем виде:

$$(\nabla_w R)(\xi, u) = [\nabla_w, R(\xi, u)] - R(\nabla_w \xi, u) - R(\xi, \nabla_w u) \ , \qquad (115)$$

где

$$[\nabla_w, R(\xi, u)] = \nabla_w \circ R(\xi, u) - R(\xi, u) \circ \nabla_w \ , \quad w, \xi, u \in T(M) \ .$$

Оператор $(\nabla_w R)(\xi, u)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}(\nabla_w R)(\xi, u) = {} & \nabla_w \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_w \nabla_u \nabla_\xi + \nabla_u \nabla_\xi \nabla_w - \nabla_\xi \nabla_u \nabla_w + \\ & + \nabla_u \nabla_{\nabla_w \xi} - \nabla_{\nabla_w \xi} \nabla_u + \nabla_{\nabla_w u} \nabla_\xi - \nabla_\xi \nabla_{\nabla_w u} + \\ & + \nabla_{\pounds_\xi u} \nabla_w - \nabla_w \nabla_{\pounds_\xi u} + \nabla_{\pounds_\xi \nabla_w u} - \nabla_{\pounds_u \nabla_w \xi} \ .\end{aligned} \qquad (116)$$

Этот оператор подчиняется так называемому *тождеству Бианки второго типа* (или *типа 2*)

$$< (\nabla_w R)(\xi, u) > \equiv < R(w, T(\xi, u)) > \ , \qquad (117)$$

где

$$< (\nabla_w R)(\xi, u) > \equiv \ (\nabla_w R)(\xi, u) + (\nabla_u R)(w, \xi) + (\nabla_\xi R)(u, w) \ ,$$
$$< R(w, T(\xi, u)) > \equiv \ R(w, T(\xi, u)) + R(u, T(w, \xi)) + R(\xi, T(u, w)) \ .$$

Тождество Бианки типа 2 можно записать как в координатном, так и в некоординатном базисе в виде следующего тождества для компонент контравариантного тензора кривизны:

$$R^i{}_{j<kl;m>} \equiv R^i{}_{j<kn} . T_{lm>}{}^n \equiv - R^i{}_{jn<k} . T_{lm>}{}^n \ , \qquad (118)$$

где

$$\begin{aligned} R^i{}_{j<kl;m>} &\equiv R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jmk;l} + R^i{}_{jlm;k} \ , \\ R^i{}_{j<kn}.T_{lm>}{}^n &\equiv R^i{}_{jkn}.T_{lm}{}^n + R^i{}_{jmn}.T_{kl}{}^n + R^i{}_{jlr}.T_{mk}{}^r \ . \end{aligned} \tag{119}$$

Для коммутатора

$$[\nabla_w, R(\xi, u)] = \nabla_w \circ R(\xi, u) - R(\xi, u) \circ \nabla_w$$

выполняется следующее коммутационное тождество:

$$< [\nabla_w, R(\xi, u)] > \equiv - < R(w, \pounds_\xi u) > \ , \tag{120}$$

где

$$\begin{aligned} < [\nabla_w, R(\xi, u)] > &\equiv [\nabla_w, R(\xi, u)] + [\nabla_u, R(w, \xi)] + [\nabla_\xi, R(u, w)] \ , \\ < R(w, \pounds_\xi u) > &\equiv R(w, \pounds_\xi u) + R(u, \pounds_w \xi) + R(\xi, \pounds_u w) \ . \end{aligned} \tag{121}$$

Оператор кривизны и тождества Бианки применимы к дифференцируемым многообразиям с одной аффинной связностью. Они могут также найти применение при изучении характеристик дифференцируемых многообразий с аффинными связностями и метриками. Структура оператора кривизны приводит к конструкции другого оператора, называемого оператором девиации.

6. ОПЕРАТОР ДЕВИАЦИИ

Учитывая структуру *оператора кривизны*

$$R(\xi, u) = \nabla_\xi \nabla_u - \nabla_u \nabla_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u} = [\nabla_\xi, \nabla_u] - \nabla_{[\xi, u]} \ , \tag{122}$$

коммутатор $[\nabla_w, R(\xi, u)]$ $[w, \xi, u \in T(M)]$ можно представить в виде

$$[\nabla_w, R(\xi, u)] = [\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi, u)] + [\nabla_w, [\nabla_\xi, \nabla_u]] - [\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]] \ , \tag{123}$$

где

$$\pounds\Gamma(\xi, u) = \pounds_\xi \nabla_u - \nabla_u \pounds_\xi - \nabla_{\pounds_\xi u} = [\pounds_\xi, \nabla_u] - \nabla_{[\xi, u]} \ . \tag{124}$$

Оператор $\pounds\Gamma(\xi, u)$ появляется здесь как новый оператор, построенный с помощью дифференциального оператора Ли и оператора ковариантного дифференцирования [33–36].

Дефиниция. Оператор $\pounds\Gamma(\xi, u)$ называется *оператором девиации*. Он имеет следующие свойства:

1. Действие оператора девиации на функцию f:

$[\pounds\Gamma(\xi,u)]\,f=0,\ f\in C^r(M),\ r\geq 2.$

2a. Действие оператора девиации на контравариантное векторное поле:

$[\pounds\Gamma(\xi,u)]\,(fv)=f[\pounds\Gamma(\xi,u)]\,v,\ \xi,u,v\in T(M),$

$[\pounds\Gamma(\xi,u)]v=v^\beta[\pounds\Gamma(\xi,u)]e_\beta=v^j[\pounds\Gamma(\xi,u)]\partial_j=u^\gamma v^\beta[\pounds\Gamma(\xi,e_\gamma)]e_\beta=$ $=u^jv^i[\pounds\Gamma(\xi,\partial_j)]\partial_i.$

Связь между действиями оператора девиации и оператора кривизны на векторное поле можно представить в виде

$$\begin{gathered}[\pounds\Gamma(\xi,u)]v=[R(\xi,u)]v+[\nabla_u\nabla_v-\nabla_{\nabla_u v}]\xi-\\ -T(\xi,\nabla_u v)+\nabla_u[T(\xi,v)]\ .\end{gathered}\tag{125}$$

В координатном базисе $[\pounds\Gamma(\xi,\partial_l)]\partial_k$ имеет вид

$$[\pounds\Gamma(\xi,\partial_l)]\partial_k=[\xi^i{}_{;k;l}-R^i{}_{klj}.\xi^j+(T_{jk}{}^i.\xi^j)_{;l}].\partial_i=(\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}).\partial_i\ ,\tag{126}$$

где

$$\nabla_{\partial_j}[T(\xi,\partial_i)]-T(\xi,\nabla_{\partial_j}\partial_i)=(T_{li}{}^k.\xi^l)_{;j}.\partial_k\ .$$

Величина $\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}$ называется *производной Ли контравариантной аффинной связности* вдоль векторного поля ξ. Она может быть записана также в виде

$$\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}=\xi^i{}_{,k,l}+\xi^j.\Gamma^i_{kl,j}-\xi^i{}_{,j}.\Gamma^j_{kl}+\xi^j{}_{,k}.\Gamma^i_{jl}+\xi^j{}_{,l}.\Gamma^i_{kj}\ .\tag{127}$$

С помощью $\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}$ выражение для $[\pounds\Gamma(\xi,u)]v$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}[\pounds\Gamma(\xi,u)]v=v^k.u^l.(\pounds_\xi\Gamma^i_{kl}).\partial_i=\\ =[\xi^i{}_{;k;l}.v^k.u^l-R^i{}_{klj}.v^k.u^l.\xi^j+(T_{jk}{}^i.\xi^j)_{;l}.v^k.u^l].\partial_i\ .\end{gathered}\tag{128}$$

На этом пути вторую ковариантную производную $\nabla_u\nabla_v\xi$ векторного поля ξ можно записать с помощью оператора девиации:

$$\begin{gathered}\nabla_u\nabla_v\xi=([R(u,\xi)]v)+\nabla_\xi\nabla_u v-\pounds_\xi(\nabla_u v)-\nabla_u[T(\xi,v)]+[\pounds\Gamma(\xi,u)]v=\\ =([R(u,\xi)]v)+\nabla_\xi\nabla_u v-\nabla_u\pounds_\xi v-\nabla_{\pounds_\xi u}v-\nabla_u[T(\xi,v)]\ .\end{gathered}\tag{129}$$

При $v=u$ последнее тождество называется *обобщенным тождеством для девиации* [33]. Оно используется для анализа уравнений девиации в пространствах с аффинной связностью и метрикой (L_n-пространства, U_n-пространства и V_n-пространства), где уравнения девиации рассматриваются с точки зрения их структуры и решений [37–41], и в качестве теоретической основы для детектора гравитационных волн в (псевдо)римановых пространствах без кручения (V_n-пространства) [42–48]. Уравнения девиации Синга и Шилда и их обобщение для $(\overline{L}_n, g)$-пространств рассмотрено в [28].

2б. Действие оператора девиации на контравариантное тензорное поле

$$\begin{gathered}[\pounds\Gamma(\xi,u)]V = u^\gamma . V^A . [\pounds\Gamma(\xi,e_\gamma)]e_A = u^\gamma . V^B . (\pounds_\xi \Gamma^A_{B\gamma}) . e_A = \\ = -(S_{B\alpha}{}^{A\beta} . V^B . \pounds_\xi \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} . u^\gamma) e_A \ , \quad V \in \otimes^k(M) \ ,\end{gathered} \tag{130}$$

где

$$\begin{gathered}\pounds_\xi \Gamma^A_{B\gamma} = -S_{B\alpha}{}^{A\beta} . \pounds_\xi \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \ , \\ ([\pounds\Gamma(\xi,u)]e_B) = (\pounds_\xi \Gamma^A_{B\gamma}) . u^\gamma . e_A = \\ = -S_{B\alpha}{}^{A\beta} . [\xi^\alpha{}_{/\beta/\gamma} - R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} . \xi^\delta + (T_{\delta\beta}{}^\alpha . \xi^\delta)_{/\gamma}] . u^\gamma . e_A \ .\end{gathered} \tag{131}$$

3. Оператор девиации удовлетворяет тождеству, аналогичному тождеству Бианки первого типа для тензора кривизны:

$$\begin{gathered}\langle[\pounds\Gamma(\xi,u)]v\rangle \equiv \langle(\nabla_\xi\nabla_u - \nabla_{\nabla_\xi u})v\rangle + \langle T(T(\xi,u),v)\rangle - \\ -\langle T(u,\nabla_\xi v)\rangle \ , \ \xi,u,v \in T(M) \ ,\end{gathered} \tag{132}$$

где

$$\begin{gathered}\langle[\pounds\Gamma(\xi,u)]v\rangle = [\pounds\Gamma(\xi,u)]v + [\pounds\Gamma(v,\xi)]u + [\pounds\Gamma(u,v)]\xi \ , \\ \langle(\nabla_\xi\nabla_u - \nabla_{\nabla_\xi u})v\rangle = (\nabla_\xi\nabla_u - \nabla_{\nabla_\xi u})v + (\nabla_v\nabla_\xi - \nabla_{\nabla_v \xi})u + \\ +(\nabla_u\nabla_v - \nabla_{\nabla_u v})\xi \ , \\ \langle T(u,\nabla_\xi v)\rangle = T(u,\nabla_\xi v) + T(v,\nabla_u \xi) + T(\xi,\nabla_v u) \ .\end{gathered} \tag{133}$$

В некоординатном базисе это тождество принимает вид

$$\begin{gathered}(\pounds_\xi \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) . v^\alpha . u^\beta + (\pounds_u \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) . \xi^\alpha . v^\beta + (\pounds_v \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) . u^\alpha . \xi^\beta \equiv \\ \equiv \xi^\gamma{}_{/\alpha/\beta} . v^\alpha . u^\beta + u^\gamma{}_{/\alpha/\beta} . \xi^\alpha . v^\beta + v^\gamma{}_{/\alpha/\beta} . u^\alpha . \xi^\beta + \\ +T_{\langle\alpha\beta}{}^\kappa T_{\kappa\delta\rangle}{}^\gamma . v^\alpha . \xi^\beta . u^\delta - \\ -T_{\alpha\beta}{}^\gamma . (u^\alpha . v^\beta{}_{/\delta} . \xi^\delta + v^\alpha . \xi^\beta{}_{/\delta} . u^\delta + \xi^\alpha . u^\beta{}_{/\delta} . v^\delta) \ .\end{gathered} \tag{134}$$

Коммутатор оператора ковариантного дифференцирования с оператором девиации удовлетворяет следующему тождеству:

$$\langle[\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi,u)]\rangle \equiv \langle[\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]]\rangle - \langle R(w, \pounds_\xi u)\rangle \ , \tag{135}$$

где

$$\langle[\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi,u)]\rangle = [\nabla_w, \pounds\Gamma(\xi,u)] + [\nabla_u, \pounds\Gamma(v,\xi)] + [\nabla_\xi, \pounds\Gamma(u,v)],$$
$$\langle[\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]]\rangle = [\nabla_w, [\pounds_\xi, \nabla_u]] + [\nabla_u, [\pounds_w, \nabla_\xi]] + [\nabla_\xi, [\pounds_u, \nabla_w]] \ ,$$
$$\langle R(w, \pounds_\xi u)\rangle = R(w, \pounds_\xi u) + R(u, \pounds_w \xi) + R(\xi, \pounds_u w) \ ,$$
$$\xi, u, w \in T(M).$$

4. Действие оператора девиации на ковекторные поля определяется его структурой и особенно дифференциальным оператором Ли.

В некоординатном базисе

$$[\pounds\Gamma(\xi, e_\gamma)]e^\alpha = \pounds_\xi \nabla_{e_\gamma} e^\alpha - \nabla_{e_\gamma} \pounds_\xi e^\alpha - \nabla_{\pounds_\xi e_\gamma} e^\alpha = (\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma}).e^\beta \ , \qquad (136)$$

где

$$\begin{aligned}\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma} \quad = \quad & \xi^\delta.e_\delta P^\alpha_{\beta\gamma} + P^\alpha_{\delta\gamma}.e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\delta}} + P^\alpha_{\delta\gamma}.(P^\delta_{\beta\rho} + \Gamma^{\overline{\delta}}_{\underline{\beta}\rho} + C_{\underline{\beta}\rho}{}^{\overline{\delta}}).\xi^\rho - \\ & - e_\gamma(e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\alpha}}) - e_\gamma[(P^\alpha_{\beta\rho} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\beta}\rho} + C_{\underline{\beta}\rho}{}^{\overline{\alpha}}).\xi^\rho] - \\ & - P^\delta_{\beta\gamma}.[e_{\underline{\delta}}\xi^{\overline{\alpha}} + (P^\alpha_{\delta\rho} + \Gamma^{\overline{\alpha}}_{\underline{\delta}\rho} + C_{\underline{\delta}\rho}{}^{\overline{\alpha}}).\xi^\rho] + \\ & + P^\alpha_{\beta\delta}.(e_\gamma\xi^\delta - C_{\rho\gamma}{}^\delta.\xi^\rho) \ , \qquad (137)\end{aligned}$$

$$e_{\underline{\beta}}\xi^{\overline{\delta}} = f_\beta{}^\sigma.e_\sigma\xi^\kappa.f^\delta{}_\kappa \ , \qquad \Gamma^{\overline{\delta}}_{\underline{\beta}\rho} = f^\delta{}_\kappa.f_\beta{}^\sigma.\Gamma^\kappa_{\sigma\rho} \ . \qquad (138)$$

Выражение для $\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma}$ можно записать также в виде

$$\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma} = -P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}.\xi^\delta - \xi^{\overline{\alpha}}{}_{/\underline{\beta}/\gamma} + T_{\underline{\beta}\delta}{}^{\overline{\alpha}}.\xi^\delta{}_{/\gamma} + T_{\underline{\beta}\delta}{}^{\overline{\alpha}}{}_{/\gamma}.\xi^\delta \ . \qquad (139)$$

$\pounds_\xi P^\alpha_{\beta\gamma}$ называется *производной Ли компонент* $P^\alpha_{\beta\gamma}$ *ковариантной аффинной связности* P *в некоординатном базисе.*

Специальный случай: $S = e^\varphi.C : f^\alpha{}_\beta = e^\varphi.g^\alpha_\beta, \quad f^i{}_j = e^\varphi.g^i_j, \quad f_i{}^j = e^{-\varphi}.g^j_i$.

$$\pounds_\xi P^i_{jk} = -P^i{}_{jkl}.\xi^l - \xi^i{}_{;j;k} + T_{jl}{}^i.\xi^l{}_{;k} + T_{jl}{}^i{}_{;k}.\xi^l \ . \qquad (140)$$

Производная Ли компонент ковариантной аффинной связности P может быть полезной при изучении уравнений девиации для ковекторных полей.

7. ПРОДОЛЖЕННЫЙ КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР. ПРОДОЛЖЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Если Γ^i_{jk} являются компонентами контравариантной аффинной связности, Γ и P^i_{jk} — компонентами ковариантной аффинной связности P в заданном (здесь координатном) базисе в $(\overline{L}_n, g)$-пространстве, то $\overline{\Gamma}{}^i_{jk}$ и $\overline{P}{}^i_{jk}$ являются компонентами (в том же самом базисе) новой контравариантной аффинной связности $\overline{\Gamma}$ и новой ковариантной аффинной связности $\overline{P}$ соответственно:

$$\overline{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \overline{A}{}^i{}_{jk}, \quad \overline{P}{}^i_{jk} = P^i_{jk} - \overline{B}{}^i{}_{jk},$$
$$\overline{A} = \overline{A}{}^i{}_{jk}.\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k, \;\; \overline{B} = \overline{B}{}^i{}_{jk}.\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k, \;\; \overline{A}\,, \overline{B} \in \otimes^1{}_2(M).$$

$\overline{\Gamma}$ и $\overline{P}$ соответствуют новому (продолженному по отношению к ∇_u, $u \in T(M)$) ковариантному дифференциальному оператору ${}^e\nabla_u$:

$$
\begin{aligned}
{}^e\nabla_{\partial_k}\partial_j &= \overline{\Gamma}{}^i_{jk}.\partial_i, & {}^e\nabla_{e_\beta}e_\alpha &= \overline{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}.e_\gamma,\\
{}^e\nabla_{\partial_k}dx^i &= \overline{P}{}^i_{jk}.dx^j, & {}^e\nabla_{e_\gamma}e^\alpha &= \overline{P}{}^\alpha_{\beta\gamma}.e^\beta,
\end{aligned}
$$

с теми же свойствами, что и ковариантный дифференциальный оператор ∇_u.

Если выбрать тензоры $\overline{A}$ и $\overline{B}$ с определенными заранее свойствами, то можно найти $\overline{\Gamma}$ и $\overline{P}$ с заранее заданными характеристиками. Например, можно найти связность $\overline{P}$, для которой ${}^e\nabla_u g = 0$, $\forall u \in T(M)$, $g \in \otimes_2(M)$, хотя $\nabla_u g \neq 0$ для ковариантной аффинной связности P. С другой стороны, $\overline{A}{}^i{}_{jk}$ и $\overline{B}{}^i{}_{jk}$ связаны друг с другом на основе коммутационных соотношений между операторами ${}^e\nabla_u$ и ∇_u с оператором свертки S. Из

$$\nabla_u \circ S = S \circ \nabla_u, \qquad {}^e\nabla_u \circ S = S \circ {}^e\nabla_u,$$

получаем

$$(S \circ {}^e\nabla_{\partial_k})(\partial_j \otimes dx^i) = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l - \overline{A}{}^l{}_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j - \overline{B}{}^i{}_{lk}.f^l{}_j,$$

$$({}^e\nabla_{\partial_k} \circ S)(\partial_j \otimes dx^i) = {}^e\nabla_{\partial_k}(S(\partial_j \otimes dx^i)) = {}^e\nabla_{\partial_k}(f^i{}_j) = \partial_k(f^i{}_j) = f^i{}_{j,k}.$$

Следовательно,

$$f^i{}_{j,k} = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l - \overline{A}{}^l{}_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j - \overline{B}{}^i{}_{lk}.f^l{}_j.$$

Так как равенство $(\nabla_{\partial_k} \circ S)(\partial_j \otimes dx^i) = (S \circ \nabla_{\partial_k})(\partial_j \otimes dx^i)$ приводит к отношению $f^i{}_{j,k} = \Gamma^l_{jk}.f^i{}_l + P^i_{lk}.f^l{}_j$, то мы получаем связь между $\overline{A}{}^i{}_{jk}$ и $\overline{B}{}^i{}_{jk}$ в виде $\overline{A}{}^l{}_{jk}.f^i{}_l + \overline{B}{}^i{}_{lk}.f^l{}_j = 0$.

Следовательно, $\overline{B}^i{}_{jk} = -\overline{A}^l{}_{mk}.f^i{}_l.f_j{}^m = -\overline{A}^{\overline{i}}{}_{\underline{j}k}$ и $\overline{A}^i{}_{jk} = -\overline{B}^m{}_{lk}.f^l{}_j.f_m{}^i = -\overline{B}^{\underline{i}}{}_{\overline{j}k}$.

Мы можем записать ${}^e\nabla_{\partial_k}$ в виде ${}^e\nabla_{\partial_k} = \nabla_{\partial_k} - \overline{A}_{\partial_k}$, где $\overline{A}_{\partial_k} = \overline{A}^i{}_{jk}.\partial_i \otimes dx^j$.

Оператор ${}^e\nabla_u$ можно также записать в виде ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$, где $\overline{A}_u = \overline{A}^i{}_{jk}.u^k.\partial_i \otimes dx^j$.

Здесь $\overline{A}_u$ появляется как смешанное тензорное поле второго ранга; но оно действует на тензорные поля как ковариантный дифференциальный оператор, потому что оператор ${}^e\nabla_u$ определен как ковариантный дифференциальный оператор с теми же свойствами, какие имеет ковариантный дифференциальный оператор ∇_u.

Дефиниция. *Продолженный к ∇_u ковариантный дифференциальный оператор.* Линейный дифференциальный оператор ${}^e\nabla_u : v \to {}^e\nabla_u v = \widetilde{v}$, $v, \widetilde{v} \in \otimes^k{}_l(M)$, со свойствами ∇_u.

Из свойств операторов ${}^e\nabla_u$ и ∇_u следуют свойства оператора $\overline{A}_u$:

$$\overline{A}_u : v \to \overline{A}_u v \ , \quad u \in T(M) \ , \qquad v, \overline{A}_u v \in \otimes^k{}_l(M) \ .$$

a) $\overline{A}_u(v + w) = \overline{A}_u v + \overline{A}_u w$, $v, w \in \otimes^k{}_l(M)$.
b) $\overline{A}_u(f.v) = f.\overline{A}_u v$, $f \in C^r(M)$.
c) $\overline{A}_{u+v} w = \overline{A}_u w + \overline{A}_v w$.
d) $\overline{A}_{f.u} v = f.\overline{A}_u v$.
e) $\overline{A}_u f = 0$.
f) $\overline{A}_u(v \otimes w) = \overline{A}_u v \otimes w + v \otimes \overline{A}_u w$, $v \in \otimes^k{}_l(M)$, $w \in \otimes^m{}_r(M)$.
g) $\overline{A}_u \circ S = S \circ \overline{A}_u$ (коммутационное соотношение с оператором свертки S).

Все свойства оператора $\overline{A}_u$ определяются свойствами операторов ${}^e\nabla_u$ и ∇_u, выступающих здесь в виде хорошо определенных ковариантных дифференциальных операторов. Действительно, $\overline{A}_u$ можно определить как $\overline{A}_u = \nabla_u - {}^e\nabla_u$. Если $\overline{A}_u$ есть заданное смешанное тензорное поле, то ${}^e\nabla_u$ можно построить единственным образом.

На основе изложенных выше суждений мы можем сформулировать следующее предложение.

Предложение. *Каждому ковариантному дифференциальному оператору ∇_u и заданному тензорному полю $\overline{A}_u \in \otimes^1{}_1(M)$, действующему как ковариантный дифференциальный оператор на тензорное поле в $(\overline{L}_n, g)$-пространстве, соответствует продолженный ковариантный дифференциальный оператор ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$.*

Оператор $\overline{A}_u$, в согласии со свойством (c): $\overline{A}_{u+v} = \overline{A}_u + \overline{A}_v$, должен быть линейным относительно аргумента u. С другой стороны, $\overline{A}_u$, будучи смешанным тензорным полем второго ранга, может быть представлен, учитывая существование в $(\overline{L}_n, g)$-пространстве контравариантной и ковариантной метрик $\overline{g}$ и g соответственно, в виде $\overline{A}_u = \overline{g}(A_u)$, где A_u есть ковариантное тензорное поле второго ранга, построенное с помощью тензорного поля C и векторного поля u таким образом, что A_u линейно зависит от u. Во всяком случае, имеются три возможности построить ковариантное тензорное поле второго ранга A_u, линейно зависящее от аргумента u, т.е. $A_u = C(u) = C_{ij}(u).dx^i \otimes dx^j$, где

1. $A_u = C(u) = A(u) = A_{ij\overline{k}}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $A = A_{ijk}.dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \in \otimes_3(M)$, $u \in T(M)$.

2. $A_u = C(u) = \nabla_u B = B_{ij;k}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $B = B_{ij}.dx^i \otimes dx^j \in \otimes_2(M)$, $u \in T(M)$.

3. $A_u = C(u) = A(u) + \nabla_u B$, $A(u) = A_{ij\overline{k}}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $A = A_{ijk}.dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \in \otimes_3(M)$, $u \in T(M)$; $\nabla_u B = B_{ij;k}.u^k.dx^i \otimes dx^j$, $B = B_{ij}.dx^i \otimes dx^j \in \otimes_2(M)$, $u \in T(M)$.

Продолженный ковариантный дифференциальный оператор ${}^e\nabla_u = \nabla_u - \overline{A}_u$ может удовлетворять добавочным условиям, определяющим структуру смешанного тензорного поля $\overline{A}_u$ (действующего на тензорные поля как ковариантный дифференциальный оператор). Можно предъявить условия к оператору ${}^e\nabla_u$, приводящие к определенным свойствам тензорного поля $\overline{A}_u$, и, наоборот, можно предъявить условия к тензорному полю $\overline{A}_u$, приводящие к определенным свойствам оператора ${}^e\nabla_u$.

8. МЕТРИКИ

Понятие оператора свертки было введено с условием, что он действует на два вектора, принадлежащих двум различным векторным пространствам одинаковой размерности, приложенным к точке дифференцируемого многообразия M, и сопоставляет им функцию на M. Если же оператор свертки действует на два вектора, принадлежащих одному и тому же векторному пространству, то такой оператор связан с понятием метрики.

Дефиниция. *Метрика.* Оператор свертки S, действующий на два вектора одного и того же векторного пространства и отображающий их на элемент поля F (R или C).

Дефиниция. *Метрика на дифференцируемом многообразии M.* Оператор свертки S, действующий на два векторных поля, чьи векторы в каждой заданной точке $x \in M$ принадлежат одному и тому же векторному пространству, т.е. $S : (u, v) \to S(u, v) \in C^r(M)$, $u_x, v_x \in N_x(M)$.

8.1. Ковариантная метрика

Дефиниция. *Ковариантная метрика.* Оператор свертки S, действующий на два (контравариантных) векторных поля на многообразии M, чье *действие* отождествляется с *действием* ковариантного симметричного тензорного поля ранга два на двух векторных полях, т.е.

$$S(u,v) \equiv g(u,v) := S(g,q) = S(g,u \otimes v) = S(g \otimes (u \otimes v)) \ , \quad q = u \otimes v. \tag{141}$$

Тензор $g = g_{\alpha\beta}.e^{\alpha}.e^{\beta} = g_{ij}.dx^i.dx^j$ называется *ковариантным метрическим тензорным полем (ковариантной метрикой)*, и $g(x) = g_x \in \otimes_{2/x}(M)$ называется *ковариантным метрическим тензором (ковариантной метрикой)* в точке $x \in M$.

a) Действие ковариантной метрики на два векторных поля в координатном базисе

$$g(u,v) = g_{kl}.f^k{}_i.f^l{}_j.u^i.v^j = g_{\overline{ij}}u^i.v^j = g_{kl}.u^{\overline{k}}.v^{\overline{l}} = u_l.v^{\overline{l}} = u_{\overline{j}}.v^j,$$
$$g_{\overline{ij}} = f^k{}_i.f^l{}_j.g_{kl} \ , \qquad u^{\overline{k}} = f^k{}_i.u^i,$$
$$u_{\overline{j}} = g_{\overline{ij}}.u^i, \qquad u_l = g_{kl}.u^{\overline{k}} = g_{\overline{k}l}.u^k. \tag{142}$$

Замечание. *$g(u,v)$ называется также скалярным произведением векторных полей u и v на многообразии M. Когда $v = u$, то*

$$g(u,u) \quad = \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}.u^{\alpha}.u^{\beta} = g_{\alpha\beta}.u^{\overline{\alpha}}.u^{\overline{\beta}} = u_{\overline{\alpha}}.u^{\alpha} = u_{\alpha}.u^{\overline{\alpha}} = \tag{143}$$
$$:= \quad u^2 = \pm \mid u \mid^2 := \pm\, l_u^2, \tag{144}$$

и $g(u,u) = u^2 = \pm\, l_u^2$ называется также квадратом длины векторного поля u.

b) Действие ковариантной метрики на векторное поле u можно определить с помощью оператора свертки S в координатном базисе следующим образом:

$$g(u) := S^j{}_k(g,u) = S^j{}_k(g_{ij}.dx^i.dx^j, u^k.\partial_k) =$$
$$= g_{ij}.u^k.S^j{}_k(dx^i.dx^j, \partial_k) = g_{ij}.u^k.f^j{}_k.dx^i =$$
$$= g_{i\overline{k}}.u^k.dx^i = g_{ij}.u^{\overline{j}}.dx^i = u(g), \ g_{i\overline{k}} = g_{ij}.f^j{}_k \ . \tag{145}$$

Замечание. *Краткое обозначение $u(g)$ эквивалентно аббревиатуре $(u)(g) := S(u,g)$. Это не следует рассматривать как результат действия векторного поля u на g. Такое действие u на g (пока) не определено.*

Действие ковариантной метрики g на векторное поле u, рассматриваемое в индексной форме (в заданном базисе), называется *опусканием индексов* с помощью g. В результате действия g на вектор $u \in T(M)$ получается ковекторное поле $g(u) \in T^*(M)$. На основании этого g можно определить как линейное отображение (оператор), которое отображает каждый элемент из

$T(M)$ на соответствующий элемент из $T^*(M)$, т.е. $g : u \to g(u) \in T^*(M)$, $u \in T(M)$.

Ковариантная симметричная аффинная связность. В некоординатном базисе ковариантная аффинная связность P будет иметь вид

$$P^{\gamma}_{\alpha\beta} = \overline{P}\,^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}.U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \ , \tag{146}$$

где

$$\overline{P}\,^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(P^{\gamma}_{\alpha\beta} + P^{\gamma}_{\beta\alpha} + C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) \ ,$$
$$U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = P^{\gamma}_{\alpha\beta} - P^{\gamma}_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -U_{\beta\alpha}{}^{\gamma} \ . \tag{147}$$

Компоненты ковариантной производной от ковариантного метрического тензорного поля g можно представить с помощью ковариантной симметричной аффинной связности. Если

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = e_{\gamma} g_{\alpha\beta} + \overline{P}^{\delta}_{\alpha\gamma}.g_{\delta\beta} + \overline{P}^{\delta}_{\beta\gamma}.g_{\alpha\delta} \tag{148}$$

есть ковариантная производная компонент $g_{\alpha\beta}$ ковариантного метрического тензора g по отношению к ковариантной симметричной аффинной связности $\overline{P}$ в некоординатном базисе, то

$$g_{\alpha\beta/\gamma} = g_{\alpha\beta;\gamma} + \frac{1}{2}\,(U_{\alpha\gamma}{}^{\delta}.g_{\delta\beta} + U_{\beta\gamma}{}^{\delta}.g_{\alpha\delta}) \ . \tag{149}$$

С другой стороны, компоненты ковариантной симметричной аффинной связности $\overline{P}^{\delta}_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$g_{\delta\gamma}.\overline{P}^{\delta}_{\alpha\beta} = -\{\alpha\beta, \gamma\} + K_{\alpha\beta\gamma} + C_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha}.U_{\beta\gamma}{}^{\delta} + g_{\delta\beta}.U_{\alpha\gamma}{}^{\delta}) =$$
$$= -\{\alpha\beta, \gamma\} + C_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma;\beta} + g_{\beta\gamma;\alpha} - g_{\alpha\beta;\gamma}) \ , \tag{150}$$

где

$$\{\alpha\beta, \gamma\} = \frac{1}{2}(e_{\alpha} g_{\beta\gamma} + e_{\beta} g_{\alpha\gamma} - e_{\gamma} g_{\alpha\beta}) \ ,$$
$$K_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma/\beta} + g_{\beta\gamma/\alpha} - g_{\alpha\beta/\gamma}) \ ,$$
$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha}.C_{\beta\gamma}{}^{\delta} + g_{\delta\beta}.C_{\alpha\gamma}{}^{\delta} + g_{\delta\gamma}.C_{\alpha\beta}{}^{\delta}) \ . \tag{151}$$

С помощью последних выражений $P^{\gamma}_{\alpha\beta}$ можно представить в виде

$$g_{\delta\gamma}.P^{\delta}_{\alpha\beta} = -\{\alpha\beta, \gamma\} + K_{\alpha\beta\gamma} + U_{\alpha\beta\gamma} + C_{\alpha\beta\gamma} \ , \tag{152}$$

где

$$U_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha}.U^{\delta}_{\beta\gamma} + g_{\delta\beta}.U^{\delta}_{\alpha\gamma} + g_{\delta\gamma}.U^{\delta}_{\alpha\beta}) \ . \qquad (153)$$

В специальном случае, когда накладывается условие $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, можно доказать следующее предложение.

