

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.30

PART 6

Six issues per year

DUBNA 1999

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 30

ВЫПУСК 6

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1999

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы Е.К.Аксенова, тел. (09621) 65-165

Е.Ю.Шаталова

© ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1999

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЭВОЛЮЦИИ СТРУКТУРЫ НУКЛОНА В ЯДРЕ

В.В.Буров, А.В.Молочков, Г.И.Смирнов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлен обзор экспериментальных и теоретических исследований глубоконеупругого рассеяния (ГНР) лептонов на ядерных мишенях. Очерчены основные проблемы, которые необходимо решить при анализе x - и A -зависимостей сечений ГНР. Анализируется ряд моделей, предлагавшихся для изучения вклада ядерных эффектов в структурные функции $F_2(x)$. Разработан и реализован релятивистский теоретико-полевой подход для рассмотрения ГНР лептонов на легчайших ядрах. Впервые в рамках единого подхода выполнено исследование модификации структуры нуклона в D, ^3H , ^3He и ^4He . Найдено, что эволюция модификаций полностью отличается от эволюции, наблюдавшейся ранее для тяжелых ядер. В частности, обнаружено, что картина модификаций $F_2(x)$, представленная в терминах отношений $F_2^A/F_2^{N(D)}$, определяется значениями $(1-x_3) = 0,32$ (D/N), $0,16$ ($^3\text{He/D}$) и $0,08$ ($^4\text{He/D}$). Полученные результаты позволяют определить класс модификаций структуры связанного нуклона и ввести единицу модификации структуры нуклона. Получено также теоретическое обоснование концепции двухэтапной эволюции структуры нуклона как функции A , происходящей на первом этапе для $A \leq 4$, и затем для $A > 4$. Давняя проблема природы ЕМС-эффекта понимается как модификация структуры нуклона в поле ядерных сил трехнуклонной связанной системы.

The review of the experimental and theoretical studies of the deep inelastic scattering (DIS) of leptons on nuclear targets is presented. The basic problems which have to be solved in the analysis of the x and A dependence of the DIS cross sections are outlined. A number of models suggested for the studies of the nuclear effects in structure functions $F_2(x)$ are analyzed. The relativistic field theory approach is developed and realized for the consideration of the DIS of leptons off the lightest nuclei. It made it possible to investigate for the first time in the framework of the single approach the modifications of the free nucleon structure in D, ^3H , ^3He and ^4He . It is obtained that the evolution of the modifications is totally different from that observed previously for heavy nuclei. In particular it is found that the pattern of $F_2(x)$ modifications is controlled with the values $(1-x_3) = 0.32$ (D/N), 0.16 ($^3\text{He/D}$) and 0.08 ($^4\text{He/D}$). The obtained results allow one to define the class of modifications of the bound nucleon structure and to introduce the unit of the nucleon structure modification. The theoretical basis is thus obtained for the concept of the two-stage evolution of the nucleon structure as a function of A , which first occurs for $A \leq 4$ and then for $A > 4$. The long-standing problem of the origin of the EMC effect is understood as the modification of the nucleon structure in the field responsible for the binding forces in a three-nucleon system.

1. ВВЕДЕНИЕ

Протон и нейтрон наиболее существенным образом отличаются от всех других представителей обширного семейства адронов тем, что время их жизни

в свободном состоянии очень велико: ~ 890 с для нейтрона и практически бесконечно для протона. Это обстоятельство делает их главным источником экспериментальной информации о структуре сильновзаимодействующих частиц. Объект, который обобщает имена этих двух частиц, называют нуклоном и рассматривают как конститuent самого малого представителя макромира — атомного ядра. Внутри ядра нуклоны стабильны, чем объясняется широкое применение ядерных мишеней в экспериментах по физике высоких энергий. Глубоконеупругое рассеяние (ГНР) лептонов на свободных протонах и нуклонах ядра A дало возможность обнаружить нуклонные конститuenty — кварки — и стало основным экспериментальным методом исследования структуры адронов.

В процессе рассеяния:

$$l + A \rightarrow l' + X \quad (1)$$

лептон l с импульсом k рассеивается на ядре A с начальным четырехимпульсом P с большой передачей четырехимпульса $q = k - k'$. В инклюзивной постановке опытов по ГНР регистрируется только конечный лептон с импульсом k' , а с помощью X обозначают ненаблюдаемое конечное адронное состояние реакции. В низшем порядке по константе электромагнитного взаимодействия $\alpha = e^2/4\pi$ этот процесс можно схематически изобразить диаграммой однофотонного обмена (рис.1).

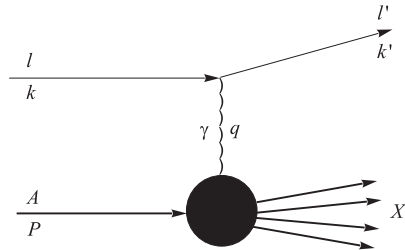


Рис. 1. Диаграмма, схематически представляющая процесс ГНР в однофотонном приближении

В рассматриваемом приближении сечение реакции (1) может быть записано в виде свертки адронного и лептонного тензоров [1]:

$$d\sigma \propto \frac{\alpha^2}{q^4} L^{\mu\nu}(k, k') W_{\mu\nu}(P, q). \quad (2)$$

Лептонный тензор $L^{\mu\nu}$ описывает излучение лептоном жесткого фотона. Поскольку лептон предполагается точечным, то выражение для $L^{\mu\nu}$ имеет простой вид:

$$L_{\mu\nu}(k, k') = \frac{1}{2} \sum_{s'} \bar{u}^{s'}(k') \gamma_\mu u^s(k) \bar{u}^s(k) \gamma_\nu u^{s'}(k'). \quad (3)$$

Вся информация о мишени и ее ядерных свойствах содержится в адронном тензоре, который имеет следующий вид:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \frac{1}{2} \sum_n \langle P | J_\mu^+ | n \rangle \langle n | J_\nu | P \rangle (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p_n). \quad (4)$$

Это определение позволяет связать адронный тензор ядра с амплитудой комптоновского рассеяния вперед с помощью соотношения унитарности:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} T_{\mu\nu}(P, q). \quad (5)$$

В случае рассеяния электрона (мюона) на неполяризованной мишени наиболее общая форма тензора $W_{\mu\nu}$ может быть представлена как

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(P, q) = & W_1(\nu, q^2) g^{\mu\nu} + \frac{W_2(\nu, q^2)}{M^2} P^\mu P^\nu + \\ & + \frac{W_4(\nu, q^2)}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5(\nu, q^2)}{M^2} (P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\nu = q_0$ — энергия фотона, а W_i — структурные функции мишени. Вследствие условия калибровочной инвариантности

$$q_\mu W^{\mu\nu}(P, q) = 0 \quad (7)$$

адронный тензор зависит только от двух структурных функций:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(P, q) = & W_1(\nu, q^2) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \\ & + \frac{W_2(\nu, q^2)}{M^2} \left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right). \end{aligned}$$

В бьеркеновском пределе ($-q^2 = Q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$) реализуется условие масштабной инвариантности, что позволяет перейти к структурным функциям, не зависящим от q^2 :

$$\begin{aligned} MW_1(\nu, q^2) & \rightarrow F_1(x), \\ \nu W_2(\nu, q^2) & \rightarrow F_2(x), \end{aligned} \quad (8)$$

где F_1 и F_2 — масштабно-инвариантные структурные функции (СФ), а $x = -q^2/(P \cdot q)$ — новая масштабно-инвариантная переменная, иногда называемая x Бьеркена. С учетом (8) $W_{\mu\nu}$ записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(P, q) = & \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x) + \\ & + \frac{1}{P \cdot q} \left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) F_2(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Пионерские эксперименты в SLAC в конце шестидесятых годов, в которых была обнаружена масштабная инвариантность структурных функций нуклона, способствовали становлению и развитию кварк-партоновых моделей адронов. Спустя десять лет эксперименты нового поколения подтвердили предсказанное логарифмическое нарушение масштабной инвариантности, что стало основой для развития квантовой хромодинамики (КХД) как теории сильных взаимодействий. Дальнейшие исследования изоспиновой асимметрии в ГНР и эксперименты с поляризованными мишенями и первичными частицами показали, что существовавшие в то время представления о спиновой и изоспиновой структуре нуклона не согласуются с экспериментальными результатами [2]. Возможная интерпретация допускала предположение о нарушении изоспиновой симметрии кварков в нуклоне. Стало очевидно, что реальная картина внутренней структуры нуклона намного сложнее, чем это предполагалось в кварк-партоновой модели. Тем самым был стимулирован интерес к прецизионным проверкам справедливости правил сумм (ПС) Готтфрида [3], Эллиса—Джаффе [4] и Бьеркена [5].

Связанность нуклонных конститuentов (кварков и глюонов) обладает уникальной особенностью сохранять целостность структуры нуклона при любых доступных в настоящее время передачах энергии. Не исключено также, что невылетание кварков из нуклона является его фундаментальным свойством, которое сохранится и при больших энергиях. Это явление, известное как *конфайнмент*, препятствует прямому, свободному от модельных представлений исследованию структуры нуклона. Скрытые от наблюдателя детали структуры можно сравнить с содержанием *черного ящика*, стандартные методы исследования которого заключаются в изучении зависимости отклика исследуемого объекта от вариаций воздействия. При использовании различных предположений о внутренней структуре нуклона можно прийти к той или иной модели, согласующейся с получаемой из опытов зависимостью. Однако в условиях реального эксперимента нельзя осуществить проверку исходных (модельных) предположений во всей области кинематических переменных. Это утверждение применимо и к наиболее доступной нуклонной мишени — протонной, и, в еще большей степени, к нейтронной, в качестве которой применяются дейтериевые мишени. В последнем случае получение из экспериментальных данных информации о структуре нейтрона просто невозможно без модельных предположений об эффектах связанности протона и нейтрона в дейтроне. Другими словами, оказывается, что для экспериментального исследования структуры нуклона необходимо иметь как можно более точную априорную информацию о его строении.

В наиболее сильной степени все эти проблемы проявили себя в тот момент, когда появилась возможность прецизионного сравнения структуры дейтрона и связанного в тяжелом ядре нуклона. Традиционно предполагалось, что в качестве нуклонной мишени в ГНР могут быть использованы не только

протоны, но и ядра, если их рассматривать как набор квазисвободных нуклонов. Пренебрежение ядерными эффектами основывалось на предположении о том, что можно пренебречь энергией связи в ядре по сравнению с передачей энергии от лептона к ядру и, таким образом, рассматривать нуклон и ядро как изоморфные друг другу системы. Несостоятельность этой концепции была продемонстрирована в эксперименте Европейской мюонной коллаборации (ЕМС), в котором было измерено отношение СФ железа $F_2^{\text{Fe}}(x)$ к СФ дейтрона $F_2^{\text{D}}(x)$ [6]. Как показал опыт ЕМС, структура связанных в ядре нуклонов меняется нетривиальным образом: в области средних значений x величина СФ свободного нуклона (дейтрона в опыте ЕМС) оказалась существенно больше $F_2^{\text{Fe}}(x)$. Такая модификация СФ, во-первых, противоречила традиционным моделям ядерной структуры. Во-вторых, характер найденных изменений $F_2^{\text{Fe}}(x)$ как функции x можно было лишь качественно согласовать с представлениями об эффектах ядерной связи. Количественное согласие с данными не было достигнуто ни в одной из предложенных для описания эффекта моделей [7–9]. Обнаруженное явление модификации СФ свободного нуклона в ядре было названо *ЕМС-эффектом*.

Для того чтобы реконструировать картину модификаций структуры свободного нуклона ядерной средой, было создано большое количество моделей и множество их различных вариантов, которые рассмотрены в ряде обзоров (см., например, [8,9]). Предложенные модели можно объединить в три основные группы:

- а) объяснение ЕМС-эффекта с помощью учета энергии отделения нуклона, релятивистского ферми-движения и нуклон-нуклонных корреляций [10,11];
- б) гипотеза о связи ЕМС-эффекта с ненуклонными степенями свободы [12–17];
- в) предположение об изменении радиуса кваркового конфайнмента [18–20].

Несмотря на качественные различия, заложенные в этих подходах для объяснения природы эффекта, многие из них воспроизводили общую картину эффекта, а некоторые даже удовлетворительно описывали экспериментальные данные в ограниченной кинематической области (как правило, при $0,3 < x < 0,7$). Согласие достигалось ценой введения подгоночных параметров. Тем не менее попытки описать экспериментальные данные одновременно в более широкой области по x и для различных ядер оказались безуспешными. Естественно, что такое состояние проблемы не позволяло категорически отвергнуть многие из моделей и установить однозначно механизм ЕМС-эффекта.

Совершенствование модельного описания эффекта продолжается до сих пор. Из недавних публикаций следует отметить подход, предлагающий дополнительную КХД-эволюцию [21], модель феноменологического двойного

Q^2 -рескейлинга [22], а также модель, рассматривающую эффект ЕМС в области $10^{-3} < x < 0,7$ с помощью параметризации ядерной связи и разбухания нуклона [23]. В работе [24] предлагается партонная модель для описания распределения морских кварков и глюонов в ядрах. Помимо рассмотрения эффекта ЕМС в тяжелых ядрах в этом обзоре обсуждаются партонные распределения в дейтроне и полученное соотношение между СФ дейтрона и нейтрона.

В значительной степени альтернативный всем другим подходам метод развивается в работах [25,26]. Для того чтобы обойти проблемы теоретического описания структуры ядра при конечном значении его атомного номера A , в [26] рассматривается модификация структуры нуклона в бесконечной ядерной материи. Сечение реакции (1) в ядерной материи можно оценить с помощью экстраполяции сечений, измеренных для ряда конечных значений A , в область $A \rightarrow \infty$, предполагая зависимость $A^{-1/3}$ [25].

Эти новые работы могут рассматриваться как хорошая аргументация важности решения проблемы безмодельного описания модификации структуры связанного нуклона по сравнению со структурой свободного нуклона.

Богатый экспериментальный материал, полученный к настоящему времени на различных ядрах коллаборациями SLAC, BCDMS, NMC и E665, позволяет выявить ряд фундаментальных закономерностей в x - и A -зависимостях отношений структурных функций тяжелых ядер и дейтрона. Наиболее существенным, с нашей точки зрения, было обнаружение универсальной x -зависимости (единой для всех ядер с массой $A \geq 4$) отношения $r^A(x) = F_2^A(x)/F_2^D(x)$ сначала в ограниченном интервале переменной x [27], а впоследствии и во всей доступной современным экспериментам области: $10^{-3} < x < 0,95$ [28–30]. Главной чертой обнаруженных закономерностей была независимость от A трех точек x_i ($i = 1,2,3$), в которых $F_2^A(x_i) = F_2^D(x_i)$. Этот результат, однако, применялся лишь как технический метод учета A -зависимости, а не как ключ к пониманию природы ЕМС-эффекта. Естественным, что ни одна из предложенных моделей не только не воспроизводила эти закономерности, но даже не позволяла описать современные экспериментальные данные с разумной степенью достоверности. В то же самое время экспериментальная информация, уже накопленная о ГНР лептонов на ядрах при $A \geq 4$, убедительно свидетельствует о том, что связанность нуклонов в ядре, а также насыщение эффектов ядерной связи при $A \rightarrow 4$ являются основными механизмами модификации структуры свободного нуклона [29, 30]. Можно отметить значительное количество теоретических работ, подчеркивающих важность учета механизма связанности нуклонов в ядре [11, 31, 32], которые, однако, не придавали должного значения эффекту насыщения сил связи в малонуклонных системах.

Как нам представляется, задача описания эффекта ЕМС чаще всего сводилась к поиску условий, обеспечивающих отличие от единицы отношения

$F_2^A(x)/F_2^D(x)$. При этом широко привлекались как слабоизученные субнуклонные степени свободы [13, 15, 18–20] и экзотические ядерные конститuenty [14, 33–40], так и модели нуклон-нуклонного взаимодействия [11, 12, 31, 32, 41]*. В результате успех описания данных и, следовательно, понимание эволюции $F_2(x)$ в ядерном окружении зависели в значительной степени от точности описания структуры нуклона и нуклон-нуклонного взаимодействия.

Для того чтобы разорвать такой замкнутый круг, необходимо реконструировать картину относительных изменений в структуре связанного нуклона, основываясь на общих свойствах нуклона и нуклон-нуклонного взаимодействия, которые можно получить из свойств симметрии и аналитичности. С другой стороны, тот факт, что нуклон, находящийся в ядре, изменяется, предоставляет дополнительные возможности для теоретического исследования структуры нуклона и установления некоторых его свойств на основе самых общих принципов.

Ключевой проблемой, по нашему убеждению, является последовательное релятивистское описание эффектов ядерной связи. Наилучшим объектом для рассмотрения основных эффектов служит простейшая ядерная система — дейтрон. Как будет показано ниже на примере расчета $F_2^D(x)$, релятивистски-ковариантный подход [42] позволяет объяснить наблюдаемые в ГНР ядерные эффекты с помощью единой физической картины, допускающей сравнительно простую интерпретацию. Релятивистские выражения для n -нуклонной функции Грина и для вершинной функции, описывающей состояние ядра в терминах нуклонных степеней свободы, устанавливают зависимость между динамической структурой нуклона и величиной временного интервала Δt , разделяющего наблюдаемый нуклон и ядро-остаток (нуклон для случая дейтериевой мишени) — неодновременности нуклонов в ядре. Суть объяснения состоит в том, что причиной модификации структуры нуклона, связанного в ядре дейтерия ($F_2^D(x)/F_2^N(x) \neq 1$), является неодновременность нуклонов в ядре. Этот теоретический результат позволяет без труда продемонстрировать связь с нерелятивистским подходом, в частности то, как рескейлинг переменной Бьеркена x следует из зависимости от относительного времени, содержащейся в комптоновской амплитуде немассового нуклона.

Обобщение полученного результата на легкие ядра ($A \leq 4$) позволяет исследовать эволюцию $F_2(x)$ с изменением A и установить *достаточное* условие проявления модификаций эффекта немассовой деформации нуклона, который при переходе к $A > 4$ обнаруживает себя как ЕМС-эффект. Благодаря расчетам, выполненным в области $A \leq 4$ [43, 44], установлены принципиальные различия в эволюции структуры нуклона в легчайших ядрах и в ядерной среде с $A > 4$. Концепция эволюции двух типов позволяет легко обобщить

*Более полный список литературы по рассматриваемым моделям приведен в обзорах [7–9].

полученные результаты на область тяжелых ядер и описать практически все существующие экспериментальные данные по ГНР на ядрах [30].

Кроме того, в результате проведенных исследований удается получить ряд общих следствий для правил сумм КХД, проверяемых на ядерных данных. Поскольку большинство существующих и планируемых экспериментов в SLAC, CERN и HERA [45–47] по проверке правил сумм КХД и исследованию СФ нейтрона основаны на данных по ГНР на легких ядрах, такое исследование представляется очень важным с практической точки зрения.

Данный обзор посвящен проблеме развития модельно-независимого подхода к исследованию эволюции структуры нуклона в ядрах. В разделе 2 рассматриваются основные приближения, используемые при анализе ГНР на ядрах. Раздел 3 посвящен основным теоретико-полевым методам исследования свойств связанных состояний на примере n -нуклонной системы. В разделе 4 эти методы применяются для анализа ГНР на дейтроне и на примере дейтрона исследуются основные эффекты ядерной связи. В разделе 5 этот анализ расширяется на легкие ядра и применяется для изучения A -зависимости отношения структурных функций F_2^A/F_2^N и F_2^A/F_2^D . В заключении суммируются основные выводы и результаты данного исследования.

2. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим стандартные предположения, используемые при анализе процесса ГНР на ядрах в полевых моделях:

- приближение однобозонного обмена в уравнении на связанное состояние;
- рассмотрение амплитуды ГНР в виде некогерентной суммы амплитуд на отдельных конституентах;
- представление адронного тензора связанного нуклона через скалярные структурные функции в том же виде, что и для свободного нуклона.

Первое предположение позволяет решить, например, уравнение Бете—Солпитера [48] или квазипотенциальное уравнение [49] на связанное состояние в мезон-нуклонной теории. В этом случае взаимодействие между нуклонами можно представить как бесконечную лестницу одномезонных обменов. В работах [48, 50–53] было показано, что в этом приближении уравнение Бете—Солпитера хорошо описывает такие основные свойства дейтрона, как масса, энергия связи, магнитный и квадрупольный моменты. Определенные успехи также были достигнуты при описании упругих формфакторов дейтрона [48, 54].

Второе предположение позволяет рассматривать квадрат амплитуды $W_{\mu\nu}^A$ глубоконеупругого рассеяния на ядре как сумму квадратов амплитуд рассеяния на отдельных конституентах. Основанием для этого, как будет показано в п.4.1, служит подавление интерференционных членов в $W_{\mu\nu}^A$, пропорциональное $1/(Q^2)^l$, $l \geq 2$ [42]. Таким образом, вклад интерференционных членов существен при малых значениях Q^2 , где они могут значительно влиять на Q^2 -зависимость $W_{\mu\nu}^A$. Первое и второе приближения не являются независимыми в силу того, что интерференционные члены определяются волновой функцией ядра при больших относительных импульсах. Характер Q^2 -зависимости $W_{\mu\nu}^A$ при малых Q^2 может оказаться важным для анализа ГНР на ядрах в области малых x . Следовательно, как первое, так и второе предположения могут оказаться необоснованными в этой кинематической области.

Существующие экспериментальные данные для ГНР на ядрах в основном принадлежат области $x > 10^{-3}$ и $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$. Поскольку, как показали эксперименты [8,55], отношение F_2^A/F_2^D не зависит от Q^2 , в расчетах мы будем ограничиваться бьеркеновским пределом, где первое и второе приближения хорошо обоснованы и соответствуют приближению малой относительной энергии связанных нуклонов.

Третье предположение позволяет представить адронный тензор виртуального нуклона в виде (9). Это представление справедливо в том случае, если нетривиальные различия между рассеянием на свободном и связанном нуклонах малы. Можно выделить три таких различия, которые мы будем называть эффектами немассовости:

- невозможность использования условия калибровочной инвариантности для связанного нуклона в виде (7);
- вклад антинуклонных степеней свободы;
- неодновременность связанных нуклонов.

В силу того что нельзя привлечь условие (7), последовательно сформулированное только для физических частиц, выражение для $W_{\mu\nu}^N$ связанного нуклона оказывается более сложным, чем (9). В общем случае, как показал анализ [56] в кварк-партонной модели, амплитуда ГНР на связанном нуклоне может быть построена с помощью 14 скалярных структурных функций, из которых только три важны при описании СФ связанного нуклона в бьеркеновском пределе. Выбор конкретного числа СФ, входящих в разложение адронного тензора, в сильной степени зависит от модельных предположений.

Похожая ситуация существует и при рассмотрении вклада антинуклонных степеней свободы, роль которых до конца не ясна. Чаще всего вклад этих степеней свободы в различные наблюдаемые параметризуется ядерными эффектами, связанными с кварковой структурой нуклонов или вкладами различных

ненуکلонных степеней свободы. Например, в работе [40] для объяснения x -зависимости отношения $F_2^{\text{Fe}}/F_2^{\text{D}}$ в области $x = 0,2 - 0,7$ рассматривались антикварковые степени свободы, присутствие которых, возможно, связано с существованием антинуклонов в релятивистском ядре. Известно также, что антинуклонные степени свободы играют существенную роль при анализе статических характеристик ядра. В работах [50,51] было показано, что проблема совместного описания квадрупольного и магнитного моментов дейтрона может быть решена только после учета вклада в нормировку волновой функции релятивистских P -волн, присутствие которых связано с антинуклонными степенями свободы. Впоследствии было показано, что вклад P -волн в различные статические и динамические характеристики дейтрона соответствует в нерелятивистском подходе вкладу парных мезонных токов [53,57]. Очевидно, что этот эффект немассовости, в силу его влияния на низкоэнергетические свойства ядра, не может быть отброшен на основе только приближения малых относительных импульсов нуклонов в ядре.

Таким образом, для согласованного анализа немассовых эффектов в ГНР на ядрах необходимо прояснить роль возможного изменения условия калибровочной инвариантности и присутствия антинуклонных степеней свободы в рамках применяемого подхода.

Третий эффект немассовости, как будет показано в п.3.1, приводит в импульсном пространстве к появлению зависимости от нулевой компоненты относительного импульса нуклонов (относительной энергии). Отметим, что функция распределения $f(y)$ в линейной конволюционной формуле

$$F_2^{\text{D}}(x) = \int dy F_2^{\text{N}}(x/y) f(y) \quad (10)$$

не содержит какой-либо зависимости от относительной энергии, и оправдать использование этого выражения можно только в нерелятивистских моделях, где связанность нуклона учитывается дополнительными степенями свободы [58,59] или выражена через энергию отделения нуклона [11]. Простейший способ ввести нетривиальную зависимость от относительной энергии состоит в том, чтобы вывести двумерную конволюционную формулу для ядерной СФ:

$$F_2^{\text{A}}(x) = \int dy dp_{\text{N}}^2 \tilde{F}_2^{\text{N}}(x/y, p_{\text{N}}^2) f(y, p_{\text{N}}^2), \quad (11)$$

где функция распределения отражает зависимость от квадрата 4-импульса нуклона $p_{\text{N}}^2 \neq m^2$. В этом подходе для вычисления $\tilde{F}_2^{\text{A}}(x/y, p_{\text{N}}^2)$ необходимо привлечь дополнительные модельные предположения не только о структуре немассового нуклона, но и о свойствах функции распределения $f(y, p_{\text{N}}^2)$ в ядре.

Такой подход был развит в ряде работ [49,56,60,61]. Так, в [60] для вывода выражения (11) использовалась эффективная диаграммная техника в

кварковой модели ядра. В последующей работе [49] было показано, что зависимость от p_N^2 в СФ нуклона сводится к учету изменения граничных условий для кинематических характеристик кварков в связанном нуклоне. Это позволяет редуцировать двумерную конволюционную формулу (11) в одномерную (10) с модифицированным аргументом функции распределения $f(y)$. Позже процедура редукции двумерной конволюционной формулы в одномерную была реализована в общем случае в рамках теоретико-полевого формализма, независимого от кварковой модели нуклона [62]. Было показано, что такой тривиальный кинематический учет зависимости от относительной энергии в $f(y)$ ведет к нарушению барионного правила сумм:

$$f(y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) y \delta \left(y - \frac{M_D/2 - k_0 + k_3}{M_D} \right), \quad (12)$$

$$\int dy f(y) \neq 1, \quad (13)$$

где k обозначает относительный 4-импульс нуклонов, связанных в покоящемся дейтроне. Аналогичный по сути результат в рамках кварковой модели нуклона был получен в работе [61], где показано, что один только кинематический учет p_N^2 -зависимости приводит к изменению числа валентных кварков в нуклоне.

Таким образом, возникает необходимость введения динамической зависимости кваркового распределения в нуклоне от квадрата полного импульса нуклона p_N^2 . Однако, как показано в [61], учет динамики хотя и позволяет добиться сохранения числа валентных кварков в нуклоне, но при этом приводит к значительному ослаблению зависимости отношения $F_2^A(x)/F_2^D(x)$ от p_N^2 .

Так как эти подходы основаны на кварковой модели для нуклона, они позволяют учесть возможную немассовую деформацию нуклонной структуры в ядре на основе информации о кварковой структуре ядра. То есть для согласованной микроскопической картины ядерных эффектов в ГНР необходимо построить такую кварковую модель ядра, в рамках которой возможно было бы выделение нуклонных степеней свободы. Для случая бесконечной ядерной материи подобная модель была развита в работе [63]. Она основана на модели кваркового мешка, в котором кварки обмениваются скалярными и векторными мезонами. Формально эта модель может быть записана так же, как и модель Валечки [64], но с дополнительным условием, согласно которому среднее скалярное поле меняется в ответ на изменение внутренней нуклонной структуры [65]. Расширение этой модели в область конечных A с помощью приближения локальной плотности привело к переоценке эффектов ядерной связи в два-три раза [66].

Альтернативный подход, свободный от присущих кварковым моделям неопределенностей, может быть развит в рамках формализма Бете—Солпитера

на основе общих свойств нуклонных функций Грина. Нуклон в таком подходе рассматривается как четырехмерный *черный ящик* со структурными функциями в качестве входных зависимостей. Проблема анализа немассовых эффектов может быть сведена к изучению деформации *черного ящика* [42]. В рамках такого подхода структурная функция ядра выражается через СФ физических нуклонов и их производные на массовой поверхности.

3. ФОРМАЛИЗМ

Цель настоящего раздела — рассмотрение формализма описания процесса ГНР на системе связанных нуклонов.

При анализе процессов с участием связанных состояний в рамках локальной теории поля приходится рассматривать частицы, не являющиеся свободными на асимптотике. Согласованной процедурой, позволяющей перенести всю информацию о физических состояниях, заключенную в обкладках матричных элементов, на произведение полевых операторов, является редукционная техника, предложенная в работах [67]. Эта техника основана на предположении, что физические состояния в обкладках матричных элементов могут рассматриваться как свободные на асимптотике, а взаимодействие включается адиабатически. Таким образом, из рассмотрения исключаются связанные состояния, которые не удовлетворяют сделанному предположению. Для того чтобы включить в рассмотрение связанные состояния, редукционную технику необходимо дополнить процедурой, позволяющей выразить средние по таким состояниям через вакуумные средние.

В рамках нерелятивистской теории поля эта проблема решается путем введения внешнего классического поля, которое позволяет описывать динамику связанного состояния движением частицы в потенциальной яме. В результате вычисление среднего по связанному состоянию сводится к расчету среднего по одночастичному состоянию, а эффекты связи учитываются введением импульсного распределения этой частицы. Такой простой способ позволяет получить структурную функцию ядра в конволюционном виде [11]. Роль релятивистских поправок и эффектов немассовости при этом остается невыясненной. В рамках квазипотенциальных подходов решение проблемы связанного состояния нуклонов сводится к выводу аналога уравнения Шредингера с ковариантным трехмерным потенциалом [49, 68–75]. Тогда вычисление средних по связанным состояниям, по сути дела, не отличается от нерелятивистского случая. Однако в отличие от нерелятивистских подходов квазипотенциальный подход позволил качественно исследовать роль ряда релятивистских и немассовых эффектов в глубоконеупругом рассеянии [49, 56, 61].

В работе [76] был предложен метод вычисления средних от Т-произведения локальных операторов по связанным состояниям, который особенно активно используется и развивается в последнее время [43, 48, 52, 77, 78]. Суть этого метода заключается в том, что средние по связанным состояниям выражаются через вакуумные средние от Т-произведения локальных операторов и матричные элементы перехода между вакуумом и связанным состоянием. Рассмотрим применение этого метода к прямым процессам с участием связанного состояния n -нуклонов.

3.1. Амплитуда Бете—Солпитера. Поскольку расчет сечения глубоконеупругого рассеяния сводится к анализу амплитуды комптоновского рассеяния вперед (5), ограничимся рассмотрением процедуры вычисления матричного элемента от Т-произведения локальных операторов $\eta(y_1) \dots \eta(y_k)$ по связанным состояниям A :

$$\langle A | T(\eta_1(y_1) \dots \eta_k(y_k)) | A \rangle, \quad (14)$$

где $\eta_i(y_i)$ — набор операторов тока, определяющих взаимодействие нуклонов с внешними полями. В общем случае часть операторов из набора $\eta_i(y_i)$ может совпадать друг с другом. Воспользуемся тем фактом, что в определенной кинематической области совместное распространение n -взаимодействующих нуклонов проходит через образование связанного состояния. В этом случае первый член ряда разложения n -нуклонной функции Грина по промежуточным состояниям имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle = \\ & = \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha} \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) | A(\alpha, P) \rangle \times \\ & \times \langle A(\alpha, P) | T(\bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle \theta(\min\{x_{0i}\} - \max\{x'_{0i}\}) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь α обозначает набор дискретных квантовых чисел состояния A , а P — его полный импульс, который в силу закона сохранения энергии совпадает с полным импульсом системы полей Ψ . Возникшая при раскрытии Т-произведения в матричном элементе (15) θ -функция обеспечивает выполнение условия причинности:

$$\min\{x_{0i}\} > \max\{x'_{0i}\}. \quad (16)$$

Максимальные и минимальные координаты могут быть определены с помощью введения средней координаты n полей, сопряженной полному импульсу P :

$$X = \frac{\sum_i^n x_i}{n}, \quad (17)$$

и координат нуклонов относительно этой точки:

$$\tilde{x}_i = X - x_i. \quad (18)$$

В результате максимальная и минимальная координаты могут быть определены как

$$\begin{aligned} \max\{x_{0i}\} &= X_0 + |\max\{\tilde{x}_{0i}\}|, \\ \min\{x_{0i}\} &= X_0 - |\max\{\tilde{x}_{0i}\}|. \end{aligned} \quad (19)$$

Применяя интегральное представление для θ -функции

$$\theta(x_0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ip_0 x_0}}{p_0 + i\delta} dp_0, \quad (20)$$

получаем необходимое нам выражение, связывающее вакуумное среднее от нуклонных операторов и матричные элементы перехода от вакуума к связанному состоянию:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \frac{dP_0}{2\pi} e^{i(P_0 - E)(X_0 - X'_0)} \times \\ &\times e^{-i(P_0 - E)(|\max\{\tilde{x}_{0i}\}| + |\max\{\tilde{x}'_{0i}\}|)} \times \\ &\times \frac{\langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) | A(\alpha, P) \rangle \langle A(\alpha, P) | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) | 0 \rangle}{P_0 - E + i\delta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Неудобство этого выражения состоит в использовании двух наборов координат одновременно — $\{x_i\}$ и $\{X, \tilde{x}_i\}$. Для того чтобы от него избавиться, перейдем к использованию повсюду в расчетах второго набора координат. В силу трансляционной инвариантности справедливо следующее соотношение для полей Ψ :

$$\Psi(x + \tilde{x}) = e^{-i\hat{P}\tilde{x}} \Psi(\tilde{x}) e^{i\hat{P}\tilde{x}}. \quad (22)$$

Заменив x_i на $X - \tilde{x}_i$ в операторах Ψ и $\bar{\Psi}$ и сдвинув на X с помощью преобразования (22), введем матричные элементы перехода от вакуума к связанному состоянию в пространстве относительных положений нуклонов:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T(e^{-i\hat{P}X} \Psi(x_1) e^{i\hat{P}X} \dots e^{-i\hat{P}X} \Psi(x_n) e^{i\hat{P}X}) | A \rangle = \\ &= \chi_{\alpha, P}^A(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) e^{i(EX_0 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{X})}, \\ &\langle A | T(e^{i\hat{P}X} \bar{\Psi}(x'_1) e^{-i\hat{P}X} \dots e^{i\hat{P}X} \bar{\Psi}(x'_n) e^{-i\hat{P}X}) | 0 \rangle = \\ &= \bar{\chi}_{\alpha', P}^A(\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n) e^{-i(EX_0 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{X})}. \end{aligned} \quad (23)$$

Хотя формально функции χ_α^A зависят от n -переменных, только $n - 1$ из них являются независимыми в силу уравнения

$$\sum_i^n \tilde{x}_i = 0.$$

В результате этих преобразований выражение (21) принимает вид

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\Psi(\tilde{x}_1) \dots \Psi(\tilde{x}_n) \bar{\Psi}(\tilde{x}'_1) \dots \bar{\Psi}(\tilde{x}'_n)) | 0 \rangle = \\ & = \sum_\alpha \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} e^{iP(X-X')} \frac{\chi_{\alpha,P}^A(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \bar{\chi}_{\alpha,P}^A(\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n)}{P_0 - E + i\delta}. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу того что интеграл по P_0 определяется поведением подынтегрального выражения вблизи полюса $P_0 = E$, здесь опущена экспонента $\exp\{-i(P_0 - E)(|\max\{\tilde{x}_{0i}\}| + |\max\{\tilde{x}'_{0i}\}|)\}$.

Введенные выше неизвестные функции $\chi_{\alpha,P}^A$ и $\bar{\chi}_{\alpha,P}^A$, входящие в матричные элементы перехода от вакуума к связанному состоянию (23), описывают состояние ядра в терминах степеней свободы виртуальных нуклонов и называются амплитудами Бете—Солпитера. Эти амплитуды позволяют решить основную задачу, а именно выразить средние по связанным состояниям через вакуумные средние.

3.2. Анализ матричных элементов в формализме Бете—Солпитера. Для того чтобы выявить связь матричного элемента (14) с нуклонными функциями Грина и амплитудами Бете—Солпитера, рассмотрим матричный элемент

$$\langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle \quad (25)$$

в окрестности сингулярности n -нуклонного связанного состояния $P^2 = M^2$.

Разобьем времениупорядоченное произведение в матричном элементе (14) на произведение матричных элементов от Ψ , η , $\bar{\Psi}$. Для этого выберем максимальную и минимальную нулевые компоненты из набора $\{x_i\}$ в соответствии с (19) и представим Т-произведение в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} & T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) = \\ & = T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) T(\eta(y_1) \dots \eta(y_k)) T(\bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) \times \\ & \times \theta(X_0 - Y_0 - |\max\{\tilde{x}_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|) \times \\ & \times \theta(Y_0 - X'_0 - |\max\{\tilde{x}'_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|) + \\ & + T(\bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) T(\eta(y_1) \dots \eta(y_k)) T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) \times \\ & \times \theta(X'_0 - Y_0 - |\max\{\tilde{x}'_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|) \times \\ & \times \theta(Y_0 - X_0 - |\max\{\tilde{x}_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|). \end{aligned}$$

Вставив полный набор между Т-произведениями, перепишем выражение (14) в виде суммы по состояниям из полного набора:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle = \\
& = \sum_R \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) | R \rangle \langle R | T(\eta(y_1) \dots \eta(y_k)) | R \rangle \times \\
& \times \langle R | T(\bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle \theta(X_0 - Y_0 - |\max\{\tilde{x}_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|) \times \\
& \times \theta(Y_0 - X'_0 - |\max\{\tilde{x}'_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|) + \\
& + \sum_R \langle 0 | T(\bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | R \rangle \langle R | T(\eta(y_1) \dots \eta(y_k)) | R \rangle \times \\
& \times \langle R | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)) | 0 \rangle \theta(X'_0 - Y_0 - |\max\{\tilde{x}'_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|) \times \\
& \times \theta(Y_0 - X_0 - |\max\{\tilde{x}_{0i}\}| - |\max\{\tilde{y}_{0i}\}|), \tag{26}
\end{aligned}$$

где $\sum_R$ обозначает суммирование по дискретным квантовым числам и интегрирование по непрерывным переменным.

Поскольку нас интересует поведение матричного элемента (14) вблизи полюса $P^2 = M^2$, достаточно рассмотреть вклад нижайшего связанного состояния в выражении (26), соответствующего этому полюсу. Рассматриваемому связанному состоянию соответствует первый член ряда (26) с $R = A$. Воспользовавшись интегральным представлением для θ -функции (20), получим следующее выражение для матричного элемента (25):

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3} \times \\
& \times \langle 0 | T \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) | A, P \rangle \langle A, P | T \eta(y_1) \dots \eta(y_k) | A, P' \rangle \times \\
& \times \langle A, P' | T \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n) | 0 \rangle \int \frac{dP_0}{(2\pi)} \frac{dP'_0}{(2\pi)} \times \\
& \times \frac{e^{i(P_0 - E)(X_0 - Y_0)} e^{i(P'_0 - E')(Y_0 - X'_0)} e^{i(P_0 - E)(\max\{\tilde{x}_{0i}\} - y/2)} e^{i(P'_0 - E')(\max\{\tilde{x}'_{0i}\} - y/2)}}{(P_0 - E + i\delta)(P'_0 - E' + i\delta)}. \tag{27}
\end{aligned}$$

Перейдем с помощью выражений (23) к относительным переменным и перепишем матричный элемент (25) в виде

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T(\Psi(\tilde{x}_1) \dots \Psi(\tilde{x}_n) \eta(\tilde{y}_1) \dots \eta(\tilde{y}_k) \bar{\Psi}(\tilde{x}'_1) \dots \bar{\Psi}(\tilde{x}'_n)) | 0 \rangle = \\
& = \sum_{\alpha, \alpha'} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{d^4 P'}{(2\pi)^4} e^{i(P_0 - E)(\max\{\tilde{x}_{0i}\} - y/2)} e^{i(P'_0 - E')(\max\{\tilde{x}'_{0i}\} - y/2)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\chi_{\alpha,P}^A(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \langle A | T(\eta(\tilde{y}_1) \dots \eta(\tilde{y}_k)) | A \rangle \bar{\chi}_{\alpha',P}^A(\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n)}{(P_0 - E + i\delta)(P'_0 - E' + i\delta)} \times \\ & \times e^{iPX} e^{-iP'X'} e^{i(P-P')Y}. \end{aligned} \quad (28)$$

С другой стороны, в силу унитарности n -нуклонной функции Грина, связанной с амплитудой (15) соотношением

$$G_{2n}(x_1 \dots x_n, z_1, \dots, z_n) = i \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(z'_1) \dots \bar{\Psi}(z'_n)) | 0 \rangle, \quad (29)$$

матричный элемент (25) может быть тождественно переписан в виде

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(x'_1) \dots \bar{\Psi}(x'_n)) | 0 \rangle = \\ & = \int d^4 z_1 \dots d^4 z_n d^4 z'_1 \dots d^4 z'_n d^4 z''_1 \dots d^4 z''_n d^4 z'''_1 \dots d^4 z'''_n G_{2n}(x_1 \dots x_n, z_1, \dots, z_n) \times \\ & \times G_{2n}^{-1}(z_1 \dots z_n, z'_k, \dots, z'_n) \langle 0 | T(\Psi(z_1) \dots \Psi(z_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(z'_1) \dots \bar{\Psi}(z'_n)) | 0 \rangle \times \\ & \times G_{2n}^{-1}(z'_1, \dots, z'_n, z''_1, \dots, z''_n) G_{2n}(z''_1, \dots, z''_n, x'_k, \dots, x'_n). \end{aligned} \quad (30)$$

Учитывая поведение n -нуклонной функции Грина (24) вблизи полюса $P^2 = M^2$, сравниваем это выражение с (28):

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \alpha'} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{d^4 P'}{(2\pi)^4} \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n e^{iPX} e^{-iP'X'} \times \\ & \times \frac{\chi_{\alpha,P}^A(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \bar{\chi}_{\alpha',P}^A(z_1, \dots, z_n)}{P_0 - E + i\delta} \times \\ & \times \bar{G}_{2n+k}(z_1 \dots z_n, \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n, z'_1 \dots z'_n) \frac{\chi_{\alpha',P'}^A(z'_1, \dots, z'_n) \bar{\chi}_{\alpha',P'}^A(\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n)}{P'_0 - E' + i\delta} = \\ & = \sum_{\alpha, \alpha'} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{d^4 P'}{(2\pi)^4} e^{i(P_0 - E)(\max\{\tilde{x}_{0i}\} - y/2)} e^{i(P'_0 - E')(\max\{\tilde{x}'_{0i}\} - y/2)} e^{i(P-P')Y} \times \\ & \times \frac{\chi_{\alpha,P}^A(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \langle A | T(\eta(\tilde{y}_1) \dots \eta(\tilde{y}_k)) | A \rangle \bar{\chi}_{\alpha',P'}^A(\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_n)}{(P_0 - E + i\delta)(P'_0 - E' + i\delta)} e^{iPX} e^{-iP'X'}, \end{aligned} \quad (31)$$

где с помощью $\bar{G}_{2n+k}$ обозначена усеченная функция Грина, которая определена следующим образом:

$$\begin{aligned} & \bar{G}_{2n+k}(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_k, x'_k, \dots, x'_n) = \\ & = i \int d^4 z_1 \dots d^4 z_n d^4 z'_1 \dots d^4 z'_n G_{2n}^{-1}(x_1 \dots x_n, z_k, \dots, z_n), \\ & \langle 0 | T(\Psi(z_1) \dots \Psi(z_n) \eta(y_1) \dots \eta(y_k) \bar{\Psi}(z'_1) \dots \bar{\Psi}(z'_n)) | 0 \rangle \times \\ & \times G_{2n}^{-1}(z'_1, \dots, z'_n, x'_1, \dots, x'_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Умножая обе части подынтегрального выражения в (31) на $(P_0 - E) \times (P'_0 - E')$ и устремляя P_0 к E и P'_0 к E' , получаем соотношение, определяющее способ вычисления средних по связанному состоянию от Т-произведения набора локальных операторов:

$$\begin{aligned} & \langle A | T(\eta(\tilde{y}_1) \dots \eta(\tilde{y}_k)) | A \rangle e^{i(P-P')Y} = \\ & = \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n \overline{\chi}_{\alpha,P}^A(z_1, \dots, z_n), \\ & \overline{G}_{2n+k}(z_1 \dots z_n, \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n, z'_1 \dots z'_n) \chi_{\alpha',P'}^A(z'_1, \dots, z'_n). \end{aligned} \quad (33)$$

Это выражение связывает амплитуду рассеяния на связанном состоянии n -нуклонов с неприводимой функцией Грина $\overline{G}_{2n+k}$, описывающей рассеяние на n -виртуальных нуклонах, и неизвестными функциями $\chi_{\alpha,P}^A$ и $\overline{\chi}_{\alpha,P}^A$, описывающими состояние ядра в терминах нуклонных степеней свободы, уравнение на которые необходимо найти.

3.3. Уравнение Бете—Солпитера. Выражение (24) устанавливает связь между функциями $\chi_{\alpha,P}^A$ и n -нуклонной функцией Грина G_{2n} . Таким образом, имея уравнение на функцию G_{2n} , можно получить уравнение, которому удовлетворяет амплитуда $\chi_{\alpha,P}^A$. При этом недостаточно знать G_{2n} в рамках теории возмущений, так как для анализа поведения функции Грина в области полюса связанного состояния необходимо просуммировать весь ряд теории возмущений. Поэтому рассмотрим общие уравнения на функции Грина G_{2n} , которые могут быть получены без привлечения теории возмущений.

Распространение свободного нуклона из точки x_1 в точку x_2 описывается свободной функцией Грина $S_{(1)}^0$, удовлетворяющей уравнению вида

$$(i\hat{\partial}_{x_1} - m)S_{(1)}^0(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2), \quad (34)$$

где m — масса нуклона. В случае, когда нуклон взаимодействует с собственным полем, в правой части уравнения на точную функцию Грина $S_{(1)}$ возникает член, учитывающий это самодействие:

$$(i\hat{\partial}_{x_1} - m)S_{(1)}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2) - \int dx'_1 \overline{G}_2(x_1, x'_1) S_{(1)}(x'_1, x_2). \quad (35)$$

Сравнив уравнения (34) и (35), можно заметить, что функция $\overline{G}_2(x_1, x'_1)$ удовлетворяет уравнению Дайсона

$$\overline{G}_2(x_1, x_2) = S_{(1)}^{0-1}(x_1, x_2) - S_{(1)}^{-1}(x_1, x_2), \quad (36)$$

то есть совпадает с однонуклонной неприводимой собственно энергетической частью. Функция Грина $S_{(2)}$, описывающая совместное распространение двух

физических нуклонов, не взаимодействующих друг с другом, удовлетворяет уравнению вида

$$(i\hat{\partial}_{x_1} - m^*) \otimes (i\hat{\partial}_{y_1} - m^*) S_{(2)}^0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \delta(x_1 - x_2) \delta(y_1 - y_2), \quad (37)$$

где $m^* = m - \overline{G}_2(x_1, x_2)$. Учет взаимодействия между нуклонами приводит к появлению в правой части дополнительного члена:

$$\begin{aligned} & (i\hat{\partial}_{x_1} - m^*) \otimes (i\hat{\partial}_{y_1} - m^*) G_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = \\ & = \delta(x_1 - x_2) \delta(y_1 - y_2) + \int dx'_1 dy'_1 \overline{G}_4(x_1, x'_1, y_1, y'_1) G_4(x'_1, x_2, y'_1, y_2). \end{aligned} \quad (38)$$

Сравнивая уравнения (37) и (38), получаем двухчастичный аналог уравнения Дайсона, а именно неоднородное уравнение Бете—Солпитера [79]:

$$\overline{G}_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = S_{(2)}^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2) - G_4^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2). \quad (39)$$

По аналогии с однонуклонным случаем функция, описывающая взаимодействие между нуклонами, совпадает с неприводимой собственно энергетической частью системы из двух нуклонов. Обобщая на случай n -нуклонов, получаем следующее уравнение:

$$\overline{G}_{2n}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) = S_{(n)}^{-1}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) - G_{2n}^{-1}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n), \quad (40)$$

где функция $S_{(n)}$ — прямое произведение n -нуклонных пропагаторов:

$$S_{(n)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) = \langle 0 | T(\Psi(x_1) \Psi(x_1)) | 0 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 0 | T(\Psi(x_n) \Psi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (41)$$

Выразив из (40) G_{2n} , получим интегральное уравнение, где $\overline{G}_{2n}$ является ядром:

$$\begin{aligned} G_{2n}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) &= S_{(n)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) + \\ &+ \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n S_{(n)}(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_n) \times \\ &\times \overline{G}_{2n}(z_1 \dots z_n, z'_1 \dots z'_n) G_{2n}(z'_1 \dots z'_n, x'_1 \dots x'_n). \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, точная n -нуклонная функция Грина является решением интегрального уравнения, которое связывает между собой две неизвестные функции Грина, G_{2n} и $\overline{G}_{2n}$.

Существует несколько способов решения этой проблемы. В частности, по аналогии с уравнением Дайсона уравнение Бете—Солпитера можно исследовать в рамках техники дисперсионных соотношений. Для этого вводится обобщение спектрального представления для точной одночастичной функции

Грина на случай n -частиц — *интегральное представление теории возмущений* Наканиши [80]. Такой подход успешно применялся при решении уравнения Бете—Солпитера для случая двух скалярных частиц [81]. С другой стороны, уравнение (42) дает прекрасную возможность моделирования двухнуклонной функции Грина, если ввести $\overline{G}_{2n}$ в явном виде.

Наиболее удобным является сепарабельный вид ядра этого уравнения:

$$\overline{G}_{2n}(z_1 \dots z_n, z'_1 \dots z'_n) = \sum_{i,j} c_{ij} g_i(z_1 \dots z_n) g_j(z'_1 \dots z'_n).$$

В этом случае задача решения интегрального уравнения подменяется задачей решения линейной системы уравнений. Этот подход успешно применялся для описания двухнуклонной системы [82]. Отметим, что некоторая комбинация подходов, основанных на использовании сепарабельного потенциала и спектрального представления, учитывающего аналитические свойства двухнуклонной функции Грина, может служить основой для создания реалистического сепарабельного анзаца для функции $\overline{G}_{2n}$ [83].

Второй, наиболее распространенный вид $\overline{G}_{2n}$ может быть получен методами теории возмущений. Рассмотрим решение уравнения (42) с помощью итераций. Возьмем в качестве нулевой итерации

$$G_{2n}^{(0)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) = S_{(n)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n).$$

Подставляя это выражение в (42), получаем первую итерацию:

$$\begin{aligned} G_{2n}^{(1)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) &= S_{(n)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) + \\ &+ \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n S_{(n)}(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_n) \times \\ &\times \overline{G}_{2n}(z_1 \dots z_n, z'_1 \dots z'_n) S_{(n)}(z'_1 \dots z'_n, x'_1 \dots x'_n). \end{aligned} \quad (43)$$

В ходе последовательных итераций получаем разложение точной n -нуклонной функции Грина в бесконечный ряд по степеням $\overline{G}_{2n}$:

$$\begin{aligned} G_{2n}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) &= S_{(n)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) + \\ &+ \sum_m \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n \dots dz_1^{(m)} \dots dz_n^{(m)} S_{(n)}(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_n) \times \\ &\times \overline{G}_{2n}(z_1 \dots z_n, z'_1 \dots z'_n) S_{(n)}(z'_1 \dots z'_n, x'_1 \dots x'_n) \dots \times \\ &\times \overline{G}_{2n}(z_1^{(m-1)} \dots z_n^{(m-1)}, z_1^{(m)} \dots z_n^{(m)}) S_{(n)}(z_1^{(m)} \dots z_n^{(m)}, x'_1 \dots x'_n). \end{aligned} \quad (44)$$

С другой стороны, функция G_{2n} может быть разложена в ряд по теории возмущений в конкретной модели нуклон-нуклонного взаимодействия

(например, мезон-нуклонной модели):

$$G_{2n}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) = \sum_i G_{2n}^{(i)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n),$$

$$G_{2n}^{(0)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) = S_{(n)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n). \quad (45)$$

Сравнивая ряды (44) и (45), получаем выражение, связывающее $\overline{G}_{2n}$ с членами ряда по теории возмущений для G_{2n} :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{2n}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) &= S_{(n)}^{-1}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n) - \\ &- \sum_m \sum_{m_1, m_2} \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n G_{2n}^{(m_1)-1}(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_n) \times \\ &\times G_{2n}^{(m)}(z_1 \dots z_n, z'_1 \dots z'_n) G_{2n}^{(m_2)-1}(z'_1 \dots z'_n, x'_1 \dots x'_n). \end{aligned} \quad (46)$$

В рамках мезонной модели нуклон-нуклонного взаимодействия первый член этого ряда ($m = 1$) соответствует приближению однобозонного обмена в ядре уравнения (42) (так называемое лестничное приближение). Решение уравнения (42) в рамках лестничного приближения позволяет просуммировать часть ряда по теории возмущений для G_{2n} и описать низкоэнергетические свойства нуклон-нуклонного рассеяния с хорошей точностью [48]. Таким образом, уравнение (40) при задании нуклон-нуклонных сил позволяет, в принципе, определить точную n -нуклонную функцию Грина. Предположив наличие полюса связанного состояния в G_{2n} , аналогичное уравнение можно получить для амплитуды Бете—Солпитера (23).

Подставим выражение (24) в уравнение (42), умножим обе части получившегося выражения на $(P_0 - E)$ и устремим $P \rightarrow E$. В результате получим

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha, P}^A(x_1, \dots, x_n) &= \int dz_1 \dots dz_n dz'_1 \dots dz'_n S_{(n)}(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_n) \times \\ &\times \overline{G}_{2n}(z_1 \dots z_n, z'_1 \dots z'_n) \chi_{\alpha, P}^A(z'_1, \dots, z'_n). \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, матричный элемент перехода между вакуумом и n -нуклонным связанным состоянием удовлетворяет однородному интегральному уравнению с ядром $\overline{G}_{2n}$, которое связано с точными n -нуклонной и однонуклонной функциями Грина соотношением (40).

Для использования в дальнейших расчетах нам понадобится уравнение (47) в импульсном представлении. С помощью фурье-преобразования амплитуда Бете—Солпитера χ может быть переписана в импульсном представлении:

$$\chi_{\alpha}(P, k_1 \dots k_{n-1}) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{-i \sum_i^n k_i x_i} \chi_{\alpha, P}(x_1 \dots x_n), \quad (48)$$

где $k_n = P - \sum_i^{n-1} k_i$. Тогда уравнение Бете—Солпитера принимает вид

$$\chi_\alpha^A(P, k_1, \dots, k_{n-1}) = S_{(n)}(P, k_1, \dots, k_{n-1}) \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_{n-1}}{(2\pi)^4} \times \\ \times \overline{G}_{2n}(P, k_1 \dots k_{n-1}, k'_1 \dots k'_{n-1}) \chi_\alpha^A(k'_1, \dots, k'_{n-1}). \quad (49)$$

В силу того что (49) и (47) являются однородными интегральными уравнениями, амплитуда Бете—Солпитера определена с точностью до некоторой постоянной. Поэтому необходимо ввести условие нормировки. Поскольку решения этих уравнений не обладают прямым физическим смыслом и не могут быть нормированы исходя из вероятностных соображений, необходимо опереться на нормировку с помощью значения известных средних. В качестве такой величины можно взять, например, среднее от барионного тока при нулевой передаче импульса:

$$\langle A | J_\mu(0) | A \rangle = i P_\mu. \quad (50)$$

Выражая этот матричный элемент с помощью соотношения (33) через амплитуды Бете—Солпитера, получаем следующее условие нормировки для χ_α^A :

$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_{n-1}}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k'_{n-1}}{(2\pi)^4} \overline{\chi}_\alpha^A(P, k_1, \dots, k_{n-1}) \times \\ \times \overline{G}_{2n+1\mu}(q=0, P, k_1 \dots k_{n-1}, k'_1 \dots k'_{n-1}) \chi_\alpha^A(P, k'_1, \dots, k'_{n-1}) = i P_\mu. \quad (51)$$

Учитывая, что при нулевой передаче точная усеченная фотон- n -нуклонная вершина $\overline{G}_{2n+1\mu}$ связана с производной по полному импульсу от n -нуклонной функции Грина [84],

$$\overline{G}_{2n+1\mu}(q=0, P, k_1 \dots k_{n-1}, k'_1 \dots k'_{n-1}) = \\ = -\frac{\partial}{\partial P_\mu} G_{2n}^{-1}(P, k_1 \dots k_{n-1}, k'_1 \dots k'_{n-1}), \quad (52)$$

и выражая G_{2n}^{-1} из (40), получаем условие нормировки для функций χ_α^A в следующем виде:

$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k'_n}{(2\pi)^4} \overline{\chi}_\alpha^A(P, k_1, \dots, k_{n-1}) \times \\ \times \left[S_{(n)}^{-1}(P, k_1, \dots, k_{n-1}) \left\{ \frac{\partial}{\partial P_\mu} S_{(n)}(P, k_1, \dots, k_{n-1}) \right\} S_{(n)}^{-1}(P, k_1, \dots, k_{n-1}) \times \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial P_\mu} \overline{G}_{2n}(P, k_1 \dots k_{n-1}, k'_1 \dots k'_{n-1}) \right] \chi_\alpha^A(P, k'_1, \dots, k'_{n-1}) = i P_0. \quad (53)$$

Как будет показано в разд. 4, это условие позволяет построить теорию ГНР на ядре так, что удастся выполнить одновременно барионное и импульсное правила сумм.

В заключение этого раздела отметим некоторые важные свойства амплитуды Бете—Солпитера, которые мы будем использовать далее.

Во-первых, к таким свойствам относится наличие в амплитуде БС зависимости от нулевой компоненты относительной координаты (относительного времени) нуклонов, которая согласно выражению (33) отражается на динамических наблюдаемых n -нуклонного связанного состояния. В импульсном пространстве эта зависимость приводит к зависимости от нулевой компоненты относительного импульса нуклонов (относительной энергии), которая, как это будет показано ниже, является основной причиной наблюдаемых ядерных эффектов в ГНР.

Во-вторых, соотношение (24) позволяет сделать несколько замечаний по поводу аналитической структуры χ_α^A . Функция Грина G_{2n} в импульсном пространстве содержит ряд сингулярностей, часть из которых в силу (24) присуща и амплитуде Бете—Солпитера. Это полюса, связанные с внешними пропагаторами нуклонов, разрезы по относительным импульсам, полюса, связанные с различными связанными состояниями, которые образуют либо часть нуклонов, либо все нуклоны. Последняя сингулярность выделена явно в выражении (24) и, таким образом, не дает вклада в χ_α^A . Первый тип сингулярностей также можно выделить явным образом, введя вместо амплитуды БС величину, называемую вершинной функцией Бете—Солпитера:

$$S_{(n)}(P, k_1 \dots k_{n-1}) \Gamma_\alpha^A(P, k_1 \dots k_{n-1}) = \chi_\alpha^A(P, k'_1, \dots k'_{n-1}). \quad (54)$$

Таким образом, мы получили в свое распоряжение объект, который избавлен от двух самых сильных особенностей — полюса n -нуклонного связанного состояния, а также полюсов и разрезов, присущих однонуклонным пропагаторам. В п. 5.1 мы рассмотрим способ выделения сингулярностей вершинной функции, которые возникают из-за присутствия m -нуклонных ($m < n$) связанных состояний в ядре, что соответствует представлению о кластеризации атомного ядра.

4. ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НА ДЕЙТРОНЕ

Простейшим стабильным связанным состоянием нуклонов, наблюдаемым в природе, является дейтрон. Это состояние имеет наименьшую энергию связи из всех ядер ($\epsilon = 2,224$ МэВ). Энергия связи дейтрона настолько мала, что с помощью простейших рассуждений в рамках нерелятивистской квантовой механики можно заключить, что нуклоны в этой системе большую часть

времени не взаимодействуют. Благодаря этому обстоятельству в большинстве теоретических и экспериментальных исследований структуры материи дейтрон отождествляется с изоскалярным нуклоном [8, 55]. В частности, наблюдавшиеся различия структурных функций тяжелых ядер и дейтрона принято считать свидетельством искажения структурной функции свободного нуклона. Несмотря на то, что качественно такой подход выглядит разумно, ряд результатов, опирающихся на измерения структурной функции дейтрона, оказывается противоречивым. Наиболее ярким примером трудности, с которой можно столкнуться при анализе опытов на дейтронной мишени, является попытка извлечения информации о нейтронной СФ из данных по ГНР на дейтроне и протоне [85–88]. С одной стороны, экспериментальная проверка правил сумм КХД [85, 87], в которой используется F_2^D , привела к довольно необычному результату, противоречащему традиционным представлениям о партонной структуре нуклона, — нарушению правила сумм Готтфрида. С другой стороны, в ряде теоретических работ было показано, что F_2^D не может быть однозначным образом извлечена из дейтронных данных [88, 89]. Теоретические неопределенности могут быть настолько велики, что количественно оказываются сравнимыми с эффектом нарушения ПС Готтфрида.

Таким образом, несмотря на малую энергию связи, ядерные эффекты в дейтроне требуют детального исследования. В силу того что дейтрон представляет собой простейшую ядерную систему, все основные эффекты связи могут быть изучены на его примере наиболее подробно, причем все аналитические расчеты можно провести последовательно и точно.

Ниже мы рассмотрим применение подхода, развитого в работах [42, 76, 79] и описанного в разд. 3, для расчета F_2^D и F_2^D/F_2^N .

4.1. Амплитуда комптоновского рассеяния на дейтроне. В силу соотношения унитарности (5) расчет адронной части амплитуды глубоконеупругого рассеяния $W_{\mu\nu}(P, q)$ сводится к вычислению амплитуды комптоновского рассеяния вперед $T_{\mu\nu}(P, q)$. Согласно определению амплитуда комптоновского рассеяния на дейтроне $T_{\mu\nu}^D(P, q)$ может быть представлена как среднее от Т-произведения нуклонных электромагнитных токов J_μ по состояниям дейтрона $|D\rangle$:

$$T_{\mu\nu}^D(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle D | T (J_\mu(x) J_\nu(0)) | D \rangle. \quad (55)$$

В соответствии с выражением (33) это определение $T_{\mu\nu}^D(P, q)$ может быть переписано в терминах решений уравнения Бете—Солпитера (49) для дейтрона $\Gamma^D(P, k)$ и двухнуклонных функций Грина $\overline{G}_{6\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}^D(P, q) = \frac{1}{3} \sum_S \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \overline{\Gamma}_S^D(P, k_1) S_{(2)}(P, k_1) \times$$

$$\times \overline{G}_{6\mu\nu}(q, P, k_1, k_2) S_{(2)}(P, k_2) \Gamma_S^D(P, k_2), \quad (56)$$

где индекс S обозначает проекцию спина дейтрона на некоторую ось.