Предложение. *Необходимым и достаточным условием для* $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ *является условие*

$$g_{\delta\gamma}.\overline{P}^{\ \delta}_{\alpha\beta} = -\{\alpha\beta, \gamma\} + C_{\alpha\beta\gamma}. \qquad (154)$$

Доказательство немедленно следует из (150).

В координатном базисе ковариантная производная от компонент g_{ij} аналогичным образом может быть представлена с помощью компонент P^i_{jk} ковариантной симметричной аффинной связности в следующем виде:

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} + \overline{P}^{\ l}_{ik}.g_{lj} + \overline{P}^{\ l}_{jk}.g_{il} + \frac{1}{2}(U^l_{ik}.g_{lj} + U^l_{jk}.g_{il}) =$$

$$= g_{ij/k} + \frac{1}{2}(U^l_{ik}.g_{lj} + U^l_{jk}.g_{il}) \ , \qquad (155)$$

где

$$g_{ij/k} = g_{ij,k} + \overline{P}^{\ l}_{ik}.g_{lj} + \overline{P}^{\ l}_{jk}.g_{il} \ . \qquad (156)$$

Действие дифференциального оператора Ли на ковариантную метрику. В координатном базисе $\pounds_\xi g$ принимает вид

$$\pounds_\xi g = (\pounds_\xi g_{ij}).dx^i.dx^j =$$

$$= [g_{ij;k}.\xi^k + g_{kj}.\xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{i}} + g_{ik}.\xi^{\overline{k}}{}_{;\underline{j}} + (g_{kj}.T_{l\underline{i}}{}^{\overline{k}} + g_{ik}.T_{l\underline{j}}{}^{\overline{k}}).\xi^l].dx^i.dx^j \ . \qquad (157)$$

Следующие соотношения также выполняются:

$$\pounds_\xi[g(u,v)] = \xi[g(u,v)] = (\pounds_\xi g)(u,v) + g(\pounds_\xi u, v) + g(u, \pounds_\xi v),$$

$$\pounds_\xi[g(u)] = (\pounds_\xi g)(u) + g(\pounds_\xi u), \quad \xi, u, v \in T(M). \qquad (158)$$

Действие дифференциального оператора Ли называется *смещением вдоль векторного поля*. На основе таких смещений метрического тензорного поля g можно определить понятия произвольного (неметрического) смещения вдоль, квазипроективного смещения вдоль, конформные движения и (просто) движения и рассмотреть их аналогично в (L_n, g)-пространствах. Здесь мы только определим различные типы таких смещений.

1. Произвольные (неметрические) смещения вдоль:

$$\pounds_\xi g = q_\xi, \quad \forall \xi \in T(M), \quad q_\xi \in \otimes_{\mathrm{sym2}}(M).$$

2. Квазипроективные смещения вдоль:

$$\pounds_\xi g = \frac{1}{2}[p \otimes g(\xi) + g(\xi) \otimes p] \ , \quad \xi \in T(M), \qquad p \in T^*(M).$$

3. Конформно-инвариантные смещения вдоль (конформные движения) :

$$\pounds_\xi g = \lambda.g, \qquad \lambda \in C^r(M) \ , \qquad \xi \in T(M).$$

4. Изометрические смещения вдоль (движения):

$$\pounds_\xi g = 0, \qquad \xi \in T(M).$$

Для всех типов смещений вдоль можно найти изменения скалярного произведения двух контравариантных векторных полей, так же, как и изменения длины тех же полей, и использовать их аналогично как в (L_n, g)-пространствах.

8.2. Ковариантная проективная метрика. Если задано ковариантное метрическое поле g и существует векторное поле u, квадрат длины которого $g(u,u) = e \neq 0$, то можно построить ковариантное тензорное поле, ортогональное векторному полю u. Оно обладает свойствами, аналогичными свойствам ковариантного тензорного поля g при действии на векторные поля в каждом ортогональном к $u(x) = u_x \in T_x(M)$ подпространстве $T_x^{\perp u}(M)$ в $T_x(M)$, где $(T_x^{\perp u}(M) = \{\xi_x\} : g_x(\xi_x, u_x) = 0)$, $g_x \in \otimes_{\mathrm{sym2}/x}(M)$.

Дефиниция. *Ковариантная проективная метрика.* Ковариантная метрика, ортогогональная к заданному неизотропному (ненулевому) векторному полю u $[e = g(u,u) \neq 0]$, т.е. ковариантная метрика h_u, удовлетворяющая условию $h_u(u) = u(h_u) = 0$ и построенная с помощью ковариантной метрики g и u в виде

$$h_u = g - \frac{1}{g(u,u)}.g(u) \otimes g(u) = g - \frac{1}{e}.g(u) \otimes g(u) \ . \tag{159}$$

Свойства ковариантной проективной метрики следуют из ее построения и из свойств ковариантной метрики g:

a) $h_u(u) = u(h_u) = 0$, $[g(u)](u) = g(u,u) = e$.

b) $h_u(u,u) = 0$.

c) $h_u(u,v) = h_u(v,u) = 0$, $\forall v \in T(M)$.

8.3. Контравариантная метрика

Дефиниция. *Контравариантная метрика.* Оператор свертки S, действующий на два ковекторных поля на многообразии M, чье *действие* отождествляется с *действием* контравариантного симметричного тензорного поля ранга 2 на векторные поля, т.е.

$$S(p,q) \equiv \overline{g}(p,q) := S(\overline{g}, w) := S(\overline{g}, p \otimes q) = S(\overline{g} \otimes (p \otimes q)) \ , \ \ w = p \otimes q \ .$$

Тензорное поле $\overline{g} = g^{\alpha\beta}.e_\alpha.e_\beta = g^{ij}.\partial_i.\partial_j$ называется *контравариантным метрическим тензорным полем (контравариантной метрикой).* $\overline{g}(x) = = \overline{g}_x \in \otimes^2_x(M)$ называется *контравариантным метрическим тензором* в точке $x \in M$.

Свойства контравариантной метрики определяются свойствами оператора свертки и отождествлением его с контравариантным симметричным тензорным полем ранга 2. На этом основании можно доказать следующие свойства.

a) Действие контравариантной метрики на два ковариантных векторных поля в координатном базисе

$$\overline{g}(p,q) = g^{kl}.f^i{}_k.f^j{}_l.p_i.q_j = g^{\overline{ij}}.p_i.q_j = g^{kl}.p_{\overline{k}}.q_{\overline{l}} = p^{\overline{j}}.q_j = p_k.q^{\overline{k}} \ ,$$
$$p_{\overline{k}} = f^i{}_k.p_i \ , \qquad q_{\overline{l}} = f^j{}_l.q_j \ , \qquad p^{\overline{j}} = g^{\overline{ji}}.p_i \ .$$

(Когда $q = p$, то $\overline{g}(p,p) = p^2 = \pm \mid p \mid^2$ называется *квадратом длины* ковекторного поля p.)

b) Действие контравариантной метрики $\overline{g}$ на ковариантное векторное поле

$$\overline{g}(p) = p(\overline{g}) = g^{ij}.p_k.f^k{}_j.\partial_i = g^{ij}.p_{\overline{j}}.\partial_i = g^{i\overline{k}}.p_k.\partial_i = p^i.\partial_i \ ,$$
$$g^{i\overline{k}} = g^{il}.f^k{}_l \ , \qquad p^i = g^{ij}.p_{\overline{j}} = g^{i\overline{j}}.p_j \ .$$

Действие контравариантной метрики $\overline{g}$ на ковекторное поле p в заданном базисе называется *поднятием индексов* с помощью контравариантной метрики. В результате этого действия получается векторное поле $\overline{g}(p)$. На этом основании $\overline{g}$ можно определить как линейное отображение (оператор), которое отображает элемент из $T^*(M)$ в элемент из $T(M)$:

$$\overline{g} : p \to \overline{g}(p) \in T(M) \ , \quad p \in T^*(M) \ .$$

Связь между контравариантной и ковариантной метриками можно определить согласно условиям

$$\overline{g}[g(u)] = u \ , \qquad u \in T(M) \ , \qquad g[\overline{g}(p)] = p \ , \qquad p \in T^*(M) \ . \qquad (160)$$

В координатном базисе эти условия принимают вид

$$g^{ij}.g_{\overline{jk}} = g^i_k \ , \ g_{ij}.g^{\overline{jk}} = g^k_i \ . \tag{161}$$

Из последних выражений следует, что

$$g[\overline{g}] = g_{ij}g^{\overline{ij}} = n \ , \quad \overline{g}[g] = g^{\overline{ij}}.g_{ij} = n \ , \qquad \dim M = n \ . \tag{162}$$

Контравариантная симметричная аффинная связность. Из преобразований компонент контравариантной аффинной связности следует, что величины

$$\frac{1}{2}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^\gamma) \text{ или } \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$$

преобразуются таким же образом и сами составляют контравариантную аффинную связность. Этот факт обычно используется для представления контравариантной аффинной связности через ее симметричную и антисимметричную части в следующем виде:

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}{}^k_{ij} - \frac{1}{2}T_{ij}{}^k \ , \qquad \overline{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}) \ , \quad T_{ij}{}^k = \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}$$
$$\text{(в координатном базисе)} \ ,$$
$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}{}^\gamma \ , \qquad \overline{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^\gamma) \ ,$$
$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}{}^\gamma$$
$$\text{(в некоординатном базисе)} \ . \tag{163}$$

Величины $\overline{\Gamma}{}^k_{ij}$ ($\overline{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$) называются компонентами *контравариантной симметричной аффинной связности* в координатном (соответственно, в некоординатном) базисе.

Компоненты ковариантной производной от контравариантного метрического поля $\overline{g}$ могут быть представлены с помощью контравариантной симметричной аффинной связности. Если мы введем обозначения

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = e_\gamma g^{\alpha\beta} + \overline{\Gamma}{}^\alpha_{\delta\gamma}.g^{\delta\beta} + \overline{\Gamma}{}^\beta_{\delta\gamma}.g^{\alpha\delta} \quad \text{(в некоординатном базисе)} \ ,$$
$$g^{ij}{}_{/k} = g^{ij}{}_{,k} + \overline{\Gamma}{}^i_{lk}.g^{lj} + \overline{\Gamma}{}^j_{lk}.g^{il} \qquad \text{(в координатном базисе)} \ , \tag{164}$$

где $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma}$ являются ковариантными производными компонент контравариантного метрического тензора $\overline{g}$ по отношению к контравариантной симметричной аффинной связности $\overline{\Gamma}$ в некоординатном базисе, то

$$g^{\alpha\beta}{}_{/\gamma} = g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} - \frac{1}{2}(T_{\delta\gamma}{}^\alpha.g^{\delta\beta} + T_{\delta\gamma}{}^\beta.g^{\alpha\delta}) \ . \tag{165}$$

Компоненты контравариантной симметричной аффинной связности можно представить через $g^{\alpha\beta}{}_{/\kappa}.g^{\kappa\gamma}$ в следующем виде:

$$g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.\overline{\Gamma}{}^{\gamma}_{\delta\kappa} = \overline{K}{}^{\alpha\beta\gamma} - \{^{\alpha\beta,\gamma}\} - \overline{C}{}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(g^{\beta\kappa}T_{\kappa\delta}{}^{\alpha} + g^{\alpha\kappa}T_{\kappa\delta}{}^{\beta}) \ , \quad (166)$$

где

$$\{^{\alpha\beta,\gamma}\} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\kappa}.e_{\kappa}g^{\beta\gamma} + g^{\beta\kappa}.e_{\kappa}g^{\alpha\gamma} - g^{\gamma\kappa}.e_{\kappa}g^{\alpha\beta}) \ ,$$

$$\overline{K}{}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\gamma}{}_{/\kappa}.g^{\beta\kappa} + g^{\beta\gamma}{}_{/\kappa}.g^{\alpha\kappa} - g^{\alpha\beta}{}_{/\kappa}.g^{\gamma\kappa}) \ ,$$

$$\overline{C}{}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}.g^{\beta\kappa}.C_{\kappa\delta}{}^{\alpha} + g^{\gamma\delta}.g^{\alpha\kappa}.C_{\kappa\delta}{}^{\beta} + g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.C_{\delta\kappa}{}^{\gamma}) \ . \quad (167)$$

Скобки $\{^{\alpha\beta,\gamma}\}$ называются *символами Кристоффеля первого рода* для контравариантной симметричной аффинной связности в некоординатном базисе.

Компоненты $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ контравариантной аффинной связности Γ можно записать с помощью введенных обозначений в виде

$$g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.\Gamma^{\gamma}_{\delta\kappa} = -\{^{\alpha\beta,\gamma}\} + \overline{K}^{\alpha\beta\gamma} - \overline{T}^{\alpha\beta\gamma} - \overline{C}^{\alpha\beta\gamma} \ , \quad (168)$$

где

$$\overline{T}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}.g^{\beta\kappa}.T_{\kappa\delta}{}^{\alpha} + g^{\gamma\delta}.g^{\alpha\kappa}.T_{\kappa\delta}{}^{\beta} + g^{\alpha\delta}.g^{\beta\kappa}.T_{\delta\kappa}{}^{\gamma}) \ . \quad (169)$$

Учитывая следующие связи между компонентами ковариантной метрики, компонентами контравариантной метрики и их производными

$$g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}.g^{\beta\gamma} = g^{\gamma}_{\alpha}, \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}.e_{\kappa}g^{\delta\gamma} = -g^{\delta\gamma}.e_{\kappa}(g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}),$$

$$g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}.g^{\gamma\delta}{}_{/\kappa} = -g^{\gamma\delta}.g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}/\kappa}, \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}/\kappa} = f^{\gamma}{}_{\alpha}.f^{\beta}_{\delta}.g_{\gamma\beta/\kappa}, \quad (170)$$

мы можем представить компоненты контравариантной аффинной связности Γ в некоординатном базисе:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \{^{\gamma}_{\alpha\beta}\} - \overline{K}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{S}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \ , \quad (171)$$

где

$$\{^{\gamma}_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}[e_{\beta}(g_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}) + e_{\alpha}(g_{\overline{\beta}\overline{\delta}}) - e_{\delta}(g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}})] = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\{^{\rho\sigma,\gamma}\},$$

$$\overline{K}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\overline{K}{}^{\rho\sigma\gamma}, \ \overline{S}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\overline{T}{}^{\rho\sigma\gamma}, \ \overline{C}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -g_{\overline{\alpha}\overline{\rho}}.g_{\overline{\beta}\overline{\sigma}}.\overline{C}{}^{\rho\sigma\gamma}. \quad (172)$$

Скобки $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ называются *обобщенными символами Кристоффеля второго рода* для контравариантной связности в некоординатном базисе.

Аналогично, если заданы контравариантные и ковариантные метрические поля, ковариантная аффинная связность может быть представлена в следующем виде:

$$P^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\underline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} + \underline{K}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \underline{U}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \underline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \ , \tag{173}$$

где

$$\begin{aligned} &\underline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} = g^{\overline{\gamma\sigma}}.\{\alpha\beta, \gamma\} \ , && \underline{K}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g^{\overline{\gamma\sigma}}.K_{\alpha\beta\sigma} \ , \\ &\underline{U}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g^{\overline{\gamma\sigma}}.U_{\alpha\beta\sigma} \ , && \underline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g^{\overline{\gamma\sigma}}.C_{\alpha\beta\sigma} \ . \end{aligned} \tag{174}$$

Подчеркнутые скобки $\underline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}}$ называются *обобщенными символами Кристоффеля второго рода* для ковариантной симметричной аффинной связности в некоординатном базисе.

Такие же выражения можно получить и в координатном базисе.

В специальном случае, когда накладываются условия $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0$, т.е. когда ковариантные производные контравариантной метрики по отношениию к контравариантной симметричной аффинной связности равняются нулю, компоненты этой связности $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} - \overline{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$.

Последнее выражение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось равенство $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0$. В координатном базисе такое условие (чтобы выполнялось равенство $g^{ij}{}_{/k} = 0$) принимает следующий вид: $\overline{\Gamma}^{k}_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$.

На основании связей, существующих между ковариантной производной контравариантного тензорного метрического поля и ковариантной же производной ковариантного тензорного метрического поля, а именно:

$$\nabla_{\xi} g = -g(\nabla_{\xi}\overline{g})g, \quad (\nabla_{\xi}\overline{g})[g(u)] = -\overline{g}[(\nabla_{\xi} g)(u)], \quad \forall\xi, \forall u \in T(M),$$

$$\nabla_{\xi}\overline{g} = -\overline{g}(\nabla_{\xi} g)\overline{g}, \quad (\nabla_{\xi} g)[\overline{g}(p)] = -g[(\nabla_{\xi}\overline{g})(p)],$$
$$\forall\xi \in T(M), \quad \forall p \in T^{*}(M),$$

можно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между переносами метрик g и $\overline{g}$. *Каждый перенос ковариантного тензорного метрического поля g индуцирует соответствующий перенос контравариантного тензорного метрического поля $\overline{g}$ и наоборот.*

8.4. Контравариантная проективная метрика. Понятие контравариантной проективной метрики по отношению к неизотропному (ненулевому) контравариантному векторному полю u можно ввести двумя различными путями:

a) вводя контравариантную проективную метрику по определению

$$h^u = \overline{g} - \frac{1}{g(u,u)}.u \otimes u = \overline{g} - \frac{1}{e}.u \otimes u \ , \quad e = g(u,u) \neq 0 \ ; \tag{175}$$

b) вводя ее, отправляясь от уже известной нам ковариантной проективной метрики и учитывая при этом соотношения между ковариантной и контравариантной метриками:

$$h^u = \overline{g}(h_u)\overline{g} = \overline{g} - \frac{1}{e}.u \otimes u, \quad \overline{g}(g)\overline{g} = \overline{g}, \quad \overline{g}(g(u) \otimes g(u))\overline{g} = u \otimes u \ . \tag{176}$$

h^u называется *контравариантной проективной метрикой* по отношению к неизотропному векторному полю u.

Свойства контравариантной проективной метрики определяются ее структурой.

9. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ ДЛЯ КОВАРИАНТНОГО ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

9.1. Тождество Бианки первого типа для ковариантного тензора кривизны. Существование контравариантной и ковариантной метрик позволяет рассмотреть действие оператора кривизны на ковекторное поле $g(v) = g_{\alpha\beta}.v^{\overline{\beta}}.e^{\alpha} = g_{ij}.v^{\overline{j}}.dx^i$, построенное с помощью ковариантной метрики g и векторного поля v.

Тождество

$$\begin{aligned} &< \overline{g}\{([R(\xi,u)]g)(v)\} > \equiv < \overline{g}([R(\xi,u)][g(v)]) > - < [R(\xi,u)]v > \equiv \\ &\equiv < \overline{g}([R(\xi,u)][g(v)]) > - < T(T(\xi,u),v) > - < (\nabla_{\xi}T)(u,v) > \end{aligned} \tag{177}$$

называется *тождеством Бианки первого типа (типа 1) для ковариантного тензора кривизны*.

В координатном базисе тождество Бианки первого типа записывается в виде

$$P^l{}_{<ijk>} \equiv -g^{m\overline{n}}.R^{\overline{l}}{}_{m<ij}.g_{k>n} \ , \tag{178}$$

$$R^l{}_{<ijk>} \equiv -g^{l\overline{m}}.g_{mn}.P^n{}_{<\overline{i}jk>} \equiv T_{<ij}{}^l{}_{;k>} + T_{<ij}{}^m.T_{mk>}{}^l \ . \tag{179}$$

Очевидно, что вид тождества Бианки первого типа для компонент ковариантного тензора кривизны не так прост, как вид тождества Бианки для компонент контравариантного тензора кривизны.

9.2. Тождество Бианки второго типа для ковариантного тензора кривизны. Действие оператора $(\nabla_w R)(\xi, u)$ можно расширить до действия на ковариантные векторные и тензорные поля аналогично тому, как это делается в случае контравариантных векторных и тензорных полей. Используя соотношение

$$\nabla_w\{[R(\xi,u)]p\} = [(\nabla_w R)(\xi,u)]p + [R(\nabla_w \xi, u)]p + \\ +[R(\xi,\nabla_w u)]p + [R(\xi,u)](\nabla_w p), \quad w,\xi,u \in T(M), \quad p \in T^*(M), \tag{180}$$

мы можем найти тождество

$$< (\nabla_w R)(\xi,u) > p \equiv < R(w, T(\xi,u)) > p, \tag{181}$$

где

$$< (\nabla_w R)(\xi,u) > p = [(\nabla_w R)(\xi,u)]p + [(\nabla_u R)(w,\xi)]p + [(\nabla_\xi R)(u,w)]p,$$

$$< R(w,T(\xi,u)) > p = [R(w,T(\xi,u))]p + [R(u,T(w,\xi))]p + [R(\xi,T(u,w))]p. \tag{182}$$

Тождество (181) называется *тождеством Бианки второго типа (типа 2) для ковариантного тензора кривизны*.

В координатном базисе тождество Бианки второго типа записывается в виде

$$\begin{aligned} P^i{}_{j<kl;m>} &= P^i{}_{jkl;m} + P^i{}_{jmk;l} + P^i{}_{jlm;k} \equiv P^i{}_{j<kn}.T_{lm>}{}^n = \\ &= P^i{}_{jkn}.T_{lm}{}^n + P^i{}_{jmn}.T_{kl}{}^n + P^i{}_{jlr}.T_{mk}{}^r. \end{aligned} \tag{183}$$

10. ИНВАРИАНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА

10.1. Дефиниция и свойства. Понятие элемента объема на многообразии M можно обобщить до понятия инвариантного элемента объема [14].

Дефиниция. *Элемент объема на многообразии* M $(\dim M = n)$ определяется как

$$d^{(n)}x = d^{(n)}x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \quad \text{(в координатном базисе)},$$
$$dV_n = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \quad \text{(в некоординатном базисе)}.$$

Свойства элемента объема можно представить в следующем виде:

$$d^{(n)}x = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\omega^A = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.d\widehat{x}^A, \qquad d^{(n')}x' = J^{-1}.d^{(n)}x,$$

$$dV_n = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\omega^A = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\widehat{e}^A, \qquad dV'_n = J^{-1}.dV_n, \tag{184}$$

где $J = \det(A_{\alpha'}{}^{\alpha}) = \det(\partial x^i / \partial x^{i'})$, $dV'_n = e^{1'} \wedge ... e^{n'}$, $\varepsilon_A = \varepsilon_{i_1 ... i_n}$, $\omega^A = dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n}$, ε_A есть символ Леви — Чивита [14],

$$\varepsilon_{A'}.\omega^{A'} = J^{-1}.\varepsilon_A.\omega^A \ , \ \varepsilon_A.\omega^A = J.\varepsilon_{A'}.\omega^{A'},$$

$$\varepsilon_{A'}.d\widehat{x}^{\,A'} = J^{-1}.\varepsilon_A.d\widehat{x}^{\,A} \ , \ \varepsilon_A.d\widehat{x}^{\,A} = J.\varepsilon_{A'}.d\widehat{x}^{\,A'},$$

$$d^{(n)}x = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\omega^A = J.\frac{1}{n!}.\varepsilon_{A'}.\omega^{A'} = \frac{1}{n!}.J.\varepsilon_{A'}.d\widehat{x}^{\,A'}.$$

Элемент объема преобразуется так же, как тензорная плотность веса $\omega = -\frac{1}{2}$. Следовательно, чтобы построить инвариантный элемент объема (сохраняющий свою форму и независимый от выбора вполне антисимметричного тензорного базиса), необходимо элемент объема умножить на тензорную плотность веса $\omega = \frac{1}{2}$ и ранга 0. Так как ковариантное метрическое тензорное поле связано с основными характеристиками векторных (и ковекторных) полей и определяет собой понятия (такие, как длина вектора, косинус угла между двумя векторами), которые в евклидовой геометрии относятся к понятию элемента объема, то ковариантная метрическая тензорная плотность $\widetilde{Q}_g$ веса $\omega = \frac{1}{2}$ и ранга 0 ($(\widetilde{Q}_g =\mid d_g \mid^{\frac{1}{2}})$) является подходящим множителем к элементу объема [14].

Дефиниция. *Инвариантный элемент объема $d\omega$ на многообразии M* $(\dim M = n)$ равен

$$d\omega = \sqrt{-d_g}.d^{(n)}x := \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A, \quad \overline{\omega}^A = \sqrt{-d_g}.\,\omega^A, \quad d_g < 0$$

(инвариантный элемент объема в координатном базисе),

$$d\omega = \sqrt{-d_g}.dV_n, \quad d_g < 0$$

(инвариантный элемент объема в некоординатном базисе).

Из того, как преобразуется величина $\sqrt{-d_g}$: $\sqrt{-d'_g} = \pm J.\sqrt{-d_g}$ при переходе от одной координатной карты к другой, следует, что при таком переходе инвариантный элемент объема сохраняет свою форму: $d\omega' = \pm\, d\omega$, где

$$d\omega' \ = \ \sqrt{-d'_g}.d^{(n')}x' \ \text{(в координатном базисе)},$$

$$d\omega' \ = \ \sqrt{-d'_g}.dV'_n \ \text{(в некоординатном базисе)}. \tag{185}$$

Замечание. *Знак $(-)$ при $\pm\, d\omega$ можно опустить вследствие одинаковой конфигурации (порядка, ориентации) базисных векторных полей в старом и в новом тензорных базисах.*

Из определения инвариантного элемента объема вытекает следующая связь с его структурой:

$$d\omega' = \frac{1}{n!}.\sqrt{-d'_g}.\varepsilon_{A'}.\omega^{A'} = \frac{1}{n!}.\sqrt{-d_g}.\varepsilon_A.d\omega^A = d\omega \ . \tag{186}$$

10.2. Действие оператора ковариантного дифференцирования на инвариантный элемент объема. Действие оператора ковариантного дифференцирования на инвариантный элемент объема определяется его действием на элементы, из которых построен инвариантный элемент объема (символ Леви — Чивита, полностью антисимметричный тензорный базис, метрическая тензорная плотность). Из $d\omega = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A$ и $\nabla_\xi(d\omega)$ следует

$$\nabla_\xi(d\omega) = \nabla_\xi\left[\frac{1}{n!}.(\varepsilon_A.\overline{\omega}^A)\right] = \frac{1}{n!}[(\xi\varepsilon_A).\overline{\omega}^A + \varepsilon_A.\nabla_\xi\overline{\omega}^A] \ . \tag{187}$$

$\nabla_\xi(d\omega)$ получается в виде

$$\nabla_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].\frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A = \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].d\omega \ . \tag{188}$$

$\nabla_\xi(d\omega)$ называется *ковариантной производной инвариантного элемента объема* $d\omega$ вдоль векторного поля ξ.

10.3. Действие дифференциального оператора Ли на инвариантный элемент объема. Действие дифференциального оператора Ли на инвариантный элемент объема определяется аналогично действию оператора ковариантного дифференцирования:

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{n!}.\pounds_\xi(\varepsilon_A.\overline{\omega}^A) = \frac{1}{n!}[(\xi\varepsilon_A).\overline{\omega}^A + \varepsilon_A.\pounds_\xi\overline{\omega}^A] = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\pounds_\xi\overline{\omega}^A \ . \tag{189}$$

После некоторых вычислений для $\pounds_\xi(d\omega)$ получаем

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].\overline{\omega}^A = \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].\frac{1}{n!}.\varepsilon_A.\overline{\omega}^A \ ,$$

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].d\omega \ . \tag{190}$$

$\pounds_\xi(d\omega)$ называется *производной Ли инвариантного элемента объема* $d\omega$ вдоль векторного поля ξ.

Специальный случай: метрические переносы $(\nabla_\xi g = 0) : \nabla_\xi(d\omega) = 0$.

Специальный случай: изометрические смещения вдоль (движения) $(\pounds_\xi g = 0) : \pounds_\xi(d\omega) = 0$.

В случаях, когда требуется в качестве дополнительного условия сохранение объема, можно ввести новый ковариантный дифференциальный оператор или новый дифференциальный оператор Ли, которые не изменяют инвариантного элемента объема, т.е. действуют на $d\omega$ аналогично тому, как действуют операторы ∇_ξ и $\pounds_\xi$ на постоянные функции.

10.4. Ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема. Вариация инвариантного элемента объема $d\omega$ при действии на него ковариантного дифференциального оператора ∇_ξ

$$\nabla_\xi (d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].d\omega$$

позволяет ввести новый ковариантный дифференциальный оператор ${}^\omega\nabla_\xi$, сохраняющий инвариантный элемент объема.

Дефиниция. Оператор ${}^\omega\nabla_\xi$ есть *ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема* $d\omega$ вдоль векторного поля ξ:

$${}^\omega\nabla_\xi = \nabla_\xi - \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g] \ .$$

Свойства ${}^\omega\nabla_\xi$ определяются свойствами ковариантного дифференциального оператора и существованием ковариантного метрического тензорного поля g, связанного с его контравариантным метрическим тензорным полем $\overline{g}$.

a) Действие на инвариантный элемент объема $d\omega$:

$${}^\omega\nabla_\xi (d\omega) = 0. \tag{191}$$

Это следует из определения ${}^\omega\nabla_\xi$ и (188).

b) Действие на базисные векторные поля:

$${}^\omega\nabla_{\partial_j}\partial_i = \left(\Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}.g^{\overline{lm}}.g_{lm;j}.g^k_i\right).\partial_k \ . \tag{192}$$

c) Действие на базисные ковекторные поля:

$${}^\omega\nabla_{\partial_j} dx^i = \left(P^i_{kj} - \frac{1}{2}.g^{\overline{lm}}.g_{lm;j}.g^i_k\right).dx^k \ . \tag{193}$$

d) Действие на функцию f на многообразии M:

$${}^\omega\nabla_\xi f = \xi f - \frac{1}{2}.\overline{g}[\nabla_\xi g].f, \quad f \in C^r(M), \ \ r \geq 1 \ . \tag{194}$$

Если мы введем краткие обозначения

$$Q_\beta = \overline{g}[\nabla_{e_\beta} g] = g^{\overline{\gamma}\overline{\delta}}.g_{\gamma\delta/\beta} \ , \qquad Q_j = \overline{g}[\nabla_{\partial_j} g] = g^{\overline{kl}}.g_{kl;j} \ , \tag{195}$$

$$Q = Q_\beta.e^\beta = Q_j.dx^j \ , \tag{196}$$

$$ {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta} \ , \quad {}^{\omega}P^{\alpha}_{\gamma\beta} = P^{\alpha}_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}.g^{\alpha}_{\gamma}.Q_{\beta} \ , \tag{197} $$

$$ Q_{\xi} = \overline{g}[\nabla_{\xi} g] = Q_{\beta}.\xi^{\beta} = Q_{j}.\xi^{j} = 2._{c}\theta_{\xi} \ , \tag{198} $$

то ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$, (192) и (193) сможем записать в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi} = \nabla_{\xi} - \frac{1}{2}.Q_{\xi} \ , \tag{199} $$

$$ {}^{\omega}\nabla_{e_{\beta}} e_{\alpha} = {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}.e_{\gamma} \ , \quad {}^{\omega}\nabla_{\partial_{j}} \partial_{i} = {}^{\omega}\Gamma^{k}_{ij}.\partial_{k} \ , \tag{200} $$

$$ {}^{\omega}\nabla_{e_{\beta}} e^{\alpha} = {}^{\omega}P^{\alpha}_{\gamma\beta}.e^{\gamma} \ , \qquad {}^{\omega}\nabla_{\partial_{j}} dx^{i} = {}^{\omega}P^{i}_{kj}.dx^{k} \ . \tag{201} $$

Величины ${}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ называются компонентами *контравариантной аффинной связности* ${}^{\omega}\Gamma$, сохраняющей инвариантный элемент объема $d\omega$ в некоординатном базисе. Величины ${}^{\omega}P^{\gamma}_{\alpha\beta}$ называются компонентами *ковариантной аффинной связности* ${}^{\omega}P$, сохраняющей инвариантный элемент объема $d\omega$ в некоординатном базисе.

Так как ${}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и ${}^{\omega}P^{\gamma}_{\alpha\beta}$ отличаются от $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $P^{\gamma}_{\alpha\beta}$, соответственно, на компоненты смешанного тензорного поля $\frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta}$ ранга 3, то ${}^{\omega}\Gamma$ и ${}^{\omega}P$ преобразуются так же, как аффинные связности Γ и P соответственно.