Функция $\overline{G}_{6\mu\nu}$ в соответствии с уравнением (32) связана с точной двух-нуклонной функцией Грина со вставкой, описывающей комптоновское рассеяние виртуальных фотонов на системе из двух взаимодействующих нуклонов:

$$\begin{aligned} \overline{G}_{6\mu\nu}(q, P, k, k') &= \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \times \\ &\times G_4^{-1}(P, k, k_1) G_{6\mu\nu}(q, P, k_1, k_2) G_4^{-1}(P, k_2, k'), \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} G_{6\mu\nu}(q, P, k', k) &= i \int d^4 x d^4 y d^4 y' d^4 Y d^4 Y' e^{-iky + ik'y'} e^{-iqx} e^{-iP(Y-Y')} \times \\ &\times \langle 0 | T(\bar{\psi}(Y + \frac{y}{2}) \bar{\psi}(Y - \frac{y}{2}) J_\mu(x) J_\nu(0) \psi(Y' + \frac{y'}{2}) \psi(Y' - \frac{y'}{2})) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (58)$$

Предположив конкретный вид для $\overline{G}_4$, функцию $\overline{G}_{6\mu\nu}$ можно получить в явном виде. Для нахождения же амплитуды комптоновского рассеяния на дейтроне в общем случае достаточно установить связь между $\overline{G}_{6\mu\nu}$ и разложением $G_{6\mu\nu}$ по функциям $\overline{G}_4$.

Выражая из (39) функцию G_4 , получаем следующее разложение G_4 по степеням $\overline{G}_4$:

$$\begin{aligned} G_4(P; k, k') &= S_{(2)}(P, k) \left((2\pi)^4 \delta(k - k') + \right. \\ &+ \left. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} \overline{G}_4(P; k, k_1) S_{(2)}(P, k_1) \dots \overline{G}_4(P; k_n, k') S_{(2)}(P, k') \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Разлагая также $G_{6\mu\nu}$ и подставляя это выражение в (57), получаем ряд, n -й член которого имеет вид

$$\begin{aligned} G_{6\mu\nu}^{(n)}(q, P, k, k') &= \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \times \\ &\times G_4^{(n_1)}(P, k, k_1) \overline{G}_{6\mu\nu}^{(n_2)}(q, P, k_1, k_2) G_4^{(n_3)}(P, k_2, k'). \end{aligned} \quad (60)$$

Выбрав член нулевого порядка по $\overline{G}_4$, можно сразу получить соответствующий вклад в $\overline{G}_{6\mu\nu}$:

$$\overline{G}_{6\mu\nu}^{(0)}(q, P, k, k') = S_{(2)}^{-1}(P, k) \left[G_{6\mu\nu}^{(0)a}(q, P, k) (2\pi)^4 \delta^4(k - k') + \right.$$

$$+ G_6^{(0)\mathbf{b}}{}_{\mu\nu}(q, P, k)(2\pi)^4 \delta^4(k - k' - q) \Big] S_{(2)}^{-1}(P, k'). \quad (61)$$

Таким образом, в нулевом порядке по $\overline{G}_4$ функция $\overline{G}_{6\mu\nu}$ содержит как одно-нуклонный вклад $\mathbf{a}$):

$$G_6^{(0)\mathbf{a}}{}_{\mu\nu}(q, P, k) = G_{4\mu\nu} \left(q, \frac{P}{2} + k \right) \otimes S \left(\frac{P}{2} - k \right) + \\ + G_{4\mu\nu} \left(q, \frac{P}{2} - k \right) \otimes S \left(\frac{P}{2} + k \right), \quad (62)$$

так и вклад, соответствующий рассеянию на разных нуклонах $\mathbf{b}$):

$$G_6^{(0)\mathbf{b}}{}_{\mu\nu}(q, P, k) = G_{3\mu} \left(q, \frac{P}{2} + k \right) \otimes G_{3\nu} \left(q, \frac{P}{2} - k \right) + \\ + G_{3\mu} \left(q, \frac{P}{2} - k \right) \otimes G_{3\nu} \left(q, \frac{P}{2} + k \right). \quad (63)$$

Функции Грина $G_{4\mu\nu}$ и $G_{3\mu}$ описывают комптоновское рассеяние на виртуальном нуклоне и взаимодействие виртуального фотона с нуклоном соответственно.

Вклад первого порядка для $G_{6\mu\nu}$ зависит от $\overline{G}_{6\mu\nu}^{(0)}$ и $\overline{G}_{6\mu\nu}^{(1)}$, что приводит к следующему выражению:

$$\overline{G}_{6\mu\nu}^{(1)}(q, P, k, k') = S_{(2)}^{-1}(P, k) G_6^{(1)}{}_{\mu\nu}(q, P, k, k') S_{(2)}^{-1}(P, k') - \\ - \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} \left\{ S_{(2)}^{-1}(P, k) G_4^{(1)}(P, k, k'') \overline{G}_{6\mu\nu}^{(0)}(q, P, k'', k') + \right. \\ \left. + \overline{G}_{6\mu\nu}^{(0)}(q, P, k, k'') G_4^{(1)}(P, k'', k') S_{(2)}^{-1}(P, k') \right\}, \quad (64)$$

где функция $G_6^{(1)}{}_{\mu\nu}$ выражается через функции Грина $\overline{G}_{5\mu\nu}$ и член нулевого порядка функции $G_{6\mu\nu}$:

$$G_6^{(1)}{}_{\mu\nu}(q, P, k, k') = \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'''}{(2\pi)^4} S_{(2)}(P, k) \overline{G}_{5\mu} (q, k, k'' + q) \times \\ \times \overline{G}_4(P, k'' + q, k''' + q) \overline{G}_{5\nu} (q, k''' + q, k') S_{(2)}(P, k') + \\ + \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} \left\{ G_4^{(1)}(P, k, k'') \overline{G}_{6\mu\nu}^{(0)}(q, P, k'', k') S_{(2)}(P, k') + \right. \\ \left. + S_{(2)}(P, k) \overline{G}_{6\mu\nu}^{(0)}(q, P, k, k'') G_4^{(1)}(P, k'', k') \right\}. \quad (65)$$

Функция $\overline{G}_{5\mu}$ в соответствии с выражением (32) определяется функцией Грина $G_{5\mu}$, описывающей поглощение виртуального фотона системой из двух виртуальных нуклонов.

Следуя этой процедуре, получаем $\overline{G}_{6\mu\nu}$ в любом порядке по $\overline{G}_4$. Однако общая структура выражения (56) такова, что все высшие вклады сводятся к рассмотренным уже лидирующим членам. В этом можно легко убедиться, если, воспользовавшись уравнением (49), перейти к более высокому порядку по $\overline{G}_4$ в (56).

Подставляя полученные выражения для $\overline{G}_{6\mu\nu}$ в (56) и учитывая определение (57), получаем амплитуду комптоновского рассеяния на дейтроне в общем виде:

$$T_{\mu\nu}^D(P, q) = \frac{1}{3} \sum_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \overline{\Gamma}_S^D(P, k) G_{6\mu\nu}^{(0)}(q, P, k) \Gamma_S^D(P, k) +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'''}{(2\pi)^4} \overline{\Gamma}_S^D(P, k) S^{(2)}(P, k) \overline{G}_{5\mu}(q, P, k, k') \times$$

$$\times G_4(P, k', k'') \overline{G}_{5\nu}(q, P, k'', k''') S^{(2)}(P, k''') \Gamma_S^D(P, k''').$$

На рис. 2 схематически показаны различные вклады в амплитуду комптоновского рассеяния вперед на дейтроне. Диаграммы (а) и (б) соответствуют

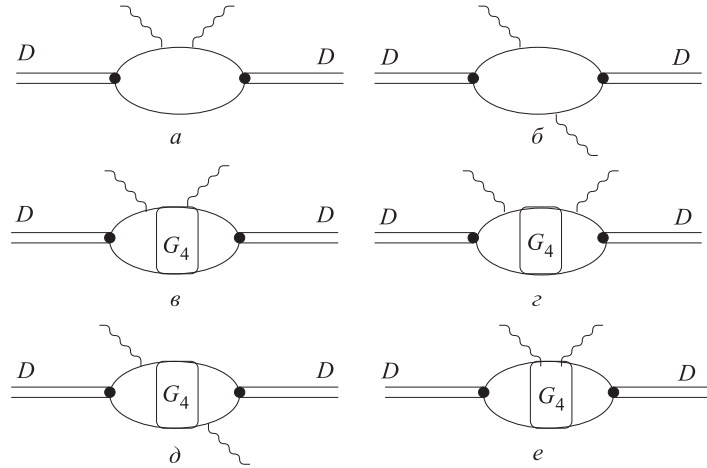


Рис. 2. Диаграммы, схематически представляющие амплитуду комптоновского рассеяния вперед

релятивистскому импульсному приближению. Явный вид выражений, представленных этими диаграммами, задается членами (а) и (б) выражения (61). Диаграмма (б) представляет двухнуклонные поправки нулевого порядка по $\overline{G}_4$ в комптоновскую амплитуду, мнимая часть которых соответствует интерференционному члену в импульсном приближении для адронного тензора. В силу большой передачи импульса фотоном нуклону вероятность того, что конечное состояние будет интерферировать с начальным состоянием нуклона-остатка, очень мала. Количественно эта вероятность определяется поведением вершинной функции при больших относительных импульсах, которое будет приводить к подавлению интерференционных членов как $1/(Q^2)^l, l \geq 2$. Таким образом, вклады в комптоновскую амплитуду, изображенные диаграммой (б), чувствительны к структуре дейтрона на малых межунонных расстояниях, которая должна проявляться в Q^2 -зависимости отношения структурных функций дейтрона и нуклона. Диаграммы (в), (г), (д) и (е) схематически изображают различные вклады в комптоновскую амплитуду, приводящие к поправкам на взаимодействие в конечном состоянии в амплитуде ГНР. Явный вид этих поправок задается первым членом в выражении (65). Вклад этих поправок значительно подавлен из-за нуклонных пропагаторов, зависящих от q . В целом все эти поправки убывают с ростом Q^2 не медленнее, чем $1/Q^4$.

Итак, в бьеркеневском пределе необходимо учитывать только однонононный вклад от релятивистского импульсного приближения. Использование бьеркеневского предела оправдано, поскольку в рассматриваемой кинематической области отношение СФ ядра и дейтрона не зависит от Q^2 [55].

4.2. Адронный тензор дейтрона. Рассмотрим адронный тензор дейтрона в импульсном приближении. Подставив выражение (61) в (56) и отбросив $1/Q^2$ -члены, запишем амплитуду неполяризованного комптоновского рассеяния на дейтроне в виде

$$T_{\mu\nu}^D(P, q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \overline{\Gamma}_S^D(P, k) S\left(\frac{P}{2} - k\right) \times \\ \times \left(S\left(\frac{P}{2} + k\right) \overline{G}_{4\mu\nu}\left(q, \frac{P}{2} + k\right) S\left(\frac{P}{2} + k\right) \right) \Gamma_S^D(P, k). \quad (66)$$

Для нуклонного пропагатора в общем случае может быть применено следующее представление через дираковские спиноры:

$$S^{ss'}(p) = \frac{m}{\tilde{E}} \frac{u^s(\mathbf{p}) \bar{u}^{s'}(\mathbf{p})}{(p_0 - \tilde{E} + i\delta)} - \frac{m}{\tilde{E}} \frac{v^s(\mathbf{p}) \bar{v}^{s'}(\mathbf{p})}{(p_0 + \tilde{E} - i\delta)}. \quad (67)$$

Здесь $\tilde{E} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + (\hat{p} + m)\overline{G}_2(p)}$ — энергия нуклона, переходящая в энергию нуклона на массовой поверхности ($E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$) при $p^2 = m^2$, а

индексы s обозначает проекцию спина нуклона на выделенную ось. В рамках нашего основного приближения малой относительной энергии нуклонов в дейтроне вкладом $\overline{G}_2(p)$ можно пренебречь.

Функция Грина $\overline{G}_{4\mu\nu}$ непосредственно связана с амплитудой комптоновского рассеяния на нуклоне

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\tilde{N}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) &= 2m \sum_s \bar{u}^s\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{k}\right) \overline{G}_{4\mu\nu}\left(q, \frac{P}{2} + k\right) u^s\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{k}\right), \\ T_{\mu\nu}^{\bar{\tilde{N}}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) &= 2m \sum_s \bar{v}^s\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{k}\right) \overline{G}_{4\mu\nu}\left(q, \frac{P}{2} + k\right) v^s\left(\frac{\mathbf{P}}{2} + \mathbf{k}\right), \end{aligned} \quad (68)$$

где $\tilde{N}(\bar{\tilde{N}})$ обозначает связанный нуклон (антинуклон). Воспользовавшись представлением (67) и выражениями (68), а также учитывая азимутальную симметрию вершинной функции Бете—Солпитера, перепишем амплитуду комптоновского рассеяния в терминах нуклонных и антинуклонных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_{s,s'} \tilde{T}_{\mu\nu}^{\tilde{N},s,s'}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) f^{s,s';S}(P, k) &= T_{\mu\nu}^{\tilde{N}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) f^{\tilde{N}}(P, k), \quad (69) \\ f^{\tilde{N}}(P, k) &= \frac{1}{3} \sum_{s,S} f^{ss;S}(P, k). \end{aligned}$$

Это приводит к аналогу конволюционной формулы для комптоновской амплитуды:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^D(P, q) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T_{\mu\nu}^{\tilde{N}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) f^{\tilde{N}}(P, k) + \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T_{\mu\nu}^{\bar{\tilde{N}}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) f^{\bar{\tilde{N}}}(P, k). \end{aligned}$$

Полная усеченная нуклонная амплитуда комптоновского рассеяния $\overline{G}_{4\mu\nu}(q, \frac{P}{2} + k)$ имеет сингулярности, связанные с непрерывным спектром в промежуточном состоянии. Таким образом, при больших Q^2 амплитуда связанного нуклона (антинуклона) $T_{\mu\nu}^{\tilde{N}(\bar{\tilde{N})}}(\frac{P}{2} + k, q)$ может быть связана с адронным тензором нуклона в соответствии с соотношением унитарности (5). В результате получаем конволюционную формулу для адронного тензора:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^D(P, q) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) f^{\tilde{N}}(P, k) + \quad (70) \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} W_{\mu\nu}^{\bar{\tilde{N}}}\left(\frac{P}{2} + k, q\right) f^{\bar{\tilde{N}}}(P, k), \end{aligned}$$

где функции распределения имеют следующий вид:

$$f^{\bar{N}}(P, k) = \frac{im^2}{2E^3} \frac{1}{\left(\frac{M_D}{2} + k_0 - E + i\delta\right)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\Phi_{++}^2(P, k)}{-k_0 - \left(E - \frac{M_D}{2}\right) + i\delta} + \frac{\Phi_{+-}^2(P, k)}{-k_0 + \left(E + \frac{M_D}{2}\right) - i\delta} \right],$$

$$f^{\bar{N}}(P, k) = \frac{im^2}{2E^3} \frac{1}{\left(\frac{M_D}{2} + k_0 + E - i\delta\right)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\Phi_{--}^2(P, k)}{-k_0 + \left(E + \frac{M_D}{2}\right) - i\delta} + \frac{\Phi_{-+}^2(P, k)}{-k_0 - \left(E - \frac{M_D}{2}\right) + i\delta} \right].$$

Функции Φ связаны с вершинными функциями Бете—Солпитера следующими соотношениями:

$$\Phi_{++}^2(M_D, k) =$$

$$= \sum_S \bar{\Gamma}_{S, \alpha\beta}^D(M_D, k) \sum_s u_\alpha^s(\mathbf{k}) \bar{u}_\delta^s(\mathbf{k}) \sum_s u_\beta^s(-\mathbf{k}) \bar{u}_\gamma^s(-\mathbf{k}) \Gamma_{S, \delta\gamma}^D(M_D, k),$$

$$\Phi_{+-}^2(M_D, k) =$$

$$= - \sum_S \bar{\Gamma}_{S, \alpha\beta}^D(M_D, k) \sum_s u_\alpha^s(\mathbf{k}) \bar{u}_\delta^s(\mathbf{k}) \sum_s v_\beta^s(\mathbf{k}) \bar{v}_\gamma^s(\mathbf{k}) \Gamma_{S, \delta\gamma}^D(M_D, k),$$

$$\Phi_{-+}^2(M_D, k) =$$

$$= - \sum_S \bar{\Gamma}_{S, \alpha\beta}^D(M_D, k) \sum_s v_\alpha^s(-\mathbf{k}) \bar{v}_\delta^s(-\mathbf{k}) \sum_s u_\beta^s(-\mathbf{k}) \bar{u}_\gamma^s(-\mathbf{k}) \Gamma_{S, \delta\gamma}^D(M_D, k),$$

$$\Phi_{--}^2(M_D, k) =$$

$$= \sum_S \bar{\Gamma}_{S, \alpha\beta}^D(M_D, k) \sum_s v_\alpha^s(-\mathbf{k}) \bar{v}_\delta^s(-\mathbf{k}) \sum_s v_\beta^s(\mathbf{k}) \bar{v}_\gamma^s(\mathbf{k}) \Gamma_{S, \delta\gamma}^D(M_D, k),$$

где греческими буквами обозначены спинорные индексы и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Таким образом, мы получили выражение, связывающее адронный тензор релятивистского дейтрона с адронными тензорами немассового нуклона и антинуклона в ядре, причем вклад нуклона и антинуклона оказывается аддитивным.

4.2.1. Структурная функция дейтрона F_2^D . Для того чтобы вычислить теперь структурную функцию дейтрона $F_2^D(x)$, необходимо выразить соответствующие адронные тензоры через скалярные структурные функции $F_2^N(x)$. Такая процедура выполняется с помощью представления (9), справедливого

только для свободных частиц. Это обстоятельство делает его неприменимым для нуклона, связанного в дейтроне. Даже если воспользоваться приближением малой энергии связи в дейтроне и пренебречь возможными дополнительными структурными функциями, то выражение (9) содержит (через структурные функции конституентов) зависимость от относительной энергии нуклонов в дейтроне, которую необходимо учесть согласованным образом.

Проблему можно преодолеть, проинтегрировав по k_0 выражение (70), учитывая при этом аналитические свойства подынтегрального выражения. Это выражение является аналитической функцией, содержащей сингулярности следующего характера: полюса и разрезы в нуклонных пропагаторах, полюса и разрезы в вершинной функции Бете—Солпитера. Сингулярности нуклонного пропагатора (67) обусловлены полюсом $p^2 = m_N^2$ и разрезами, соответствующими вкладу πN -, $2\pi N$ -, ... состояний в физическом нуклоне. Поскольку состояния πN , $2\pi N$, ... лежат достаточно далеко по энергии от полюса $p^2 = m_N^2$, то, предположив малую относительную энергию нуклонов в дейтроне, можно пренебречь разрезами в нуклонных пропагаторах.

Сингулярности вершинной функции Бете—Солпитера могут быть зафиксированы с помощью соотношения между этими вершинами и двухнуклонной функцией Грина (24):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^D(P, k) \bar{\Gamma}_{\delta\gamma}^D(P, k') = \lim_{P^2 \rightarrow M_D^2} (P^2 - M_D^2) G_{4\alpha\beta\delta\gamma}(P, k, k').$$

Таким образом, вершинная функция Бете—Солпитера для дейтрона имеет те же сингулярности по относительному импульсу, что и двухнуклонная функция Грина. Поскольку ближайшая по энергии сингулярность в этой функции определяется разрезом, начинающимся с $k^2 = m_\pi^2$, то, следуя нашим исходным предположениям, сингулярностями в $\Gamma(P, k)$ при интегрировании (70) по k_0 можно пренебречь. Это дает возможность аппроксимировать интеграл по k_0 в (70) вычетами в нуклонном и антинуклонном полюсах соответствующих пропагаторов. В результате получаем следующее выражение для адронного тензора:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^D(M_D, q) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2E^3(M_D - 2E)^2} \left\{ \Phi_{++}^2(M_D, k) W_{\mu\nu}^N(\mathbf{k}, q) + \right. \\ & + (M_D - 2E) \frac{\partial}{\partial k_0} (W_{\mu\nu}^N(k, q) \Phi_{++}^2(M_D, k))_{k_0=k_0^N} + \\ & + \frac{(M_D - 2E)^2}{M_D^2} \left[\Phi_{+-}^2(M_D, k) W_{\mu\nu}^N(\mathbf{k}, q) + \Phi_{-+}^2(M_D, k) W_{\mu\nu}^{\bar{N}}(\mathbf{k}, q) + \right. \\ & \left. \left. + M_D \frac{\partial}{\partial k_0} (W_{\mu\nu}^N(k, q) \Phi_{+-}^2(M_D, k))_{k_0=k_0^N} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M_D \frac{\partial}{\partial k_0} \left(W_{\mu\nu}^{\bar{N}}(k, q) \Phi_{-+}^2(M_D, k) \right)_{k_0=k_0^{\bar{N}}} + \\
& + \frac{M_D^2}{(M_D + 2E)} \frac{\partial}{\partial k_0} \left(W_{\mu\nu}^{\bar{N}}(k, q) \Phi_{--}^2(M_D, k) \right)_{k_0=k_0^{\bar{N}}} + \\
& + \frac{M_D^2}{(M_D + 2E)^2} \Phi_{--}^2(M_D, k) W_{\mu\nu}^{\bar{N}}(k, q) \Big] \Big\}, \quad (71)
\end{aligned}$$

где $k_0^N = E - M_D/2$ и $k_0^{\bar{N}} = -E - M_D/2$. Можно заметить, что полученное выражение по форме совпадает с разложением по степеням дефекта масс $(M_D - 2E)/M_D$ нуклона в дейтроне. Первый результат, который следует из этого, состоит в том, что все вклады, ассоциированные с антинуклонами, пропорциональны второй степени дефекта масс. Поскольку эта величина для дейтрона очень мала $((M_D - 2E)/M_D \approx 0,01)$, можно заключить, что вклад антинуклонов в адронный тензор дейтрона существенно подавлен.

Основным результатом проделанных выкладок является выражение, связывающее адронный тензор дейтрона с адронными тензорами нуклонов на массовой поверхности и их производными вблизи массовой поверхности. Теперь мы можем воспользоваться соотношением (9) и получить F_2^D с помощью некоторого проекционного оператора:

$$W_j^{\tilde{N}}(q, k_i) = P_j^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}(k_i \cdot q, q^2, k_i^2).$$

В бьеркеневском пределе в качестве такого оператора может быть использован метрический тензор $g_{\mu\nu}$:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{N(A)}(P, q) = -\frac{1}{x} F_2^{N(A)}(x).$$

Этот оператор не зависит от относительного импульса, поэтому производная адронного тензора имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \frac{d}{dk_{i0}} W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}(k_i, q) &= \frac{d}{d(k_i \cdot q)} W^{\tilde{N}}(k_i \cdot q, q^2, k_i^2) \frac{d(k_i \cdot q)}{dk_{i0}} + \\
&+ 2k_{i0} \frac{d}{dk_i^2} W^{\tilde{N}}(k_i \cdot q, q^2, k_i^2), \\
W^{\tilde{N}}(k_i \cdot q, q^2, k_i^2) &= g^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}(k_i, q). \quad (72)
\end{aligned}$$

Первый член производной адронного тензора отражает модификацию структурных свойств связанного нуклона, которая определяется x -зависимостью его структурных функций. Второй член отражает изменения в адронном тензоре нуклона, связанные с изменением энергии нуклона. Поскольку второй член пропорционален k_{i0} , среднее значение которой мало $(\langle k_0 \rangle \simeq \langle M_D - 2E \rangle)$, то

он может быть отброшен как поправка второй степени по $(M_D - 2E)/M_D$. Это обстоятельство позволяет пренебречь зависимостью $W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}$ от k_i^2 :

$$\frac{d}{dk_0} \lim_{Q^2 \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}(P, q)|_{k_0=k_0^N} = \left[\frac{1}{x^2} F_2^N(x) - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} F_2^N(x) \right] \left(\frac{dx}{dk_0} \right)_{k_0=k_0^N}. \quad (73)$$

Пренебрегая членами порядка $(M_D - 2E)^2$, запишем структурную функцию дейтрона в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_2^D(x_D) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{4E^3(M_D - 2E)^2} \left\{ F_2^N(x_N) \left(\frac{E - k_3}{M_D} + \frac{M_D - 2E}{2M_D} \right) \times \right. \\ & \times \Phi_{++}^2(M_D, k) - \frac{M_D - 2E}{M_D} x_N \frac{dF_2^N(x_N)}{dx_N} \Phi_{++}^2(M_D, k) + \\ & \left. + F_2^N(x_N) \frac{E - k_3}{M_D} (M_D - 2E) \frac{\partial}{\partial k_0} \Phi_{++}^2(M_D, k) \right\}_{k_0=E-M_D/2}. \quad (74) \end{aligned}$$

Следует отметить, что в соответствии с выражением (71) нет необходимости пренебрегать дополнительными структурными функциями в представлении для $W_{\mu\nu}^{\tilde{N}}$. Единственное допущение, которое приходится делать при использовании представления (9) для нуклонных амплитуд, — это малость производных немассовых структурных функций вблизи массовой поверхности.

Функция распределения в полученном выражении для СФ дейтрона, в силу условия нормировки для вершинной функции Бете—Солпитера (53), удовлетворяет импульсному правилу сумм

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2 E}{4E^3(M_D - 2E)^2} \left\{ \left(\frac{E}{M_D} + \frac{M_D - 2E}{2M_D} \right) \Phi_{++}^2(M_D, k) + \right. \\ & \left. + \frac{M_D - 2E}{M_D} \frac{\partial}{\partial k_0} \Phi_{++}^2(M_D, k) \right\}_{k_0=k_0^N} = \frac{M_D}{2} \quad (75) \end{aligned}$$

и барионному правилу сумм

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{4E^2 M_D (M_D - 2E)^2} \times \\ & \times \left\{ \Phi_{++}^2(M_D, k) + \frac{M_D - 2E}{M_D} \frac{\partial}{\partial k_0} \Phi_{++}^2(M_D, k) \right\}_{k_0=k_0^N} = 1. \end{aligned}$$

Можно предложить физическую интерпретацию для различных вкладов в выражении (74). Так, например, первый член этого выражения соответствует вкладу рассеяния на нуклоне на массовой поверхности (аналог нерелятивистского импульсного приближения). Второй член пропорционален

дефекту массы и, поскольку его можно отнести к однонуклонным вкладам (на массовой поверхности), целесообразно интерпретировать этот член как вклад эффектов ядерной связи. Последний член не может быть отнесен к однонуклонным вкладам, поскольку он зависит от динамики относительного движения нуклонов. По этой причине его следует интерпретировать как релятивистский двухнуклонный эффект. Более прозрачная физическая интерпретация возможна при переходе к нерелятивистскому пределу. В этом случае можно провести сравнение с аналитическими выражениями, полученными в рамках других нерелятивистских теоретико-полевых подходов.

4.2.2. Нерелятивистский предел. Разложим энергию связанного нуклона в (74) по степеням $\mathbf{p}^2/m^2$ и отбросим релятивистские двухнуклонные поправки. Это приводит к следующему выражению для структурной функции дейтрона:

$$F_2^D(x_D) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ F_2^N(x_N) \left(1 - \frac{k_3}{m} \right) \Psi^2(\mathbf{k}) - \frac{-T + \epsilon}{2m} x_N \frac{dF_2^N(x_N)}{dx_N} \Psi^2(\mathbf{k}) \right\}, \quad (76)$$

где $T = 2E - 2m$ — кинетическая энергия нуклонов, а $\epsilon = M_D - 2m$ — энергия связи.

В этом выражении мы ввели аналог нерелятивистской волновой функции $\Psi^2(\mathbf{k})$, связанной с $\Phi_{++}^2(M_D, k)$ следующим соотношением:

$$\Psi^2(\mathbf{k}) = \frac{m^2}{4E^2 M_D (M_D - 2E)^2} \{ \Phi_{++}^2(M_D, k) \}_{k_0 = E - M_D/2}.$$

При этом условие нормировки для $\Psi^2(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Psi^2(\mathbf{k}) = 1.$$

Сравним выражение (76) с результатами расчетов в квазипотенциальном подходе [90]:

$$F_2^D(x_D) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F_2^N(x_N) \left(1 - \frac{k_3}{m} \right) \Psi^2(\mathbf{k}) - \frac{-\langle T \rangle + \epsilon}{2m} x_D \frac{dF_2^N(x_D)}{dx_D}. \quad (77)$$

Здесь $\Psi(\mathbf{k})$ — решение квазипотенциального уравнения с одновременными нуклонами.

Очевидно, что выражения (77) и (76) имеют практически одинаковую структуру. Причем в квазипотенциальном расчете член с производной от структурной функции возник вследствие учета мезонных поправок, ассоциированных с нуклонным потенциалом. Именно этот вклад обеспечивает отклонение от единицы отношения структурных функций дейтрона и нуклона в области $0,3 < x < 0,6$.

Полученный результат свидетельствует о том, что приведенная выше интерпретация первых двух вкладов в выражении (74) находится в разумном согласии с представлениями нерелятивистской теории.

На рис. 3 приводится сравнение результатов расчета в квазипотенциальном подходе (выражение (77) (пунктир) и подходе, рассмотренном выше (76) (сплошная кривая). Результат учета только первого члена в этих выражениях (нерелятивистское импульсное приближение) представлен штрихпунктирной кривой. Из сравнения поведения этих кривых видно, что баланс между первым и вторым членом в выражении (76) приводит к небольшому уменьшению отношения F_2^D/F_2^N по сравнению с единицей в той же области по x , в которой был обнаружен ЕМС-эффект на тяжелых ядрах. Эффект отличия отношения F_2^D/F_2^N от единицы несколько меньше в релятивистском случае за счет более полного учета ферми-движения. Для численных расчетов использовалась параметризация нуклонных СФ из работы [89]. Расчет с более современными параметризациями СФ протона [86], представленный на рис.4, дает дополнительное подавление в области малых x , которое связано с быстрым ростом нуклонной СФ в этой области.

Итак, формализм Бете—Солпитера позволяет выразить структурную функцию дейтрона в терминах СФ составляющих его протона и нейтрона. При этом вклад антинуклонов оказался подавлен как вторая степень дефекта масс. В то же время учет зависимости от относительного времени в амплитудах ГНР на связанных нуклонах приводит к модификации структуры нуклона, напоминающей ЕМС-эффект в тяжелых ядрах. Это дает основание для выдвижения гипотезы о том, что природа ЕМС-эффекта может быть объяснена эволюцией немассовой деформации связанного нуклона от $A = 2$ до тех значений A , при которых наступает насыщение эффектов связи в структуре нуклона.*

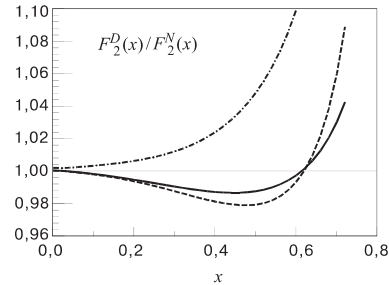


Рис. 3. Отношение СФ $F_2^D(x)/F_2^N(x)$. Параметризация $F_2^N(x)$ взята из работы [89]. Сплошная кривая — релятивистский расчет [90], пунктир — расчет в квазипотенциальном подходе [91], штрихпунктир — нерелятивистское импульсное приближение (первый член в (76) и (77))

*Представляется целесообразным исследовать характер немассовой деформации с помощью анализа спиновой структуры связанного нуклона.

Сравнение полученных выражений с квазипотенциальными расчетами показывает, что эффекты связи, ассоциированные в таких подходах с мезонными поправками, в формализме Бете—Солпитера могут быть воспроизведены в релятивистском импульсном приближении. Таким образом, мезонные поправки квазипотенциальных подходов можно рассматривать как параметризацию эффектов немассовости, наиболее существенным из которых является неодновременность нуклонов в ядре.

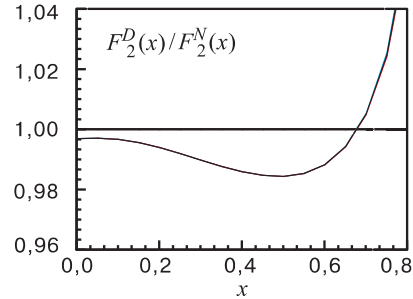


Рис. 4. Отношение СФ $F_2^D(x)/F_2^N(x)$. Параметризация $F_2^N(x)$ взята из работы [86]

5. СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕГКИХ ЯДЕР

Развитый выше подход целесообразно применить для рассмотрения эволюции нуклонной структуры как функции атомного числа A для легчайших ядер D , 3H , 3He и 4He .

Строго говоря, ЭМС-эффект, интерпретируемый большинством авторов как уменьшение величины СФ *свободного нуклона* в ядре железа в области $0,3 < x < 0,7$, скорее отражает различия в структуре ядер *дейтерия* и гелия. Действительно, если ограничиться областью $10^{-3} < x < 0,7$, нетрудно убедиться, что форма отношения $r(x) = F_2^{4He}/F_2^D$ повторяется в более тяжелых ядрах. Универсальность x -зависимости модификации структуры нуклона в ядрах с массой $A \geq 4$ установлена в работах [28, 29], в которых проведен анализ мировых данных по глубоконеупругому рассеянию электронов и мюонов на ядрах. Очевидно, что этот результат свидетельствует о явлении насыщения уже в ядре гелия модификации структурной функции $F_2(x)$, проявляющейся в виде некоторой осцилляции величины $r^A(x)$ относительно оси $r^A(x) = 1$. Эволюция модификаций от $A = 4$ до $A \sim 200$ проявляется как рост амплитуды осцилляций $a_{EMC} = 1 - r_{min}^A$ на фактор ~ 3 и хорошо описывается как эффект эволюции ядерной плотности.

Наиболее наглядно прекращение модификации $F_2(x)$ при $A > 4$ демонстрируется неизменностью формы $r^A(x)$, зафиксированной положением трех точек $x_1 = 0,0615$, $x_2 = 0,287$ и $x_3 = 0,84$, в которых $r^A(x) = 1$ независимо от A [30]. Данные, включенные в анализ [30], относятся к последнему поколению экспериментальных работ по измерению $r^A(x)$, а также эффекта модификации структурных функций $F_2^A(x)$ по отношению к структурной функции $F_2^C(x)$, измеренной на углеродной мишени [91]. Результаты измерений характеризуются как высокой статистической точностью, так и большой надежностью, что позволяет гораздо определеннее высказаться о степени

их несогласия с моделями ЕМС-эффекта. Ключевым моментом для понимания причин такого плохого описания является наличие двух эффектов, а не одного, как было принято считать. Первый состоит в перестройке партонных распределений нуклона в поле ядерных сил, образованном двух-, трех- и четырехнуклонной связанной системой. Второй эффект проявляется в сохранении формы модификации партонных распределений в тяжелых ядрах в неизменном виде. С нашей точки зрения, оба эффекта имеют фундаментальное значение для структуры нуклона, а их понимание невозможно без теоретических и экспериментальных исследований следующей цепочки модификаций: $r^D(x) \rightarrow r^{A=3}(x) \rightarrow r^{A=4}(x)$.

Особенность области легчайших ядер состоит в том, что точность измерений для $A = 4$ невысока при $x > 0,7$, а для $A < 4$ данных о модификации структуры нуклона нет вовсе. В то же самое время, неизменность формы отношений $r^A(x)$ для $A > 4$ оставляет нам только две возможности для объяснения этого явления: модификация партонных распределений в тяжелых ядрах идентична либо модификации при $A = 3$, либо при $A = 4$. Как показано в [30], неопределенность в положении точки x_3 , найденной из данных при $A > 4$, составляет 0,01, что позволяет использовать ее для выбора в пользу одного или другого варианта эволюции. Уже сейчас имеются основания считать, что партонные распределения для $A = 4$ имеют x -зависимость, существенно отличающуюся от зависимости, характерной для тяжелых ядер. Это утверждение следует из очевидного несовпадения координат x_3 , полученных аппроксимацией данных для ядер ${}^4\text{He}$ и Fe , показанных на рис. 5.

Ниже мы рассмотрим вывод относительных изменений СФ $F_2^A(x)$ по отношению к СФ изоскалярного нуклона $F_2^N(x) = \frac{1}{2}(F_2^p(x) + F_2^n(x))$, где p и n обозначают свободный протон и свободный нейтрон. С другой стороны, сравнение с экспериментальными данными может быть осуществлено только для отношений структурных функций

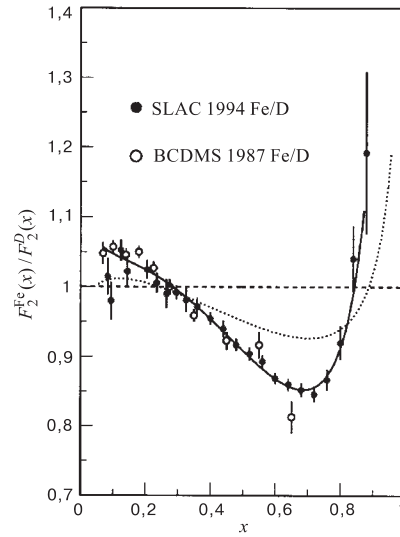


Рис. 5. Отношение структурной функции ядра $F_2^A(x)$ к структурной функции дейтрона $F_2^D(x)$. Данные для железа взяты из работ [55] (черные кружки) и [92] (светлые кружки). Также представлена аппроксимация этих данных в виде сплошной линии. Результаты измерения для ${}^4\text{He}/D$, полученные в [55], показаны в виде параметризации (пунктирная линия)

ядра A и дейтрона. Этим объясняется необходимость представления результатов расчетов как в виде отношений A/N , так и в виде A/D . Поскольку при рассматриваемых значениях x ($0,3 < x < 0,9$) эксперименты (см. [55] и обзоры [8, 9]) свидетельствуют о независимости $r^A(x)$ от переданного 4-импульса Q^2 , расчеты будут выполнены в бьеркеновском пределе.

5.1. Обобщение формализма для легких ядер. Рассмотрим обобщение развитого в разд. 4 подхода для анализа ГНР на легких ядрах $A = 3, 4$.

Амплитуда комптоновского рассеяния вперед $T_{\mu\nu}^A$ определена как среднее по ядерным состояниям $|A\rangle$ от Т-произведения электромагнитных токов:

$$T_{\mu\nu}^A(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle A | T (J_\mu(x) J_\nu(0)) | A \rangle. \quad (78)$$

В соответствии с выражением (33) $T_{\mu\nu}^A(P, q)$ может быть переписана в терминах решений уравнения Бете—Солпитера для ядра $\Gamma^A(P, k)$ и n -нуклонных функций Грина $\overline{G}_{2(n+1)\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^A(P, q) = & \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_{n-1}}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k'_{n-1}}{(2\pi)^4} \overline{\Gamma}^A(P, k_1 \dots k_{n-1}) \times \\ & \times S_{(n)}(P, k_1 \dots k_{n-1}) \overline{G}_{2(n+1)\mu\nu}(q; P, k_1 \dots k_{n-1}, k'_1 \dots k'_{n-1}) \times \\ & \times S_{(n)}(P, k'_1 \dots k'_{n-1}) \Gamma^A(P, k'_1 \dots k'_{n-1}), \end{aligned} \quad (79)$$

где k_i — относительные импульсы нуклонов в ядре, а P — полный импульс ядра. Функция $\overline{G}_{2n}$ — усеченная неприводимая n -нуклонная функция Грина, определенная с помощью уравнения (40).

Аналогично двухнуклонному случаю можно показать, что вклад всех неприводимых поправок на взаимодействие подавлен как дополнительная степень $1/(Q^2)^l$, $l \geq 2$ [42]. Это позволяет ограничиться учетом только члена нулевого порядка по $\overline{G}_{2(n+1)\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^A(P, q) = & \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_{n-1}}{(2\pi)^4} \overline{\Gamma}^A(P, k_1 \dots k_{n-1}) S_{2n}(P, k_1 \dots k_{n-1}) \times \\ & \times \overline{G}_{2(n+1)\mu\nu}^{(0)}(q; P, k_1 \dots k_{n-1}) S_{2n}(P, k_1 \dots k_{n-1}) \Gamma^A(P, k_1 \dots k_{n-1}), \end{aligned} \quad (80)$$

где функция Грина $\overline{G}_{2(n+1)\mu\nu}^{(0)}$ определена через усеченную амплитуду комптоновского рассеяния на нуклоне $\overline{G}_{4\mu\nu}(q, k_i)$:

$$\begin{aligned} \overline{G}_{2(n+1)\mu\nu}^{(0)}(q, P, k_1 \dots k_{n-1}) = \\ = \sum_i G_{4\mu\nu}(q, k_i) \otimes S_{(n-1)}^{-1}(k_1, \dots k_{i-1}, k_{i+1}, \dots k_{n-1}). \end{aligned} \quad (81)$$

Подставляя это выражение в уравнение (80), получаем амплитуду комптоновского рассеяния на ядре в терминах нуклонных амплитуд:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^A(P, q) &= \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_{n-1}}{(2\pi)^4} \bar{\Gamma}^A(P, k_1 \dots k_{n-1}) \times \\ &\times \sum_i (S(P, k_i) G_{4\mu\nu}(q; P, k_i) S(P, k_i)) \otimes \\ &\otimes S_{2n-1}(P, k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{n-1}) \Gamma^A(P, k_1 \dots k_{n-1}). \end{aligned} \quad (82)$$

В принципе, дальнейшие выкладки можно было бы провести по полной аналогии с процедурой, развитой для дейтрона, а именно выделить амплитуду комптоновского рассеяния на нуклоне и проинтегрировать по нулевой компоненте относительного импульса соответствующего нуклона. Однако в отличие от двухнуклонного случая вершинная функция в уравнении (82) содержит полюса нуклон-нуклонных связанных состояний, лежащие в области малых относительных импульсов. Имея точное решение уравнения (49), можно было бы учесть эти сингулярности и выразить комптоновскую амплитуду ядра через нуклонную. Реализация такого подхода невозможна в настоящее время, поскольку решение уравнения (49) при $n \geq 3$ не найдено.

Воспользуемся другим способом выделить эти сингулярности, а именно введем «затравочную» вершину Бете—Солпитера $\mathcal{G}^A$, которая регулярна по относительному импульсу:

$$\begin{aligned} \Gamma^A(P, k_1, \dots, k_{n-1}) &= - \int \frac{d^4 k'_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k'_{n-1}}{(2\pi)^4} g_{2n}(P, k_1, \dots, k_{n-1}; k'_1, \dots, k'_{n-1}) \times \\ &\times \mathcal{G}^A(P, k'_1, \dots, k'_{n-1}). \end{aligned}$$

Все сингулярности, присущие вершине $\Gamma^A(P, k_1, \dots, k_{n-1})$, определяются теперь аналитическими свойствами регулярной полного импульсу при $P^2 = M_A^2$ части n -нуклонной функции Грина:

$$\begin{aligned} g_{2n}(P, k_1, \dots, k_{n-1}; k'_1, \dots, k'_{n-1}) &= \\ &= \sum_{m=2}^n G_{2m}(P, k_1, \dots, k_{m-1}; k'_1, \dots, k'_{m-1}) \otimes \\ &\otimes S_{(n-m)}(P, k_1, \dots, k_{m-n-1}; k'_1, \dots, k'_{m-n-1}). \end{aligned}$$

Например, в случае ${}^3\text{He}$ мы имеем полюс в G_4 , связанный с дейтроном, и нуклон-нуклонный непрерывный спектр g_4 :

$$G_4\left(\frac{2P}{3} + k, k_1, k'_1\right) =$$

$$= \frac{\Gamma^D(\frac{2P}{3} + k, k_1) \bar{\Gamma}^D(\frac{2P}{3} + k, k'_1)}{(\frac{2P}{3} + k)^2 - M_D^2} + g_4 \left(\frac{2P}{3} + k, k_1, k'_1 \right). \quad (83)$$

Для ${}^4\text{He}$ имеются дополнительные полюсы, связанные с ${}^3\text{He}$ - и ${}^3\text{H}$ -полюсами. Например, для нейтрон-протон-протонной функции Грина имеется ${}^3\text{He}$ -полюс и трехнуклонный непрерывный спектр g_6 :

$$G_6 \left(\frac{3P}{4} + k, k_1, k'_1, k_2, k'_2 \right) = \frac{\Gamma^{3\text{He}}(\frac{3P}{4} + k, k_1, k_2) \bar{\Gamma}^{3\text{He}}(\frac{3P}{4} + k, k'_1, k'_2)}{(\frac{3P}{4} + k)^2 - M_{3\text{He}}^2} + g_6 \left(\frac{3P}{4} + k, k_1, k'_1, k_2, k'_2 \right).$$

Подставляя (83) в выражение (82), получаем, например, для ${}^3\text{He}$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{3\text{He}}(P, q) = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, K, k) \left[\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \times \right. \\ & \times G_4 \left(\frac{2P}{3} + K, k, k_1 \right) S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) \overline{G}_{4\mu\nu} \left(q; \frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) \times \\ & \times S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) \otimes S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1 \right) G_4 \left(\frac{2P}{3} + K, k_1, k' \right) \Big] \otimes \\ & \otimes S \left(\frac{P}{3} - K \right) \mathcal{G}^{3\text{He}}(P, K, k') + \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, K, k) \times \\ & \times \left[\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} G_4 \left(\frac{2P}{3} + K, k, k_1 \right) S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) \otimes S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1 \right) \times \right. \\ & \times G_4 \left(\frac{2P}{3} + K, k_1, k' \right) \Big] \otimes S \left(\frac{P}{3} - K \right) \overline{G}_{4\mu\nu} \left(q; \frac{P}{3} - K \right) \times \\ & \times S \left(\frac{P}{3} - K \right) \mathcal{G}^{3\text{He}}(P, K, k'), \end{aligned}$$

и, учитывая аналитические свойства трехнуклонной функции Грина (83), получаем

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{3\text{He}}(P, q) = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, K, k) \times \\ & \times \left[\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma^D(\frac{2P}{3} + K, k) \bar{\Gamma}^D(\frac{2P}{3} + K, k_1)}{(\frac{2P}{3} + K)^2 - M_D^2} S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) \times \right. \\ & \times \overline{G}_{4\mu\nu} \left(q; \frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1 \right) \otimes S \left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1 \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\Gamma^D(\frac{2P}{3} + K, k_1) \bar{\Gamma}^D(\frac{2P}{3} + K, k')}{(\frac{2P}{3} + K)^2 - M_D^2} \Big] \otimes S\left(\frac{P}{3} - K\right) \mathcal{G}^{3\text{He}}(P, K, k') + \\
& + \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, K, k) \left[\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} G_4\left(\frac{2P}{3} + K, k, k_1\right) S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1\right) \otimes \right. \\
& \otimes S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1\right) \times G_4\left(\frac{2P}{3} + K, k_1, k'\right) \Big] \otimes \frac{u\left(\frac{\mathbf{P}}{3} - \mathbf{K}\right) \bar{u}\left(\frac{\mathbf{P}}{3} - \mathbf{K}\right)}{\left(\frac{P}{3} - K\right)^2 - m^2} \times \\
& \times \bar{G}_{4\mu\nu}\left(q; \frac{P}{3} - K\right) \frac{u\left(\frac{\mathbf{P}}{3} - \mathbf{K}\right) \bar{u}\left(\frac{\mathbf{P}}{3} - \mathbf{K}\right)}{\left(\frac{P}{3} - K\right)^2 - m^2} \mathcal{G}^{3\text{He}}(P, K, k'). \quad (84)
\end{aligned}$$

Возвращаясь к выражению для амплитуды комптоновского рассеяния на дейтроне (79), замечаем, что конструкция

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \bar{\Gamma}^D\left(\frac{2P}{3} + K, k_1\right) S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1\right) \bar{G}_{4\mu\nu}\left(q; \frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1\right) \times \\
& \times S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1\right) \otimes S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1\right) \Gamma^D\left(\frac{2P}{3} + K, k_1\right), \quad (85)
\end{aligned}$$

содержащаяся в первом члене выражения (84), в точности совпадает с этой амплитудой, но содержит аргумент вне массовой поверхности. Во втором члене выражения (84) можно выделить амплитуду комптоновского рассеяния на нуклоне:

$$T_{\mu\nu}^{\bar{N}}\left(\frac{P}{3} - K, q\right) = \bar{u}\left(\frac{\mathbf{P}}{3} - \mathbf{K}\right) \bar{G}_{4\mu\nu}\left(q; \frac{P}{3} - K\right) u\left(\frac{\mathbf{P}}{3} - \mathbf{K}\right). \quad (86)$$

Таким образом, амплитуда комптоновского рассеяния на ${}^3\text{He}$ выражается через амплитуды рассеяния на немассовом дейтроне и нуклоне. Воспользовавшись соотношением унитарности (5), получим соответствующее выражение для адронного тензора:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^{3\text{He}}(P, q) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} W_{\mu\nu}^D\left(\frac{2P}{3} + K, q\right) \times \\
& \times \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, K, k) \frac{\Gamma^D(\frac{2P}{3} + K, k) \bar{\Gamma}^D(\frac{2P}{3} + K, k')}{\left((\frac{2P}{3} + K)^2 - M_D^2\right)^2} \otimes S\left(\frac{P}{3} - K\right) \mathcal{G}^{3\text{He}}(P, K, k') + \\
& + \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, K, k) \left[\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} G_4\left(\frac{2P}{3} + K, k, k_1\right) S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} + k_1\right) \otimes \right. \\
& \otimes S\left(\frac{P}{3} + \frac{K}{2} - k_1\right) \times G_4\left(\frac{2P}{3} + K, k_1, k'\right) \Big] \otimes S\left(\frac{P}{3} - K\right) \times
\end{aligned}$$

$$\times \mathcal{G}^3_{\text{He}}(P, K, k') \frac{W_{\mu\nu}^N \left(\frac{P}{3} - K \right)}{\left(\frac{P}{3} - K \right)^2 - m^2}.$$

Предполагая, что относительная энергия фрагментов мала, мы можем проинтегрировать по нулевой компоненте относительного импульса фрагментов и получить адронный тензор для ${}^3\text{He}$, выраженный через адронные тензоры этих фрагментов на массовой поверхности. Аналогичным образом можно получить амплитуды рассеяния на ${}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}$.

5.2. Структурные функции ядер для $A = 3, 4$. Воспользуемся теперь полученным в п.5.1 результатом, для того чтобы рассчитать СФ ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$.

Поддействовав проекционным оператором $g_{\mu\nu}$ на адронный тензор, введем переменные

$$x_A = \frac{Q^2}{2P_A \cdot q},$$

$$x_N = \frac{Q^2}{2P_N \cdot q}$$

и выделим СФ ядра в бьеркенновском пределе:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{N(A)}(P, q) = -\frac{1}{x} F_2^{N(A)}(x).$$

Таким образом, получаем F_2^A для ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ в виде

$$F_2^{3\text{He}}(x_{3\text{He}}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_p - k_3}{E_p} F_2^p(x_p) + \frac{E_D - k_3}{E_D} F_2^D(x_D) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta_p^{3\text{He}}}{E_p} x_p \frac{dF_2^p(x_p)}{dx_p} + \frac{\Delta_D^{3\text{He}}}{E_D} x_D \frac{dF_2^D(x_D)}{dx_D} \right] \Phi_{3\text{He}}^2(\mathbf{k}), \quad (87)$$

$$F_2^{3\text{H}}(x_{3\text{H}}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_n - k_3}{E_n} F_2^n(x_n) + \frac{E_D - k_3}{E_D} F_2^D(x_D) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta_n^{3\text{H}}}{E_n} x_n \frac{dF_2^n(x_n)}{dx_n} + \frac{\Delta_D^{3\text{H}}}{E_D} x_D \frac{dF_2^D(x_D)}{dx_D} \right] \Phi_{3\text{H}}^2(\mathbf{k}) \quad (88)$$

и для ${}^4\text{He}$ в виде

$$F_2^{4\text{He}}(x_{4\text{He}}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_p - k_3}{E_p} F_2^p(x_p) + \frac{E_{3\text{H}} - k_3}{E_{3\text{H}}} F_2^{3\text{H}}(x_{3\text{H}}) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta_p^{4\text{He}}}{E_p} x_p \frac{dF_2^p(x_p)}{dx_p} + \frac{\Delta_{3\text{H}}^{4\text{He}}}{E_{3\text{H}}} x_{3\text{H}} \frac{dF_2^{3\text{H}}(x_{3\text{H}})}{dx_{3\text{H}}} + \frac{E_n - k_3}{E_n} F_2^n(x_n) + \frac{E_{3\text{He}} - k_3}{E_{3\text{He}}} \times \right.$$

$$\times F_2^{3\text{He}}(x_{3\text{He}}) + \frac{\Delta_n^{4\text{He}}}{E_n} x_n \frac{dF_2^n(x_n)}{dx_n} + \frac{\Delta_{3\text{He}}^{4\text{He}}}{E_{3\text{He}}} x_{3\text{He}} \frac{dF_2^{3\text{He}}(x_{3\text{He}})}{dx_{3\text{He}}} \Big] \Phi_{4\text{He}}^2(\mathbf{k}), \quad (89)$$

где $\Delta_N^A = -M_A + E_N + E_{A-1}$ — энергия связи соответствующего ядерного фрагмента.

Трехмерное импульсное распределение $\Phi_A^2(\mathbf{k})$ определено через «затра-
вочную» вершину Бете—Солпитера. Например, для ${}^3\text{He}$ можно записать

$$\begin{aligned} \Phi_{3\text{He}}^2(\mathbf{k}) = & \frac{mM_D}{4E_p E_D M_{3\text{He}} (M_D - E_p - E_D)^2} \left\{ \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'_1}{(2\pi)^4} \bar{\mathcal{G}}^{3\text{He}}(P, k, k_1) \times \right. \\ & \times S_2 \left(\frac{2P}{3} + k, k_1 \right) \Gamma^D \left(\frac{2P}{3} + k, k_1 \right) \bar{\Gamma}^D \left(\frac{2P}{3} + k, k'_1 \right) S_2 \left(\frac{2P}{3} + k, k'_1 \right) \otimes \\ & \left. \otimes \left(\sum_s u_\alpha^s(\mathbf{k}) \bar{u}_\delta^s(\mathbf{k}) \right) \mathcal{G}^{3\text{He}}(P, k, k'_1) \right\}_{k_0=k_{0p}}, \quad (90) \end{aligned}$$

где $k_{0p} = \frac{M_{3\text{He}}}{3} - E_p$.

Поскольку в настоящее время нет реалистичных решений уравнения Бете—Солпитера для связанной системы трех и более нуклонов, необходимо использовать феноменологическое импульсное распределение. Разумно предположить, что импульсные распределения в выражениях (87), (88) и (89) могут быть связаны с распределениями, извлеченными из экспериментальных данных. Для численных расчетов мы используем распределения, полученные в работах [93] и [94].

Полученный результат для структурных функций легчайших ядер может быть связан с результатом, полученным в x -рескейлинг-модели [10, 11]. Рассмотрим для примера структурную функцию ${}^3\text{He}$. Если взглянуть на подынтегральное выражение в (87) как на первые члены ряда разложения по энергии связи и учесть, что члены выше первого порядка по этой величине пренебрежимо малы, то можно добавить высшие члены таким образом, чтобы полученный ряд можно было свернуть. В результате находим следующее выражение для структурной функции ${}^3\text{He}$:

$$\begin{aligned} F_2^{3\text{He}}(x_{3\text{He}}) = & \int dy d\epsilon \left\{ F_2^p \left(\frac{x_{3\text{He}}}{y - \frac{\epsilon}{M_{3\text{He}}}} \right) f^{p/3\text{He}}(y, \epsilon) + \right. \\ & \left. + F_2^D \left(\frac{x_{3\text{He}}}{y - \frac{\epsilon}{M_{3\text{He}}}} \right) f^{D/3\text{He}}(y, \epsilon) \right\}, \quad (91) \end{aligned}$$

где $\epsilon = \Delta_p^{3\text{He}}$ можно интерпретировать как энергию отделения соответствующего ядерного фрагмента, а $f^{p(D)/3\text{He}}(y, \epsilon)$ — как спектральную функцию

для связанного протона (дейтрона):

$$f^{p(D)/^3\text{He}}(y, \epsilon) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi_{^3\text{He}}^2(\mathbf{k}) \frac{m}{E_{p(D)}} y \delta \left(y - \frac{E_{p(D)} - k_3}{m} \right) \times \\ \times \delta(\epsilon - (E_p + E_D - M_{^3\text{He}})).$$

Следует подчеркнуть, что как модификация F_2^N , так и ее эволюция от $A = 1$ до 4, полученные в подходе, развитом в [42–44], являются следствием релятивистского описания структуры ядра. В ходе аналитических выкладок существенно использовался тот факт, что нуклоны ведут себя в ядре как неодновременные (асинхронные) объекты. Именно эта особенность является причиной эффекта ядерной связи в $F_2^A(x)$, который появляется из-за зависимости адронного тензора связанного нуклона от τ_i . Развитый подход обладает двумя достоинствами. Во-первых, он позволяет естественным образом воспроизвести результаты нерелятивистских моделей (например, [11]), в которых релятивистские эффекты вводятся с помощью параметризаций. Во-вторых, результаты [44] легко представить наглядно при помощи сравнения с результатами x -рескейлинг-модели [11]. На самом деле, из сравнения уравнений (73) и (87) с уравнением (91) можно показать, что рескейлинг переменной Бьеркена x следует из зависимости относительного времени τ_i , содержащейся в комптоновской амплитуде немассового нуклона. Заметим, что связь массы нуклона с четырехмерным радиусом области его локализации $r^2 \sim 1/m^2$ позволяет сделать вывод о том, что зависимость от относительного времени τ_i должна приводить к увеличению области локализации нуклона. Этот вывод в некотором смысле напоминает модельное рассмотрение эффекта увеличения радиуса конфайнмента или разбухания нуклона [8].

Эффекты ядерной связи представлены в уравнениях (87) и (89) как первые производные структурных функций ядерных фрагментов. Вследствие этого входящие в выражения структурные функции $F_2^{n(p)}(x)$ определяют не только внутреннюю структуру нуклона, но также и динамику двухнуклонных взаимодействий. Аналогично, $F_2^D(x)$ отвечает за структуру двухнуклонного связанного состояния и за динамику трехнуклонных взаимодействий. Согласно уравнению (74) производная $F_2^D(x)$ может быть выражена через производные первого и второго порядка от F_2^N с соответствующими коэффициентами. Поскольку немассовая деформация структуры связанного дейтрона определяется второй производной от F_2^N , именно этот член ответствен за трехнуклонную динамику. Однако вторая производная F_2^N входит в $F_2^{^3\text{He}}$ с очень маленьким коэффициентом, $\Delta_D^{^3\text{He}} \Delta_p^D$, что позволяет пренебречь трехнуклонной динамикой при рассмотрении эффектов ядерной связи в ГНР.

Необходимая для расчетов структурная функция нуклона вводится с помощью параметризации данных, полученных в экспериментах по ГНР лептонов на протонах и дейтронах. Мы использовали параметризацию $F_2^p(x, Q^2)$,

полученную недавно в [86]. Структурная функция $F_2^N(x)$ найдена из результатов измерения $F_2^p(x)$ и отношения $F_2^N(x)/F_2^p(x)$, полученных в [85]. Дополнительные расчеты, в которых нами использовались различные параметризации, показали, что неопределенности в результатах измерения абсолютных значений $F_2^{p(n)}(x)$ подавлены при вычислении отношения $r^A(x)$.

Результаты численных расчетов, которые демонстрируют, каким образом СФ свободного нуклона $F_2^N(x)$ ($A = 1$) соотносится с дейтронной ($A = 2$) и гелиевой ($A = 3$ и 4) структурными функциями, приведены на рис.6,а. Те же самые модификации, вычисленные по отношению к $F_2^D(x)$, приведены на рис.6,б. В отличие от модификаций, наблюдающихся для тяжелых ядер с массами $A > 4$, вид осцилляций отношения $r^A(x)$ меняет свою форму при $A \leq 4$, что приводит к изменению координаты точки пересечения x_3 в направлении больших значений x .

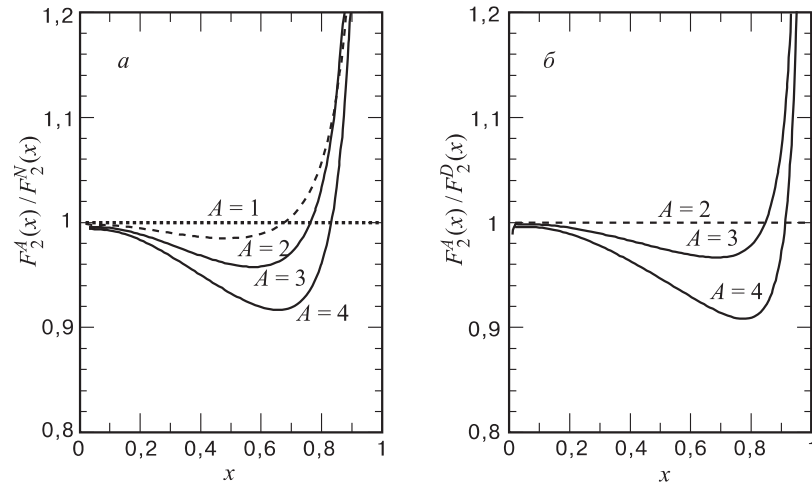


Рис. 6. а) Отношение СФ $F_2^A(x)/F_2^N(x)$. б) Отношение СФ $F_2^A(x)$ ($A=4$) и $(F_2^{3H}(x) + F_2^{3He}(x))/2$ к СФ дейтрона $F_2^D(x)$. Пунктиром на рис.а показан результат расчетов для дейтрона $A = 2$. Результаты для $A = 3, 4$ приведены сплошными кривыми

Модификации, вычисленные по отношению к $F_2^N(x)$ (рис.6,а), представляют не только академический интерес. Можно использовать их для того, чтобы показать, что искажения структуры нуклона в ядре дейтерия нельзя рассматривать как пренебрежимо малые, а соотношение $F_2^A(x)/F_2^D(x) \approx F_2^A(x)/F_2^N(x)$ нельзя считать оправданным. Действительно, как следует из результатов расчетов при $A = 3$, положение x_3 смещается на величину 0,08, если $F_2^N(x)$ заменить на $F_2^D(x)$ (рис.6,б). Это смещение в восемь раз превышает величину экспериментальной погрешности в координате x_3 , найденной

из недавнего анализа результатов измерения $F_2^A(x)/F_2^D(x)$ [30]. Согласно работе [30] $\overline{x_3} = 0,84 \pm 0,01$ независимо от A , если $A > 4$. Такая точность позволяет надежно отличить эффект модификации структуры дейтрона от модификации структуры свободного нуклона.

Интересно, что значение $(1 - x_3)$, которое составляет $\sim 0,32$ для $F_2^D(x)/F_2^N(x)$, уменьшается до $\sim 0,16$ и $\sim 0,08$ для отношений $F_2^{A=3}(x)/F_2^D(x)$ и $F_2^{4\text{He}}(x)/F_2^D(x)$ соответственно. Дальнейшая эволюция модификаций $F_2^N(x)$ в ядрах тяжелее, чем ${}^4\text{He}$, запрещена принципом Паули. Как следует из формы кривых, приведенных на рис.6,а, а также из соотношений между координатами точек пересечения x_3 , модификация структуры нуклона развивается как насыщающийся процесс, что полностью согласуется с представлением о быстром насыщении ядерных сил связи. Это явление дает возможность ввести класс x -зависимых модификаций, обусловленных эффектами ядерной связи. Внутри рассматриваемого класса не существует никаких механизмов, которые могли бы привести к дальнейшим изменениям формы $r^A(x)$, образовавшейся на первой стадии эволюции, $A \leq 4$. Эволюция модификаций к более тяжелым ядрам, где и был обнаружен эффект ЕМС, должна происходить независимо от x и рассматриваться как вторая стадия [29]. Концепция эволюции структуры нуклона, находящегося в ядерном окружении, в виде двух стадий является решающей для понимания давней проблемы ЕМС-эффекта.