Действие оператора ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ на векторное поле u можно записать в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi} u = \nabla_{\xi} u - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.u \ . \tag{202} $$

Если рассматривать u как касательный вектор к кривой $x^{i}(\tau)$, т.е.

$$ u = \frac{d}{d\tau} = u^{\alpha}.e_{\alpha} = u^{i}.\partial_{i} \ , \quad u^{i} = \frac{dx^{i}}{d\tau} \ , \tag{203} $$

$$ u^{\alpha} = A_{i}{}^{\alpha}.u^{i} = A_{i}{}^{\alpha}.\frac{dx^{i}}{d\tau} \ , \quad e_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{k}.\partial_{k} \ , \quad A_{i}{}^{\alpha}.A_{\alpha}{}^{k} = g^{k}_{i} \ , \tag{204} $$

а параметр τ рассматривать как функцию другого параметра λ (со взаимно однозначным соответствием между τ и λ), т.е. положить

$$ \tau = \tau(\lambda) \ , \quad \lambda = \lambda(\tau) \ , \tag{205} $$

$$ u = \frac{d}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}.\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{d\tau}.v \ , \ v = \frac{d}{d\lambda} \ , \tag{206} $$

то ${}^{\omega}\nabla_{\xi}u$ можно выразить через векторное поле v и $\nabla_{\xi}v$ в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi}u = \frac{d\lambda}{d\tau}.\nabla_{\xi}v + \left[\xi\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.\frac{d\lambda}{d\tau}\right].v \ . \tag{207} $$

Если добавить условие на связь между λ и τ:

$$ \xi\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.\frac{d\lambda}{d\tau} = 0 \ , \tag{208} $$

то для произвольного векторного поля ξ существует решение $\lambda = \lambda(\tau)$:

$$ \lambda = \lambda_0 + \lambda_1.\int\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int Q_i.dx^i\right)\right].d\tau \ , \ \ Q_i = Q_i(x^k) \ , \ \ \lambda_0, \lambda_1 = \text{const}, \tag{209} $$

а связь между ${}^{\omega}\nabla_{\xi}u$ и $\nabla_{\xi}v$ получается в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi}u = \frac{d\lambda}{d\tau}.\nabla_{\xi}v = \left[\lambda_1.\exp\left(\frac{1}{2}\int Q_i.dx^i\right)\right].\nabla_{\xi}v \ , \ \ \lambda_1 = \text{const}. \tag{210} $$

Из последнего выражения следует, что существует возможность сопоставить действие ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ на векторное поле u (в виде касательного векторного поля на заданной кривой) с действием ∇_{ξ} на векторное поле v, получающееся из векторного поля u в результате замены параметра на кривой. Если векторное поле v переносится параллельно вдоль ξ, задаваемое оператором ковариантного дифференцирования ∇_{ξ} ($\nabla_{\xi}v = 0$), то векторное поле u переносится параллельно вдоль ξ, задаваемое оператором ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ (${}^{\omega}\nabla_{\xi}u = 0$).

Действие оператора ${}^{\omega}\nabla_{\xi}$ на метрическое тензорное поле g можно представить в виде

$$ {}^{\omega}\nabla_{\xi}g = \nabla_{\xi}g - \frac{1}{2}.Q_{\xi}.g \ . \tag{211} $$

После свертки обеих компонент ${}^{\omega}\nabla_{\xi}g$ с $\overline{g}$, т.е. для $\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_{\xi}g] = g^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}.({}^{\omega}\nabla_{\xi}g)_{\alpha\beta}$, получается равенство

$$ \overline{g}[{}^{\omega}\nabla_{\xi}g] = \left(1 - \frac{n}{2}\right).Q_{\xi}. \tag{212} $$

След свободной части выражения ${}^{\omega}\nabla_{\xi}g$, равной

$$ {}^{\underline{\omega}}\nabla_{\xi}g = {}^{\omega}\nabla_{\xi}g - \frac{1}{n}.\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_{\xi}g].g \ , \tag{213} $$

с учетом (212) можно записать в виде

$$ {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g = {}^{\omega}\nabla_\xi g + \frac{n-2}{2n}.Q_\xi.g \ . \qquad (214) $$

Используя это выражение, ${}^{\omega}\nabla_\xi g$ можно представить через его свободную часть и через след его свободной части:

$$ {}^{\omega}\nabla_\xi g = {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g - \frac{n-2}{2n}.Q_\xi.g \ , \qquad (215) $$

где $\overline{g}[{}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g] = 0$.

Специальный случай: $\dim M = n = 2: \ {}^{\omega}\nabla_\xi g = {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g$, $\overline{g}[{}^{\omega}\nabla_\xi g] = 0$.

Специальный случай: $\dim M = n = 4: \ {}^{\omega}\nabla_\xi g = {}^{\underline{\omega}}\nabla_\xi g - \frac{1}{4}.Q_\xi.g$.

Ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема, *не подчиняется правилу Лейбница*, когда действует на тензорное произведение $Q \otimes S$ двух тензорных полей Q и S:

$$ {}^{\omega}\nabla_\xi (Q \otimes S) = {}^{\omega}\nabla_\xi Q \otimes S + Q \otimes {}^{\omega}\nabla_\xi S + \frac{1}{2}.Q_\xi.Q \otimes S \ , $$

$$ Q \in \otimes^k{}_l(M) \ , \ S \in \otimes^m{}_r(M) \ . \qquad (216) $$

10.5. Бесследовый ковариантный дифференциальный оператор. Перенос Вейля. Пространство Вейля. Проблема описания гравитационного взаимодействия и объединения его с другими типами взаимодействия на дифференцируемых многообразиях с аффинной связностью и метрикой ((L_n, g)-пространства) стимулирует [1] введение аффинной связности с соответствующим ковариантным дифференциальным оператором ${}^{s}\nabla_\xi$, построенным с помощью ∇_ξ и Q_ξ:

$$ {}^{s}\nabla_\xi = \nabla_\xi - \frac{1}{n}.Q_\xi \ , \qquad \dim M = n \ . \qquad (217) $$

Действие оператора ${}^{s}\nabla_\xi$ на ковариантное метрическое тензорное поле g определяется как

$$ {}^{s}\nabla_\xi g = \nabla_\xi g - \frac{1}{n}.Q_\xi.g \ , \qquad (218) $$

с условием

$$ \overline{g}\,[{}^{s}\nabla_\xi g] = 0 \ . \qquad (219) $$

На основе этого соотношения ковариантный дифференциальный оператор ${}^{s}\nabla\xi$ называется *свободным ковариантным дифференциальным оператором без следа*.

Если перенос метрики g при ковариантном дифференциальном операторе без следа ${}^s\nabla_\xi$ подчиняется условию

$$ {}^s\nabla_\xi g = 0 \ , \tag{220} $$

эквивалентному условию для $\nabla_\xi g$:

$$ \nabla_\xi g = \frac{1}{n}.Q_\xi.g \ , \tag{221} $$

то перенос называется *переносом Вейля.*

Ковекторное поле (см. (196)) и

$$ \overline{Q} = \frac{1}{n}.Q \tag{222} $$

называется *ковекторным полем Вейля*.

Дифференцируемое многообразие M $(\dim M = n)$ с аффинной связностью и метрикой, на котором для каждого ковекторного поля $\xi \in T(M)$ перенос метрики g является переносом Вейля, называется *пространством Вейля с кручением* (*или пространством Вейля — Картана*) Y_n [1].

Свободный ковариантный дифференциальный оператор без следа ${}^s\nabla_\xi$ связан следующим образом с ковариантным дифференциальным оператором ${}^\omega\nabla_\xi$, сохраняющим инвариантный элемент объема $d\omega$:

$$ {}^\omega\nabla_\xi = {}^s\nabla_\xi - \frac{n-2}{2n}.Q_\xi = \nabla_\xi - \frac{1}{2}.Q_\xi \ . \tag{223} $$

Действия двух операторов, ${}^\omega\nabla_\xi$ и ${}^s\nabla_\xi$, идентичны, если $\dim M = n = 2$ $(Q_\xi \neq 0)$ или если $Q_\xi = 0$.

Компоненты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ аффинной связности Γ можно выразить через компоненты аффинных связностей, соответствующих операторам ${}^\omega\nabla_\xi$ и ${}^s\nabla_\xi$.

$\nabla_{e_\beta} e_\alpha$ можно записать в виде

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_{e_\alpha} e_\beta + \nabla_{e_\beta} e_\alpha - [e_\alpha, e_\beta]) - \frac{1}{2}.T(e_\alpha, e_\beta) \ , \tag{224} $$

чему соответствует представление $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ в виде

$$ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}{}^\gamma) - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^\gamma = \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^\gamma \ . \tag{225} $$

Если обозначить

$$ {}^g\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_{e_\alpha} e_\beta + \nabla_{e_\beta} e_\alpha - [e_\alpha, e_\beta]) = \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}.e_\gamma \ , \tag{226} $$

$$ {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha = Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.e_\gamma = \left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{n}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta\right).e_\gamma \ , \tag{227} $$

то получится

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{n}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{228} $$

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) \ . \tag{229} $$

Из (224), (226) и (228) следует, что

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}\left[{}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + \frac{1}{n}.Q_\beta.e_\alpha + {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha\right] \ . \tag{230} $$

Последнее равенство соответствует представлению компонент $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в виде

$$ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{n}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta + Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\right) \ . \tag{231} $$

Аналогичным образом, пользуясь соотношениями

$$ {}^{\omega}\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}.e_\gamma = \left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta\right).e_\gamma = \nabla_{e_\beta} e_\alpha - \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{232} $$

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{\omega}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha \ , $$

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) \ , $$

можно получить для $\nabla_{e_\beta} e_\alpha$ следующее выражение:

$$ \nabla_{e_\beta} e_\alpha = \frac{1}{2}\left[{}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + {}^{\omega}\nabla_{e_\beta} e_\alpha + \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha\right] \ . \tag{233} $$

Последнее равенство эквивалентно представлению компонент $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в виде

$$ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_\beta + {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) \ . \tag{234} $$

Из (228) и (229) следует связь между ${}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha$ и ${}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha$:

$$ {}^{g}\nabla_{e_\beta} e_\alpha = {}^{s}\nabla_{e_\beta} e_\alpha - \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + \frac{1}{n}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{235} $$

эквивалентная связи между $\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$:

$$\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{n}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta} \ . \tag{236}$$

С другой стороны, существует связь между ${}^{g}\nabla_{e_\beta}e_\alpha$ и ${}^{\omega}\nabla_{e_\beta}e_\alpha$:

$${}^{g}\nabla_{e_\beta}e_\alpha = {}^{\omega}\nabla_{e_\beta}e_\alpha - \frac{1}{2}.T(e_\beta, e_\alpha) + \frac{1}{2}.Q_\beta.e_\alpha \ , \tag{237}$$

соответствующая связи между $\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и ${}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$:

$$\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = {}^{\omega}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}.T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{1}{2}.g^{\gamma}_{\alpha}.Q_{\beta} \ . \tag{238}$$

10.6. Дифференциальный оператор Ли, сохраняющий инвариантный элемент объема. Действие дифференциального оператора Ли $\pounds_\xi$ на инвариантный элемент объема $d\omega$, а именно

$$\pounds_\xi(d\omega) = \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].d\omega \ ,$$

позволяет построить новый оператор, дифференциальный оператор Ли, сохраняющий элемент объема $d\omega$.

Дефиниция. ${}^{\omega}\pounds_\xi$ *:= дифференциальный оператор Ли, сохраняющий инвариантный элемент объема $d\omega$ вдоль векторного поля ξ*, равен

$${}^{\omega}\pounds_\xi = \pounds_\xi - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g] \ .$$

Свойства оператора ${}^{\omega}\pounds_\xi$ определяются свойствами дифференциального оператора Ли и существованием ковариантного метрического тензорного поля g, связанного с контравариантным метрическим тензорным полем $\overline{g}$.

a) Действие на инвариантный элемент объема $d\omega$:

$${}^{\omega}\pounds_\xi(d\omega) = 0 \ . \tag{239}$$

Это следует из определения оператора ${}^{\omega}\pounds_\xi$ и из (190).

b) Действие на базисное векторное поле:

$${}^{\omega}\pounds_{e_\alpha}e_\beta = \pounds_{e_\alpha}e_\beta - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{e_\alpha}g].e_\beta = \left(C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}.g^{\overline{\rho\sigma}}.\pounds_{e_\alpha}g_{\rho\sigma}.g^{\gamma}_{\beta}\right).e_\gamma \ , \tag{240}$$

$${}^{\omega}\pounds_{\partial_i}\partial_j = -\frac{1}{2}.g^{\overline{kl}}.\pounds_{\partial_i}g_{kl}.\partial_j \ . \tag{241}$$

c) Действие на ковекторное базисное поле:

$$ {}^{\omega}\pounds_{e_\alpha} e^\beta = \pounds_{e_\alpha} e^\beta - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{e_\alpha} g].e^\beta = k_{\gamma\alpha}{}^{\beta}.e^\gamma - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{e_\alpha} g].e^\beta \ , \qquad (242) $$

$$ {}^{\omega}\pounds_{\partial_i} dx^j = k_{mi}{}^{j}.dx^m - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_{\partial_i} g].dx^j \ . \qquad (243) $$

d) Действие на функцию f:

$$ {}^{\omega}\pounds_\xi f = \xi f - \frac{1}{2}.\overline{g}[\pounds_\xi g].f, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 1 \ . \qquad (244) $$

Если обозначить

$$ P_\beta = \overline{g}[\pounds_{e_\beta} g] = g^{\overline{\gamma\delta}}.\pounds_{e_\beta} g_{\gamma\delta} \ , \qquad (245) $$

$$ P_j = \overline{g}[\pounds_{\partial_j} g] = g^{\overline{kl}}.\pounds_{\partial_j} g_{kl} \ , \qquad (246) $$

$$ P = P_\beta.e^\beta = P_j.dx^j \ , \qquad (247) $$

$$ P_\xi = \overline{g}[\pounds_\xi g] = 2.{}_l\theta_\xi \ , \qquad (248) $$

$$ \widehat{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}.P_\alpha.g^\gamma_\beta \ , \ \widehat{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \neq -\widehat{C}_{\beta\alpha}{}^{\gamma} \ , \qquad (249) $$

то ${}^{\omega}\pounds_\xi$ и (240) $\div$ (244) можно записать в виде

$$ {}^{\omega}\pounds_\xi = \pounds_\xi - \frac{1}{2}.P_\xi \ , \qquad (250) $$

$$ {}^{\omega}\pounds_{e_\alpha} e_\beta = \pounds_{e_\alpha} e_\beta - \frac{1}{2}.P_\alpha.e_\beta = \left(C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}.g^\gamma_\beta.P_\alpha \right).e_\gamma = \widehat{C}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.e_\gamma \ , \quad (251) $$

$$ {}^{\omega}\pounds_{\partial_i} \partial_j = -\frac{1}{2}.P_i.\partial_j \ , \qquad (252) $$

$$ {}^{\omega}\pounds_{e_\alpha} e^\beta = \pounds_{e_\alpha} e^\beta - \frac{1}{2}.P_\alpha.e^\beta = k_{\gamma\alpha}{}^{\beta}.e^\gamma - \frac{1}{2}.P_\alpha.e^\beta \ , \qquad (253) $$

$$^{\omega}\pounds_{\partial_i} dx^j = k_{mi}{}^{j}.dx^m - \frac{1}{2}.P_i.dx^j \ , \tag{254}$$

$$^{\omega}\pounds_{\xi} f = \xi f - \frac{1}{2}.P_{\xi}.f \ , \quad f \in C^r(M) \ , \quad r \geq 1 \ . \tag{255}$$

Коммутатор двух дифференциальных операторов Ли, сохраняющих $d\omega$, обладает следующими свойствами.

a) Действие на функцию f:

$$[^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}]f = (\pounds_{\xi} u)f + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)f =$$

$$= \left[\pounds_{\xi} u + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)\right] f, \quad f \in C^r(M), \quad r \geq 2. \tag{256}$$

b) Действие на векторное поле:

$$[^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}]v = [\pounds_{\xi}, \pounds_{u}]v + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)v =$$

$$= \left\{[\pounds_{\xi}, \pounds_{u}] + \frac{1}{2}(uP_{\xi} - \xi P_u)\right\} v, \quad \xi, u, v \in T(M) \ . \tag{257}$$

c) Тождество Якоби:

$$< [[^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}], {}^{\omega}\pounds_{v}] >= [[^{\omega}\pounds_{\xi}, {}^{\omega}\pounds_{u}], {}^{\omega}\pounds_{v}] +$$

$$+ [[^{\omega}\pounds_{v}, {}^{\omega}\pounds_{\xi}], {}^{\omega}\pounds_{u}] + [[^{\omega}\pounds_{u}, {}^{\omega}\pounds_{v}], {}^{\omega}\pounds_{\xi}] \equiv 0 \ . \tag{258}$$

Различные типы дифференциальных операторов, действующих на инвариантный элемент объема, можно использовать для описания различных физических систем и взаимодействий на дифференцируемом многообразии с аффинными связностями и метрикой, рассматривая такое многообразие в качестве модели пространства-времени.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем главные выводы из полученных результатов.

1. Оператор свертки S, коммутирующий с оператором ковариантного дифференцирования и дифференциальным оператором Ли, можно ввести на каждом дифференцируемом многообразии таким образом, что аффинная связность P для ковариантных тензорных полей будет отличаться от аффинной

связности Γ для контравариантных тензорных полей не только знаком. Компоненты (в координатном и некоординатном (неголономном) базисах) пары аффинных связностей P^i_{jk} и Γ^i_{jk} отличаются друг от друга компонентами $g^i_{j;k}$ ковариантных производных тензора Кронекера. При этом можно различить по меньшей мере три случая:

a) $g^i_{j;k} := 0 : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = 0$ (P^i_{jk} отличаются от Γ^i_{jk} только знаком (канонический случай: $S := C$));

b) $g^i_{j;k} := \varphi_{,k}.g^i_j : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = \varphi_{,k}.g^i_j$, $\varphi \in C^r(M)$ (P^i_{jk} отличается от Γ^i_{jk} на производную от заданной инвариантной функции $\varphi \in C^r(M)$, $r \geq 2$, по направлению базисного векторного поля (∂_k или e_k) и на компоненты тензора Кронекера в заданном базисе);

c) $g^i_{j;k} = q^i_{jk} : P^i_{jk} + \Gamma^i_{jk} = q^i_{jk}$, $q \in \otimes^1{}_2(M)$ (P^i_{jk} отличается от Γ^i_{jk} на ковариантную производную $g^i_{j;k}$ от компонент тензора Кронекера по направлению базисного векторного поля ∂_k (или e_k)).

В случае (a) ковариантные производные и производные Ли от ковариантных векторных полей представляют собой независимые друг от друга структуры (независимо от того факта, что производные Ли можно выразить с помощью ковариантных производных).

В случаях (b) и (c) (в отличие от случая (a)) производные Ли от ковариантных векторных полей зависят от структур, определенных существующими аффинными связностями.

На основе полученных результатов разработана кинематика векторных полей [28, 49–52]. Лагранжевская теория тензорных полей развивалась в [53] и была применена в [54], где ЭТГ рассматривалась как частный случай лагранжевской теории тензорных полей в V_n-пространствах ($n = 4$).

Теория пространств с контравариантной и ковариантной аффинными связностями и метриками и ее приложения к кинематике векторных полей и к лагранжевской теории тензорных полей открывает новые возможности для приложений дифференциально-геометрических методов в физике.

Автор выражает глубокую благодарность:

— проф. д-ру Н.А.Черникову за полезные дискуссии и перевод и редакцию русского текста настоящей статьи;

— д-ру Н.С.Шавохиной и д-ру А.Б.Пестову (ОИЯИ, Дубна, Россия) за полезные дискуссии;

— проф. д-ру Ст.Димиеву (Институт математики и информатики БАН, София, Болгария) и проф. д-ру К.Секигава (кафедра математики, Университет Ниигата, Япония) за поддержку рассматриваемой тематики;

— проф. д-ру Д.И.Казакову за его гостеприимство в ЛТФ ОИЯИ;

— Б.Димитрову и Д.Младенову за помощь в подготовке рукописи на русском языке.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального фонда Болгарии для научных исследований (гранты F-103, F-498, F-642).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hehl F.W., Kerlick G.D.** — Gen. Rel. and Grav., 1978, v.9,8, p.691.
2. **Hecht R.D., Hehl F.W.** — In: Proc. 9th Italian Conf. on Gen. Rel. and Grav. Physics. Capri, Italy, 1991. Eds. Cianci R. et al., World Sci. Pub. Co., Singapore, 1991, p.246.
3. **Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Ne'eman Y.** — Phys. Rep., 1995, v.258, 1-2, p.1.
4. **Eddington A.S.** — Relativitätstheorie in Mathematischer Behandlung, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1925.
5. **Schrödinger E.** — Space-Time Structure. Cambridge, Cambridge at the University Press, 1950.
6. **Greub W.** — Multilinear Algebra, New York, Springer Verlag, 1978.
7. **Ефимов Н.В., Розендорн Е.Р.** — Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2-е изд., М.: Наука, 1974.
8. **Greub W., Halperin St., Vanstone R.** — Connections, Curvature, and Cohomology. Vol.I., New York and London, Academic Press, 1972; *Connections, Curvature, and Cohomology*. Vol.II., New York and London, Academic Press, 1973.
9. **Bishop R.L., Goldberg S.I.** — Tensor Analysis on Manifolds. New York, The Macmillan Company, 1968.
10. **Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleik M.** — Analysis, Manifolds and Physics. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1977.
11. **Kobayashi S., Nomizu K.** — Foundations of Differential Geometry. Vol.I., New York, Interscience Publishers., 1963.
12. **Matsushima Y.** — Differentiable Manifolds. New York, Marcel Dekker, Inc., 1972.
13. **Boothby W.M.** — An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. New York, Academic Press, 1975.
14. **Lovelock D., Rund H.** — Tensors, Differential Forms, and Variational Principles. New York, John Wiley & Sons, 1975.
15. **Норден А.П.** — Пространства аффинной связности. 2-е изд., М.: Наука, 1976.
16. **Черников Н.А.** — Краткие сообщения ОИЯИ №3[60], 1993, с.5.
17. **Черников Н.А.** — Препринт ОИЯИ Р2-96-065, Дубна, 1996.
18. **Von der Heyde P.** — Lett. Nuovo Cim., 1975, v.14, 7, p.250.
19. **Iliev B.J.** — J. Phys. A: Math. Gen., 1996, v.29, p.6895; 1997, v.30, p.4327; 1998, v.31, p.1287; Journal of Geometry and Physics, 1998, v.24, p.209.
20. **Hartley D.** — Class. and Quantum Grav., 1995, v.12, p.L103.
21. **Yano K.** — The Theory of Lie Derivatives and its Applications. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1957.
22. **Егоров И.П.** — Геометрия. М.: Просвещение, 1979.
23. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** — Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., М.: Наука, 1986.

24. **Трофимов В.В.** — Введение в геометрию многообразий с симметриями. М.: Изд. МГУ, 1989.

25. **Мищенко А.С.** — Векторные расслоения и их применение. М.: Наука, 1984.

26. **Мищенко А.С., Фоменко А.Т.** — Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд. МГУ, 1980.

27. **Широков П.А., Широков А.П.** — Аффинная дифференциальная геометрия. М.: Физматгиз, 1959, с.149.

28. **Manoff S.** — In: 14th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Florence, Italy, 6 — 12.08.1995. Contr. papers. Workshop A1; Workshop A4, Florence, Univ. of Florence, 1995; In: Complex Structures and Vector Fields. Eds. Dimiev St., Sekigawa K., Singapore, World Sci. Publ., 1995, p.61.

29. **Schouten J.A.** — Tensor Analysis for Physicists. Oxford, Clarendon Press, 1951; Ricci-Calculus: An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications. Berlin, Springer Verlag, 1954.

30. **Slebodzinski W.** — Bull. Acad. Roy. Belgique, 1931, v.17, p.864.

31. **Lightman A.P., Press W.H., Price R.H., Teukolsky S.A.** — Problem Book in Relativity and Gravitation. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1975.

32. **Schmutzer E.** — Relativistische Physik (Klassische Theorie). Leipzig, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1968.

33. **Manoff S.** — In: Proc. 8th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Grav., Univ. Waterloo, Ontario, 1977, p. 241; In: Gravitational Waves. JINR P2-85-667, Dubna, 1985, p.157.

34. **Manoff S.** — Gen. Rel. and Grav., 1979, v.11, p.189.

35. **Manoff S.** — In: 6th Sov. Grav. Conf. Contr. Papers., UDN, Moscow, 1984, p.229.

36. **Manoff S.** — In: 11th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Grav. Contr. Papers. Stockholm, 6–12 July 1986, Univ. of Stockholm, Stockholm, 1986.

37. **Bażański S.L.** — Ann. Inst. Henri Poincare, 1977, Sec. A.27, v.2, p.115; 1977, v.A.27, 2, p.145; Scripta Fac. Sci. Nat. Ujep. Brunensie. Physica, 1975, v.5, 3–4, p.271; Acta Phys. Polonica, 1976, v.7B, 5, p.305.

38. **Manoff S.** — Exp. Technik der Physik, 1976, v.24, 5, p.425.

39. **Swaminarayan N.S., Safko J.L.** — J. Math. Phys., 1983, v.24, 4, p.883.

40. **Ciufolini I.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, 4, p.1014.

41. **Ciufolini I., Demianski M.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, 4, p.1018.

42. **Weber J.** — Phys. Rev., 1960, v.117, p.306; General Relativity and Gravitational Waves. New York, 1961. Russian Translation: M.: Иностранная литература, 1962; In: General Relativity and Gravitation. Ed. Held A. v. 2., New York, Plenum Press, 1980, p.435.

43. **Will C.M.** — In: General Relativity: An Einstein Centenary Survey. Eds. S.W.Hawking, W.Israel, Cambridge, Cambridge U.P., 1979, p.24; Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambridge, London, New York, Cambridge U.P., 1981, Ch.10. Russian Translation: M.: Энергоатомиздат, 1985.

44. **Dixon W.G.** — Nuovo Cim., 1964, v.34, 2, p.317; Phil. Trans. Royal Soc. London, 1974, v.277, No.1264, p.59.

45. **Fishbone L.C.** — Astrophys. J., 1972, v.175, part 2, p.L155; 1973, v.185, part 1, p.43; 1975, v.195, part 1, p.499.

46. **Fuchs H.** — Exp. Technik d. Physik, 1974, v.3, p.185; Ann. der Physik (DDR), 1977, v.34, 2, p.159.

47. **Maugin G.A.** — Gen. Rel. and Grav., 1973, v.4, 3, p.241; 1974, v.5, 1, p.13.

48. **Mashhoon B.J.** — Math. Phys., 1971, v.12, 7, p.1075; Ann. of Phys. (USA), 1975, v.89, 1, p.254; Astrophys. J., 1975, v.197, 3, Part 1, p.705; Preprint Univ. of Maryland, Maryland, 1976; *Tidal Radiation*. Preprint University of Utah, 1977; Astrophys. J., 1977, v.216, 2, Part 1, p.591.

49. **Manoff S.** — Intern. J. Mod. Phys., 1996, v.A11,21, p.3849.

50. **Manoff S.** — JINR Rapid Communications, №1[81], 1997, p.5.

51. **Manoff S.** — Class. Quantum Grav., 1998, v.15, 2, p.465.

52. **Manoff S.** — Intern. J. Mod. Phys. A, 1998, v.13, 25, p.4289.

53. **Manoff S.** — In: Topics in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics. Eds. Dimiev St., Sekigawa K., World Sci. Publ., Singapore, 1997, p.177; Acta Math. Appl., 1999 (in press).

54. **Manoff S.** — Intern. J. Mod. Phys. A, 1998, v.13, 12, p.1941.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 539.1.01

BEYOND THE BLACK-DISK LIMIT: FROM SHADOW TO ANTISHADOW SCATTERING MODE

S.M. Troshin, N.E. Tyurin

Institute for High Energy Physics, Protvino, Moscow Region, 142284 Russia

Предсказывается появление новой моды – антитеневой – в рассеянии адронов при энергиях выше $\sqrt{s} \simeq 2$ ТэВ. Эксперименты на LHC и VLHC по изучению адронных процессов могут обнаружить эту моду. Возможность появления данной моды при сверхвысоких энергиях рассматривается на основе унитарности и геометрических представлений об адронном рассеянии. Рассмотрена связь с непертурбативными моделями в рамках КХД.

New mode in the hadron scattering is predicted to appear at the energies beyond $\sqrt{s} \simeq 2$ TeV: the antishadow scattering mode, and the experiments at LHC and VLHC in hadronic reactions will be able to reveal it. The appearance of the antishadow scattering mode at these energies is considered on the basis of unitarity and geometrical notions of hadron interactions. Connections with the nonperturbative-QCD models are discussed.

INTRODUCTION

One of the most fundamental discoveries in hadron interactions at high energies is the rise of total cross sections with energy. It is accompanied by the rise of elastic and inelastic cross sections as well as of the ratio of elastic to the total cross section.

For the first time the total cross section increase was observed in K^+p interactions at the Serpukhov accelerator in 1970 [1] and it was discovered later in pp interactions at CERN ISR [2] and at Fermilab [3] in other nucleon- and meson-proton interactions. Recent HERA data [4] demonstrated the rising behavior of the virtual photon-proton total cross sections. Since then a great progress in the experimental and theoretical studies of hadronic reactions was achieved. Quantum Chromodynamics appeared as a theory of strong interactions and gave an explanation for the behavior of the observables in the hard hadronic reactions, i.e., the reactions with high momentum transfers. However, the dynamics of long distance interactions (soft processes) is rather far from its understanding despite much work has been done in this field. The problems are directly related to the problems of confinement and chiral symmetry breaking.

The approaches to soft hadronic processes are widely varied: Regge-type, geometrical or QCD-inspired models consider aspects of such processes from the different points of view and use various ideas on hadron structure and interaction dynamics. The major part of the models consider the global characteristics of hadron interactions such as $\sigma_{\rm tot}$, $\sigma_{\rm inel}$, and $\sigma_{\rm diff}$ related to large distance interaction dynamics as reflecting gross features of hadron structure [5], [6]. Despite the difficulties in application of perturbative QCD for the description of long-distance interactions and their obvious nonperturbative character, it is often possible to represent the high-energy amplitude in the various model approaches as an expansion over a small parameter which depends on the kinematics of the process, e.g., for the case of nonincreasing total cross section the general form of the amplitude is

$$F(s,t) = s\sum_n [\tau(s)]^n \exp\left[\frac{a(s)t}{n}\right],$$

where $\tau(s) \sim 1/\ln s$ is a small parameter at $s \to \infty$.

Since the expansion is not valid for the rising total cross sections, it is possible to find another representation for that case with the t-dependent expansion parameter [7]:

$$F(s,t) = s\sum_{m=1}^{\infty} [\tau(\sqrt{-t})]^m \Phi_m[R(s), \sqrt{-t}], \qquad t \neq 0,$$

where

$$\tau(\sqrt{-t}) = \exp\left(-\sqrt{-t}/\mu_0\right),$$

and $\Phi_m[R(s), \sqrt{-t}]$ is an oscillating function of transferred momentum. The above formulas as well as some other representations may be successfully used for the phenomenological analysis of the scattering amplitude at high energies.

Thus, by now the theoretical treatment of soft hadronic reactions involves substantial piece of phenomenology and uses various model approaches. They are often based on divergent postulates, but their phenomenological parts are similar. In particular, an amplitude $V(s,t)$ is considered as an input for the subsequent unitarization procedure:

$$F(s,t) = \Phi[V(s,t)].$$

To reproduce the total cross section rise the input amplitude $V(s,t)$ is usually considered as a power function of energy. This function being taken as an amplitude itself violates unitarity in the direct channel. To obey unitarity in the direct channel a unitarization procedure should be used.

There are several ways to restore unitarity of the scattering matrix. We consider two schemes: based on the use of eikonal and generalized reaction matrix, respectively. There are also combined methods, but those are not often used. As was mentioned various models for $V(s,t)$ may be successfully used to provide phenomenological description of high-energy hadron scattering. However, in the particular model approaches the important dynamical aspects of interaction could be significantly obscured due to a large number of free parameters.

In this paper we discuss some general properties of hadron scattering, the implications of unitarity and analyticity, in particular, manifestations of the antishadow scattering mode and respective model predictions for the observables in elastic scattering and diffraction dissociation. Our main goal is to draw attention to the existence of the antishadow scattering mode at the energies of LHC and VLHC. It might provide a new insight into the dynamics of diffraction and head-on hadronic collisions at superhigh energies.

1. GEOMETRICAL PICTURE

In the collisions of two high energy particles the de Broglie wavelength can be short compared to the typical hadronic size and hence optical concepts may be used as useful guidelines. Thus, the hadron scattering can be considered as a collision of two relativistically contracted objects of finite size.

The relevant mathematical tool for description of high-energy hadronic scattering is based on the impact parameter representation for the scattering amplitude. In the case of spinless particle scattering this representation has the following form:

$$F(s,t) = \frac{s}{\pi^2}\int_0^\infty bdbf(s,b)J_0(b\sqrt{-t}). \tag{1}$$

Note that for the scattering of particles with nonzero spin the impact parameter representation for the helicity amplitudes has a similar form with substitution $J_0 \to J_{\Delta\lambda}$, where $\Delta\lambda$ is the net helicity change between the final and initial states. The impact parameter representation as was shown in [8] is valid for all physical energies and scattering angles. This representation provides simple semiclassical picture of hadron scattering.

It is often assumed, after the Chou – Yang model was proposed, that the driving mechanism of hadron scattering is due to overlapping of the two matter distributions of colliding hadrons. It could be understood by analogy with Glauber theory of nuclear interactions: one assumes that the matter density comes from the spatial distribution of hadron constituents and also assumes a zero-range interaction between those constituents. Such contact interaction might result from the effective QCD, e.g., based on the Nambu – Jona-Lasinio Lagrangian.

The important role in the geometrical approach belongs to the notion of the interaction radius. The general definition of the interaction radius which is in agreement with the above geometrical picture was given in [9]:

$$R(s) = l_0(s)/k, \tag{2}$$

where $k = \sqrt{s}/2$ is the particle momentum in the c.m.s. The value for $l_0(s)$ is chosen provided the contributions of the partial amplitudes from the angular momenta $l > l_0(s)$ are vanishingly small.

As a first approximation one can consider the energy independent interaction intensity and describe the elastic scattering amplitude in terms of the black disk model where it has the form:

$$F(s,t) \propto iR^2(s)\frac{J_1(R(s)\sqrt{-t})}{R(s)\sqrt{-t}}. \tag{3}$$

Here $R \sim 1f$ is the interaction radius. The model is consistent with the observed structure in the differential cross sections of pp and $\bar{p}p$ scattering at t close to $1\ (\mathrm{GeV/c})^2$.

In the simplest case, neglecting the real part and spin, the impact parameter amplitude $f(s,b)$ can be obtained as an inverse transformation according to Eq.(1) with

$$F(s,t) \propto \sqrt{s\frac{d\sigma}{dt}(s,t)}.$$

Thus, one can extract information on the geometrical properties of interaction from the experimental data. The analysis of the experimental data on high-energy diffractive scattering shows that the effective interaction area expands with energy and the interaction intensity — opacity — increases with energy at fixed impact parameter b. Such analysis used to be carried out every time as the new experimental data become available. For example analysis of the data at the ISR energies (the most precise data set on differential cross section for wide t range available for $\sqrt{s} = 53$ GeV) shows that one can observe a central impact parameter profile with a tail from the higher partial waves and some suppression (compared to Gaussian) of low partial waves. The scattering picture at such energies is close to gray disk with smooth edge which is getting darker in its centre with energy.

Beside the above simple geometrical observations it is useful to keep in mind the rigorous bounds for the experimental observables.

2. BOUNDS FOR OBSERVABLES AND THE EXPERIMENTAL DATA

Bounds for the observables obtained on the firm ground of general principles such as unitarity and analyticity are very important for any phenomenological analysis of soft interactions. However, there are only few results obtained on the basis of the axiomatic field theory.

First of all it is the Froissart–Martin bound that gives the upper limit for the total cross section:

$$\sigma_{\rm tot} \leq C \ln^2 s, \tag{4}$$

where $C = \pi/m_\pi^2$ (= 60 mb) and m_π is the pion mass.

Saturation of this bound, as it is suggested by the existing experimental data, implies the dominance of long-distance dynamics. It also leads to a number of important consequences for the other observables. For instance, unitarity leads to the following bound for elastic cross section:

$$\sigma_{\rm el}(s) \geq c\frac{\sigma^2_{\rm tot}(s)}{\ln^2 s}. \tag{5}$$

Therefore, when the total cross section asymptotically increases as $\ln^2 s$, elastic cross section also must rise like $\ln^2 s$. It is important to note here that there is no similar bound for the inelastic cross section and as we will see further the absence of such bound allows for appearance of the antishadow scattering mode at very high energies.

If one considers a more general case when $\sigma_{\rm tot} \propto \ln^\gamma s$, then at asymptotic energies one should have

$$\frac{\mathrm{Re}\ F(s,0)}{\mathrm{Im}\ F(s,0)} \simeq \frac{\gamma\pi}{2\ln s} \tag{6}$$

and

$$\frac{\sigma^{\bar a}_{\rm tot}(s) - \sigma^{a}_{\rm tot}(s)}{\sigma^{\bar a}_{\rm tot}(s) + \sigma^{a}_{\rm tot}(s)} \leq \ln^{-\gamma/2}(s), \tag{7}$$

where $\sigma^{\bar a}_{\rm tot}(s)$ and $\sigma^{a}_{\rm tot}(s)$ are the total cross sections of the processes $\bar a + b \to X$ and $a + b \to X$, correspondingly. In the case of $\gamma = 2$ the total cross section difference of antiparticle and particle interactions should obey the following inequality

$$\Delta\sigma_{\rm tot}(s) \leq \ln s. \tag{8}$$

Contrary to the total cross section behavior, the existing experimental data seem to prefer decreasing $\Delta\sigma_{\rm tot}(s)$. Possible deviations from such behavior could be expected on the basis of perturbative QCD [10] and it was one of the reasons for the recent discussions on the Pomeron counterpart — the Odderon. However, the recent measurements of the real-to-imaginary part ratio for forward $\bar p p$ scattering provide little support for the Odderon. We will not discuss more thoroughly the interesting problem of $\mathrm{Re}\,F/\mathrm{Im}\,F$ ratio and will consider for simplicity the case of pure imaginary amplitude.

For the slope of diffraction cone at $t = 0$ in the case of a pure imaginary scattering amplitude the following inequality takes place:

$$B(s) \geq \frac{\sigma^2_{\rm tot}(s)}{18\pi\sigma_{el}(s)} \tag{9}$$

which means that when the total cross section increases as $\ln^2 s$, the same dependence is mandatory for the slope of diffraction cone. It is the stronger shrinkage than the Regge model predicts: $B(s) \sim \alpha' \ln s$.

There is also bound [11] for the total cross section of single diffractive processes. It was obtained by Pumplin in approach, where inelastic diffraction as well as elastic scattering are assumed to arise in the form of a shadow of inelastic processes,c and has the form

$$\sigma_{\rm diff}(s,b) \leq \frac{1}{2}\,\sigma_{\rm tot}(s,b) - \sigma_{\rm el}(s,b). \qquad (10)$$

The most significant assumption was that the diffractive eigenamplitudes in the Good–Walker [12] picture do not exceed the black disk limit.

At this point some details of the experimental situation have to be mentioned. At the highest energies the experimental data for the total and elastic cross sections, slope parameter of diffraction cone and cross section of single inelastic diffraction dissociation have been obtained in $\bar{p}p$ collisions at Fermilab. In particular, those measurements show that

- the rise of the total cross section of $p\bar{p}$ interactions is consistent with $\ln^2 s$ dependence, however other dependences are not ruled out;
- elastic cross section rises faster than the inelastic and total cross sections and has a magnitude about 1/4 of the total cross section.

Comparing the value of the elastic-to-total cross section ratio with the lower energy data one can conclude that the higher the energy, the higher both absolute and relative probabilities of elastic collisions.

Impact parameter analysis [13] of the data shows that the scattering amplitude is probably beyond the black disk limit $|f(s,b)| = 1/2$ in head-on collisions. The Pumplin bound (Eq.(10)) is also violated in such collisions and this is not surprising if one recollects the original ad hoc assumption on the shadow scattering mode.

3. ANTISHADOW SCATTERING MODE

The basic role in our consideration belongs to unitarity of the scattering matrix $SS^+ = 1$ which is a reformulation of the probability conservation. In the impact parameter representation the unitarity equation rewritten for the elastic scattering amplitude $f(s,b)$ at high energies has the form

$$\mathrm{Im}\, f(s,b) = |f(s,b)|^2 + \eta(s,b) \qquad (11)$$

where the inelastic overlap function $\eta(s,b)$ is the sum of all inelastic channel contributions. It can be expressed as a sum of n–particle production cross sections at the given impact parameter

$$\eta(s,b) = \sum_n \sigma_n(s,b). \tag{12}$$

As was mentioned assumption of a pure imaginary amplitude is a rather common approximation at high energies and is adequate for our qualitative analysis. Then the unitarity Eq.(11) points out that the elastic scattering amplitude at given impact parameter value is determined by the inelastic processes. Equation (11) implies the constraint

$$|f(s,b)| \leq 1$$

while the black-disk limit presumes inequality

$$|f(s,b)| \leq 1/2.$$

The equality $|f(s,b)| = 1/2$ corresponds to maximal absorption in the partial wave with angular momentum $l \simeq b\sqrt{s}/2$.

The maximal absorption limit is chosen *a priori* in the eikonal method of unitarization when the scattering amplitude is written in the form:

$$f(s,b) = \frac{i}{2}\,(1 - \exp\,[i\omega(s,b)]), \tag{13}$$

and imaginary eikonal $\omega(s,b) = i\Omega(s,b)$ is considered. The function $\Omega(s,b)$ is called opacity. Eikonal unitarization automatically satisfies the unitarity Eq.(11) and in the case of pure imaginary eikonal leads to the amplitude which always obeys the black-disk limit.

However, unitarity equation has two solutions for the case of pure imaginary amplitude:

$$f(s,b) = \frac{i}{2}\,[1 \pm \sqrt{1 - 4\eta(s,b)}]. \tag{14}$$

Eikonal unitarization with pure imaginary eikonal corresponds to the choice of the particular solution with sign minus.

Several models have been proposed for the eikonal function. For instance, Regge-type models lead to the Gaussian dependence of $\Omega(s,b)$ on impact parameter. To provide rising total cross sections, opacity should have a power dependence on energy

$$\Omega(s,b) \propto s^{\Delta} \exp\,[-b^2/a(s)], \tag{15}$$

where $a(s) \sim \ln s$. In the framework of perturbative QCD-based models the driving contribution to the opacity is due to jet production in gluon-gluon interactions, when

$$\Omega(s,b) \propto \sigma_{\rm jet} \exp\,[-\mu b], \tag{16}$$

where $\sigma_{\rm jet} \sim (s/s_0)^{\Delta}$. Such parameterizations lead to the rising total and elastic cross sections and slope parameter:

$$\sigma_{\rm tot}(s) \sim \sigma_{\rm el}(s) \sim B(s) \sim \ln^2 s \tag{17}$$

and the ratio

$$\frac{\sigma_{\rm el}(s)}{\sigma_{\rm tot}(s)} \to \frac{1}{2}. \tag{18}$$

To include the mode, where the scattering amplitude exceeds the black-disk limit, one should consider the eikonal functions with nonzero real parts. To ensure the transition from shadow to antishadow mode the real part of eikonal should gain an abrupt increase equal to π at some $s = s_0$. The conventional models do not foresee such a critical behavior for real part of the eikonal.

However, it does not mean that the eikonal model itself is in trouble. In particular, the account for fluctuations of the eikonal [14] strongly modifies the structure of the amplitude and reduces it to algebraic form which is similar to that used in the unitarization scheme based on the generalized reaction matrix.

The latter method is based on the relativistic generalization of the Heitler equation of radiation damping [15]. In this approach the elastic scattering amplitude satisfies unitarity equation since it is constructed as a solution of the following equation [15]

$$F = U + iUDF \tag{19}$$

presented here in the operator form. Eq.(19) allows one to satisfy unitarity provided the inequality

$$\mathrm{Im}\, U(s,b) \geq 0 \tag{20}$$

is fulfilled. The form of the amplitude in the impact parameter representation is the following:

$$f(s,b) = \frac{U(s,b)}{1 - iU(s,b)}, \tag{21}$$

where $U(s,b)$ is the generalized reaction matrix, which is considered as an input dynamical quantity similar to eikonal function. Similar form for the scattering amplitude was obtained by Feynman in his parton model of diffractive scattering [16]. Inelastic overlap function is connected with $U(s,b)$ by the relation

$$\eta(s,b) = \frac{\mathrm{Im}\, U(s,b)}{|1 - iU(s,b)|^2}. \tag{22}$$

Construction of particular models in the framework of the U–matrix approach proceeds with the same steps as it does for the eikonal function, i.e., the basic dynamics as well as the notions on hadron structure are used to obtain a particular form for the U matrix. For example, the Regge-pole approach [17] provides the following form for the U matrix:

$$U(s,b) \propto is^{\Delta} \exp[-b^2/a(s)], \quad a(s) \sim \alpha' \ln s, \tag{23}$$

while the chiral quark model which will be discussed below gives the exponential b dependence

$$U(s,b) \propto is^{\Delta} \exp[-\mu b], \tag{24}$$

where μ is the constant proportional to the masses of the constituent quarks. We have mentioned here only the gross features of those model parameterizations without going into details.

Both the parameterizations lead to $\ln^2 s$ rise of the total and elastic cross sections and slope parameter $B(s)$:

$$\sigma_{\rm tot}(s) \sim \sigma_{\rm el}(s) \sim B(s) \sim \ln^2 s \tag{25}$$

at $s \to \infty$. The above results are similar to conclusions of eikonal unitarization.

However, these two unitarization schemes lead to different predictions for the inelastic cross sections and for the ratio of elastic to total cross section. This ratio in the U–matrix unitarization scheme reaches its maximal possible value at $s \to \infty$, i.e.,

$$\frac{\sigma_{\rm el}(s)}{\sigma_{\rm tot}(s)} \to 1, \tag{26}$$

which reflects in fact that the bound for the partial-wave amplitude in the U-matrix approach is $|f| \leq 1$, while the bound for the case of imaginary eikonal is (black-disk limit): $|f| \leq 1/2$.

When the amplitude exceeds the black-disk limit (in central collisions at high energies), then the scattering at such impact parameters turns out to be of an antishadow nature. It corresponds to the solution of unitarity equation (11) with plus sign. In this antishadow scattering mode the elastic amplitude increases with the decrease of the inelastic channels contribution.

The shadow scattering mode is considered usually as the only possible one. But the two solutions of the unitarity equation have an equal meaning and the antishadow scattering mode could also appear in central collisions first as the energy becomes higher. Both the scattering modes are realized in a natural way in the U-matrix approach despite the two modes are described by the two different solutions of unitarity Eq.(14).

Let us consider the transition to the antishadow scattering mode [18]. With conventional parameterizations of the U-matrix in the form of Eq. (23) or Eq.(24) the inelastic overlap function increases with energies at modest values of s. It reaches its maximum value $\eta(s, b = 0) = 1/4$ at some energy $s = s_0$, and beyond this energy the antishadow scattering mode appears at small values of b.

The region of energies and impact parameters corresponding to the antishadow scattering mode is determined by the conditions $\mathrm{Im}\, f(s,b) > 1/2$ and $\eta(s,b) < 1/4$. The quantitative analysis of the experimental data [19] gives the threshold value of energy: $\sqrt{s_0} \simeq 2$ TeV.

Thus, the function $\eta(s,b)$ becomes peripheral when energy is increasing. At such energies the inelastic overlap function reaches its maximum value at $b = R(s)$, where $R(s)$ is the interaction radius. So, beyond the transition threshold there are two regions in impact parameter space: the central region of antishadow scattering at $b < R(s)$ and the peripheral region of shadow scattering at $b > R(s)$. At $b = R(s)$ the maximal absorption (black ring) takes place (Fig. 1).

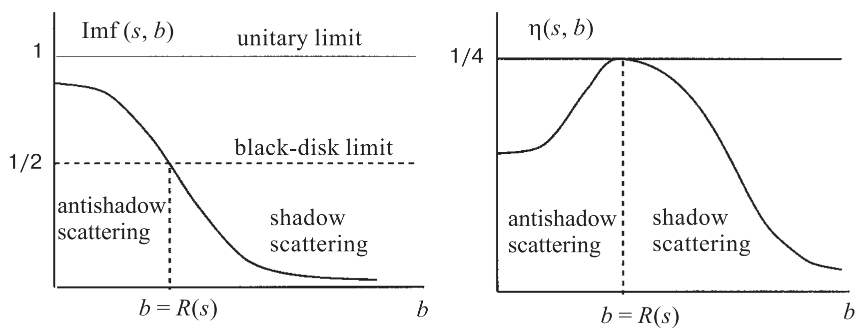

Fig. 1. Shadow and antishadow scattering regions

The transition to the antishadow scattering at small impact parameters at high energies results also in a relatively slow rise of inelastic cross section:

$$\sigma_{\mathrm{inel}}(s) = 8\pi \int_0^\infty \frac{bdb\, \mathrm{Im}\, U(s,b)}{|1 - iU(s,b)|^2} \sim \ln s \tag{27}$$

at $s \to \infty$.

It should be noted that appearance of the antishadow scattering mode does not contradict the basic idea that the particle production is the driving force for elastic scattering. Indeed, the imaginary part of the generalized reaction matrix is the sum of inelastic channel contributions:

$$\mathrm{Im}\, U(s,b) = \sum_n \bar{U}_n(s,b), \tag{28}$$

where n runs over all inelastic states, and

$$\bar{U}_n(s,b) = \int d\Gamma_n |U_n(s,b,\{\xi_n\}|^2, \tag{29}$$

and $d\Gamma_n$ is the n-particle element of the phase space volume. The functions $U_n(s,b,\{\xi_n\})$ are determined by the dynamics of $2 \to n$ processes. Thus, the quantity $\mathrm{Im}\, U(s,b)$ itself is a shadow of the inelastic processes. However, unitarity leads to self–damping of the inelastic channels [20] and increase of the function $\mathrm{Im}\, U(s,b)$ results in decrease of the inelastic overlap function $\eta(s,b)$, when $\mathrm{Im}\, U(s,b)$ exceeds unity.

At the energies when the antishadow mode starts to develop (it presumably could already occur at the energies of the Tevatron-Collider) the Pumplin bound Eq.(10) for inelastic diffraction dissociation cannot be applied since the main assumption used under its derivation is not valid any more.

4. THE TWO MODES OF HADRON SCATTERING AND THE PREASYMPTOTIC EFFECTS

In this section we give a specific analysis of the hadron scattering on the basis of particular model. In Refs.21,22 the notion of an effective chiral quark model was used for the description of elastic scattering at small and large angles. Hadron dynamics is considered in the framework of effective Lagrangian approach.

A common feature of the chiral models [23] is the representation of a baryon as an inner core carrying the baryonic charge and anouter condensate surrounding this core [24]. Following these observations it is natural to represent a hadron as consisting of the inner region where valence quarks are located and the outer region filled with quark condensate [22]. Such a picture for the hadron structure implies that overlapping and interaction of peripheral condensates in hadron collision occurs at the first stage. In the overlapping region the condensates interact and as a result virtual massive quarks appear. Being released part of hadron energy carried by the peripheral condensates goes to a generation of massive quarks. Besides mass, quark acquires an internal structure and a finite size. Quark radii are determined by the radii of the clouds. Strong interaction radius of quark Q is determined by its Compton wavelength:

$$r_Q = \xi/m_Q, \tag{30}$$

where constant ξ is universal for different flavors. In the model valence quarks located in the central part of a hadron are supposed to scatter in a quasi-independent way by the produced virtual massive quarks at given impact parameter and by the other valence quarks.

The function $U(s,b)$ (generalized reaction matrix) [15] — the basic dynamical quantity of this approach — is chosen as a product of the averaged quark amplitudes

$$U(s,b) = \prod_{Q=1}^{N} \langle f_Q(s,b)\rangle \tag{31}$$

in accordance with assumed quasi-independent nature of valence quark scattering. The b dependence of the function $\langle f_Q \rangle$ related to the quark form factor $F_Q(q)$ has a simple form $\langle f_Q \rangle \propto \exp(-m_Q b/\xi)$.

Thus, the generalized reaction matrix (in a pure imaginary case) gets the following form

$$U(s,b) = ig\left[1 + \alpha\frac{\sqrt{s}}{m_Q}\right]^N \exp(-Mb/\xi), \tag{32}$$

where $M = \sum_{q=1}^N m_Q$.

At moderate energies $s \ll s_0$ (where $\sqrt{s_0} \equiv m_Q/\alpha$) the function $U(s,b)$ can be represented in the form

$$U(s,b) = ig\left[1 + N\alpha\frac{\sqrt{s}}{m_Q}\right] \exp(-Mb/\xi). \tag{33}$$

At very high energies $s \gg s_0$ we could neglect the energy independent term in (32) and rewrite the expression for $U(s,b)$ as

$$U(s,b) = ig\left(s/m_Q^2\right)^{N/2} \exp(-Mb/\xi). \tag{34}$$

Calculation of the scattering amplitude is based on the impact parameter representation and the analysis of singularities of $F(s,\beta)$ in complex β plane [7].

Besides the energy dependence of these observables we will emphasize its dependence on geometrical characteristics of nonperturbative quark interactions.

The total cross section has the following energy and quark-mass dependences

$$\sigma_{\rm tot}(s) = \frac{\pi\xi^2}{\langle m_Q \rangle^2}\Phi(s,N), \tag{35}$$

where $\langle m_Q \rangle = \frac{1}{N}\sum_{Q=1}^N m_Q$ is the mean value of the constituent quark masses in the colliding hadrons. The function Φ has the following behavior:

$$\Phi(s,N) = \begin{cases} \left(8g/N^2\right)\left[1 + N\alpha\sqrt{s}/m_Q\right], & s \ll s_0, \\ \ln^2 s, & s \gg s_0. \end{cases} \tag{36}$$

Thus, at asymptotically high energies the model provides

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\sigma_{\rm tot}(\bar{a}b)}{\sigma_{\rm tot}(ab)} = 1.$$

Linear with $\sqrt{s}$ preasymptotic rise of the total cross sections is in agreement with the experimental data up to $\sqrt{s} \sim 0.5$ TeV [19].

The inelastic cross section can be calculated in the model explicitly, viz:

$$\sigma_{|rminel}(s) = \frac{8\pi\xi^2}{N^2\langle m_Q\rangle^2} \ln\left[1 + g(1 + \frac{\alpha\sqrt{s}}{m_Q})^N\right]. \qquad (37)$$

At asymptotically high energies the inelastic cross section rise is as follows

$$\sigma_{\rm inel}(s) = \frac{4\pi\xi^2}{N\langle m_Q\rangle^2} \ln s. \qquad (38)$$

At $s \gg s_0$ the dependence of the hadron interaction radius $R(s)$ and the ratio $\sigma_{\rm el}/\sigma_{\rm tot}$ on $\langle m_Q\rangle$ is provided by the following equations:

$$R(s) = \frac{\xi}{2\langle m_Q\rangle} \ln s, \qquad (39)$$

$$\frac{\sigma_{\rm el}(s)}{\sigma_{\rm tot}(s)} = 1 - \frac{4}{N \ln s}. \qquad (40)$$

It is important to note here that such a behavior of the ratio $\sigma_{\rm el}/\sigma_{\rm tot}$ and $\sigma_{\rm inel}(s)$ results from self-damping of inelastic channels [20] at small impact distances. Numerical estimates [19] show that the ratio $\sigma_{\rm el}(s)/\sigma_{\rm tot}(s)$ becomes close to the asymptotic value 1 at extremely high energies $\sqrt{s} = 500$ TeV.

Thus, unitarization drastically changes the scattering picture: at lower energies inelastic channels provide dominant contribution and scattering amplitude has a shadow origin, while at high energies elastic scattering dominates over inelasic contribution and the scattering picture corresponds to the antishadow mode. The functional s dependences of observables also differ significantly. For example, s dependence of total cross section at $s \ll s_0$ is described by a simple linear function of $\sqrt{s}$. It has been shown that such dependence does not contradict the experimental data for hadron total cross sections up to $\sqrt{s} \sim 0.5$ TeV. Such dependence corresponds to that of the hard Pomeron with $\Delta = 0.5$, however, it was obtained in different approach [22]. This is a preasymptotic dependence and it has nothing to do with the true asymptotics of the total cross sections. In the model such behavior of the hadronic cross sections reflects the energy dependence of a number of virtual quarks generated under condensate collisions in the intermediate transient stage of hadronic interaction.

5. ANTISHADOW SCATTERING MODE AND INELASTIC DIFFRACTIVE PROCESSES

Inelastic diffractive production as well as elastic scattering at low transferred momenta are the two basic processes which would lead to understanding of large distance dynamics and hadron structure. Concerning inelastic diffractive processes this statement can be traced back to the seminal paper [12], where such processes were considered as a result of a difference in absorption of various proton states. Later on, these states have got a parton-like interpretation. New data were obtained for single diffraction production process

$$h_1 + h_2 \to h_1 + h_2^*, \tag{41}$$

when the hadron h_2 is excited to the state h_2^* with invariant mass M and the same quantum numbers. Its subsequent decay results in the multiparticle final state. The inclusive differential cross section shows a simple dependence on the invariant mass

$$\frac{d\sigma_{\rm diff}}{dM^2} \propto \frac{1}{M^2}. \tag{42}$$

However, energy dependence of the diffractive production cross section $\sigma_{\rm diff}(s)$ is not so evident from the data. This ambiguity is partly due to difficulties in the experimental definition of the inelastic diffractive cross section.

The particular experimental regularities observed in diffractive production can be described in the framework of different approaches. $1/M^2$ dependence is naturally described by the triple-pomeron diagrams in the framework of Regge-model. The proposed in Ref.25 similarity between the Pomeron and photon exchanges allowed one to calculate diffractive dissociation cross section in terms of structure function νW_2 measured in deep inelastic lepton scattering. Several models use optical picture for the description of diffractive production [26] but these models in large extent concern the angular distribution of diffractive cross section and M^2 dependence is left beyond their scope. The attempt to explain M^2 dependence in the framework of optical model, considering diffractive dissociation as a bremsstrahlung where virtual quanta are released from a strong field was made in Ref.27.

In this section for description of single diffractive processes we use model approach described in section 4.

To obtain the cross section of the diffractive dissociation process we should single out among the final states in Eq.(28) those corresponding to the process (41). Let us for simplicity consider again the case of pure imaginary U matrix. Then we can represent $d\sigma_{\rm diff}/dM^2$ in the following form

$$\frac{d\sigma_{\rm diff}}{dM^2} = 8\pi \int_0^\infty bdb \frac{U_{\rm diff}(s,b,M)}{[1+U(s,b)]^2}, \tag{43}$$

where expression for $U_{\rm diff}(s,b,M)$ includes contributions from all the final states $|n\rangle_{\rm diff}$ which results from the decay of the excited hadron h_2^* of mass M: $h_2^* \to |n\rangle_{\rm diff}$.

For consideration of the diffractive production at the quark level we extend the picture for hadron interaction for elastic scattering, described in section 4. Since the constituent quark is an extended object there is a nonzero probability of its excitation at the first stage of hadron collision during the interaction of peripheral condensates. Therefore it is natural to assume that the origin of diffractive production process is the excitation of one of the valence quarks in colliding hadron: $Q \to Q^*$, its subsequent scattering and decay into the final state. The excited constituent quark is scattered similar to other valence quarks in a quasi-independent way. The function $U_{\rm diff}(s,b,M)$ can be represented then as a product

$$U_{\rm diff}(s,b,M) = \langle f_{Q^*}(s,b,M_{Q^*})\rangle \prod_{Q=1}^{N-1} \langle f_Q(s,b)\rangle, \tag{44}$$

where M_{Q^*} is the mass of excited constituent quark, which is proportional to the mass M of excited hadron h_2^* for large values of M. The last statement presumes the additivity of constituent quark masses. The b dependence of the amplitude $\langle f_{Q^*}\rangle$ is related to the form factor of excited quark whose radius is determined by its mass M_{Q^*} ($r_{Q^*} = \xi/M_{Q^*}$). The expression for $U_{\rm diff}(s,b,M)$ can be rewritten then in the following form:

$$U_{\rm diff}(s,b,M) = g^* U(s,b) \exp\left[-(M_{Q*} - m_Q)b/\xi\right], \tag{45}$$

where constant g^* is proportional to the relative probability of excitation of the constituent quark. The value of g^* is a nonzero one, however, $g^* < 1$ since we expect that the excitation of any constituent quark has lower probability compared to probability for this quark to stay unexcited. The excited quark is not stable and its subsequent decay is associated with the decay of excited hadron h_2^* into the multiparticle final state $|n\rangle_{\rm diff}$.

The cross section of diffractive dissociation process is given by expression (43) and has the following s- and M^2 dependences

$$\frac{d\sigma_{\rm diff}}{dM^2} \simeq \frac{8\pi g^* \xi^2}{(M_{Q^*} - m_Q^2)^2}\eta(s,0) \simeq \frac{8\pi g^* \xi^2}{M^2}\eta(s,0). \tag{46}$$

Thus, we obtained the familiar $1/M^2$ dependence of the diffraction cross section which is related in this model to the geometrical size of excited constituent quark.

The double dissociation processes

$$h_1 + h_2 \to h_1^* + h_2^* \tag{47}$$

can be considered on the grounds of previous approach to the single diffractive dissociation. Here one of the constituent quarks in each of the colliding hadrons should be excited. The cross section of double diffraction process has similar

M^2 and s dependences and is to be suppressed in comparison with the single diffractive cross section by an extra factor $g^* < 1$.

The energy dependence of single diffractive cross section has the following form

$$\sigma_{\rm diff}(s) = 8\pi g^* \xi^2 \eta(s,0) \int_{M_0^2}^{M_1^2} \frac{dM^2}{M^2} = 8\pi g^* \xi^2 \eta(s,0) \ln \frac{s(1-x_1)}{M_0^2}, \qquad (48)$$

where x_1 is the lower limit of the relative momentum of hadron $h_1 (x_1 \simeq 0.8-0.9)$ which corresponds to the experimental constraint on diffractive process. Eq. (48) shows that the total cross section of diffractive dissociation has a nontrivial energy dependence which is determined by the contribution of inelastic channels into unitarity equation at zero value of impact parameter. The dependence of $\eta(s,0)$ is determined by Eq. (22), where expression for $U(s,b)$ is given by Eq. (32). At $s \leq s_0$, (s_0 is determined by equation $|U(s_0,0)| = 1$) $\eta(s,0)$ increases with energy. This increase as it follows from Eq. (32) and from the experimental data [28] is rather slow one. However at $s \geq s_0$, $\eta(s,0)$ reaches its maximum value $\eta(s,0) = 1/4$ and at $s > s_0$, the function $\eta(s,0)$ decreases with energy. At $s \to \infty$:

$$\sigma_{\rm diff}(s) \propto \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^N \ln s \qquad (49)$$

since $\eta(s,0) \propto (1/\sqrt{s})^N$ in this limit.

Thus at asymptotical energies the inelastic diffraction cross section drops to zero. Decrease of diffractive production cross section at high energies ($s > s_0$) is due to the fact that $\eta(s,b)$ becomes peripheral at $s > s_0$ and the whole picture corresponds to the antishadow scattering at $b < R(s)$ and to the shadow scattering at $b > R(s)$, where $R(s)$ is the interaction radius. The qulitative behavior of $\sigma_{\rm diff}(s)$ is shown in Fig.2.

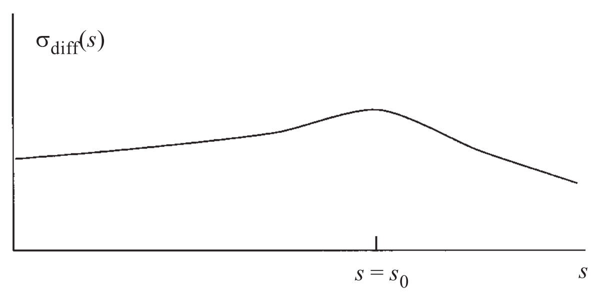

Fig. 2. Energy dependence of diffractive cross section

The development of the antishadow mode in head-on pp- and $p\bar{p}$ collisions could be associated with new phenomena in the central hadronic collisions, where the temperatures are high and the energy density can be up to several $\mathrm{GeV/fm^3}$. In such collisions the constituent quarks have noticeable probability to be excited. Due to its high mass and small transverse size the excited state has low probability of interactions with other particles. It may be also related to an interesting phenomena in cosmic ray experiments where particles with abnormal persistency in lead chambers were observed [29].

Of course, there might be different reasons for decrease of $\sigma_{\mathrm{diff}}(s)$. The decreasing energy dependence of $\sigma_{\mathrm{diff}}(s)$ was also predicted in Refs.30,31. As was pointed out in Ref.12 in the limit of complete absorption the diffractive dissociation should vanish. It was advocated in Ref.14 that this situation will occur at superhigh energies and it is the reason for decrease of inelastic diffractive cross section. This is completely the same behavior as is predicted by the model presented, however in our case the reason for that is the transition to the antishadow scattering mode in head-on collisions in the multi-TeV energy range. It should be noted, however, that the diffractive cross section at preasymptotic energies has a similar to total and elastic cross-section energy dependence and it will be discussed in the concluding part of this paper.