Полученные результаты, в частности значения $(1 - x_3)$, могут быть использованы для введения количественной характеристики эффекта модификации структуры нуклона в зависимости от массового числа A . Так, принимая за единицу модификации величину $M = 1/(1 - x_3)$, соответствующую случаю F_2^D/F_2^N , находим, что модификации структуры нуклона в ядрах $A = 2, 3$ и 4 соотносятся как 1:2:4. С другой стороны, из анализа данных на ядрах в области $A = 9 \div 197$ получено, что x_3 не зависит от A и составляет в среднем $\overline{x_3} = 0,84 \pm 0,01$ [30]. В терминах M величина модификации в этом случае $M = 2$. Легко показать, что для случая описания СФ нуклона простейшей зависимостью $F_2 \sim (1 - x)^3$ введенная нами характеристика связана с производной F_2 и самой величиной F_2 в точке пересечения: $M \sim F_2'/F_2|_{x=x_3}$. Зависимость величины M от массового числа A , приведенная на рис.7, является удобной иллюстрацией концепции эволюции модификаций нуклона в две стадии. Ядра, для которых M надежно определена из экспериментальных данных, находятся в области $A \geq 9$ и показаны на рис. 7 с помощью заштрихованных клеток.

Поскольку экспериментальные данные для ядер $A = 2$ и 3 отсутствуют, предсказания работ [43, 44] могут быть проверены только сравнением с результатами для отношения $F_2^{4\text{He}}(x)/F_2^D(x)$, приведенными в [55, 95] и показанными на рис.8. Положение точки пересечения расчетной кривой с линией

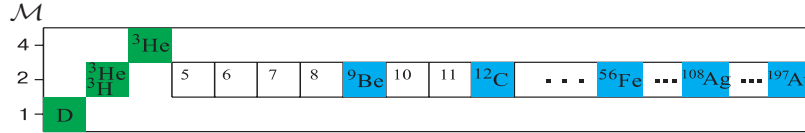


Рис. 7. Степень искажения структуры нуклона M в зависимости от массового числа A

$r(x) = 1$ соответствует величине $x_3 = 0,913$, что находится в хорошем согласии с данными. Небольшое систематическое отклонение кривой при $x < 0,2$ может быть отнесено на счет параметризации нуклонных данных используемой для расчета производной F_2^N . Незначительные изменения параметризации, позволяющие воспроизвести точки x_1 и x_2 , приводят к существенному улучшению согласия теории и эксперимента в области $x < 0,2$ (см. рис.9).

Результат расчета для $A = 3$ хорошо согласуется с формой модификации, найденной в экспериментах на существенно более тяжелых ядрах, как, например, на ядрах железа, серебра, золота. Согласие определяется тем, что полученное из теории значение $x_3 = 0,845$ в пределах погрешностей совпадает с экспериментом. В результате модификация отношения СФ в области $A > 4$ происходит просто как увеличение амплитуды отклонений от линии $r^A(x) = 1$ без изменения x -зависимости. Как показано в работе [30], результаты всех экспериментов на ядрах (за исключением ядра ${}^4\text{He}$) превосходно согласуются с расчетом для $A = 3$ с помощью введения масштабного параметра. Зависимость масштабного параметра от A связана с изменением средней ядерной плотности и может быть вычислена с помощью потенциала Вудса—Саксона. На рис.10 приведены результаты расчета модификации структуры нуклона в трехнуклонной системе (светлая заштрихованная область) и показано, как структура нуклона эволюционирует в ядрах ${}^{12}\text{C}$, ${}^{56}\text{Fe}$ и ${}^{197}\text{Au}$ (штриховка с разной плотностью).

Выполненный в работах [28–30] анализ убеждает в том, что вторая стадия ($A > 4$) эволюции структуры нуклона в ядрах протекает без искажения партонных распределений ядерной средой. Этот факт позволяет рассматривать

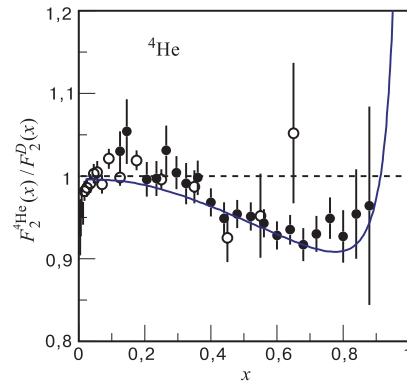


Рис. 8. Результаты расчетов $F_2^{4\text{He}}(x)/F_2^D(x)$, выполненных в [43, 44], показаны сплошной кривой. Экспериментальные результаты изображены черными [55] и светлыми [95] кружками

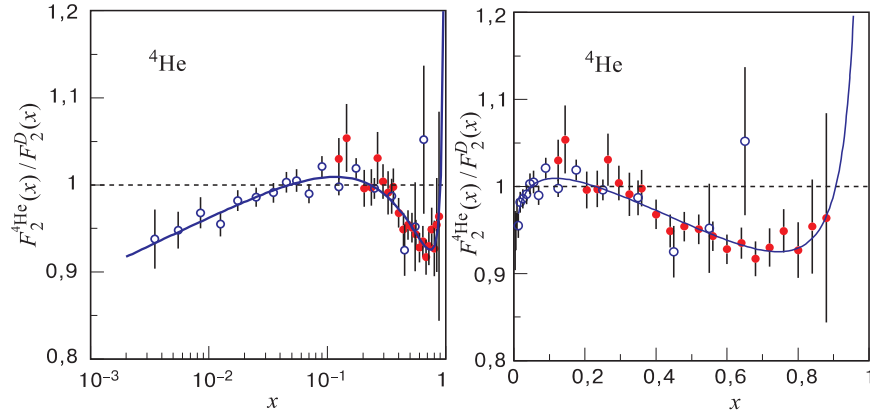


Рис. 9. Результаты расчетов $F_2^{4\text{He}}(x)/F_2^D(x)$ с модифицированной параметризацией F_2^N показаны сплошной кривой. Экспериментальные результаты изображены черными [55] и светлыми [95] кружками

ЕМС-эффект как частный случай модификаций для области $A \leq 4$. Повторение эффекта, полученного в расчетах для трехнуклонной системы, в тяжелых ядрах может свидетельствовать об одинаковой топологии ядерных сил при $A = 3$ и при $A \geq 4$.

5.3. Правило сумм Готтфрида. Строго говоря, экспериментальная проверка правил сумм КХД требует определения структурной функции нейтрона $F_2^n(x)$ во всей области изменения переменной x . Поэтому естественно ожидать, что рассмотренные выше эффекты окажутся важными при анализе экспериментальных данных.

Выражение (76) показывает, что интеграл

$$I_D = \int_0^1 \frac{dx}{x} (2F_2^p(x) - 2F_2^D(x)) ,$$

который обычно используется для экспериментальной проверки правила сумм Готтфрида [87], совпадает с интегралом Готтфрида с точностью до поправки, пропорциональной $F_2^N(x=0)$:

$$I_D = \int_0^1 \frac{dx}{x} (F_2^p(x) - F_2^n(x)) - 2 \frac{\langle M_D - 2E_D \rangle_D}{m} F_2^N(x=0) .$$

Поскольку значение СФ нуклона в нуле неизвестно и, судя по последним экспериментальным данным [87], быстро растет при $x \rightarrow 0$, то извлеченная таким образом величина тем сильнее переоценивает истинное значение интеграла Готтфрида, чем ближе к нулю берется нижний предел интегрирования в реальном эксперименте.

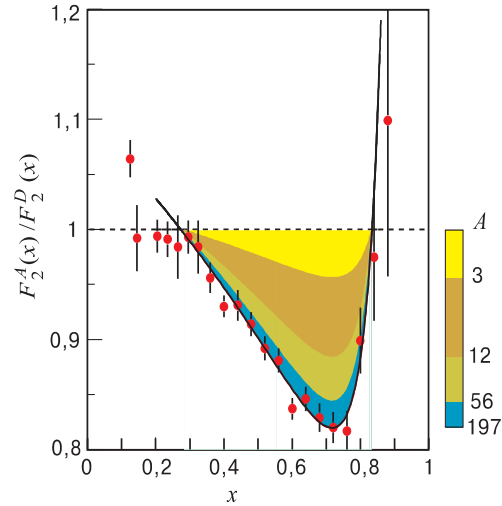


Рис. 10. Эволюция структуры нуклона в ядрах от $A = 3$ (Буров, Молочков, Смирнов) до $A = 197$ (Вудс—Саксон), полученная умножением $F_2^{A=3}(x)/F_2^D(x)$ на масштабный параметр. Зависимость параметра от A определяется потенциалом Вудса—Саксона и показана с помощью штриховки разной плотности. Результаты измерений на золотой мишени получены в работе [55]

В недавних экспериментах сотрудничества НМС получено, что $I_D(0,004) = 0,2281 \pm 0,0065$ [87]. Легко показать, что, двигаясь в таком эксперименте в область все меньших x , при некотором $x_0 = x_1$ можно получить значение I , удовлетворяющее правилу сумм Готтфрида, — $I_D(x_1) = 1/3$, а потом переоценить его.

Итак, эксперименты по ГНР на дейтроне и протоне позволяют заключить, что правило сумм Готтфрида нарушено. В то же самое время нет оснований считать, что интеграл Готтфрида может быть оценен из имеющихся данных с любой наперед заданной точностью.

Совсем иная ситуация может возникнуть при анализе экспериментальных данных по ГНР на ^3He и ^3H . Вычислим интеграл Готтфрида, подставив вместо СФ протона и нейтрона СФ ^3He и ^3H полученные выше выражения (87) и (88). В результате имеем следующее выражение:

$$I_{3\text{H}} = \int_0^1 \frac{dx}{x} (F_2^{3\text{He}}(x) - F_2^{3\text{H}}(x)) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x} (F_2^p(x) - F_2^n(x)) - 2 \frac{\langle \Delta_{3\text{He}}^p \rangle_{3\text{He}}}{m} (F_2^p(x=0) - F_2^n(x=0)).$$

Предположив изоспиновую симметрию кваркового моря при $x \rightarrow 0$, можно заключить, что последний член зануляется, и I_{3H} совпадает с интегралом Готтфрида. Таким образом, эксперимент, использующий ^3He - и ^3H -мишени, позволил бы проверить правило сумм Готтфрида независимо от модельных неопределенностей и без необходимости учитывать эффекты ядерной связи.

Суммируя результаты этого раздела, следует отметить:

- Модельно-независимый метод, развитый на основе подхода, изложенного в разд. 3, позволил рассчитать СФ легких ядер в терминах СФ ядерных фрагментов и трехмерного импульсного распределения. В результате СФ $F_2^A(x)$ была рассчитана, не прибегая к численному решению уравнения (49).
- Полученное поведение отношений СФ легких ядер D, ^3He и ^4He к СФ свободного нуклона свидетельствует о том, что модификация структуры нуклона в легчайших ядрах является демонстрацией пространственно-подобной деформации партонного распределения в связанном нуклоне.
- Результаты расчетов отношения СФ ^3He и ^4He к СФ дейтрона, проверка которых планируется в TJNAF и HERA, могут рассматриваться как предсказания того, что ЕМС-эффект на более тяжелых ядрах можно понимать как модификацию структуры связанного в ^3He нуклона, которая усиливается эффектами ядерной плотности.
- Полученные результаты показывают, что в области ЕМС-эффекта ($0,3 < x < 0,9$) двухнуклонные взаимодействия могут рассматриваться как доминирующий механизм при описании ядерных сил связи.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен теоретико-полевой подход, в рамках которого реализовано релятивистское рассмотрение эффектов связи нуклонов в легчайших ядрах. При этом показано, что неодновременность нуклонов в ядре является необходимым условием модификации структуры нуклона.

Развит модельно-независимый метод, позволяющий рассчитать СФ ядер ^3H , ^3He и ^4He в терминах СФ ядерных фрагментов. Впервые в рамках единого подхода осуществлены расчеты модификации структуры свободного нуклона для легчайших ядер, $A \leq 4$. Результаты расчетов для $A = 2$ и 3 являются теоретическим предсказанием эффектов эволюции структуры нуклона в малонуклонных системах.

Показано, что входящие в выражения для адронного тензора структурные функции $F_2^{n(p)}(x)$ определяют не только внутреннюю структуру нуклона, но также и динамику двухнуклонных взаимодействий. Хорошее согласие резуль-

татов расчетов с имеющимися экспериментальными данными свидетельствует о доминирующем вкладе парных нуклонных взаимодействий для описания ядерных сил связи по меньшей мере в хорошо исследованной области $0,3 < x < 0,9$. Это также позволяет сделать вывод о том, что учет неодновременности нуклонов в ядре является достаточным условием для правильного описания модификации структуры нуклона.

Как модификация F_2^N , так и ее эволюция от $A = 1$ до 4, полученные в нашем подходе, являются результатом релятивистского рассмотрения ядерной структуры. Исходя из взаимной согласованности результатов теоретических расчетов, опирающихся на понимание структуры дейтрона, и экспериментальных результатов при $A \geq 4$, мы приходим к выводу о малости теоретических неопределенностей для отношения $F_2^D(x)/F_2^N(x)$. Это, в свою очередь, позволяет надежно отличить эффект модификации структуры дейтрона от модификации структуры свободного нуклона на основе уже полученных экспериментальных данных.

Найдено, что наиболее характерной отличительной чертой модификации структуры нуклона в ядрах является положение координаты точки x_3 , в которой $F_2^A(x) = F_2^D(x)$. Из расчетов следует, что значение $(1 - x_3)$, которое составляет $\sim 0,32$ для F_2^D/F_2^N , уменьшается до $\sim 0,16$ и $\sim 0,08$ для отношений $F_2^{A=3}/F_2^D$ и $F_2^{4\text{He}}/F_2^D$ соответственно. Выбирая в качестве количественной оценки модификации величину $M = 1/(1 - x_3)$ и полагая ее равной единице для дейтрона, получаем, что степень модификации возрастает до $M = 2$ для ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ и до $M = 4$ для ${}^4\text{He}$. Основываясь на этих результатах, мы вводим класс x -зависимых модификаций, обусловленных эффектами ядерной связи. Внутри рассматриваемого класса не существует никаких механизмов, которые могли бы привести к усилению степени модификации структуры нуклона.

Наши результаты позволяют также теоретически обосновать концепцию эволюции структуры нуклона, находящегося в ядерном окружении, в виде двух стадий: 1) $A \leq 4$ и 2) $A > 4$. Вторая стадия эволюции протекает независимо от x и соответствует степени модификации $M = 2$. Зависимость величины эффекта от A описывается в рамках традиционных рассуждений ядерной структуры.

Рассмотрение класса модификаций и введение концепции эволюции структуры нуклона в виде двух стадий оказались решающими для понимания как природы ЕМС-эффекта, так и причин неудачного описания эффекта с помощью множества моделей, предложенных с момента его обнаружения и до настоящего времени. Эффект ЕМС представляет собой частный случай модификаций, рассмотренных для области $A \leq 4$. Повторение картины эффекта, полученного в расчетах для трехнуклонной системы, в тяжелых ядрах может свидетельствовать об одинаковой топологии ядерных сил при $A = 3$ и при $A > 4$.

В заключение авторы благодарят А.М. Балдина, С.В. Акулиничева, М. Байера, С.Г. Бондаренко, С.М. Доркина, К.Ю. Казакова, Л.П. Каптаря, В.А. Карманова, С.А. Кулагина, Р. Мир-Касимова, В.А. Николаева, В.Ю. Новожилова, М.В. Рзянина, К. Саито, К. Цусиму, К. Чиофи дегли Атти, В. Шайда за полезные обсуждения ряда вопросов, рассмотренных в настоящем обзоре.

Эта работа поддержана РФФИ, грант 96-15-423.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клоуз Ф. — Кварки и глюоны. М.: Мир, 1982, с.438.
2. EMC-NA2, Ashman J. et al. — Phys. Lett. B, 1988, v.206, p.364.
3. Gottfried K. — Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, p.1174.
4. Ellis J., Jaffe R.L. — Phys. Rev. D, 1974, v.9, p.1444 ; *ibid.* 1974, v.10, p.1669.
5. Bjorken J.D. — Phys. Rev., 1966, v.148, p.1467; Phys. Rev. D, 1970, v.1, p.1376.
6. EMC-NA2, Aubert J.J. et al. — Phys. Lett. B, 1983, v.123, p.275.
7. Wong C.W. — Phys. Rep., 1986, v.136, p.1.
8. Arneodo M. — Phys. Rep., 1994, v.240, p.301.
9. Geesman D.F., Saito K., Thomas A.W. — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1995, v.45, p.337.
10. Akulinichev S.V., Kulagin S.A., Vagradov G.M. — Phys. Lett. B, 1985, v.158, p.485.
11. Akulinichev S.V. — Phys. Lett. B, 1995, v.357, p.451.
12. Llewellyn Smith C.H. — Phys. Lett. B, 1983, v.128, p.107.
13. Ericson M., Thomas A.W. — Phys. Lett. B, 1983 v.128, p.112.
14. Титов А.И. — ЯФ, 1983, т.40, с.50.
15. Fredriksson S. — Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p. 724.
16. Chen J.P. et al. — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.1283.
17. Каптарь Л.П., Титов А.И., Умников А.Ю. — ЭЧАЯ, 1991, т.22, с.839.
18. Close F.E., Roberts R.G., Ross G.G. — Phys. Lett. B, 1983, v.129, p.346.
19. Close F.E., Jaffe R.L., Roberts R.G. — Phys. Lett. B, 1984, v.134, p.449.
20. Close F.E. et al. — Phys. Rev. D, 1985, v.31, p.1004.
21. Yang J.-J., Li G.-L. — Z. Phys. C, 1997, v.76, p.287.
22. He Z. et al. — Eur. Phys. J. C, 1998, v.4, p.301.
23. Indumathi D., Wei Zhu — Z. Phys. C, 1997, v.74, p.119.
24. Kumano S., Umekawa K. — Saga University Preprint, 1998, SAGA-HE-130-98; hep-ph/9803359.
25. Sick I., Day D. — Phys. Lett. B, 1992, v.274, p.16.
26. Benhar O., Pandharipande V.R., Sick I. — JLAB-THY-98-12, 1998 (unpublished).
27. Date S. et al. — Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.1344.
28. Смирнов Г.И. — ЯФ, 1995, т.58, с.1712.
29. Smirnov G.I. — Phys. Lett. B, 1995, v.B364, p.87.

30. **Smirnov G.I.** — JINR Preprint, E2-99-145, Dubna, 1999; hep-ph/9901422; Submitted to Eur. Phys. J. C., 1998, v.31.
31. **Ciofi degli Atti C., Liuti S.** — Phys. Lett. B, 1989, v.225, p.215.
32. **Ciofi degli Atti C., Liuti S.** — Phys. Rev. C, 1990, v.41, p.1100.
33. **Bodek A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1983, v.50, p.1431.
34. **Bodek A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1984, v.51, p.534.
35. **Pirner H.J., Vary J.P.** — Phys. Rev. Lett., 1981, v.46, p.1376.
36. **Chemtob M., Peschanski R.** — J. Phys. G, 1984, v.10, p.599.
37. **Chemtob M., Peschanski R.** — New Particle Production: In: Proc. of the XIX Rencontre de Moriond, La Plagne, France, 1984. J. Tran Thanh Van, ed. (Editions Frontieres, Gif-sur Yvette, France, 1984) p.651; also Centre d'Etudes Nucleaires at Saclay, preprint SACLAY-Sph-T-84/49, 1984 (unpublished).
38. **Зотов Н.П., Салеев В.А., Царев В.А.** — Письма в ЖЭТФ, 1984, т.39, с.81.
39. **Kondratyuk L.A., Shmatikov M.Zh.** — Z. Phys. A, 1985, v.321, p.301.
40. **Efremov A.V.** — Phys. Lett. B, 1986, v.174, p.219.
41. **Frankfurt L.L., Strikman M.I.** — Phys. Lett. B, 1987, v.183, p.254.
42. **Burov V.V., Molochkov A.V.** — Nucl. Phys. A, 1998, v.637, p.31;
Burov V.V., Molochkov A.V. — In: Proc. of VII International Conference «Symmetry Methods in Physics», July 10–16, 1995, Dubna, Russia, Eds. A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan, E2-96-224, Dubna, 1996, p.78.
43. **Burov V.V., Molochkov A.V., Smirnov G.I.** — JINR Rapid. Comm. 1999, No.3[89]-98, p.47.
44. **Burov V.V., Molochkov A.V., Smirnov G.I.** — Phys. Lett. B, 1999, v.466, p.1.
45. **SLAC, E154 Experiment, Abe K. et al.** — Phys.Rev.Lett. 1997, v.79, p.26.
46. **COMPASS Proposal** — 1996, CERN/SPSLC/P297;
COMPASS Proposal Addendum 1, 1996, CERN/SPSLC 96-30.
47. **HERMES Collaboration, Ackerstaff K. et al.** — Phys. Lett. B, 1997, v.404, p.383.
48. **Zuithof M.J., Tjon J.A.** — Phys. Rev. C, 1980, v.22, p.2369.
49. **Gross F., Luiti S.** — Phys. Lett. B, 1995, v.356, p.157.
50. **Honzawa N., Ishida Sh.** — Phys. Rev. C, 1992, v.45, p.47.
51. **Burov V.V. et al.** — In: Proc. of the III International Symposium «Deuteron-95», JINR, Dubna, 1996, p.99.
52. **Kaptari L.P. et al.** — Phys. Rev. C, 1996, v.54, p.176.
53. **Бондаренко С.Г. и др.** — ЯФ, 1999, v.62, с.983.
54. **Burov V.V. et al.** — In: Proc. of the XII International Seminar on High Energy Physics Problems, JINR, Dubna, 1994, p.90.
55. **SLAC, Gomez J. et al.** — Phys. Rev. D, 1994, v.49, p.4348.
56. **Melnitchouk W., Schreiber A.W., Thomas A.W.** — Phys. Rev. D, 1994, v.49, p.1199.
57. **Bondarenko S.G., et al.** — Phys. Rev. C, 1998, v.58, p.3143.
58. **Ericson M., Thomas A.W.** — Phys. Lett. B, 1984, v.148, p.191.
59. **Kaptari L.P., Kazakov K.Yu., Umnikov A.Yu.** — Phys. Lett. B, 1992, v.293, p.219.
60. **Gross F., Liuti S.** — Phys. Rev. C, 1992, v.45, p.1374.

61. Kulagin S., Piller G., Weise W. — Phys. Rev. C, 1994, v.50, p.1154.
62. Burov V.V., Molochkov A.V. — In: Proc. of the International Symposium «Deuteron-95», July 4–7, 1995, Dubna, Russia, Ed. A.M. Baldin, Dubna, 1996, p.114; JINR Preprint, E2-95-339, Dubna, 1995.
63. Guichon P.A.M. — Phys. Lett. B, 1988, v.200, p.235.
64. Serot B.D., Walecka J.D. — Int. J. Mod. Phys. E, 1997 v.6, p.515.
65. Saito K., Thomas A.W. — Phys. Lett. B, 1994, v.327, p.9.
66. Saito K., Thomas A.W. — Nucl. Phys. A, 1994, v.574, p.659.
67. Low F. — Phys. Rev., 1995, v.97, 1392;
Lehman H., Symanzik K., Zimmermann W. — Nuovo Cimento, 1957, v.6, p.319.
68. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. — Nuovo Cimento, 1963, v.29, p.380.
69. Blannenbeckler R., Sugar R. — Phys. Rev., 1966, v.142, p.1951.
70. Thompson R.H. — Phys. Rev. D, 1970, v.1, p.10.
71. Kadyshevsky V.G. — Nucl. Phys. B, 1968, v.6, p.125.
72. Holinde K., Erkelenz K., Alzetta R. — Nucl. Phys. A, 1972, v.194, p.161.
73. Браун Дж.Е., Джексон А.Д. — Нуклон-нуклонные взаимодействия, М.: Атомиздат, 1979, с.248.
74. Карманов В.А., Шапиро И.С. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.327.
75. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. — ЭЧАЯ, 1972, т.2, с.635.
76. Mandelstam S. — Proc. R. Soc., London A, 1955, v.233, p.248.
77. Umnikov A.Yu., Khanna F.C. — Phys. Rev. C, 1994, v.49, p.2311.
78. Буров В.В. и др. — ЯФ, 1996, т.59, с.822; ЯФ, 1996, т.59, с.784.
79. Salpeter E.E., Bethe H.A. — Phys. Rev., 1949, v.76, p.769.
80. Nakanishi N. — Graph Theory and Feynman Integrals. Gordon and Breach, New York, 1971.
81. Kusaka K., Williams A.G. — Phys. Rev. D, 1995, v.51, p.7026;
Kusaka K., Simpson K., Williams A.G. — Phys. Rev. D, 1997, v.56, p.5071.
82. Rupp G., Tjon J.A. — Phys. Rev. C, 1990, v.41, p.471.
83. Bondarenko S.G., Burov V.V., Dorkin S.M. — In: Proc. of the Int. Conf. «Mesons and Nuclei at Intermediate Energies», Dubna, 1994, World Scientific, 1994, p.539.
84. Bjorken J.D., Drell S.D. — Relativistic Quantum Field. McGraw-Hill, New York, 1965.
85. BCDMS, A.C. Benvenuti et al. — Phys. Lett. B, 1990, v.237, p.599.
86. SMC, Adeva B. et al. — Phys. Lett. B, 1997, v.412, p.414.
87. NMC, Arneodo M. et al. — Nucl. Phys. B, 1997, v.487, p.3.
88. Melnitchouk W., Thomas A.W. — Phys. Lett. B, 1996, v.377, p.11.
89. Kaptari L.P., Umnikov A.Yu., Kämpfer B. — Phys. Rev. D, 1993, v.47, p.3804.
90. Казаков К.Ю., Каптарь Л.П. — ЯФ, 1997, т.60, с.1593.
91. NMC, Arneodo M., et. al. — Nucl. Phys. B, 1995, v.441, p.12.
92. BCDMS, Benvenuti A.C. et al. — Phys. Lett. B, 1987, v.B189, p.483.
93. Ciofi degli Atti C., Simula S. — Phys. Rev. C, 1996, v.53, p.1689.
94. Schiavilla R. et al. — Nucl. Phys. A, 1986, v.449, p.219.
95. NMC, Amaudruz P. et al. — Nucl. Phys. B, 1995, v.441, p.3.

ФОТООБРАЗОВАНИЕ ЛЕГКИХ η -ЯДЕР

В.А.Трясучёв

Томский политехнический университет, Томск

С учетом новых данных и в рамках ядерной модели с оптическим потенциалом обсуждается гипотеза существования η -ядер, включая и очень легкие ($A = 3$). На основе механизма квазисвободного фоторождения η -мезонов на легких ядрах развита последовательная модель фоторождения η -ядер в реакциях $\gamma + A \rightarrow N + \eta A'$. Исследуется зависимость сечений таких реакций от основных предполагаемых свойств η -ядер и взаимодействия в конечном состоянии для энергий налетающих γ -квантов от порога до 1 ГэВ.

Within the nuclear optical model and using the new data the hypothesis of η -nuclei is discussed. Considerable attention is particularly given to the superlight η -nuclei ($A = 3$). The model for the η -nuclei photoproduction in the reactions $\gamma + A \rightarrow N + \eta A'$ on a basis of the quasi-free mechanism of η -meson photoproduction on light nuclei ($A \leq 16$) is developed. We investigate also the dependence of the cross sections for these reactions on the main properties of η -nuclei as well as the effects of final state interaction in the range of the photon energy up to 1 GeV.

ВВЕДЕНИЕ

В симметричной трехкварковой модели адронов две ортогональные суперпозиции наинизших кварк-антикварковых состояний

$$\begin{aligned}\eta_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \\ \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} - s\bar{s}),\end{aligned}\tag{1}$$

относящихся, соответственно, к октету и синглету псевдоскалярных мезонов, представляют вырожденные состояния, а волновые функции η - и η' -мезонов есть когерентная смесь состояний (1):

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_8 \cos \theta_p - \eta_1 \sin \theta_p, \\ \eta' &= \eta_8 \sin \theta_p + \eta_1 \cos \theta_p,\end{aligned}\tag{2}$$

с углом смешивания θ_p . Приближенный характер $SU(3)$ -симметрии адронов проявляется в том, что наблюдаемые мезоны $\eta(547)$ и $\eta'(958)$ различаются массами, а абсолютная величина θ_p определяется из массовой формулы Гелл-Манна — Окубы. И хотя кварковый состав η -мезонов не исчерпывается

u -, d -, s -ароматами, однако вкладами более тяжелых кварков в их состояние в дальнейшем будем пренебрегать. Интересующий нас η -мезон с массой 547,45 МэВ/с² и временем жизни $5,5 \cdot 10^{-19}$ с [1] отличается от хорошо изученного π^0 -мезона не только массой, но и изоспином. Поэтому представляет интерес сравнительный анализ взаимодействия барионов с π - и η -мезонами для проверки основных положений теории сильных взаимодействий, в частности, закона сохранения изоспина. Низкоэнергетическое S -волновое πN -взаимодействие характеризуется отталкиванием в состоянии с изоспином 1/2 и малым притяжением в состоянии с изоспином 3/2, а длина πN -рассеяния оказывается близкой к 0 и неопределенной по знаку [2], в то время как взаимодействие η -мезона с нуклоном при малых энергиях характеризуется значительным притяжением. Эта особенность легла в основу гипотезы существования связанных состояний η -мезон — ядро, названных η -ядрами [3,4]. Доказательство существования η -ядер является одной из важных задач физики промежуточных энергий, так как это новое знание о ядре позволит выбрать из существующих моделей атомных ядер наиболее адекватные. Изучение квазистационарных ядерных состояний с энергией возбуждения ≈ 550 МэВ и их распадов, подобно изучению гиперядер, открывает возможность продвижения в построении теории конечных ферми-систем, а с другой стороны, позволит решить проблему низкоэнергетического ηN -взаимодействия, которая интенсивно обсуждается теоретиками, но окончательно не решена из-за отсутствия экспериментальных данных.

Выполненный более 10 лет назад в Брукхейвенской лаборатории эксперимент по обнаружению η -ядер в реакции

$$\pi + A \rightarrow p + {}_{\eta}A' \quad (3)$$

вблизи ее порога не дал определенного результата [5]. Обнаруженный пик в энергетическом спектре протонов от реакции ${}^{16}\text{O}(\pi^+, p)$ оказался ниже предсказываемого пика от реакции ${}^{16}\text{O}(\pi^+, p){}^{15}_{\eta}\text{O}$ в три раза. Не касаясь деталей эксперимента, заметим, что рассчитанные в работе [3] ширины η -ядер, от которых непосредственно зависят вычисленные высоты упомянутых пиков, подверглись значительной критике [6,7]. Другой эксперимент по двойной перезарядке пионов в реакции

$$\pi^+ + {}^{18}\text{O} \rightarrow \pi^- + {}^{18}\text{Ne},$$

выполненный в Лос-Аламосской лаборатории, выявил резонансную структуру сечения этой реакции при энергии, близкой к порогу образования η -мезонов [8], однако малый набор статистики не позволил авторам этой работы заявить об открытии η -ядер. Нельзя не сказать об измерении сечения реакции $d + d \rightarrow \eta + {}^4\text{He}$ вблизи порога. Сначала не было обнаружено никаких особенностей в зависимости сечения этой реакции от энергии [9], но затем (по-видимому,

под влиянием результатов экспериментов $p+d \rightarrow \eta+{}^3\text{He}$ и $\pi^-+{}^3\text{He} \rightarrow \eta+T$ [10,11]) сечение было перемерено и найдена его аномалия в пороге как косвенное свидетельство образования квазисвязанного состояния $\eta-{}^4\text{He}$ [12].

В данном обзоре обсуждаются вопросы, связанные с существованием η -ядер и образованием их под действием γ -квантов в реакции

$$\gamma + A \rightarrow N + {}_\eta A' \quad (4)$$

как одной из наиболее перспективной для обнаружения η -ядер. Поиск η -ядер в реакции (4) может иметь преимущество перед реакцией (3) в силу лучших фоновых условий, существующих при работе с фотонными пучками, чем при работе с π -мезонными. К другим преимуществам можно отнести большую прогнозируемость выхода реакции (4), по сравнению с выходом реакции (3), из-за большой неопределенности механизма взаимодействия пионов с ядрами при рассматриваемых энергиях.

План обзора следующий. Сначала на основе анализа имеющихся экспериментальных и теоретических данных по взаимодействию и образованию η -мезонов косвенно подтверждается возможность существования сверхлегких η -ядер. Основные свойства η -ядер, такие, как энергия связи и время жизни, рассматриваются в зависимости от ядерной плотности и числа нуклонов в ядре, а также от длины ηN -рассеяния. Во втором разделе проведено исследование фоторождения η -мезонов на нуклонах и ядрах в околопороговой области энергий налетающих γ -квантов. Построена модель фоторождения η на протонах и нейтронах, воспроизводящая последние экспериментальные данные [13,14]. Полученные в этой модели амплитуды элементарных процессов используются в теоретическом исследовании фоторождения мезонов на p -оболочечных ядрах с вылетом нуклонов. Рассчитанные сечения реакций фоторождения η -мезонов на ядрах сравниваются с результатами вычислений других авторов, а также с имеющимися экспериментальными данными. В последнем разделе дается теоретическое обоснование модели фоторождения η -ядер с вылетом нуклонов и рассчитываются сечения их образования. Исследуется зависимость сечений от основных свойств и состояний образующихся η -ядер и взаимодействия вылетающих нуклонов в конечном состоянии.

1. η -ЯДРА И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Оптическая модель взаимодействия η -мезонов с ядрами. В настоящее время имеются два основных подхода к описанию η -ядер. В одном из них полагают, что медленный η -мезон взаимодействует с нуклонами ядра исключительно через образование и распад изобары $S_{11}(1535)$. В результате такого взаимодействия образуется возбужденное состояние ядра типа частица — дырка, где роль частицы играет изобара $S_{11}(1535)$. Свойства такого возбужденного состояния — энергия связи, время жизни — зависят не

только от свойств резонанса $S_{11}(1535)$, но и от взаимодействия его с ядром [7]. В другом подходе взаимодействие медленного мезона с нуклонами ядра полагается когерентным и описывается с помощью оптического потенциала, как это давно делается для описания пион-ядерного взаимодействия. Важной составляющей такого подхода является амплитуда низкоэнергетического ηN -взаимодействия, в частности, такая ее предельная характеристика, как длина ηN -рассеяния a_0 .

Для описания мезон-ядерного взаимодействия воспользуемся концепцией оптического потенциала. Пренебрегая двухнуклонным поглощением η -мезона в ядре, запишем оптический потенциал на пороге ($\bar{q}_\eta \rightarrow 0$) в виде [15]:

$$2\mu U(r) = -4\pi\rho(r)(1 + m_\eta/m_N) \cdot f(\eta N \rightarrow \eta N), \quad (5)$$

$\mu = m_\eta M/(m_\eta + M)$, где M — масса ядра-остова; $\rho(r)$ — сферически-симметричная плотность потенциала; $f(\eta N \rightarrow \eta N)$ — амплитуда элементарного процесса, причем

$$f(\eta p \rightarrow \eta p) = f(\eta n \rightarrow \eta n) \quad (6)$$

согласно изотопической инвариантности сильных взаимодействий.

В отличие от πN -рассеяния, ηN -рассеяние, как уже упоминалось, при очень малых энергиях мезонов можно считать чисто S -волновым в силу доминирования в его сечении, начиная от порога, нуклонного резонанса $S_{11}(1535)$, и поэтому

$$\lim_{q_n \rightarrow 0} f(\eta N \rightarrow \eta N) = a_0. \quad (7)$$

Для определения комплексного потенциала η -ядерного взаимодействия используется свободная длина ηN -рассеяния (формализм эффективной длины рассеяния, развитый в работе [15] для π -мезонов, здесь не может быть применен непосредственно).

Следующим приближением будет приближение однородной плотности; в выражении (5) $\rho(r)$ брали в виде

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi r_0^3}, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (9)$$

есть радиус ядра, содержащего A нуклонов. Оправданием этому приближению может служить рассмотрение в дальнейшем только легких ядер и отсутствие в потенциале (5) членов, зависящих от градиента ядерной плотности.

В пренебрежении спиновыми эффектами уравнение Шредингера для η -ядра будет иметь вид

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + U(r) \right] \varphi_{n\ell}(\mathbf{r}) = E_{n\ell} \varphi_{n\ell}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

с комплексной собственной энергией

$$E_{n\ell} = \left(-\varepsilon - \frac{1}{2} i\Gamma \right)_{n\ell}, \quad (11)$$

где ε и Γ — энергия связи и ширина уровня, характеризующегося квантовыми числами n и ℓ . Разделяя, с помощью разложения по полиномам Лежандра $P_\ell(\cos \theta)$, волновую функцию $\varphi_{n\ell}(\mathbf{r})$ на радиальную и угловую части

$$\varphi_{n\ell}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{u_{n\ell}(r)}{r} \cdot P_\ell(\cos \theta),$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $u_{n\ell}(r)$

$$r^2 \ddot{u}_{n\ell}(r) + [2\mu r^2 (E_{n\ell} + U(r)) - \ell(\ell+1)] u_{n\ell}(r) = 0, \quad (12)$$

которое при $\ell = 0$ имеет элементарное решение, а при $\ell > 0$ — аналитические решения в виде функций Риккати. Уравнения квантования энергии получим, как обычно, из сшивки логарифмических производных волновых функций $\varphi_{n\ell}(\mathbf{r})$ на границе действия потенциала.

1.2. Свойства η -ядер. В рассматриваемой модели свойства η -ядер будут определяться двумя основными параметрами: длиной ηN -рассеяния a_0 и радиусом R (9) потенциала. Наиболее сильной является зависимость от радиального параметра r_0 (см. выражения (5) и (8)). Зависимость энергии связи и ширины $1s$ -уровня η -ядра ${}^{16}_\eta\text{O}$ от радиального параметра при фиксированном значении a_0 показана на рис.1. Исходя из общих соображений о радиусе действия сильных взаимодействий, можно считать, что

$$1,3 < r_0 < 1,4 \text{ фм.}$$

Возникающую при этом неопределенность ε и Γ можно оценить из рис.1. В качестве R (9) брали эквивалентные радиусы ядер, $R_{\text{эк}}$, которые связаны с соответствующими среднеквадратичными соотношением

$$R_{\text{эк}}^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle. \quad (13)$$

Для рассматриваемых в этой работе ядер $R_{\text{эк}}$ взяты неизменными из таблицы [16], кроме ядра ${}^{11}\text{B}$, для которого полагали $r_0 = 1,35$ фм (в связи с замечанием самого автора о вероятной здесь ошибке). Другая важная составляющая

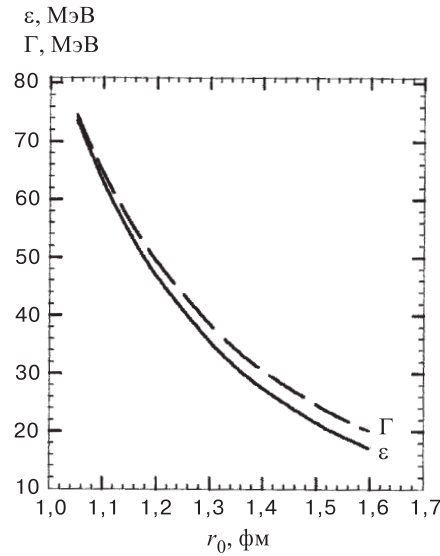


Рис. 1. Зависимость энергии связи ε и ширины уровня Γ $1s$ -состояния ядра ${}^{16}_{\eta}\text{O}$ от радиального параметра r_0 оптического потенциала, вычисленного с длиной ηN -рассеяния $a_0 = (0,717 + i0,263)$ фм

потенциала U (5) — это длина ηN -рассеяния. Как уже упоминалось, ситуация здесь противоречивая, и пока невозможно отдать предпочтение ни одному из результатов. На рис.2 показаны значения величины a_0 из большинства известных нам работ [17–23] (более детальный обзор таких работ см. в [22]).

В комплексном потенциале квазисвязанное состояние возможно только при определенных соотношениях между его реальной и мнимой частями. Вычисленные границы образования некоторых η -ядер в комплексной плоскости величины a_0 показаны на рис.2. Справа от этих кривых находятся такие значения a_0 , которые ведут к связанным наинизшим состояниям соответствующих $\eta - A$ -систем. Видно, что гипотезе существования η -ядер тяжелее ${}^{16}_{\eta}\text{O}$ не противоречит ни одно значение a_0 , полученное в цитируемых здесь работах.

Ограничение на число нуклонов снизу $A \geq 12$ привели авторы [4], когда говорили о возможности образования η -ядер, исходя из полученных ими же значений a_0 . Соответствующая кривая на рис.2 хорошо иллюстрирует это положение. Вместе с тем существует достаточное количество работ, результаты которых удовлетворяют условиям [18–23]:

$$|\operatorname{Re} a_0| > 0,55 \text{ фм}, \quad |\operatorname{Im} a_0| < 0,4 \text{ фм},$$

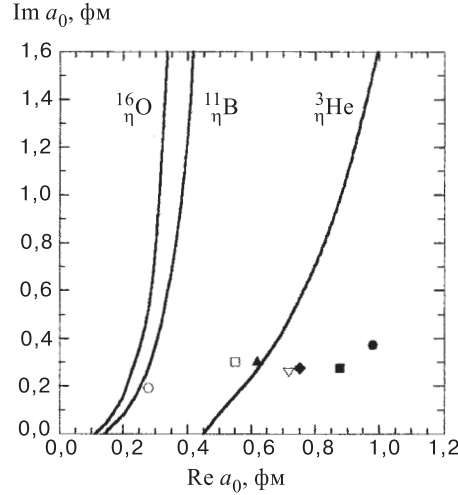


Рис. 2. Границы образования квазисвязанных состояний для нескольких η -ядер в комплексной плоскости длины ηN -рассеяния. Длины ηN -рассеяния получены в работах: [17] — ($\circ$), [18] — ($\bullet$), [19] — ($\square$), [20] — ($\blacktriangle$), [21] — ($\blacksquare$), [22] — (∇), [23] — ($\blacklozenge$)

что предполагает возможность существования η -ядер с числом нуклонов меньше, чем 12 (см.рис.2). Распространяя понятие оптического потенциала на ядра с $A = 3$, мы вычислили границу образования ${}^3_\eta\text{He}$ с учетом рыхлости его нуклонного остова ($R_{\text{эк}} = 2,45$ фм [16]). Как видно из рис.2, некоторые из предсказываемых значений a_0 остаются справа и от этой кривой, оставляя, таким образом, возможность существования сверхлегких η -ядер, вплоть до ${}_\eta D$. В пользу этой версии говорят и результаты исследования реакций образования η -мезонов вблизи порога: $\gamma + D \rightarrow \eta + D$ [24], $p + D \rightarrow \eta + {}^3\text{He}$ [10], $\pi^- + {}^3\text{He} \rightarrow \eta + T$ [11], $D + D \rightarrow \eta + {}^4\text{He}$ [12], $p + n \rightarrow \eta + D$ [25]. Как уже упоминалось, измеренные сечения этих реакций оказались аномально большими в пороге или в непосредственной близости от него. Среди объяснений этого факта есть и такие [19,26], в которых предполагается, что реакция $p + D \rightarrow \eta + {}^3\text{He}$ идет через S -волновый резонанс с массой

$$M_R = M_{{}^3\text{He}} + m_\eta - 7 \text{ МэВ}/c^2$$

(на $7 \text{ МэВ}/c^2$ ниже порога образования η -мезона в этой реакции) и менее определенной шириной

$$\Gamma = 5 - 25 \text{ МэВ}.$$

Естественно этот резонанс интерпретировать как η -ядро ${}^3_\eta\text{He}$ с энергией связи и шириной

$$\varepsilon \approx 7 \text{ МэВ}, \quad \Gamma \approx 15 \text{ МэВ}. \quad (14)$$

Таблица 1. Собственные значения комплексной энергии $E = (\varepsilon + i/2\Gamma)$ МэВ в модели с прямоугольной потенциальной ямой

Ядро	Состояние	$a_0 = 0,880 + 0,274i$, фм	$a_0 = 0,717 + 0,263i$, фм
${}^3_\eta\text{He}$	$1s$	$6,2 + 7,00i$	$2,23 + 5,50i$
${}^4_\eta\text{He}$	$1s$	$28,3 + 18,8i$	$17,5 + 16,85i$
${}^{11}_\eta\text{B}$	$1s$	$38,1 + 18,0i$	$27,5 + 16,75i$
	$1p$	$17,4 + 12,4i$	$10,3 + 7,88i$
${}^{12}_\eta\text{C}$	$1s$	$38,2 + 17,7i$	$28,0 + 16,65i$
	$1p$	$18,4 + 13,0i$	$10,6 + 9,13i$
${}^{15}_\eta\text{N}$	$1s$	$40,7 + 17,9i$	$30,2 + 16,85i$
	$1p$	$21,9 + 14,6i$	$13,1 + 11,86i$
${}^{16}_\eta\text{O}$	$1s$	$41,2 + 17,9i$	$30,6 + 16,82i$
	$1p$	$22,8 + 14,9i$	$13,9 + 12,36i$
${}^{40}_\eta\text{Ca}$	$1s$	$51,4 + 19,4i$	$39,9 + 18,45i$
	$1p$	$38,8 + 18,5i$	$27,9 + 17,20i$
	$2s$	$15,2 + 16,6i$	$5,3 + 14,65i$

Если η -ядерный потенциал строить на основании длины ηN -рассеяния из работы [21]:

$$a_0 = 0,880 + 0,274i \text{ фм}, \quad (15)$$

то из нашей модели получим

$$\varepsilon = 6,2 \text{ МэВ}, \quad \Gamma = 14,0 \text{ МэВ}. \quad (16)$$

Заметим, что значение (15) величины a_0 не является экстремальным среди других значений (см. рис.2) и в пределах приводимых ошибок согласуется с результатами других авторов. Полагая, что полученные в работе [26] характеристики S -волнового резонанса, через который идет процесс $p + D \rightarrow \eta + {}^3\text{He}$, и рассчитанные свойства (16) для ${}^3_\eta\text{He}$ не случайное совпадение, среди предсказываемых длин рассеяния предпочтение можно отдать результату (15) работы [21]. Свойства некоторых η -ядер, полученные на основе этого значения, приведены в табл.1. Энергия связи и ширины получились больше, чем те, которые предсказывались в первых работах [3,4] для аналогичных ядер, но они согласуются с результатами работы [7], полученными в альтернативной, используемой здесь модели η -ядер с неоднородной плотностью. В этой же таблице показаны свойства η -ядер с $A < 40$, рассчитанные с длиной ηN -рассеяния [22]:

$$a_0 = 0,717 + 0,263i \text{ фм}. \quad (17)$$

Энергии связи соответствующих η -ядер заметно различаются в представленных вариантах, однако, и это следует подчеркнуть, ширины рассматриваемых квазисвязанных состояний η -мезон — ядро независимо от используемых в расчетах значений a_0 и числа нуклонов в η -ядрах почти одинаково большие (см.табл.1), значительно больше ширин, предсказанных в работах [3,4]. Как следствие этого, уровни в многоуровневых η -ядрах могут сильно перекрываться, приводя в итоге к уменьшению времени жизни таких ядер.

Итак, с одной стороны, последние теоретические работы, выполненные методом связанных каналов с целью определения длин ηN -рассеяния [20–23], указывают на такие значения, при которых возможно существование η -мезон-ядерных связанных систем с $A < 3$ вплоть до ${}_{\eta}D$ (см. рис.2). С другой стороны, имеются, и уже давно, "труднообъяснимые" данные по пороговому образованию η -мезонов на малонуклонных системах, независимо от сорта налетающей частицы. Если допустить, что все эти реакции идут через образование и распад соответствующих η -ядер (подпороговых резонансов), то поведение их сечений в пороге, в принципе, может быть объяснено. Существованию η -ядер с числом нуклонов $A > 16$ пока нет альтернативы (см. рис.2).

О существовании сверхлегких η -ядер говорилось и раньше [18,19,27,28], но эти высказывания казались почти фантастическими. В последнее время существование сверхлегких η -ядер обосновывается в теоретических работах, выполненных в технике функций Грина [29–32]. Такой подход позволяет снять вопрос о неэрмитовости гамильтониана с комплексным потенциалом, существующий в нашем рассмотрении. Время жизни легких и средних η -ядер, как это следует из настоящего исследования и из цитируемых работ, в несколько раз меньше значений, предсказываемых в пионерских работах [3,4], достаточно только для проявления их в виде особого рода ядерных подпороговых резонансов, что существенно затрудняет их обнаружение.

Для изучения фоторождения η -ядер потребуются сведения о фотообразовании η -мезонов на нуклонах и ядрах, чему посвящен следующий раздел.

2. ФОТООБРАЗОВАНИЕ η -МЕЗОНОВ НА НУКЛОНАХ И ЯДРАХ

2.1. Фоторождение η -мезонов на нуклонах. Исследование фоторождения η -мезонов на ядрах водорода

$$\gamma + p \rightarrow \eta + p \quad (18)$$

насчитывает три десятка лет [33–36]. Последние эксперименты [13,35] качественно подтвердили результаты измерений прошлых лет: полное сечение реакции (18) от порога быстро растёт, достигая максимального значения

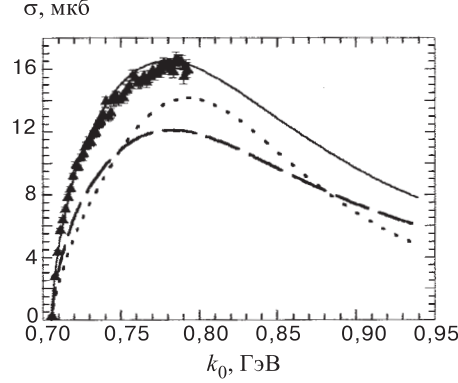


Рис. 3. Полные сечения процессов $\gamma p \rightarrow \eta p$ (сплошная кривая) и $\gamma n \rightarrow \eta n$ (штриховая кривая), рассчитанные в предложенной модели в зависимости от энергии фотонов. Точечная кривая — результат подгонки сечения процесса $\gamma p \rightarrow \eta p$ из [36] (решение A2). Экспериментальные данные для процесса $\gamma p \rightarrow \eta p$ взяты из [13]

15 – 17 мкб при $k_0 = 800$ МэВ, а затем убывает, как после резонанса. Других явно выраженных резонансов в сечении этого процесса не просматривается вплоть до энергии фотонов 2200 МэВ (см. [36]). Почти изотропное угловое распределение мезонов в процессе (18) [13] и близость массы $S_{11}(1535)$ -резонанса к значению его пороговой инвариантной энергии указывают на главную роль этого резонанса и в фоторождении η -мезонов на нуклонах. Выполненный более 20 лет назад многопараметрический анализ процесса (18) в широкой энергетической области с привлечением большого количества резонансов [36] плохо воспроизводит результаты новых прецизионных измерений сечения этого процесса вблизи порога [13] (см. рис.3) и не может быть использован непосредственно. Более детальный анализ обсуждаемой реакции около порога [37,38] показал достаточность учета только трех резонансных нуклонных состояний:

$$S_{11}(1535), \quad P_{11}(1440), \quad D_{13}(1520) \quad (19)$$

и малый вклад в сечение от борновских членов и диаграмм, отвечающих обмену векторными мезонами [39,40]. Не вдаваясь в детали порогового фоторождения η -мезонов на нуклонах, в данной работе амплитуду процесса (18) записываем в чисто изобарной модели с учетом трех резонансов (19), используя при этом параметризацию резонансных мультипольных амплитуд, как в работе [36], но с другими параметрами. Значения параметров, при которых достигнуто хорошее описание результатов измерения сечения в Майнце (см. рис.3), приведены в табл.2.

Таблица 2. Параметры для резонансных мультиполей в амплитуде процесса $\gamma p \rightarrow \eta p$. Величины γ^E и γ^M выражаются через произведения парциальных ширин соответствующих резонансов [36]

Резонанс	M_R , МэВ	Γ , МэВ	γ^E , МэВ	γ^M , МэВ	Γ_η/Γ	Γ_π/Γ
S_{11}	1537	160	2,05	—	0,5	0,4
P_{11}	1440	350	—	0,25	—	—
D_{13}	1518	100	0,04	0,35	—	—

Для описания фоторождения η -мезонов на нейтронах

$$\gamma + n \rightarrow \eta + n \quad (20)$$

резонансные мультипольные амплитуды выражались через соответствующие мультипольные амплитуды процесса (18) следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{11} : E_{0+}^{(n)} &= -0,848 E_{0+}^{(p)}, \\ P_{11} : M_{1-}^{(n)} &= -0,722 M_{1-}^{(p)}, \\ D_{13} : E_{2-}^{(n)} &= -0,538 E_{2-}^{(p)}, \quad M_{2-}^{(n)} = -2,2 M_{2-}^{(p)} \end{aligned} \quad (21)$$

согласно рекомендациям работы [1]. На рис.3,4 показаны сечения процесса (20). Они заметно меньше сечений процесса (18) и согласуются с результатом

$$\sigma(\gamma n \rightarrow \eta n) \approx 0,70 \sigma(\gamma p \rightarrow \eta p), \quad (22)$$

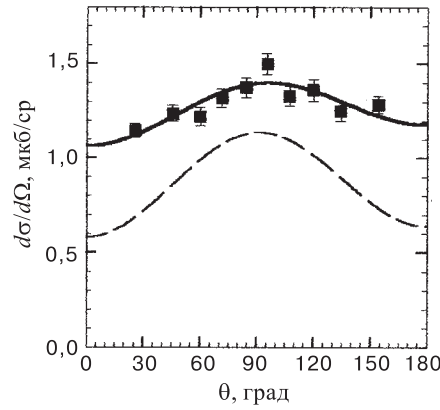


Рис. 4. Дифференциальные сечения процессов $\gamma p \rightarrow \eta p$ (сплошная кривая) и $\gamma n \rightarrow \eta n$ (штриховая кривая) при $k_0 = 789,9$ МэВ. Экспериментальные данные для процесса $\gamma p \rightarrow \eta p$ взяты из [13]

полученным в работе [14] посредством совместного анализа экспериментальных сечений процессов $\gamma p \rightarrow \eta p$ и $\gamma + D \rightarrow \eta + X$ в околопороговой области энергий фотонов. Заметим, что предсказываемые дифференциальные сечения процесса $\gamma n \rightarrow \eta n$ более анизотропные, чем сечения процесса $\gamma p \rightarrow \eta p$ (рис.4).

Модель фоторождения η -ядер основывается на знании реакции фотообразования мезонов на ядрах с выбиванием одного нуклона. Ни экспериментально, ни теоретически эти реакции пока не изучены достаточно, поэтому такие реакции на p -оболочечных ядрах необходимо рассмотреть детально.

2.2. Амплитуда реакции $A(\gamma, \eta N) A'$ на p -оболочечных ядрах. Изучение эксклюзивных реакций $(\gamma, \eta N)$ важно как для выявления механизмов фотообразования мезонов на ядрах, так и для изучения свойств самих ядер. Реакцию фоторождения η -мезона на ядре A с вылетом нуклона N запишем в виде

$$\gamma(k, \varepsilon_\lambda) + A_i(Q_i) \rightarrow \eta(q) + N(p) + A_f(Q_f), \quad (23)$$

где посредством $k = \{k_0, \mathbf{k}\}$, $q = \{q_0, \mathbf{q}\}$, $p = \{p_0, \mathbf{p}\}$, $Q_i = \{Q_{0i}, \mathbf{Q}_i\}$, $Q_f = \{Q_{0f}, \mathbf{Q}_f\}$ обозначены четырехимпульсы соответствующих частиц, а λ — индекс поляризации фотона. Используя технику вторичного квантования и учитывая антисимметричность волновых функций начальной (A_i) и конечной (A_f , N) систем нуклонов, амплитуду реакции (23) можно привести к виду

$$\langle f | \hat{T}_{\gamma\eta} | i \rangle = \sqrt{A} \left\langle \psi_f \left| \sum_{n=1}^A \Phi_N^*(x_A) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{r}_n} \hat{t}_n \varepsilon_\lambda \right| \psi_i \right\rangle. \quad (24)$$

Здесь $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_f\rangle$ — волновые функции ядра A_i , состоящего из A нуклонов, и ядра A_f , состоящего из $(A - 1)$ нуклонов. Оператор $\hat{t}_n^\lambda = \hat{\mathbf{t}}_n \cdot \varepsilon_\lambda$ есть оператор фоторождения η -мезона на нуклоне ядра, который в импульсном приближении равен оператору фоторождения на свободном нуклоне и имеет вид

$$\hat{t}_n^\lambda = [K^s + K^v \tau_3 + \mathbf{L}^s \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{L}^v \boldsymbol{\sigma} \tau_3]_n^\lambda,$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ — спиновый и изоспиновый операторы нуклона соответственно; индексы s и v указывают на изоскалярную и изовекторную части амплитуды. $\Phi_N(x_A) = \Phi_p^{(-)}(\mathbf{r}_A) \chi_\alpha(s_A) \chi_\beta(t_A)$ — волновая функция вылетевшего нуклона, где под x_A понимается набор соответствующих переменных $\{\mathbf{r}_A, s_A, t_A\}$. Отделяя в сумме по n последнее слагаемое, в амплитуде получим

$$\langle f | \hat{T}_{\gamma\eta} | i \rangle = \sqrt{A} \left\langle \psi_f \left| \Phi_N^*(x_A) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{r}_A} \hat{\mathbf{t}}_A \varepsilon_\lambda \right| \psi_i \right\rangle + \Delta, \quad (25)$$

$$\Delta = \sqrt{A} \left\langle \psi_f \left| \sum_{m=1}^{A-1} \Phi_N^*(x_A) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{r}_m} \hat{\mathbf{t}}_m \varepsilon_\lambda \right| \Psi_i \right\rangle. \quad (26)$$

Первое слагаемое в амплитуде (25) описывает квазисвободное фоторождение мезонов на ядрах, когда вылетевший из ядра нуклон полностью уносит переданный при фоторождении мезона импульс. Ядро-остаток A_f при этом остается простым наблюдателем (спектатором) [41], движущимся до и после реакции с неизменным импульсом

$$\mathbf{Q}_f = -\mathbf{p}_i, \quad (27)$$

$\mathbf{p}_i$ — импульс нуклона в ядре до образования на нем мезона. Пока $|\mathbf{Q}_f| < 250$ МэВ/с, обсуждаемая часть амплитуды много больше по модулю, чем $|\Delta|$ (26). С увеличением $|\mathbf{Q}_f|$ часть амплитуды, ответственная за квазисвободное фоторождение, резко уменьшается, делая важным вклад в сечение оставшейся части амплитуды Δ . Выражение (26) можно интерпретировать как амплитуду когерентного фоторождения η на $(A-1)$ нуклонах ядра, исключая вылетевший нуклон. В настоящее время эта часть амплитуды изучена недостаточно, но известно, что если $|\mathbf{Q}_f|$ попадает в интервал наиболее вероятного распределения нуклонов по импульсам в ядре (эту связь видно из выражения (27)), то при вычислении сечений величиной Δ в амплитуде (25) можно пренебречь [41–43]. В дальнейшем для реакций (23) будем рассматривать такую кинематическую область, где $50 < |\mathbf{Q}_f| < 250$ МэВ/с, полагая в амплитуде (25) $\Delta = 0$.

Если η -мезоны образуются на нуклонах s -оболочки, то в реакции (23) ядра A_f остаются в возбужденном состоянии с конфигурацией

$$|(1s)^3; (1p)^{A-4}\rangle,$$

соответствующей ”дырке” в s -оболочке. Такие состояния рассматриваются в ядерной модели оболочек как минимум с $1\hbar\omega$ квантом возбуждения в фермионной системе, которая излишне сложна в реализации расчетов нашей амплитуды (25). Используя модель оболочек с промежуточной связью [44,45], которая хорошо описывает основные и низколежащие возбужденные состояния p -оболочечных ядер только состоянием нуклонов во внешней оболочке, мы тем самым будем пренебрегать фотообразованием мезонов на нуклонах s -оболочки ядер в реакциях вида (23).

Рассмотрим теперь реакцию $(\gamma, \eta p)$ на ядре ^{12}C :

$$\gamma(k, \lambda) + ^{12}\text{C}(Q_i) \rightarrow \eta(q) + p(p_f) + ^{11}\text{B}^*(Q_f). \quad (28)$$

В обсуждаемой модели ядра волновую функцию ^{12}C достаточно взять в приближении наиболее симметричной пространственной ее части:

$$\psi_i(J_i, M_i) = |(1s)^4; (1p)^8[44]L_i = 0, S_i = 0, T_i = 0\rangle, \quad (29)$$

где J_i — спин ядра с проекцией M_i ; L_i, S_i, T_i — суммарные орбитальный, спиновый и изоспиновый моменты нуклонов ядра в p -оболочке, $[44] = [f_i]$ — схема Юнга [46] для тех же нуклонов. Амплитуду реакции (28) в импульсном приближении можно представить теперь в виде (LS -представление)

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{T}_{\gamma\eta} | i \rangle = & \sqrt{8} \sum_{\substack{L, S, T, [f], L_f, S_f, T_f \\ L^z, S^z, T^z, L_f^z, S_f^z, m, \tau}} a_{LST}^{[f]} \delta_{S_f, S} \delta_{L_f, L} \delta_{T_f, T} \delta_{[f_f], [f]} \times \\ & \times \langle L_f L_f^z, 1m | 00 \rangle \left\langle S_f S_f^z, \frac{1}{2} \xi | 00 \right\rangle \left\langle T_f T_f^z, \frac{1}{2} \tau | 00 \right\rangle \times \\ & \times \langle L_f L_f^z, S_f S_f^z | J_f M_f \rangle H_{\xi\tau}^{\alpha\beta}(\lambda) \tilde{D}_{1m}(\mathbf{Q}_f), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\langle \dots, \dots | \dots \rangle$ — обычные коэффициенты Клебша — Гордана,

$$H_{\xi\tau}^{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{s,t} \chi_{\beta}^{+}(t) \chi_{\alpha}^{+}(s) t_A^{\lambda}(s, t) \chi_{\xi}(s) \chi_{\tau}(t); \quad (31)$$

$a_{LST}^{[f]}$ — одночастичные генеалогические коэффициенты p -оболочки ядра. Для выбранной конфигурации вида (29) единственный не равный нулю генеалогический коэффициент есть

$$a_{11/2\,1/2}^{[43]} = 1,$$

$\tilde{D}_{1m}(\mathbf{Q}_f)$ — интеграл перекрытия. В приближении плоской волны для волновой функции уходящего мезона он имеет вид

$$\tilde{D}_{1m}(\mathbf{Q}_f) = \int d^3r \Phi_p^{(-)*}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{r}} \varphi_{1m}(\mathbf{r}), \quad (32)$$

$\varphi_{1m}(\mathbf{r})$ — пространственная часть волновой функции нуклона в p -оболочке ядра ^{12}C ; $\Phi_p^{(-)}(\mathbf{r})$ — волновая функция вылетающего нуклона, взаимодействующего с ядром. Для кинетической энергии протонов $T_p > 60$ МэВ их взаимодействие с ядром можно достаточно точно оценить с помощью простых моделей, в частности, используя волновую функцию нуклона $\Phi^{(-)}$ в ядре вида

$$\Phi_{pf}^{(-)}(\mathbf{r}) = \exp \left[\frac{1}{\beta} (-iV_R + V_I) d(\mathbf{r}) \right] \exp(i\mathbf{p}_f \mathbf{r}), \quad (33)$$

являющуюся решением уравнения Шредингера с однородным оптическим потенциалом $V(\mathbf{r}) = V_R + iV_I$. Здесь β — скорость, а $d(\mathbf{r})$ — длина траектории

протона в ядре, которую, следуя работе [47], полагали классической, т.е. параллельной импульсу $\mathbf{p}_f$. Поскольку волновая функция (33) пригодна только в вычислениях с однородной плотностью ядра, постольку величину $\tilde{D}_{1m}$, данную выражением (32), факторизовали, на основании теоремы о среднем, следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{1m} &= f D_{1m}, \\ f(V_R, V_I) &= \int d^3x \frac{3}{4\pi R^3} \exp \left[\frac{1}{\beta} (-iV_R + V_I) d(\mathbf{x}) \right] = \\ &= (2z^3)^{-1} [6(1+z)e^{-z} + (3z^2 - 3y^2 - 6y - 6)e^{-y} + y(3z^2 - y^2)], \quad (34) \\ z &= 2R \left[\frac{iV_R - V_I}{\beta} \right]; \quad y = RA^{-1/3} \left[\frac{iV_R - V_I}{\beta} \right].\end{aligned}$$

При вычислении этого интеграла учитывали, что нуклон, вылетающий из наружного слоя ядра толщиной $RA^{-1/3}$, обращенного в сторону направления вылета, не должен испытывать взаимодействия. Оставшийся интеграл

$$D_{1m}(\mathbf{Q}_f) = \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{p}_f)\mathbf{r}} \varphi_{1m}(\mathbf{r}) d^3r$$

есть интеграл перекрытия в приближении плоских волн, что касается вылетающих нуклона и мезона. С осцилляторными одночастичными функциями ядра $\varphi_{1m}(\mathbf{r})$, которые использовались в расчетах, этот интеграл выражается в элементарных функциях. В результате эффект взаимодействия протона с ядром-остатком в нашем случае для реакций (23) будет выражаться множителем $|f|^2$ при дифференциальном сечении, рассчитанном в плосковолновом приближении. Величины реальной и мнимой частей нуклон-ядерного оптического потенциала $V(x)$ были взяты из работы [41] (ряд 3). Следует заметить, что решение (33) адекватно отражает взаимодействие нуклонов с ядром только при энергии нуклонов больше 60 МэВ [47]. При энергии же ниже 40 МэВ — энергии гигантского резонанса — эффект нуклон-ядерного взаимодействия становится сильно зависящим от состояния ядра-остатка и не может быть учтен в простых моделях.