6. UNIVERSAL PREASYMPTOTICS

The straitforward interpretation of the recent HERA data on the deep-inelastic scattering together with the analysis of the data on hadron-hadron scattering in terms of the Regge model could lead to the unexpected conclusion on the existence of the various Pomerons [32] or the various manifestations of unique Pomeron in the different processes depending on the typical scale of the process [33]. The approaches [34, 35] contending the dominance of the soft Pomeron do not rule out existence of the hard Pomeron either.

Indeed, soft hadronic reactions imply that Pomeron's intercept $\alpha_{\mathcal{P}} = 1.08$ [32], and small-x dependence of the structure function $F_2(x, Q^2)$ leads to $\alpha_{\mathcal{P}} =$ 1.4-1.5 [36, 37] and the measurements of the diffractive cross section in the deep-inelastic scattering provide $\alpha_{\mathcal{P}} = 1.23$ [38]. So, does this mean that we have few Pomerons or we have few different manifestations of the same Pomeron depending on the particular process? Probably both options are not to be considered as the firm ones, since the experimental data used to advocate these statements were obtained at not high enough energies where, in fact, the preasymptotic regime of interactions does take place. The above conclusions are based on the presumed dominance of the Pomeron contribution already in the preasymptotic energy region. What is called a Pomeron is to be interpreted as a true asymptotical contribution of the driving mechanism.

In this section we argue that all the three classes of the processes described above are related to the similar mechanisms, and the corresponding energy dependence of the cross sections can be well described by the universal functional energy dependence of the type $a + b\sqrt{s}$. Such dependence is valid for the preasymptotic energy region only and beyond this region unitarity changes the picture drastically. We consider for illustration the unitarized chiral quark model (section 4).

Fit to the total hp cross sections gives small values for the parameters g and $\alpha (g, \alpha \ll 1)$ [19]. It means that at $s \ll s_0$ the second term in the square brackets in Eqs. (21) and (22) is small and we can expand over it. The numerical value of s_0 is determined by the equation $|U(s,0)| = 1$ and is [19] $\sqrt{s_0} \simeq 2\,\text{TeV}$. At this energy the amplitude has the value $|f(s_0,0)| = 1/2$. The value of s_0 is on the verge of the preasymptotic energy region, i.e., the Tevatron energy is at the beginning of the road to the asymptotics. Evidently the HERA energy range $W(= \sqrt{s_{\gamma p}}) \leq 300$ GeV is in a preasymptotic domain.

The above model gives the linear with $\sqrt{s}$ dependence for the total cross sections according to Eqs. (21) and (22):

$$\sigma_{\text{tot}}^{hp,\gamma p} = a + b\sqrt{s}, \tag{50}$$

where parameters a and b are different for different processes and the same is true for the scale s_0. It was shown [19] that Eq.(50) is in good agreement with the experimental data.

The same dependence for the total cross section of $\gamma^* p$ scattering is assumed by the small–x behavior of the structure function $F_2(x, Q^2)$ [36,37] and obtained in [39]:

$$F_2(x, Q^2) = a(Q^2) + b(Q^2)/\sqrt{x}. \tag{51}$$

The experimental data also indicate the critical behavior of the function $b(Q^2)$ at $Q^2 \simeq 1$ (GeV/c)^2. This scale could be related to the radius of a constituent quark and its structure.

The third value for the Pomeron intercept $\alpha_{\mathcal{P}} = 1.23$ has been obtained from the analysis of the experimental data on the diffractive cross section in deep-inelastic scattering [38] where the dependence of $d\sigma^{\text{diff}}_{\gamma^* p \to XN}/dM_X^2$ on W was parameterized according to the Regge model and the Pomeron dominance has been assumed:

$$d\sigma^{\text{diff}}_{\gamma^* p \to XN}/dM_X^2 \propto (W^2)^{2\alpha_{\mathcal{P}} - 2}. \tag{52}$$

The data demonstrate linear rise of the differential cross section $d\sigma^{\text{diff}}_{\gamma^* p \to XN}/dM_X^2$ with W, i.e., we observe here just the same functional dependence on the c.m.s. energy as for $\sigma_{\text{tot}}^{hp,\gamma p,\gamma^* p}$. Regarding the preasymptotic nature of the interaction mode we arrive to the universal c.m.s. energy dependence in the framework of the used model.

Indeed, in the framework of this model the hadron inelastic diffractive cross section is given by the following expression [40]:

$$\frac{d\sigma^{\rm diff}_{hp\to XN}}{dM_X^2} \simeq \frac{8\pi g^* \xi^2}{M_X^2}\eta(s,0), \tag{53}$$

where

$$\eta(s,b) = \mathrm{Im}\, U(s,b)/[1-iU(s,b)]^2$$

is the inelastic overlap function.

At the preasymptotic energies $s \ll s_0$ the energy dependence of inelastic diffractive cross section resulting from Eq. (22) is again determined by the generic form

$$\frac{d\sigma^{\rm diff}_{hp\to XN}}{dM_X^2} \propto a + b\sqrt{s}. \tag{54}$$

Inelastic diffractive cross section for the $\gamma^* p$ interactions can be obtained using for example VMD model, i.e.,

$$\frac{d\sigma^{\rm diff}_{\gamma^* p\to XN}}{dM_X^2} \propto a(Q^2) + b(Q^2)W. \tag{55}$$

The same functional dependence can be obtained using the "aligned jet" model [41] along with the unitarized chiral quark model [42].

The above linear dependences for the cross sections of different processes is the generic feature associated with the preasymptotic nature of the interaction dynamics at $s \ll s_0$. As one goes above this energy range, the function $|U(s,b)|$ is rising and when $|U(s,0)| \geq 1$, the unitarity starts to play the major role and provides the $\ln^2 s$ rise of the total cross sections at $s \gg s_0$ [42] and also the following behavior of the structure function $F_2(x,Q^2)$

$$F_2(x,Q^2) \propto \ln^2(1/x) \tag{56}$$

at $x \to 0$ [39]. At the same time unitarity leads to the decreasing dependence of the inelastic diffractive cross section at $s \to \infty$

$$\frac{d\sigma^{\rm diff}}{dM_X^2} \propto \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^N, \tag{57}$$

for the hp-, γp- and $\gamma^* p$ processes [40]. Eq. (57) is associated with the anti-shadow scattering mode which develops at small impact parameters at $s > s_0$.

Thus, we might expect the different asymptotic and universal preasymptotic behaviors for the different classes of the diffraction processes.

To summarize, we would like to emphasize that the unified description of the processes of hp-, γp- and $\gamma^* p$- diffraction scattering with the universal cross section dependence on the c.m.s. interaction energy is possible. For illustration we used the unitarized chiral quark model which has a nonperturbative origin and leads to the linear c.m.s. energy dependence of the cross sections in the preasymptotic energy region for the above processes. Universality of such preasymptotic behavior agrees with the experiment.

The assumption on the existence of the different Pomerons results from the use of the asymptotic formulas in the preasymptotic energy region and the neglect of the unitarity at higher energies beyond this preasymptotic region. It should be taken with certain caution.

CONCLUSION

Studies of soft interactions at the highest energies can lead to the discoveries of fundamental importance. The genesis of hadron scattering with rising energy can be described as transition from the grey to black-disk and eventually to black ring with the antishadow scattering mode in the centre. Such transitions are under control of unitarity of the scattering matrix.

The appearance of antishadow scattering mode could be revealed performing impact parameter analysis of elastic scattering and directly in the measurements of the inelastic diffractive cross section (cf. Figs. 1,2).

It would be interesting to speculate on the particular physical origin of the antishadow scattering mode. Its existence can be correlated with the new phenomena expected at high energies in the central hadronic collisions. Such collisions are usually associated with the formation of quark–gluon plasma and disoriented chiral condensate in the inner part of the interaction region. What are the particular correlations between those phenomena and the antishadow scattering? The answer can be obtained in the nonperturbative QCD studies and in the experiments devoted to studies of soft processes at LHC and VLHC. It seems that the anomalies observed in cosmic ray experiments [29] might also be correlated with development of the antishadow scattering mode in the central hadron collisions.

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research under Grant No. 99-02-17995.

REFERENCES

1. **Denisov S.P. et al.** — Phys. Lett., 1971, v.36B, pp.415, 528.
2. **Amaldi U. et al.** — Phys. Lett., 1973, v.44B, p.112;
   Amendolia S.R. et al. — Phys. Lett., 1973, v.44B, p.119.
3. **Carroll A.S. et al.** — Phys. Lett., 1976, v.61B, p.303.
4. **Bornheim A.** — Contribution to the proceedings of the LISHEP International School on High-Energy Physics, Rio de Janeiro, Brazil, February 16-20, 1998, hep-ex/9806021.

5. **Bjorken J.D.** — Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 1992, v.25, p.253.
6. **Petrov V.A.** — Talk given at the Vth Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering, Providence, Rhode Island, June 1993.
7. **Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Sov. J. Particles and Nuclei, 1984, v.15, p.25.
8. **Islam M.M.** — Nucl. Phys., 1976, v.104, p.511.
9. **Logunov A.A., Nguyen Van Hieu, Khrustalev O.A.** — In: Problems of Theoretical Physics, "Nauka", Moscow, 1969.
10. **Kuraev E.A., Lipatov L.N., Fadin V.S.** — Sov. Phys. JETP, 1977, v.45, p.199;
    Balitsky Ya.Ya., Lipatov L.N. — Sov. J. Nucl. Phys., 1978, v.28, p.822.
11. **Pumplin J.** — Phys. Rev., 1973, v.D8, p.2899.
12. **Good M. L., Walker W.D.** — Phys. Rev., 1960, v.120, p.1857.
13. **Belforte S. (CDF collaboration)** — Nuovo Cim., 1994, v.107A, p.2085.
14. **Barshay S., Heiliger P., Rein D.** — Z. Phys. C — Particles and Fields,1992, v.56, p.77.
15. **Logunov A.A., Savrin V.I., Tyurin N.E., Khrustalev O.A.** — Teor. Mat. Fiz., 1971, v.6, p.157.
16. **Ravndal F.** — Int. J. Mod. Phys., 1993, v.A8, p.4369.
17. **Tyurin N.E., Khrustalev O.A.** — Teor. Mat. Fiz., 1975, v.24, p.291.
18. **Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Phys. Lett., 1993, v.B316, p.175.
19. **Nadolsky P.M., Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Z. Phys., 1995, v.C69, p.131.
20. **Baker M., Blankenbecler R.** — Phys. Rev., 1962, v.128, p.415.
21. **Troshin S.M., Tyurin N.E., Yuschenko O.P.** — Nuovo Cim., 1986, v.91A, p.23.
22. **Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Nuovo Cim., 1993, v.106A, p.327; Proc. of the Vth Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering, p.387; Providence, Rhode Island, June 1993; Phys. Rev., 1994, v.D49, p.4427; Z. Phys., 1994, v.C64, p.311.
23. **Ball R.D.** — Int. Journal of Mod. Phys., 1990, v.A5, p.4391.
24. **Islam M.M.** — Z. Phys. C – Particles and Fields, 1992, v.53, p.253.
25. **Donnachie A., Landshoff P.V.** — Phys. Lett, 1987, v.B185, p.403; Nucl. Phys., 1988, v.B311, p.509.
26. **Fletcher R.S.** — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.187.
27. **Dederichs K.H., Fassler M.A.** — Phys. Lett., 1989, v.B232, p.405.
28. **Miettinen H.I., Pumplin J.** — Phys. Rev., 1978, v.D18, p.1696.
29. **Albrow M.G.** — Summary talk given at the Vth Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering, Providence, Rhode Island, June 1993.
30. **Chou T., Yang C.N.** — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.1692.
31. **Durand L., Pi H.** — Phys. Rev., 1988, v.D38, p.78.
32. **Landshoff P.V.** — The Two Pomerons, Talk given at PSI School at Zuos, August 1994;
    Bertini M., Giffon M., Predazzi E. — Two Pomerons, INFN, 1995.
33. **Levy A.**— Talk given at the International Europhysics Conference on High Energy Physics, Brussels, July-August 1995;
    Bertini M., Giffon M., Jenkovszky L.L., Paccanoni F., Predazzi E. — Rev. Nuovo Cim., 1996, v.19, p.1.
34. **Donnachie A., Landshoff P.V.** — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 1996, v.22, p.733.

35. **Petrov V.A.** — Talk given at the High Energy Conference on Quantum Chromodynamics – QCD '96, Montepellier, France, July 1996, Preprint IHEP 96-69.

36. **H1 Collaboration** — Nucl. Phys., 1993, v.B407, p.515; ibid., 1995, v.B 439, p.379.

37. **ZEUS Collaboration** — Phys. Lett., 1993, v.B316, p.412; Z. Phys., 1995, v.C65, p.379.

38. **ZEUS Collaboration** — Z. Phys., 1996, v.C70, p.391.

39. **Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Europhys. Lett., 1997, v.37, p.239.

40. **Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Z. Phys., 1994, v.C64, p.311.

41. **Bjorken J.D., Kogut J.** — Phys. Rev., 1973, v.D8, p.1341;
Brodsky S.J., Hoyer P., Magnea L. — NORDITA–96/68P, SLAC-PUB-7342, hep-ph/9611278.

42. **Troshin S.M., Tyurin N.E.** — Nuovo Cim., 1993, v.A 106, p.327; In: Proc. of the Vth Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering, Providence, June 1993, Eds. H.M.Fried, K.Kang and C.–I Tan, p.387; Phys. Rev. D, 1994, v.49, p.4427.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 539.1.074.3

ПРОБЛЕМА УВЕЛИЧЕНИЯ РАДИАЦИОННОГО РЕСУРСА СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ ДЕТЕКТОРОВ ДЛЯ ПРОТОННЫХ И ИОННЫХ КОЛЛАЙДЕРОВ

Л.Н.Зайцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Показано, что при энергии $2 \div 14$ ТэВ и светимости $10^{32} \div 10^{34}$ см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$ радиационные нагрузки на сцинтилляторы (PS) и спектросмещающие световоды (WLS) начинают превышать предельно допустимый уровень, и ресурс резко снижается. Поскольку увеличить радиационную стойкость PS+WLS невозможно традиционным химико-технологическим способом, возникла альтернатива: либо часто менять систему PS+WLS (что технически трудно и экономически нецелесообразно), либо использовать новую концепцию тщательного планирования сеансов облучения и перерывов, в которых система восстанавливает свои свойства. Если время для восстановления (перерыва) мало, то это не будет отражаться на результатах фундаментальных исследований физиков-экспериментаторов.

It is shown that radiation loads on scintillators (PS) and light guides (WLS) exceed a maximum permissible dose for an energy of $2 \div 14$ TeV and luminosity of $10^{32} \div 10^{34}$ cm$^{-2}\cdot$s^{-1}, and the resource decreases sharply. Inasmuch as improvement of PS + WLS radiation stability cannot be achieved by means of traditional methods of chemical and technological nature, a dilemma arises: either to change periodically the PS + WLS system (it is technically complicated and economically inexpedient) or to use new concept for detailed planning irradiation runs and breaks when the system recovers its properties. A short recovery time (break) does not affect the results of fundamental investigations carried out by physicists-experimentalists.

ВВЕДЕНИЕ

В мире активно работают над проектами установок D0 и CDF на «Тэватроне», США [1,2], CMS, ATLAS и др. на Большом адронном коллайдере (LHC) в ЦЕРН [3,4]. При энергиях $2 \div 14$ ТэВ и светимостях $10^{32} \div 10^{34}$ см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$ в элементах этих установок возникают радиационные нагрузки порядка $10 \div 100$ кГр в год. Априори ясно, что полимеры (сцинтилляторы, световоды, изоляция и др.) не могут выдержать такие радиационные нагрузки. В связи с этим начался активный поиск новых добавок, антирадов и технологий матрицы, повышающих радиационную стойкость. Поскольку увеличить ресурс сцинтилляторов в 10–30 раз невозможно традиционными химико-технологическими способами, стали использовать новые неорганические тяжелые кристаллы BaF_3, CeF_3, $PbWO_4$ и др., предполагая, что они будут более стойкими.

Показательна ситуация, описанная в работе [5]. Акриловые сцинтилляторы, которые несколько лет использовались в урановом калориметре, потеряли световыход в два раза, а прозрачность в три раза после интегральной дозы 50 Гр, что на два порядка меньше, чем в тестовых испытаниях на малых образцах сцинтилляторов. Вначале полагали, что это эффект, наведенный радиоактивным распадом урана. Потом установили, что основную роль играло фоторадиационное окисление сцинтилляторов. Свет и радиация выступают в качестве мощных катализаторов радиационного окисления.

Другие калориметры, например, использующие полистирольные сцинтилляторы, работают по нескольку лет, практически не снижая разрешение. Это объясняется спонтанным восстановлением оптических свойств сцинтилляторов и спектросмещающих световодов в перерывах между сеансами. Например, калориметр ZDC в эксперименте WA-98 ЦЕРН на пучке ядер Pb с энергией 158 А·ГэВ имел ресурс непрерывного облучения $5 \cdot 10^6$ с. Выяснилось, что сцинтилляторы из гранулированного полистирола, изготовленные путем литья под давлением или методом экструзии, имеют наилучшую степень восстановления по сравнению со всеми известными сцинтилляторами. Поэтому при нагрузке 2 Гр·ч$^{-1}$ калориметр смог проработать три сеанса вместо одного. Таким образом, учет времени спонтанного восстановления свойств полимеров в сочетании с взаимоувязкой сеансов облучения и перерывов является, по-видимому, наиболее эффективным путем продления ресурсов органических материалов [8].

1. РАДИАЦИОННЫЕ НАГРУЗКИ

Радиационные нагрузки обычно представляют величинами энерговыделения (дозы)* в единицу времени без учета флуктуаций в чувствительном объеме материала. Точность расчетов величин радиационной нагрузки зависит от знания физических процессов взаимодействия излучений с веществом, характеристик материала, геометрии установки, полноты учета источников излучения, а также от соответствия математической модели реальным процессам [7,8].

Рассмотрим радиационные нагрузки на примере установки CMS. На рис.1 показана типичная геометрия детекторной установки на коллайдере. По оси цилиндра расположена вакуумная камера (1), где находится область столкновения пучков. Во внутренней полости (2) расположены вершинные и другие трековые детекторы. Необходимо иметь как можно меньше вещества в этой

*W, мДж $\cdot$ г$^{-1} \cdot$ с$^{-1} = D$, Гр $\cdot$ с$^{-1}$ (1 Гр = 100 рад).

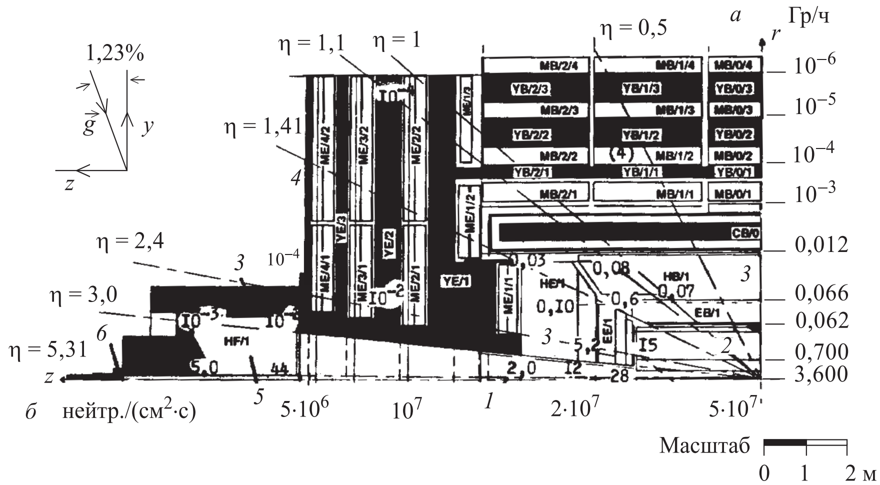

Рис. 1. Радиационная нагрузка в CMS при $E_p = 14$ ТэВ, $L = 10^{34}$ см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$: *а*) дозы в 1/4 цилиндрической геометрии; *б*) нейтроны — распределение по вакуумной камере (пояснения в тексте)

полости (0,1 — 0,5 г$\cdot$см$^{-2}$). Внутреннюю полость окружают элементы установок из плотных материалов: электромагнитные и адронные калориметры, соленоид, элементы фоновой защиты (3). В окружающем пространстве (4), как вблизи, так и вдали от калориметров, расположены мюонные и другие камеры. Кроме того, в ряде установок, например, CMS [3], ATLAS [4], имеются так называемые передние калориметры (5). Перед ними находятся коллиматоры (6) для пучков, принимающие на себя основное энерговыделение ($\sim 60\%$) и являющиеся мощными источниками излучения.

Источники излучения. Основными источниками излучения в подобных установках являются:

— прямое излучение от $pp(AA)$-столкновений;

— излучение, образовавшееся при взаимодействии прямого излучения с вакуумной камерой и остаточным газом;

— излучение, вышедшее из плотных материалов во внутреннюю полость (альбедо);

— вторичное излучение от взаимодействий прямого излучения и альбедо с материалами внутри полости (с конструкциями камеры и детекторов).

При первоначальных оценках [9] радиационных нагрузок обычно учитывали одно столкновение $pp(AA)$, определяемое множественностью вторичных частиц на единицу псевдобыстроты η (см.рис.2), сечением неупругого взаимодействия $\sigma_{\rm in}$ и светимостью. В табл.1 приведен выход частиц в pp-столкновении при 14 ТэВ [12].

Таблица 1. Выход частиц в pp-столкновении при 14 ТэВ

Тип частицы	Выход частиц (в процентах на один протон)
p	0,98 – 1,98
n	1,14 – 1,88
$K^+,\ K^0$	7,42 – 8,01
$\pi^\pm$	34,8 – 39,8
$\Sigma,\ \ \Lambda$	0,80 – 2,13
$p,\ n,\ \Sigma$	2,91 – 5,82
$e^\pm$	0,50 – 0,55
γ	44,9 – 46,4

При расчете нагрузок вследствие процессов взаимодействия частиц с вакуумной камерой нужно учитывать реальную геометрию, размеры области столкновения, магнитные и электростатические поля, характеристики материалов и пространственно-угловое и энергетическое распределение каждого сорта частиц в $pp(AA)$-столкновении [10]. Необходимо детально моделировать многократное кулоновское рассеяние, когерентное и некогерентное упругое ядерное рассеяние, неупругое ядерное взаимодействие, флуктуации при прямом рождении пар e^+, e^- и др. Основы такого моделирования были впервые заложены в [11], а затем развиты в [12—16].

В работе [15] рассмотрено влияние конфигурации вакуумной камеры на выход нейтронов. Учитывалось магнитное поле (4 Тл) для CMS. Вдоль оси в пределах первых 1,5–2 м конфигурация камеры (рис.1) не сильно влияет на выход нейтронов. Однако на длине $\pm 2 \leq Z \leq \pm 15$ м уменьшение выхода нейтронов по сравнению с камерой постоянного сечения очень существенно (до 5 раз). В этой работе не рассматривалось формирование линейного источника всех частиц и фрагментов, что особенно важно при AA-столкновениях тяжелых ядер (вакуумную камеру можно представить в виде линейного протяженного источника излучения [8]).

По аналогичной методике с учетом последних работ по множественному образованию α-частиц и фрагментов [17,18] были определены места столкновения частиц со стенкой камеры и углы входа α_E. В табл.2 приведены некоторые характеристики равномерно распределенного линейного источника в пределах $Z = \pm 3$ м (рис.1), причем при формировании линейного источника учитывались частицы, падающие на стенку камеры не только изнутри камеры, но и снаружи (альбедо). Частицы из лидирующей группы практически не дают неупругих взаимодействий — в стенке камеры толщиной $d = 0,15 - 0,25$ см как из-за большой величины пробега до неупругого взаимодействия $\lambda_{\rm in}$, так и вследствие малых углов выхода $\alpha_E < 100$ мкрад.

Таблица 2. Линейный источник $2\pi r_a$, част.·см$^{-2}$·с$^{-1}$

Частицы, дающие (ν_*)	$\langle E_0 \rangle$, ГэВ	Светимость L, см$^{-2}$·с$^{-1}$		
		10^{34} (pp)	10^{29} (CaCa)	10^{27} (PbPb)
Σ_i $i \to p,\ \pi, e, \gamma \ldots$	6	$8 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^7$
Нейтроны	$\sim 10^{-3}$	$3 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
Число эквивал. протонов	—	$1,3 \cdot 10^{14}$	$6,7 \cdot 10^{13}$	10^{13}

Примечание: r_a — радиус вакуумной камеры, равный 6 см (Al); $\langle E_0 \rangle = 6$ ГэВ соответствует заряженным частицам с $10^{-1} < \alpha_E < 10$ мрад.

Вероятность неупругого взаимодействия частиц в стенке камеры:

$$P = 1 - \exp\left(d/\alpha_E \cdot \lambda_{\text{in}}\right), \tag{1.1}$$

а доля неупругих взаимодействий:

$$\nu_* = 1/\lambda_{\text{in}} \exp\left(-x/\lambda_{\text{in}}\right), \tag{1.2}$$

Из выражений (1.1) и (1.2) ясно, что при $r_a = 6$ см, $d = 0,12$ см около 90% всех взаимодействий будет локализовано в стенке. Заметим, что при скользящей высадке частиц на полубесконечную среду из алюминия с границей вакуум — вещество число неупругих взаимодействий на одну первичную частицу с E_0 (в ГэВ) определяется формулой:

$$\nu_* = 2AE_0^i + 2,34 \cdot 10^{-3}\ \ln\ (5E_0^j), \tag{1.3}$$

где индекс $i \to p, d, n, \pi$ ..., индекс $j \to e^+, e^-, \gamma$, дающие реакции γ, n_π; γ, $n_{\pi\pi}$; γ, nn и др. В действительности из-за отражения величина ν_* существенно меньше [8].

В случае взаимодействий CaCa и PbPb (табл.2) моделирование траекторий частиц не производили, а полагали справедливым (см. ниже) феноменологический метод "эквивалентных протонов", впервые предложенный в работе [23], то есть линейный источник при AA-взаимодействии определяется из соотношения:

$$S_{AA}(Z) = A\left(N_p(L_p)/(N_A(L_A)\right) S_P(Z), \tag{1.4}$$

где N_p и N_A — количество протонов и ионов в сталкивающихся пучках. В табл.3 приведены величины "эквивалентных протонов" для установок CMS, ATLAS, ALICE на коллайдере LHC. Показана условная граница $\sim 10^{13}$ экв. протонов, ниже которой радиационные нагрузки не представляют большой

Таблица 3. Интегральная светимость и число ионов в пучке (LHC — 14 ТэВ)*

p	$1,2\cdot10^{34}$ $\mathbf{1,3\cdot10^{14}}$	$3,3\cdot10^{33}$ $\mathbf{6,8\cdot10^{13}}$	$1,5\cdot10^{33}$ $\mathbf{4,6\cdot10^{13}}$	$5,5\cdot10^{32}$ $\mathbf{1,7\cdot10^{13}}$	$1,1\cdot10^{32}$ $\mathbf{3,3\cdot10^{12}}$
$^{4}He_2$	$9,9\cdot10^{32}$ $3,7\cdot10^{13}$ $\mathbf{1,5\cdot10^{14}}$	$2,9\cdot10^{32}$ $2,0\cdot10^{13}$ $\mathbf{8,0\cdot10^{13}}$	$1,4\cdot10^{32}$ $1,4\cdot10^{13}$ $\mathbf{5,6\cdot10^{13}}$	$5,1\cdot10^{31}$ $3,5\cdot10^{12}$ $\mathbf{1,4\cdot10^{13}}$	$1,0\cdot10^{30}$ $6,8\cdot10^{11}$ $\mathbf{2,7\cdot10^{12}}$
$^{16}O_8$	$2,9\cdot10^{31}$ $6,3\cdot10^{12}$ $\mathbf{1,0\cdot10^{14}}$	$9,9\cdot10^{30}$ $3,7\cdot10^{12}$ $\mathbf{5,9\cdot10^{13}}$	$5,0\cdot10^{30}$ $2,6\cdot10^{12}$ $\mathbf{4,2\cdot10^{13}}$	$1,8\cdot10^{30}$ $9,3\cdot10^{11}$ $\mathbf{1,5\cdot10^{13}}$	$3,6\cdot10^{29}$ $1,9\cdot10^{11}$ $\mathbf{3,0\cdot10^{12}}$
$^{40}Ca_{20}$	$1,8\cdot10^{30}$ $1,6\cdot10^{12}$ $\mathbf{6,4\cdot10^{13}}$	$6,9\cdot10^{29}$ $1,0\cdot10^{12}$ $\mathbf{4,0\cdot10^{13}}$	$3,9\cdot10^{29}$ $7,4\cdot10^{11}$ $\mathbf{3,0\cdot10^{13}}$	$1,4\cdot10^{29}$ $2,8\cdot10^{11}$ $\mathbf{1,1\cdot10^{13}}$	$2,8\cdot10^{28}$ $5,5\cdot10^{10}$ $\mathbf{2,2\cdot10^{12}}$
$^{97}Nb_{41}$	$6,4\cdot10^{28}$ $3,3\cdot10^{11}$ $\mathbf{3,2\cdot10^{13}}$	$2,4\cdot10^{28}$ $1,8\cdot10^{11}$ $\mathbf{1,7\cdot10^{13}}$	$1,3\cdot10^{28}$ $1,3\cdot10^{11}$ $\mathbf{1,3\cdot10^{13}}$	$4,8\cdot10^{27}$ $5,0\cdot10^{10}$ $\mathbf{4,8\cdot10^{12}}$	$9,6\cdot10^{26}$ $9,6\cdot10^{9}$ $\mathbf{9,3\cdot10^{11}}$
$^{208}Pb_{82}$	$8,9\cdot10^{26}$ $4,8\cdot10^{10}$ $\mathbf{1,0\cdot10^{13}}$	$2,7\cdot10^{26}$ $2,0\cdot10^{10}$ $\mathbf{4,2\cdot10^{12}}$	$1,4\cdot10^{26}$ $1,4\cdot10^{10}$ $\mathbf{2,9\cdot10^{12}}$	$5,1\cdot10^{25}$ $5,3\cdot10^{8}$ $\mathbf{1,1\cdot10^{11}}$	$1,0\cdot10^{25}$ $1,0\cdot10^{8}$ $\mathbf{2,1\cdot10^{10}}$

*См. Brandt D., Eggert K., Morsch A. — LHC Note 264. Выделены величины эквивалентных протонов (наша оценка).

опасности для большинства материалов детекторных установок. Существует мнение, что уменьшение светимости на ~ 8 порядков, например, с $1,2\cdot10^{34}$ (pp) до $8,9\cdot10^{26}$ (PbPb), априори снимает проблему радиационной опасности. Это неверно, поскольку число "эквивалентных протонов" изменяется только на один порядок, а именно эта величина определяет внутреннее радиационное поле, т.е. радиационные нагрузки на элементы детекторов.

Поверхностный источник определяется альбедо $i-j$, где i — входящая частица; j — выходящая из среды частица. Величина альбедо часто выражается в процентах и обозначается ξ_{ij}. Первые оценки [19,20] подтвердили предположение о больших альбедо и стимулировали детальное изучение этой проблемы [21,22]. Для внутренней полости детекторных установок, как оказалось, альбедо играет исключительно важную роль [24,25].

В табл.4 для иллюстрации приведены значения альбедо. Видно, что основным компонентом излучения являются нейтроны, однако выход заряженных частиц, особенно низкой энергии также значителен. При энергии падающих на железо частиц менее 1 ГэВ наблюдается сильная зависимость альбедо от вида подающей частицы. С увеличением энергии различие в зависимости ξ_{ij} от вида падающей частицы уменьшается. Это позволяет пользоваться соответствующими значениями ξ_{pn} независимо от вида входящих заряжен-

Таблица 4. Значение альбедо ξ_{ij} в процентах на один протон, падающий на железо [22]

Тип	Энергия	Энергия E_p, ГэВ			
$i-j$	$E_{\min}-E_{\max}$, МэВ	1	10	70	200
pn	$10^{-3}\div 10^{-1}$	9,0	85	230	540
pn	$10^{-1}\div 10^{3}$	6,0	69	193	430
pp	$10^{-3}\div 10^{-1}$	4,0	43	100	147
pp	$10^{-1}\div 10^{3}$	1,0	27	3,5	11
$p\pi$	$10^{-1}\div 10^{3}$	—	16	6,3	13
$p\gamma$	$10^{-1}\div 10^{-3}$	3,0	20	15,5	32

ных частиц. Для решения задачи о вкладе альбедо в суммарную радиационную нагрузку необходима информация о дифференциально-угловых и дифференциально-энергетических распределениях альбедо нейтронов и заряженных частиц. Расчет альбедо вследствие событий, имеющих очень малую вероятность, не дает уверенности в точности расчетов по программам для глубокого проникновения (например, FLUKA [16]). Сравнение расчетов с экспериментами [27] для альбедо не производили.