Пока ничего не говорилось о состояниях, в которых могут находиться ядра после вылета нуклонов из p -оболочки. В рассматриваемой ядерной модели могут быть учтены основное и низколежащие возбужденные состояния нормальной четности. Так, для реакции (28) в качестве таковых могут выступать три состояния:

1) основное состояние с энергией возбуждения $\varepsilon = 0$,

$$^{11}\text{B}(J^p = (3/2)^-, \quad T = 1/2); \quad (35)$$

2) первое и второе возбужденные состояния

$$^{11}\text{B}^*(J^P = (1/2)^-, T = 1/2), \quad (35a)$$

$$^{11}\text{B}^*(J^P = (3/2)^-, T = 1/2) \quad (35b)$$

с энергиями возбуждения $\varepsilon = 2, 12$ и $5,02$ МэВ соответственно.

2.3. Сечения реакций $A(\gamma, \eta N)A'$. Остановимся теперь на изучении сечений реакций фоторождения мезонов на ядрах с выбиванием нуклонов. Рассмотрим реакцию (28) с ядром-остатком в основном состоянии (35):

$$\gamma + ^{12}\text{C} \rightarrow \eta + p + ^{11}\text{B}_{\text{о.с.}} \quad (36)$$

Дифференциальное сечение этой реакции, усредненное по поляризациям фотона и просуммированное по поляризациям конечных частиц, имеет вид

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0} = \frac{64}{9} \mathcal{K}_3 \sum_{\lambda} (|K^P(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^P(\lambda)|^2) F(\mathbf{Q}_f) |f|^2, \quad (36a)$$

где $K^P = K^s + K^V$, $\mathbf{L}^P = \mathbf{L}^s + \mathbf{L}^V$; величину $F(\mathbf{Q}_f)$ с точностью до постоянного множителя называют функцией отклика. В нашем случае

$$F(\mathbf{Q}_f) = \pi^{3/2} r_0^3 (\mathbf{Q}_f r_0)^2 \exp(-\mathbf{Q}_f^2 r_0^2), \quad (37)$$

$\mathbf{Q}_f = \mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{p}_f$; r_0 — осцилляторный параметр, который для ядра ^{12}C выбирался равным $1,67$ фм;

$$\mathcal{K}_3 = (2\pi)^{-5} \frac{|\mathbf{q}| q_0 \mathbf{p}_f^2 p_{0f} Q_{0f}}{|\mathbf{p}_f| Q_{0f} - p_{0f} (|\mathbf{k} - \mathbf{q}| \cos \theta - |\mathbf{p}_f|)} \quad (38)$$

есть кинематический множитель для распределения $\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0}$, а θ — угол между импульсами $\mathbf{k} - \mathbf{q}$ и $\mathbf{p}_f$. Вычисленное дифференциальное сечение (36a) показано на рис.5 в сравнении с результатами расчета таких же сечений из работ [48,49]. Форма и величина рассчитанного распределения хорошо согласуются с результатами работы [49]. Так же, как и в этой работе, наше импульсное приближение "релятивизовано", благодаря использованию одно-нуклонного оператора фоторождения $\hat{t}^\lambda$ в форме, которая позволяет в полной мере учесть внутриядерное движение нуклонов с сохранением градиентной инвариантности ядерной амплитуды фоторождения в целом [50]. Рассчитанный эффект взаимодействия вылетевшего протона с ядром-остатком близок к эффекту, который приводят авторы [49] для этой же реакции.

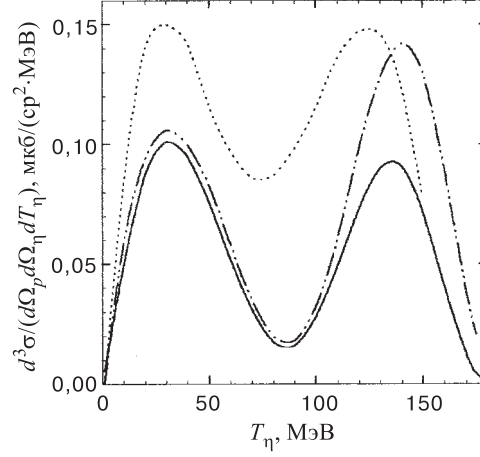


Рис. 5. Дифференциальные сечения реакции $^{12}\text{C}(\gamma, \eta p)^{11}\text{B}_{\text{о.с.}}$ для энергии фотонов $k_0 = 750$ МэВ и углов вылета мезона $\theta_\eta = 20^\circ$ и протона $\theta_p = 15^\circ$ в одной плоскости в зависимости от энергии η -мезона в лаб. системе. Сплошные кривые — результат, полученный в этой работе. Штрихпунктирной и точечной кривыми показаны результаты расчета этого же сечения из [49] и [48] соответственно

Подставив в амплитуду (30) $J_f = 1/2$ и $T_f = 1/2$, получим дифференциальное сечение реакции $(\gamma, \eta p)$ на ^{12}C с возбуждением первого уровня в ядре ^{11}B (35а):

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0} = \frac{32}{9} \mathcal{K}_3 \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) F(Q_f) |f|^2. \quad (39)$$

Разделить по энергиям возбуждения ядра-остатка реакции вида (23) не всегда представляется возможным, поэтому измеряемые распределения частиц в реакциях $(\gamma, \eta N)$ есть сумма от реакций с разными состояниями конечных ядер. Дифференциальное сечение реакции (28) с ядром-остатком во всевозможных связанных состояниях можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0} &= \mathcal{K}_3 \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) F(Q_f) |f|^2 \times \\ &\quad \times \left[\frac{64}{9}(1 + \alpha) + \frac{32}{9}(1 + \beta) \right], \\ \alpha &= \frac{1}{S_\alpha(0)} \sum_{\varepsilon} S_\alpha(\varepsilon), \quad \beta = \frac{1}{S_\beta(2, 13)} \sum_{\varepsilon} S_\beta(\varepsilon), \end{aligned} \quad (40)$$

где $S_\alpha(0)$, $S_\alpha(\varepsilon)$ — спектроскопические факторы нуклонов [45] p -оболочки ядра ^{12}C для образования основного и возбужденных состояний ядра ^{11}B с квантовыми числами $J^pT = (3/2)^-1/2$; $S_\beta(\varepsilon)$ — то же для состояний ^{11}B с $J^pT = (1/2)^-1/2$. Величины α и β для реакции (28) можно взять из работы [45]:

$$\alpha = \frac{0,756}{2,5} \approx 0,3; \quad \beta = 0.$$

Заметим, что выражением (40) можно пользоваться при энергиях фотонов несколько выше пороговых, чтобы масса (энергия возбуждения) ядра-остатка не влияла сильно на величины сечений. В противном случае сечения реакций с разными уровнями возбуждения конечного ядра надо вычислять по отдельности с разными кинематическими множителями $\mathcal{K}_3$.

Ядро с заполненной $1p$ -оболочкой ^{16}O имеет волновую функцию, подобную волновой функции (29) для ядра ^{12}C с одночастичными генеалогическими коэффициентами, равными единице. Поэтому дифференциальное сечение реакции

$$\gamma + ^{16}\text{O} \rightarrow \eta + p + ^{15}\text{N}_{o.c} \quad (41)$$

вычисляется по алгоритму расчета сечений для реакции (28). В результате получим

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0} = \frac{16}{3} \mathcal{K}_3 \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) F(Q_f) |f|^2. \quad (41a)$$

Осцилляторный параметр r_0 для ядра ^{16}O принимался равным 1,80 фм. Результат расчета показан на рис.6 в сравнении с результатами расчетов того же сечения из работы [49]. Интересно, что сечение реакции (41) оказывается меньше сечения реакции (36), а также сечения неупругой реакции

$$\gamma + ^{16}\text{O} \rightarrow \eta + p + ^{15}\text{N}^*((3/2)^-, 1/2), \quad (42)$$

с возбуждением уровня в ядре-остатке ^{15}N с энергией $\varepsilon = 6,3$ МэВ, которое можно представить в виде

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0} = \frac{32}{3} \mathcal{K}_3 \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) F(Q_f) |f|^2. \quad (42a)$$

Сведения о других возбужденных состояниях ядра ^{15}N с квантовыми числами основного состояния отсутствуют. В результате сечения реакций $(\gamma, \eta p)$ на ядрах ^{12}C и ^{16}O приблизительно одинаковы, несмотря на значительное различие числа нуклонов в $1p$ -оболочках этих ядер.

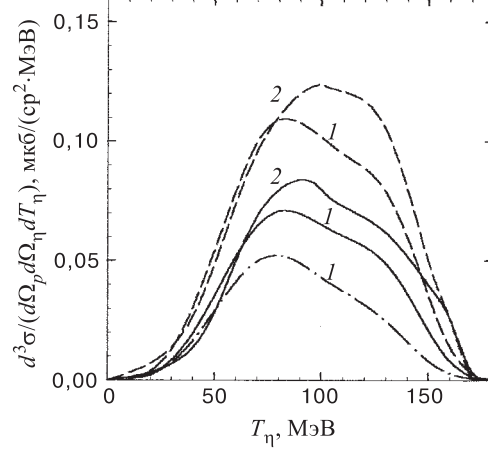


Рис. 6. Дифференциальные сечения реакции $^{16}\text{O}(\gamma, \eta p)^{15}\text{N}_{\text{о.с.}}$ для энергии фотонов $k_0 = 750$ МэВ и углов вылета мезона $\theta_\eta = 30^\circ$ и протона $\theta_p = 30^\circ$ в одной плоскости в зависимости от энергии η -мезона в лаб.системе. Кривые 1 — результат расчета данной работы без учета взаимодействия (штриховая кривая) и с учетом взаимодействия протонов в конечном состоянии при наличии реальной части оптического потенциала (штрихпунктирная) и без нее (сплошная кривая). Кривые 2 — результат расчета этого же сечения из работы [49], соответственно, с учетом (сплошная) и без учета взаимодействия протонов в конечном состоянии (штриховая кривая)

Используемая простая модель нуклон-ядерного взаимодействия в области своей применимости ($T_p > 60$ МэВ) ведет только к уменьшению сечения для реакций типа (23), причем как в отсутствие реальной части оптического потенциала, так и с ней (см. рис.6). Если в качестве критерия взять эффект взаимодействия уходящего протона с ядром ^{15}N , полученный в работе [49], то предпочтительней в нашей простой модели выбирать нуклон-ядерный потенциал чисто мнимым (см. рис.6). Поэтому ниже, если специально не оговорено, в выражении (34) для f будем полагать $V_R = 0$.

Если для описания ядра с замкнутой $1s$ -оболочкой ^4He использовать простую оболочечную модель с потенциалом гармонического осциллятора, то для сечения реакции



легко получить выражение, которое в обозначениях (37), (38) можно представить так:

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dq_0} = 8\mathcal{K}_3 \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) \frac{F(Q_f)}{(Q_f r_0)^2} |f|^2, \quad (43a)$$

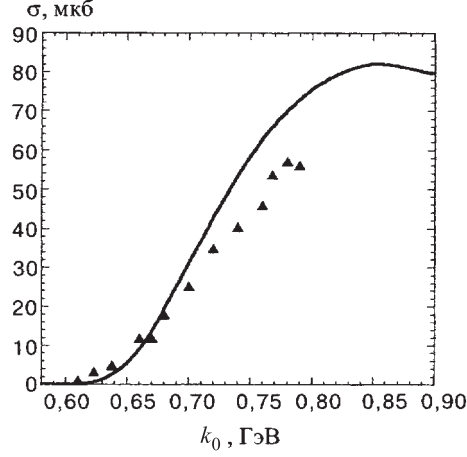


Рис. 7. Зависимость полного сечения реакции $^{12}\text{C}(\gamma, \eta)X$ от энергии налетающих γ -квантов. Экспериментальные данные взяты из работы [14]

с осцилляторным параметром $r_0 = 1,38$ фм для ядра ^4He . Трансляционная инвариантность используемых осцилляторных волновых функций ядер учитывалась в настоящих расчетах посредством замены осцилляторного параметра r_0 на

$$\tilde{r}_0^2 = r_0^2 \frac{A}{A-1} \quad (44)$$

для каждой из обсуждаемых реакций.

Выражения для сечений реакций $(\gamma, \eta n)$ на рассматриваемых ядрах такие же, как и выражения для сечений реакций $(\gamma, \eta p)$. Из других распределений продуктов реакций (23) нам потребуется распределение $\frac{d^3\sigma}{d\Omega_\eta d\Omega_p dT_p}$, для которого легко получить соответствующий кинематический множитель

$$\tilde{\mathcal{K}}_3 = (2\pi)^{-5} \frac{\mathbf{q}^2 |\mathbf{p}_f| P_{0f} Q_{0f} q_0}{|\mathbf{q}| Q_{0f} - q_0 (|\mathbf{k} - \mathbf{p}_f| \cos \tilde{\theta} - |\mathbf{q}|)},$$

где $\tilde{\theta}$ — угол между импульсами $\mathbf{k} - \mathbf{p}_f$ и $\mathbf{q}$.

По "рецепту", данному в работе [48], были оценены также сечения инклюзивных реакций фоторождения η -мезонов на ядрах ^{12}C и ^{16}O . Сравнение вычисленного в плосковолновом приближении полного сечения реакции $^{12}\text{C}(\gamma, \eta)X$ с экспериментальным [14] от порога до $k_0 = 790$ МэВ показано на рис.7. Незначительное превышение результата расчета над экспериментом при $k_0 > 700$ МэВ оставляет на эффект взаимодействия в конечном

состоянии, понижающий сечение, только 20–25%. Двукратное превышение вычисленного нами распределения $\frac{d^2\sigma}{d\Omega_\eta dq_0}$ при $k_0 = 720$ МэВ, $\theta_\eta = 10^\circ$ над результатом аналогичного расчета из работы [51] частично можно объяснить тем, что в их расчетах учитывается образование η -мезона через $S_{11}(1535)$ -изобару и ее взаимодействие с ядром. И, наконец, результат нашего расчета сечения $\frac{d^2\sigma}{d\Omega_\eta dq_0}$ реакции $^{16}\text{O}(\gamma, \eta)X$ при $k_0 = 800$ МэВ, $\theta_\eta = 25^\circ$ почти в три раза выше соответствующего результата работы [52]. Такое расхождение невозможно устранить даже с помощью более адекватного выбора сечения фоторождения η на нейтроне, чем это сделал автор работы [52].

3. ФОТОРОЖДЕНИЕ ЛЕГКИХ η -ЯДЕР

3.1. Модель фоторождения η -ядер. η -ядра могут возникать в разнообразных ядерных реакциях, протекающих с образованием η -мезона, путем "прилипания" последнего за счет взаимодействия притяжения к ядерным продуктам реакции. То есть фоторождение η -ядер может происходить по схеме:

$$\gamma + A \rightarrow \eta + A' + \dots \rightarrow {}_\eta A' + \dots,$$

где A' — какой-либо ядерный фрагмент, имеющий малую скорость относительно η -мезона. Наиболее простыми для теоретического исследования будут реакции фоторождения η на ядре с образованием только двух ядерных осколков, и, в частности, когда один из них просто нуклон (4):

$$\gamma + A \rightarrow N + {}_\eta A'.$$

Первые работы по оценке вероятности образования η -ядер в реакции (4) [53,54] вызвали ряд вопросов, связанных с недостаточным обоснованием результатов расчета. В настоящее время, когда η -ядра из гипотетических становятся все более реальными частицами, возникла потребность в более детальном обосновании модели их фоторождения в реакции (4). Механизм образования η -ядер показан диаграммой на рис.8. Согласно теории рассеяния на двух потенциалах [55], амплитуду реакции (4) можно представить

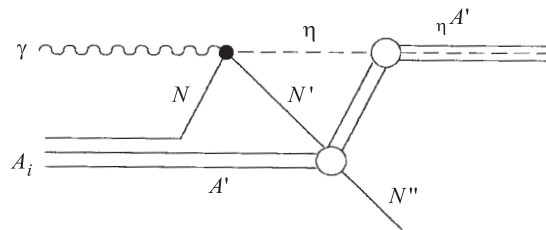


Рис. 8. Схема механизма фотообразования η -ядер в реакции $\gamma + A \rightarrow N + {}_\eta A'$

в виде суммы двух амплитуд с потенциалом фоторождения и потенциалом рассеяния мезона ядром. Так как в процессе фоторождения "сорт" частицы меняется, то из двух амплитуд, которыми описываются процессы рассеяния на двух потенциалах, в фоторождении остается одна — фоторождение мезона на ядре, в которой волновая функция уходящего мезона заменяется волновой функцией η -мезона, взаимодействующего с ядром A_f [55]. Так как образование квазиравновесного состояния η -мезон — ядро происходит за конечное время, а выбиваемые нуклоны быстры (исключая порог реакции (4)), то и взаимодействие нуклонов в конечном состоянии можно рассматривать как с обычными атомными ядрами.

Таким образом, в качестве механизма фотообразования η -ядер в реакциях типа (4) используется квазисвободное фоторождение η -мезонов на соответствующих атомных ядрах, а приближения последнего обсуждались в предыдущем разделе.

3.2. Фоторождение сверхлегких η -ядер. Полагая, в связи с вышесказанным, что сверхлегкие η -ядра могут существовать, рассмотрим фоторождение ${}^3_\eta\text{He}$ и ${}_\eta T$ в реакциях

$$\gamma + {}^4\text{He} \rightarrow p + {}_\eta T, \quad (45)$$

$$\gamma + {}^4\text{He} \rightarrow n + {}^3_\eta\text{He}. \quad (46)$$

Согласно изотопической инвариантности сильных взаимодействий, длины ηp - и ηn -рассеяния должны быть равными. Если не делать различия между радиусами η -ядер ${}^3_\eta\text{He}$ и ${}_\eta T$, то их волновые функции будут одинаковыми. Для нахождения волновых функций η -мезона в ядре воспользуемся длинами ηN -рассеяния из последних теоретических работ по их вычислению [22, 23]. Значения a_0 в этих работах различаются не принципиально, поэтому в расчетах будем использовать только одно значение (17) из работы [22]. Выбирая радиусы обсуждаемых сверхлегких η -ядер $R_{\text{як}} = 2,45$ фм, что соответствует среднеквадратичному радиусу $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 1,9$ фм, получим связанное состояние с собственным значением энергии

$$E = (2,30 + i5,50) \text{ МэВ}.$$

В простой ядерной модели оболочек амплитуда реакции (45) будет иметь вид

$$\langle f | \hat{T}_{\eta A} | i \rangle = (-1)^{\alpha+\xi+1} \sum_s \chi_\alpha^+(s) \hat{t}_p^\lambda(s) \chi_\xi(s) G_{00}(\mathbf{Q}_f), \quad (47)$$

$$G_{00}(\mathbf{Q}_f) = f(V_R, V_I) \int d^3r e^{i\mathbf{Q}_f \mathbf{r}} \varphi_{00}(\mathbf{r}) \varphi_\eta^{1s}(\mathbf{r}), \quad (48)$$

где $\mathbf{Q}_f = \mathbf{k} - \mathbf{p}_f$ — переданный η -ядру импульс; $\varphi_{00} = R_{00} \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{N_0}{\sqrt{4\pi}}$ — пространственная часть для волновой функции нуклона в ${}^4\text{He}$ в осцилляторной модели оболочек с нормировочным множителем N_0 ; $\varphi_\eta^{1s}(\mathbf{r})$ — нормированная волновая функция относительного движения η -мезона и ядра-остова; f — фактор учета взаимодействия протона с ядром в конечном состоянии в форме (34) с $V_R = 0$. Величину G_{00} можно представить в виде

$$G_{00}(\mathbf{Q}_f) = f \sqrt{\frac{16\pi}{Q_f^2 r_0^3}} \int_0^\infty dr \cdot r \sin(Q_f r) e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} \varphi_\eta^{1s}(\mathbf{r}) = f \sqrt{\frac{16\pi}{Q_f^2 r_0^3}} I_{0s}(Q_f). \quad (49)$$

Дифференциальное сечение реакции (45), усредненное по поляризациям фотона и просуммированное по поляризациям вылетающего протона, будет иметь вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_p} = \frac{16\sqrt{\pi}}{Q_f^2 r_0^3} \mathcal{K}_2 \sum_\lambda (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) |I_{0s}(Q_f)|^2 |f(V_I)|^2 \quad (50)$$

с кинематическим множителем $\mathcal{K}_2$ в лаб.системе:

$$\mathcal{K}_2 = (2\pi)^{-2} \frac{\mathbf{p}_f^2 p_{0f} Q_{0f}}{|\mathbf{p}_f|(k_0 + Q_{0i}) - k_0 p_{0f} \cos \theta_p}. \quad (51)$$

Выражение, аналогичное (50), получим и для сечения реакции (46), в котором вместо амплитуды фоторождения мезона на протоне входит амплитуда фоторождения на нейтроне.

На рис.9 показаны результаты вычислений полных сечений реакций (45), (46) с учетом и без учета взаимодействия нуклонов в конечном состоянии в зависимости от энергии налетающих γ -квантов. Сечения обеих реакций достигают наибольшего значения при энергии фотонов $k_0 = 770$ МэВ. Проявление в ядерных сечениях резонанса $S_{11}(1535)$ сглажено по сравнению с сечениями соответствующих элементарных процессов, благодаря учету по модели спектатора [41] фермиевского движения нуклонов в ядре. Взаимодействие протонов и нейтронов в конечном состоянии (для которых брался один и тот же нуклон-ядерный потенциал) ведут к незначительному уменьшению сечений реакций (рис.9). Из-за различия сечений фоторождения η -мезонов на протонах и нейтронах сечение реакции (45) ожидается больше сечения реакции (46) при рассматриваемых энергиях γ -квантов. Рассчитанные ширины η -ядер ${}^3_\eta\text{He}$ и ${}_\eta T$ (≈ 10 МэВ) оказались такими, какие предсказывались первоначально в работах [3,4], но для η -ядер тяжелее ${}^{16}_\eta\text{O}$. При таком значительном времени жизни сверхлегких η -ядер, естественно, возрождается идея их обнаружения в реакциях (45), (46) по пику в спектре

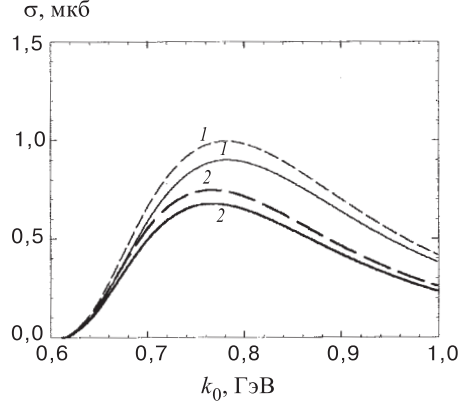


Рис. 9. Зависимость полного сечения реакций ${}^4\text{He}(\gamma, p)_{\eta}T$ (кривые 1) и ${}^4\text{He}(\gamma, n)_{\eta}{}^3\text{He}$ (кривые 2) от энергии налетающих γ -квантов с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые кривые) взаимодействия нуклонов в конечном состоянии

вылетающих нуклонов инклюзивных реакций ${}^4\text{He}(\gamma, N)$. Наиболее сильно от энергии нуклонов (при фиксированной энергии фотонов) будут меняться дифференциальные сечения реакций



фоторождения медленных, но не связанных η -мезонов. Поэтому важно знать угловые и энергетические распределения частиц в таких реакциях. Более подробно остановимся на обсуждении реакции (45) как кандидате на обнаружение легких η -ядер.

Вычисленное дифференциальное сечение реакции (45) для энергии γ -квантов $k_0 = 760$ МэВ в зависимости от угла вылета протона показано на врезке рис.10. Здесь же приведена зависимость дважды дифференциального сечения реакции (52) от энергии выбиваемого протона для угла вылета $\theta_p = 10^\circ$ и при той же энергии фотонов. Дифференциальное сечение реакции (45), взятое при угле вылета протона $\theta_p = 10^\circ$ в лаб.системе и "размазанное" по ширине уровня η -ядра $_{\eta}T$ по нормальному закону, изображено здесь же.

Результаты расчета обнадеживают. Оценка отношения сигнал/фон зависит от угла вылета протонов и составляет для $\theta_p = 5^\circ, 10^\circ$ и 15° , соответственно, 3,7/1; 2,9/1 и 2/1 (рис.10). Более тщательные расчеты могут изменить это отношение в ту или иную сторону, но не радикально. Ширина "провала" между квазиупругим пиком выбиваемых протонов в реакции (52) и пиком протонов от реакции (45) определяется энергией связи и шириной

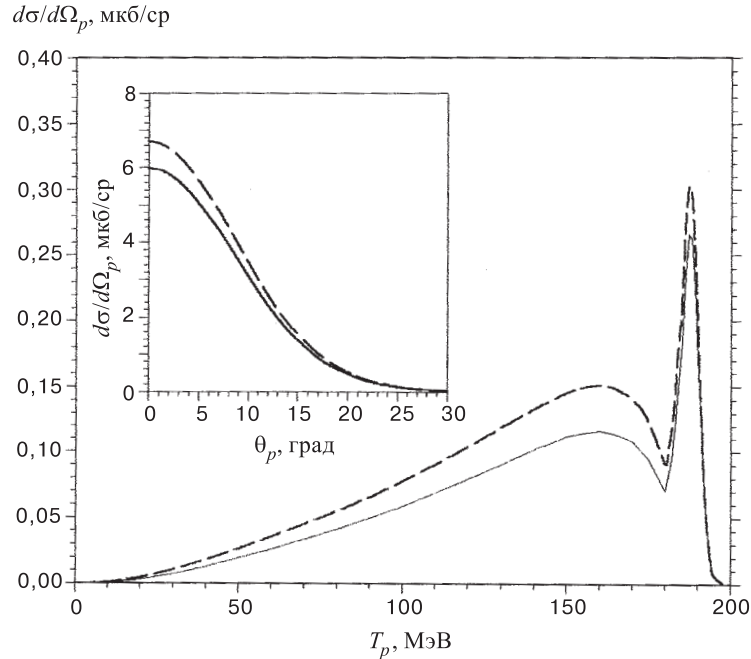


Рис. 10. Дифференциальное сечение реакций ${}^4\text{He}(\gamma, \eta p)T$ для энергии фотонов $k_0 = 760$ МэВ и угла вылета протонов $\theta_p = 10^\circ$ в зависимости от энергии протонов в лаб. системе. Сплошные кривые — результат расчетов с взаимодействием протонов в конечном состоянии, штриховые — без учета этого взаимодействия. Пик показывает дифференциальное сечение реакции ${}^4\text{He}(\gamma, p)_\eta T$ при названных кинематических условиях, "размазанное" по ширине уровня η -ядра по нормальному закону. На врезке показана зависимость дифференциального сечения реакции ${}^4\text{He}(\gamma, p)_\eta T$ от угла вылета протона при энергии фотонов $k_0 = 760$ МэВ

уровня η -ядра ${}_\eta T$ (см. рис. 10). Следует отметить уникальность η -ядер ${}^3_\eta\text{He}$ и ${}_\eta T$. Именно они (может быть, еще ${}_\eta D$) могут иметь такие маленькие ширины уровней и энергии связи из-за малой плотности. Так, следующее по весу η -ядро ${}^4_\eta\text{He}$ будет иметь уже собственную энергию

$$E = (17,5 + i16,9) \text{ МэВ}$$

для значения длины ηN -рассеяния (17), уменьшая отношение сигнал/фон в соответствующей реакции фотообразования ${}^4_\eta\text{He}$ больше чем в три раза, по сравнению с образованием ${}^3_\eta\text{He}$.

Для идентификации η -ядер в реакции (45) потребуются "меченые" фотоны высокой интенсивности с разрешением по энергии не хуже 2–3 МэВ. Так как реакция (45) двухчастичная, то существует жесткая связь между углом

и энергией вылетающего нуклона, поэтому если в ожидаемом месте спектра нуклонов от инклюзивной фотореакции

$$\gamma + {}^4\text{He} \rightarrow p + \dots \quad (54)$$

наблюдается пик, то это свидетельствует об образовании η -ядер в реакции (45). Высота пика пропорциональна сечению реакции (45) (если регистрировать нейтроны, то сечению реакции (46)), а ширина — ширине уровня η -ядра.

Расчеты инклюзивного сечения реакции (54) при $k_0 \approx 800$ МэВ как абсолютного фона для реакции (45) сложны. Отметим только, что инклюзивное сечение будет складываться из сечений двух-, трех-, четырехчастичной фотодезинтеграции ядра ${}^4\text{He}$, сечений одиночного и двойного фоторождения пионов и, наконец, сечения исследованной реакции (52).

3.3. Фотообразование η -ядер в $1s$ -состояниях. В отличие от фоторождения сверхлегких η -ядер с числом нуклонов $A < 4$, η -ядра с нуклонными остовами $A > 6$ могут образовываться не только в $1s$ -состоянии (см. табл.1). Кроме того, для ядер с $A > 6$ необходимо учитывать низколежащие возбужденные состояния самих нуклонных остовов, возбуждение которых (если их ширины меньше 1 МэВ), как мы полагаем, не будет оказывать влияния на образование и существование η -ядер. В этой связи следует отметить, что выбивание нуклонов из s -оболочки ядер с $A > 5$ приводит к высоковозбужденным состояниям атомного ядра вида "частица — дырка", время жизни которых того же порядка, что и η -ядер. Свойства η -ядер с нуклонными остовами, находящимися в сильновозбужденных состояниях, будут определяться и нестабильностью нуклонного кора, а потому требуют специального изучения, выходящего за рамки данного. Рассмотрим реакции (4) на ядрах ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{C}$, ведущие к образованию η -ядер в $1s$ -состоянии.

Амплитуду реакций (4) на p -оболочечных ядрах ($4 < A < 16$) в обсуждаемых приближениях запишем подобно амплитуде для реакций фоторождения η -мезонов на ядрах с выбиванием нуклонов (см. выражения (24) – (26)):

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{T}_{\eta A}^{1s} | i \rangle &= \sqrt{A-4} \left\langle \psi_f | \varphi_{\eta}^{*1s}(\mathbf{r}_1) f e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}_f)\mathbf{r}_1} \hat{\mathbf{t}}_1^{\lambda}(s_1, t_1) | \psi_i \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{A-4}{12}} \sum_{m, \xi} (-1)^{\xi-J_f+m} \left\langle 1m, \frac{1}{2}\xi \left| J_f - M_f \right. \right\rangle H_{\xi\tau}^{\alpha\beta}(\lambda) G_{1m}^0(Q_f), \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} G_{1m}^0(Q_f) &= f \int d^3r_1 e^{i\mathbf{Q}_f\mathbf{r}_1} \varphi_{1m}(\mathbf{r}_1) \varphi_{\eta}^{*1s}(\mathbf{r}_1) = \\ &= f \cdot i4\pi N_1 Y_m^1(\hat{\mathbf{Q}}_f) \frac{1}{Q_f^2} \cdot I_{0p}(Q_f); \end{aligned} \quad (56)$$

$$N_1 = \left[\frac{8}{3r_0^5 \sqrt{\pi}} \right]^{1/2}, \quad (57)$$

$$I_{0p}(Q_f) = \int dr_1 r_1 [\sin(Q_f r_1) - Q_f r_1 \cos(Q_f r_1)] \varphi_{\eta}^{*1s}(\mathbf{r}_1) e^{-r_1^2/2r_0^2}, \quad (58)$$

φ_{η}^{1s} — волновая функция η -мезона в ядре.

Дифференциальные сечения реакций

$$\gamma + {}^{12}\text{C} \rightarrow p + {}^{11}_{\eta}\text{B}_{\text{o.c}}(1s), \quad (59)$$

$$\gamma + {}^{16}\text{O} \rightarrow p + {}^{15}_{\eta}\text{N}_{\text{o.c}}(1s), \quad (60)$$

когда нуклонные остовы образующихся η -ядер ${}^{11}_{\eta}\text{B}$ и ${}^{15}_{\eta}\text{N}$ находятся в основном состоянии, можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_p} = \mathcal{K}_2 \frac{z\sqrt{\pi}}{Q_f^4 r_0^5} \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) \cdot |I_{0p}(Q_f)|^2 |f|^2, \quad (61)$$

причем для реакции (59)

$$z = 128/9,$$

а для реакции (60)

$$z = 32/3.$$

Так как выражения для сечений реакций (59) и (60) различаются только постоянным множителем, то достаточно остановиться на изучении одного из них. На рис.11 показана зависимость полного сечения образования ${}^{11}_{\eta}\text{B}_{\text{o.c}}(1s)$ в реакции (59) от энергии фотонов с учетом и без учета взаимодействия в конечном состоянии. Пороги реакций (4) определяются массой образующихся η -ядер. Рассчитанный порог реакции (59) почти на 60 МэВ ниже порога реакций (45) и (46); соответственно, ее сечение достигает максимума при $k_0 \approx 670$ МэВ. Чтобы оценить, как зависят результаты наших расчетов от параметров модели η -ядра, на рис.12 показана зависимость полного сечения реакции (59) от величины радиуса оптического η -ядерного потенциала. Для крайних значений $r_0 = 1,2$ и $1,5$ фм отклонение от приведенного выше результата составляет +9% и -17% соответственно. Другой важный параметр модели — это длина ηN -рассеяния. На рис.13 показано полное сечение реакции (60) в зависимости от энергии фотонов при разных глубинах η -ядерного потенциала прямоугольной формы (5), полученного на основе разных значений a_0 [21–23]. Незначительное различие сечений наблюдается только в околопороговой области энергий γ -квантов.

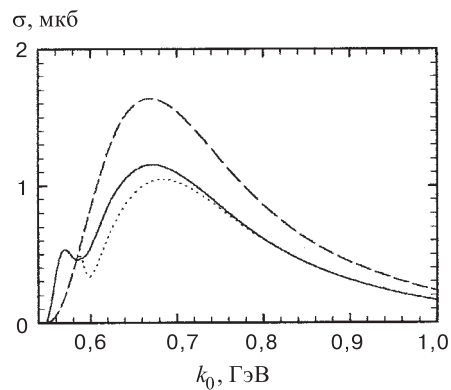


Рис. 11. Зависимость полного сечения реакции $^{12}\text{C}(\gamma, p)_{\eta}^{11}\text{B}_{\text{o.s.}}$ от энергии налетающих γ -квантов без учета взаимодействия в конечном состоянии (штриховая) и с учетом, как с полным ядерным оптическим потенциалом (точечная), так и без реальной его части (сплошная кривая). Взаимодействие протонов около порога реакции в обоих случаях учитывалось по результатам [56] способом, предложенным в [57]

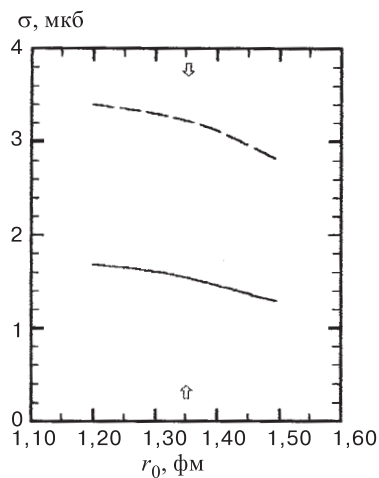


Рис. 12. Зависимость полного сечения реакции $^{12}\text{C}(\gamma, p)_{\eta}^{11}\text{B}_{\text{o.s.}}(1s)$ (сплошная) и $^{12}\text{C}(\gamma, p)_{\eta}^{11}\text{B}^*(1p)$ (штриховая кривая) от радиуса $r_0 = R_{\text{эк}} A^{-1/3}$ η -ядра при энергии γ -квантов $k_0 = 700$ МэВ. Стрелкой показано значение r_0 , которое используется в данных расчетах

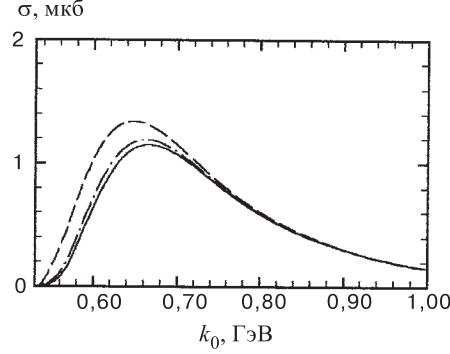


Рис. 13. Зависимость полного сечения реакции $^{16}\text{O}(\gamma, p)^{15}\text{N}_{0.c.}(1s)$ от энергии налетающих γ -квантов для значений длины ηN -рассеяния в η -ядерном потенциале (5) $a_0 = (0,880 + i0,274)$ фм [21] — штриховая кривая; $a_0 = (0,717 + i0,263)$ фм [22] — сплошная кривая; $a_0 = (0,751 + i0,274)$ фм [23] — штрихпунктирная кривая

Для демонстрации возможного эффекта взаимодействия в конечном состоянии вблизи порога рассмотрена модель, которая описывает взаимодействие нуклонов при $T_p < 40$ МэВ, где, как известно, нуклоны с ядрами взаимодействуют через гигантский дипольный резонанс. С использованием результатов работы [56] восстановлен эффект обсуждаемого взаимодействия для реакции (59) по методу [57] вплоть до энергии налетающих γ -квантов $k_0 = 580$ МэВ (рис.11). Заметим, что этот результат надо рассматривать как качественный, а именно, что можно ожидать от эффекта взаимодействия в конечном состоянии в пороге для реакций типа (4). Начиная с энергии протонов $T_p > 50$ МэВ, учет взаимодействия в конечном состоянии для реакции (59) приводит только к уменьшению ее сечения. Учет в рассматриваемой модели полного ядерного оптического потенциала приводит к большему подавлению сечения, чем учет только его мнимой части вплоть до энергии вылетающих протонов 300 МэВ. При еще больших энергиях нуклонов реальной частью оптического потенциала можно пренебречь (см.рис.11). Угловое распределение протонов от реакции (59) показано на рис.14. Оно характеризуется направленностью вперед. С увеличением энергии налетающих γ -квантов в угловом распределении появляется максимум при $\theta_p \approx 12^\circ$, которого нет в угловых распределениях реакций (45) и (46) и положение которого устойчиво к изменениям энергии фотонов в рассматриваемом диапазоне (рис.14).

Дифференциальное сечение реакции

$$\gamma + {}^{12}\text{C} \rightarrow p + {}^{11}_\eta\text{B}^*(1s), \quad (62)$$

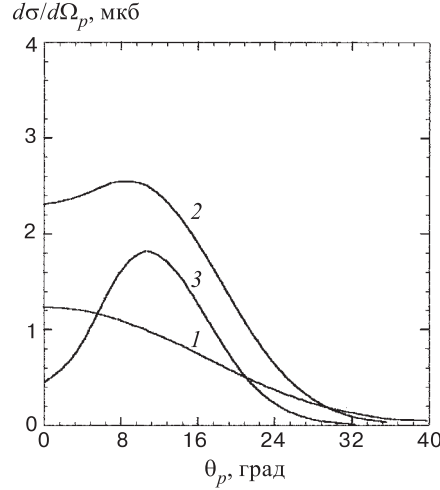


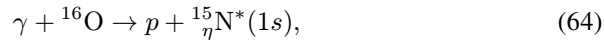
Рис. 14. Угловое распределение протонов реакции $^{12}\text{C}(\gamma, p)_{\eta}^{11}\text{B}_{\text{о.с.}}$ в лаб.системе при разных энергиях налетающих γ -квантов: 1 — $k_0 = 600$ МэВ; 2 — $k_0 = 700$ МэВ; 3 — $k_0 = 800$ МэВ. Для учета взаимодействия в конечном состоянии использовался ядерный оптический потенциал без реальной части

когда η -ядро образуется с нуклонным остовом в основном (35) и возбужденных (35а), (35б) состояниях, удобно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_p} = \mathcal{K}_2 \frac{z\sqrt{\pi}}{Q_f^4 r_0^5} \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |\mathbf{L}^p(\lambda)|^2) \cdot |I_{0p}(Q_f)|^2 |f|^2 \quad (63)$$

с $z = (192 + 128\alpha)/9$.

Подобным образом и дифференциальное сечение реакции



когда нуклонный остов ${}^{15}_{\eta}\text{N}$ остается в основном и первом возбужденном состоянии, сводится к выражению (63) с $z = 32$.

Полные сечения реакций (62) и (64) приведены на рис.15 и 16 в зависимости от энергии налетающих γ -квантов. Сечения этих реакций в два-три раза превосходят сечения соответствующих реакций (59), (60), в которых ядерные остовы остаются только в основном состоянии. Полученный результат, правда, может быть несколько завышен, из-за используемых упрощений типа (29) в применяемой ядерной модели. И энергетическое, и угловое распределения протонов, имеющие форму, как на рис.14, не позволят, по-видимому, выделить фотообразование η -ядер с разными возбужденными состояниями нуклонных остовов, а потому такие реакции рассмотрим как единые. Заметим, что энергетическое распределение протонов от реакций (62), (64) будет

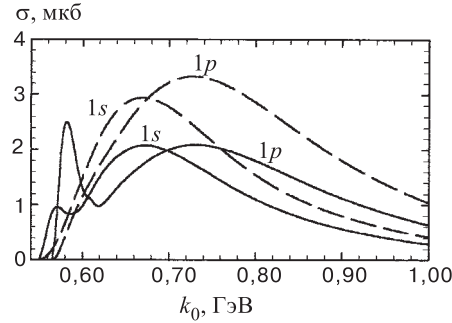


Рис. 15. Полные сечения реакций $\gamma + {}^{12}\text{C} \rightarrow p + {}^{11}\text{B}^*(1s)$ и $\gamma + {}^{12}\text{C} \rightarrow p + {}^{11}\text{B}^*(1p)$ в зависимости от энергии налетающих γ -квантов, рассчитанные с учетом (сплошные) и без учета (штриховые кривые) взаимодействия в конечном состоянии

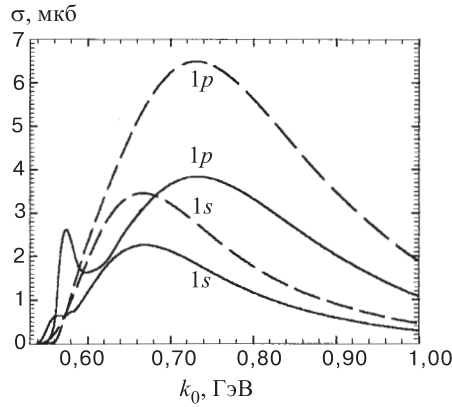


Рис. 16. То же, что на рис.15, для ядра-мишени ${}^{16}\text{O}$

”размазано” не только по большим ширинам образующихся η -ядер ${}^{11}_{\eta}\text{B}(1s)$ и ${}^{15}_{\eta}\text{N}(1s)$, но и по энергиям возбуждения их нуклонных остовов. Поэтому способ регистрации η -ядер по выделению пиков в энергетическом спектре протонов (нейтронов) реакции (4) с ядрами тяжелее ${}^4\text{He}$ будет менее эффективен, чем в реакциях (45), (46). В этой связи представляет интерес способ регистрации η -ядер по коррелированным продуктам их распада (см. [58]) совместно с ”быстрыми” нуклонами от реакции (4).

3.4. Фотообразование η -ядер в $1p$ -состоянии. η -ядра с числом нуклонов больше 6 могут образовываться путем захвата η -мезона на $1s$ - и на $1p$ -орбиту (табл.1). Фотообразование η -ядер в $1p$ -состоянии будет иным, чем образование ${}_{\eta}\text{A}(1s)$ в реакциях вида (4), а потому требует отдельного рассмотрения.

Чтобы свести к минимуму громоздкую алгебру углового момента, реакции вида

$$\gamma + A_i \rightarrow N + {}_\eta A'(1p) \quad (65)$$

рассмотрим на ядрах с нулевыми квантовыми числами, каковыми являются ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O}$. Амплитуды таких реакций запишем подобно амплитудам реакций $(\gamma, {}_\eta N)$ на этих же ядрах (см. выражение (30)):

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{T}_{\eta A}^{1p} | i \rangle &= \sqrt{\frac{A-4}{12}} \sum_{m, \xi, \nu} (-1)^{\xi+m} \langle 1-m, 1\nu | l\nu-m \rangle \langle l\nu-m, 1/2-\xi | J_f M_f \rangle \times \\ &\times H_{\xi\tau}^{\alpha\tau}(\lambda) G_{1m}^{1\nu}(\mathbf{Q}_f). \end{aligned} \quad (66)$$

В представлении углового момента тензор $G_{1m}^{1\nu}$ есть

$$\begin{aligned} G_{1m}^{1\nu}(\mathbf{Q}_f) &= 4\pi N_l N_\eta \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{n=-\kappa}^{\kappa} (i)^\kappa Y_n^\kappa(\hat{\mathbf{G}}_f) \iint_{\Omega_r} [Y_n^\kappa(\hat{\mathbf{r}})]^* Y_m^1(\hat{\mathbf{r}}) Y_\nu^1(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega_r \times \\ &\times \int_0^\infty j_\kappa(Q_f r) r e^{-r^2/2r_0^2} \frac{u_1(r)}{r} r^2 dr. \end{aligned} \quad (67)$$

С помощью стандартной алгебры сферических гармоник $G_{1m}^{1\nu}$ можно привести к виду

$$G_{1m}^{1\nu}(\mathbf{Q}_f) = N_l N_\eta \left[I_{10}(Q_f) - \sqrt{\frac{24\pi}{5}} Y_{m+\nu}^2(\hat{\mathbf{r}}) \langle 1m, 1\nu | 2m+\nu \rangle \cdot I_{12}(Q_f) \right]. \quad (68)$$

Наряду с ранее использованными обозначениями, в выражении (67) введены и новые. Это размерная величина

$$I_{1\kappa}(Q_f) = \int_0^\infty j_\kappa(Q_f r) e^{-r^2/2r_0^2} u_1(r) r^2 dr, \quad (69)$$

где $j_\kappa(z)$ — сферическая функция Бесселя, а $u_\ell(r)$ — решение уравнения (12) и радиальная часть волновой функции η -ядра в $1p$ -состоянии

$$\varphi_\eta^{1\nu}(\hat{\mathbf{r}}) = N_\eta \frac{u_1(r)}{r} Y_\nu^1(\hat{\mathbf{r}}), \quad (70)$$

нормированной на единицу с помощью нормировочного множителя N_η . Рассмотрим случай образования $1p$ – η -ядер с нуклонными остовами во всевозможных квазистационарных возбужденных состояниях:

$$\gamma + {}^{12}\text{C} \rightarrow p + {}^{11}_\eta\text{B}^*(1p), \quad (71)$$

$$\gamma + {}^{16}\text{O} \rightarrow p + {}^{15}_\eta\text{N}^*(1p), \quad (72)$$

что даст возможность использовать полноту спиновых состояний при вычислении квадрата модуля их амплитуд (см. выражение (66)). С помощью довольно громоздкой алгебры углового момента дифференциальные сечения реакций (71) и (72) можно записать одним выражением

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_p} = & z \cdot \mathcal{K}_2 \frac{|N_\eta|^2}{r_0^5 \sqrt{\pi}} \sum_{\lambda} (|K^p(\lambda)|^2 + |L^p(\lambda)|^2) \times \\ & \times \left\{ 5|I_{10}(Q_f)|^2 + [\sqrt{2}(9 \cos^2 \theta - 5) - 6 \cos^2 \theta - 2] \text{Re}[I_{10}(Q_f) \cdot I_{12}^*(Q_f)] + \right. \\ & \left. + \frac{26 + 2\sqrt{2}(5 - 9 \cos^2 \theta)}{3} |I_{12}(Q_f)|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (73)$$

где θ — угол вылета образующегося η -ядра. Для реакции (71)

$$z = 16/9,$$

а для реакции (72)

$$z = 8/3.$$

На рис.15,16, наряду с сечениями реакций (62) и (64), показаны результаты вычислений полных сечений реакций (71), (72). Видно, что сечения образования η -ядер в $1p$ -состоянии много больше сечений фотообразования соответствующих η -ядер в $1s$ -состоянии. Одна из причин этого — разные объемы фазового пространства конечных частиц, которое для реакций (65) оказывается больше, чем для соответствующих реакций

$$\gamma + A_i \rightarrow N + {}_\eta A'(1s). \quad (74)$$

Другая особенность образования $1p$ – η -ядер фотонами — это смещение широких максимумов в их сечениях в сторону больших энергий (≈ 80 МэВ) по сравнению с максимумами в сечениях реакций (74) (рис.15,16). Большая скорость возрастания сечения от порога для образования η -ядра в $1p$ -состоянии по сравнению с $1s$ -состоянием может приводить, за счет взаимодействия в конечном состоянии, к узким высоким пикам в сечениях реакций $A(\gamma, N)_\eta A'(1p)$ вблизи порога (кривые $1p$ на рис.15, 16).

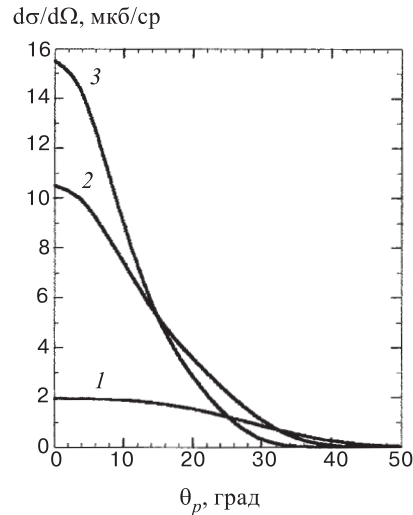


Рис. 17. Угловое распределение протонов реакции $^{16}\text{O}(\gamma, p)^{15}\text{N}^*(1p)$ в лаб.системе для энергий γ -квантов: 1 — $k_0 = 600$ МэВ; 2 — $k_0 = 700$ МэВ; 3 — $k_0 = 800$ МэВ. Взаимодействие в конечном состоянии учтено с помощью оптического потенциала без реальной части

Дифференциальное сечение реакции (72) при разных энергиях налетающих γ -квантов показано на рис.17. Обращает на себя внимание еще бóльшая, чем в случае образования η -ядер в $1s$ -состоянии, направленность вперед вылета нуклонов. Сечения наибольшие при $\theta_p = 0^\circ$ и резко уменьшаются с увеличением угла (рис.17). Сегодня актуальной задачей является экспериментальное подтверждение существования η -ядер с $A > 6$, а поэтому важно знать сечение их образования в различных состояниях. Такое сечение будет складываться из сечений образования η -ядер в $1s$ - и $1p$ -состояниях в силу ортогональности волновых функций этих состояний η -ядер. Угловое распределение протонов для образования ^{15}N в различных состояниях показано на рис.18 при разных энергиях налетающих γ -квантов. Хотя дифференциальное сечение наибольшее снова при нуле градусов, но сильно уменьшаться оно начинает с ростом угла вылета протонов только после перехода через $\theta_p \approx 12^\circ$. Заметим, что сечения в интервале углов $\theta_p \approx 0 \div 12^\circ$ большие. И, наконец, полные сечения образования η -ядер ${}^{\eta}\text{T}$, ${}^{11}_{\eta}\text{B}^*$, ${}^{15}_{\eta}\text{N}^*$ во всевозможных состояниях, что касается их нуклонных остовов и уровней возбуждения, в зависимости от энергии фотонов приведены на рис.19. Хотя сечения фотообразования η -ядер быстро возрастают с увеличением атомного номера ядер-мишеней, ширины образующихся η -ядер также сильно увеличиваются с ростом A , делая трудным обнаружение η -ядер с числом нуклонов $A > 12$.

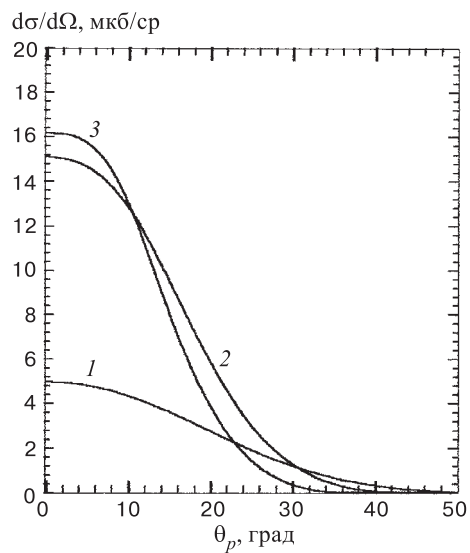


Рис. 18. Суммарное угловое распределение протонов реакции $^{16}\text{O}(\gamma, p)^{15}\text{N}^*$ для образования η -ядра $^{15}\text{N}^*$ в $1s$ - и $1p$ -состояниях. Остальные обозначения, как на рис.17

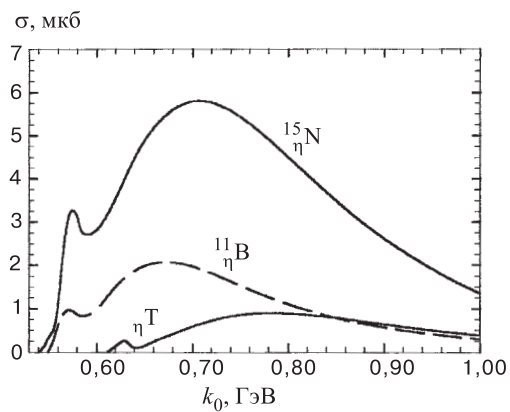


Рис. 19. Зависимость полных сечений реакций $^4\text{He}(\gamma, p)^{\eta}\text{T}$, $^{12}\text{C}(\gamma, p)^{11}_{\eta}\text{B}^*(1L)$ и $^{16}\text{O}(\gamma, p)^{15}_{\eta}\text{N}^*(1L)$ от энергии налетающих γ -квантов с учетом взаимодействия в конечном состоянии

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сложившаяся на сегодняшний день ситуация с η -ядрами довольно противоречивая. η -ядра появляются такими и там, какими и где их не ожидают! Предсказываемые в ранних работах тяжелые η -ядра с $A > 12$, видимо, обладают существенно другими свойствами, чем ранее предполагалось в работах [3,4], что заметно затруднило их экспериментальное обнаружение. Вместе с тем вот уже десятки лет тянется "след" от аномалии в сечениях образования η -мезонов вблизи порога на малонуклонных системах. Десятки теоретиков пытались объяснить увеличение силы взаимодействия в η -мезон-ядерной системе с уменьшением энергии, но все эти ранние попытки были неуклюжими, без привлечения гипотезы существования сверхлегких η -ядер. По-видимому, предсказание свойств η -ядер с $A > 6$ и их обнаружение по предсказанным свойствам позволит дать окончательный ответ на вопрос о существовании η -ядер и перейти к их систематическому изучению. В противном случае потребуются ответ на более трудный вопрос о том, почему η -ядра не существуют.

Автор выражает благодарность А.И.Лебедеву за предложенную тему исследования, А.И.Львову, Г.М.Радуцкому, А.И.Фиксу за плодотворные дискуссии, А.В.Колчину за полезное замечание и Ю.Ф.Кречетову за поддержку данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Particle Data Group.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.1173.
2. **Бару В.В., Кудрявцев А.Е.** — ЯФ, 1997, т.60, с.1620.
3. **Liu L.C., Haider Q.** — Phys. Lett., 1986, v.B172, p.257; 1986, v.B174, p.465(E).
4. **Liu L.C., Haider Q.** — Phys. Rev., 1986, v.C34, p.1845.
5. **Crien R.E., Bart S., Pile P. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.2595.
6. **Crien R.E.** — Czech. J. Phys., 1989, v.B39, p.914.
7. **Chiang H.C., Oset E., Liu L.C.** — Phys. Rev., 1991, v.C44, p.738.
8. **Johnson J.D., Burleson G.R., Edwards C. et al.** — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.2571.
9. **Frascaria R., Roudot F., Wurzinger R. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.C50, p.R537.
10. **Berthet P. et al.** — Nucl. Phys., 1985, v.A443, p.589.
11. **Liu L.C.** — Preprint LA-UR-94-2338, Los Alamos National Lab., 1994.
12. **Willis N., Le Bornec Y., Zghiche A. et al.** — Preprint IPNO-DRE-97-09, 1997.
13. **Krusche B., Ahrens J., Anton G. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.74, p.3736.
14. **Krusche B.** — Proc. Inter. Workshop XXIII on Gross Properties Nucl. and Nucl. Excitation. GSI, Darmstadt, 1995.
15. **Эрикссон Т., Вайзе В.** — Пионы и ядра. М.: Наука, 1991.
16. **Элтон Л.** — Размеры ядер. М.: ИЛ, 1962.

17. **Bhalero R.S., Liu L.C.** — Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, p.865.
18. **Arima M., Shimizu K., Yazaki K.** — Nucl. Phys., 1992, A543, p.619.
19. **Wilkin C.** — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.R938.
20. **Abaev V.V., Nefkens B.M.K.** — Preprint UCLA-10-P25-229, Los Angeles, University of California, 1994.
21. **Batinic M., Svarc A.** — Preprint IRB-FEP-03/95, Rudjue Boskovic Institute, Zagreb, 1995.
22. **Batinic M., Dadic I., Slaus I. et al.** — Preprint IRB-EF-2-96, Rudjue Boskovic Institute, Zagreb, 1996.
23. **Green A.M., Wycech S.** — Preprint HIP-1997-08, 1997.
24. **Anderson R.L., Prepost R.** — Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.46.
25. **Bilger R. et al.** — Proc. 14-th Inter. Conf. "Particle and Nuclei". Eds. C.E.Carlson, J.J.Domingo. (WSP), 1996.
26. **Кандратюк Л.А., Ладю А.В., Узиков Ю.Н.** — ЯФ, 1995, т.58, с.524.
27. **Ueda T.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.297.
28. **Лебедев А.И., Сокол Г.А.** — Препринт ФИАН, №34, 1995.
29. **Svarc A., Batinic M., Slaus I.** — Few-Body Syst. Suppl., 1995, №9, p.203.
30. **Rakityansky S.A., Sofianos S.A., Belayev V.B. et al.** — Few-Body Syst. Suppl., 1995, №9, p.227.
31. **Rakityansky S.A., Sofianos S.A., Braun M. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.R2043.
32. **Niskanen J.A., Wycech S., Green A.M.** — Few-Body Syst. Suppl., 1995, №9, p.404.
33. **Bucci C., Penso G., Salvini G. et al.** — Nuov. Cim., 1966, v.45A, p.983.
34. **Delcourt B., Lefrancois J., Perez-Y-Jorba J.P. et al.** — Phys. Lett., 1969, v.B29, p.75.
35. **Wilhelm M.** — Dissertation. Bonn University, 1993.
36. **Hicks H.R., Deans S.R., Jacobs D.T. et al.** — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.2614.
37. **Benmerrouche M., Mukhopadhyay C.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.67, p.1070.
38. **Bennhold C., Tanabe H.** — Nucl Phys., 1991, v.A530, p.625.
39. **Tiator L., Bennhold C., Kamalov S.S.** — Nucl Phys., 1994, v.A580, p.455.
40. **Fix A., Arenhovel H.** — Nucl Phys., 1997, v.A620, p.457.
41. **Laget J.M.** — Nucl Phys., 1972, v.A194, p.81.
42. **Главанаков И.В.** — ЯФ, 1989, т.49, с.91.
43. **Ананьин П.С., Главанаков И.В.** — ЯФ, 1990, т.52, с.323.
44. **Cohen S., Kurath D.** — Nucl Phys., 1965, v.73, p.1.
45. **Бояркина А.Н.** — Структура ядер p -оболочки. М.: МГУ, 1973.
46. **Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф.** — Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М.: Наука, 1969.
47. **Fernbach S., Serber R., Taylor T.B.** — Phys. Rev., 1949, v.75, p.1352.
48. **Lee F.X., Wright L.E., Bennhold C., Tiator L.** — Nucl Phys., 1996, v.A603, p.345.
49. **Hedayati-poor M., Sherif H.S.** — Phys. Rev., 1997, v.C56, p.1557.
50. **Трясучев В.А.** — ЯФ, 1983, т.37, с.85.
51. **Chen L., Chiang H.-C.** — Phys. Lett., 1994, v.B329, p.424.

- 52. Carrasco R.C. — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.2538.
- 53. Lebedev A.I., Tryasuchev V.A. — J. Phys. G.: Nucl. Part. Phys., 1991, v.17, p.1197.
- 54. Лебедев А.А., Трясучев В.А. — ЯФ, 1995, т.58, с.642.
- 55. Гольдбергер М., Ватсон К. — Теория столкновений. М.: Мир, 1967.
- 56. Золенко В.А., Солдатов С.А. — ЯФ, 1997, т.60, с.1971.
- 57. Findlay D.J.S., Owens R.O. — Nucl. Phys., 1977, v.A292, p.53.
- 58. Сокол Г.А., Трясучев В.А. — КСФ (ФИАН), 1991, №4, с.23.