Плотные материалы. Для CMS вначале рассматривались следующие материалы для электромагнитного калориметра (ECAL), обозначенного на рис.1 EE и EB [25]:
— сцинтиллирующие кристаллы CeF_3 плотностью 6,16 г·см$^{-3}$;
— жидкий сцинтиллятор аргон — 2 мм и свинец — 1,5 мм (Pb + LAr) со средней плотностью 5,6 г·см$^{-3}$;
— твердый сцинтиллятор полистирол — 4 мм и свинец — 2 мм (PS + Pb) со средней плотностью 4,45 г·см$^{-3}$.

Позже были рассмотрены возможности использования кристаллов $PbWO_4$ вместо CeF_3, но "радиационную картину" эта замена сильно не меняет [28]. Адронный калориметр (HCAL) (на рис.1 обозначен HE и HB) состоит из слоев Cu — 4 мм и сцинтиллятора PS — 10 мм и имеет плотность 7,37 г·см$^{-3}$. Дальше по радиусу (рис.1) — мюонные камеры и "триггеры" (ME и MB). С целью уменьшения альбедо низкоэнергетических частиц на лицевой поверхности EB и EE, а также между EB и HB размещаются конверторы спектра нейтронов из CH_2 толщиной 5 см. Между EE и HE конвертор имеет толщину 9 см.

Расчеты радиационных нагрузок проведены по программе работы [16] с использованием коэффициентов перехода от флюенса (потока частиц) к дозе заряженных частиц и нейтронов [29]. Упрощенная геометрия, а также представление реальных элементов установки в виде гомогенной смеси тяжелых и легких материалов не позволили определить дозу конкретно в чувствительном объеме (например, в фибрах диаметром 60 мкм).

Таблица 5. Сравнение радиационных нагрузок для CMS, Гр·ч$^{-1}$ (при $E = 14$ ТэВ и $L = 10^{34}$ см$^{-2}$·с$^{-1}$)

η	Координаты, см (см.рис.2)		ECAL		HCAL		ECAL	HCAL
	r	Z	[3]	[31]	[3]	[30]	Наша оценка	
3–2,8	40	320	13	15			28	
		340 376	**3,7**	**3**	**4,6**	**0,86**	**12**	**10**
		560			2,8	0,07		2
2,6–2,4	55	320	8	6,5			15	
		340 376	**2,8**	**1,4**	**4,5**	**0,13**	**5,2**	**5**
		560			0,9	0,01		0,4
1,5–1,4	130	320	0,46	0,28			0,6	
	↓	340 376	**0,09**	**0,03**	**0,04**	**0,02**	**0,08**	**0,07**
	286	560				10^{-3}		0,03
1,1–1	130	145		0,2			0,22	
	↓	206		**0,02**		**0,01**	**0,04**	**0,03**
	286	370				10^{-4}		0,014
0,1–0	130			0,18			0,62	
	↓	~ 0		**0,02**		$\mathbf{6 \cdot 10^{-5}}$	**0,06**	**0,065**
	286					10^{-6}		0,012

На рис.1 показано распределение радиационной нагрузки в CMS с учетом всех вышеобозначенных источников излучения в соответствии с данными, приведенными в двух последних колонках табл.5. Заметим, что как первоначальные оценки [3], так и расчеты в технических проектах [30,31] значительно занижены. Кроме того, расчеты радиационных нагрузок в [3,30,31] не внушают доверия, поскольку содержат внутренние противоречия. Например, цифры, выделенные жирным шрифтом в табл.5 (первые четыре колонки), ни при каких условиях не могут отличаться в строке больше чем на 20%, поскольку относятся к одинаковым координатам r и z физической установки (см. рис.1).

Внутренняя полость. В ней расположены вершинные и другие трековые детекторы. Последние могли бы быть выполнены из сцинтилляционных волокон (фибр), если бы они имели приемлемые радиационные ресурсы. Радиационная нагрузка во многом определяется минимально ионизирующими частицами.

Радиационная нагрузка от минимально ионизирующих частиц может быть выражена как [32]:

$$\dot{D}(r) = 1,6 \cdot 10^{-4} L\sigma_{\text{in}} n(dE/dx \sin\theta)(\sin\theta/2\pi r^2), \tag{1.5}$$

где $L = 10^{34}$ см$^{-2}$·с$^{-1}$ — светимость; $\sigma_{\rm in} = 85$ мб — сечение неупругого взаимодействия; $n = 7$ — множественность на единицу быстроты η. Тормозная способность $dE/dx \sin\theta$ равна 2 МэВ·см$^{-2}$·г$^{-1}$ для всех частиц, испущенных в полярный угол θ. Число частиц, рожденных в одном столкновении и прошедших через единичную поверхность фибр, равно $n(\sin\theta/2\pi r^2)$. Множитель $1,6 \cdot 10^{-4}$Гр·см^2·г$^{-1}$ показывает переход от флюенса к дозе.

Для соленоидального магнитного поля ($B = 4$ Тл) соотношение (1.5) изменится:

$$\dot{D}(r,\,B) = \dot{D}(r)\left(2\langle n_c\rangle \int\limits_{x_1}^{x_b} f(x\prime)dx\prime + \int\limits_{x_b}^{\infty} f(x\prime)dx\prime\right), \tag{1.6}$$

где $\langle n_c\rangle = \sinh\eta_{\max}/\sinh\pi\eta$ — среднее число витков (спиралей) заряженных частиц в области быстрот $0 < \eta < \eta_{\max}$ для трекового детектора [33]; $f(x) = x\exp(-x)$ — распределение поперечных импульсов частиц с $x = 2p_t/\langle p_t\rangle = 0,3B/\langle p_t\rangle$. Средний поперечный импульс частиц $\langle p_t\rangle \sim 0,55$ ГэВ, причем он практически не изменяется при AA-столкновениях. Первый интеграл устанавливает связь между диаметрами витков, попадающих на фибры (x_i) и достигающих внутренней поверхности ECAL, то есть $d = p_t/0,15B$. При $\theta = 90^\circ$ ($\eta = 0$) число витков должно быть очень большим. Учитывая распад частиц внутри области трекового детектора ($\eta_{\max}$), $\coth\theta_d = (m_0/c_\tau)(\sin h\,\eta_{\max}/0,15B)$, где θ_d — предельный угол ($m_0 \sim 0,14$ ГэВ/с^2 и $c_\tau = 7,8$ м для $\pi^\pm$). В [32] получили угол θ_d в интервале $76^\circ \div 27^\circ$ для B в интервале $1 \div 6$ Тл в области быстрот $n_{\max} = 1{,}5$. Второй интеграл в (1.6) учитывает частицы с коротким пробегом, которые поглощаются калориметром.

Таким способом был рассчитан [32] флюенс минимально ионизирующих частиц с учетом магнитного поля (кривая *2* на рис.2). Видно, что по сравнению с оценками [34] без магнитного поля (группа кривых *1*) флюенсы $F(B)$ возрастают при малых r и резко уменьшаются при $r > 80$ см. В группе кривых *1* приведены данные о флюенсах нейтронов без альбедо. С учетом альбедо по нашим оценкам и данным работы [35] распределение нейтронов скорее соответствует кривой *3*, увеличиваясь при $r \to 0$ и $Z \to 140$ см. В первом случае из-за дополнительного вклада от линейного источника (вакуумной камеры), а во втором — из-за большого альбедо, несмотря на наличие конвертора CH_2. Низкоэнергетические заряженные b-частицы, также возникающие от линейного источника и альбедо, вносят существенный вклад в суммарную дозовую нагрузку.

На рис.3 показано радиальное распределение энерговыделения в стенке вакуумной камеры и внутреннем детекторе со средней плотностью 0,5 г·см$^{-2}$. Если принимаются во внимание два источника излучений — линейный $S(Z)$

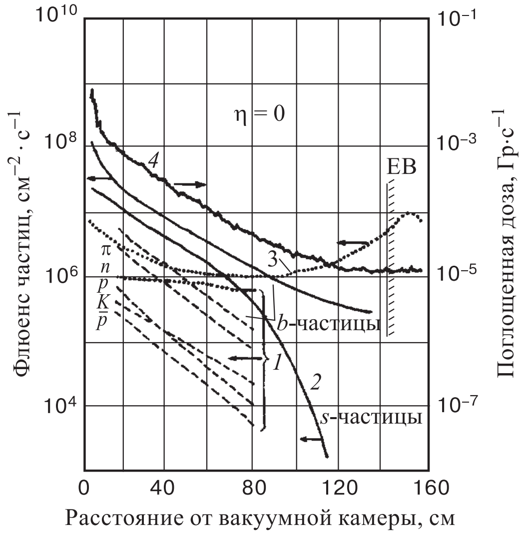

Рис. 2. Радиальное распределение флюенсов частиц и поглощенной дозы (нагрузки) в трековой области CMS при $E_p = 14$ ТэВ, $L = 10^{34}$ см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$, $B = 4$ Тл (пояснения в тексте)

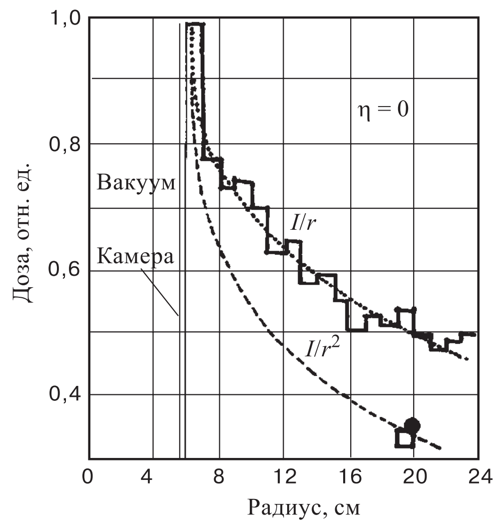

Рис. 3. Радиальное распределение радиационной нагрузки вблизи вакуумной камеры CMS: ⊔⊓ — наша оценка [8]; □, ● — оценка [26]

и точечный (pp), то распределение дозовой нагрузки ближе к $1/r$, а не к $1/r^2$, как получено в [25].

Окружающее пространство. В нем должна быть защита мюонных камер (рис.1) и триггерных устройств от радиационного фона, компонентами которого являются нейтроны с широким спектром энергии от 0,025 эВ до нескольких десятков МэВ, а также γ-кванты вследствие захвата нейтронов. Средняя энергия захватных γ-квантов в железе ~ 4 МэВ [8].

Первые оценки состава и размеров защиты для разных установок на коллайдерах были сделаны в [3,4]. Особенно детально рассмотрена радиационная обстановка и выбраны материалы защиты на CMS. Во всех установках для коллайдеров предполагается использовать свинец и полиэтилен в чистом виде, что нежелательно, так как полиэтилен — горючий и недолговечный, а свинец — токсичен. Если свинец и полиэтилен заключить в оболочку из специального связующего материала, например полимербетона, то не только значительно упрощается изготовление компактной защиты, уменьшается аэрозольная опасность, но снижается стоимость защиты [36,37].

2. РАДИОРЕЗИСТЕНТНОСТЬ СЦИНТИЛЛЯТОРОВ И СПЕКТРОСМЕЩАЮЩИХ ВОЛОКОН

В данном разделе при обзоре литературы делается акцент на эффекты, возникающие при облучении сцинтилляторов и световодов при малых нагрузках, умеренных дозах, обратимых процессах, спонтанном восстановлении и т.п. Именно эти эффекты, важные для практики, оказались малоизученными.

Предельная доза. Радиационная чувствительность (радиорезистентность) характеризуется, прежде всего, предельной дозой $D_{\rm lim}$, при которой происходит предельно допустимое изменение определенного оптического свойства $\xi(D)$ материала. Величина $D_{\rm lim}$ не является универсальной. Особенно важное значение имеет взаимосвязь между поглощенной дозой D, мощностью дозы $\dot{D}$, временем радиационного воздействия t_i, а также временем τ и степенью δ спонтанного восстановления [8].

Выяснение характера этих зависимостей имеет большое практическое значение, в том числе для обоснования прогнозирования $D_{\rm lim}$ на основе ускоренных радиационных тестов, поскольку при таких испытаниях мощность дозы, как правило, не соответствует мощности дозы (радиационным нагрузкам) в условиях эксплуатации (см. рис.4).

В результате радиационного воздействия в области малых доз от 10 до 10^4 Гр оптические эмиссионные спектры $d(\lambda)$, где λ — длина волны света, изменяются. Изменения в спектрах в реальных калориметрах не должны превышать 10–20%, следовательно, преобладают обратимые процессы. При изменениях световыхода на 40–60% преобладают необратимые эффекты. Ниже мы будем рассматривать в основном обратимые изменения, обусловленные образованием возбужденных состояний молекул заряженных частиц, свободных радикалов, комплексов с переносом заряда и др. [38,39].

Для количественного описания радиационных эффектов используют понятие «радиационно-химический выход»:

$$G = f(D). \tag{2.1}$$

Принято различать начальный выход G_0 при $D \to 0$ и наблюдаемый выход продуктов радиолиза материала G, который косвенно характеризует изменение количества или свойства вещества при заданном значении поглощенной дозы [40].

Как было установлено [41 — 44], на характер радиационно-химических процессов при малых дозах существенно влияют примеси в полимерах, в том числе кислород и остаточный мономер, которые сохраняются в структуре матрицы. Распределение радиолиза, особенно при малых дозах, по объему образца неравномерно, что зависит от специфики поглощения ионизирующих излучений с наиболее опасными низкими значениями линейной передачи энергии (ЛПЭ). Надо отметить, что радиационные эффекты в области малых доз экспериментально изучены в меньшей степени, вероятно, потому, что исследователи искали прежде всего легко измеримые величины свойств полимеров.

При малых мощностях доз концентрация радикалов растет линейно с дозой:

$$[R] = [R]_{\lim}(1 - \exp(-kD)), \tag{2.2}$$

где $[R]_{\lim}$ — предельная концентрация радикалов: k — эффективная константа скорости "гибели" радикалов. При комнатной температуре константа k составляет примерно 10^3 Гр^{-1}, а с повышением температуры радиолиза полимеров выход радикалов растет. С другой стороны, получены результаты, свидетельствующие о том, что выход и предельная концентрация радикалов с ростом мощности дозы падают [45]. С ростом ЛПЭ выходы радикалов также снижаются из-за увеличения локальной концентрации радикалов вдоль трека и, следовательно, большей вероятности их рекомбинации [46].

В тех случаях, когда скорости рекомбинации свободных радикалов сравнимы со скоростями реакций первого порядка (присоединения к двойной связи или отрыва), зависимость радиационных эффектов от мощности дозы очень существенна, особенно в цепных процессах. В цепном процессе происходит радиационное и фоторадиационное окисление, газовыделение и т.п.

На рис.4 показана зависимость предельной дозы сцинтилляторов от радиационных нагрузок в широком диапазоне (мощности дозы). Экспериментальные данные (точки) приведены для лучших известных сцинтилляторов. Заметим, что самые большие предельные дозы получены для жидких сцин-

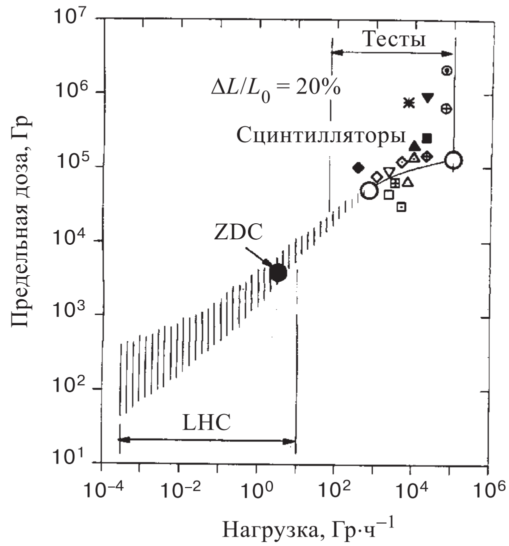

Рис. 4. Зависимость предельной дозы при потере световыхода $\Delta L'/L'_0 = 20\%$ от радиационной нагрузки: малые точки — ”радиационно-стойкие” сцинтилляторы [46]; большие точки: ○ — образцы стандартного сцинтиллятора ПС1; • — ZDC — реальный калориметр [69]; заштрихованная область — оценка на основе ”метода суперпозиции” [66,67]

тилляторов в условиях вакуума (точки вверху, рис.4). Контакт жидкого сцинтиллятора с воздухом во всех случаях приводит к заметному ухудшению люминесцентных и оптических характеристик даже при столь высокой мощности дозы: $5{\cdot}10^3 \div 10^4$ Гр·ч$^{-1}$ [46]. Предельная доза определялась только при ускоренных облучениях малых образцов, в основном, низкоэнергетическими α-, β- и γ-источниками [46—59], редко нейтронами [60, 62] и пучками частиц высоких энергий [61,63,64]. Из рис.4 видно, что подавляющее большинство ранее полученных результатов не могут дать правильный прогноз для детекторов LHC [30,31]. Чтобы получить результаты при $\dot{D} \leq 10^{-2} \div 10^{-3}$ Гр·ч$^{-1}$, потребовалось бы 5–8 лет облучения, что практически невыполнимо.

Полуэмпирическая модель. В работе [64] впервые предложено использовать известный ”принцип температурно-временной суперпозиции” [65], где температура облучения и мощность дозы связаны. Он с успехом применен на АЭС в США [66, 67] для прогнозирования старения полимерной электроизоляции кабелей. В 1985 г. (см. приложение в [64]) пользовались этим принципом и удовлетворительно описали экспериментальные результаты. Полуэмпирическая модель применима к любым полимерам, в том числе к сцинтилляторам, особенно при малых дозах, где нет фазовых переходов: стеклования, аморфизации и т.п. На рис.4 впервые воспроизведена зависимость $D_{\lim}(\dot{D})$ в диапазоне $10^{-4} \leq \dot{D} \leq 10$ для сцинтилляторов [61].

Рассмотрим суть модели. Анализ большого массива данных позволил авторам работы [68] обоснованно утверждать, что отношение $G(300K)/G(T)$ свободных радикалов линейно уменьшается с ростом температуры для любых полимеров. При более высоких температурах происходит ускоренное радиационно-окислительное старение без изменения механизма основных химических реакций, подчиняющихся закону Аррениуса:

$$v_k \sim \exp{(-E/RT)}, \tag{2.3}$$

где E — суммарная, эмпирически определенная энергия активации, рассматриваемая в качестве эффективной энергии всего термически активированного процесса; v_k — скорость реакции; R — газовая постоянная. Для перенесения результатов измерений, полученных при повышенных температурах, на условия при рабочей температуре $T_{\text{э}}$ вычисляется коэффициент смещения:

$$\dot{a} = \exp{(E/R(T_{\text{э}}^{-1} - T^{-1}))}. \tag{2.4}$$

Выходы продуктов радиационно-химического окисления в изотермическом режиме ($250 \div 400$ К) описываются уравнением:

$$G = K + A\exp{(-E/RT)}(G(R\bullet)/\dot{D})^{1/2}[RH], \tag{2.5}$$

где k — эмпирический коэффициент, учитывающий образование продуктов радиолиза при рекомбинации радикалов; A — предэкспоненциальный множитель; E_1 — энергия активации процесса, которая обычно близка к энергии активации реакции продолжения цепи ($30 \div 50$ кДж/моль); $G(R\bullet\ )$ — радиационно-химический выход свободных радикалов; $[RH]$ — концентрация окисляемого соединения.

Цепные фоторадикальные реакции протекают при условии $\Phi I\tau_r > 1$, где Φ — квантовый выход радикалов: I — интенсивность видимого света; τ_r — время жизни радикалов. От низких до комнатных температур цепные фоторадикальные реакции реализуются практически при всех значениях Φ и τ_r, если интенсивность видимого света больше $\sim 10^{13}$ см$^{-2}$·с$^{-1}$ [39]. Энергия, вносимая активными частицами в фоторадиационные процессы за счет поглощения излучения оптических частот, равна

$$E_2 = \text{э}\,(G\dot{D}\tau_r)xI\mathcal{E}, \tag{2.6}$$

где э — коэффициент экстинкции, x — толщина образца; $\mathcal{E}$ — средняя энергия фотонов. Энергия, поступающая по этому каналу, в ряде случаев может быть сравнима или существенно превосходить энергию, поступающую за счет ионизирующего излучения. Эта дополнительная энергия также расходуется на инициирование химических реакций. Энергия активации в (2.4) складывается из двух величин, $E = E_1 + E_2$, согласно соотношениям (2.5) и (2.6). Тогда выражение для коэффициента смещения приобретает вид

$$\dot{a} + A\exp\left(E/R(T_{\text{э}}^{-1} - T^{-1})\right)(G(R\bullet)/\dot{D})^{1/2}[RH]. \tag{2.7}$$

Область в диапазоне $\dot{D}$ от 10^{-4} до 10^{0} (рис.4) оценена с учетом дополнительной энергии активации процесса E_2 при интенсивности света радиолюминесценции $\sim 10^{15}$ см$^{-2}$·с$^{-1}$. Именно при такой интенсивности света был проведен эксперимент в ЦЕРН на реальном калориметре ZDC [61]. При $\dot{D} = 10^5$ Гр·ч$^{-1}$ первая экспериментальная точка получена в 1986 г. на ЛУЭ (Харьков) при $E_{\text{э}} = 1,2$ ГэВ и флюенсе 10^{11} эл·см$^{-2}$·с$^{-1}$. Время облучения 10 ч. Вторая точка при $\dot{D} = 10^5$ Гр·ч$^{-1}$ измерена в 1992 г. в ОИЯИ на гамма-установке ^{60}Co. Образцы имели размеры 4x150x150 мм и изготавливались по одинаковой с ПС1 (см. ниже) технологии (добавки 1,5% pTP + + 0,03% POPOP + 1% антирады). Экспериментально были получены величины $D_{\lim}$, соответственно, $7 \cdot 10^4$ Гр и $1,2 \cdot 10^5$ Гр (рис.4). Такие сцинтилляторы поспешили назвать радиационно стойкими [59]. Однако при облучении тех же сцинтилляторов в реальном свинцовом калориметре ZDC [61,69] (10^{11} ускоренных ядер Pb с энергией 158 А·ГэВ) была получена $D_{\lim} = 4 \cdot 10^3$ Гр. Облучение длилось $1,4 \cdot 10^3$ ч в присутствии кислорода воздуха, а дозовая нагрузка была ~ 2 Гр·ч$^{-1}$. Такое большое различие $D_{\lim}$ для малых образцов и калориметра можно объяснить: а) фоторадиационным окислением (из-за различия в $\dot{D}$); б) отличием в размерах сцинтилляторов и наличием световодов из полиметилметакрилата (ПММА); в) влиянием ЛПЭ: $\sim 0,2$ кэВ·мкм$^{-1}$ для ^{60}Co и 20 кэВ·мкм$^{-1}$ для смешанного поля излучения.

При $\dot{D} > 10^2$ Гр·ч$^{-1}$ (см. рис.4), когда величина нагрузки «эквивалентна» условиям вакуума, радиационные изменения меньше зависят (а иногда и не зависят) от мощности дозы. Таким образом, при больших $\dot{D}$, а также для достаточно толстых образцов реализуются такие условия, когда окисляется только поверхностный слой, а основная масса полимера не окисляется.

Вследствие неравномерности процесса радиолиза даже в однофазной системе всегда существует поток энергии радиолиза к поверхности. Поэтому полимеры можно рассматривать как гетерогенные [70]. В таком понимании к гетерогенным системам относятся монокристаллы с дефектами, например, $PbWO_4$ [71].

В облученном в вакууме ПММА наблюдается (рис.5) равномерное распределение оптической плотности по объему (кривая *1*). Если облученный полимер хранится на воздухе, то, наряду с диффузией газов из образца, существует диффузия кислорода воздуха внутрь образца. Кислород ускоряет «гибель» радикалов и таким образом влияет на формирование пространственного распределения оптической плотности, которая принимает вид, по-

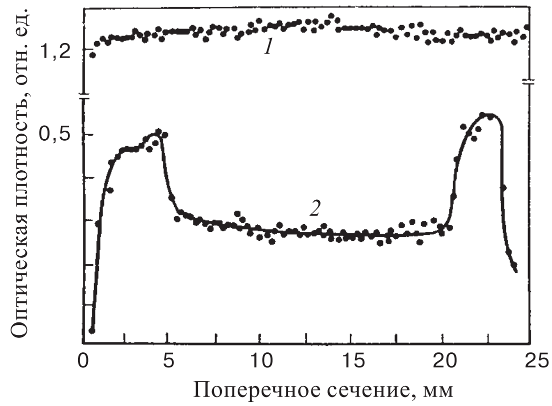

Рис. 5. Оптическая плотность в поперечном сечении образца ПММА, облученного в вакууме до дозы 30 кГр (*1*), и то же — после хранения на воздухе в течение 30 дней (*2*) [72]

казанный кривой *2* [72]. Такая же картина наблюдается, когда облучаются на воздухе сцинтилляторы.

Слабо зависит от $\dot{D}$ радиационная деградация свойств полимеров при значении ниже 10^2 Гр·ч$^{-1}$. При этом всегда наблюдаются значительно меньшие предельные дозы $D_{\lim}$ (рис.4), чем при высоких дозовых нагрузках. Это означает, что радиационно-окислительному превращению подвергается почти весь объем полимера. У полистирола первоначально возникает двухслойная структура за счет сильного окисления наружного слоя и слабого окисления его внутреннего объема, лишенного доступа кислорода в силу диффузионных ограничений. Время структурной релаксации может достигать десятков и сотен суток при комнатной температуре, т.е. существенно отстает от химических превращений.

В результате в таком неоднородном по своему составу материале происходит рост механических напряжений, приводящих к образованию микротрещин. Эти микротрещины играют роль каналов, по которым кислород (или озон) из окружающего воздуха поступает во внутренние области образца, способствуя быстрому радиационному старению полимера.

В промежуточной области мощности доз $10^{-2} < \dot{D} < 10^2$ Гр·ч$^{-1}$ (рис.4) предельная доза имеет следующую зависимость от $\dot{D}$ [64]:

$$D_{\lim} \approx D_0(\dot{D})^n, \tag{2.8}$$

где n характеризует приближенную линейную зависимость $\lg D(\xi) = f(\lg \dot{D})$, которая может быть определена только из экспериментов.

Роль ЛПЭ. Основную роль в радиационных изменениях свойств полимеров играют процессы ионизации и возбуждения молекул. При малых скоростях тяжелых заряженных частиц, когда $v_u/v_0 \approx 0,6$, где v_0 — боровская скорость электрона, могут преобладать упругие ядерные столкновения.

Из табл.6 видно, что равенство ЛПЭ в треке для ионов с разными зарядами имеет место при различных скоростях ионов [73]. Поскольку эффективный радиус трека увеличивается с ростом скорости иона, то в случае α-частиц поглощенная энергия распределена в треке большего объема. В результате локальные и средние выходы активных частиц будут ниже у иона с большим зарядом и массой. Таким образом, нет прямой зависимости G от ЛПЭ. В связи с этим в [73] предложена модель описания радиационно-индуцированных превращений, использующая заряд и скорость заряженной частицы. Наблюдаемое увеличение деградации ПС при облучении в поле адронов по сравнению с γ-квантами лежит в пределах погрешности [64].

Соотношения выхода продуктов при деструкции и сшивании $G_{\text{д}}/G_{\text{c}}$ в ПС и ПММА при облучении γ-квантами и быстрыми нейтронами ($\dot{D} \sim$ $\sim 10^2$ Гр·с$^{-1}$) очень мало отличаются в присутствии кислорода воздуха, однако в вакууме различие в $5\div10$ раз [74,75]. Проведено сопоставление воздействия электронов (2 МэВ), протонов (8 МэВ), α-частиц (30 МэВ) и ионов C^{4+} и N^{4+} (80 МэВ) на механические свойства алифатических полимеров [76,77].

Таблица 6. Характеристика треков протонов и α-частиц при различных значениях ЛПЭ в полистироле

Характеристика	98 кэВ/мкм		50 кэВ/мкм	
	Протоны	α-частицы	Протоны	α-частицы
Энергия, МэВ	0,082	4,5	0,4	10
Скорость v, см/с	4	15	8,7	22
Эффективный заряд	0,69	2	0,93	1
Среднее число электронов, выбиваемых ионом на 1 нм длины трека	1,56	1,7	0,86	1
$E_{\max}$ δ-электронов, кэВ	0,181	2,5	0,86	5,45
Радиус сердцевины, нм	1,2	4,5	2,65	6,7
Эффективный радиус трека, нм	2,5	21	6,0	35
Энергия, выносимая δ-электронами за пределы сердцевины трека, кэВ/мкм	4,3	16,3	7	12,4
Средняя плотность актов ионизации в сердцевине трека, 10^{20} см$^{-3}$	5,3	0,45	0,69	0,1

Таблица 7. Источники облучения образцов полихлорстирола

Место облучения	Виды частиц (i — первичные, j — вторичные)	Мощность дозы $\dot{D}$, Гр·с$^{-1}$	ЛПЭ, кэВ мкм$^{-1}$
Каналы реактора ИБР-2, ОИЯИ — (●)	γ_i, $n_i \to \gamma_j, E_n > 1$ МэВ, $4,2 \cdot 10^{12}$ н·см$^{-2}$·с$^{-1}$	$5,8 \cdot 10^3$	60
Медная мишень; синхротрон на 70 ГэВ, ИФВЭ — (△)	Разные спектры $p_i \to (p, n, e^{\pm}, \pi^{\pm}, \mu ...)_j$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	15
Выпускное окно фазотрона на 650 МэВ, ОИЯИ — (▲)	$E_p = 650$ МэВ, $10^{12} p$·см$^{-2}$·с$^{-1}$	$2,9 \cdot 10^2$	8
Медная мишень; синхротрон на 7 ГэВ, ИТЭФ — (○)	Разные спектры $p_i \to (p, n, e^{\pm}, \pi^{\pm}, ...)_j$	$7 \cdot 10^{-2}$	9
Гамма-установка — (♦)	$E_\gamma = 1,25$ МэВ	30	0,2

В [61,78] использовались дозиметры ЦДП из полихлорстирола (аналог, распространенный за рубежом, FWT-70 [79]), которые были тщательно отградуированы в разных полях излучения (табл.7).

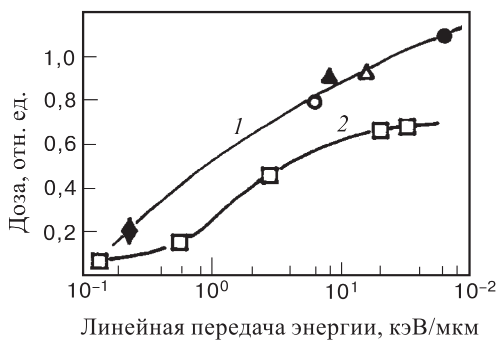

Рис. 6. Зависимость от ЛПЭ дозы эквивалентного изменения ξ (см. текст): *1* — полихлорстирол, точки соответствуют обозначениям в табл.7; *2* — полиэтилен [77]

На рис.6 показаны дозы $D_{\rm lim}$, создающие увеличение оптической плотности полихлорстирола, а также удлинения полиэтилена под нагрузкой. Несмотря на принципиально разные параметры $\xi_{\rm lim}$ в обоих материалах радиационные повреждения имеют тенденцию к снижению с ростом ЛПЭ. Это говорит об общности радиационно-индуцированных превращений в существенно разных полимерах.

Образованию стабильных продуктов радиолиза в зависимости от вида излучений посвящен обзор [80]. Сопоставление $G_{\rm Д}/G_{\rm c}$, с одной стороны, и выхода стабилизированных радикалов — с другой, при облучении α-частицами и γ-квантами показало, что для большинства полимеров отсутствует корреляция выходов и ЛПЭ. В области радиолиза могут существенно увеличиваться скорости других малоизученных реакций. Для объяснения необходимо привлекать представления микродозиметрии [81], а также учитывать вклад рассеяния энергии в упругих соударениях. Остаются неизученными процессы образования и распада ненасыщенных связей, радиационного окисления, а также поведения полимеров при изменении температуры в зависимости от вида частиц (ЛПЭ).

Спонтанное восстановление. Наиболее распространенный сцинтиллятор представляет собой полистирольную ПС-матрицу, в которой растворены первая — сцинтилляционная (pTP) и вторая — спектросмещающая (POPOP) добавки. На первом этапе взаимодействия ионизирующего излучения происходит возбуждение матрицы, которое нерадиационным путем передается первой добавке, а затем радиационным — от первой добавки ко второй. Вторая добавка смещает спектр в область высокой прозрачности матрицы или оптимальной чувствительности фотоприемника.

Как видно из рис.4, исследователи ставили себе цель — создать сцинтилляторы, выдерживающие предельную дозу $D_{\rm lim} > 10^5 - 10^6$ Гр, при световыходе $\xi_{\rm lim} \sim 80 \div 90\%$ после облучения. В обзоре [60] сформулированы основные этапы этого направления исследований в последние годы: 1) выбор первичной добавки; 2) выбор вторичной добавки; 3) использование антирадиационных добавок; 4) улучшение структуры матрицы; 5) ускорение процессов восстановления (каким способом — не указывается).