СИЛЬНОНЕЙТРОНОИЗБЫТОЧНЫЕ ИЗОТОПЫ ЛЕГКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Структура ядер

Р.Калтакчиева, Ю.Э.Пенионжкевич

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Х.Г.Болен

Институт им. Гана — Майтнер, Берлин, Германия

Данная работа представляет собой вторую часть обзора (см. [234]) о свойствах легких нейтроноизбыточных ядер. Она посвящена структуре нейтроноизбыточных изотопов легких элементов с $2 \leq Z \leq 5$ (изотопы ${}^6,7,8,9,10\text{He}$, ${}^{10,11}\text{Li}$, ${}^{11,12,13,14}\text{Be}$ и ${}^{14,15,16}\text{B}$). В обзоре отражены результаты, опубликованные до января 1999 г. Самые последние результаты получены с использованием радиоактивных экзотических мишеней, таких, как ${}^{14}\text{C}$ и ${}^{10}\text{Be}$, а также радиоактивных пучков. Представлена информация, которая позволяет получить представление о свойствах легких ядер на границе нейтронной стабильности. Для расположенных у границ нейтронной стабильности ядер обнаружены необычные явления (нейтронное гало, нейтронная «шуба», особенности в последовательности заполнения оболочек и др.). Проводится сравнение экспериментальных данных с расчетами в рамках существующих теоретических моделей.

The present work is the second part of a review [234] dedicated to the properties of light neutron-rich nuclei. It deals with the structure of isotopes of the lightest elements with $2 \leq Z \leq 5$ (the isotopes ${}^6,7,8,9,10\text{He}$, ${}^{10,11}\text{Li}$, ${}^{11,12,13,14}\text{Be}$ and ${}^{14,15,16}\text{B}$). Information has been included from papers published up to January 1999. The latest results have been obtained with the use of exotic targets, such as ${}^{14}\text{C}$ and ${}^{10}\text{Be}$, as well as radioactive nuclear beams. This information sheds light on the properties of light nuclei located close to the neutron dripline. For such nuclei unusual properties have been observed (neutron halo, neutron skin, energy level inversion, etc.). The experimental data are compared to calculations done within the existing theoretical approaches.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к легким нейтроноизбыточным ядрам объясняется обнаружением их необычных свойств, отличающихся от общеизвестных закономерностей. Однако основной интерес к исследованию легких ядер связан с возможностью определения границы нейтронной стабильности и получением информации о свойствах экзотических ядер вблизи этих границ.

Развитие техники получения интенсивных пучков тяжелых ионов, в том числе промежуточных и высоких энергий, и последующие эксперименты на этих пучках привели к обнаружению новых связанных нейтроноизбыточных

ядер. В области легчайших ядер были обнаружены также ядра, расположенные за границей нейтронной стабильности, т.е. нейтронно-нестабильные ядра, которые живут достаточно долго и проявляются в виде резонансов. Из известных экспериментальных данных следует, что лишь для области самых легких элементов ($Z < 10$) можно сделать окончательные выводы о положении границы нейтронной стабильности.

Используемые для предсказания стабильности ядер массовые формулы не дают однозначной информации о положении границы нейтронной стабильности, поскольку они основаны на наших знаниях о свойствах ядер вблизи линии β -стабильности. Поэтому интерес к прямым экспериментам по изучению структуры легких ядер на границе нуклонной стабильности всегда был велик. Новые возможности в этих исследованиях, а также в исследованиях ядерных реакций под действием экзотических ядер, открывают вторичные пучки радиоактивных ядер.

Экспериментальное измерение массы является одним из необходимых условий определения стабильности и свойств слабосвязанных ядер. Схемы уровней легких нейтроноизбыточных ядер, как стабильных, так и нестабильных по отношению к распаду с испусканием нейтронов, также имеют важное значение для определения свойств экзотических ядер. Эксперименты по изучению свойств экзотических ядер с экстремальными значениями N/Z (сильно удаленных от линии β -стабильности), проводимые в разных лабораториях мира, позволили выявить ряд неожиданных явлений — существование нейтронного и протонного гало, новых областей деформации, новых типов распада, особенности в последовательности заполнения оболочек и т.д. Безусловно, наиболее ярким из них является существование в некоторых легких ядрах нейтронного гало. Увеличение радиуса распределения ядерного вещества в ядрах у границ нейтронной стабильности явилось первым признаком гало в экзотических ядрах. Пока известны только несколько ядер с двухнейтронным гало (${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^{14}\text{Be}$, ${}^{17}\text{B}$) и всего два ядра с одонейтронным гало (${}^{11}\text{Be}$, ${}^{19}\text{C}$), хотя предсказывается существование и других галообразных ядер.

Любой новый экспериментальный результат для ядер с необычным соотношением N/Z представляет самостоятельный интерес и является также источником информации, необходимой для проверки и развития существующих теоретических моделей.

В связи с интенсивным накоплением новой информации о свойствах легчайших ядер мы посчитали необходимым написать настоящий обзор, в котором постарались представить полученные в последние несколько лет данные о структуре нейтроноизбыточных изотопов легких элементов, больше всего привлекающих внимание экспериментаторов и теоретиков. Это изотопы ${}^{6,7,8,9,10}\text{He}$, ${}^{10,11}\text{Li}$, ${}^{11,12,13,14}\text{Be}$ и ${}^{14,15,16}\text{B}$.

1. ИЗОТОПЫ ГЕЛИЯ

Изотопы гелия представляют особый интерес, который объясняется прежде всего тем, что именно для них достигнут наибольший нейтронный избыток: ${}^8\text{He}$ ($N/Z = 3$) — наиболее нейтроноизбыточный нуклонно-стабильный, и ${}^{10}\text{He}$ ($N/Z = 4$) — нуклонно-нестабильный изотопы, когда-либо наблюдавшиеся в эксперименте. В течение многих лет одной из привлекательных задач ядерной физики была задача поиска ${}^{10}\text{He}$.

В изотопах гелия ярко проявляются четно-нечетные эффекты: изотопы с четным числом нейтронов ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$ — нуклонно-стабильные (за исключением ${}^{10}\text{He}$), а с нечетным числом ${}^5\text{He}$, ${}^7\text{He}$, ${}^9\text{He}$ — нуклонно-нестабильные. Таким образом, изотопы ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ можно отнести к так называемым «борроминовским» ядрам [1]; их можно рассматривать как трехчастичные стабильные системы, в которых стоит убрать одну из составных частей, и остаток будет являться нестабильным. Ядро ${}^6\text{He}$ является наиболее легким борроминовским ядром.

Одно из наиболее интересных свойств ядер, обнаруженных в последнее время, — наличие нейтронного гало (neutron halo). Ядра ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ обладают гало второго рода [2]. Оно является результатом очень компактного кора в виде α -частицы. Принято считать, что эти ядра имеют толстую нейтронную «шубу» (neutron skin). Их изучение может дать ответ на вопрос о существовании более чем двух частиц в гало, а также о наличии корреляций, которые приводят к появлению мультинейтронных кластеров. Предполагается, что энергия спаривания играет важную роль в структуре нейтронно-обогащенных ядер: слабое взаимодействие между двумя нейтронами может существенно увеличиться в поле третьей частицы (ядерного кора), в результате чего на поверхности ядра можно ожидать образование динейтронных кластеров [3]. С этой точки зрения особый интерес представляет ${}^8\text{He}$. В отличие от ${}^6\text{He}$ и ${}^{11}\text{Li}$, которые имеют по два нейтрона в нейтронном гало, ${}^8\text{He}$ имеет четыре валентных нейтрона сверх ядра-кора (α -частица). Возможно, они могут сгруппироваться в один или два динейтрона, или даже в тетранейтрон. Еще более интересным с этой точки зрения должен быть ${}^{10}\text{He}$, имеющий шесть нейтронов сверх кора. В связи с этим изучение свойств распада ядерных уровней, лежащих выше порогов мультинейтронной эмиссии, может дать ответ на вопрос, каким образом испускаются нейтроны — как скоррелированные пары или последовательно через промежуточные резонансы.

Наличие гало связано и с возможным проявлением коллективных состояний, подобных гигантскому резонансу, но при меньших энергиях возбуждения. Например, для ядра ${}^6\text{He}$ были предсказаны мягкий дипольный резонанс при $E^* \sim 5 \div 7$ МэВ [4], а также существенное уменьшение энергии векторного гигантского монопольного резонанса до энергии возбуждения около 13 МэВ [2]. Поэтому, интерес представляет также поиск мягких

коллективных возбуждений в ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. Необходимо отметить, что эта задача является лишь частным случаем поиска возбужденных состояний в изотопах гелия.

Экспериментальная информация о возбужденных состояниях в этих ядрах до недавнего времени была неполной. Обнаружение возбужденных уровней дает важную информацию о последовательности заполнения оболочек в этих легких нейтроноизбыточных ядрах, позволяет сделать выводы о точности предсказаний стандартной оболочечной модели для спинов и четностей уровней, а также нейтронных чисел, при которых заполняются ядерные оболочки.

Поэтому в этом разделе мы по возможности подробно представим существующую информацию о структуре ядер ${}^6\text{He}$, ${}^7\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^9\text{He}$, ${}^{10}\text{He}$.

1.1. Ядро ${}^6\text{He}$. Основное состояние ядра ${}^6\text{He}$ является стабильным по отношению к распаду ${}^4\text{He} + 2n$ на 0,975 МэВ [5]. Стабильность этого состояния является следствием спаривания нуклонов за счет добавления одного нейтрона к ядру ${}^5\text{He}$, у которого нечетное число нейтронов.

В ${}^6\text{He}$ имеется возбужденный уровень при $E^*(2^+) = 1,797$ МэВ. Другие уровни наблюдались только при $E^* > 13$ МэВ.

Уровень 2^+ не связан по отношению к распаду с испусканием двух нейтронов на $\sim 0,8$ МэВ. Из рассмотрения энергетической схемы уровней ядер ${}^4\text{He}$, ${}^5\text{He}$ и ${}^6\text{He}$ можно сделать вывод, что этот уровень должен испытывать прямой развал на ${}^4\text{He} + 2n$. Открытым остается вопрос: скоррелированы ли эти два нейтрона?

Как уже отмечалось выше, ядро ${}^6\text{He}$ принадлежит к классу ядер с гало 2-го рода. Поэтому можно предположить, что в нем существуют низколежащие коллективные состояния, в том числе и мягкая дипольная мода. Таким образом, схема уровней ${}^6\text{He}$ должна отражать свойства нейтронного гало. Поискам этих состояний посвящен ряд как теоретических, так и экспериментальных работ.

Некоторые указания на низколежащий широкий резонанс с $E^* \sim 7$ МэВ были получены в работе [6] в реакции ${}^6\text{Li}(n, p){}^6\text{He}$. Однако в остальных работах, кроме [7], этому не было найдено подтверждения.

Авторы работы [7] утверждают, что в реакции ${}^6\text{Li}({}^7\text{Li}, {}^7\text{Be}){}^6\text{He}$ при $E({}^7\text{Li}) = 82$ МэВ они сумели выделить широкие резонансы в области континуума. Эти резонансы (рис.1) соответствуют энергиям $E^* = 6, 12$ и 19 МэВ, что не противоречит результату, полученному в [6] для реакции ${}^6\text{Li}(n, p){}^6\text{He}$. Все резонансы довольно широкие. Например, резонанс при $E^* \approx 6$ МэВ имеет ширину $\Gamma \approx 4,8$ МэВ. Сравнение измеренного углового распределения с расчетом, в котором учитывался вклад от основного и возбужденного уровней ${}^7\text{Be}$, показал, что хорошее согласие получается, только если предположить, что резонанс при $E^* \approx 6$ МэВ имеет дипольный характер ($L = 1$).

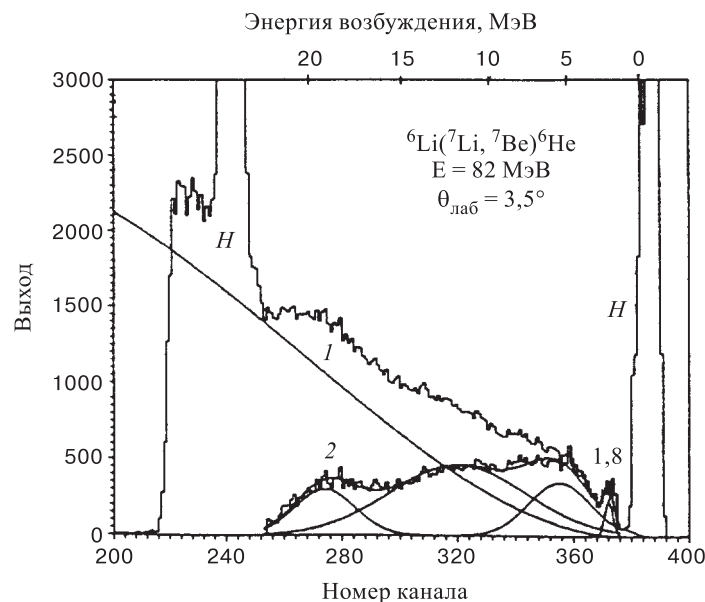


Рис. 1. Спектр ядра ${}^6\text{He}$, измеренный в реакции ${}^6\text{Li}({}^7\text{Li}, {}^7\text{Be}){}^6\text{He}$ при энергии 82 МэВ и $\theta = 3,5^\circ$ [7]: кривая 1 — 4-частичное (${}^7\text{Be}, \alpha, 2n$) фазовое пространство, нормализованное при $E^* = 22$ МэВ, кривая 2 — результат вычета кривой 1 из экспериментального спектра

Поэтому этот резонанс в [7] рассматривался как соответствующий предсказанному мягкому дипольному резонансу в ядре ${}^6\text{He}$.

Мягкий дипольный резонанс был предсказан для ядра ${}^6\text{He}$ в области энергии возбуждения $E^* = 4 \div 7$ МэВ [4]. Однако целый ряд теоретических расчетов, описывающих возбужденные состояния ${}^6\text{He}$, не могли дать определенный ответ о существовании в ${}^6\text{He}$ 1^- -резонанса, который мог быть отнесен к мягкой дипольной моде возбуждения (например, [8–10]). В расчетах спектра ${}^6\text{He}$, проведенных в [11], при малых энергиях возбуждения были определены две структуры резонансного типа: одна узкая, соответствующая хорошо известному 2^+ -уровню, и вторая широкая при $E^* \sim 4,5$ МэВ, в которую вклад дают мягкие моды 1^- , 2^+ , 1^+ и 0^+ . Однако полученные характеристики 1^- -мягкой моды не позволили назвать ее резонансом.

Поэтому весьма актуальной оказалась работа [12], где для поиска возбужденных уровней ${}^6\text{He}$ также была использована реакция ${}^6\text{Li}({}^7\text{Li}, {}^7\text{Be}){}^6\text{He}$, но при энергии 50 МэВ/А. В измеренных энергетических спектрах наблюдались основное и первое возбужденное состояния при $E^* = 1,8$ МэВ, а также три других широких резонанса при $E^* = (5,6 \pm 0,3)$, $(14,6 \pm 0,7)$ и $(23,3 \pm 1,0)$ МэВ с ширинами $\Gamma = 12,1$; $7,4$ и $14,8$ МэВ. Измеренные

угловые распределения фитировались DWBA-расчетами. Хорошее согласие между экспериментом и расчетом получено для состояний с $E^* = 0, 0, 1, 8, 5, 6$ и $14, 6$ МэВ, если принять для них значения $J^\pi = 0_1^+, 2_1^+, 2_2^+$ и $1_1^-(2^-)$. В результате этих исследований не было подтверждено значение $J^\pi = 1^-$ для уровня $5, 6$ МэВ. Не исключено, что он соответствует низколежащему квадрупольному резонансу, который недавно был предсказан для ядер с нейтронной шубой [13].

Несомненно, структура ядра ${}^6\text{He}$ требует дальнейшего изучения, в том числе и по причине того, что теоретические расчеты весьма противоречивы относительно энергий и спинов возбужденных состояний [10–15].

В проблеме исследования гало в ядрах гелия принципиальным является вопрос измерения радиусов этих ядер. Исследованию радиусов ядер гелия, в том числе и ${}^6\text{He}$, посвящено несколько работ. Впервые систематическое измерение радиусов гелиевых ядер проведено в работе [16]. Позже в результате измерения радиусов изотопов Li и Be [17] было показано, что имеет место разница в нуклонных радиусах изобар с разными изospинами, ${}^6\text{He} - {}^6\text{Li}$, ${}^8\text{He} - {}^8\text{Li}$, в то время как в зеркальных ядрах ${}^7\text{Li} - {}^7\text{Be}$ такой разницы нет. Большие радиусы нейтроноизбыточных ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ показали возможность существования толстой нейтронной «шубы», которая проявляется в разнице между значениями R_{rms}^p и R_{rms}^n .

Проверка гипотезы существования нейтронной «шубы» была сделана на основе комбинированного анализа сечений взаимодействия (σ_I) изотопов He и сечений срыва двух и четырех нейтронов (σ_{-2n} и σ_{-4n}) с бомбардирующих ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ на углеродной мишени. Показано, что между этими сечениями существует определенная связь [18]. Если ${}^6\text{He}$ состоит из кора (${}^4\text{He}$) плюс два нейтрона, то имеет место соотношение

$$\sigma_{-2n}({}^6\text{He}) = \sigma_I({}^6\text{He}) - \sigma_I({}^4\text{He}).$$

Измеренные сечения этих реакций [16, 17, 19] для ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ подтвердили предположение, что ядро ${}^4\text{He}$ является кором для ${}^6\text{He}$.

Однако в случае ${}^8\text{He}$ полученные сечения [16, 17, 19] не удовлетворяют соотношению

$$\sigma_{-2n}({}^8\text{He}) = \sigma_I({}^8\text{He}) - \sigma_I({}^6\text{He}),$$

откуда следует, что ${}^6\text{He}$ не является кором ${}^8\text{He}$. В то время было показано, что сечения следуют зависимости

$$\sigma_{-2n}({}^8\text{He}) + \sigma_{-4n}({}^8\text{He}) = \sigma_I({}^8\text{He}) - \sigma_I({}^4\text{He}).$$

Это означает, что ядро ${}^8\text{He}$ также имеет α -частичный кор и четыре нейтрона сверх этого кора.

Учитывая, что ${}^4\text{He}$ является кором для ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$, в рамках глауберовской модели, а также релятивистской теории среднего поля рассчитаны

Таблица 1. Среднеквадратичные радиусы распределения нуклонов, протонов и нейтронов в ядрах ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. R_I — радиусы взаимодействия

Ядро	${}^4\text{He}$	${}^6\text{He}$	${}^8\text{He}$
R_I , фм [17]	$1,41 \pm 0,03$	$2,18 \pm 0,02$	$2,48 \pm 0,03$
R_{rms}^m , фм [20]	$1,57 \pm 0,04$	$2,48 \pm 0,03$	$2,52 \pm 0,03$
R_{rms}^n , фм	$1,63 \pm 0,03$	$2,59 \pm 0,04$	$2,69 \pm 0,04$
R_{rms}^p , фм [21]	$1,63 \pm 0,03$	$1,72 \pm 0,04$	$1,76 \pm 0,03$
R_{rms}^m , фм	$1,63 \pm 0,03$	$2,33 \pm 0,04$	$2,49 \pm 0,04$
ΔR^{rms} , фм	0	$0,87 \pm 0,06$	$0,93 \pm 0,06$

нуклонные, протонные и нейтронные среднеквадратичные радиусы этих ядер [17, 20, 21]. Они представлены в табл. 1. Из расчетов видно, что нейтронные распределения для ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ более протяженные, чем распределения протонов, и они начинают существенно превышать протонные при $R > 1$ фм, при этом $R_{rms}^n - R_{rms}^p \approx 0,9$ фм. В рамках трехчастичной модели [4] также было получено значение $\Delta R^{rms}({}^6\text{He}) \approx 0,8$ фм.

В рассматриваемом случае толстая нейтронная «шуба», очевидно, не является результатом слабой энергии связи валентных нейтронов, как это имеет место в случае ядра ${}^{11}\text{Li}$ ($S_{2n} = 0,310$ МэВ), поскольку энергии связи двух нейтронов в ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$, соответственно, равны 0,98 и 2,14 МэВ.

В работе [22] экспериментально изучалось упругое рассеяние ${}^6\text{He}$ на водородной мишени при энергии ~ 700 МэВ/А. Для анализа данных и извлечения информации о размере ядра ${}^6\text{He}$ использовалась глауберовская теория с одночастичной плотностью вместо многочастичных ядерных плотностей для этого ядра. В результате лучшее согласие с экспериментальными данными авторы получили при значениях среднеквадратичного радиуса ядерного вещества $R_{rms}^m = (2,30 \pm 0,07)$ фм. В предположении, что радиус кора (было использовано усредненное значение $(1,88 \pm 0,12)$ фм) совпадает с радиусом протонного распределения в ${}^6\text{He}$, для среднеквадратичного радиуса нейтронного распределения получено значение $R_{rms}^n = (2,48 \pm 0,11)$ фм, и тогда $R_{rms}^n - R_{rms}^p = (0,61 \pm 0,21)$ фм. Авторы интерпретировали этот результат как доказательство существования в ${}^6\text{He}$ значительной нейтронной «шубы» около α -частичного кора.

Полученные в [22] значения среднеквадратических радиусов находятся в согласии с данными [21]. Однако они несколько ниже результата анализа данных той же работы [21] с применением других подходов, а именно $R_{rms}^m = (2,57 \pm 0,10)$ фм [23] и $R_{rms}^m = (2,71 \pm 0,04)$ фм [24]. В дальнейшем эксперимент, описанный в [22], был проанализирован [25] с помощью глауберовской теории с использованием трехчастичной $(\alpha + 2n)$ волновой функции ядра ${}^6\text{He}$. В рамках этого анализа значение R_{rms}^m получилось равным 2,50 фм.

Таким образом, из анализа данных по упругому рассеянию видно, что в зависимости от подхода значения радиусов могут получиться с разбросом $0,2 - 0,3$ фм.

Для получения информации о свойствах ${}^6\text{He}$ в [26] был проведен систематический анализ упругого рассеяния на протоне ряда ядер (${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^8\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^9\text{Li}$) при промежуточных энергиях от 32 до 75 МэВ/А. При анализе данных предполагалось, что ${}^4\text{He}$ является кором ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$, а также ядра ${}^6\text{Li}$ (считается, что оно состоит из α -частичного кора и имеет протяженное нейтрон-протонное распределение). Исходя из того, что наклон угловых распределений определяется в основном радиусом распределения ядерного вещества, был сделан следующий вывод: практически одинаковые по форме угловые распределения ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ свидетельствуют о том, что значения их радиусов близки, в то время как отличие от распределения ${}^4\text{He}$ [27] означает, что радиусы ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ отличаются от радиуса ${}^4\text{He}$. Из сравнения экспериментальных результатов по упругому рассеянию в двух случаях $p + {}^6\text{Li}$ и ${}^6\text{He} + p$ на основе расчета углового распределения ${}^6\text{He} + p$ с параметрами потенциала, взятыми из реакции $p + {}^6\text{Li}$ [28], получено хорошее согласие расчета с экспериментом. Это означает, что характеристики распределений плотностей ${}^6\text{Li}$ и ${}^6\text{He}$ очень похожи. Действительно, радиусы ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ близки: $R_{rms}^m({}^6\text{Li}) = (2,44 \pm 0,1)$ фм [29], а, как уже отмечалось выше, $R_{rms}^m({}^6\text{He}) = (2,48 \pm 0,03)$ фм [20].

В работе [26] была исследована чувствительность сечения упругого рассеяния к нейтронной «шубе» также путем рассмотрения трех разного типа плотностей распределения нуклонов. Расчеты показали, что с «реалистической» плотностью, принимающей во внимание протяженное распределение нейтронов «шубы», а также с плотностью, соответствующей экспериментальным радиусам R_{rms}^m , но пренебрегающей разницей между зарядовым и нейтронным радиусами, все данные для ${}^{6,8}\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ описываются хорошо. Расчеты с третьим видом плотности, где R_{rms}^m принимает значение радиуса ${}^4\text{He}$ (1,48 фм [29]), значительно отличаются от экспериментальных данных. Таким образом, из экспериментов по упругому рассеянию на протонах следует, что радиусы ядерного вещества R_{rms}^m ядер ${}^{6,8}\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ превышают радиус ${}^4\text{He}$, однако в этих экспериментах нельзя получить разницу между зарядовым и нейтронным радиусами.

Упругое рассеяние ${}^6\text{He}$ на ${}^{208}\text{Pb}$ и ${}^{12}\text{C}$ при энергии около 10 МэВ/А изучалось в [30, 31]. При сравнении с упругим рассеянием ядер ${}^6\text{Li}$ оказалось, что для этих двух ядер радиусы сильного поглощения практически одинаковые.

Как уже отмечалось, один из важных аспектов структуры ${}^6\text{He}$ касается корреляций в нейтронном гало («шубе»). Ожидается, что имеют место две разные пространственные конфигурации: динейтронная, когда два валентных нейтрона вне α -кора находятся близко друг к другу, и сигарообразная, когда эти два нейтрона расположены на противоположных сторонах α -кора.

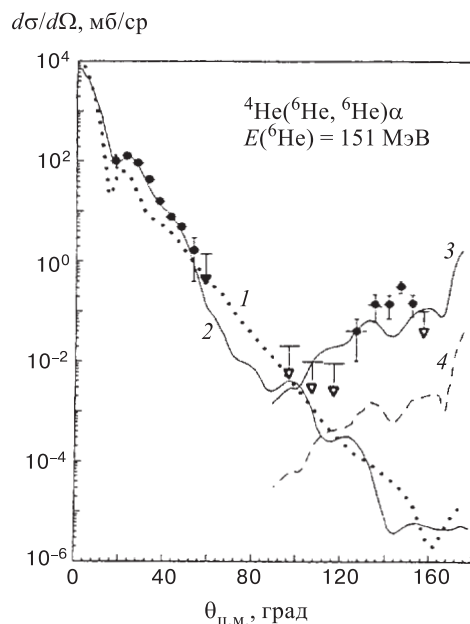


Рис. 2. Экспериментальные данные (значки) и теоретические расчеты (линии) для упругого рассеяния ${}^6\text{He} + {}^4\text{He}$ при энергии вторичного пучка ${}^6\text{He}$, равной 151 МэВ [32]. Кривые 1 и 2 — расчет сечения с разными параметрами оптического потенциала, 3 — расчет, учитывающий динейтронную и сигарообразную конфигурации двух валентных нейтронов ${}^6\text{He}$, 4 — расчет в случае удаления динейтронной конфигурации

В работе [1] для ${}^6\text{He}$ проводились трехчастичные расчеты, для которых ${}^6\text{He}$ является удобным, поскольку его волновая функция хорошо установлена, экспериментальная информация о подсистемах αn и nn достаточна для построения соответствующих потенциалов, а также в обоих случаях не существует кулоновского взаимодействия. Было показано, что вероятность распределения расстояний между частицами в ${}^6\text{He}$ имеет два максимума — один соответствует динейтронной, второй — сигарообразной конфигурации. Различие в высоте этих максимумов в основном является результатом того, что, вследствие nn -взаимодействия, динейтронная конфигурация более вероятна.

Этой проблеме был посвящен проведенный недавно эксперимент [32] по изучению двухнейтронного обмена в реакции ${}^6\text{He} + {}^4\text{He}$ при энергии вторичного пучка ${}^6\text{He}$, равной 151 МэВ. Интерпретация упругого рассеяния под задними углами (см. рис. 2) была возможна лишь в предположении, что $\sim 100\%$ сечение является результатом «динейтронной конфигурации».

Фрагментация ядер пучка ${}^6\text{He}$ при разных энергиях в диапазоне от 72 до 800 МэВ/А изучалась в работах [19,33–35] путем измерения импульсных рас-

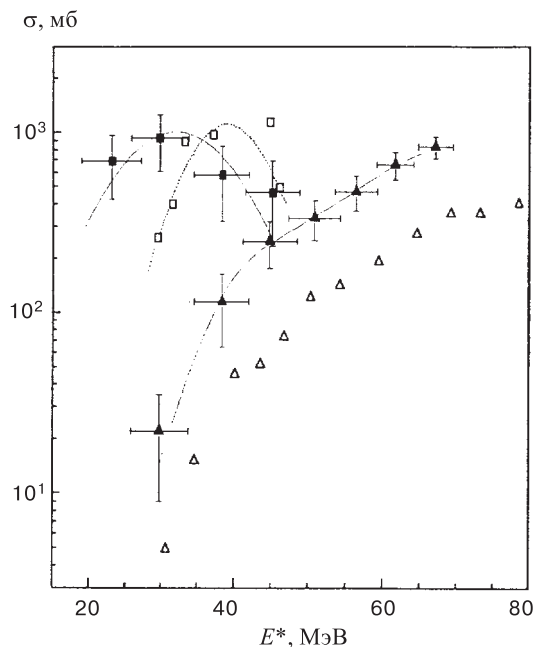


Рис. 3. Зависимость сечения деления (Δ) и испарения четырех нейтронов ($\square$) от энергии возбуждения для реакции ${}^6\text{He} + {}^{209}\text{Bi}$ (темные значки) в сравнении с функцией возбуждения для реакции ${}^4\text{He} + {}^{209}\text{Bi}$ (светлые значки) [37]

пределений как ядер ${}^4\text{He}$, так и нейтронов из развала ${}^6\text{He}$. Предполагалось, что последовательный развал ${}^6\text{He}$ на ${}^4\text{He}$ через промежуточный резонанс ${}^5\text{He}$ является доминирующим механизмом при фрагментации ${}^6\text{He}$. Последствиям влияния промежуточных резонансов посвящены теоретические расчеты [36], в которых анализировался механизм реакции фрагментации ядра ${}^6\text{He}$ при большой энергии. Как возможные, рассматривались несколько механизмов. Лучшее описание экспериментальных данных получено при механизме, в котором имеют место взаимодействие одного нейтрона с ядром мишени и αn -взаимодействие в конечном состоянии, соответствующем резонансу ${}^5\text{He}_{g.s.}$

Большой интерес вызывают также исследования влияния нейтронной «шубы» в ядрах на механизм реакций слияния и деления. Этому вопросу посвящены работы [37–40]. В качестве примера на рис. 3 представлены результаты работы [37], в которой впервые была измерена функция возбуждения реакции деления составного ядра ${}^{215}\text{At}$, образующегося при взаимодействии пучка ${}^6\text{He}$ с ядрами ${}^{209}\text{Bi}$. Эта функция возбуждения сравнивалась с реакцией ${}^4\text{He} + {}^{209}\text{Bi}$. Здесь же представлена функция возбуждения для канала испарения четырех нейтронов из составного ядра ${}^{215}\text{At}$. Эксперименты в этом

направлении авторы предполагают продолжить. При этом, очевидно, необходимо исследовать делимость одного и того же составного ядра при одинаковом угловом моменте и энергии возбуждения, образующегося в реакции с пучками ${}^4\text{He}$ и ${}^6\text{He}$ (например, ${}^{208}\text{Pb} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{212}\text{Po}$ и ${}^{208}\text{Pb} + {}^6\text{He} \rightarrow {}^{212}\text{Po}$).

Эти результаты, связанные с механизмом взаимодействия экзотических ядер, являются чрезвычайно важными для понимания свойств таких ядер и их использования в ядерных реакциях, поэтому подобные эксперименты также легли в основу физических обоснований проектов фабрик радиоактивных пучков, которые создаются сейчас во многих центрах.

1.2. Ядро ${}^7\text{He}$ является нестабильным и проявляется в виде резонансного состояния в различных реакциях. Избыток массы (М.Е.) этого ядра измерен экспериментально с высокой точностью: М.Е. = $(26,11 \pm 0,03)$ МэВ. Ширина резонанса $\Gamma = 160$ кэВ. Из этого следует, что ${}^7\text{He}$ нестабилен по отношению к распаду на ${}^6\text{He} + n$ всего на 0,44 МэВ, что значительно меньше предсказаний различных теорий (примерно на 1 – 2,3 МэВ) [41, 42]. В последние годы это ядро также вызывает интерес экспериментаторов в связи с предсказаниями существования в нем возбужденных уровней (см. рис. 4).

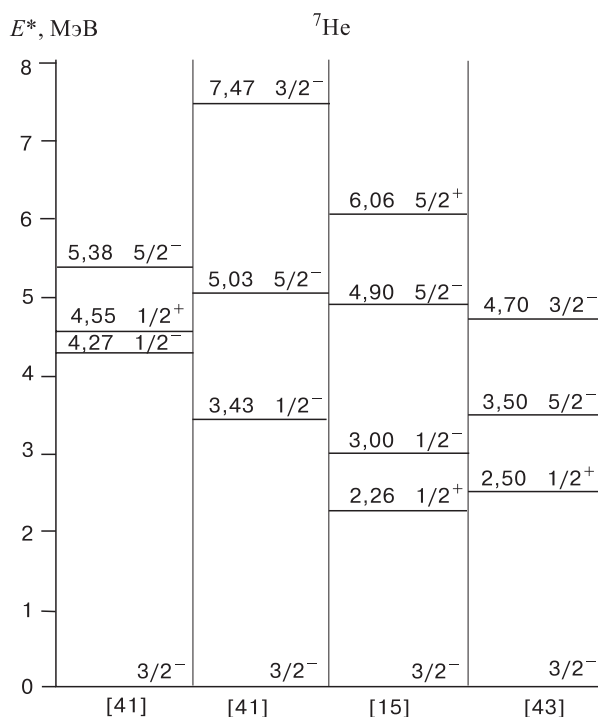
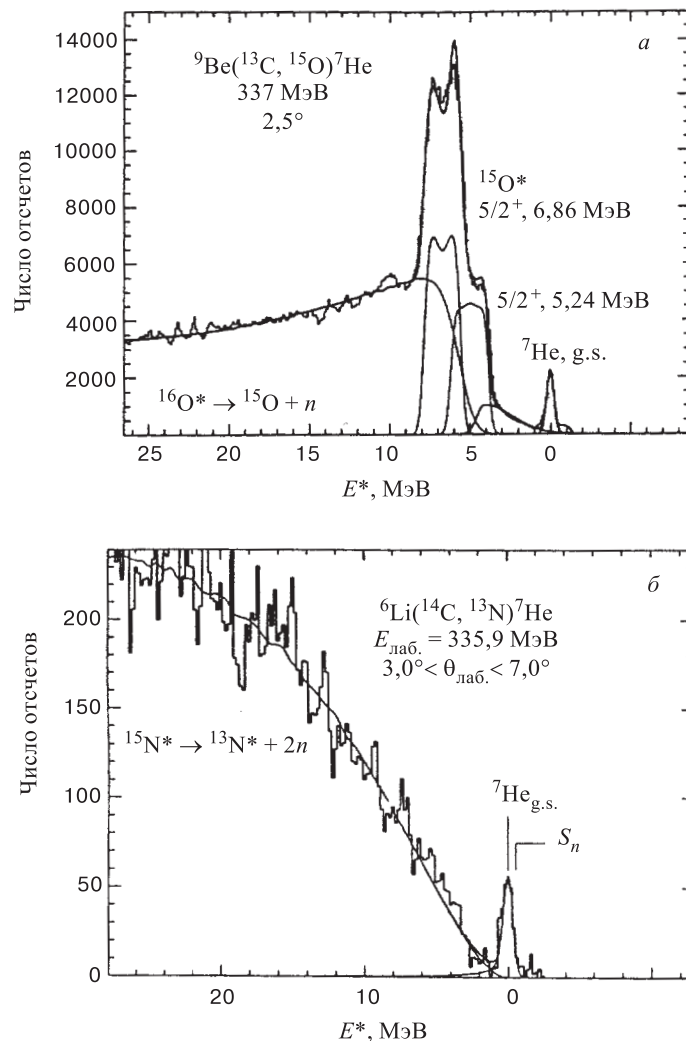


Рис. 4. Теоретические предсказания возбужденных уровней ${}^7\text{He}$ [15, 41, 43]

Рис. 5. Спектры реакций ${}^9\text{Be}({}^{13}\text{C}, {}^{15}\text{O}){}^7\text{He}$ и ${}^6\text{Li}({}^{14}\text{C}, {}^{13}\text{N}){}^7\text{He}$ [46, 47]

В большинстве ранних экспериментов в ${}^7\text{He}$ не было обнаружено возбужденных уровней при энергии возбуждения $E^* < 10$ МэВ и с $\Gamma < 2$ МэВ (см. [5] и ссылки там). Однако в двух экспериментах — в реакции ${}^7\text{Li}(n, p){}^7\text{He}$ при энергии нейтронов $E_n = 60$ МэВ и в реакции ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{16}\text{O}){}^7\text{He}$ при энергии пучка ионов ${}^{14}\text{C}$, равной 152,6 МэВ, в спектрах недостающей массы были обнаружены пики, которые идентифицировались как возбужденные состояния ${}^7\text{He}$. В первом случае в спектрах протонов наблюдалось два ши-

роких распределения над фазовым пространством в области $E^* \sim 6$ МэВ и $E^* \sim (20 \pm 1)$ МэВ ($\Gamma = (9 \pm 2)$ МэВ) [6]. Во втором случае наблюдался пик, соответствующий энергии возбуждения $E^* \sim (2,9 \pm 0,5)$ МэВ с шириной $\Gamma = (1,5 \pm 0,5)$ МэВ [44]. Как видно, ранние экспериментальные данные весьма противоречивы.

В последующих экспериментах в реакциях подхвата двух протонов ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{16}\text{O}){}^7\text{He}$ и ${}^9\text{Be}({}^{13}\text{C}, {}^{15}\text{O}){}^7\text{He}$ при энергии ~ 25 МэВ/А [45, 46] не было найдено возбужденных состояний в ядре ${}^7\text{He}$. Идентифицировалось основное $J^\pi = 3/2^-$ состояние, а наличие связанных возбужденных состояний в регистрируемых ядрах ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{15}\text{O}$ затрудняло наблюдение пиков, соответствующих резонансам в ядре ${}^7\text{He}$ выше ~ 5 МэВ (рис. 5,а). В другой реакции ${}^6\text{Li}({}^{14}\text{C}, {}^{13}\text{N}){}^7\text{He}$ [47], где два нейтрона передаются ядру мишени и один протон срывается, также не наблюдался резонанс $\nu 1p1/2$, (рис. 5,б). Сделано предположение о большой ширине этого резонанса, что затрудняет его наблюдение на фоне фазового пространства.

Другой подход к исследованию ядра ${}^7\text{He}$ использован в работах [48–50], проводимых на вторичных пучках ${}^8\text{He}$ (72 и 240 МэВ/А) и ${}^{11}\text{Li}$ (61 МэВ/А). В реакциях $p({}^8\text{He}, n{}^6\text{He})$, $d({}^{11}\text{Li}, n{}^6\text{He})$ и ${}^{12}\text{C}({}^8\text{He}, n{}^6\text{He})$ в спектрах инвариантной массы также наблюдался лишь резонанс, соответствующий основному состоянию ${}^7\text{He}$.

Ядро ${}^7\text{He}$ изучалось также и в реакции фрагментации, когда энергетические уровни определялись из относительной скорости между фрагментом

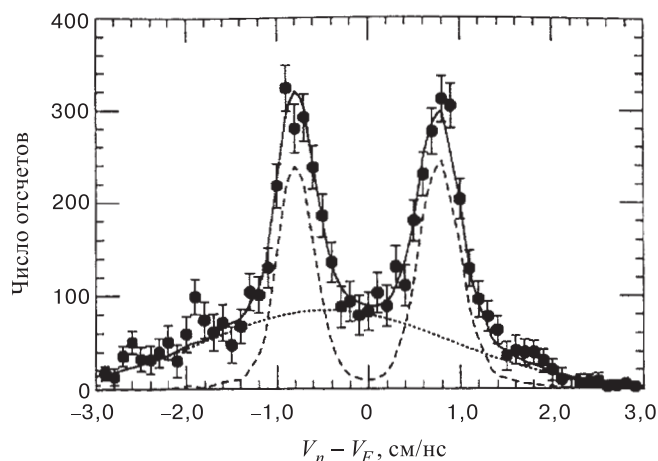


Рис. 6. Спектры относительной скорости между фрагментом (${}^6\text{He}$) и нейтроном распада ${}^7\text{He}$ [53]. Правый и левый пики отвечают испусканию нейтрона вперед и назад соответственно. Сплошная кривая — моделирование по методу Монте-Карло распада ${}^7\text{He}$ с использованием известных характеристик основного состояния $E_R = 450$ кэВ и $\Gamma = 160$ кэВ (пунктир) и предполагаемый фон (точки)

распада (${}^6\text{He}$) и нейтронами, регистрируемыми в совпадении [51–53]. На рис. 6 приведен измеренный спектр этой относительной скорости. Сплошной кривой показан спектр, являющийся суммой фона и распада ${}^7\text{He}$, рассчитанный с применением известных параметров основного состояния ядра ${}^7\text{He}$ ($E_R = 450$ кэВ и $\Gamma = 160$ кэВ). Максимумы при относительной скорости около $\pm 0,8$ см/нс соответствуют несвязанному основному состоянию ${}^7\text{He}$, имеющему приведенные выше параметры. Расчет хорошо воспроизводит экспериментальные данные. В этом эксперименте возбужденные состояния ${}^7\text{He}$ также не были обнаружены.

К вопросу о возможности существования в ядре ${}^7\text{He}$ возбужденных уровней мы еще вернемся в п. 1.4, посвященном ядру ${}^9\text{He}$.

1.3. Ядро ${}^8\text{He}$ является самым нейтроноизбыточным нуклонно-стабильным ядром ($N/Z = 3$). Его стабильность была предсказана еще в 1960 г. [54], а через несколько лет это ядро было синтезировано. Избыток массы ${}^8\text{He}$ измерялся в многочисленных экспериментах (см., например, [55]), и в качестве усредненного значения принято $M.E. = 31,598(7)$ МэВ [56]. В этом случае ${}^8\text{He}$ оказывается связанным по отношению к испусканию одного и двух нейтронов, соответственно, на $B_n = 2,580$ МэВ и $B_{2n} = 2,139$ МэВ.

Между тем для возбужденных состояний этого ядра до 1991 г. имелась довольно противоречивая экспериментальная информация [44, 45, 55, 57–59]. Почти во всех этих работах, за исключением [55, 58, 59], имеются указания на существование возбужденных уровней в ${}^8\text{He}$. Однако большинство результатов, полученных в перечисленных выше работах, имеют малую статистику.

В качестве примера на рис. 7 представлены спектры ${}^8\text{He}$, полученные в [44, 50, 59–61], а также в последнем эксперименте [62]. Экспериментальные значения энергий возбуждения представлены в табл. 2.

В работе [57] использовалась реакция ${}^9\text{Be}({}^7\text{Li}, {}^8\text{B}){}^8\text{He}$. В реакциях ${}^9\text{Be}({}^9\text{Be}, {}^{10}\text{C}){}^8\text{He}$ (рис. 7, а) и ${}^7\text{Li}({}^{11}\text{B}, {}^{10}\text{C}){}^8\text{He}$ были получены [44] значения энергий возбуждения для трех уровней, но интерпретация измеренных спектров была достаточно сложной из-за существования связанных уровней

Таблица 2. Экспериментальные данные по возбужденным уровням ${}^8\text{He}$ (МэВ)

[57]	[44]	[45, 60, 61]	[48]	[49]	[50]	[62]
	1,3±0,3					
2,8±0,4	2,7±0,3					
	4,0±0,3	3,59±0,06	3,57±0,12	3,6±0,25	3,72±0,24	3,6
						4,54±0,15
			~ 5 – 6			6,03±0,10
~ 7						7,16±0,04

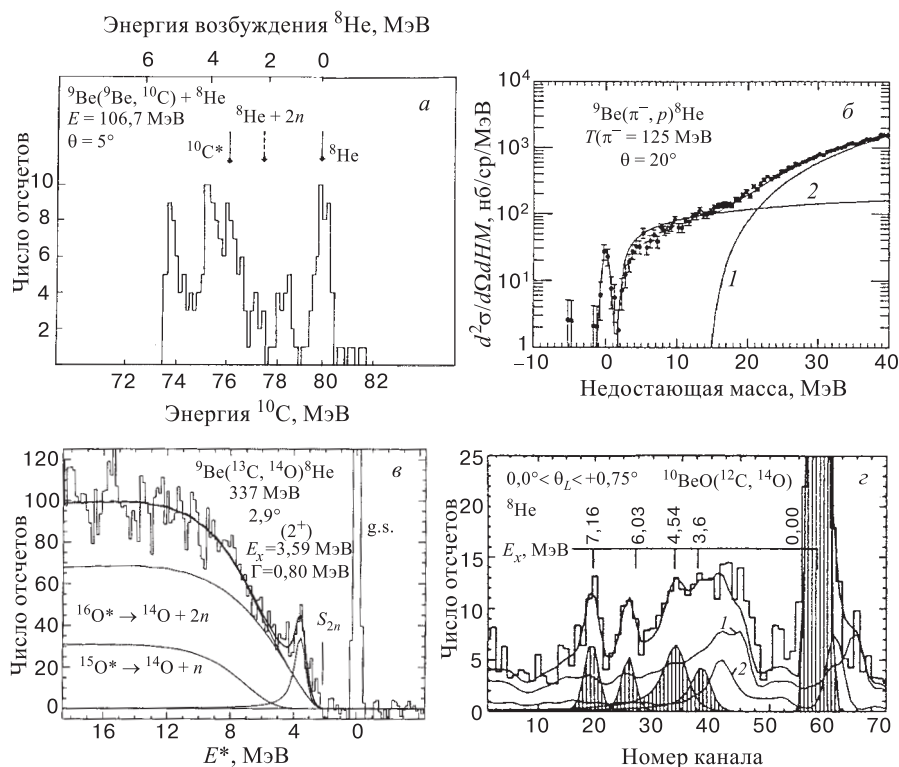


Рис. 7. Результаты экспериментов по поиску возбужденных состояний ядра ^8He : а) в реакции $^9\text{Be}(^9\text{Be}, ^{10}\text{C})^8\text{He}$ при энергии 106,7 МэВ и $\theta = 5^\circ$ [44]; б) в реакции $^9\text{Be}(\pi^-, p)^8\text{He}$ при $T(\pi^-) = 125$ МэВ и $\theta = 20^\circ$ [59]; в) $^9\text{Be}(^{13}\text{C}, ^{14}\text{O})^8\text{He}$ при энергии 337 МэВ и $\theta = 2,9^\circ$ [61]; з) $^{10}\text{Be}(^{12}\text{C}, ^{14}\text{O})^8\text{He}$ при энергии 357 МэВ и $0,0^\circ < \theta_{\text{лаб}} < 0,75^\circ$ [62]

в ядре отдачи ^{10}C . В [59] в реакции $^9\text{Be}(\pi^-, p)^8\text{He}$ наблюдался только один пик, который соответствовал основному состоянию ^8He (рис. 7,б).

Статистически наиболее достоверными являются результаты [45, 60, 61] (рис. 7,в). В реакции $^9\text{Be}(^{13}\text{C}, ^{14}\text{O})^8\text{He}$ при энергии 337 МэВ была определена энергия первого возбужденного состояния, которая составляла 3,59(6) МэВ. Ширина этого резонанса $\Gamma = 0,80$ МэВ. С использованием R -матричных расчетов были определены наиболее вероятный спин и четность возбужденного уровня $J^\pi = 2^+$, что соответствовало нейтронной конфигурации $(1p3/2)^{-1}(1p1/2)^1$, точно так же, как уровни 2^+ ядер ^{10}Be и ^{12}C , имеющих шесть нейтронов. Этот уровень, очевидно, является самым низким в ^8He (расчеты по оболочечной модели [15] дают тот же результат).

Хорошее согласие с результатом, показанным на рис. 7,в [45, 60, 61], получено в реакциях с радиоактивными пучками ^8He и ^{11}Li [48–50]. В этих экспериментах использовались две методики — измерение спектров протонов отдачи и метод инвариантной массы.

В эксперименте [48] при энергии 72 МэВ/А использовалась реакция неупругого рассеяния ^8He на водородной мишени в обратной кинематике $^8\text{He}(p, p')$. В спектре энергии возбуждения ядра ^8He обнаружен пик, который соответствует возбужденному уровню ^8He с энергией $E^* = (3, 6 \pm 0, 2)$ МэВ. На основании измеренного углового распределения [48, 63] продуктов неупругого канала для спина и четности этого состояния ^8He подтверждено полученное ранее в [45] значение $J^\pi = 2^+$. В спектре инвариантной массы в реакции $p(^8\text{He}, nn\ ^6\text{He})$ получен пик при $E^* = (3, 5 \pm 0, 15)$ МэВ. Из двух измеренных величин авторы работы [48] предлагают для первого возбужденного 2^+ -уровня ^8He значение $E^* = (3, 57 \pm 0, 12)$ МэВ. Наблюдалось также некоторое превышение фона при $E^* \sim 5, 5 - 6$ МэВ.

Похожие результаты получены и в реакции фрагментации ^{11}Li (61 МэВ/А) на дейтериевой мишени [49], и в реакции развала ^8He (240 МэВ/А) на мишени из углерода [50]. В спектрах инвариантной массы $^6\text{He} + n + n$ наблюдался пик при $E^* = (3, 6 \pm 0, 25)$ МэВ в первом случае и при $E^* = (3, 72 \pm 0, 24)$ МэВ с шириной $\Gamma = (0, 53 \pm 0, 43)$ МэВ — во втором.

На рис. 7,г показан результат последнего эксперимента, проведенного с целью изучения возбужденных уровней ^8He [62]. Использовалась реакция двухпротонного захвата $^{10}\text{Be}(^{12}\text{C}, ^{14}\text{O})^8\text{He}$ при энергии 357 МэВ. Здесь, кроме уже хорошо известного 2^+ -уровня с $E^* = 3, 6$ МэВ, наблюдались три новых состояния с $E^* = 4, 54(15)$, $6, 03(10)$ и $7, 16(4)$ МэВ. Их ширины равны, соответственно, $0, 70(25)$, $0, 15(15)$ и $0, 10(10)$ МэВ. Обращают на себя внимание небольшие значения ширины третьего и четвертого уровней. Их можно объяснить большим центробежным барьером для орбиты с $\ell = 2$, это означает, что уровни имеют отрицательную четность ($2^-, 3^-$). Из рис. 7,г видно также, что основное состояние заселяется с большей вероятностью по сравнению с возбужденными, что и можно было ожидать для реакции с захватом протонов.

Итак, из экспериментальных данных [45, 60, 61, 48–50] следует, что первый возбужденный 2^+ -уровень ^8He лежит при энергии возбуждения $\sim 3, 6$ МэВ.

Теоретические расчеты возбужденных уровней ^8He [15, 41, 43, 64] и их сравнение с экспериментом приводятся на рис. 8. В работах [43, 64] энергия первого 2^+ -уровня предсказывается равной, соответственно, 4,02 и 4,2 МэВ, что неплохо согласуется с экспериментальным значением. Кроме того, предсказывается существование уровней с энергией от $\sim 5, 7$ до 6,4 МэВ и имеющих спин 0^+ , 1^+ , 2^+ или 1^- [15, 41, 43]. Уровень с близкой энергией наблюдался в работе [62], а также, возможно, в [48].

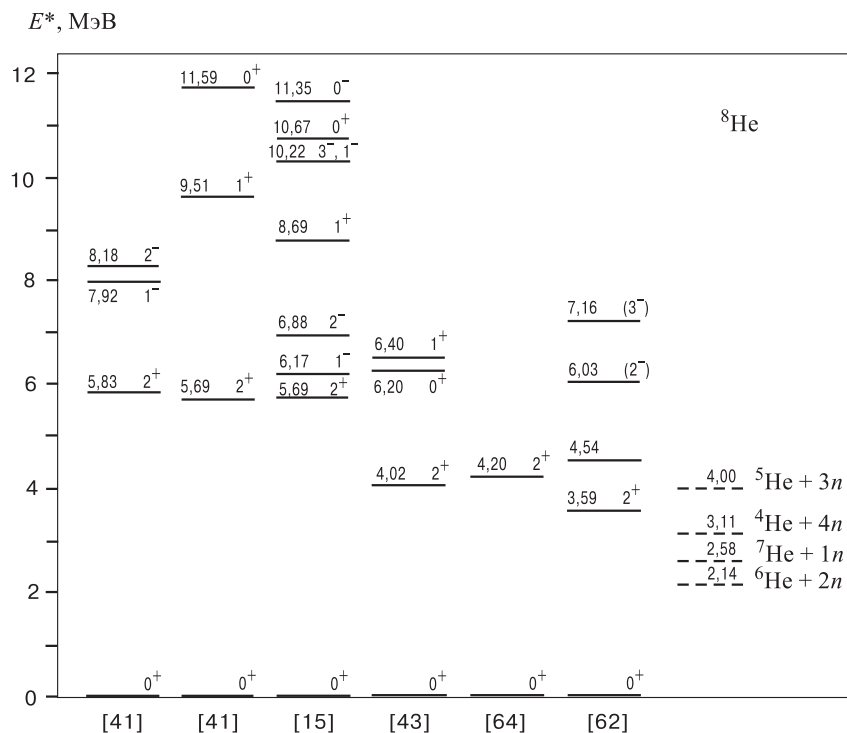


Рис. 8. Теоретические предсказания возбужденных уровней ${}^8\text{He}$ [15, 41, 43, 64] в сравнении с результатом их изучения в реакции ${}^{10}\text{Be}({}^{12}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^8\text{He}$ [62]. Справа показаны пороги распада ядра ${}^8\text{He}$ путем испускания x нейтронов

Уровень 2^+ ($\sim 3,6$ МэВ) в ${}^8\text{He}$ лежит выше порогов испускания двух и четырех нейтронов (см. рис. 8). Поэтому он может распадаться как на ${}^6\text{He} + 2n$, так и на ${}^4\text{He} + 4n$. Однако в работе [48] показано, что ${}^8\text{He}^*$ (3,6 МэВ) нестабилен по отношению к распадам ${}^6\text{He} + 2n$ и ${}^4\text{He} + 4n$ в соотношении $\Gamma_{{}^4\text{He}+4n}/\Gamma_{{}^6\text{He}+2n} \leq 5\%$, т.е. распад на ${}^4\text{He} + 4n$ маловероятен. Кроме того, поскольку он расположен выше узкого резонанса основного состояния ${}^7\text{He}$, его распад на ${}^6\text{He} + 2n$ может происходить также последовательно двумя этапами через промежуточный резонанс ${}^7\text{He}$.

Уровни ${}^8\text{He}$, лежащие достаточно высоко над порогом распада ${}^8\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 4n$, представляют особый интерес, поскольку для них открыт канал с вылетом «тетранейтрона», а, как известно, ядро ${}^8\text{He}$ имеет α -частичный кор и 4 валентных нейтрона. Поэтому, хотя пока нет теоретических или экспериментальных аргументов в пользу образования $4n$ -кластера, вероятность

его существования в ядре ${}^8\text{He}$ нельзя исключить. Не исключено также, что может существовать и динейтронный кластер. Вероятность образования разных кластеров может быть оценена из анализа континуума в энергетических спектрах, так как его описание с помощью распределения фазового пространства зависит от количества и от масс частиц в выходном канале. Авторы работы [65], в связи с обнаруженным гало в слабосвязанных нейтроноизбыточных ядрах, обсуждают идею Мигдала [3], что несвязанный динейтрон (на ~ 70 кэВ) в поле ядра может вести себя как пара слабосвязанных нейтронов.

Вопрос о существовании динейтрона в ядре ${}^8\text{He}$ обсуждался в [59]. Ядро ${}^8\text{He}$ в этой работе было образовано в реакции поглощения пионов ${}^9\text{Be}(\pi^-, p){}^8\text{He}$ при энергии 125 МэВ. Полученный экспериментальный спектр показан на рис. 7,б. Авторы не смогли его описать с помощью фазового пространства, соответствующего развалу ${}^8\text{He} \rightarrow {}^6\text{He} + n + n$. Удовлетворительное согласие с экспериментальными точками было получено с учетом двух каналов распада: ${}^8\text{He} \rightarrow {}^6\text{He} + {}^2n$ и ${}^8\text{He} \rightarrow {}^3\text{H} + {}^3\text{H} + {}^2n$. Некоторое улучшение в описании спектра было достигнуто при добавлении малого вклада от процесса ${}^8\text{He} \rightarrow {}^6\text{He} + n + n$. В то же время канал распада ${}^8\text{He} \rightarrow {}^7\text{He} + n$ для описания спектра авторы не учитывали. На основании такого анализа в работе [59] был сделан вывод о том, что динейтрон может существовать только в момент развала ядра ${}^8\text{He}$.

Между тем вопрос о существовании динейтрона в ${}^8\text{He}$ требует дальнейшего изучения.

В ядре ${}^8\text{He}$, так же как в ${}^6\text{He}$, обнаружена нейтронная «шуба». Высказано также предположение, что это есть проявление гало второго рода [2]. Вопрос этот уже обсуждался в п. 1.1, поэтому здесь остановимся лишь на основных выводах. Среднеквадратичный радиус ядерного вещества R_{rms}^m очень сильно увеличивается при переходе от ${}^4\text{He}$ ($1,57 \pm 0,5$ фм) к ${}^6\text{He}$ ($2,48 \pm 0,3$ фм) и ${}^8\text{He}$ ($2,52 \pm 0,3$ фм) [20], что свидетельствует о том, что ядро ${}^8\text{He}$ обладает большим пространственным распределением нейтронов вокруг некоего кора. На основе измеренных значений сечений взаимодействия (σ_I) и отделения двух и четырех нейтронов (σ_{-2n} и σ_{-4n}) был сделан вывод о том, что толщина нейтронной «шубы» в ${}^8\text{He}$ составляет $\sim 0,9$ фм [21]. Как и для ${}^6\text{He}$, это наиболее толстая нейтронная «шуба», наблюдаемая в ядрах. При этом [21] $R_{rms}^p = (1,76 \pm 0,03)$ фм, а $R_{rms}^n = (2,69 \pm 0,04)$ фм (см. табл. 1). Еще более существенным является вывод о том, что ${}^8\text{He}$ состоит из α -частичного кора, вокруг которого находится «шуба» из четырех нейтронов, а не из ядра ${}^6\text{He}$ как кора плюс два нейтрона [21]. «Шубу» ${}^8\text{He}$ можно рассматривать как пример чистой нейтронной материи.

Нуклонные распределения в ядре ${}^8\text{He}$ изучались с помощью упругого рассеяния на протонной мишени в обратной кинематике при энергии ~ 700 МэВ/А [22]. Удовлетворительное описание экспериментальных данных было получено со значением среднеквадратичного радиуса ядерного вещества,

равным $R_{rms}^m = (2,45 \pm 0,07)$ фм в согласии с данными из [17, 20, 21]. Для среднеквадратичного радиуса нейтронного распределения получено значение $R_{rms}^n = (2,67 \pm 0,05)$ фм, и тогда $R_{rms}^n - R_{rms}^p = (1,12 \pm 0,17)$ фм. Этот результат подтвердил наличие толстой нейтронной «шубы» в ядре ^8He . Более поздний анализ [25] этих же экспериментальных данных с использованием другого подхода (см. п. 1.1) дал несколько большее значение $R_{rms}^m = 2,60$ фм.

О сравнительном исследовании упругого рассеяния на протоне ряда ядер, в том числе ^8He , при промежуточных энергиях от 32 до 75 МэВ/А [26] уже отмечалось выше в п. 1.1.

Теоретический расчет, в котором использовалась 5-частичная $(\alpha + 4n)$ -модель в рамках приближения кластерно-орбитальной оболочечной модели COSMA, для ядра ^8He также дает подтверждение сильно отличающихся нейтронного и протонного пространственных распределений [66].

Интересная информация была получена в результате измерений импульсных распределений продуктов, образующихся при фрагментации ^8He при разных энергиях [19, 34, 50, 67]. В работе [34] был сделан вывод о том, что механизм последовательного распада через промежуточный резонанс (^7He) является преобладающим в процессе образования ^6He при взаимодействии ^8He с ядром мишени (при большой энергии). Импульсные распределения ^6He и нейтронов, полученные в работе [19], были описаны в рамках модели COSMA для ядра ^8He с учетом вышеупомянутого механизма промежуточного резонанса [66]. Однако в [34, 50] была отмечена необходимость рассмотреть также последовательный распад из возбужденных состояний. В связи с этим в [50] был рассмотрен вклад последовательного распада через возбужденный уровень ^8He при $E^* \approx 3,6$ МэВ, который может распадаться на ^6He плюс два нейтрона непосредственно или через ^7He (распад на $^4\text{He} + 4n$ маловероятен, как было уже показано).

1.4. Ядро ^9He — одно из наиболее нейтроноизбыточных ядер, когда-либо наблюдавшихся в эксперименте ($N/Z = 3,5$); оно нуклонно-нестабильно.

Различные теоретические подходы дают сильный разброс в значениях избытка массы и энергии связи нейтрона [15, 41, 68–74]. Наименьшая расчетная энергия, на которую ядро ^9He не связано, равна 1,21 МэВ [41], и лишь в одной работе предсказывается его стабильность ($B_n = +1,67$ МэВ [70]). В большинстве работ расчетные значения энергии распада ^9He на $^8\text{He} + n$ лежат в диапазоне от 2,3 до 4,4 МэВ. Однако, учитывая, что энергии эмиссии одного нейтрона из нуклонно-нестабильных нечетных изотопов ^5He и ^7He , соответственно, равняются 0,9 и 0,4 МэВ (по методу Гарви — Келсона можно было ожидать значения 1,3 и 2,3 МэВ), предполагалось, что ядро ^9He также более стабильно, чем считалось ранее.

Таблица 3. Экспериментальные значения избытка массы (М.Е.) и энергии связи одного нейтрона (B_n) для ядра ${}^9\text{He}$

Ссылка	М.Е., МэВ	B_n , МэВ
[68]	$40,80 \pm 0,10$	$-1,13 \pm 0,10$
[75]	$41,5 \pm 1,0$	$-1,83 \pm 1,00$
[45]	$40,83 \pm 0,08$	$-1,16 \pm 0,08$
[46]	$40,94 \pm 0,10$	$-1,27 \pm 0,10$
[56]*	$40,82 \pm 0,06$	$-1,15 \pm 0,06$

* Значения, принятые на основе экспериментальных данных.

Это предположение подтвердили все эксперименты по изучению структуры ядра ${}^9\text{He}$ [45, 46, 58, 60, 61, 68, 75]. В табл. 3 приведены экспериментальные значения избытка массы ${}^9\text{He}$, а также энергии связи одного нейтрона.

На рис. 9 показаны результаты некоторых экспериментов. Во всех случаях использовались реакции двойной перезарядки: в первом случае на π -мезонах, в остальных — с тяжелыми ионами.