Первые четыре этапа оказались малоперспективными [63,82]. Не удалось повысить $D_{\rm lim}$ больше, чем до 10^5 Гр, даже при $\dot{D} > 10^2$ Гр$\cdot$ч$^{-1}$. Антирадиационные добавки оказались неэффективными при малых $\dot{D}$, т.е. в условиях сильного фоторадиационного окисления. Повысить $D_{\rm lim}$ органических материалов или полимеров с 10^3 до $10^5 \div 10^6$ Гр в области радиационных нагрузок LHC (см. рис.4) абсолютно нереально! Хорошо известно, что уменьшение количества химических изменений путем захвата радикалов для нецепных процессов невозможно, т.к. при захвате радикалов акцепторами (антирадами) образуется примерно такое же количество продуктов, что и в отсутствие акцептора, хотя качественный состав их несколько изменяется [83]. Значительная часть радикалов образуется вдоль трека частицы очень близко друг от друга, они быстро реагируют между собой, и воспрепятствовать этому процессу можно, только создавая очень высокие концентрации антирадов. Это ведет к неудовлетворительным начальным свойствам сцинтилляторов. Кроме того, из-за слабой селективности радиолиза и большого числа различных реакций, протекающих при фоторадиационном окислении, составить единый ряд активности антирадов также не представляется возможным.

В реальных условиях эксплуатации сцинтилляторов и световодов набор предельной дозы $D_{\rm lim}$ будет сопровождаться периодическими перерывами, во время которых свойства материалов восстанавливаются [84]. К сожалению, исследователи не сразу уловили перспективность этого направления

Таблица 8. Параметры облучения* и восстановления некоторых сцинтилляторов

Номер цикла	Параметр / Материал	$t_{\rm ir}$, час	D, кГр	τ, час	ξ, %	δ, %	$D_{\rm lim}(\xi)$, кГр ($\xi = 80\%$)
1	ПС+2%рТР+	56	28	480	92	97	20
2	+0,02%POPOP+0,01CT24+	56	28	480	88	91	21
3	+20%УД7 [82]	56	28	480	75	85	7
1	ПСМ-115+1,5%рТР+	2	0,1	40	98	100	—
	+0,05%POPOP+						
2	+20%1MN [63]	20	10	72	90	110	25
1	NE-110** [84]	120	26	500	90	92	30
1	SCSN 81+1%PHB+	56	28	316	85	22	24
1	+0,02%TBBT+	68	34	500	60	65	24
1	+0,01%ST*** [82,84]	200	100	600	45	48	24
1	ПММА+0,5%+	157	34	552	80	82	20
1	+0,01%POPOP [84]	463	400	552	48	48	20

*$\dot{D}(216 \div 510)$ Гр·ч$^{-1}$; γ-источники ^{137}Cs, ^{60}Co.

**Фирма «Nucl. Enterprise», Эдинбург, Великобритания.

***Фирма «Kuraray», Токио, Япония.

(см. следующий раздел) и затратили много усилий на бесполезный поиск радиационно стойких сцинтилляторов в условиях непрерывного облучения большими дозами.

Приведенные в работах [58,63,82,84—90] данные о величинах τ значительно различаются: от 103 дней до 20—25 дней. Следует отметить, что разная степень восстановления δ оптических свойств, главным образом, зависит от величины дозы: $\delta = 40 - 70\%$ при $D \sim 100$ кГр; $\delta = 80 - 95\%$ при $D \sim 10$ кГр; $\delta \sim 100\%$ при $D \sim 5$ кГр. В первых двух случаях величины ξ намного превышают допустимые $\xi_{\rm lim}$, поэтому трудно сравнивать результаты.

В табл.8 приведены составы и условия облучения и восстановления некоторых сцинтилляторов. Видно, что по всем показателям преимущество имеет сцинтиллятор из гранулированного полистирола ПСМ-115 [91], полученный методом литья под давлением или экструзией [92]. Об уменьшении выхода G-радикалов при высоких давлениях свидетельствуют данные [93]. Удовлетворительное объяснение можно получить в рамках термодинамического свободного объема [94]. Свободный объем уменьшается вследствие лучшей "упаковки" макромолекул, большей кристаллизации и др., и тем самым вероятность возникновения радикалов снижается, а вероятность рекомбинации (гибели) увеличивается.

Восстановительные процессы в спектросмещающих волокнах исследованы значительно меньше, а результаты весьма противоречивые. В докладе [95] исследованы волокна BCF91A, Y11 и др. при облучении ^{60}Co и нейтронами и γ-квантами ядерного реактора. При дозе (^{60}Co) 1,4 кГр ($D = 5,5$ Гр·ч$^{-1}$) светопотери на длине волокна 1,5 м ($\varnothing$1 мм) составили 10 и 15% для Y11 и BCF91A соответственно, причем после 90 дней восстановления $\delta = 98\%$. При дозе 10 кГр ($D = 1,5 \cdot 10^3$ Гр·ч$^{-1}$) светопотери достигли 70—80%, а восстановление после 20 дней вообще не заметно.

В [63] изучалась конверсионная эффективность этих (и других) волокон после облучения ^{137}Cs ($\dot{D} = 216$ Гр·ч$^{-1}$). Один из результатов для BCF91A приведен на рис.12. Наименьшие светопотери на длине 1,8 м ($\varnothing$1 мм) показали Y7, Y8 и BCF91A. Авторы детально не изучали восстановление, но утверждают, что после дозы 20÷36 кГр оно мало (до 20%) при $\tau = 70 - 150$ ч. Однако при облучении модуля калориметра из волокон Y7 на электронном пучке $= 1,2$ ГэВ ($\dot{D} = 1,5 \cdot 10^5$ Гр·ч$^{-1}$) световыход снизился после дозы 12,5 кГр до величины 0,4, а после 9 дней восстановился на 60% (до 0,65). При этом энергетическое разрешение снизилось с 5,4 до 18,2% [99].

Наши предварительные измерения оптической плотности волокна BCF91A [98] показали 100%-ное восстановление после дозы 4,8 кГр ($\dot{D} = 1,4$ Гр·ч$^{-1}$), причем функция восстановления имеет вид

$$d = d_0(1 - a\,\exp(-t/b)), \tag{2.9}$$

где d_0, d — оптическая плотность до и после восстановления; константы $a = 0,16$; $b = 82$ часа. При измерении $d(\lambda)$, где $\lambda = 425$ нм, малые изменения прозрачности волокна после облучения не проявляются в области смещенного спектра [96]. Переизлучающая добавка в BCF91A — радиационно стойкое соединение. Длина пробега падающего света до поглощения составляет несколько мкм. В процессе же светосбора путь, проходимый фотонами вдоль световода, может быть больше 2 м, и даже малые изменения прозрачности могут уменьшить длину пробега ℓ во много раз. Поэтому надо либо измерять $d(\lambda)$ при разных λ, либо влияние облучения характеризовать величиной ℓ и измерять ее по методике [97].

Однако наиболее достоверная методика — это радиационные испытания калориметрических модулей при одновременном циклическом облучении сцинтилляционных пластин и спектросмещающих волокон. При этом важное значение имеет идентичность мощности дозы в тестах и радиационной нагрузки при эксплуатации, а также ограничения по дозе (в цикле), чтобы не возникали в сцинтилляторах необратимые процессы.

Циклическое облучение. В реальных условиях эксплуатации калориметров сцинтилляционные пластины и волокна будут многократно подвергаться радиации с некоторыми перерывами между сеансами облучения. Однако в [63] проведено только двухкратное, а в [82] трехкратное циклическое облучение ПС-сцинтилляторов (см. табл.8). Циклических облучений спектросме-

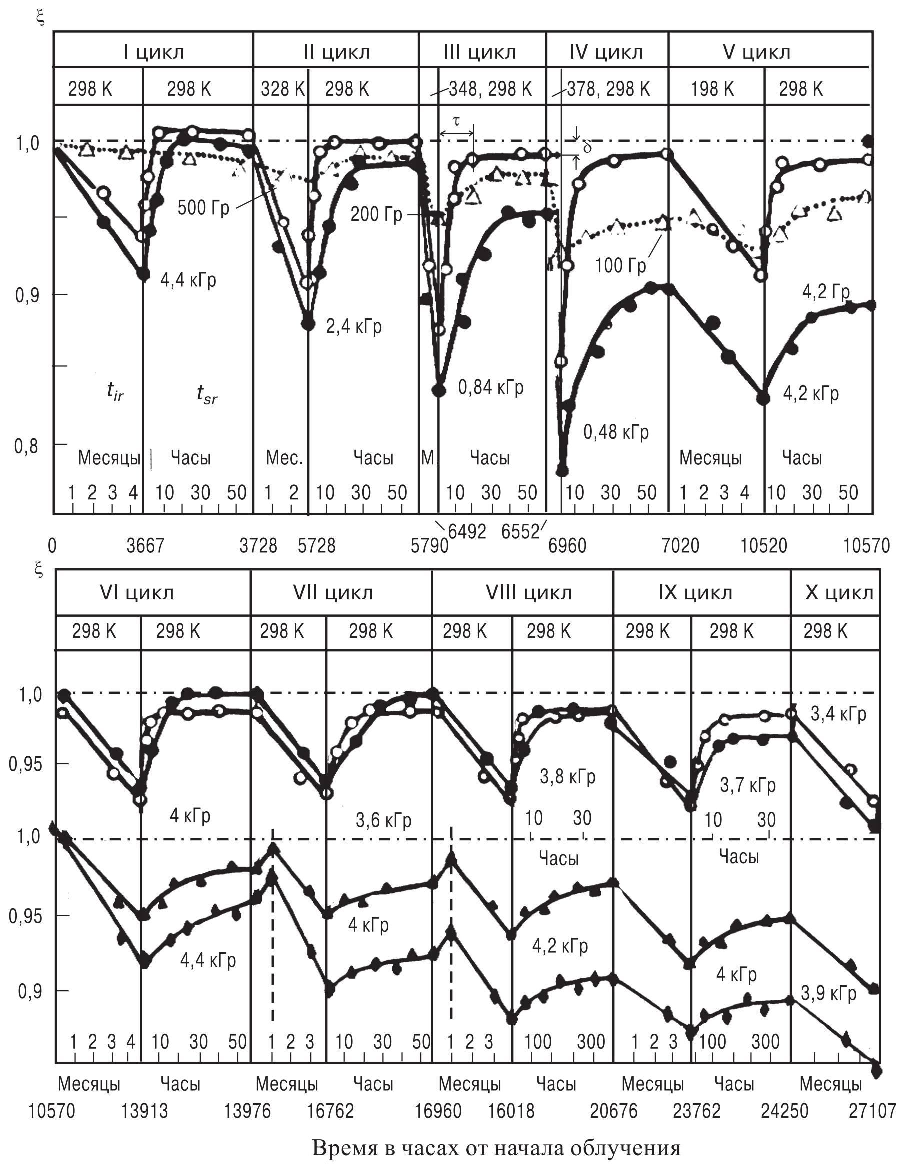

Рис. 7. Циклическое облучение и восстановление образцов сцинтилляторов: (●) — ПС1; (○) — ПС2; (▲) — SCSN 81; (♦) — BC 404A и спектросмещающих волокон: (△) — BCF 91A [78,98]

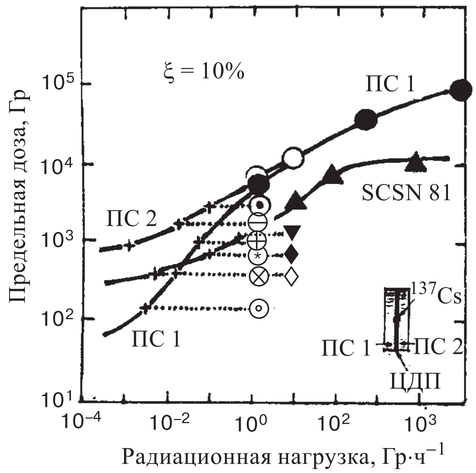

Рис. 8. Зависимость предельной дозы при потерях света $\xi = 10\%$ от мощности дозы облучения:

ПС-1 – (•), ПС-2 – (○)	298 K	(⊕), (⊙)	328 K	(⊗), (⊖)	348 K	(⊚), (⊛)	378 K
SCSN81 – (▲)	300 K	(▼)	315 K	(♦)	335 K	(◊)	350 K

щающих волокон до настоящего времени не проводилось*. Только многократные циклические облучения могли бы дать ответ на вопрос о фоторадиационном старении сцинтилляторов и волокон.

В работах [78, 98] в соответствии с методологией [63] впервые проведены наблюдения за фоторадиационным старением ПС в течение трех лет (рис.7). Повышенное содержание добавок: $\sim 3\%$ pTP $+$ 0,04% POPOP необходимо для минимального временного разрешения [99], оно способствует защите от деградации матрицы [100]. В ПС2 вводились фотостабилизирующая (0,05%) и антиокислительная (0,05%) добавки типа ССВ [40]. Они практически не изменяли первоначальные характеристики ПС2. Образцы ПС вырезались из пластин, изготовленных путем литья под давлением из гранулированного полистирола марки ПСМ-115. Позже [98] после пяти циклов облучения ПС1 и ПС2 начали наблюдать за старением SCSN 81 (Kuraray) Япония и BC 404A (Bicron) США.

Для этой цели источники ^{137}Cs низкой активности помещались в центре между образцами, как показано на рис.8. Между образцами находился цвето-

*При подготовке рукописи к печати стало известно, что циклические облучения волокон (фибр) проведены. Результаты будут опубликованы в «Кратких сообщениях ОИЯИ»в 2000 г.

вой пленочный дозиметр (ЦДП). О градуировке этих дозиметров мы говорили в разд. 2. Расчет распределения дозы в образцах по спектрам всех частиц, испущенных ^{137}Cs, дает результат: $\dot{D}_{\max} = (1,2 \pm 0,14)$ Гр·ч$^{-1}$ (ПС1 и ПС2) и $\dot{D}_{\max} = (1,4 \pm 0,12)$ Гр·ч$^{-1}$ (SCSN 81 и BC 404A).

В соответствии с рекомендациями работы [96] измерялась только одна величина $d(\lambda)$ — оптическая плотность — с помощью двух спектрофотометров. Удобство использования величины $d(\lambda)$ очевидно. Она количественно характеризует свет, поглощенный образцом вне зависимости от того, по каким каналам идет диссипация возбуждения. Эффект, наблюдаемый в изменении $d(\lambda)$ после облучения, должен ярче проявиться в характере эмиссионных спектров $E(\lambda)$. Погрешность измерения оптической плотности была менее 0,2%.

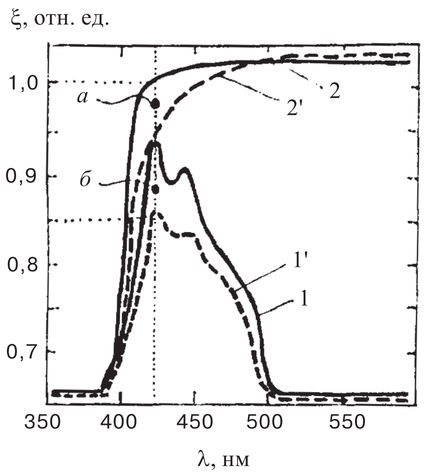

Рис. 9. Спектры флуоресценции (*1*, *1'*) и пропускания (*2*, *2'*), соответственно, до и после облучения дозой 2,4 кГр при $T = 328$ К образца ПС2 (после восстановления спектры совпадают с *1* и *2*)

Во всех образцах эмиссионные спектры измерялись «эпизодически» только для контроля динамики процесса. На рис.9 для примера показан спектр $E(\lambda)$, измеренный по методике [100] в специальном (5 мкм) образце ПС2. Для возбуждения флуоресценции использовалась ртутная лампа. Вероятность поглощения излучения первой добавки (pTP) второй добавкой (POPOP) мала в том случае, если толщина образца составляет несколько мкм [101,102].

Для полного понимания радиационных процессов недостаточно измерить спектры поглощения [103, 104], а необходимо иметь спектры испускания. При экспрессных измерениях $d(\lambda_{\max}) \rightarrow (a + b)$, где $\lambda_{\max} = 425$ нм, не разделяются эффекты испускания и пропускания света, но при этом можно проводить относительные сравнения. При малых дозах (до 5 кГр) сдвига $\lambda_{\max}$ и деформации спектра, как правило, не происходит, а изменяется только величина $d(\lambda_{\max})$, причем $a >> b$ при $T = 298$ K. Это означает, что радиационное окрашивание полистирола проявляется значительно сильнее, чем понижение световыхода [82].

На основе полуэмпирической модели впервые был сделан прогноз [98] величины $D_{\lim}$ при очень низких $\dot{D}$, характерных для LHC (см. рис.4 и 8).

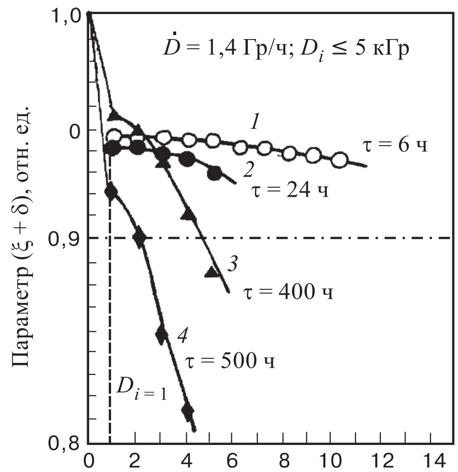

Рис. 10. Изменение относительного световыхода с учетом восстановления (параметра $\xi + \delta$, см. рис.7) в зависимости от числа циклов (цикл $t_{\rm ir} + t_{\rm sr} \sim 4$ мес.): ● — ПС1; ○ — ПС2; ▲ — SCSN81; ♦ — BC-404A

На рис.7 видно, что стандартный образец ПС1 хорошо восстанавливается при 298 K (1-й цикл), но сильно деградирует с увеличением температуры, несмотря на существенное уменьшение дозы (2 и 4-й циклы). Образец ПС2 с антиоксидантом, как и ожидалось, значительно полнее и быстрее восстанавливает оптические свойства. Причем при дальнейших циклах (с 5 по 9) стабильность сохраняется после трехразового повышения температуры облучения. Этот эффект объясняется преобладанием в ПС2 обратимых процессов [40]:

$$\mathrm{RH} \to \mathrm{R} \bullet + \mathrm{H},$$
$$\mathrm{AH} + \mathrm{R}\bullet \to \mathrm{A} \bullet + \mathrm{RH}.$$

Антиоксидант AH (типа ССВ) отдает атом H свободному радикалу R•, превращаясь в менее активный радикал и регенерируя исходную молекулу. Легкость переноса атома H сочетается с высокой стабильностью образующихся радикалов, ввиду стерического экранирования атомов кислорода.

В 6-м цикле образец ПС1 был заменен новым, чтобы продолжить наблюдение за фоторадиационным старением при $T = 298$ K. Для этой же цели при малых дозах были облучены SCSN 81 и BC 404A. На рис.7 видно, что эти образцы имеют очень большие величины δ и τ, т.е. не полностью и медленно восстанавливаются. Это не противоречит ранее полученным данным (см., например, табл.8), однако объяснения этим эффектам в литературе нет. Рис.10 построен по экспериментальным данным [78, 98]. На нем показано изменение световыхода со временем (число сеансов), что позволяет определить радиационные ресурсы сцинтилляционных детекторов.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА ДЕТЕКТОРОВ

Органические сцинтилляторы и спектросмещающие волокна при жестких требованиях светопотерь $10 \div 20\%$ не выдерживают радиационных нагрузок $50 \div 100$ кГр за время эксплуатации 10 лет (суммарное время облучения $\sim 10^8$ с). Задачи, поставленные в обзоре [60], оказались не реализованными, поэтому в последнее время сформировались три альтернативных направления:

• разработка новых кремнийорганических сцинтилляторов радиационно стойких при непрерывном облучении [105,106];

• радиационные исследования жидких сцинтилляторов, в кварцевых капиллярах с периодическим обновлением сцинтиллятора [46,95];

• изучение фоторадиационного старения и спонтанного восстановления обычных пластмассовых сцинтилляторов с новыми добавками [6,78].

Все эти направления, в принципе, могут существенно увеличить радиационный ресурс сцинтилляторов, но требуются поисковые работы не менее трудные, чем в [60]. В целях применения кремнийорганических сцинтилляторов для трековых детекторов необходимо найти добавки, которые обеспечат более высокий световыход. Большое время высвечивания (11–13 нс) ограничивает их применение в области высоких загрузок. Кроме того, в некоторых кремнийорганических сцинтилляторах наблюдается миграция люминофоров на поверхность, где они впоследствии выкристаллизовываются — «выпотевают». Неудивительно, что до настоящего времени кремнийорганические сцинтилляторы не нашли широкого практического применения. Что касается жидких сцинтилляторов в капиллярах, то они выдерживают большие радиационные нагрузки только в вакууме (рис.4) или нейтральной среде, что существенно усложняет конструкцию детекторов. Третье направление, как мы увидим ниже, открывает более эффективный путь увеличения ресурса детекторов, поскольку не требуется большой радиационной стойкости материалов.

Методика. Ресурс непрерывного облучения, определяющий длительность сеанса:

$$t_r = k_3(D_{\lim}(\xi)/\dot{D}), \tag{3.10}$$

где $D_{\lim}$ — предельно допустимая доза облучения при $\dot{D} \geq 10^2$ Гр·ч$^{-1}$; ξ — определяющий параметр (световыходы L', длина ослабления света ℓ; оптическая плотность d; число фотоэлектронов и т.п.); k_3 — коэффициент неопределенности (запаса). В табл.9 приведены коэффициенты k_3 для некоторых сцинтилляторов, вычисленные в соответствии с рис.7 и 8.

Таблица 9. Коэффициент k_3 для формулы ресурса (3.1)

$\dot{D}$, Гр·ч$^{-1}$	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
ПС1	1	0,20	0,04	0,01	0,004	0,002	0,001
ПС2	1	0,50	0,25	0,10	0,063	0,018	0,015
SCSN 81	1	0,40	0,15	0,09	0,050	0,040	0,035
BC 404A	1	0,20	0,0	0,03	0,005	0,002	0,002

Ресурс облучения с перерывами, определяющий срок службы:

$$t_R = f(D_{\lim}, \dot{D}, T, \tau, \delta, \xi ...), \tag{3.11}$$

где τ и δ — время и степень восстановления соответственно; T — температура. Могут влиять на t_R и другие факторы: агрессивность среды, магнитное поле и т.п.

Ресурс адронного калориметра CMS (HCAL). На точность определения ресурса в равной степени влияет достоверность величин предельно допустимой дозы и радиационной нагрузки. На рис.11 приведены радиационные нагрузки в HCAL CMS, полученные разными авторами (см. также табл.5). Видно, что о достоверности пока говорить не приходится. При вычислении ресурса совершенно необходимо учитывать коэффициенты запаса. Понятна тенденция коллаборации HCAL [30] принизить радиационную опасность, но при этом надо согласовать нагрузки HCAL с нагрузками ECAL [31] в тех элементах, где они, безусловно, должны совпадать.

На рис.12 представлены исходные экспериментальные данные [30]. В оценках ресурса HCAL использовалась верхняя граница заштрихованной области (*3*), хотя разумно (в запас) было бы принять нижнюю границу. Кривая

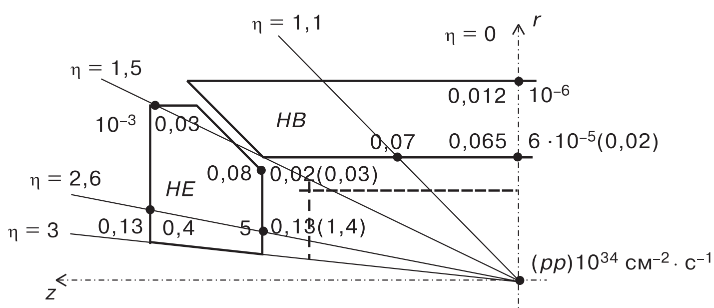

Рис. 11. Сравнение радиационных нагрузок в адронном калориметре CMS: цифры внутри — наша оценка (см. разд.1); цифры вне калориметра — расчеты [30]; цифры в скобках — расчеты [31]

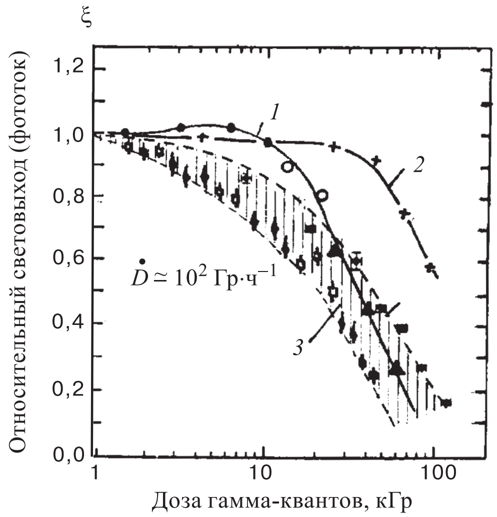

Рис. 12. Зависимость световыхода от дозы облучения: *1* — образцы стандартного сцинтиллятора [78,63]; *2* — образцы BCF 91A [78]; *3* — модули калориметра SCSN 81 + BCF 91A по данным [30]

2 на рис.13 занижена в 2,3 раза, но это поправимо. Принципиально то, что результаты ускоренных тестов (рис.12) неправомерно перенесены на условия эксплуатации, где $\dot{D} \sim 2$ Гр·ч$^{-1}$. Коэффициенты k_3 (табл.9) не были учтены, поэтому распределение относительного световыхода (кривая *1* на рис.13) не соответствует действительности.

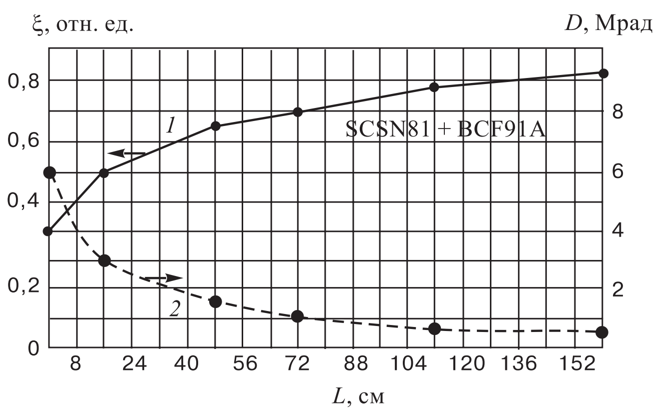

Рис. 13. Продольное (по Z, рис.11) распределение световыхода (*1*) и дозы (*2*) внутри калориметра HE CMS по данным [30]

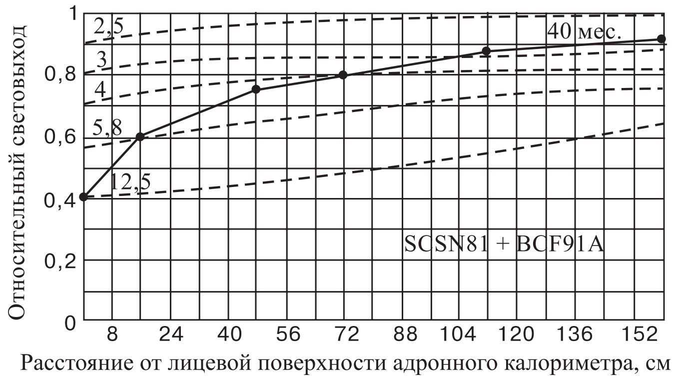

Рис. 14. Продольное распределение относительного световыхода калориметра НЕ CMS: сплошная кривая — данные [30]; пунктирные линии — наша оценка по рис.12 и табл.9

Утверждение в [30], что выход света больше там, где больше «повреждение сцинтиллятора» ξ является ошибочным. На величину ξ существенное влияние оказывает радиационное окисление (через $\dot{D}$), а также вклад в дозу других частиц, например нейтронов и фрагментов. В [30] почему-то нагрузку связывают только с минимально ионизирующими частицами.

На явно ошибочных исходных предпосылках строится концепция, что сильное изменение энергетического разрешения в первых слоях переднего калориметра (НЕ) можно корректировать, создавая псевдоячейки по η, Z с автономной электроникой. В действительности (рис.14) распределение по Z и η относительного световыхода более или менее равномерное (из-за k_3), поэтому корректировка может не потребоваться, однако потери света не могут быть больше 10—20%.

Даже при завышенной в два раза D_{lim} и заниженной в 2,3 раза D ресурс составляет всего $2,5 \div 3$ мес. (рис.14). Перерывы в работе детектора при $\tau \leq 500$ ч не спасают систему SCSN 81 + BCF 91A, поскольку ресурс при $\xi = 0,8$ составляет только 16 мес. (рис.15). В проекте HCAL, по-видимому, следует отказаться от применения изделий фирмы «Kuraray». Они могут использоваться в детекторах с невысокими нагрузками, т.е. за пределами радиационно опасной зоны, показанной в табл.3.

Хорошо восстанавливаются литые и экструдированные сцинтилляторы ПС1 (ПС2) [98]. На рис.15 показано циклическое изменение системы ПС1 (ПС2)+BCF 91A. При суммарной дозе 150 кГр после 40 рабочих месяцев (эквивалентных календарным 10 годам) потери световыхода не превышают 10%, причем нагрузки в начальной точке не 2, а 5 кГр·ч$^{-1}$. Расчеты сделаны на основании измерений (рис.10) для сцинтилляторов ПС1 (ПС2). Старение BCF 91A не изучено. Мы исходили из следующих предположений: а) ради-

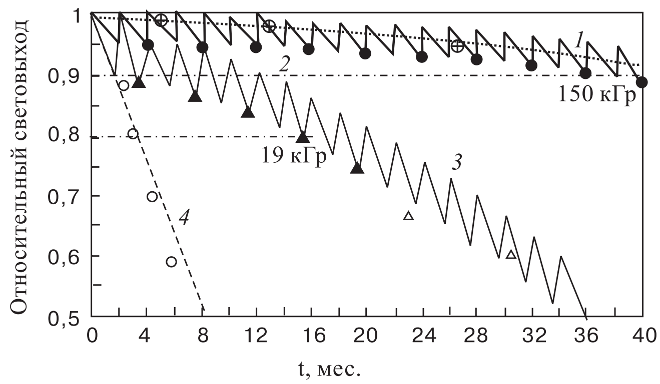

Рис. 15. Уменьшение относительного световыхода в калориметре HE CMS (точка $L' = 0$, рис.13) при циклическом облучении с восстановлением: *1* — BCF 91A ($\oplus$ — оценка по температурным измерениям, рис.7); *2* — ПС2 (● — экспериментальные точки, см. рис.10); *3* — SCSN 81 + BCF 91A (▲ — экспериментальные точки, см. рис.10, $\triangle$ — оценка по температурным измерениям); *4* — SCSN 81 + BCF 91A без восстановления (см. рис.12)

ационная стойкость волокна выше, чем ПС (рис.12), поэтому после первых 3–4 циклов изменения световыхода за счет прозрачности волокна не будет; б) в последующих циклах деградация может возникнуть только из-за радиационного окисления.

Из температурных измерений BCF 91A (рис.7) и «принципа суперпозиции»: $D_{\text{обл}}(T_{\text{обл}}) = D(298)$ при $D = Dt =$const можно оценить время эксплуатации t, при котором происходит тот же эффект ($\xi = 0,95$), который наблюдается за значительно меньшее время при повышенной температуре. Так были получены три контрольные точки для BCF 91A (рис.15) и две точки для системы SCSN81 $+$ BCF 91A. Конечно, это грубая оценка, поэтому радиационные исследования спектросмещающих волокон в калориметрических модулях совершенно необходимы.

Таким образом, в адронном калориметре CMS нужно использовать литой или экструдированный сцинтиллятор из дешевого технического полистирола [92] при условии, что LHC будет останавливаться (т.е. выключаться пучок) каждые 2 мес. не менее чем на 24 часа.

Ресурс электромагнитного калориметра CMS (ECAL). Принято решение в электромагнитном калориметре ECAL CMS использовать сцинтилляционные кристаллы $PbWO_4$ [31]. Радиационная физика и химия таких систем значительно отличаются от физико-химических процессов, протекающих в органических сцинтилляторах, поэтому они не могут быть рассмотрены в пределах объема данного обзора.