Первый эксперимент [68] был проведен с использованием реакции двойной перезарядки на π -мезонах ${}^9\text{Be}(\pi^-, \pi^+){}^9\text{He}$ при энергии 194 МэВ. В спект-

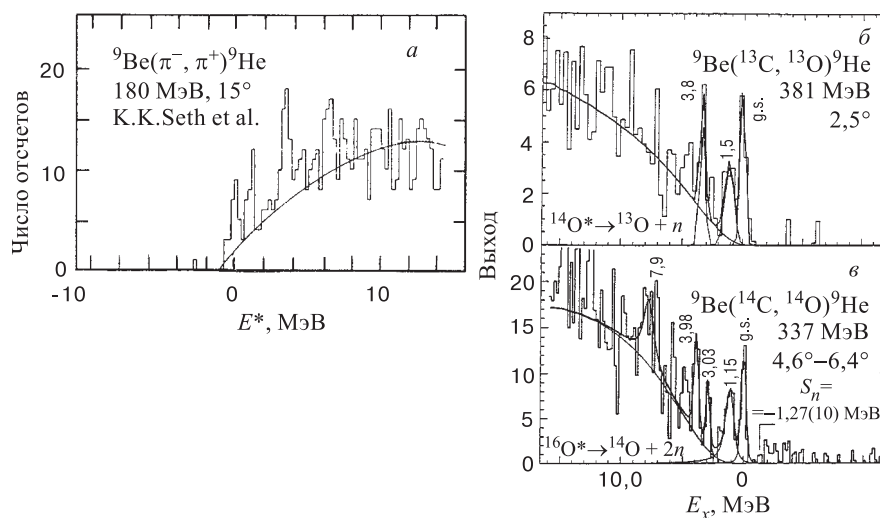


Рис. 9. Спектры энергии возбуждения ядра ${}^9\text{He}$, полученные в реакциях: а) ${}^9\text{Be}(\pi^-, \pi^+){}^9\text{He}$ при энергии π -мезонов 180 МэВ и $\theta = 15^\circ$ [68]; б) ${}^9\text{Be}({}^{13}\text{C}, {}^{13}\text{O}){}^9\text{He}$ при энергии 381 МэВ и $\theta = 2,5^\circ$ [45]; в) ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^9\text{He}$ при энергии 337 МэВ и $\theta = 4,6^\circ - 6,4^\circ$ [60, 61]

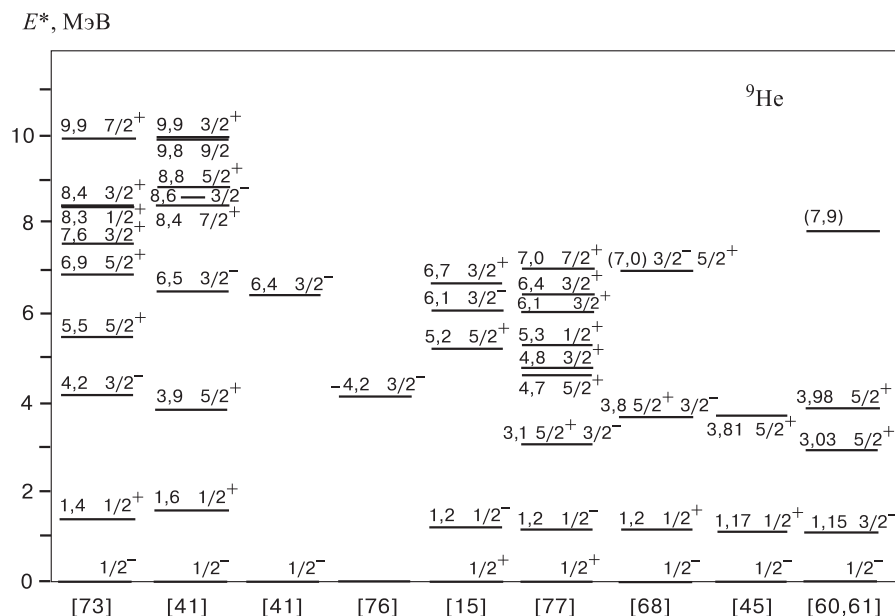


Рис. 10. Теоретические предсказания возбужденных уровней ${}^9\text{He}$ [15, 41, 73, 76, 77] в сравнении с экспериментальными результатами [45, 60, 61, 68]

ре π -мезонов наблюдался пик, соответствующий основному состоянию ${}^9\text{He}$ с шириной ~ 1 МэВ. Были получены также указания и на существование возбужденных состояний с энергиями ~ 2 и 4 МэВ. В той же реакции ${}^9\text{Be}(\pi^-, \pi^+){}^9\text{He}$, при энергии 180 МэВ и с лучшим энергетическим разрешением, были уточнены энергии возбужденных уровней. Спектр π^+ -мезонов, полученный в этом случае, показан на рис. 9,а. Наблюдалось три пика, которые соответствуют энергиям возбуждения 1,2; 3,8 МэВ и, с меньшей статистикой, 7,0 МэВ. Авторы идентифицировали эти пики как возбужденные уровни в ядре ${}^9\text{He}$, имеющие спины и четности $1/2^-$, $1/2^+$ и $5/2^+$ (или $3/2^-$) соответственно. Более широкое распределение при ~ 7 МэВ, по мнению авторов, могло соответствовать состоянию ($3/2^-$ или $5/2^+$) при энергии $\sim 6,4 \div 6,9$ МэВ, которое предсказывалось ранее в [41, 73] (см. рис. 10).

На основании этих двух экспериментов избыток массы ${}^9\text{He}$ был определен равным $M.E. = (40,80 \pm 0,10)$ МэВ. Таким образом, основное состояние ${}^9\text{He}$ оказалось нестабильным по отношению к распаду на ${}^8\text{He} + n$ на $(1,13 \pm 0,10)$ МэВ [68].

Ядро ${}^9\text{He}$ изучалось также в реакциях двойной перезарядки на тяжелых ионах, а именно в реакциях ${}^9\text{Be}({}^{13}\text{C}, {}^{13}\text{O}){}^9\text{He}$ при энергии 381 МэВ [58, 45] и ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^9\text{He}$ при энергии 158 [75] и 337 МэВ [46, 60, 61].

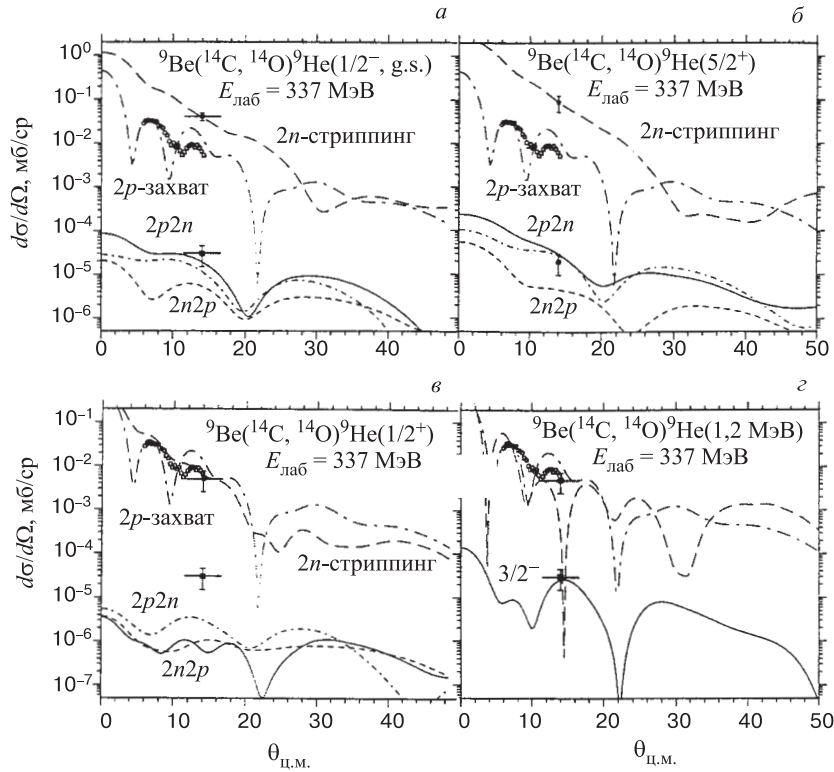


Рис. 11. Расчет в рамках метода связанных каналов для реакции $2n - 2p$ -обмена ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^9\text{He}$, ведущей к а) основному состоянию, б) возбужденному состоянию 3,9 МэВ с $J^\pi = 5/2^+$, в) и г) возбужденному состоянию 1,2 МэВ, соответственно, с $J^\pi = 1/2^+$ и $3/2^-$ [79]

Спектр ${}^{13}\text{O}$, полученный в работе [45], показан на рис. 9,б. Наблюдалось основное состояние (1,16(8) МэВ над порогом распада на ${}^8\text{He} + n$) и два возбужденных уровня при $E^* = 1,15(10)$ и $3,80(12)$ МэВ.

Полученный в реакции ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^9\text{He}$ [46, 60, 61] результат представлен на рис. 9,в. Для массы ${}^9\text{He}$ определено значение М.Е. = 40,94(10) МэВ, т.е. энергия связи последнего нейтрона в ${}^9\text{He}$ равна 1,27(10) МэВ. Это значение, в рамках экспериментальной ошибки, совпало с результатами работ [45, 68]. Ширина резонанса основного состояния в этой реакции составила $\Gamma = 0,10(6)$ МэВ, и она согласована с R -матричными расчетами для состояния $\nu 1p1/2$. На многочастичном континууме, который описывался распадом резонанса в высоковозбужденном ${}^{16}\text{O}^*$, наблюдалось еще несколько резонансов при энергиях возбуждения 1,15(9), 3,03(8) и 3,98(8) МэВ. При энер-

гии 7,9 МэВ наблюдался еще один широкий пик. Ширина первого возбужденного уровня при энергии 1,15 МэВ составляла $\Gamma = 0,7(2)$ МэВ. Авторы определили, что соответствующие этой ширине спин и четность могут быть либо $1/2^+$, либо $3/2^-$. Резонансы с $\ell = 0$ сильно подавлены в этой реакции, и более вероятным является вариант $3/2^-$ с конфигурацией $(\pi 1p1/2)^2(\nu 1p3/2)^{-1}$. Такой результат был получен и по расчетам методом связанных каналов для обеих реакций ${}^9\text{Be}({}^{13}\text{C}, {}^{13}\text{O}){}^9\text{He}$ [78] и ${}^9\text{Be}({}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^9\text{He}$ [79]. Как видно из рис. 11, лучшее согласие между расчетом и экспериментальным значением сечения получается в случае $3/2^-$. Следующие два резонанса при 3,03 и 3,98 МэВ довольно узкие и их ширины были объяснены с помощью $\ell = 2$ орбит. При этом уровень 3,03 МэВ мог бы соответствовать нахождению одного нейтрона на орбите $1d5/2$. Уровень 3,98 МэВ, возможно, имеет более сложную конфигурацию, соответствующую случаю, когда к нейтронной конфигурации $[(1s1/2)^2 \otimes (1p3/2)^3 \otimes (1p1/2)^1]_2^+$ добавлен один нейтрон на орбите $1d5/2$. На самом деле это имеет место, когда к возбужденному $J^\pi = 2^+$ -состоянию ядра ${}^8\text{He}$ посажен один нейтрон на $1d5/2$ -оболочку. Расчеты для уровня 3,9 МэВ в рамках модели связанных каналов [78, 79] дают значение $J^\pi = 5/2^+$.

На рис. 10 сравниваются полученные экспериментальные результаты с расчетами в разных теоретических подходах. Экспериментальные результаты по энергиям уровней в рамках экспериментальной ошибки хорошо согласуются между собой (за исключением уровня 3,03 МэВ, который наблюдался в работе [46] впервые).

Что касается теоретических расчетов, то расчет в конфигурационном $(0+1)\hbar\omega$ -пространстве [41] предсказывает массу ${}^9\text{He}$ достаточно точно, в то время как остальные сильно расходятся с экспериментом. Результаты расчета (рис. 10) для возбужденных состояний, выполненного в рамках $(0+2)\hbar\omega$ -пространства, сильно отличаются от экспериментальных значений. В то же время практически все расчеты, выполненные для $(0+1)\hbar\omega$ -конфигурационного пространства, предсказывают уровень в интервале $1,2 \div 1,6$ МэВ энергии возбуждения. Заметно сильное различие между самими расчетами. Эксперименты подтверждают надежно лишь уровень ~ 3 МэВ [77], а также уровень ~ 4 МэВ [73, 41].

В вопросе о приписываемых уровням значениях спина и четности между расчетами также имеется ряд противоречий. Так, например, даже в расчетах, предполагающих одно и то же $(0+1)\hbar\omega$ -пространство, наблюдается исключительно необычная очередность заполнения уровней, т.е. инверсия уровней $3/2^-$ и $5/2^+$. Результаты экспериментов [46, 60, 61] и расчеты по методу связанных каналов [78, 79] для уровня с $E^* \approx 4$ МэВ согласуются с расчетами работы [41], когда $J^\pi = 5/2^+$. Как видно из рис. 10, теоретические расчеты расходятся также и в предсказании спина и четности основного состояния. Так, в работах [15, 77] предсказывается инверсия, т.е. для основного

состояния $J^\pi = 1/2^+$, а для первого возбужденного состояния $J^\pi = 1/2^-$, в то время как по оболочечной модели для основного состояния $J^\pi = 1/2^-$. Такой же результат дают и расчеты [73, 41], в том числе и в $(0 + 2)\hbar\omega$ -пространстве. Исходя из экспериментальных значений ширин основного и первого возбужденного уровня в работе [80] делается вывод, что инверсия четности в ядре ${}^9\text{He}$ не происходит.

Обнаружение нескольких возбужденных, довольно узких состояний в ${}^9\text{He}$ представляет интерес, так как для соседнего несвязанного ядра ${}^7\text{He}$ нет однозначного вывода о существовании возбужденных уровней, хотя они и предсказывались. Возможное объяснение этого различия было предложено в работе [80]. Оно состоит в следующем. Экспериментально было доказано, что ядра ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ имеют гало или нейтронную «шубу» вследствие существующего в них компактного кора (${}^4\text{He}$) [21]. Предполагается, что все пять валентных нейтронов ${}^9\text{He}$ приводят к большому пространственному разделению двух протонов. При распаде ${}^9\text{He} \rightarrow {}^8\text{He} + n$ необходимо перевести эти два протона в ${}^4\text{He}$ — кор дочернего ядра ${}^8\text{He}$. Поэтому образование ${}^8\text{He}$ при развале ${}^9\text{He}$ возможно лишь при большой перестройке нуклонов. В результате распад ${}^9\text{He}$ существенно затрудняется. Эта ситуация сильно отличается от случая с ${}^7\text{He}$. Находясь между ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$, это ядро должно сохранить кор в виде α -частицы, так как трудно представить, что три нейтрона в ${}^7\text{He}$ способны разрушить α -кор, если четыре нейтрона в ${}^8\text{He}$ не могут этого сделать. Это означает, что имеет место сильная связь между ядром ${}^7\text{He}$ и продуктом его развала ${}^6\text{He}$. Поэтому развал ${}^7\text{He} \rightarrow {}^6\text{He} + n$ должен происходить быстро (без существенной перестройки нуклонов), а предсказанные уровни с энергией возбуждения $E^* > 3 - 4$ МэВ должны иметь большие ширины, что и затрудняет их наблюдение в эксперименте.

Наконец, отметим, что существенное увеличение стабильности ядра ${}^9\text{He}$ по сравнению с ранее предсказанной позволило экспериментаторам более оптимистически подойти к исследованию ядра ${}^{10}\text{He}$.

*«Of course, if we find ${}^9\text{He}$, what is to stop us
from dreaming about the double-magic
darling of exotica lovers, ${}^{10}\text{He}$!»
K.Seth, 1988*

1.5. Ядро ${}^{10}\text{He}$. Поиски сверхтяжелого гелиевого изотопа ${}^{10}\text{He}$ имеют почти 30-летнюю историю. Долгое время считалось, что это ядро нуклонно-стабильное, поскольку является дважды магическим ($Z = 2$, $N = 8$). Хронологически эксперименты по поиску ядра ${}^{10}\text{He}$ можно разделить на две группы: первая до конца 70-х — начала 80-х годов и вторая — после 1981 г.

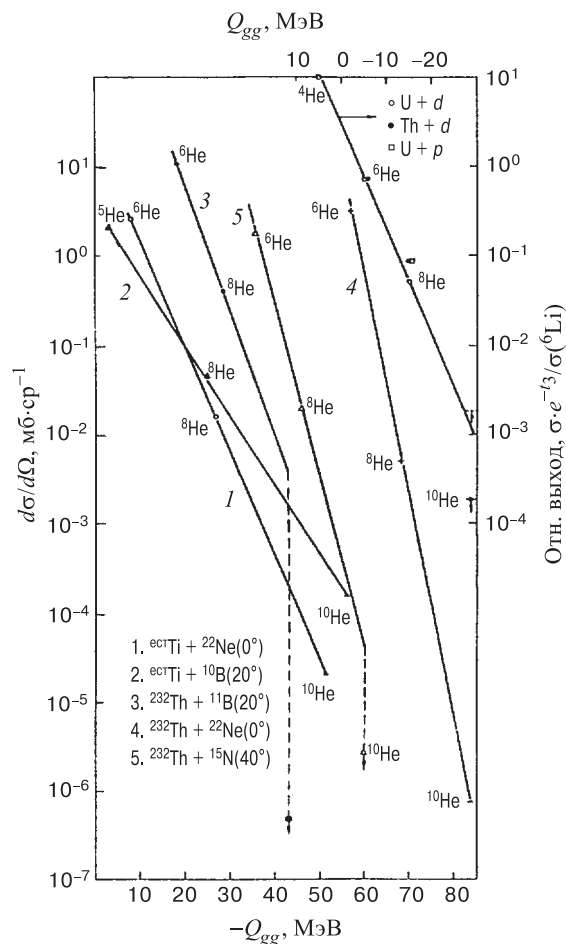


Рис. 12. Зависимость выходов гелиевых изотопов от Q -реакции для реакций с дейтронами, протонами и тяжелыми ионами ^{15}N , ^{22}Ne , $^{10,11}\text{B}$ [87]

К первой группе относятся эксперименты, в которых пытались найти ^{10}He как нуклонно-стабильное ядро, среди легких фрагментов спонтанного деления ^{252}Cf и среди продуктов реакций под действием тепловых нейтронов, высокоэнергичных протонов и дейтронов и тяжелых ионов [81–86] (см. рис. 12). Полученные отрицательные результаты по поиску стабильного ядра ^{10}He практически закрыли надежды на то, что оно нуклонно-стабильное.

Однако поиски этого ядра не прекратились, а наоборот — началась новая серия экспериментов. Это произошло после того, как в 1981 г. было экспериментально показано, что изотоп ^9He более стабилен, чем ожидалось

(см. [68] и ссылки там). Этот результат позволил предположить, что ^{10}He сильнее связан, чем предсказывалось ранее.

Поиск ядра ^{10}He был проведен в реакции $^{232}\text{Th} + ^{11}\text{B}$ (89 МэВ), выбранной в связи с тем, что выход изотопа ^8He в этой реакции оказался намного больше, чем в других [87]. Экстраполяция сечений образования в этой реакции известных нуклонно-стабильных изотопов гелия (см. рис. 12) дала ожидаемое значение сечения образования ^{10}He в этой реакции $\sim 5 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2/\text{ср}$. Однако в этом эксперименте, проведенном с высокой чувствительностью, была получена лишь верхняя граница образования ядра ^{10}He — она оказалась всего лишь $\sim 5 \cdot 10^{-34} \text{ см}^2/\text{ср}$. Этот результат свидетельствовал о нестабильности ^{10}He .

Последующие попытки обнаружить ^{10}He как нуклонно-стабильное ядро были сделаны в реакции фрагментации ионов ^{11}Li с энергией 0,79 ГэВ/А на мишени из углерода [19]. Ядро ^{10}He могло образоваться при срыве одного протона с ядра ^{11}Li . Однако и в этом эксперименте была получена лишь верхняя граница образования ^{10}He , равная 50 мкб, что намного ниже, чем ожидаемые сечения (50 мб) для срыва одного протона в этой области бомбардирующих ядер. Реакция фрагментации ионов ^{18}O (30 МэВ/А) также не дала положительного результата [76]. В области легких фрагментов, где ожидался ^{10}He , не наблюдалось ни одного события. При этом была определена верхняя граница образования ^{10}He по сравнению с ^8He $Y(^{10}\text{He})/Y(^8\text{He}) \leq 3 \cdot 10^{-5}$, что соответствовало выходу ^{10}He в этой реакции примерно в 1000 раз ниже, чем ожидалось из экстраполяции выходов изотопов H, He и Li. Если иметь в виду эффективность реакций фрагментации налетающего иона для синтеза сильнейтронноизбыточных легких ядер [88–92], то полученный результат также свидетельствует о том, что ядро ^{10}He является нуклонно-нестабильным.

Были сделаны еще две попытки обнаружения ^{10}He среди продуктов тройного деления ^{252}Cf [93, 94]. Однако эти два эксперимента также не добавили ничего нового к вопросу о стабильности ^{10}He .

Расчетам структуры и свойств распада ^{10}He посвящено небольшое количество работ [41, 68–71, 74, 76, 95, 96]. Их основные результаты представлены в табл. 4. Видно, что имеет место сильный разброс в расчетных значениях. Результат [68] был получен экстраполяцией по формулам Гарви — Келсона по отношению к измеренной массе ^9He и свидетельствовал о том, что ^{10}He почти связан и может существовать в виде резонанса с некоторой шириной.

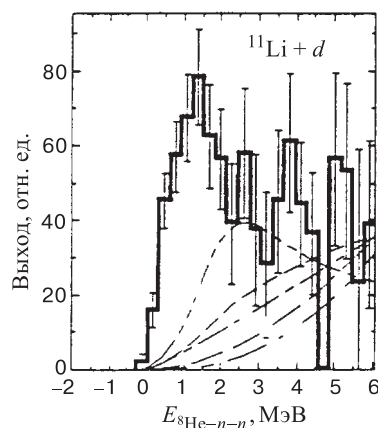
В связи с этим поиски ядра ^{10}He были продолжены с использованием других методов. Поскольку ^{10}He нуклонно-нестабилен, возможно, в принципе, наблюдение резонанса двумя способами: методом измерения инвариантной массы и методом измерения недостающей массы. Положительные результаты были достигнуты в 1994 г. [49, 96]. Остановимся на них подробнее.

Таблица 4. Избыток массы (М.Е.), энергия связи двух нейтронов (B_{2n}) и ширина уровней (Γ) в ^{10}He : теория и эксперимент

	Ссылка	М.Е., МэВ	B_{2n} , МэВ	Γ , МэВ
Теория	[68]	49,18	-1,44	
	[74] ¹	50,67	-2,93	
	[74] ²	50,23(88)	-2,49	
	[74] ³	49,35	-1,61	
	[76]	48,92(14)	-1,18(14)	
	[41]	52,70	-5,00	
	[95]	48,54(0,1)	-0,8(0,1)	0,15-0,3
	[96]	49,09(24)	-1,35(24)	
Эксперимент	[49]	48,94	-1,20(30)	1,2
	[96]	48,81(7)	-1,07(7)	0,3(2)

¹Tachibana et al.;²Comay et al.;³Janecke, Masson.

В RIKEN (Япония) [49] использовался пучок ^{11}Li при энергии 61 МэВ/А. Рассматривались два случая: реакция передачи протона $^{11}\text{Li} + d \rightarrow ^3\text{He} + ^{10}\text{He}$ и взаимодействие в конечном состоянии частиц $^8\text{He} + n + n$. Для вычисления инвариантной массы использовались тройные совпадения между ^8He и двумя нейтронами с измерением их энергии и углов вылета. Один из экспериментальных спектров, полученных в этой работе, показан на рис. 13. Как видно из рисунка, в спектре наблюдается максимум при энергии $(1,2 \pm 0,3)$ МэВ над порогом распада ^{10}He на $^8\text{He} + n + n$ (экспериментальное разрешение равно 1,5 МэВ). Авторы попробовали описать полученные спектры кривыми многочастичного фазового пространства, соответствующими процессам, идущим без образования ^{10}He . Ни один из расчетов не мог воспроизвести спектры и дать пик в районе 1,2 МэВ. Поэтому этот максимум был идентифицирован как резонанс основного состояния ^{10}He с шириной $\Gamma \leq 1,2$ МэВ.

Рис. 13. Спектр инвариантной массы $^8\text{He} + n + n$ из реакции $d(^{11}\text{Li}, 2n^8\text{He})$ [49]

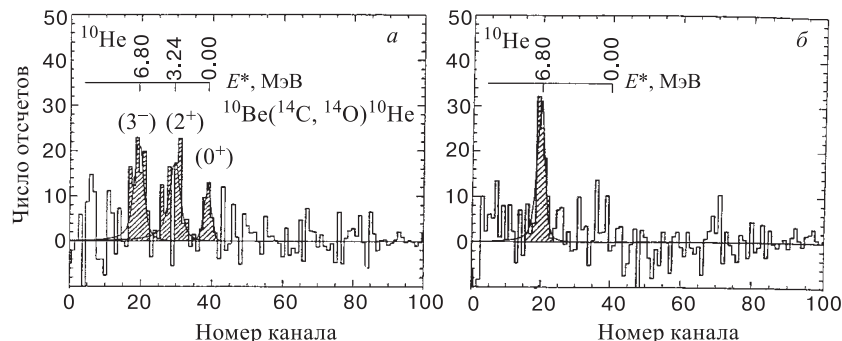


Рис. 14. Спектры, полученные в реакции $^{10}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})$ при энергии 334,4 МэВ после вычета фона: рис. а и б соответствуют угловым диапазонам $1,7^\circ < \theta_{\text{лаб}} < 3,0^\circ$ и $2,7^\circ < \theta_{\text{лаб}} < 3,9^\circ$ [96]

Возбужденные состояния не наблюдались. В этой работе было получено и подтверждение о прямом распаде основного состояния ^{10}He с испусканием одновременно двух нейтронов.

Метод бинарных реакций был применен для изучения ^{10}He в работе, сделанной в Институте им. Гана — Майтнер в Берлине. Изучалась реакция $^{10}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{10}\text{He}$ [96]. Использовались радиоактивный пучок ^{14}C с энергией 334,4 МэВ и радиоактивная мишень из ^{10}Be в виде BeO [97]. В связи с большим количеством примесей в мишени проводились дополнительные измерения на мишенях из ^{16}O (V_2O_5) и ^{12}C . На рис. 14 показаны, после вычета фона, энергетические спектры ^{10}He в двух угловых диапазонах, выбранных с учетом ожидаемых угловых распределений, соответствующих возбуждению различных уровней. Кроме основного состояния, наблюдались еще два резонанса, вклад которых был различен под разными углами.

Для резонанса основного состояния получены избыток массы М.Е. = 48,81(7) МэВ и полная энергия связи $B = -30,34(7)$ МэВ. Поэтому были сделаны следующие выводы [96]: ^{10}He нестабилен по отношению к распаду на $^8\text{He} + 2n$ на величину $B_{2n} = -1,07(7)$ МэВ. Распад этот происходит путем одновременного испускания двух нейтронов, поскольку их последовательная эмиссия невозможна из-за того, что основное состояние ^9He ($B_n \approx -1,27$ МэВ) лежит выше основного состояния ^{10}He . Результаты [96] подтверждают полученные ранее [49], но с более высокой точностью как для М.Е., так и для Γ основного состояния (см. табл. 4). В этом же эксперименте [96] получены и значения возбужденных состояний в ядре ^{10}He : они имеют значения энергии возбуждения $E^* = 3,24(20)$ и $6,80(7)$ МэВ, и ширины $\Gamma = 1,0(3)$ и $0,6(3)$ МэВ соответственно. Не исключена возможность разложения пика при $E^* = 3,24$ МэВ двумя компонентами.

Если в соотношение Гарви — Келсона [42]:

$$M(^{10}\text{He}) - M(^{10}\text{Be}) + M(^9\text{Li}) - M(^9\text{He}) + M(^{11}\text{Be}) - M(^{11}\text{Li}) = 0$$

подставить значения масс из [56], то для избытка массы ^{10}He получается значение $M.E. = 49,09(24)$ МэВ, что также очень близко к экспериментальному. Еще лучшее согласие было получено [76] в расчете для $0\hbar\omega$ -конфигурационного пространства, когда матричные элементы подгонялись, чтобы воспроизвести с высокой точностью энергии связи известных состояний всех гелиевых изотопов. В хорошем согласии с экспериментом, в том числе и для ширины основного состояния, находится расчет, сделанный в рамках трехчастичной модели методом K -гармоник [95].

Остановимся лишь на нескольких теоретических работах, в которых рассчитывалась структура ^{10}He . В работе [98] применялся самосогласованный HF — RPA-метод, в [15] расчет был сделан в оболочечном $(0 + 1)\hbar\omega$ -конфигурационном пространстве. Обе работы предсказывают наличие низлежащего 1^- -резонанса при $E^* \approx 1 - 1,5$ МэВ над основным состоянием. В эксперименте этот резонанс не наблюдался. В то же время в хорошем согласии с экспериментом находится предсказанный в [15] уровень 3^- при $E^* = 6,8$ МэВ.

Наиболее вероятные значения J^π для наблюдаемых резонансов ^{10}He в реакции $^{10}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{10}\text{He}$ можно получить на базе расчетов ширин в рамках R -матричной теории, предполагая эмиссию двух нейтронов с разными ℓ [96]. Для двух возбужденных уровней лучшее согласие было получено при $\ell = 2$ и $\ell = 3$. Поэтому им были приписаны значения $J^\pi = 2^+$ и 3^- соответственно. Необходимо отметить, что $J^\pi = 2^+$ получается лишь в том случае, если широкое распределение при $E^* = 3,24$ МэВ описывается одним резонансом. В то же время эксперимент и расчет сильно расходились для основного состояния с $\ell = 0$. Однако наблюдаемое малое значение ширины $\Gamma = 0,3(2)$ МэВ может быть объяснено энергетическими характеристиками этого резонанса. Как уже отмечалось, ^{10}He распадается путем испускания сразу двух нейтронов. Именно корреляция этих нейтронов может увеличить время жизни резонанса, вследствие чего его ширина уменьшится. В согласии с экспериментальным значением $\Gamma = 0,3(2)$ МэВ [96] находится результат расчета [95], согласно которому основному состоянию ^{10}He соответствует узкий резонанс с шириной $\Gamma \sim 150 - 300$ кэВ.

Относительно ширины основного и возбужденных состояний в работе [80] была высказана гипотеза (такая же, как и в случае ядра ^9He), заключающаяся в том, что: α -частичный кор в ^{10}He полностью разрушен, и распад на $^8\text{He} + 2n$ требует некоторого времени для формирования двух протонов в ядре ^8He .

Согласно оболочечной модели, ядро ^{10}He рассматривается как нейтроноизбыточное ядро с замкнутыми оболочками. Полученные в эксперименте зна-

чения энергий возбужденных состояний вместе с отнесенными им спинами и четностями могут служить основанием для некоторых выводов по поводу оболочечной структуры ^{10}He и надежности предсказаний оболочечной модели вблизи границ нуклонной стабильности. По мнению авторов [96], заполнение оболочек в ^{10}He может идти следующим образом. Состояния 2^+ и 3^- имеют конфигурации $(1p3/2)^{-1}(1p3/2)^1$ и $(1p1/2)^{-1}(1d5/2)^1$ соответственно. Напомним, что состояние 2^+ лежит ниже состояния 3^- . Это означает, что 2^+ -состояние образуется посадкой одного нейтрона на $1p1/2$ -оболочку, в связи с тем, что оболочка $1p1/2$ не была до этого заполнена. В то же время $2s1/2$ -оболочка является заполненной. Отсюда следует, что $2s1/2$ -оболочка в ^{10}He находится вблизи $1p1/2$ -оболочки или даже ниже (для сравнения вспомним, что низколежащий дипольный резонанс в ^{11}Li , имеющем, как и ^{10}He , число нейтронов $N = 8$, является результатом понижения $2s1/2$ -оболочки в область $1p1/2$ -оболочки, а в ядре ^{11}Be оболочка $2s1/2$ вообще находится ниже $1p1/2$). В связи с этим авторы работы [96] высказали предположение, что замкнутая оболочка появляется не при $N = 8$, а лишь при $N = 10$, т.е. в ядре ^{12}He . Если это так, то существование низколежащего уровня 1^- с конфигурацией $(1p1/2)$, $(2s1/2)$ тоже возможно. Такое состояние, напомним, предсказывалось в [98] в качестве первого возбужденного состояния для ядра ^{10}He .

Между тем нам кажется, что необходимо продолжить дальнейшее изучение ^{10}He для того, чтобы получить более полную информацию о структуре этого экзотического ядра. В принципе, возможные пути дальнейшего его исследования — это использование реакций типа $^{10}\text{Be}(\pi^-, \pi^+)$, $^9\text{Be}(^{18}\text{O}, ^{17}\text{Ne})$, $^{10}\text{Be}(^{13}\text{C}, ^{13}\text{O})$, $^{10}\text{Be}(^9\text{Be}, ^9\text{C})$, а также реакции с радиоактивными пучками в прямой, например $^{10}\text{Be}(^{16}\text{C}, ^{16}\text{O})$, и в обратной кинематике, например $^{11}\text{Li}(p, 2p)$, $^{11}\text{Li}(t, ^4\text{He})$, $^{11}\text{Li}(d, ^3\text{He})$, $^9\text{Li}(^{14}\text{C}, ^{13}\text{N})$, $^8\text{He}(t, p)$. Детальная информация о ядре ^{10}He позволит экстраполировать наши знания на более тяжелые изотопы гелия.

1.6. Изотопы гелия с $A > 10$. Эти изотопы пока в эксперименте не наблюдались. Теоретические расчеты и экстраполяции предсказывают, что изотопы ^{11}He и ^{12}He нуклонно-нестабильные. Экстраполяцию можно сделать из систематики [56] значений B_n и B_{2n} для изотопов с $N = 9$ и $N = 10$, рис. 15. Полученные значения сравниваются с расчетами разных авторов в табл. 5.

Между тем исследование таких изотопов в разных реакциях имеет чрезвычайно важное значение для понимания ситуации со стабильностью нейтроноизбыточных ядер и роли ядерных сил (nn -взаимодействие) в стабильности нейтронных ядер. Можно предложить следующие реакции для получения сверхтяжелых изотопов гелия: $^{10}\text{Be}(^{18}\text{O}, ^{17}\text{Ne})^{11}\text{He}$, $^{10}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{13}\text{O})^{11}\text{He}$, $^{14}\text{C}(^{18}\text{O}, ^{20}\text{Mg})^{12}\text{He}$, $^{12}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{12}\text{He}$, $^{11}\text{Li}(t, ^3\text{He})^{11}\text{He}$, $^{11}\text{Li}(d, 2p)^{11}\text{He}$.

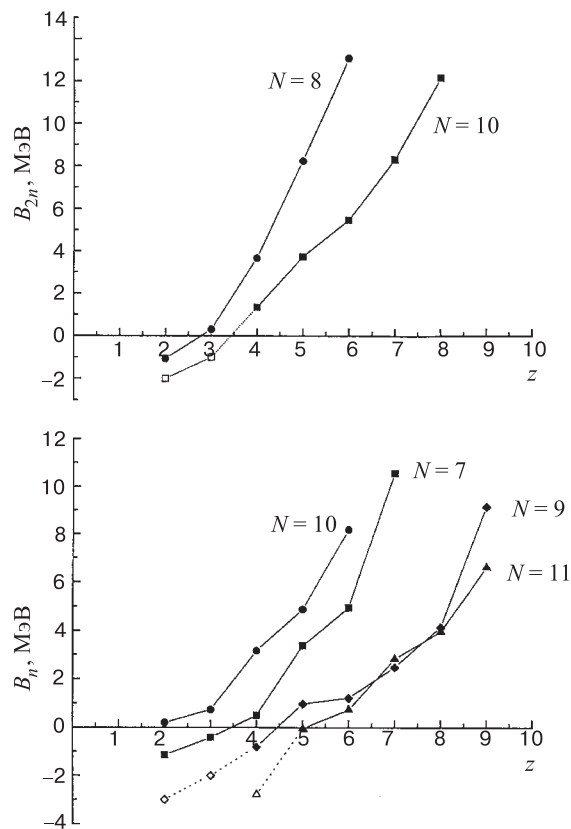


Рис. 15. Систематика значений энергии связи одного и двух нейтронов [56] для изотопов с $N = 8 \div 11$. Пунктирными линиями показаны экстраполяции

Таблица 5. Энергии связи одного и двух нейтронов B_n и B_{2n} (МэВ) для ядер ^{11}He и ^{12}He

Ссылка	[69]	[74] ¹	[74] ²	[74] ³	[41]	[15]	Экстрап.
$B_n(^{11}\text{He})$	-6,77	-8,6	-7,9	—	-9,9	-8,1	-3,0
$B_{2n}(^{11}\text{He})$	-7,11	-8,5	-7,9	—	-9,8	-8,0	—
$B_{2n}(^{12}\text{He})$	-8,93	-10,1	-10,1	-9,1	-13,1	-9,4	-2,0

¹Tachibana et al.;

²Comay et al.;

³Janecke, Masson.

2. ИЗОТОПЫ ЛИТИЯ

В этом разделе мы остановимся только на двух изотопах лития: ^{10}Li и ^{11}Li , которые в последние годы привлекали наибольшее внимание теоретиков и экспериментаторов в связи со своей экзотичностью. Борроминовское ядро ^{11}Li состоит из кора ^9Li и двух валентных нейтронов сверх этого кора. Для расчетов ^{11}Li как трехчастичной системы необходима информация о взаимодействиях $^9\text{Li} + n$ и $n + n$. Характеристики $(n + n)$ -взаимодействия хорошо известны. Информацию о $^9\text{Li} + n$ -взаимодействии можно извлечь из данных о структуре ядра ^{10}Li , т.е. необходимо иметь данные об основном и низколежащих уровнях этого ядра, которые в настоящее время являются весьма противоречивыми.

2.1. Ядро ^{10}Li . Ядро ^{10}Li состоит из кора ^9Li , находящегося в основном состоянии, и валентного нейтрона. В работе [84] среди изотопов легких элементов, образующихся в реакции фрагментации урана пучком протонов, ядро ^{10}Li обнаружено не было. На этом основании был сделан вывод о его нестабильности относительно испускания нуклонов. Все дальнейшие исследования свидетельствуют о том, что нейтронную нестабильность ядра ^{10}Li можно считать установленной.

Ядро ^{10}Li является нечетно-нечетным — имеет 3 протона и 7 нейтронов. Нечетный протон находится на $1p_{3/2}$ -оболочке, а последний нечетный нейтрон — на $1p_{1/2}$ - или на $2s_{1/2}$ -оболочке (как это имеет место в ядре ^{11}Be [5], в котором число нейтронов такое же, как и в ^{10}Li). Поэтому низколежащие состояния ^{10}Li , как предполагается, существуют в виде двух дублетов:

- 1) $[\pi 1p_{3/2} \otimes \nu 1p_{1/2}] \quad 1^+ \text{ и } 2^+,$
- 2) $[\pi 1p_{3/2} \otimes \nu 2s_{1/2}] \quad 2^- \text{ и } 1^-,$

при этом, в соответствии с правилами Нордхайма [99], состояния с четностью 1^+ и 2^- должны лежать ниже вторых состояний из соответствующих конфигураций (2^+ и 1^-). Вместе с тем вопрос о том, с каким нейтроном образуется основное состояние ^{10}Li , до сих пор является открытым.

В 1975 г. впервые была сделана попытка в реакции передачи $^9\text{Be}(^9\text{Be}, ^8\text{B})^{10}\text{Li}$, при энергии 121 МэВ, определить избыток массы ядра ^{10}Li [100]. Наблюдаемое состояние (ему приписана авторами положительная четность) было принято за основное. Ему соответствовал избыток массы $M.E. = 33,83(25)$ МэВ и ширина $\Gamma = (1,2 \pm 0,3)$ МэВ. Ядро ^{10}Li в этом случае оказывалось несвязанным по отношению к испусканию нейтрона на $(0,805 \pm 0,25)$ МэВ. Это значение оказалось значительно выше предсказанного другими авторами 0,26 МэВ [69] и 0,21 МэВ [71] и тем более предсказанного в работе [101] значения $(0,062 \pm 0,060)$ МэВ.

Несколько позже авторами работы [102] было сделано предположение, что в работе [100] наблюдалось первое возбужденное состояние с положительной четностью, соответствующее $[\pi 1p_{3/2} \otimes \nu 1p_{1/2}]$ -оболочечно-модельной

конфигурации (нейтрон на $1p_{1/2}$ -оболочке), тогда как основное состояние должно было находиться примерно на 800 кэВ ниже и иметь отрицательную четность (нейтрон на $2s_{1/2}$ -оболочке). Основанием для этого вывода послужила также ранее известная работа [101], где в ядре ^{10}Be было обнаружено состояние $T = 2$, которое является аналогом основного состояния ядра ^{10}Li и соответствует в ^{10}Li близкому к нулю порогу распада с испусканием частицы.

Описание энергий связи, спинов и четностей нейтроноизбыточных легких ядер p -оболочки в модельных пространствах $(0 + 1)\hbar\omega$ и $(0 + 2)\hbar\omega$ привело к предсказанию для двух первых состояний ^{10}Li последовательности уровней 1^+ , 2^+ и 2^+ , 1^+ соответственно [41]. При этом расстояние между уровнями в любой паре составило 0,65 МэВ.

Позднее в работе [103] был измерен спектр протонов, образовавшихся в реакции $^{11}\text{B}(\pi^-, p)^{10}\text{Li}$. Наблюдался один широкий резонанс при энергии $(0,15 \pm 0,15)$ МэВ над порогом испускания нейтрона с шириной ~ 1 МэВ, который описывался формулой Брейта — Вигнера с энергетической зависимостью ширины в s -волновом приближении ($\ell = 0$).

Лучшее согласие с экспериментом было достигнуто в расчетах в рамках оболочечной модели с использованием более сложного взаимодействия [104]. Из этих расчетов следовало, что для ^{10}Li в конфигурации $[\pi 1p_{3/2} \otimes \nu 2s_{1/2}]$ можно было ожидать основное состояние со спином и четностью 2^- . Такой же вывод был сделан и в новом $(0 + 1)\hbar\omega$ -модельном расчете [15], где на основе большого числа экспериментальных данных для основного состояния ^{10}Li было получено значение $J^\pi = 2^-$. Второй член дублета (1^-) оказался при энергии около 2,1 МэВ, а нейтрон на p -орбите привел к близлежащему дублету $1^+/2^+$. В этой работе были предсказаны уровни и в районе 4,5 МэВ. В работе [77], где для расчета энергетических спектров и объяснения инверсии последовательности заселения уровней в ядрах с $N = 7$ в рамках оболочечной модели в $(0 + 1)\hbar\omega$ -модельном пространстве привлекалась зависимость кинетической энергии sd -орбит от изоспина, для ^{10}Li было получено основное состояние с $J^\pi = 2^-$, первое возбужденное состояние с $J^\pi = 1^+$ и энергией 0,218 МэВ, а также ряд других возбужденных состояний в районе 1, 2 — 1, 4, 3, 4 — 3, 9 и 4, 6 — 4, 8 МэВ.

Очевидная неоднозначность по отношению к энергии основного состояния ^{10}Li , его спина и четности привела к необходимости проведения целого ряда новых экспериментов и теоретических расчетов.

Дальнейшие эксперименты можно разделить на две группы — первая, в которой использовались реакции передачи нескольких нуклонов [61, 105–108], и вторая, в которой измерялись характеристики продуктов, образовавшихся при фрагментации налетающего иона [34, 51–53, 109–111].

В работах [61, 105, 106] структура ядра ^{10}Li изучалась с помощью реакций передачи: $^9\text{Be}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$, $^{13}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{17}\text{F})^{10}\text{Li}$ и $^{10}\text{Be}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$. Пред-

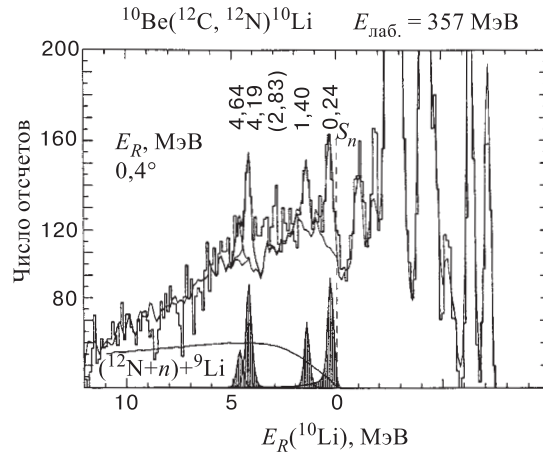


Рис. 16. Спектр ^{10}Li из реакции $^{10}\text{Be}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$ при энергии 357 МэВ и $0,4^\circ$. Сплошная кривая — сумма нормализованных фоновых спектров на мишенях из ^{16}O и ^{12}C и вклад от процесса последовательного распада высоковозбужденного ядра $^{13}\text{N}^* \rightarrow ^{12}\text{N} + n$ (показанной отдельной кривой) [61, 106]. S_n — порог развала ^{10}Li на $^9\text{Li} + n$

полагалось, что разные реакции дадут разную селективность при заселении уровней. Основные результаты этих работ представлены на рис. 16 и 17.

В реакции $(^{12}\text{C}, ^{12}\text{N})$, где используется мишень с $J^\pi = 0^+$, имеет место переворот спина $0^+ \rightarrow 1^+$ в бомбардирующем ядре, и преимущественно заселяются уровни с четностью π , определяемой соотношением $(-1)^J \pi = -1$, где J — спин состояния (целое число) [112]. Поэтому ожидалось, что реакция $^{10}\text{Be}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$ обеспечит наилучшие условия для спектроскопии состояния со спином и четностью $J^\pi = 1^+, 2^-, 3^+, 4^-$ и т.д. В качестве примера на рис. 16 показан спектр ^{10}Li , измеренный в этой реакции [61, 106]. При угле $0,4^\circ$ наблюдалось три узких пика с энергиями $E_R = 0,24(6)$, $1,40(8)$ и $4,19(10)$ МэВ над порогом развала $^{10}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + n$. Под углами $0,95^\circ$ и $1,45^\circ$ были видны также пики с энергией $2,35(10)$ и $4,64(8)$ МэВ. Самый низколежащий резонанс $0,24$ МэВ ($\Gamma = 0,10$ МэВ) хорошо проявляется под всеми углами, что позволило предположить, что этот резонанс может соответствовать основному состоянию и что с большой вероятностью для него $J^\pi = 1^+$ из $[\pi 1p3/2 \otimes \nu 1p1/2]$ -конфигурации. Возможно, резонансы при энергиях $4,19$ и $4,64$ МэВ, а также слабый резонанс при $2,83$ МэВ, входят в состав $[\pi 1p3/2 \otimes \nu 1d5/2]$ -конфигурации с возможными спинами 2^- , 4^- и 3^- (или 1^-). S -волновой резонанс в этом случае не наблюдался. Второе состояние дублета (2^+) также не наблюдалось в этой реакции. Однако состояние 2^+ проявляется в результате нового анализа [61, 106] реакции $^9\text{Be}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$

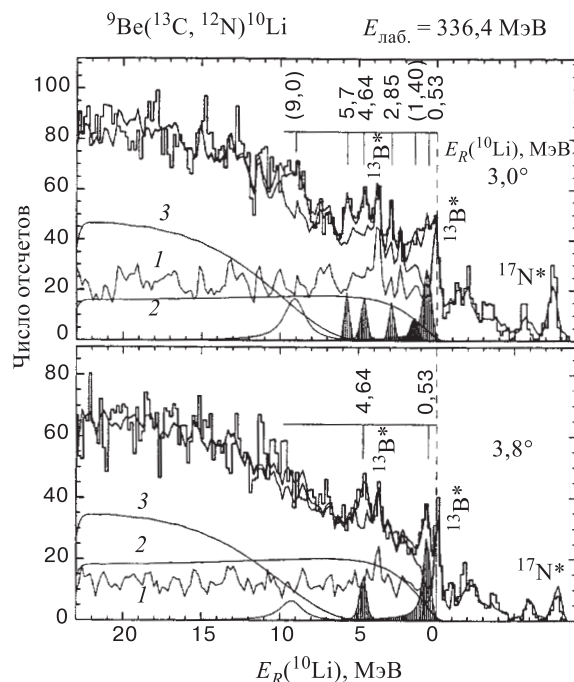


Рис. 17. Энергетические спектры реакции ${}^9\text{Be}({}^{13}\text{C}, {}^{12}\text{N}){}^{10}\text{Li}$ при 24 МэВ/А и углах $3,0^\circ$ и $3,8^\circ$ [106]. Для описания пиков использованы брейт-вигнеровские распределения. Кривые 1 — сумма вкладов от примесей в мишени, 2 и 3 — последовательный распад высоковозбужденного ${}^{13}\text{N}^*$

(рис. 17). Как видно из рисунка, в этом случае имеют место резонансы при $E_R = 0,53(6)$ МэВ с шириной $0,30(8)$ МэВ, а также при $2,85(6)$, $4,64(8)$, $5,7(1)$ МэВ, и с меньшей вероятностью $1,40(8)$ МэВ. Кроме того, широкая структура наблюдается при 9,0 МэВ. Резонанс при $E_R = 0,53(6)$ МэВ идентифицируется как 2^+ -состояние дублета $[\pi 1p3/2 \otimes \nu 1p1/2]$ -конфигурации.

Структура низколежащих уровней ${}^{10}\text{Li}$ изучалась экспериментально и в реакции ${}^{11}\text{B}({}^7\text{Li}, {}^8\text{B}){}^{10}\text{Li}$ [107] при энергии 130 МэВ. Лучшее описание спектра, представленного на рис. 18, получено с помощью двух пиков: один с шириной $\Gamma_{\text{лаб}} = (358 \pm 23)$ кэВ и второй более узкий с $\Gamma_{\text{лаб}} < 230$ кэВ. Уровень, соответствующий первому пику, как считают авторы работы, должен быть нейтронно-неустойчив на (538 ± 62) кэВ, а для второго $B_n \geq -100$ кэВ. Авторы считают также, что уровень при 538 кэВ отвечает p -волновому резонансу, тогда как предполагаемое основное состояние (100 кэВ) может быть либо s -, либо p -волновым резонансом (необходимо учитывать, что в данном случае статистика очень мала и, очевидно, требуется новое измерение).

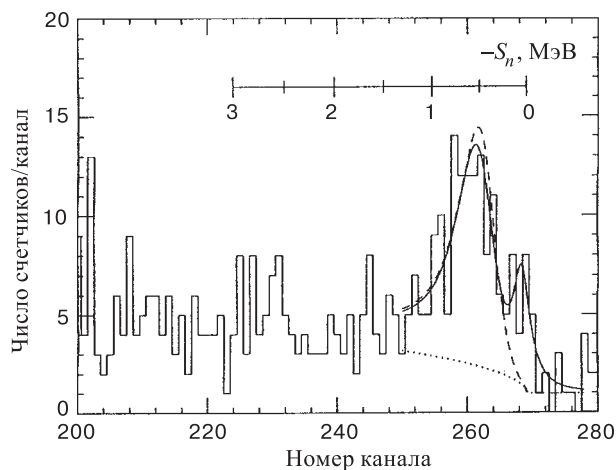


Рис. 18. Энергетический спектр из реакции $^{11}\text{B}(^7\text{Li}, ^8\text{B})^{10}\text{Li}$ при энергии 130 МэВ [107]. Сплошная кривая получена с учетом p - и s -волнового резонансов и фона; пунктирная кривая — с учетом p -волнового резонанса и фона; точечная кривая — фон

Для спектроскопии ^{10}Li использовалась и реакция передачи $^9\text{Be}(^9\text{Be}, ^8\text{B})^{10}\text{Li}$ при энергии 40 МэВ/А [108]. Результаты этой работы не подтверждают существования s -состояния вблизи порога, однако был получен p -волновой резонанс с $B_n = -0,25(10)$ МэВ, что соответствует данным работы [106].

Существование $\ell = 0$ состояния на пороге развала ^{10}Li на $^9\text{Li} + n$ обсуждается в работах, в которых измерялись относительные скорости между фрагментом (^9Li) и нейтроном [51–53], инвариантная масса для системы $^9\text{Li} + n$ [34, 110] и распределение импульсов нейтронов в совпадении с ядром ^9Li [109].

В работах [51–53] регистрировались совпадения нейтронов и ядер ^9Li , возникающих при распаде ^{10}Li , образованного при фрагментации ^{18}O с энергией 80 МэВ/А. На рис. 19 показан спектр относительной скорости между ^9Li и нейтроном, из которой извлекалась энергия распада. Видно, что доминирует центральный пик вблизи относительной скорости 0 см/нс. Это говорит о том, что в ^{10}Li есть уровень, который распадается путем испускания низкоэнергичного нейтрона. Заметное увеличение выхода наблюдается и в районе $\pm 0,8$ см/нс. Анализ спектра проводился с учетом испускания нейтрона как с $\ell = 0$, так и с $\ell = 1$ орбиты. Попытка описать спектр со значением $E_R = 0,800$ МэВ, полученным в работе [100], в предположении p -волнового нейтрона не удалась. Авторам не удалось описать пик также

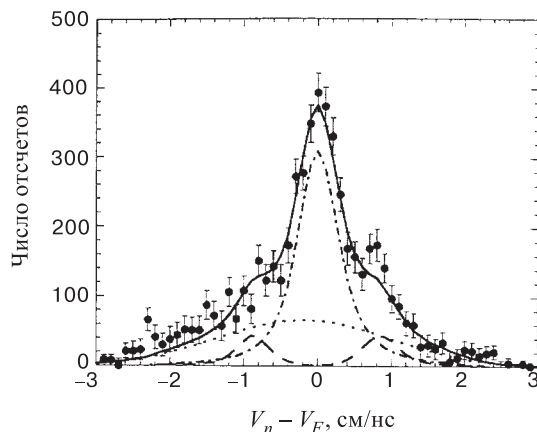


Рис. 19. Спектр относительной скорости для ${}^9\text{Li} + n$ -совпадений [53]. Моделирование (сплошная кривая) по методу Монте-Карло включает вклад от s -волны с длиной рассеяния $a_s = 30$ фм (штрихпунктир), от p -волны с $E_{\text{decay}} = 538$ кэВ, $\Gamma_{\text{decay}} = 358$ кэВ (пунктир) и предполагаемый фон (точки)

с использованием для p -волнового резонанса значения $E_R = 0,24$ МэВ, взятого из работы [61, 106], хотя нельзя было полностью исключить его вклад в измеренный спектр. Лучшее описание спектра дал анализ данных с помощью s -волны с длиной рассеяния $a_s < -20$ фм, что соответствует энергии пика $E_R < 50$ кэВ (это предельное значение ниже значения, приведенного в работе [51]), и p -резонанса с энергией распада около 540 кэВ. Однако интерпретация такого рода спектров достаточно неоднозначна, поскольку измерялась лишь энергия распада, а не абсолютная энергия состояния. Поэтому происхождение пика при нулевой относительной скорости может быть связано с распадом либо основного состояния ${}^{10}\text{Li}$, либо возможного возбужденного состояния при $E^* \approx 2,5$ МэВ. Дело в том, что в ядре ${}^9\text{Li}$, кроме основного, имеется еще один связанный уровень при $E^* = 2,69$ МэВ [5], поэтому нельзя определить, какое состояние ${}^9\text{Li}$, основное или возбужденное, заселяется при испускании нейтрона из ${}^{10}\text{Li}$. Если распад ведет к основному состоянию ${}^9\text{Li}$, то должно распадаться основное состояние ${}^{10}\text{Li}$ с энергией вблизи порога. Если распад происходит в возбужденное состояние ${}^9\text{Li}$, то следует, что наблюдается возбужденный уровень ${}^{10}\text{Li}$ с $E^* \approx 2,5$ МэВ. Таким образом, на основании этих данных нельзя было сделать однозначного вывода о наблюдении основного состояния ${}^{10}\text{Li}$ вблизи порога.

В согласии с этими данными находится результат работы [111], где для длины рассеяния системы ${}^9\text{Li} + n$ было получено значение $a_s < -16_{-7}^{+4}$ фм.

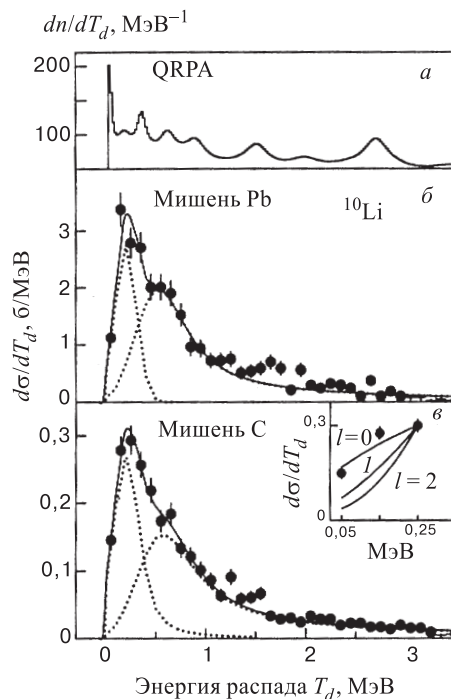


Рис. 20. Энергия распада для ^{10}Li , полученная в анализе инвариантной массы $^9\text{Li} + n$ после развала на мишени из Pb (б) и C (в) [110]. Спектр описывается двумя компонентами при энергии распада 0,21 и 0,60 МэВ. На вставке представлен спектр при энергии меньше 250 кэВ в сравнении с сечением, ожидаемым из $(T_d)^{\ell+1/2}$, где T_d — энергия распада, ℓ — угловой момент нейтрона; на рис. а — расчет по QRPA

В работе [34], в реакции фрагментации $^{11}\text{Li} + \text{C} \rightarrow ^9\text{Li} + n + X$ при 72 МэВ/А, проводились эксклюзивные измерения инвариантной массы для $^9\text{Li} + n$. Распределение монотонно убывает от порога развала $^{10}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + n$. Наблюдался широкий пик в районе $E^* \sim 500$ кэВ.

В работе [110] была получена информация о структуре ^{10}Li методом определения инвариантной массы (рис. 20) при развале вторичного пучка ^{11}Li (280 МэВ/А). Важно отметить, что в этой работе предполагалось, что вылетающий фрагмент (кор ^9Li) находится в основном состоянии. Наблюдаемый при малых энергиях распада резкий подъем сечения объяснялся лишь наличием ($\ell = 0$)-волны (см. вставку на рис. 20). Было обнаружено также два низколежащих резонанса при энергиях 0,21(5) и 0,62(10) МэВ, и не исключалось наличие резонанса при энергии $\sim 1,6$ МэВ. В работе приведены также расчеты ядра ^{10}Li в рамках QRPA-подхода, которые учитывали вклады от за-

селения s -, p - и d -нейтронных состояний (рис. 20). Из этих расчетов следует, что непосредственно у порога имеют место $J^\pi = 1^-, 2^-$ -состояния (нейтрон занимает s -орбиту), в последующих структурах доминируют ($J^\pi = 1^+, 2^+$)-состояния (нейтрон находится на $p_{1/2}$ -орбите), а в районе 1,5 и 2,6 МэВ сечения обусловлены наложениями s - и d -орбит.

В работе [109] проделан сравнительный анализ распределений импульса нейтронов в совпадении с ядром ${}^9\text{Li}$, образующихся в реакциях вторичных пучков ${}^{11}\text{Be}$ и ${}^{11}\text{Li}$ высокой энергии (460 и 280 МэВ/А) на углеродной мишени. Показано, что взаимодействие в конечном состоянии доминирует, и основное состояние ${}^{10}\text{Li}$ имеет $\ell = 0$ и длину рассеяния $a_s = 20$ фм, что соответствует энергии возбуждения < 50 кэВ. Также имеет место ($\ell = 1$)-резонанс при энергии около 500 кэВ. Однако, по мнению авторов, эти выводы являются скорее качественными, и вопрос о заселении $1s_{1/2}$ -орбиты требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований.

Ядру ${}^{10}\text{Li}$ в последнее время был посвящен ряд теоретических расчетов.

В рамках теории пороговых явлений были определены энергии, ширины и четности нижайших состояний $T = 2$ ядра ${}^{10}\text{Be}$, которые являются аналогами основного и первого возбужденного состояний ядра ${}^{10}\text{Li}$. Далее была проведена экстраполяция их характеристик на свойства состояний ядра ${}^{10}\text{Li}$ с использованием изобарических мультиплетных массовых уравнений (ИММЕ) и систематики энергий кулоновской перестройки. Это позволило установить наиболее вероятную последовательность первых двух уровней ядра ${}^{10}\text{Li}$ над порогом распада ${}^{10}\text{Li} \rightarrow {}^9\text{Li} + n$: $(0,027 \pm 0,027)$ МэВ, $J^\pi = 2^-$ и $(0,088 \pm 0,043)$ МэВ, $J^\pi = 1^-$, с ширинами, соответственно, 68 и 14 кэВ [113]. Таким образом, можно ожидать, что ядро ${}^{10}\text{Li}$ неустойчиво к испусканию нейтрона на 27 кэВ, и его основное состояние принадлежит дублету с конфигурацией $[\pi 1p_{3/2} \otimes \nu 2s_{1/2}]$.

В работах [114, 115] были рассчитаны импульсные распределения продуктов развала ${}^{11}\text{Li}$ при большой энергии с учетом двухтельного взаимодействия в конечном состоянии. Сравнение с упомянутыми выше экспериментальными данными [109], а также с данными работ [116–118], привело к аналогичным выводам: энергия самого низколежащего виртуального s -состояния в ${}^{10}\text{Li}$ должна находиться в пределах $5 \div 200$ кэВ, а энергия самого низколежащего p -резонанса — около 500 кэВ.

В работе [119] авторы показали, что в трехтельной модели расчета они смогли воспроизвести энергию связи и радиус ядра ${}^{11}\text{Li}$ лишь в предположении, что основное состояние ${}^{10}\text{Li}$ почти не связано и соответствует нейтрону в ($\ell = 0$)-состоянии.

В работе [120] методом резонирующих групп рассматривались рассеяние нейтрона на основном состоянии ${}^9\text{Li}$ и переходы к разным возбужденным состояниям. Из этих расчетов следует, что основное состояние имеет $J^\pi = 1^+$ (в согласии с данными [61, 106], но при энергии резонанса 0,6 МэВ). Эта ве-

Таблица 6. Экспериментальные данные по резонансам в ^{10}Li : их энергии (E_R), ширины (Γ_R) и идентификация

Ссылка, год	Реакция	E_R , МэВ	Γ_R , МэВ	Идентификация
[100], 1975	$^9\text{Be}(^9\text{Be}, ^8\text{B})^{10}\text{Li}$	$0,80 \pm 0,25$	$1,2 \pm 0,3$	g.s.
[103], 1990	$^{11}\text{B}(\pi^-, p)^{10}\text{Li}$	$0,15 \pm 0,15$	$\leq 0,4$	g.s., $s1/2$
[107], 1994	$^{11}\text{B}(^7\text{Li}, ^8\text{B})^{10}\text{Li}$	$(< 0,10)$ $0,54 \pm 0,06$	$(< 0,23)$ $0,36 \pm 0,02$	(g.s.) $p1/2$
[105,61,106] 1993, 1995, 1997	$^9\text{Be}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$ $^{10}\text{Be}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{N})^{10}\text{Li}$	$0,24 \pm 0,06$ $0,53 \pm 0,06$ $1,40 \pm 0,08$ $2,35 \pm 0,10$ $2,85 \pm 0,06$ $4,19 \pm 0,10$ $4,64 \pm 0,08$ $5,7 \pm 0,1$ (9, 0)	0,10 $0,30 \pm 0,08$	g.s., $p1/2$, 1^+ $p1/2$, 2^+
[108], 1998	$^9\text{Be}(^9\text{Be}, ^8\text{B})^{10}\text{Li}$	$0,25 \pm 0,10$		$p1/2$
[34], 1993	$^{11}\text{Li} + \text{C} \rightarrow ^9\text{Li} + n + X$	$\leq 0,15$ $\sim 0,5$		
[51], 1993	$^{12}\text{C}(^{18}\text{O}, n^9\text{Li})X$	$< 0,15$ или $E^* \approx 2,5$		g.s., $s1/2$, или E^*
[52, 53] 1995, 1999	$^9\text{Be}(^{18}\text{O}, n^9\text{Li})X$	$< 0,05$ или $E^* \sim 0,540$		g.s., $s1/2$, или E^* $p1/2$
[109], 1995	$^{11}\text{Li}(^{11}\text{Be}) + \text{C} \rightarrow ^9\text{Li} + n + X$	$\leq 0,05$ $\sim 0,5$		g.s., $s1/2$ $p1/2$
[110], 1997	$^{11}\text{Li} + \text{C}(\text{Pb}) \rightarrow ^9\text{Li} + n + X$	$0,21 \pm 0,05$ $0,62 \pm 0,10$ ($\sim 1,6$)	0,12 $0,6 \pm 0,1$	$s1/2$ $p1/2$
[111], 1998		$\sim 0,075$		

личина превышает все известные экспериментальные данные, приписываемые основному состоянию. Резонанс, имеющий $J^\pi = 2^+$, также не воспроизводится в этом расчете. Состояния при 1,7 и 6,1 МэВ идентифицируются как $2^-/1^-$ -дублет из конфигурации $[\pi 1p3/2 \otimes \nu 2s1/2]$. Полученный результат согласуется с расчетом [41], сделанным в модельном пространстве $(0+1)\hbar\omega$, и с правилами Нордхайма [99]. Вместе с тем в этой работе не предсказывается существование виртуального s -волнового состояния. В то же время в [121] было показано, что существование низколежащего s -виртуального состояния в системе ${}^9\text{Li}+n$ оказывает сильное влияние на структуру гало в ядре ${}^{11}\text{Li}$ (s -виртуальное состояние было необходимо для описания импульсного распределения ${}^9\text{Li}$ после развала ${}^{11}\text{Li}$).

Важность учета деформации ядра-кора ${}^9\text{Li}$ показана в работе [122], в которой для виртуального состояния была получена длина рассеяния $a_s \approx -7$ фм.

Вместе с тем в работе [123], где применялся микроскопический много-кластерный метод с нуклон-нуклонным взаимодействием и кластерной структурой ${}^{10}\text{Li}(= {}^9\text{Li}+n)$, а также с учетом возбуждений кора ${}^9\text{Li}$, было показано, что существование s -виртуального состояния остается открытым вопросом, однако, если и имеет место s -резонанс, он скорее всего не является основным состоянием. Для основного состояния предсказывается $J^\pi = 1^+$, для первого возбужденного состояния $J^\pi = 2^+$, в соответствии с интерпретацией работы [106].

В табл. 6 представлены характеристики резонансов ${}^{10}\text{Li}$, полученные в основном за последние 10 лет.

Видно, что несмотря на то, что физики приблизились к лучшему пониманию загадки структуры ${}^{10}\text{Li}$, все еще нет единого мнения о месте нахождения основного состояния ${}^{10}\text{Li}$. Его спин и четность не определены однозначно. При этом не исключено, что вблизи порога имеет место вклад как s -, так и p -нейтрона. Необходимо учитывать также, что, как показано в работе [124], на основании свойств резонансов, расположенных вблизи порога (например, их большая ширина, обуславливающая их асимметричную форму и перекрытие порога), очень трудно для основного состояния ${}^{10}\text{Li}$ определить значение ℓ или даже точное значение его энергии.

2.2. Ядро ${}^{11}\text{Li}$. В последние годы ядро ${}^{11}\text{Li}$ больше других легких ядер привлекало внимание как экспериментаторов, так и теоретиков, поскольку оно является наиболее ярким представителем ядер с гало. В принципе нейтронное гало может проявляться в ядрах, в которых энергия отрыва валентного нейтрона (валентных нейтронов) мала. Галообразная структура ядер возникает в результате длинного «хвоста» в волновой функции слабосвязанных валентных нейтронов далеко за пределами ядерного потенциала. Нейтронное гало было впервые обнаружено в 1985 г. именно в ядре ${}^{11}\text{Li}$ ($B_{2n} \approx 300$ кэВ)

Таблица 7. Радиусы взаимодействия и среднеквадратичные радиусы [фм] для ^9Li и ^{11}Li [17, 20]

Ядро	R_I	R_{rms}^m	R_{rms}^p	R_{rms}^n
^9Li	$2,41 \pm 0,02$	$2,43 \pm 0,02$	$2,30 \pm 0,02$	$2,50 \pm 0,02$
^{11}Li	$3,14 \pm 0,16$	$3,27 \pm 0,24$	$3,03 \pm 0,024$	$3,36 \pm 0,24$

в экспериментах с использованием радиоактивных пучков [17]. В этой работе измерялись сечения взаимодействия ^6Li , ^7Li , ^8Li , ^9Li и ^{11}Li , на основании которых определялись среднеквадратичные радиусы распределения нуклонов в этих ядрах. В табл. 7 показаны значения радиусов взаимодействия для ^9Li и ^{11}Li , а также среднеквадратичные радиусы распределения нуклонов, полученные с помощью глауберовской теории. Оказалось, что радиус ^{11}Li больше ожидаемого по систематике для менее нейтроноизбыточных изотопов Li. Позже [19] было измерено распределение поперечного импульса ^9Li , образованного в реакции фрагментации ^{11}Li , оно оказалось более узким, чем предполагалось в модели Гольдхабера [125]. В соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга был сделан вывод о том, что нейтроны в гало имеют широкое пространственное распределение. Таким образом, большой радиус и узкое импульсное распределение были первыми признаками существования нейтронного гало в ядрах вблизи границы стабильности.

В результате измерения спина, магнитного и квадрупольного моментов, которые оказались близкими к ожидаемому для протона на $p3/2$ -оболочке, было показано, что увеличение размера ^{11}Li нельзя объяснить деформацией [126].

Ядро ^{11}Li — борромиевское ядро: его можно представить в виде кора (^9Li) и двух нейтронов сверх этого кора. Каждая из двухтельных подсистем ($^9\text{Li} + n$) и $(n + n)$ не связана. Поэтому ядро ^{11}Li демонстрирует важную роль, которую играют корреляции в двухтельных подсистемах в стабильности ядер, особенно при спаривании двух нейтронов гало. Взаимодействие между двумя валентными нейтронами может быть настолько сильным, что в ядре ^{11}Li они могут образовывать два сильно скоррелированных нейтрона (динейтрон) [3, 65].

Ядро ^{11}Li впервые наблюдалось при фрагментации урановой мишени протонами с энергией 5,3 ГэВ [84]. Этот результат оказался довольно неожиданным, поскольку в соответствии с экстраполяциями по методу Гарви — Келсона [42] ^{11}Li ожидался не связанным на 2,5 МэВ.

Измерение избытка массы ^{11}Li проводилось в нескольких работах [33, 127–130]. Первые результаты [127–128] сильно расходились и харак-

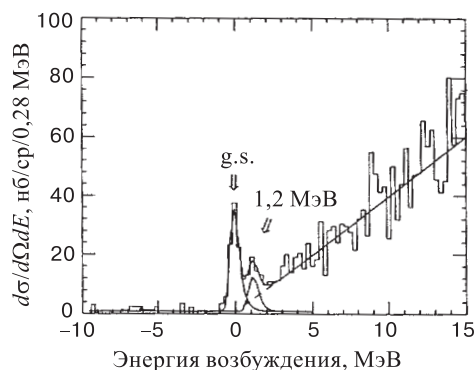


Рис. 21. Спектр недостающей массы для реакции $^{11}\text{B}(\pi^-, \pi^+)^{11}\text{Li}$ при энергии 164 МэВ и $\theta_{\text{лаб}} = 20^\circ$ [129, 33]

теризовались большой ошибкой. Для понимания проявления нейтронного гало было необходимо более точное определение избытка массы (М.Е.) и энергии связи двух валентных нейтронов (B_{2n}). В связи с этим работы [129, 33, 130] были направлены на уточнение значения избытка массы ^{11}Li . В результате всех измерений в настоящее время для ^{11}Li принято значение М.Е. = $(40,796 \pm 0,027)$ МэВ, что соответствует энергии связи двух нейтронов $B_{2n} = (310 \pm 40)$ кэВ [56]. Кроме исследований основного состояния ^{11}Li , проводились эксперименты, связанные с поиском возбужденных состояний. Поиск и исследование этих состояний особенно актуальны в связи с предположением о существовании в результате нейтронного гало нового типа коллективного возбуждения, а именно мягкого дипольного резонанса. Предположение о наличии этой моды возбуждения было сделано для объяснения наблюдаемого в эксперименте высокого значения сечения электромагнитной диссоциации пучка ^{11}Li на свинцовой мишени [131]. В разных моделях значение мягкого дипольного резонанса предполагалось в области низкой энергии возбуждения от 0,4 до 1,3 МэВ [33, 65, 132–134]. Имеются и другие работы, в которых предсказывались возбужденные уровни ^{11}Li [15, 41, 110, 135–138].

Ранние работы [139, 45] из-за малой статистики не дали однозначного ответа на вопрос о существовании возбужденных уровней в ^{11}Li .

Впервые в работах [129, 33], где ядро ^{11}Li получалось в реакции двойной перезарядки на π -мезонах $^{11}\text{B}(\pi^-, \pi^+)^{11}\text{Li}$ при энергии 164 МэВ, наблюдался пик, соответствующий возбужденному состоянию при $E^* = 1,2 \pm 0,1$ МэВ с шириной $\Gamma \leq 0,5$ МэВ. Спектр недостающей массы, полученной в этой работе, показан на рис. 21 для угла $\theta_{\text{лаб}} = 20^\circ$.

Позже экспериментальная информация о возбужденных состояниях ^{11}Li была получена в работах [110, 140–146].

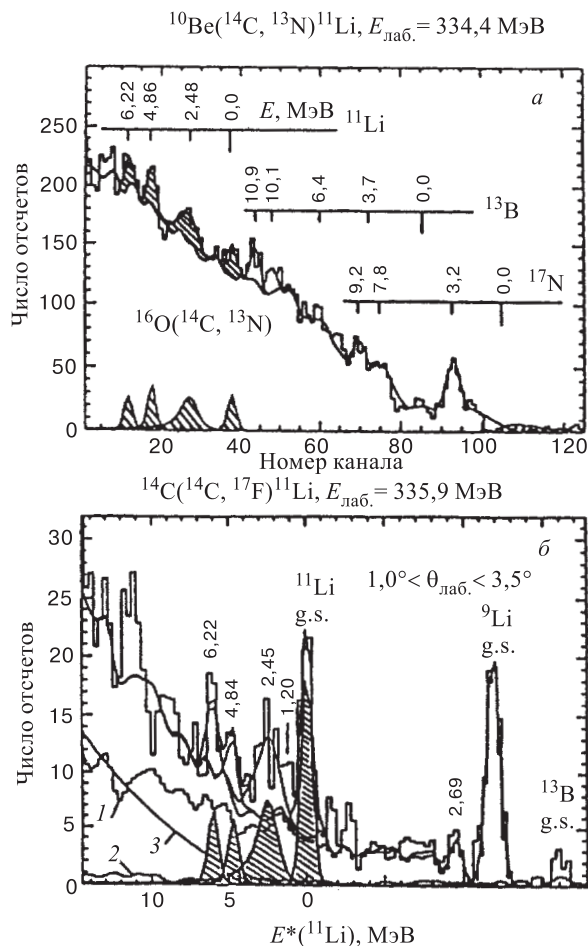


Рис. 22. Спектры из реакций $^{10}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{13}\text{N})^{11}\text{Li}$ (а) и $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{17}\text{F})^{11}\text{Li}$ (б). Указаны значения энергий возбужденных уровней ядра ^{11}Li , а также пики, соответствующие реакциям на примесях в мишенях [140]

В работе [140] для поиска возбужденных состояний ^{11}Li использовались реакции передачи $^{10}\text{Be}(^{14}\text{C}, ^{13}\text{N})^{11}\text{Li}$ и $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{17}\text{F})^{11}\text{Li}$ при энергии $\approx 24 \text{ МэВ/А}$. В первой реакции происходил подхват одного протона и срыв двух нейтронов, в результате была возможна передача этих двух нейтронов на свободные оболочки кора (^9Li). Вторая реакция шла через подхват трех протонов, и максимальный выход ожидался для основного состояния. Полученные в этой работе результаты представлены на рис. 22. В обеих реакциях

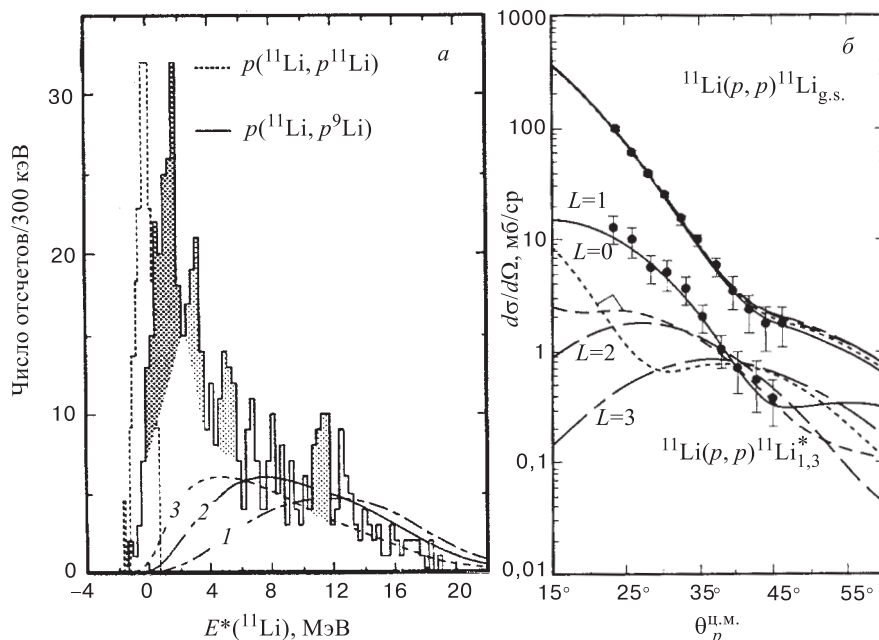


Рис. 23. а) Спектр энергии возбуждения ядра ^{11}Li , полученный из измерения процессов $p(^{11}\text{Li}, p^9\text{Li})$, $p(^{11}\text{Li}, p^{11}\text{Li})$) сплошная и пунктирная гистограммы соответственно. Кривые: 1 — фазовое пространство для канала $p+n+n+^9\text{Li}$; 2 — взаимодействие в конечном состоянии ($n+n$ или $n+^9\text{Li}$); 3 — взаимодействие в конечном состоянии через узкий резонанс ^{10}Li [141]; б) угловое распределение для упругого и неупругого рассеяния $^{11}\text{Li}+p$ при 68 МэВ/А. Кривыми показаны результаты расчета для возбуждения с переданным орбитальным угловым моментом $L=0, 1, 2, 3$ [142]

наблюдалось основное и три возбужденных состояния, которым соответствовали усредненные по двум реакциям значения $E^* = 2,47(7)$, $4,85(7)$ и $6,22(7)$ МэВ с ширинами $\Gamma = 1,2(2)$, $< 0,1$ и $< 0,1$ МэВ соответственно. Авторами не исключалось, что пик при $E^* = 2,47$ МэВ мог содержать несколько резонансов. Между тем в обеих реакциях резонанс при $E^* = 1,2$ МэВ не наблюдался.

В последующих двух экспериментах по поиску возбужденных состояний ^{11}Li был использован вторичный пучок ионов ^{11}Li с энергией ~ 70 МэВ/А, который рассеивался на протоне [141, 142]. Были измерены инклюзивные спектры протонов, а также корреляции продуктов диссоциации ^{11}Li (один пример представлен на рис. 23,а). В спектрах протонов из процессов $p(^{11}\text{Li}, p)$, $p(^{11}\text{Li}, p^9\text{Li})$, $p(^{11}\text{Li}, p^{9,8,7}\text{Li})$ и $p(^{11}\text{Li}, pn^{9,8,7}\text{Li})$ были обнаружены, кроме основного состояния, еще 4 состояния при $E^* = (1,25 \pm 0,15)$, $(3,0 \pm 0,2)$,

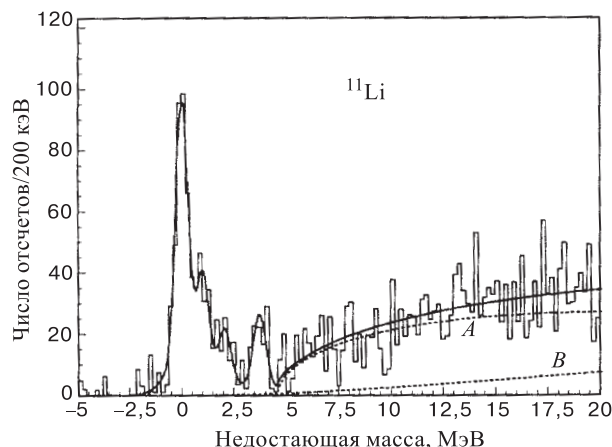


Рис. 24. Спектр недостающей массы для реакции $^{14}\text{C}(\pi^-, pd)^{11}\text{Li}$ после вычета фона на примеси ^{12}C . Кривая А — фазовое пространство для развала $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li}(4, 3) + ^2n$, кривая В — фазовое пространство для развала $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li}(\text{g.s.}) + n + n$ [143]

($4, 9 \pm 0, 25$), ($6, 4 \pm 0, 25$) и ($\sim 11, 3 \pm 0, 35$) МэВ. На рис. 23,б показано угловое распределение для упругого и неупругого рассеяния $^{11}\text{Li} + p$ при 68 МэВ/А; кривыми представлены результаты расчета для возбуждения с переданным орбитальным угловым моментом $L = 0, 1, 2, 3$ [142].

Возбужденные состояния ^{11}Li исследовались также в реакции захвата пионов $^{14}\text{C}(\pi^-, pd)^{11}\text{Li}$ при энергии 30 МэВ [143]. Результат этой работы показан на рис. 24. Были идентифицированы четыре пика: основное состояние и возбужденные состояния с $E^* = (1, 02 \pm 0, 07)$, $(2, 07 \pm 0, 12)$ и $(3, 63 \pm 0, 13)$ МэВ.

Возбужденное состояние при энергии ~ 1 МэВ наблюдалось также в спектре энергии возбуждения ^{11}Li , рассчитанного из инвариантной массы системы $^9\text{Li} + n + n$ при развале вторичного пучка ^{11}Li на мишенях из С и Рb [144, 146, 110], при энергиях пучка ^{11}Li , соответственно, 28, 42 и 280 МэВ/А. При энергии 280 МэВ/А [110] на мишени из свинца получено распределение до более высоких энергий возбуждения, и в нем наблюдалась структура, которую можно интерпретировать как $E1$ -возбуждение с двумя компонентами, одна с энергией 1,0(1) МэВ и вторая с 2,4(2) МэВ. QRPA-расчеты [110] предсказывают структуры при 1,4 и 2,3 МэВ. Они согласуются с расчетом [134], где были получены две компоненты в вероятности дипольного возбуждения (dipole strength): 0,7 и 2,7 МэВ. Предполагается, что первая компонента соответствовала движению нейтронов гало относительно кора, а вторая — возбуждению первого уровня (2,69 МэВ) самого ядра-кора ^9Li .

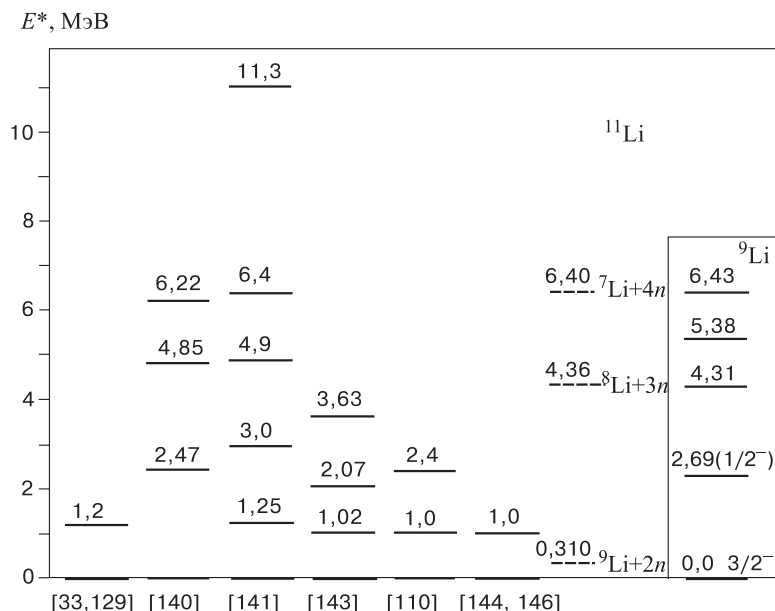


Рис. 25. Экспериментальные данные для возбужденных состояний ядра ^{11}Li [33, 110, 129, 140, 141, 143, 144, 146]. Показаны пороги распада ^{11}Li на изотопы Li плюс x нейтронов (пунктир). Вставка — схема уровней ядра ^9Li [168]

На рис. 25 приведены экспериментально измеренные уровни ядра ^{11}Li . Значительный интерес представляют их характеристики. Сечение образования ^{11}Li в основном состоянии оказалось ниже ожидаемого по систематике, что объясняется наличием в ядре протяженного распределения нейтронной плотности. На основании углового распределения состоянию с $E^* \sim 1,2$ МэВ приписаны спин и четность $J^\pi = 1/2^+, 3/2^+$ или $5/2^+$. Поскольку оно может заселяться при возбуждении основного состояния путем $E1$ -перехода, то это состояние рассматривалось как возможное проявление мягкого дипольного резонанса [33, 129]. Это предположение подтверждается также результатом измерения углового распределения (рис. 23,б) в работе [142]. Как видно из рисунка, неупругое рассеяние хорошо описывается, когда переданный орбитальный угловой момент $L = 1$. В принципе, три разных состояния с $J^\pi = 1/2^+, 3/2^+$ или $5/2^+$ могли бы возбудиться при $L = 1$. Эти значения спина уровня с энергией ~ 1 МэВ находятся в согласии и с выводами работы [110], в которой также было показано, что его можно получить при $E1$ -возбуждении. Однако возможно и другое объяснение: в работе [121] предсказывалось состояние с $J^\pi = 3/2^-$ (т.е. с таким же J^π , как и основное состояние). Так как не сумели описать сечение и угловое распределение

методом, успешно использованным для описания других ядер, в [138] интерпретация этого пика как возбужденного состояния вообще была поставлена под сомнение. Однако в последующей работе [143] наблюдение состояния с энергией 1,02(7) МэВ, скорее, подтвердило результат работ [33, 129, 141, 142].

Несколько другая интерпретация состояния при ~ 1 МэВ сделана в [144, 147, 148]. В этом кинематически полном эксперименте (измерялись энергии и углы нейтронов и ${}^9\text{Li}$) определялся спектр энергии распада ${}^{11}\text{Li} \rightarrow {}^9\text{Li} + n + n$. Силовая функция $dB(E1)/dE$ рассчитывалась с учетом функции отклика детекторов и спектра виртуальных фотонов. Экспериментальный спектр имел форму, которую можно было описать формулой Брейта — Вигнера, что привело к значениям $E^* \cong 1,0$ МэВ и $\Gamma = 0,8$ МэВ, которые можно было ожидать для распада резонанса. Однако рассчитанные времена, соответствующие этим энергиям в предположении, что резонанс соответствует мягкому дипольному резонансу, получились следующими: период осцилляции кора (${}^9\text{Li}$) относительно двух нейтронов гало $T \cong 1250$ фм/с, а время жизни $\tau = 250$ фм/с. Это время оказалось слишком коротким (в ~ 5 раз меньше времени одной осцилляции) для того, чтобы процесс распада мог идти через резонансное состояние типа мягкого дипольного резонанса. К такому выводу авторы пришли также на основании разницы скоростей нейтронов и кора: ${}^9\text{Li}$ ускоряется в поле ядра мишени, т.е. происходит «прямой» развал ${}^{11}\text{Li}$ вблизи мишени за еще меньшее время $\tau \sim 60$ фм/с, когда система еще не дошла до резонансного состояния.

Уровень с $E^* = 3,0$ МэВ может соответствовать случаю, когда кор ${}^9\text{Li}$ находится в первом возбужденном состоянии ($E^* = 2,69$ МэВ, $J^\pi = (1/2^-)$). Тогда для уровня в ${}^{11}\text{Li}$ также имеется $J^\pi = (1/2^-)$. Нужно отметить, что этот уровень предсказывался в работе [123]. Энергия следующего уровня (4,9 МэВ) примерно равна сумме энергий первых двух уровней, поэтому можно положить, что состояние 4,9 МэВ является возбужденным кором с возбуждением валентных нейтронов. Четвертый уровень близок по значению к состоянию ${}^9\text{Li}$ при 6,43 МэВ, находящегося вблизи порога его развала на ${}^7\text{Li} + n + n$. При добавлении двух нейтронов в ${}^{11}\text{Li}$ может иметь место структура типа « ${}^7\text{Li}$ -кор + $4n$ -гало», тем более что энергия уровня в ядре ${}^{11}\text{Li}$ близка к порогу испускания четырех нейтронов [141, 142].

Как уже отмечалось в начале этого раздела, важно понять, насколько сильна корреляция между двумя нейтронами гало в ядре ${}^{11}\text{Li}$. Ответ на вопрос о существовании динейтрона в ${}^{11}\text{Li}$ можно найти методом анализа экспериментальных данных по спектру энергий возбуждения или с помощью измерения характеристик частиц, испущенных в процессе развала. Первый способ был применен в работе [143]. Авторы обратили внимание на форму спектра в области континуума (см. рис. 24). Спектр удалось описать, лишь предполагая доминирующий двухтельный развал ${}^{11}\text{Li}$ с участием динейтрона 2n и возбужденного состояния ${}^9\text{Li}$ (кривая А), и с небольшим вкладом про-

цесс $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li(g.s.)} + n + n$ (кривая *B*). С помощью двухтельного развала $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li(g.s.)} + ^2n$, так же, как и $^{11}\text{Li} \rightarrow ^8\text{He} + t$, не смогли объяснить эту часть спектра. Связывая динейтронный кластер с двухнейтронным гало в ^{11}Li , авторы [143] высказали предположение о сильной корреляции двух нейтронов гало. Однако оно не согласуется с интерпретациями данных, полученных в [110, 144, 147, 148], в которых измерялись углы разлета между валентными нейтронами, импульсные распределения нейтронов и ^9Li , а также относительная энергия нейтронов после электромагнитного возбуждения на свинцовой мишени. В работе [147] было показано, что распределение угла θ между двумя нейтронами, испущенными при электромагнитной диссоциации ^{11}Li , практически изотропно, т.е. нейтроны испускаются, не коррелируя между собой. Измеренное распределение могло быть описано лишь в предположении, что энергия возбуждения ^{11}Li распределяется между тремя частицами в выходном канале. Этот результат свидетельствует о том, что в ^{11}Li нейтроны гало не существуют в виде динейтрона.

Вопросу о существовании динейтрона в ^{11}Li посвящены и некоторые теоретические расчеты. Например, в работе [149] были рассчитаны сечения реакции и импульсных распределений нейтронов в совпадении с ^9Li в случае $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^9\text{Li} + n + n$. Оказалось, что они чувствительны к расстоянию между двумя валентными нейтронами. Сравнение эксперимента [109] с расчетами, проведенными в нескольких предположениях о среднем расстоянии между нейтронами, показало, что вероятность нахождения этих нейтронов вблизи друг друга очень мала. Большое расстояние между нейтронами, полученное в работе [123] в рамках микроскопической многокластерной модели, привело к такому же выводу. Расчеты энергии связи двух нейтронов и радиуса ядра в рамках трехчастичной модели [119] также говорят в пользу сигарообразной формы ^{11}Li . В то же время, в работе [150] при анализе сечения, полученного для реакции двойной перезарядки $^{11}\text{B}(\pi^-, \pi^+)^{11}\text{Li}$ [33, 129], показано, что его можно было воспроизвести лишь в предположении динейтронной конфигурации в ^{11}Li . Рассчитанный среднеквадратичный радиус орбит валентных нейтронов в этом случае оказался равным $R_{2n} = 5,1^{+0,6}_{-0,9}$ фм. Эта величина соответствует среднеквадратичному радиусу распределения нейтронов $R_{rms}^n = 3,28 \pm_{0,33}^{0,24}$ фм и находится в согласии с величиной $(3,21 \pm 0,17)$ фм, определенной из сечений взаимодействия [17, 20].

Здесь нужно отметить необходимость получения точных значений радиусов, поскольку радиус является одной из величин, необходимых при создании теоретических моделей для описания ядер с гало, которые, в свою очередь, используются при интерпретации различных экспериментальных данных. Модельно-зависимые определения радиуса орбит валентных нейтронов приводят к значениям, сильно отличающимся друг от друга: $\sim 4,7 \div 12$ фм [17, 20, 67, 116, 150–156]. В то же время определено экспериментальное зна-

чение 4,8 – 4,9 фм [33,157] (следует отметить, что это значение близко к значению для ядер в области $A = 100$). Кроме того, в работах [24,158] проведен новый теоретический анализ данных о сечении реакции для определения среднеквадратичного радиуса распределения ядерного вещества в ^{11}Li . В результате определено значение $R_{rms}^m = (3,55 \pm 0,10)$ фм, которое значительно превышает $R_{rms}^m = (3,10 \pm 0,17)$ фм, полученное в [20]. Из этого следует, что радиус ядра ^{11}Li до сих пор однозначно не определен.

О размере гало можно получить информацию на основе импульсных распределений продуктов (ядра-кора и нейтронов гало), образовавшихся при развале ^{11}Li (подробный обзор данных по импульсным распределениям можно найти в [159]). В [19] впервые было измерено импульсное распределение ^9Li при фрагментации ^{11}Li . Оно оказалось состоящим из двух компонент: широкой, соответствующей значениям для фрагментации обычных ядер, и узкой, подтверждающей существование протяженного распределения валентных нейтронов. Эти противоречивые экспериментальные и теоретические выводы показывают, что вопрос о корреляции между валентными нейтронами в гало все еще остается открытым.

Считается, что информацию о структуре гало, особенно о распределениях протонов и нейтронов, можно получить путем изучения упругого рассеяния ^{11}Li при разных энергиях и на разных мишенях [26,141,160,161]. В этих работах результаты для ^{11}Li сравнивались с распределениями для других изотопов лития: ^6Li , ^7Li и ^9Li . При таком сравнении [160] обнаружено, что в то время, как для ^6Li , ^7Li и ^9Li абсолютные значения сечения практически одинаковы, для ^{11}Li сечение рассеяния оказалось значительно меньше. Дифракционный минимум в угловом распределении ^{11}Li постепенно сдвигался к меньшим углам с увеличением массового числа A изотопа, тем самым отражая увеличение радиусов ядерной материи с увеличением A . Данные этого эксперимента проанализированы с использованием борновского приближения и оптической модели [162]. В предположении, что ^{11}Li имеет конфигурацию ядра-кора в виде ^9Li плюс два слабосвязанных нейтрона, было показано, что поведение сечения упругого рассеяния можно объяснить развалом ядра ^{11}Li , от которого отрываются нейтроны гало. Нейтроны гало отрываются при столкновении с протоном, и рассеяние обуславливается ядром-кором, а гало дает вклад лишь в мнимую часть потенциала. Сравнение упругого рассеяния ^{11}Li с ^7Li было сделано и в работе [161]. Оказалось, что при рассеянии ^{11}Li , в отличие от ^7Li , не наблюдалось резкого снижения отношения σ/σ_R с увеличением угла. В этой работе была сделана попытка описать экспериментальные данные с помощью феноменологического оптического потенциала, однако это привело к необходимости использования относительно большого значения параметра поверхностной диффузности реальной части потенциала. Это интерпретировалось как наличие протяженного распределения плотности в ^{11}Li . Экспериментальный результат по упругому рассеянию ^{11}Li и его

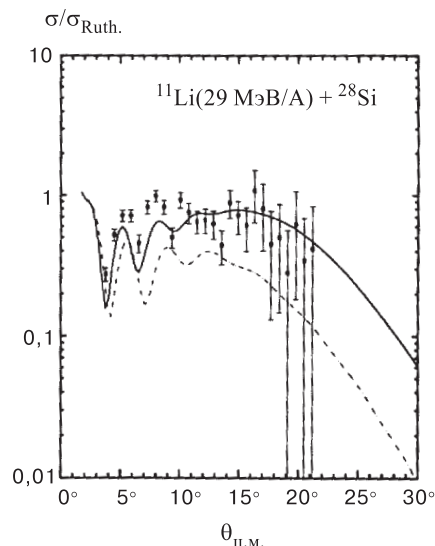


Рис. 26. Угловое распределение упругого рассеяния вторичного пучка ^{11}Li на мишени из ^{28}Si [161]. Точки — экспериментальные данные. Сплошная и пунктирные кривые — расчеты, сделанные с использованием потенциала двойной свертки, для случая с гало ($N_V = 0,6$, $N_W = 0,18$) и без гало ($N_V = 0,6$, $N_W = 0,27$) соответственно. N_V и N_W — нормировочные коэффициенты

описание методом связанных каналов с использованием потенциала двойной свертки с энергетической и плотностной зависимостями эффективного взаимодействия и реалистическими плотностями показан на рис. 26. Как видно из рисунка, использование разных распределений плотности приводит к различным расчетам — лучшее согласие эксперимента с расчетом было достигнуто с учетом плотности, соответствующей гало.

В работе [26] изучалась роль валентных нейтронов в ряде ядер, в том числе и в ^{11}Li , при рассеянии на протоне. Попытки описания сечений угловых распределений с использованием трех видов плотностей нуклонов привели к выводу о том, что упругое рассеяние $^{11}\text{Li} + p$ определяется в основном рассеянием протона на ядре-коре ^9Li , т.е. протон не чувствует валентные нейтроны, что отражает низкую плотность гало. Проведенный анализ и сравнение с данными для изотопов ^6He и ^8He (оказалось, что в них протон чувствует валентные нейтроны) показали, что взаимодействие протона с валентными нейтронами может служить критерием различия нейтронной «шубы» в гелиевых ядрах от нейтронного гало в ^{11}Li .

Большой интерес представляет структура основного состояния ^{11}Li . Информация об этом может быть получена из значения относительного вклада $(s1/2)^2$ и $(p1/2)^2$ нейтронных конфигураций в волновую функцию гало, хотя

необходимо заметить, что потенциал системы нейтрон — кор все еще одно-значно не определен. Поэтому все расчеты, которые до сих пор были выполнены, являются модельно-зависимыми, и результаты связаны с предположением о взаимодействии ${}^9\text{Li} + n$. Здесь представим лишь несколько примеров. Более 20 лет назад в работе [102] было показано, что время жизни ${}^{11}\text{Li}$ указывает на наличие лишь $\sim 30\%$ p -конфигурации. В более поздних расчетах различных авторов [24, 109, 114, 115, 119, 121, 154, 158, 163] было получено, что имеют место значительные примеси этих двух конфигураций, и вероятность каждой может варьироваться от 20 до 80 %. Информацию о волновой функции двух валентных нейтронов можно получить по свойствам β -распада ${}^{11}\text{Li}$, поскольку соотношение разных конфигураций основного состояния будет влиять на вероятности переходов к уровням ${}^{11}\text{Be}$. В частности, в [164] было получено указание на то, что $(p1/2)$ -компонента в волновой функции гало не очень большая ($\sim 25\%$), в то время как в [165, 166] вклад двух компонент около 50 %. Видно, что точную количественную оценку вкладов от разных компонент на основе всех этих исследований сделать невозможно.

2.3. Дальнейшее изучение ${}^{10}\text{Li}$ и ${}^{11}\text{Li}$. Более тяжелые изотопы лития. В связи с чрезвычайной важностью ядра ${}^{10}\text{Li}$ в понимании экзотичности легких ядер, как нам кажется, эксперименты по изучению его структуры требуют своего продолжения, в том числе с использованием пучков радиоактивных

Таблица 8. Некоторые реакции передачи для изучения изотопов лития

Ядро	Реакция	Q -реакция, МэВ [56, 167]
${}^{10}\text{Li}$	${}^9\text{Be}({}^{18}\text{O}, {}^{17}\text{F}){}^{10}\text{Li}$	–24,8
	${}^9\text{Be}({}^{15}\text{N}, {}^{14}\text{O}){}^{10}\text{Li}$	–30,0
	${}^{10}\text{Be}({}^{14}\text{N}, {}^{14}\text{O}){}^{10}\text{Li}$	–26,0
	${}^{13}\text{C}({}^{11}\text{B}, {}^{14}\text{O}){}^{10}\text{Li}$	–29,6
	${}^9\text{Li}(d, p){}^{10}\text{Li}$	–2,6
${}^{11}\text{Li}$	${}^7\text{Li}({}^{18}\text{O}, {}^{14}\text{O}){}^{11}\text{Li}$	–34,7
	${}^{10}\text{Be}({}^{18}\text{O}, {}^{17}\text{F}){}^{11}\text{Li}$	–30,9
${}^{12}\text{Li}$	${}^{10}\text{Be}({}^{15}\text{N}, {}^{13}\text{O}){}^{12}\text{Li}$	–60,5
	${}^{11}\text{B}({}^{18}\text{O}, {}^{17}\text{Ne}){}^{12}\text{Li}$	–58,7
	${}^{14}\text{C}({}^{11}\text{B}, {}^{13}\text{O}){}^{12}\text{Li}$	–61,5
	${}^{14}\text{C}({}^7\text{Li}, {}^9\text{C}){}^{12}\text{Li}$	–61,1
	${}^{11}\text{Li}(d, p){}^{12}\text{Li}$	–3,5
${}^{13}\text{Li}$	${}^{11}\text{Li}(t, p){}^{13}\text{Li}$	–9,7
	${}^{14}\text{Be}(t, {}^4\text{He}){}^{13}\text{Li}$	–5,8

ядер и мишени ^{10}Be . Как видно из изложенного, остались также многие открытые вопросы относительно структуры ^{11}Li . Вместе с тем изотопы лития с $A > 11$ не наблюдались ни в одном эксперименте. Экстраполяции показывают, что ^{12}Li и ^{13}Li нестабильны на 1–2 МэВ по отношению к испусканию, соответственно, одного и двух нейтронов (см. рис. 15 и [167]). Однако их изучение тоже должно явиться задачей последующих экспериментов. В табл. 8 приведены несколько реакций, которые, на наш взгляд, могут быть использованы для изучения изотопов лития. Кажется, что особенно перспективными для изучения структуры тяжелых изотопов Li могут явиться реакции на p -, d - и t -мишенях в обратной кинематике.

3. ИЗОТОПЫ БЕРИЛЛИЯ

В этом разделе представлена информация об изотопах бериллия с массовыми числами $A = 11 - 14$. Все эти ядра представляют большой интерес с точки зрения их свойств. Для ^{11}Be обнаружено нестандартное заполнение уровней, а именно инверсия $2s_{1/2}$ - и $1p_{1/2}$ -оболочек: для основного состояния ^{11}Be $J^\pi = 1/2^+$. Изучение структуры более тяжелых изотопов ^{13}Be и ^{14}Be , возможно, поможет прояснить ситуацию с нарушением стандартного заполнения оболочек в этой области. Известно, что ядро ^8Be нестабильно и спонтанно распадается на две α -частицы с энергией распада $S_{2\alpha} = -92$ кэВ. Основное состояние ^8Be имеет $\alpha - \alpha$ -кластерную структуру. Интерес представляет вопрос о том, сохраняется ли α -кластерная структура с ростом массового числа изотопов Be, т.е. с добавлением нейтронов к ядру-кору ^8Be . Формирование или несохранение кластеров очень важно с точки зрения структуры ядер, а также для решения проблем, связанных с ядерными столкновениями. С этой точки зрения интерес представляет экспериментальное изучение уровней ядер $^{11-14}\text{Be}$, особенно поиски уровней в области порогов испускания α -частиц. Экспериментально измерено повышенное сечение взаимодействия для ядер ^{11}Be и ^{14}Be , на основе чего получен повышенный среднеквадратичный радиус этих ядер. Это, вместе с узким импульсным распределением фрагментов развала, свидетельствует о существовании в этих ядрах нейтронного гало. При этом ^{11}Be является наиболее простым примером однонейтронного гало, и оно наиболее подробно изучено. Нестабильность ^{13}Be и стабильность ^{14}Be причисляют ^{14}Be к группе борроминовских ядер. Любой расчет структуры ядра ^{14}Be требует точного знания структуры ядра ^{13}Be . Подробнее эти вопросы обсуждаются ниже.

3.1. Ядро ^{11}Be обладает сразу несколькими необычными характеристиками.

Первые два уровня ^{11}Be (основное и первое возбужденное состояния) стабильны по отношению к распаду $^{11}\text{Be} \rightarrow ^{10}\text{Be} + n$ [168]. Последний ней-

трон относительно слабо связан (на 503 кэВ) с ядром-кором ^{10}Be , а первый возбужденный уровень находится всего на 180 кэВ ниже порога развала.

Недавно было обнаружено два новых уровня в ^{11}Be . В реакции перезарядки $^{11}\text{B}(^7\text{Li}, ^7\text{Be})^{11}\text{Be}$ при 57 МэВ наблюдался уровень с $E^* = 6$ МэВ и шириной 0,8 МэВ [169]. Для структуры этого уровня была предложена конфигурация $^{10}\text{Be}_{\text{g.s.}} \otimes d3/2$. Во второй работе [166] изучался β -распад ядра ^{11}Li путем измерения тройных совпадений между β -лучами, нейтронами и γ -лучами. В такой постановке опыта был обнаружен новый уровень при $E^* = (8,03 \pm 0,05)$ МэВ, для которого спин и четность могут принять значения $1/2^-$ или $3/2^-$.

В отличие от ожидаемого по оболочечной модели, основное состояние ^{11}Be имеет спин и четность $J^\pi = 1/2^+$ [170]. Это означает, что состояние $2s1/2$ лежит ниже состояния $1p1/2$. Эта проблема обсуждается уже более 30 лет [171]. Она часто интерпретировалась на основе протон-нейтронного взаимодействия [171], а также в предположении большой деформации [172] или исчезновения расстояния между p - и sd -орбитами [136]. По мнению авторов работы [77], эта последняя причина может быть наиболее вероятной. Однако удовлетворительного объяснения этого явления (качественного и количественного) пока нет. Первый возбужденный уровень лежит при энергии 0,320 МэВ и имеет $J^\pi = 1/2^-$ — это есть $1p1/2$ -состояние.

Время жизни уровня 0,320 МэВ измерено в работе [173]. Хорошо известно, что дипольные переходы между низколежащими уровнями испытывают большой запрет. Однако было обнаружено, что величина $B(E1)$ для перехода между двумя связанными состояниями ^{11}Be значительная — 0,36(3) W.u., и что этот γ -переход самый быстрый среди известных переходов между связанными состояниями. Авторы [173] полагали, что есть связь между энергией связи нейтрона, размером ядра и вероятностью перехода. С этой точки зрения, можно сказать, что это было первое проявление эффекта, который теперь принято называть «нейтронное гало».

Сейчас известно, что оба связанных состояния ^{11}Be соответствуют структуре гало. Это демонстрируется разными экспериментами, а также расчетами в рамках разных теоретических подходов. Например, из измеренного полного сечения взаимодействия в работе [20] было получено повышенное значение среднеквадратичного радиуса ядра ^{11}Be , а именно $R_{\text{rms}}^m = (2,73 \pm 0,05)$ фм. Новый теоретический анализ [24, 158] дал для среднеквадратичного радиуса ядерного вещества в ^{11}Be значение $R_{\text{rms}}^m = (2,90 \pm 0,05)$ фм, что значительно выше. В работе [174] из значения σ_R в реакциях $^{11}\text{Be} + ^{12}\text{C}$ и $^{11}\text{Be} + ^{27}\text{Al}$ при энергии 33 МэВ/А вычислено распределение плотности нуклонов в ядре ^{11}Be и сделан вывод, что полное сечение реакции под действием ^{11}Be можно объяснить, лишь предполагая наличие протяженного «хвоста» в этом распределении. Измеренные большие сечения фрагментации $^{11}\text{Be} \rightarrow ^{10}\text{Be} + n$ показали, что длинный «хвост» в распределении плотности объясняется наличием

валентного нейтрона. Результат анализа данных также показал, что можно исключить вероятность большой деформации в ^{11}Be , хотя считается, что деформация является необходимым фактором для понижения уровня $1/2^+$ по сравнению с уровнем $1/2^-$.

Остановимся более подробно на некоторых аспектах, касающихся структуры ^{11}Be .

Структура ядра ^{11}Be исследовалась в работе [136], где использовался метод Хартри — Фока для определения роли смешивания конфигураций и малой энергии связи валентного нейтрона. Был сделан вывод о том, что эта энергия является определяющим фактором для увеличения размера ядра.

Разработанная для описания структуры легких нейтроноизбыточных ядер вариационная оболочечная модель [175,176] была также применена, в частности, и для ^{11}Be . Получено, что микроскопическая волновая функция состоит в основном из $2s1/2$ -компоненты с некоторым вкладом от $1d5/2$ -орбиты, связанной с 2^+ -состоянием ядра-кора ^{10}Be . Определено, что основное состояние ^{11}Be содержит (около 40 %) конфигурацию, связанную с возбуждением кора. В рамках этой модели удалось хорошо воспроизвести $J^\pi = 1/2^+$ — основное состояние в ^{11}Be (для сравнения: хорошо воспроизвелись также уровни в ядре ^{13}C , где очередность уровней $1/2^-$ и $1/2^+$ обычная), а также распределение плотности и большой среднеквадратичный радиус распределения нуклонов в ^{11}Be .

В работе [122] учитывалась деформация ядра-кора ^{10}Be , и для волновой функции основного состояния ^{11}Be было показано, что около 80 % состоит из $s1/2$ -нейтрона, связанного с 0^+ -состоянием кора, и около 20 % — из $d5/2$ -нейтрона, связанного с 2^+ -состоянием кора. Расчетные значения среднеквадратичного радиуса и $B(E1)$ -распределения оказались близкими к экспериментальным [20, 177].

То, что возбуждение кора (^{10}Be) в состояние 2^+ и блокирование эффекта спаривания должны учитываться при расчетах уровней ^{11}Be , было показано и в работе [178]. Здесь также был отмечен доминирующий вклад нейтронной $s1/2$ -орбиты. В другой работе [77] тоже попытались объяснить инверсию четности в ядре ^{11}Be . В связи с тем, что для экзотических ядер отношение N/Z намного выше, чем для стабильных ядер, в расчетах по оболочечной модели была введена изоспиновая зависимость кинетических энергий. Расчеты показали, что хорошо воспроизводится значение $1/2^+$ для основного состояния, а также значения уровней с возбуждением до 2–3 МэВ. С помощью введения изоспиновой зависимости удалось получить согласие и с экспериментальным значением усиления $E1$ -перехода.

В работе [179] для расчета энергий $1p1/2$ и $2s1/2$ была предложена модель, учитывающая связь одночастичных уровней с коллективными однофоновыми состояниями ядра-кора. Качественный расчет энергетического спектра ^{11}Be показал, что введенные корреляции могут объяснить инвер-

сию $1/2^+$ - и $1/2^-$ -состояний. Спектр низколежащих уровней, спектроскопические факторы и инверсия состояний $1/2^+$ и $1/2^-$ были воспроизведены и в работе [180], где учитывались такие же корреляции, но в несколько другом подходе.

Интересные результаты были получены в экспериментах по изучению импульсных распределений тяжелых фрагментов и частиц (нейтронов), образующихся при развале ^{11}Be . Для ^{11}Be ситуация сильно отличается от случая с ядром ^{11}Li , для которого ширины зависят также от взаимодействия в конечном состоянии подсистемы $^9\text{Li} + n$. В случае ^{11}Be нет трехчастичных эффектов, как при ^{11}Li , и в этом смысле изотоп ^{11}Be является удобным для определения связи между структурой ядра и механизмом реакции. Остановимся коротко лишь на некоторых выводах.

Ширина распределения продольного импульса фрагментов развала ^{11}Be , полученная в работе [181], составила $\sigma_{\parallel} \sim 20$ МэВ/с, как и для ядер ^{11}Li и ^{14}Be . Было показано, что ширина мало отличается при взаимодействии с легкими и тяжелыми мишенями (использовались мишени из ^9Be , ^{93}Nb , ^{181}Ta и ^{238}U), т.е. не зависит от мишени или, что то же самое, от взаимодействия, вызывающего развал (развал на легких мишенях определяется ядерным, на тяжелых — кулоновским взаимодействием). Было показано также, что среднеквадратичный радиус для нейтрона гало в ^{11}Be равен 6,5 фм, что согласуется со значением $(6,4 \pm 0,7)$ фм, необходимым для объяснения спектра кулоновского развала ^{11}Be [177] (напомним, что радиус ядра-кора ^{10}Be равен $(2,30 \pm 0,02)$ фм). Таким образом, в [181] найдено подтверждение наличия протяженного гало в ядре ^{11}Be .

Распределение поперечного импульса [116] состояло из двух компонент: узкий пик с шириной $\sigma_{\perp} = (25 \pm 4)$ МэВ/с, расположенный над более широким распределением, ширина которого (109 ± 7) МэВ/с. Столь малые значения $\sigma_{\parallel}$ и $\sigma_{\perp}$ указывают на то, что удаленный валентный нейтрон обладает малой импульсной флуктуацией, которая связана с протяженным распределением плотности нуклонов. Измерялись также импульсные распределения нейтронов. Способом изучения импульсного распределения нейтронов из состояния гало является измерение совпадения нейтронов с продуктами развала ядра-кора. Так как этот нейтрон имеет протяженное распределение, вероятность того, что он не будет участвовать во взаимодействии кора с мишенью, большая. В эксперименте при энергии 41 МэВ/А [116, 182] был получен результат для выходного канала, состоящего лишь из «одного нейтрона плюс все, кроме ^{10}Be ». Для двух мишеней, Ве и Ti, угловые распределения оказались практически идентичными, и $\Gamma \approx 60$ МэВ/с для узкой компоненты, которая связывается с нейтроном гало. Считается, что широкая компонента соответствует нейтронам, испущенным при развале кора. Проверкой этого может служить эксперимент с пучком, являющимся кором для данного ядра. Эксперименты с ^{11}Be были сделаны также при высоких энергиях (460 МэВ/А)

[118, 109]. В работе [118] при выделении канала ${}^7,8\text{Li} + n$ получались значения для Γ , соответственно, (67 ± 5) и (56 ± 4) МэВ/с, что совпадает с предыдущим результатом.

Другой эксперимент [109] показал следующее: ширины нейтронных распределений, измеренных в совпадении с ${}^{10}\text{Be}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^9\text{Li}$, очень разные ($\Gamma = 98, 67$ и 36 МэВ/с), они зависят от выбранного фрагмента (т.е. от механизма его образования). Третье значение соответствовало случаю, когда кор ${}^{10}\text{Be}$ теряет только один протон при взаимодействии с мишенью, вместе с тем не испуская ни одного нейтрона. Интересен тот факт, что $\Gamma = 36$ МэВ/с, и эта величина совпадает со значением для реакции диссоциации ядра ${}^{11}\text{Li}$. Был сделан вывод, что эти два канала, возможно, имеют одинаковое промежуточное состояние в виде ${}^{10}\text{Li}$, чем и объясняется идентичность импульсных распределений.

Как уже отмечалось в предыдущих разделах, существенная вероятность дипольных переходов, наблюдаемая при диссоциации нейтроноизбыточных ядер, может быть результатом двух механизмов — возбуждения так называемого мягкого дипольного резонанса или прямого развала ядра. Ядро ${}^{11}\text{Be}$ удобно для выяснения этого вопроса, так как наличие в нем лишь одного валентного нейтрона устраняет влияние nn -корреляции. В связи с этим были поставлены несколько экспериментов [177, 183–185]. В работе [177] для валентного нейтрона в ${}^{11}\text{Be}$ был найден среднеквадратичный радиус $(6,4 \pm 0,7)$ фм. Однако эксперименты показали, что относительно ${}^{11}\text{Be}$ остаются открытые вопросы, так как результаты о наличии постускорения фрагмента (т.е. существует или нет прямой развал вблизи ядра мишени) противоречивы.

3.2. Ядро ${}^{12}\text{Be}$. До недавнего времени было известно всего четыре возбужденных уровня ядра ${}^{12}\text{Be}$: 2,102, 2,702, 4,56 и 5,70 МэВ. Два последних лежат выше порогов испускания одного и двух нейтронов [168]. В реакции с вторичным пучком ${}^{12}\text{Be}$ на основании измеренного полного сечения взаимодействия на мишенях из Be, C и Al получен среднеквадратичный радиус распределения нуклонов в ядре ${}^{12}\text{Be}$ [20] и обнаружено, что радиус ядра ${}^{12}\text{Be}$ определяется стандартным приращением ($R \sim r_0 A^{1/3}$).

Новые данные о структуре ${}^{12}\text{Be}$ были получены в реакции двойной перезарядки ${}^{12}\text{C}({}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{O}){}^{12}\text{Be}$ при энергии пучка 335,9 МэВ [60]. В этой работе, кроме пиков, соответствующих уже известным уровням, наблюдался узкий пик с $E^* = 7,2$ МэВ, а также широкое распределение в районе $E^* \approx 9,3$ МэВ (рис. 27).

Почти одновременно были получены результаты [186, 187], которые показали, что ${}^{12}\text{Be}$ может служить хорошей иллюстрацией существования в ядрах α -кластерных состояний. Такие состояния должны проявляться при энергиях возбуждения, близких к порогам распада с испусканием ядер гелия.

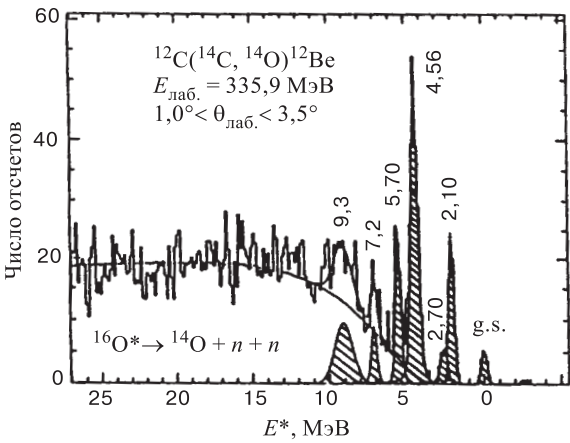


Рис. 27. Спектр энергии возбуждения ядра ^{12}Be , измеренного в реакции двойной перезарядки $^{12}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{12}\text{Be}$ при энергии 335,9 МэВ и $1,0^\circ < \theta_{\text{лаб.}} < 3,5^\circ$ [60]

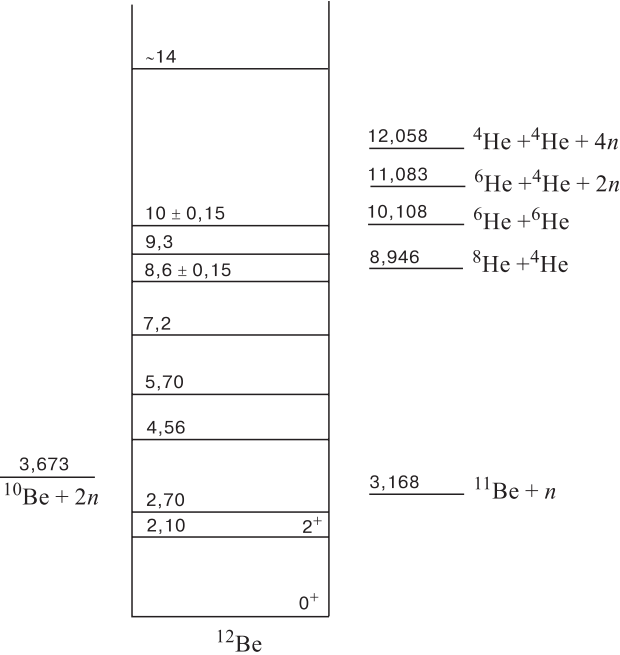


Рис. 28. Схема уровней ^{12}Be [168,60,186]. Указаны пороги распада с участием изотопов He или Be

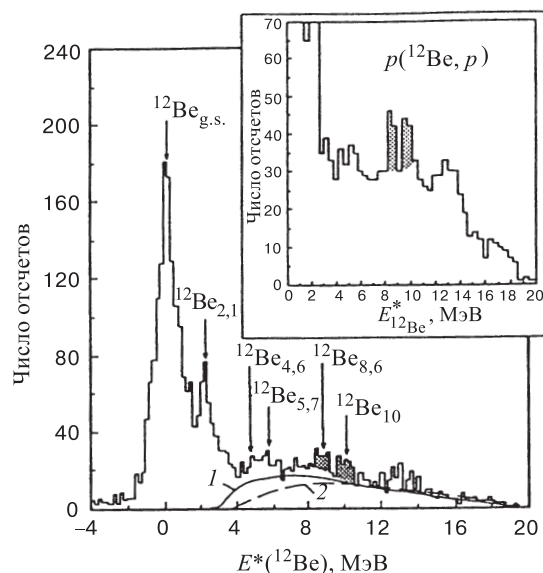


Рис. 29. Инклюзивный спектр протонов, измеренный в реакции неупругого рассеяния $p(^{12}\text{Be}, p)$, как функция энергии возбуждения ядра ^{12}Be [186]. Кривые: 1 — фазовое пространство для $p + n + ^{11}\text{Be}$ и 2 — $n + n$ -взаимодействие в конечном состоянии в канале $p + 2n + ^{10}\text{Be}$

В случае ^{12}Be эти пороги лежат в области $E^* \sim 9 \div 12$ МэВ (см. рис. 28). В работе [186] в неупругом рассеянии вторичного пучка ^{12}Be с энергией 55 МэВ/нуклон на протонной мишени наблюдались два новых уровня ^{12}Be с энергией $(8,6 \pm 0,15)$ и $(10,00 \pm 0,15)$ МэВ, а также широкое распределение при $\sim 13 - 14$ МэВ. Первые два уровня имеют маленькую ширину $\Gamma \leq 0,5$ МэВ, которая соответствует значению угловых моментов $L \geq 3$ для первого и $L \geq 4$ для второго уровня. На рис. 29 показан инклюзивный спектр рассеянных протонов. Измерялись и спектры совпадения протонов с разными продуктами распада ^{12}Be , в том числе $^{10,11,12}\text{Be}$ и различными изотопами He. Из схемы уровней на рис. 28 следует, что состояние с энергией $(8,6 \pm 0,15)$ МэВ находится чуть ниже первого порога испускания гелиевого ядра из $^{12}\text{Be} \rightarrow ^8\text{He} + ^4\text{He}$, а уровень $(10,00 \pm 0,15)$ МэВ расположен выше этого порога и вблизи второго порога для распада $^{12}\text{Be} \rightarrow ^6\text{He} + ^6\text{He}$. В спектрах совпадения с изотопами Be пик с энергией возбуждения $E^* = 10$ МэВ практически отсутствует. Из соотношения выходов пиков 8,6 и 10,0 МэВ в инклюзивном и в спектре совпадения с изотопами Be было получено, что для уровня 10 МэВ соотношение полной ширины и парциальной ширины для распада на бериллиевые изотопы (т.е. путем испускания нейтронов) равно $\Gamma_{\text{tot}}/\Gamma_{^{12}\text{Be}^* \rightarrow ^x\text{Be}} = 3,6 \pm 1,6$. Следовательно, преобладающим для уровня с

энергией 10 МэВ является распад с испусканием гелиевых ядер. Спектр совпадения с изотопами He показывает, что уровень с энергией ~ 14 МэВ тоже распадается путем испускания ядер гелия, но не распадается путем испускания ядер бериллия. Таким образом, можно считать, что в ^{12}Be обнаружены уровни, имеющие α -кластерную структуру. Эти уровни могут иметь конфигурацию, в которой две α -частицы расположены далеко одна от другой и к ним добавлены четыре нейтрона. И это сильно отличается от структуры основного состояния, в котором, в соответствии с расчетами [188–190], ожидалось отсутствие ярко выраженной кластерной структуры.

Структура ядра ^{12}Be исследовалась в работе [191] в рамках трехчастичной модели ($^{10}\text{Be} + n + n$). Поскольку основным состоянием ядра ^{11}Be является $1/2^+$, можно было ожидать, что добавление одного нейтрона приведет к $(s1/2)^2$ -конфигурации для ^{12}Be . Однако хорошее согласие расчетов с экспериментальными данными по ширинам распределения продольного импульса фрагментов ^{10}Be , образованных при фрагментации ^{12}Be [192], а также со значением среднеквадратичного радиуса ядерного вещества [20], было получено лишь в случае, когда валентные нейтроны в основном находятся на $p1/2$ -орбите и вклад sd -конфигурации составляет не более 25 %.

3.3. Ядро ^{13}Be . Ожидалось, что ядро ^{13}Be будет нестабильным по отношению к распаду $^{13}\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{Be} + n$, с энергией распада в пределах $0,9 \div 2,2$ МэВ [41,74,127,193]. Лишь в работах [194,195] получено, что ^{13}Be связан на $0,009 \div 0,038$ МэВ. Попытки обнаружить его в реакции фрагментации ионов ^{40}Ar с энергией 44 МэВ/А на мишени из Ta не дали положительного результата [196], как это и предсказывалось. Структура нестабильного ядра ^{13}Be исследовалась в нескольких экспериментах, в которых использовались реакции передачи (табл.9). Результаты экспериментов и предсказания теории отличаются не сильно.

Впервые ядро ^{13}Be наблюдалось в реакции $^{14}\text{C}(^7\text{Li}, ^8\text{B})^{13}\text{Be}$ [197,198]. Результат приведен в табл.9. Однако небольшая статистика в области резонанса и фон того же порядка не позволили определить массу с погрешностью меньшей, чем та, что по систематике (0,5 МэВ) из работы [200].

Более прецизионное измерение [193] спектра ^{13}Be проведено в реакции двойной перезарядки $^{13}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{13}\text{Be}$ при энергии 337 МэВ. Результат этой работы представлен на рис. 30. Первому пику (который практически свободен от фона) влево от порога развала $^{13}\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{Be} + n$ соответствует значение избытка массы $M.E. = 35,16(5)$ МэВ, т.е. этот резонанс отстоит от порога на $2,01(5)$ МэВ. Ширина резонанса $\Gamma = 0,3(2)$ МэВ. Другой резонанс находится на $3,12(7)$ МэВ, а третий — на $6,5(2)$ МэВ выше первого. Их ширины, соответственно, равны $\Gamma = 0,4(2)$ и $0,9(3)$ МэВ. Вероятно, что наблюдавшийся в этой работе резонанс при ~ 2 МэВ не является основным состоянием ядра ^{13}Be .