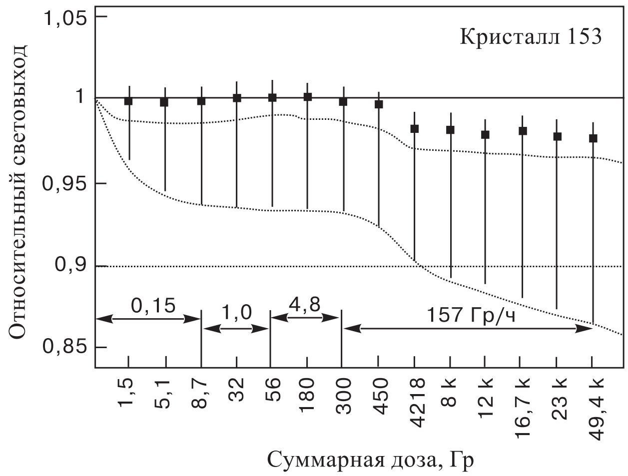

Рис. 16. Изменение световыхода образцов $PbWO_4$ сразу после облучения: ■ — экспериментальные точки для лучшего образца №153, отожженного в кислороде [34] (заштрихованная область — разброс экспериментальных данных для аналогичных образцов)

Периодическое выключение пучка, необходимое для HCAL, естественно, будет оказывать влияние на все детекторы CMS. Поэтому исследование спонтанного восстановления — $PbWO_4$ вольфрамата свинца — является одним из важнейших. Систематизация всех последних результатов радиационных исследований $PbWO_4$ сделана в работе [107]. Практический вывод приведен в [45], который мы здесь воспроизводим на рис.16 с нашим комментарием (заштрихованная область).

Даже беглый обзор работ, цитируемых в [107], показывает, что разные образцы $PbWO_4$ имеют большой разброс относительного световыхода после облучения, который не всегда укладывается в допустимые пределы 10% светопотерь. Из анализа рис.16, где представлены данные для уникального образца №153 (с отжигом в кислороде), можно подумать, что доза облучения неограничена.

Однако другие работы, например [71], показывают, что в районе $4 \div 8$ кГр имеется «скачок вниз», который пересекает допустимый предел $\xi = 0,9$. Это наблюдается в образцах с совершенной стехиометрией, причем из всей серии образцов (а их необходимо для ECAL 110 000 штук) нижняя граница может реализоваться с вероятностью $\sim 90\%$, а верхняя граница — с вероятностью только $\sim 10\%$. Разумно принять величину ~ 5 кГр за предельно допустимую дозу. Тогда ресурс системы $PbWO_4$ может быть определен по выражению (3.1) с постоянным коэффициентом запаса $k_3 \sim 2$. По-видимому, $D_{\lim}$ не зависит от $\dot{D}$ в случае неорганических кристаллов.

Ресурс непрерывного облучения передней части электромагнитного калориметра (EE) недостаточен при максимальных нагрузках $(15 \div 28)$ Гр·ч$^{-1}$ (рис.1). Известно, что $PbWO_4$ быстро и полно восстанавливает прозрачность при малых дозах $(2 \div 3$ Гр). При дозах $4 \div 8$ кГр данных по спонтанному восстановлению $PbWO_4$ недостаточно. Многоциклические облучения кристаллов при рабочих, в том числе и малых, нагрузках в EB $\sim 10^{-1}$ Гр·ч$^{-1}$ важны так же, как и облучения органических сцинтилляторов. Перенос данных при $\dot{D} = 157$ Гр·ч$^{-1}$ на реальную нагрузку $15 \div 0,1$ Гр·ч$^{-1}$ в случае $PbWO_4$ тоже не совсем корректен.

В [108] обсуждаются возможности создания на основе тяжелых (с добавкой тетрафенилсвинца) полистирольных сцинтилляторов гетерогенных электромагнитных калориметров с энергетическим разрешением не хуже, чем в $PbWO_4$ $(\sigma/E \sim 15\%/\sqrt{E})$. Хотя радиационная стойкость 20 кГр получена при очень большой нагрузке 187,2 Гр·ч$^{-1}$ и после всех процессов восстановления, тем не менее после дозы менее 3 кГр в тонких (толщиной 1,1 мм) сцинтилляторов происходит полное спонтанное восстановление всех оптических характеристик. Введение высоких концентраций металлоорганических добавок ($> 30\%$) в ПС-сцинтилляторы находится на пределе возможностей технологии литья под давлением.

Дальнейшее продвижение в направлении улучшения энергетического разрешения ECAL может быть связано с применением в них тяжелых сцинтилляторов, изготовленных другими методами, отмеченными в [108]. Однако, как признают авторы этой работы, придется реализовывать предложенный в [6,113] периодический режим облучения и восстановления, чтобы получить заданный радиационный ресурс.

Ресурс переднего калориметра CMS (HFCAL). Самые большие радиационные нагрузки в CMS приходятся на передний калориметр типа «спагетти» — HF (рис.1). Коллаборация была вынуждена использовать кварцевые световоды, которые имеют радиационную стойкость $D_{\rm lim} \sim 1$ ГГр [112]. Но при этом калориметр имеет весьма низкое энергетическое разрешение $(\sigma/E \sim 150\%/\sqrt{E})$, т.к. регистрируется черенковское излучение. Если будет показано, что сцинтилляционные фибры имеют хорошее спонтанное восстановление, то их использование вместо кварцевых позволило бы увеличить разрешение в 3 раза и существенно снизить стоимость калориметра. Заметим, что перерывы в облучении калориметра HF можно создавать не только остановкой LHC, но и путем дистанционной раздвижки двух полуцилиндров калориметра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно стремление физиков увеличивать энергию и светимость пучков (особенно при AA-взаимодействиях) как на создаваемых коллайдерах, так и в других проектах более отдаленного будущего [109]. Значит, детекторы будут работать в еще более жестких радиационных условиях. Увеличатся требования к расчетам дозовых нагрузок. Методология экспериментов по радиационной физике будет приближена к условиям эксплуатации. Будет создан всесторонний дозиметрический контроль. Статистический анализ надежности объектов по ограниченной информации [110] позволит обоснованно прогнозировать ресурсы детекторов. Подобный анализ следовало бы провести для всех установок LHC, как мы предлагали еще в [64]. Теперь нет гарантии, что заданные ресурсы будут выдержаны при проектной светимости LHC.

Настоящий обзор радиационных исследований сцинтилляторов убедительно показал, что увеличение ресурса сцинтилляторов возможно только путем взаимоувязки сеансов облучения и планируемых перерывов. При этом должны использоваться такие материалы, которые быстро и полно восстанавливают свои первоначальные свойства за время перерыва. На срок службы влияет режим работы коллайдера: длительность физических сеансов и частота перерывов; функциональная зависимость светимости от времени; время закачки и циркуляции пучков. Конструктивные особенности коллайдера могут также влиять на величины радиационных нагрузок: расположение скреперов и коллиматоров вблизи детектора; размеры и конфигурация вакуумной камеры на участках внутри установки и др. Эти вопросы определяют стратегию будущей работы коллайдеров и детекторных установок [111].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Newman-Holmes C.** — FERMILAB Conf.-96/218E, 1994.
2. **Mciel K.A.** — FERMILAB Conf.-97/214E CDF and DO, 1997. (Published Proc. 2nd Intern. Conf. on Phys. and CP Violation, Honolulu, Hawaii, March 24-27, 1997).
3. CMS-Techn.Prop. CERN/LHCC-94-32, LHCC/P-1,1994.
4. ATLAS-Techn.Prop.Gen.-Purp.pp-Exp.LHC CERN-94-43, 1994.
5. **Sirois Y. Wigmans R.** — Nucl.Instr.Meth., 1985, v.A240, p.262.
6. **Зайцев Л.Н.** — Новости ОИЯИ, 1996, №4, с.25.
7. **Мохов Н.В.** — ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.960.
8. **Зайцев Л.Н.** — Радиационные эффекты в структурах ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1987.
9. **Ажгирей И.Л., Мохов Н.В.** — Препринт ИФВЭ 90-132, ОРИ, Протвино, 1990.
10. **Hahn K., Ranft J.** — Phys.Rev., 1990, v.D41, p.1463.
11. **Василишин Б.В., Зайцев Л.Н., Петоян И.М.** — Препринт ОИЯИ Р16-7036, Дубна, 1974.
12. **Зайцев Л.Н. и др.** — Сообщение ОИЯИ 16-85-710, Дубна, 1985.
13. **Зайцев Л.Н., Сырейщиков А.Е., Цовбун В.И.** — Сообщение ОИЯИ 16-87-921, Дубна, 1987.

14. **Сырейщиков А.Е.** — Моделирование межядерного каскада в веществе с магнитным полем при ядро-ядерных взаимодействиях. МИФИ, дисс., 1988.
15. **Huhtinen M., Rubbia A., Aarnio P.A.** — Nucl.Instr.Meth., 1994, v.A351 p.236.
16. **Fasso A. et al.** — CERN TIS 93-08CF, 1993; CERN TIS RP 168, 1986.
17. **Бондаренко А.И. и др.** — Препринт ОИЯИ Р1-96-447, Дубна, 1996.
18. **Бондаренко А.И. и др.** — Препринт ОИЯИ Р1-97-99, Дубна, 1997.
19. **Кимель Л.Р. и др.** — Препринт ОИЯИ Р16-3514, Дубна, 1967.
20. **Gabriel T.A., Santoro R.T.** — Nucl.Instr.Meth., 1972, v.99, p.5.
21. **Григорьев В.А., Зайцев Л.Н., Иссинский И.Б. и др.** — Препринт ОИЯИ Р16-6720, Дубна, 1972.
22. **Григорьев В.А.** — Квазиальбедо адронов высоких энергий. МИФИ. Диссертация 1973.
23. **Бескровная Л.Г., Комочков М.М.** — Сообщение ОИЯИ Р16-287-304, Дубна, 1987.
24. **Stevenson G.** — CERN 90-10, 1990, v.3, p.566.
25. **Aarnio P.A., Huhtinen M.** — Nucl.Instr.Meth., 1993, v.A3336, p.98.
26. **Ferrari A., Sala P.** — Nucl.Instr.Meth., 1992, v.B71, p.412.
27. **Fasso A. et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1994, v.A332, p.534.
28. **Huhtinen M., Aarnio P.A.** — Nucl.Instr.Meth., 1995, v.A336, p.545.
29. **Зайцев Л.Н.** — ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.3, с.525.
30. HCAL-project, CERN/LHCC 97-31, CMS TDR 3, 1997.
31. ECAL-project, CERN/LHCC 97-33, CMS TDR 4, 1997.
32. **D'Ambrosio C., Gis T. et al.** — CERN - PPE/96-65, 1996.
33. **D'Ambrosio et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1992, v.A332, p.20.
34. **Goesling C.** — BEAUTY'95, Oxford, July 1995, p.187.
35. **Huhtinen M.** — CERN CMS TN/96-057, 1996.
36. **Zaitsev L.N. et al.** — Polymerconcrete for Radiation Background Shielding of Detectors at Hadron Colliders — 6th Europ. Part. Accel. Conf., Stockholm, June 1998, p.42.
37. **Бродер Д.Л., Зайцев Л.Н. и др.** — Бетон в защите ядерных установок. М.: Атомиздат, 2-е изд., 1973.
38. **Сперанская Т.А., Тарутина Л.И.** — Оптические свойства полимеров. Л.: Химия, 1976.
39. **Милинчук В.К. и др.** — Макрорадикалы. М.: Химия, 1980.
40. **Радиационная стойкость органических материалов.** — Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1986.
41. **Хамидова Л.Г. и др.** — Химия высоких энергий, 1983, т.17, №2, с.124.
42. **Хамидова Л.Г. и др.** — Химия высоких энергий, 1987, т.21, №5, с.404.
43. **Астахов Е.Ю. и др.** — Высокомолекулярные соединения, серия А., 1988, т.30, №4, с.702.
44. **Астахов Е.Ю. и др.** — Высокомолекулярные соединения, серия А., 1988, т.30, №12, с.2580.
45. **Баркалов И.М., Занин А.М. и др.** — Препринт Отделения Института химической физики АН СССР 67-90, Черноголовка, 1990.
46. **Васильченко В.Г. и др.** — ПТЭ, 1996, №3, с.58.
47. **Kennedy C. et. al.** — IEEE Trans.Nucl.Sci., 1990, v.NS-37, p.144.

48. **Bross A.D. et al.** — FERMILAB-Pub-91/54, 1991.
49. **Zorn C. et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1989, v.A276, p.58.
50. **Zorn C. et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1988, v.A273, p.108.
51. **Zorn C. et al.** — IEEE Trans.Nucl.Sci. 1990, v.NS-37, p.487.
52. **D'Ambrosio et al.** — CERN-PPE/90-96, 1990.
53. **Clough R.L., Cahill P.A., Renschler C.L.** — Workshop on Radiation Hardness of Plastic Scintillator, 1990, March 19–21, Tallahasse, Florida, p.15.
54. **Majewski S. et al.** — CERN 89-10, 1989.
55. **Johnson K.F. et.al.** — IEEE Trans.Nucl.Sci. 1990, v.NS-37, p.500.
56. **Feygelman V.M. et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1990, v.A295, p.94.
57. **Kauffman J.M., Aziz M.A.** — see.[55], p.29.
58. **Majewski S. et. al.** — Nucl.Instr.Meth., 1989, v.A281, p.505
59. **Senchishin V. et al.** — Preprint JINR E13-94-159, Dubna, 1994.
60. **Бритвич Г.И., Васильченко В.Г., Лапшин В.Г.** — ПТЭ, 1994, №1, с.75.
61. **Astapov A.A. et al.** — JINR Rapid Comm., 1996, №3[77], p.47.
62. **Asmone A. et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1994, v.A388, p.398.
63. **Васильченко В.Г. и др.** — ПТЭ, 1996, №4, с.42;
Anzivino G. et al. — CERN/PC/LP Note 92-14, 1992.
64. **Зайцев Л.Н.** — Сообщение ОИЯИ Р14-95-104, Дубна, 1995.
65. **Карпухин О.Н.** — Успехи химии, 1980, т.49, №8, с.1523.
66. **Gillen R.L., Glough K.T.** — In: Intern. Symp. Rad. Degr. Polym. Rad. Resist. Mater. Takasaki, Japan, July 1989.
67. **Glough K.T., Gillen R.L.** — In: Polym.Degr.Stab., 1989, v.24, №2, p.137.
68. **Kempner E.S. et al.** — In: Polym.Sci.: Part B, Polym.Phys., 1986, v.24, p.2337.
69. **Eremeev R. et al.** — JINR Rapid Comm. №2[70]-95, p.45.
70. **Котов А.Г., Громов В.В.** — Радиационная физика и химия гетерогенных систем. М.: Энергоатомиздат, 1988.
71. **Zhu R.Y. et al.** — Nucl.Instr.Meth., 1996, v.A376, p.319;
Kaiser M. — Diplomarbeit, Universitat, Dortmund, 1998.
72. **Смолянский А.С. и др.** — Докл. АН СССР, 1988, т.303, №2, с.416;
Смолянский А.С., Marini G. — CERN 85-082, 1985.
73. **Каплан И.Г., Митерев А.М.** — Химия высоких энергий, 1985, т.19, №3, с.208.
74. **Egusa S. et al.** — Macromoleculs, 1979, v.12, №5, p.939.
75. **Egusa S. et al.** — Ibid., 1980, v.13, №1, p.171.
76. **Sasuga T. et al.** — Polymer J., 1989, v.30, №11, p.2054.
77. **Sasuga T. et al.** — In: Proc. Intern. Symp. of Rad. Degr. Polym. and Rad. Resist. Mater. Takasaki, Japan, July 1989, p.65.
78. **Зайцев Л.Н.** — Препринт ОИЯИ Р16-98-59, Дубна, 1998.
79. **Бишоп В.П., Хамферис К.С., Рандке П.Т.** — Приборы для научных исследований, 1973, №4, с.83.

80. **Бриксман Б.А., Милинчук В.К.** — Химия высоких энергий, 1989, т.23, №3, с.195.
81. **Големинов Н.Г., Крамер-Агеев Е.А.** — Атомная энергия, 1980, т.49, с.373.
82. **Залюбовский И.И. и др.** — ПТЭ, 1995, №3, с.76.
83. **Доул М.** — Радиационная химия макромолекул: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1978.
84. **Васильченко В.Г. и др.** — ПТЭ, 1995, №5, с.85.
85. **Bezuglii V.D. Nagornaya L.L.** — J.Nucl. Energy, 1965, v.19, p.490.
86. **Holm U., Wick K.** — IEEE Trans. Nucl.Sci, 1989, v.36, №1, p.579.
87. **Гундер О.А.** — Препринт ИМК-91-15, Харьков, 1991.
88. **Britvich G.I. et al.** — Preprint IHEP-91-187, Protvino, 1991.
89. **Bonamy P. et.al.** — Preprint DphPE 91-03, Saclay, 1991.
90. **Ernwein J.** — Preprint DphPE 91-14, Saclay, 1991.
91. **Бреховских В.В. и др.** — ПТЭ, 1992, №6, с.95.
92. **Ананьев В.К. и др.** — ПТЭ, 1998, №1, с.52.
93. **Клиншпонт Э.Р., Кирюхин В.П., Милинчук В.К.** — Высокомолекулярные соединения, серия А, 1980, т.22, №8, с.1754.
94. **Сандитов Д.С., Бартенев Г.М.** — Физические основы неупорядоченных структур. Новосибирск: Наука, 1982.
95. **Васильченко В.Г. и др.** — ПТЭ, 1996, №5, с.67; LROB Status report/RD34, CERN/LHCC 95-44, 1995.
96. **Дацко В.С.** — ПТЭ, 1996, №3, с.43.
97. ГОСТ 170380-79, ГОСТ 170387-79. Методы измерения сцинтилляционных параметров. М.: Из-во стандартов, 1979.
98. **Zaitsev L.N., Astapov A.A., Krasnov V.A. et al.** — In: VI Conf. on Advanced Technology, Como, Italy, 5–9 October 1998.
99. **Афанасьев С.В. и др.** — Краткие сообщения ОИЯИ, 1997, №7 [81]-97.
100. **Шафранов М.Д.** — Препринт ОИЯИ Д13-97, Дубна, 1997.
101. **Жильцова Л.Я. и др.** — Оптика и спектроскопия, 1970, т.XXVIII, №5, с.942.
102. **Жильцова Л.Я. и др.** — Журнал прикладной спектроскопии. 1971, т.XV, №2, с.255.
103. **Bross A.D., Pla-Dalmau A.** — IEEE Trans Nucl. Sci., 1992, v.NS-39, p.1199.
104. **Pla-Dalmau A. et al.** — FERMILAB-Pub-95/278, 1995.
105. **Андрющенко Л.А., Гринев Б.В.** — ПТЭ, 1998, №1, с.52.
106. **Бритвич Г.И. и др.** — ПТЭ, 1998, №4, с.50.
107. **Auffray E. et al.** — Nucl. Instr. Meth., 1998, v.A402, p.75.
108. **Бритвич Г.И. и др.** — ПТЭ, 1998, №5, с.50.
109. **Baldin A.M., Kovalenko A.D.** — JINR Rapid Comm., №3[77]-96, p.5.
110. **Буртаев Ю.Ф., Острейковский В.А.** — Статистический анализ надежности объектов по ограниченной информации. М.: Энергоатомиздат, 1995.
111. **Zaitsev L.N.** — In: XVII Intern.Conf. High Energy Accelerators, Dubna, Sept. 7–12 1998.
112. **Гаврилов В.Б. и др.** — ПТЭ, 1997, №4, с.23.
113. **Astapov A.A., Zaitsev L.N.** — JINR Rapid Comm., 1996, №5[79]-96.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01; 530.145

Вариационные разложения в квантовой хромодинамике. *Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.5, с.1057.

Представлен обзор полученных в последние годы результатов по применению непертурбативных вариационных разложений в квантовой хромодинамике. Изложение начинается с примеров, которые позволяют понять метод построения вариационных рядов в квантовой теории поля и способы управления свойствами их сходимости с помощью специальных параметров. Затем формулируется вариационная теория возмущений для квантовой хромодинамики, строится непертурбативное разложение по новому малому параметру и рассматриваются различные феноменологические приложения этого подхода.

Табл.3. Ил.17. Библиогр.: 146.

УДК 530.145

Интегрируемость в суперсимметричных калибровочных теориях. *Маршаков А.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.5, с.1120.

Обзор посвящен точным непертурбативным решениям суперсимметричных квантовых калибровочных теорий поля и их формулировке в терминах интегрируемых систем. Обсуждаются общие свойства интегрируемости в контексте возникновения интегрируемых структур в рамках топологических струнных моделей и (близких к реалистическим) суперсимметричных калибровочных теорий поля. Сначала рассматриваются основные свойства струнного континуального интеграла, которые позволяют понять некоторые общие непертурбативные свойства теории и, в дальнейшем, предложить определение точных непертурбативных эффективных действий как решений систем нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений. Показано, что возникающие нелинейные дифференциальные уравнения относятся к классу интегрируемых моделей типа Кадомцева — Петвиашвили или Тоды, подробно обсуждаются различные интегрируемые системы этого класса и в особенности появляющиеся в контексте суперсимметричных калибровочных теорий. Рассматриваются представления Лакса и спектральные кривые этих систем, и предлагается некоторая классификация точных непертурбативных решений суперсимметричных теорий поля, основанная на их соответствии интегрируемым моделям.

Библиогр.: 127.

УДК 514.7; 514.8

Пространства с контравариантной и ковариантной аффинными связностями и метриками. *С.Манов.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.5, с.1211.

В обзоре детально рассмотрена возможность введения на дифференцируемом многообразии пары контравариантной и ковариантной аффинных связностей, различающихся не только знаком. Теория пространств с такими парами связностей детально разработана здесь в объеме, необходимом для построения кинематики векторных полей и лагранжевской теории тензорных полей в таких пространствах. Введены как оператор ковариантного дифференцирования, так и дифференциальный оператор Ли. Исследуется действие их на тензорные поля. В пространствах с разными связностями рассмотрено действие девиационного оператора, играющего существенную роль для уравнений девиации в гравитационной физике. Введены понятия ковариантной и контравариантной метрик с соответствующими им проективными метриками. Найдено, как действует ковариантный оператор дифференцирования и дифференциальный оператор Ли на этих метриках. Дана классификация переносов и перемещений метрик. Рассмотрены разложения ковариантной производной от метрики на основные структуры, имеющие отношение к связностям. Введен расширенный ковариантный дифференциальный оператор. Исследованы изменения элементарного объема под действием ковариантного оператора дифференцирования и дифференциального оператора Ли. Введены ковариантный оператор дифференцирования и дифференциальный оператор Ли, не изменяющие элементарный объем. Рассмотрены инвариантные операторы Ли и ковариантные дифференциальные операторы, действующие как изоморфизмы на контравариантные и ковариантные тензорные плотности.

Табл.1. Библиогр.: 54.

УДК 539.1.01

За пределом черного диска: от теневой к антитеневой моде рассеяния. *Трошин С.М., Тюрин Н.Е.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.5, с.1270.

В обзоре рассмотрена антитеневая мода в рассеянии адронов при сверхвысоких энергиях. Возможность появления данной моды при сверхвысоких энергиях рассматривается на основе унитарности и геометрических представлений об адронном рассеянии. Рассмотрена связь с непертурбативными моделями в рамках КХД. Предсказывается появление этой моды в рассеянии при энергиях выше $\sqrt{s} \cong 2$ ТэВ. Эксперименты на LHC и VLHC по изучению адронных процессов могут обнаружить данную моду.

Ил.2. Библиогр.: 42.

УДК 539.1.074.3

Проблема увеличения радиационного ресурса сцинтилляционных детекторов для протонных и ионных коллайдеров. *Зайцев Л.Н.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999 том 30, вып.5, с. 1292.

Показано, что при энергиях 214 ТэВ и светимостях $10^{32} \div 10^{34}$ см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$ радиационные нагрузки ($\dot{D}$) на сцинтилляторы (PS) и спектросмещающие световоды (WLS) начинают превышать предельно допустимый уровень, и ресурс (t_r) резко снижается. Раньше ресурс представляли как отношение независимых величин: $t_r = D_{\lim} / \dot{D}$, а $D_{\lim}$ определяли по изменению оптических свойств только при ускоренных облучениях большими мощностями доз. Однако реальные условия работы PS+WLS в калориметрах сильно отличаются от тестовых, поэтому $D_{\lim}$ для одного и того же сцинтиллятора в образцах и в калориметре отличаются на один-два порядка. Увеличить радиационную стойкость сцинтилляторов невозможно традиционными химико-технологическими способами.

В обзоре обсуждается возможность использования новой концепции, основанной на спонтанном восстановлении первоначальных оптических свойств в перерывах облучения. Впервые показана сложность задачи, заключающаяся в том, что $D_{\lim}$ зависит от $\dot{D}$ вследствие радиационного окисления, а также от времени, температуры, интенсивности света, поля излучения (ЛПЭ), размеров PS и WLS и др. Доказывается необходимость изучения новых химических добавок: антиоксидантов и фотостабилизаторов, которые значительно снижают время полного восстановления свойств.

Табл.9. Ил.16. Библиогр.: 113.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП.5

СОДЕРЖАНИЕ

Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.
Вариационные разложения в квантовой хромодинамике 1057

Маршаков А.В.
Интегрируемость в суперсимметричных калибровочных теориях 1120

Манов С.
Пространства с контравариантной и ковариантной аффинными связностями и метриками. 1211

Трошин С.М., Тюрин Н.Е.
За пределом черного диска: от теневой к антитеневой моде рассеяния 1270

Зайцев Л.Н.
Проблема увеличения радиационного ресурса сцинтилляционных детекторов для протонных и ионных коллайдеров 1292

CONTENTS

Sissakian A.N., Solovtsov I.L.
Variational Expansions in Quantum Chromodynamics 1057

Marshakov A.V.
Integrability in Supersymmetric Gauge Theories 1120

Manoff S.
Spaces with Contravariant and Covariant Affine Connections and Metrics 1211

Troshin S.M., Tyurin N.E.
Beyond the Black-Disk Limit: from Shadow to Antishadow Scattering Mode 1270

Zaitsev L.N.
The Problem of Increasing the Radiation Resource of Scintillation Detectors for Proton and Ion Colliders 1292

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с одной стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\cap$, верхние — знаком повышения $\cup$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя exp, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркиваются двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, *l*, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а нуль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, векторы — синим, либо знаком снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например, ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., к — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами: не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год

издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.**— Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbiner A.V.** — Comm. Math. Phys., 1988, v.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hirosima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 13.05.99. Подписано в печать 10.09.99. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,7. Уч.-изд.л. 21,35.
Тираж 400. Заказ 51582. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1999. Том 30. Вып.5. 1053—1332.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 539.12.01, 530.145

ВАРИАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

*А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ 1057

ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ: ОСНОВНЫЕ ИДЕИ 1062

Построение вариационных разложений 1062

Непертурбативное разложение по малому параметру 1065

ВАРИАЦИОННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ 1071

Построение вариационного ряда 1072

Малый параметр разложения в квантовой хромодинамике 1076

Перенормировка 1078

Связь с потенциальной кварковой моделью 1079

Поправки и стабильность 1081

e^+e^--АННИГИЛЯЦИЯ В АДРОНЫ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ 1084

ИНКЛЮЗИВНЫЙ РАСПАД τ-ЛЕПТОНА 1089

Инвариантный заряд во времениподобной области 1089

τ-распад 1092

Ренормалонный вклад 1095

ПРАВИЛА СУММ КХД И a-РАЗЛОЖЕНИЕ 1099

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 1103

ПРИЛОЖЕНИЯ 1107

А. Решение уравнений методом вариационных итераций 1107

В. Корреляторы токов массивных кварков 1110

С. Кулоновские сингулярности 1112

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 1114

*Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 530.145

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А.В.Маршаков

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва
Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

ВВЕДЕНИЕ 1120
ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В $2D$-ГРАВИТАЦИИ
И СТРУННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ 1137
$2D$- и W-гравитация в формализме конформных
теорий и интегрируемые системы типа КП 1137
Алгебры наблюдаемых в $2D$- и W-гравитации 1147
Непертурбативная формулировка квантовой
2D-гравитации: решение условий Вирасоро 1155
Топологическая $2D$-гравитация
как явное решение вирасоровских условий 1160
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУННЫХ
МОДЕЛЕЙ 1165
Интегрируемость топологических струнных моделей 1165
Точные решения топологических $(p,1)$-моделей
и их деформации в теории типа Гинзбурга — Ландау 1173
Нетопологические решения и pq-дуальность 1178
Струнная теория поля и предел $c \to 1$ 1182
НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В $4D$ $N=2$
СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ:
КОМПЛЕКСНЫЕ КРИВЫЕ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ 1188
$N=2$ суперсимметричная глюодинамика
и периодическая цепочка Тоды 1190
Эллиптическая деформация представления $N_c \times N_c$:
модель Калоджеро — Мозера и взаимодействие
с присоединенной материей 1193
От Тоды к спиновым цепочкам и суперсимметричной КХД:
случай $N_f < 2N_c$ и XXX-спиновые модели 1196
$N_f = 2N_c$: спиновые цепочки общего вида
и алгебра Склянина 1199
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 1204
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 1205

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 514.7; 514.8

ПРОСТРАНСТВА С КОНТРАВАРИАНТНОЙ И КОВАРИАНТНОЙ АФФИННЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ И МЕТРИКАМИ

*С.Манов**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ 1212

Геометрия пространства-времени и дифференциальная геометрия 1213

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДУАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОПЕРАТОР СВЕРТКИ 1215

КОНТРАВАРИАНТНАЯ И КОВАРИАНТНАЯ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ. КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР 1218

Аффинная связность. Ковариантный дифференциальный оператор 1218

Контравариантная и ковариантная аффинные связности 1219

Ковариантные производные контравариантных тензорных полей 1221

Ковариантные производные ковариантных тензорных полей 1223

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ЛИ 1224

Производные Ли от контравариантных тензорных полей 1224

Связь между ковариантным дифференцированием и дифференцированием Ли 1228

Производные Ли от ковариантных базисных векторных полей 1229

Производные Ли от ковариантных тензорных полей 1231

Классификация линейных переносов и смещений в зависимости от связи между контравариантной и ковариантной аффинными связностями 1233

*Permanent address: Bulgarian Academy of Sciences, Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Department of Theoretical Physics, Blvd. Tzarigradsko Chaussee 72, 1784 Sofia, Bulgaria E-mail address: smanov@inrne.bas.bg.

ОПЕРАТОР КРИВИЗНЫ. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ 1234
Оператор кривизны 1234
Тождества Бианки 1236
ОПЕРАТОР ДЕВИАЦИИ 1238
ПРОДОЛЖЕННЫЙ КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР. ПРОДОЛЖЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ 1242
МЕТРИКИ 1244
Ковариантная метрика 1244
Ковариантная проективная метрика 1248
Контравариантная метрика 1249
Контравариантная проективная метрика 1252
ТОЖДЕСТВА БИАНКИ ДЛЯ КОВАРИАНТНОГО ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ 1253
Тождество Бианки первого типа для ковариантного тензора кривизны 1253
Тождество Бианки второго типа для ковариантного тензора кривизны 1254
ИНВАРИАНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА 1254
Дефиниция и свойства 1254
Действие оператора ковариантного дифференцирования на инвариантный элемент объема 1256
Действие дифференциального оператора Ли на инвариантный элемент объема 1256
Ковариантный дифференциальный оператор, сохраняющий инвариантный элемент объема 1257
Бесследовый ковариантный дифференциальный оператор. Перенос Вейля. Пространство Вейля 1260
Дифференциальный оператор Ли, сохраняющий инвариантный элемент объема 1263
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 1265
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 1267

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 539.1.01

BEYOND THE BLACK-DISK LIMIT: FROM SHADOW TO ANTISHADOW SCATTERING MODE

S.M. Troshin, N.E. Tyurin

Institute for High Energy Physics, Protvino, Moscow Region, 142284 Russia

INTRODUCTION	1270
GEOMETRICAL PICTURE	1272
BOUNDS FOR OBSERVABLES AND THE EXPERIMENTAL DATA	1273
ANTISHADOW SCATTERING MODE	1275
THE TWO MODES OF HADRON SCATTERING AND THE PREASYMPTOTIC EFFECTS	1280
ANTISHADOW SCATTERING MODE AND INELASTIC DIFFRACTIVE PROCESSES	1282
UNIVERSAL PREASYMPTOTICS	1286
CONCLUSION	1289
REFERENCES	1289

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 5

УДК 539.1.074.3

ПРОБЛЕМА УВЕЛИЧЕНИЯ РАДИАЦИОННОГО РЕСУРСА СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ ДЕТЕКТОРОВ ДЛЯ ПРОТОННЫХ И ИОННЫХ КОЛЛАЙДЕРОВ

Л.Н.Зайцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1292
РАДИАЦИОННЫЕ НАГРУЗКИ	1293
Источники излучения	1294
Плотные материалы	1298
Внутренняя полость	1299
Окружающее пространство	1302
РАДИОРЕЗИСТЕНТНОСТЬ СЦИНТИЛЛЯТОРОВ И СПЕКТРОСМЕЩАЮЩИХ ВОЛОКОН	1302
Предельная доза	1302
Полуэмпирическая модель	1304
Роль ЛПЭ	1308
Спонтанное восстановление	1310
Циклическое облучение	1312
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА ДЕТЕКТОРОВ	1317
Методика	1317
Ресурс адронного калориметра CMS (HCAL)	1318
Ресурс электромагнитного калориметра CMS (ECAL)	1321
Ресурс переднего калориметра CMS (HFCAL)	1323
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1323
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1324