Таблица 9. Избыток массы (М.Е.) наблюдаемого наиболее низколежащего уровня ядра ^{13}Be , энергия резонанса E_{res} над порогом испускания одного нейтрона и ширина резонанса Γ , полученные в реакциях передачи при энергиях пучка E_i

Реакция	E_i , МэВ	М.Е., МэВ	E_{res} , МэВ	Γ , МэВ	Ссылка
$^{14}\text{C}(^7\text{Li}, ^8\text{B})$	82	$3,5 \pm 0,5$	$1,8 \pm 0,5$ $2,0$	$0,9 \pm 0,5$ $1,5$	[197] [198]
$^{13}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})$	337	$35,16 \pm 0,05$	$2,01 \pm 0,05$	$0,3 \pm 0,2$	[193]
$d(^{12}\text{Be}, p)$	55A		2,0		[186]
$^{14}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})$	190	$33,95 \pm 0,09$	$0,80 \pm 0,09$	$\sim 1,0$	[199]

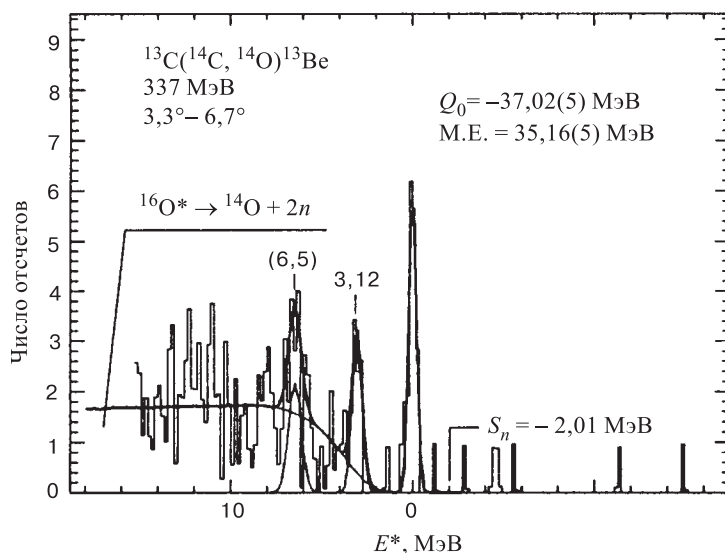


Рис. 30. Спектр $^{13}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{13}\text{Be}$ -реакции [193]. Указаны энергии резонансов в МэВ

В ОИЯИ ядро ^{13}Be изучалось в реакции $^{14}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})^{13}\text{Be}$ при энергии 190 МэВ [199]. Результат этой работы представлен на рис. 31,а. Самый низкий по энергии резонанс соответствует М.Е. = 33,95(9) МэВ, что приписывается основному состоянию с энергией распада 0,80(9) МэВ. В спектре наблюдаются еще несколько пиков, которые, по мнению авторов, соответствуют возбужденным состояниям с энергиями 1,22(10), 2,10(16), 4,14(12), 5,09(14) и 7,0(2) МэВ. На рис. 31,б приведен спектр из реакции $^{12}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})^{11}\text{Be}$. Основное состояние и первое возбужденное состояние в этой реакции возбуждаются очень слабо. Сильнее всего возбуждается состояние при энергии 1,78 МэВ, для которого $J^\pi = 5/2^+$.

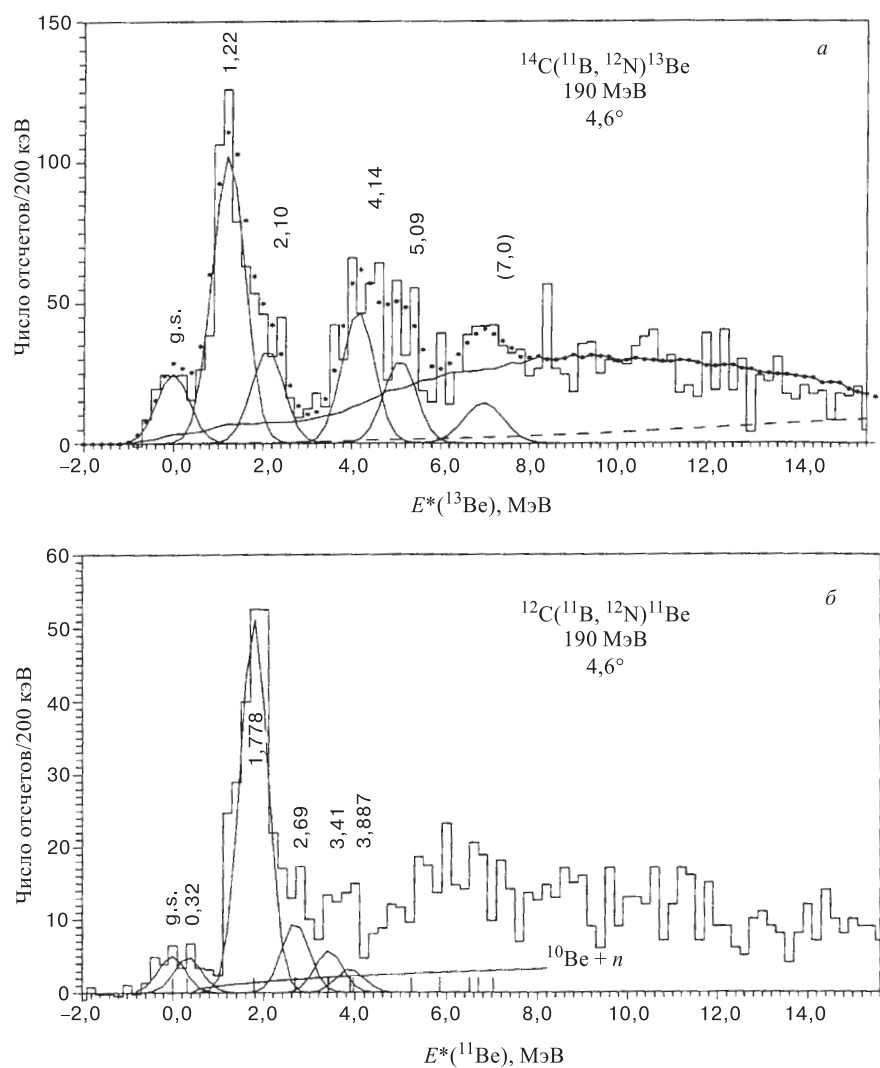


Рис. 31. а) Спектр из реакции $^{14}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})^{13}\text{Be}$ после вычета фона от примесей в мишени. Гистограмма — экспериментальный спектр, сплошная кривая — сумма вкладов от 3-частичного процесса $^{12}\text{N} + ^{12}\text{Be} + n$ и последовательного распада возбужденного $^{13}\text{N}^* \rightarrow ^{12}\text{N} + n$, точки — сумма всех компонент разложения спектра, пунктир — 4-частичное фазовое пространство; б) спектр из реакции $^{12}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})^{11}\text{Be}$ [199]

Позднее в RIKEN [186] было проведено исследование ^{13}Be в реакции $^{12}\text{Be}(d, p)$ в инверсной кинематике при энергии вторичного пучка ^{12}Be , равной 55 МэВ/А. В спектре протонов проявляется резонанс при энергии 2 МэВ над порогом развала на $^{12}\text{Be} + n$, а также резонансы при 5, 7 и 10 МэВ (рис. 32).

Ядро ^{13}Be изучалось и путем измерения спектра относительной скорости между нейтронами и ^{12}Be , образующимися при развале ^{13}Be [52]. На основании этого спектра был сделан вывод, что в ^{13}Be есть состояние, которое распадается путем испускания низкоэнергичного нейтрона. По мнению авторов, это состояние представляет собой либо низлежащий s -волновой резонанс (аналогично случаю ^{10}Li), либо возбужденное состояние, которое распадается в возбужденное состояние ядра ^{12}Be при 2,1 МэВ.

Представление о схеме уровней ядра ^{13}Be можно получить из рис. 33. Все экспериментальные данные однозначно определяют уровень, находящийся на ~ 2 МэВ выше порога развала $^{13}\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{Be} + n$. В трех работах [186, 193, 199], в пределах погрешности, совпадает и резонанс с энергией над порогом, равной ~ 5 МэВ. Информация о резонансах в области 7–8,5 МэВ в разных работах отличается. Резонанс с энергией ~ 10 МэВ наблюдался в одной работе [186], так же, как и основное состояние [199]. Эксперимент сравнивался с теорией из работ [41, 193–195].

Можно полагать, что резонанс с энергией ~ 2 МэВ является возбужденным, а не основным состоянием ядра ^{13}Be . Эти выводы базируются, в первую очередь, на некоторой систематике уровней ядер с $N = 9$. Экстраполяция [201] в цепочке $^{17}\text{O} - ^{15}\text{C} - ^{13}\text{Be}$ требует $2s$ -конфигурации для основного состояния ^{13}Be . Кроме того, расчеты [193] предсказывают основное состояние $1/2^+$, находящееся ниже состояния $5/2^+$ и не связанное на $\sim 0,9$ МэВ. Основным результатом работ [194, 195] является то, что обнаружено состояние $1/2^+$ вблизи порога развала. Оно может оказаться близко к связанному ($E_{\text{res}} = -(9 \div 38)$ кэВ), что сильно отличается от других предсказаний. Как отмечает сам автор, предсказание связанного состояния зависит от выбора нуклон-нуклонного взаимодействия, а также от точности экспериментально измеренной энергии резонанса $5/2^+$. В любом случае делается вывод о том, что состояние $1/2^+$, по крайней мере, должно лежать вблизи порога развала. Предположение о том, что это состояние слабо связано, ведет к его

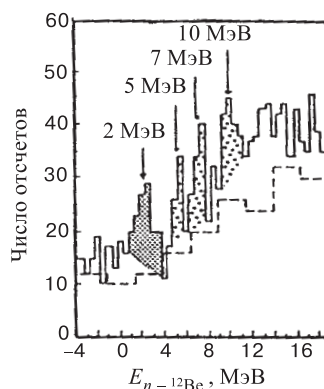


Рис. 32. Спектр протонов из реакции $\text{CD}_2(^{12}\text{Be}, p)$, как функция энергии над порогом развала в $n + ^{12}\text{Be}$ (сплошная гистограмма), и из реакции $\text{C}(^{12}\text{Be}, p)$ (пунктирная гистограмма) [186]

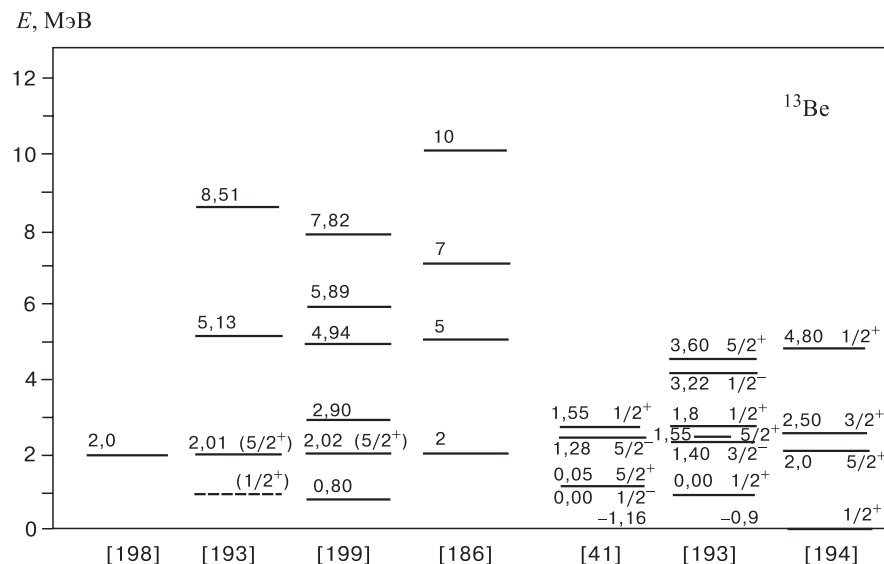


Рис. 33. Экспериментальные и расчетные схемы уровней ядра ^{13}Be . Экспериментальные значения (колонки 1 – 4) приведены относительно порога развала $^{13}\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{Be} + n$. Теоретические предсказания (колонки 5 – 7) представлены в шкале энергии возбуждения

необычным свойствам — среднеквадратичный радиус может быть даже в три раза больше радиуса ядра-кора ^{12}Be и тогда ^{13}Be оказывается галообразным ядром. В работе [194] обнаружен также широкий резонанс при энергии около 5 МэВ, что совпадает с результатами экспериментов. Ему приписаны спин и четность $1/2^+$. Предсказан еще один резонанс, $3/2^+$, в области 2,1 – 3 МэВ, но он пока не подтвержден экспериментально. Расчет, сделанный в [193], среди нескольких других состояний предсказывает второй $5/2^+$ -уровень при $E^* = 3,6$ МэВ — это значение неплохо согласуется со вторым наблюдаемым пиком в той же работе при энергии $E_{\text{res}} = 5,13$ МэВ.

Наиболее важным является вопрос о структуре состояния с резонансной энергией $E_{\text{res}} \approx 2$ МэВ, с учетом того, что оно не является основным состоянием ядра ^{13}Be . В работе [193] R -матричный расчет ширины близок к экспериментальному значению $\Gamma = 0,3(2)$ МэВ в предположении о распаде с испусканием нейтрона из уровня с $\ell = 2$ или $\ell = 1$, но сильно отличается, когда $\ell = 0$. Таким образом, этому резонансу можно приписать спин и четность $5/2^+$ или $1/2^-$, в то время как $1/2^+$ исключается. Расчет (рис. 33) предсказывает уровень $5/2^+$ при $E^* = 1,55$ МэВ (т.е. $E_{\text{res}} = 2,45$ МэВ). В соответствии с этим авторы работы [193] приняли значение $5/2^+$ для уровня

с энергией $E_{\text{res}} = 2$ МэВ. Нужно добавить, что в работе [194] хорошо воспроизводится ширина резонанса $5/2^+$.

Подтверждением вывода о спине и четности резонанса $5/2^+$ служит результат, полученный в [199]. Авторы сравнивают спектр ^{13}Be с энергетическим спектром ^{11}Be из реакции $^{12}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})^{11}\text{Be}$ (см. рис. 31,б). Видны пики, соответствующие двум самым низким уровням ^{11}Be — основному состоянию с необычной четностью ($J^\pi = 1/2^+$) и первому возбужденному состоянию ($J^\pi = 1/2^-$). Эти два уровня в реакции $(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})$ слабо заселяются, в отличие от уровня 1,78 МэВ ($J^\pi = 5/2^+$), который заселяется с большим сечением. Из сравнения спектров ^{13}Be и ^{11}Be видна их идентичность. Естественным образом следует вывод о том, что уровень в ^{13}Be с энергией ~ 2 МэВ, обнаруженный в реакции $^{14}\text{C}(^{11}\text{B}, ^{12}\text{N})^{13}\text{Be}$, должен обладать спином и четностью $J^\pi = 5/2^+$ по аналогии с уровнем 1,78 МэВ в ядре ^{11}Be .

Рассмотрим структуру наиболее низколежащего резонанса с $M.E. = 33,95(9)$ МэВ, найденного в эксперименте [199] и приписанного основному состоянию ^{13}Be . Как было упомянуто выше, есть все основания ожидать, что это s -состояние [201]. Расчет по R -матричной теории в предположении, что основное состояние имеет конфигурацию $2s1/2$, дает ширину $\Gamma \approx 1$ МэВ, что, в принципе, не противоречит эксперименту [199], который допускает такую большую ширину. Аналогия спектров ^{13}Be и ^{11}Be позволяет лишь предположить, что наблюдавшееся основное состояние имеет $J = 1/2$. Ненаблюдение в работе [193] в реакции $^{13}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{13}\text{Be}$ основного состояния $1/2^+$, возможно, является следствием двух причин: 1) в отличие от $1d5/2$ -оболочки, нейтронная оболочка $2s1/2$ заселяется с очень низким сечением в реакциях такого типа при этих энергиях, 2) s -состояние ожидается с очень большой шириной, что нельзя обнаружить при малой статистике. Высокий фон в работе [186] также не позволил сделать каких-либо надежных выводов о возможном низколежащем s -состоянии. Однако, согласно расчетам, конфигурация $1p1/2$ не может быть полностью исключена. Как видно из рис. 33, в [41] в рамках $(0 + 1)\hbar\omega$ -пространства предсказывается основное состояние $1/2^-$ вблизи $5/2^+$ -состояния. Если это так, то это означает, что имеет место инверсия уровней, что $2s1/2$ -оболочка связана и лежит ниже $1p1/2$ -оболочки, на которой должен находиться последний нечетный нейтрон. Поэтому пока не существует однозначного вывода о четности основного состояния ^{13}Be . Это должно явиться предметом дальнейших исследований.

3.4. Ядро ^{14}Be . В отличие от ядра ^{13}Be , ядро ^{14}Be , имеющее на один нейтрон больше, является стабильным — оно принадлежит к группе бороминовских ядер. Результаты, полученные в экспериментах по измерению полного сечения реакции [20] и по распределению импульса [192], дают указания на существование в ^{14}Be двухнейтронного гало. Однако, в отличие от

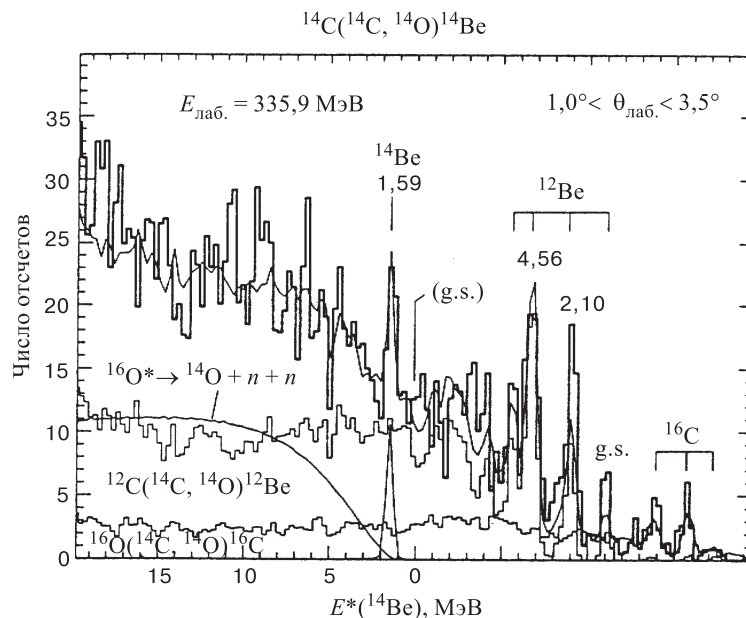
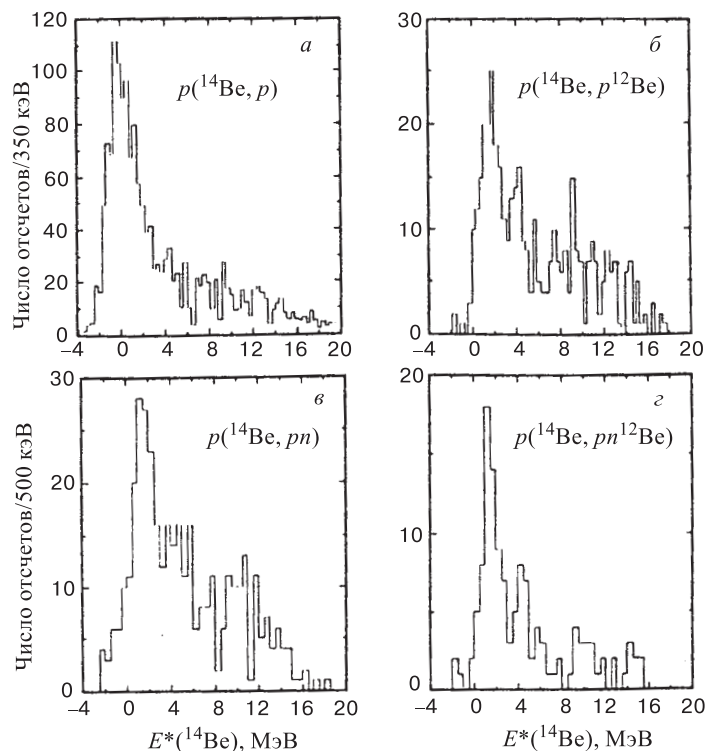


Рис. 34. Спектр энергии возбуждения ^{14}Be из реакции $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{O})^{14}\text{Be}$ при энергии 335,9 МэВ в диапазоне $1,0^\circ < \theta_{\text{лаб}} < 3,5^\circ$ [47]

другого галообразного ядра ^{11}Li , энергия отрыва двух нейтронов гало в ^{14}Be гораздо больше, а именно $B_{2n} = (1,34 \pm 0,11)$ МэВ [56]. ^{14}Be рассматривается как ядро, состоящее из ядра-кора (^{12}Be) плюс два валентных нейтрона. Ожидается, что конфигурация нейтронов гало содержит вклад от d -орбиты.

Изотоп ^{14}Be был впервые обнаружен в реакции скалывания $\text{U}+p$ (4,8 ГэВ) [202]. Постановка этого эксперимента не позволяла определить массу ^{14}Be . Первое измерение массы ^{14}Be было осуществлено в реакции двойной перезарядки на пионах $^{14}\text{C}(\pi^-, \pi^+)^{14}\text{Be}$ [203]. Избыток массы ^{14}Be оказался равным М.Е. = $(40,10 \pm 0,16)$ МэВ, откуда следовало, что если наблюдаемый пик соответствовал основному состоянию, то энергия связи двух нейтронов в ядре ^{14}Be $B_{2n} = 1,12$ МэВ. Это означало, что ^{14}Be на 0,6 – 1 МэВ более связанный, чем предсказывалось, например в [69,71,72], но связан примерно настолько, насколько предсказывалось в работе [41].

Результаты по прямому измерению массы с помощью времяпролетного изохронного спектрометра TOFI представлены в работе [128], в которой использовалась реакция фрагментации мишени из Th протонами. Избыток массы ^{14}Be , определенный в этом эксперименте, М.Е. = $(39,74 \pm 0,14)$ МэВ. В этом случае ядро ^{14}Be оказалось на 0,36 МэВ сильнее связано, чем следовало из работы [203].

Рис. 35. Спектры протонов, измеренные при рассеянии $^{14}\text{Be} + p$ [204]

В настоящее время рекомендованным значением для избытка массы ^{14}Be является $M.E. = 39,88(11)$ МэВ, что соответствует энергии связи двух нейтронов $B_{2n} = 1,34(11)$ МэВ [56].

Недавно получена информация о возбужденных состояниях ^{14}Be [47,60,204]. Ядро ^{14}Be изучалось в реакции двойной перезарядки $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14})^{14}\text{Be}$ при энергии ионов ^{14}C , равной 335,9 МэВ (рис. 34) [47,60]. Основное состояние ^{14}Be в этой работе не наблюдалось. В спектре ^{14}Be наблюдался, кроме линий на примесях ^{12}C и ^{16}O в мишени, только один пик, который соответствовал избытку массы $M.E. = 41,47(6)$ МэВ. С использованием значения $M.E.(^{14}\text{Be}) = 39,88(11)$ МэВ [56] для этого уровня получена энергия возбуждения $E^* = 1,59(13)$ МэВ. Таким образом, это состояние оказалось нестабильным по отношению к распаду на $^{12}\text{Be} + 2n$ на 0,25(6) МэВ. Ширина уровня невелика и определена равной $\Gamma \leq 100$ кэВ. Это значение было приписано первому 2^+ -уровню в ядре ^{14}Be с конфигурацией $(d5/2)^2$ по аналогии с первым возбужденным уровнем 1,77 МэВ, тоже 2^+ , в ядре ^{16}C ($Z = 6, N = 10$).

Существование уровня при $E^* = 1,59$ МэВ [47,60] было недавно подтверждено при измерении неупругого рассеяния вторичного пучка ^{14}Be с энергией 73,6 МэВ/А на протонной мишени [204]. В этой работе отмечено возбужденное состояние при $E^* = 1,6(1)$ МэВ, а также получено указание о существовании нового уровня при $E^* = 4,1(2)$ МэВ, рис. 35.

В расчетах [41,195] для первого возбужденного уровня получено $J^\pi = 2^+$ и предсказаны значения $E^* = 1,95$ МэВ [41] и $\sim 1,80$ МэВ [195], что находится в хорошем согласии с экспериментами [47,60,204]. Уровень в районе 4,4 МэВ (также с $J^\pi = 2^+$) был предсказан в [195].

Структура ядра ^{14}Be рассчитывалась в работе [205], где было показано, что два внешних (валентных) нейтрона в ^{14}Be лежат на орбите $2s_{1/2}$, а не на орбите $2d_{5/2}$. Если бы они занимали орбиту $2d_{5/2}$, это означало бы, что ^{14}Be нестабилен по отношению к испусканию двух нейтронов. Поэтому из расчета следует, что уровень $2d_{5/2}$ является возбужденным, как это и предполагалось в работах [47,60]. Необходимо заметить, что расчеты [193,194] предсказывают существование последнего нейтрона в основном состоянии ядра ^{13}Be на уровне $2s_{1/2}$, что также согласуется с выводами работы [205].

Измерение полного сечения взаимодействия в работе [20] позволило определить среднеквадратичный радиус ядра ^{14}Be , который оказался равным $R_{rms}^m = (3,16 \pm 0,38)$ фм. Теоретические расчеты [195,205] распределения плотности для ядер ^{14}Be и ^{12}Be также указывают на повышение радиуса и существование нейтронного гало в ^{14}Be .

Первые измерения [206] распределения поперечного импульса фрагментов ^{12}Be из развала $^{14}\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{Be} + 2n$ показали, что оно имеет двухкомпонентную структуру, аналогично случаю с ядром двухнейтронного гало ^{11}Li . В работах [192,207] были измерены поперечное и продольное распределения импульса этих фрагментов и получено значение $\Gamma \approx 92 - 96$ МэВ/с. Для сравнения — ширины импульсных распределений ^{10}Be , полученного при фрагментации ^{14}Be и ^{12}Be : $\Gamma = (185 \pm 11)$ и $\Gamma = (194 \pm 9)$ МэВ/с соответственно. Результаты этих экспериментальных работ [192,206,207] показывают, что ширина импульсных распределений ^{12}Be , образующегося при фрагментации ядер ^{14}Be , намного меньше распределений любых других фрагментов. Это узкое распределение указывает на большую пространственную протяженность валентных нейтронов в ^{14}Be . Это согласуется с картиной о нейтронном гало в ^{14}Be , хотя для этого ядра $B_{2n} = 1,34$ МэВ [56]. Это существенно больше, чем, например, для ядра ^{11}Li ($B_{2n} = 0,310$ МэВ).

Поэтому является интересным исследование влияния дополнительной энергии связи на структуру ядра ^{14}Be . Оно показано с помощью угловых распределений нейтронов.

В работе [67] измерялось угловое распределение нейтрона в совпадении с фрагментами ^{12}Be от фрагментации ^{14}Be . Получена ширина импульсного распределения одного нейтрона $\Gamma = (47 \pm 5)$ МэВ/с. Это значение почти в два

раза меньше значения, полученного в других экспериментах [192,207]. Имеющаяся на сегодняшний день информация о ядрах ^{14}Be и ^{13}Be недостаточна для того, чтобы сделать однозначную интерпретацию полученной разницы. Однако в работе [208] эта разница объясняется сильной корреляцией между двумя нейтронами гало. Авторы работ [192,207] полагают, что как раз в этом и проявляется влияние более высокой энергии связи ^{14}Be ($B_{2n} = 1,34$ МэВ) на свойства нейтронного гало. Ядро ^{14}Be относительно сильно связано, в то время как ^{13}Be нестабилен на 0,8 МэВ. Поэтому nn -взаимодействие должно обеспечить как минимум около 2,1 МэВ, чтобы достичь указанной стабильности ^{14}Be . (Для сравнения напомним, что для ^{11}Li необходима дополнительная энергия порядка всего около 0,5 МэВ.)

3.5. Более тяжелые изотопы Be. Ни один изотоп Be с $A > 14$ не наблюдался в эксперименте. Предсказывается их нестабильность. Изучение их в стандартных реакциях передачи является трудной задачей, поскольку значения Q -реакции сильно отрицательные, как это видно из оценок в табл.10, где указаны некоторые реакции, которые могли бы быть использованы для синтеза тяжелых изотопов Be.

Таблица 10. Некоторые реакции для синтеза ядер ^{15}Be и ^{16}Be

Ядро	Реакция	Q , МэВ
^{15}Be	$^{14}\text{C}(^{18}\text{O}, ^{17}\text{Ne})^{15}\text{Be}$	-62,0
	$^{10}\text{Be}(^{18}\text{O}, ^{13}\text{O})^{15}\text{Be}$	-59,0
^{16}Be	$^{14}\text{C}(^{22}\text{Ne}, ^{20}\text{Mg})^{16}\text{Be}$	-79,0
	$^{14}\text{C}(^{40}\text{Ar}, ^{38}\text{Ca})^{16}\text{Be}$	-69,0

Более вероятным является использование радиоактивных вторичных пучков на легких мишенях в обратной кинематике, например, реакция $^{14}\text{Be} + d \rightarrow p + ^{15}\text{Be}$, для которой Q -реакции всего -5,45 МэВ, или реакции на дейтериевой мишени со срывом одного протона, например $^{15}\text{B}(d, 2p)^{15}\text{Be}$. Однако эти эксперименты требуют относительно высокой ($\geq 10^{3\div 4} \text{ с}^{-1}$) интенсивности пучка радиоактивных ядер ^{14}Be и ^{15}B , которые появятся лишь с запуском фабрик радиоактивных пучков.

3.6. Кластеризация в изотопах бериллия. В последнее время возрос интерес к состояниям, образованным из нескольких α -частиц плюс несколько нейтронов [186,189,190,209–213]. Наблюдение такого рода молекулярных состояний ожидается при энергиях возбуждения вблизи порогов развала на соответствующие подсистемы. Признаком молекулярной структуры служит существование ротационных полос с соответствующим моментом инерции. Альфа-кластерная структура давно установлена в легких ядрах с четным $N = Z$.

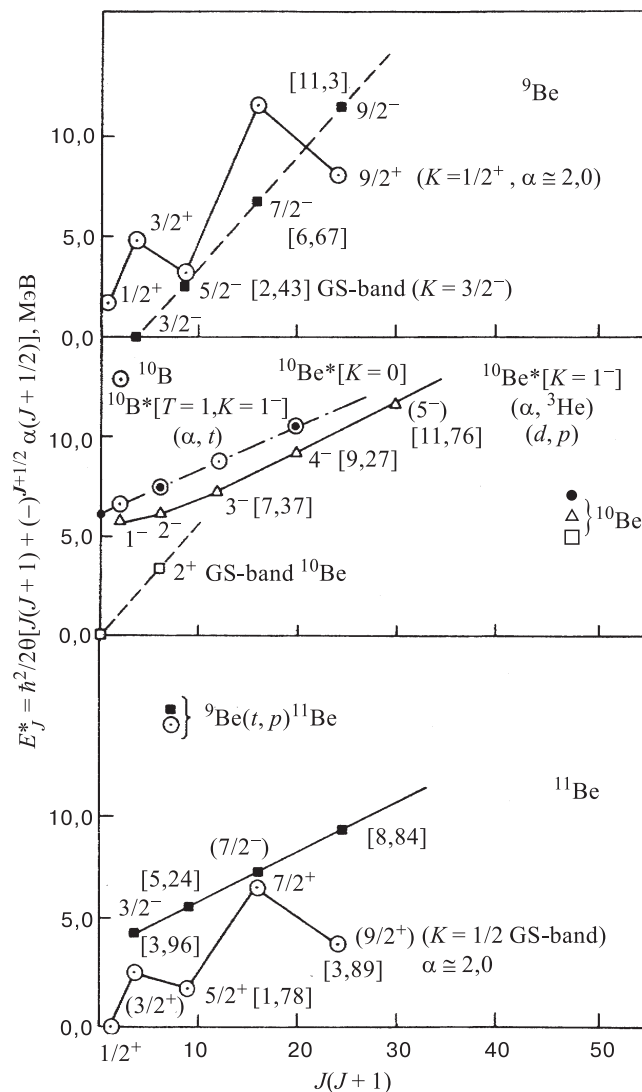


Рис. 36. Энергия возбуждения уровней, составляющих ротационные полосы даймеров из $2\alpha + x$ -нуклоны, а именно ${}^9\text{Be}$, ${}^{10}\text{Be}$, ${}^{10}\text{B}$ и ${}^{11}\text{Be}$, как функция $J(J+1)$ [210]

Изотопы бериллия занимают в этой проблеме особое место, поскольку имеются аргументы в пользу существования структур с двумя центрами, так называемых «даймеров» (dimers) [209–212]. В этих работах на основе известной информации состояния в бериллиевых изотопах сгруппированы в ротационные полосы и определены моменты инерции. Для понимания струк-

туры этих изотопов использовалась корреляционная диаграмма нуклонов на молекулярных орбитах в двухцентровой системе [214]. Остановимся более подробно на выводах работ [209–212].

Хорошо известно, что ^8Be состоит из двух α -кластеров [215]. В этом ядре установлена ротационная полоса, построенная на основном состоянии ($0^+(\text{g.s.})$, $2^+(3,04 \text{ МэВ})$ и $4^+(11,4 \text{ МэВ})$). Ядро ^9Be также имеет молекулярную структуру с двумя центрами, т.е. состоит из двух хорошо разделенных α -частиц и одного валентного нейтрона, который создает молекулярную связь для α -частиц. Здесь имеют место две ротационные полосы, построенные на основном состоянии ($3/2^-$) и на состоянии ($1/2^+$). Начиная с этих молекулярных состояний с двумя нейтронами, в ядре ^{10}Be предсказываются четыре состояния в районе $E^* = 6 \text{ МэВ}$. Действительно, эти состояния существуют. Известные γ -переходы в ^{10}Be и значения более высоколежащих уровней позволили построить ротационные полосы. На основании этого можно предположить, что уровни при $E^* \sim 6 \text{ МэВ}$ являются молекулярными состояниями. Есть основания предполагать существование даймеров и в ядрах ^{11}Be и ^{12}Be . На рис. 36 представлены ротационные полосы, построенные на основании существующей экспериментальной информации для ядер ^9Be , ^{10}Be и ^{11}Be . Отсюда можно получить момент инерции даймеров θ , который дает представление о форме ядер. Сделаны следующие выводы: для основных состояний ^9Be и ^{10}Be (и ^8Be) $\hbar^2\theta \approx 0,5 - 0,6 \text{ МэВ}$. Это означает, что состояния достаточно компактные. Для ротационных полос возбужденных даймеров в $^{10}\text{Be}^*$ и $^{11}\text{Be}^*$ $\hbar^2\theta \approx 0,23 - 0,25 \text{ МэВ}$, что свидетельствует о большем расстоянии (около 4 фм) между двумя α -частицами, чем в случае основных состояний. Что касается ядра ^{12}Be , то о нем имеется мало информации. Его первый возбужденный уровень находится при энергии $E^* = 2,1 \text{ МэВ}$ и $\hbar^2\theta \approx 0,35 \text{ МэВ}$. Однако в нем также можно ожидать двухцентровые кластерные состояния, как это обсуждалось в работах [186,204,213], где наблюдались уровни с энергией возбуждения от 8,6 до 14 МэВ, которые могут распадаться путем испускания изотопов гелия (см. рис. 28). Поскольку изотопы ^6He и ^8He состоят из α -кора и слабосвязанных нейтронов, не исключено, что эти состояния в ядре ^{12}Be имеют структуру $\alpha + \alpha + 4n$.

Проблеме кластеризации в изотопах Be посвящены теоретические работы в рамках антисимметризованной молекулярной динамики [188–190,211]. Их результаты согласуются с предложенной ротационной структурой возбужденных состояний и моментов инерции.

Очевидно, что для дальнейшего определения структуры даймеров требуются новые эксперименты. Это возможно осуществить несколькими способами: поиском высоковозбужденных уровней в этих ядрах с использованием реакций передачи с тяжелыми ионами, изучением взаимодействия между двумя фрагментами или наблюдением высоковозбужденных уровней даймеров путем регистрации γ -квантов.

4. ИЗОТОПЫ БОРА

Структура нейтроноизбыточных изотопов бора не менее интересна, чем структура изотопов элементов с $Z < 5$. Нуклонно-стабильные изотопы ^{14}B и ^{15}B впервые наблюдались еще в 1966 г. [84]. Синтезирован наиболее тяжелый изотоп ^{19}B [216]. Современные формулы масс ядер показывают, что ^{19}B — последний нуклонно-стабильный изотоп бора. Таким образом, граница нуклонной стабильности для изотопов бора определена достаточно хорошо. Изотоп ^{17}B был получен экспериментально в работе [217]. В [128,218] измерен его избыток массы. Для ^{17}B отношение $N/Z = 2,4$, а для ^{19}B $N/Z = 2,8$. Относительный избыток нейтронов $(N - Z)/A = 0,41$ и $0,47$ соответственно. Эти величины далеко превосходят значения, определяющие границу нуклонной стабильности. Необходимо отметить, что длинной цепочкой изотопов бора хорошо иллюстрируется эффект спаривания: ядра $^{15}\text{B} - ^{17}\text{B} - ^{19}\text{B}$, имеющие 10, 12 и 14 нейтронов, — нуклонно-стабильные, в то время как изотопы ^{16}B и ^{18}B с 11 и 13 нейтронами — нейтронно-нестабильные [216,217,219].

До недавнего времени мало что было известно о структуре изотопов бора с $A \geq 14$. Ниже мы представим новые результаты, полученные для массы ядра ^{16}B , а также для возбужденных состояний ^{14}B и ^{16}B .

4.1. Ядро ^{14}B . В работе [42] предсказана нуклонная стабильность ядра ^{14}B с энергией связи 400 кэВ. Поэтому его первое наблюдение [84] в реакции $\text{U} + p$ (5,3 ГэВ) не явилось неожиданным.

Первое измерение массы ^{14}B проведено в реакции $^{14}\text{C}(^7\text{Li}, ^7\text{Be})^{14}\text{B}$ при энергии 52 МэВ [220]. Измеренное значение Q -реакции $(-21,499 \pm 0,030)$ МэВ соответствовало избытку массы $\text{М.Е.} = (23,657 \pm 0,030)$ МэВ. В этой работе также было обнаружено несколько возбужденных состояний в области энергий возбуждения от 0 до 3 МэВ. Среди этих состояний уровень $2,08$ ($J^\pi = 4^-$) заселялся наиболее интенсивно. Спины и четности наблюдаемых уровней были определены на основании аналогии энергетических спектров $^{14}\text{B}^*$ и $^{12}\text{B}^*$, полученных в том же эксперименте.

Последующее измерение массы ^{14}B в реакции $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{14}\text{N})^{14}\text{B}$ при энергии 87,4 МэВ очень хорошо согласуется с предыдущим: $\text{М.Е.} = (23,67 \pm 0,03)$ МэВ. Однако в этом эксперименте уровень 0,74 МэВ не наблюдался [221].

Если принять среднее значение $\text{М.Е.} = (23,667 \pm 0,03)$ МэВ, то ^{14}B связан по отношению к испусканию одного нейтрона примерно на 0,97 МэВ.

Позже в работе [222] в реакции $^{14}\text{C}(\pi^-, \gamma)^{14}\text{B}$ наблюдался один сильный переход, соответствующий возбужденному состоянию ^{14}B при $E^* = (2,15 \pm 0,17)$ МэВ, которому было приписано $J^\pi = 2^-$. Состояние 4^- в этой реакции не наблюдалось. В этой же работе было получено указание

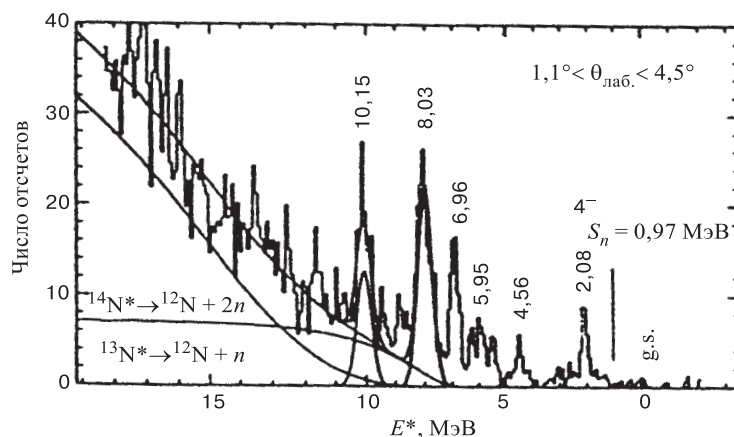


Рис. 37. Энергетический спектр из реакции $^{12}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{12}\text{N})^{14}\text{B}$ [224]

на вероятность переходов к уровням, находящимся в районе 5–7 МэВ, что соответствует предсказаниям работы [223].

Информация о высоковозбужденных состояниях в ядре ^{14}B получена при изучении его структуры в реакции $^{12}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{12}\text{N})^{14}\text{B}$ при энергии 334 МэВ [224]. Полученный энергетический спектр показан на рис. 37. Видно, что ниже 3 МэВ наиболее интенсивно заселяется состояние с энергией возбуждения $E^* = 2,08$ МэВ. Было сделано предположение, что это соответствует состоянию 4^- из работы [220]. Основное состояние заселялось в этой реакции слабо, поскольку нечетный нейтрон в ^{14}B находится на $2s_{1/2}$ -орбите. В то же время выше порога испускания двух нейтронов наблюдалось несколько пиков, наиболее интенсивные из которых находились при $E^* = 6,96, 8,03$ и $10,15$ МэВ. Не исключено, что повышенная статистика в области 4,5 МэВ, а также ~ 6 и $8,8$ МэВ указывает на наличие уровней в ^{14}B при этих энергиях.

В работе [166] при изучении β -запаздывающего нейтронного распада ^{14}Be наблюдался переход к состоянию в ядре ^{14}B при энергии возбуждения $(1,280 \pm 0,021)$ МэВ, которому авторы однозначно приписали спин и четность $J^\pi = 1^+$. Недавно состояние 1,28 МэВ с шириной 60 кэВ было подтверждено и ему приписаны спин и четность $J^\pi = 0^+$ или 1^+ [225]. В этом же эксперименте наблюдался и уровень при $E^* = 4,31$ МэВ (1^+).

4.2. Ядро ^{15}B . Хотя изотоп ^{15}B впервые синтезирован еще в 1966 г. [84], его масса была измерена много позже [226,227] с использованием реакции $^{48}\text{Ca}(^{18}\text{O}, ^{15}\text{B})^{51}\text{V}$. Возбужденные состояния в этих экспериментах не наблюдались.

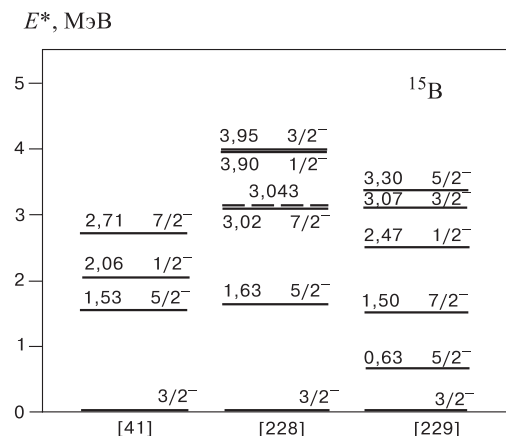


Рис. 38. Уровни изотопа ^{15}B , предсказанные в теоретических работах [41,228,229]. Пунктир — рассчитанный порог распада на $^{14}\text{B} + n$ [228]. Экспериментальное значение этого порога 2,77 МэВ [56]

Если принять значение $M.E. = (28,970 \pm 0,22)$ МэВ, то ^{15}B оказывается стабильным по отношению к распаду $^{14}\text{B} + n$ на 2,77 МэВ [56], что находится в хорошем согласии с предсказанием работы [42].

Структура ^{15}B исследовалась в рамках оболочечной модели в двух разных подходах [41,228], а также в рамках антисимметризованной молекулярной динамики [229]. На рис. 38 приведены предсказанные в этих работах уровни и их характеристики.

4.3. Ядро ^{16}B . Экспериментально доказано, что изотоп ^{16}B нестабилен по отношению к распаду $^{16}\text{B} \rightarrow ^{15}\text{B} + n$ [202,217,219]. Его нестабильность была предсказана в работах [42] ($B_n = (-1,0 \pm 0,4)$ МэВ), [229] ($B_n = -0,164$ МэВ), а в работах [41,228] рассчитаны спектры уровней ^{16}B . Структура этого ядра вызывает интерес в связи с расчетами для ядра ^{17}B , чье основное состояние является кандидатом для нейтронного гало [230].

В работе [47] впервые измерена масса ^{16}B в реакции $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{12}\text{N})^{16}\text{B}$ при энергии 336 МэВ. Спектр ^{16}B показан на рис. 39 и имеет достаточно сложную структуру. В области ожидаемого основного состояния имеется значительный вклад от примеси ^{12}C в мишени (от реакции $^{12}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{12}\text{N})^{14}\text{B}$). С помощью результатов измерения энергий возбуждения уровней ^{14}B , полученных в отдельном измерении с высоким разрешением (см. рис. 37), авторы провели калибровку спектра ^{16}B . Таким образом получено для Q -реакции значение $Q_0 = -48,38(6)$ МэВ, что дало для избытка массы ^{16}B $M.E. = 37,08(6)$ МэВ. Это означает, что ^{16}B нестабилен по отношению к испусканию нейтрона на 40 кэВ. В этом эксперименте наблюдались

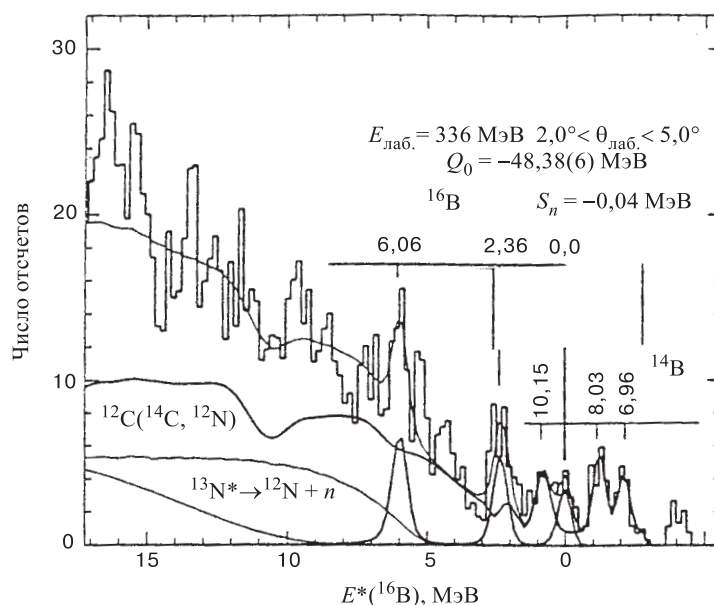


Рис. 39. Спектр энергии возбуждения ^{16}B , полученного в реакции $^{14}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{12}\text{N})^{16}\text{B}$ [47]. Показаны также три пика, соответствующие уровням ^{14}B , заселенным в реакции $^{12}\text{C}(^{14}\text{C}, ^{12}\text{N})^{14}\text{B}$ на примеси из ^{12}C в мишени

также резонансы при $E^* = 2,36(7)$ и $6,06(8)$ МэВ. Последний резонанс был довольно широкий.

Для интерпретации спектра ^{16}B проведены расчеты в рамках QRPA [61], в которых при энергии основного состояния проявляется триплет состояний 4^- , 3^- , 2^- из конфигурации $[\pi 3/2^- \otimes \nu 5/2^+]$, при этом наиболее интенсивно 4^- -состояние. Эта конфигурация остается доминирующей в пределах нескольких МэВ с постепенно увеличивающимся смешиванием от конфигурации $[\pi 3/2^- \otimes \nu 3/2^+]$. Расчет спектра энергии возбуждения ^{16}B неплохо согласуется с экспериментальными данными.

Ядро ^{16}B имеет 11 нейтронов, и по оболочечной модели можно ожидать, что последний из них, вероятнее всего, находится на орбите $1d5/2$. Маленькая энергия связи последнего нейтрона и центробежный барьер для состояния с $\ell = 2$, который много выше энергии распада, могут привести к существованию квазистационарного основного состояния в ^{16}B с относительно большим временем жизни. В работе [61] это время оценивается $\sim 10^{-17}$ с. Еще одна попытка сделана для определения времени жизни ^{16}B в работе [231]. Ядра ^{16}B образовывались при фрагментации вторичного пучка ^{17}C

с энергией 52 МэВ/А на мишени из ^{12}C . Получена лишь верхняя граница времени жизни ^{16}B (191 пс).

В заключение необходимо отметить, что в предположении о наличии последнего нейтрона на орбите $1d5/2$ оболочечная модель предсказывает время жизни ^{16}B $3,7 \cdot 10^{-16}$ с, при энергии распада, равной 10 кэВ [231].

4.4. Кластеризация в изотопах В. Использовались разные подходы к решению задачи о кластеризации в изотопах бора.

Возможность существования кластерной структуры изотопов бора рассматривалась впервые в работе [232], где в молекулярно-орбитальной модели ядра бора описывались как состоящие из кора, включающего две α -частицы, протона и нейтронов вокруг них. Было показано, что оптимальное расстояние между двумя α -частицами увеличивается при переходе от ^{13}B к ^{17}B , т.е. при $N > 8$.

В работе [233] при исследовании ядра ^{11}B использовалась модель, в которой это ядро представлялось в виде $^7\text{Li}(t + \alpha) + \alpha$.

Однако скудная информация о структуре более тяжелых изотопов бора не позволяет однозначно предположить существование в них кластеров. Поэтому использование метода антисимметризованной молекулярной динамики (ADM) для изотопов бора является оправданным, поскольку в нем не заложено предположения об изначальном существовании кластеров в ядре и аксиальной симметрии в деформации [188,189].

В работе [229], с использованием метода AMD, был сделан расчет распределений плотности ядерной материи, а также протонов и нейтронов в изотопах В ($A = 11 - 19$). Получено, что ядро ^{11}B деформировано и имеет кластерную структуру. Ядро ^{13}B , у которого магическое число нейтронов $N = 8$, является почти сферическим и имеет структуру в соответствии с оболочечной моделью. Для ядер ^{15}B , ^{17}B и ^{19}B показана кластерная структура с вытянутой деформацией, которая увеличивается с приближением к линии нейтронной стабильности. Изменение плотности нейтронов связывается с оболочечными эффектами. Распределение протонов имеет аналогичную N -зависимость (кластеризация существует в ^{11}B , довольно слаба в ^{13}B , а для области $N > 8$ четко видна протонная плотность с двумя кластерами), которая также определяется оболочечными эффектами нейтронных орбит. Показано, что структура ^{11}B является кластерной, типа $^7\text{Li}(t + \alpha) + \alpha$. Во всех остальных изотопах В протоны группируются пространственно в двух группах $2p + 3p$ и кластерные структуры $^9\text{Li} + \alpha$, $^{11}\text{Li} + \alpha$, $^{11}\text{Li} + ^6\text{He}$ и $^{11}\text{Li} + ^8\text{He}$ проявляются в ^{13}B , ^{15}B , ^{17}B и ^{19}B соответственно. Сильно сказывается влияние оболочки с $N = 8$. Увеличение межкластерного расстояния R_{pp} между протонными кластерами (группами из двух и трех протонов) с увеличением массы ядер бора говорит о переходе структуры, соответствующей оболочечной модели, к кластерной. Подчеркивается, что кластеры в изото-

пах бора очень «рыхлые». Кроме того, отмечалось, что плотности протонов и нейтронов (нуклоны/фм³) почти одинаковые для ядер ¹¹B и ¹³B, однако начинают отличаться для ядер тяжелее ¹⁵B, $\rho_n(r) > \rho_p(r)$ при $r > 3$ фм. Толщина нейтронной «шубы» ¹⁷B оказывается меньше 1 фм, т.е. незначительной. Более неожиданным оказался результат, показывающий, что нейтронная «шуба» в ¹⁹B такая же, как в ¹⁷B. Этот эффект объясняется тем, что протонная плотность также увеличивается, следуя за нейтронной плотностью, а разница между ними практически не меняется.

4.5. Дальнейшее исследование изотопов бора. Исследование нейтроноизбыточных изотопов бора можно продолжить с использованием реакций как с первичными, так и с радиоактивными пучками в инверсной кинематике. Несколько таких реакций приведено в табл.11. Из таблицы видно, что реакции на вторичных пучках по сравнению с реакциями на первичных пучках имеют гораздо более положительные значения Q -реакции. Поэтому одной из задач фабрик радиоактивных пучков может быть исследование структуры тяжелых изотопов бора.

Таблица 11. Реакции для изучения изотопов бора

Ядро	Реакция	Q , МэВ
¹⁵ B	¹⁴ C(¹⁵ N, ¹⁴ O) ¹⁵ B	–33,8
	¹¹ B(¹⁸ O, ¹⁴ O) ¹⁵ B	–29,1
	¹⁴ C(¹⁸ O, ¹⁷ F) ¹⁵ B	–28,7
	¹⁵ B(p, p') ¹⁵ B	
	¹⁴ B(d, p) ¹⁵ B	0,54
¹⁶ B	¹¹ B(¹⁸ O, ¹³ O) ¹⁶ B	–52,4
	¹⁵ B(d, p) ¹⁶ B	–2,27
¹⁷ B	¹⁵ B(t, p) ¹⁷ B	–7,09

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа представляет собой вторую часть обзора о структуре легких нейтроноизбыточных ядер. В опубликованной первой части [234] были рассмотрены свойства нейтроноизбыточных ядер легких элементов и проблемы, объясняющие возросший интерес к их изучению. Были рассмотрены реакции, используемые для получения таких ядер. Особое внимание уделено механизму реакций передачи нескольких нуклонов, успешно используемых для спектроскопических исследований легких экзотических ядер в области

границы нейтронной стабильности. Рассматривались и возможности исследования структуры экзотических ядер в реакциях с радиоактивными пучками.

Во второй части мы попытались представить полученную в последние несколько лет информацию, которая, на наш взгляд, позволяет иметь представление о том большом прогрессе, который был достигнут в изучении структуры ядра. Это произошло благодаря развитию экспериментальной и ускорительной техники. Самые последние результаты получены с использованием радиоактивных экзотических мишеней, таких, как ^{14}C и ^{10}Be , а также радиоактивных пучков. Синтез и исследование свойств легких нейтроноизбыточных ядер, в первую очередь, дают возможность установить границу между связанными и несвязанными ядрами, т.е. границы нейтронной стабильности. Из известных экспериментальных данных следует, что граница нейтронной стабильности достигнута лишь для самых легких элементов ($Z < 10$). Здесь мы остановились на нейтроноизбыточных изотопах легких элементов с $2 \leq Z \leq 5$, изотопам элементов с $Z \geq 6$ будет посвящена следующая часть обзора. Экспериментальные данные по нейтроноизбыточным ядрам являются важным источником информации, необходимой для проверки и развития существующих теоретических моделей.

Однако, несмотря на то, что в последние годы был сделан большой шаг в изучении свойств экзотических ядер, все еще осталось много нерешенных проблем. В принципе, мы рекомендуем читателям, интересующимся актуальностью данной тематики, обратиться к материалам некоторых международных конференций [235–238], а также к ранее опубликованным обзорам [1,201,239–242].

В заключение авторы благодарят Ю.Ц.Оганесяна, В.фон Оертцена, А.А.Оглоблина, А.А.Коршенинникова и Ю.П.Гангрского за полезные обсуждения представленного материала в процессе его подготовки к печати. Авторы благодарны также З.Д.Покровской за помощь в оформлении рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhukov M.V. et al. — Phys. Rep., 1993, v.231, p.151.
2. Ogloblin A.A. — In: Proc. Int. Conf. on Exotic Nuclei, Foros, 1991, Eds. Yu.E.Penionzhkevich and R.Kalpakchieva. World Scientific, Singapore, 1991, p.36.
3. Мигдал А.Б. — ЯФ, 1973, т.16, с.427.
4. Suzuki Y. — Nucl. Phys., 1991, v.A528, p.395.
5. Ajzenberg-Selove F. — Nucl. Phys., 1988, v.A490, p.1.
6. Brady F.P. et al. — Phys. Rev. Lett., 1983, v.51, p.1320; J. Phys. G, 1984, v.10, p.363.
7. Sakuta S.B. et al. — Europhys. Lett., 1994, v.22, p.511.
8. Csótó A. — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.165; ibid. 1994, v.C49, p.2244.
9. Danilin B.V. et al. — Phys. Lett., 1993, v.B302, p.129.

10. **Kato K. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.A588, p.29c.
11. **Danilin B.V. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.C55, p.R577;
Ershov S.N. et al. — Phys. Rev., 1997, v.C56, p.1483.
12. **Janecke J. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.1070.
13. **Yokoyama M. et al.** — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.1122.
14. **Aoyama S. et al.** — Abstract Book, 4th Int.Conf. on RNB, June 1996, Omiya, Japan, p.87.
15. **Poppelier N.A.F.M. et al.** — Z. Physik, 1993, v.A346, p.11.
16. **Tanihata I. et al.** — Phys. Lett., 1985, v.160B, p.380.
17. **Tanihata I. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p.2676.
18. **Ogawa Y. et al.** — Nucl. Phys., 1992, v.A543, p.722.
19. **Kobayashi T. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.2599.
20. **Tanihata I. et al.** — Phys. Lett., 1988, v.B206, p.592.
21. **Tanihata I. et al.** — Phys. Lett., 1992, v.B289, p.261.
22. **Alkhazov G.D. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.2313.
23. **Chulkov L.V. et al.** — Europhys. Lett., 1989, v.8, p.245.
24. **Al-Khalili J.S. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.1843.
25. **Al-Khalili J.S., Tostevin J.A.** — Phys. Rev., 1998, v.C57, p.1846.
26. **A.A.Korshennikov et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.A617, p.45.
27. **Burzynski S. et al.** — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.56.
28. **Henneck R. et al.** — Nucl. Phys., 1994, v.A571, p.541.
29. **Barret R.G., Jackson D.F.** — Nuclear Sizes and Structure. Clarendon, Oxford, 1977.
30. **Skobelev N.K. et al.** — Z. Physik, 1992, A341, p.315.
31. **Penionzhkevich Yu.E.** — Nucl. Phys., 1997, v.A616, p.247c.
32. **Ter-Akopian G.M. et al.** — Phys. Lett., 1998, B426, p.251.
33. **Kobayashi T.** — Nucl. Phys., 1992, v.A538, p.343c.
34. **Kobayashi T.** — In: Proc. 3rd Int. Conf. on Radioactive Nuclear Beams, East Lansing, Michigan, May 1993, ed. D.J.Morrissey, Editions Frontieres, p.169.
35. **Kobayashi T.** — Nucl. Phys., 1993, v.A553, p.465c.
36. **Korshennikov A.A., Kobayashi T.** — Nucl. Phys., 1994, v.A567, p.97.
37. **Fomichev A.S. et al.** — Z. Physik, 1995, A351, p.129; **Fomichev A.S. et al.** — JINR Rapid Communications 4[67]-94, Dubna, 1994, p.21.
38. **Kolata J.J. et al.** — Phys. Rev., 1998, v.C57, p.R6.
39. **DeYoung P.A. et al.** — Phys. Rev., 1998, v.C58, p.3443.
40. **Kolata J.J. et al.** — Phys. Rev., Lett. 1998, v.81, p.4580.
41. **Poppelier N.A.F.M. et al.** — Phys. Lett., 1985, 157B, p.120.
42. **Garvey G.T., Kelson I.** — Phys. Rev. Lett., 1966, v.16, p.197;
Garvey G.T. et al. — Rev. Mod. Phys., 1969, v.41, p.S1.
43. **Wolters A.A. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.2062.

44. **Belozorov A.V. et al.** — Preprint JINR E15-87-733, Dubna 1987;
Белозоров А.В. и др. — Изв. АН СССР, сер.физ., 1988, т.52, с.100.
45. **Bohlen H.G.** — In: Proc. Int. Symp on the Structure and Reactions with Unstable Nuclei, Niigata, Japan, June 1991, eds. K.Ikeda, Y.Suzuki, World Scientific, Singapore, 1991, p.83.
46. **Bohlen H.G. et al.** — In: Proc. Int. School-Seminar on Heavy Ion Physics, Dubna, Russia, May 1993, eds. Yu.Ts.Oganessian, Yu.E.Penionzhkevich, R.Kalpakchieva. JINR, 1993, p.17.
47. **Bohlen H.G. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.A583, p.775c.
48. **Korshennikov A.A. et al.** — Phys. Lett., 1993, v.B316, p.38.
49. **Korshennikov A.A. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.B326, p.31.
50. **Nilsson T. et al.** — Nucl. Phys., 1996, v.A598, p.418.
51. **Kryger R.A. et al.** — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.R2439.
52. **Thoennessen M. et al.** — In: Proc. Int. Conf. on Exotic Nuclei and Atomic Masses (ENAM95), Arles, France, June, 1995; eds. M. de Saint Simon and O.Sorlin. Editions Frontieres, 1995, p.237.
53. **Thoennessen M. et al.** — Phys. Rev., 1999, v.C59, p.111.
54. **Зельдович Я.Б.** — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.1123; **Гольданский В.И.** — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.1637.
55. **Tribble R.E. et al.** — Phys. Rev., 1977, v.C16, p.1835.
56. **Audi G., Wapstra A.** — Nucl. Phys., 1993, v.A565, p.1.
57. **Александров Д.В.** — ЯФ, 1982, т.35, с.277; Изв. АН СССР, сер.физ., 1985, т.49, с.2115.
58. **Bohlen H.G. et al.** — Z. Physik, 1988, v.A330, p.227.
59. **Seth K.K., Parker B.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.2448.
60. **Von Oertzen W. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.A588, p.129c.
61. **Bohlen H.G. et al.** — In: Proc. XV EPS Nuclear Physics Divisional Conf. on Low Energy Nuclear Dynamics (LEND'95), 14-22 April 1995, St.Petersburg, Russia, Eds. Yu.Ts.Oganessian, W.von Oertzen, R.Kalpakchieva. World Scientific, Singapore, 1995, p.53.
62. **Stolla Th. et al.** — Z. Physik, 1996, A356, p.233.
63. **Korshennikov A.A. et al.** — In: Proc. Int.Conf. on Exotic Nuclei, Atomic Masses (ENAM95), Arles, France, June 1995, eds. M.de Saint Simon and O.Sorlin. Editions Frontieres, 1995, p.207.
64. **Горбатов А.М. и др.** — ЯФ, 1989, т.50, с.1551.
65. **Hansen P.G., Jonson B.** — Europhys. Lett., 1987, v.4, p.409.
66. **Zhukov M.V. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.C50, p.R1.
67. **Riisager K. et al.** — Nucl. Phys., 1992, v.A540, p.365.
68. **Seth K.K.** — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.1930.
69. **Thibault C., Klapisch R.** — Phys. Rev., 1974, v.C9, p.793.
70. **Beiner M. et al.** — Nucl. Phys., 1975, v.A249, p.1.
71. **Jelley N.A. et al.** — Phys. Rev., 1975, C11, p.2049.
72. **Janecke J.** — Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1976, v.17, p.455.
73. **Van Hees A.G.M., Glaudemans P.W.M.** — Z. Physik, 1983, v.A314, p.323; Z. Physik, 1984, v.A315, p.223.
74. **Wapstra A.H. et al.** — Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1988, v.39, p.281.

75. **Белозеров А.В. и др.** — Физика тяжелых ионов - 85: Сб. аннот., Дубна, 1986, P7-86-322, с.35.
76. **Stevenson J. et al.** — Phys. Rev., 1988, v.C37, p.2220.
77. **Kitagawa H.H., Sagawa H.** — Nucl. Phys., 1993, v.A551, p.16.
78. **Bohlen H.G. et al.** — In: Proc. 8th Int. Conf. on Nuclear Reaction Mechanisms, Varenna, Italy 1997, ed. E.Gadioli, Univ. of Milano, p.425.
79. **Bohlen H.G.** — Proc. Int. Symp. on Large-Scale Collective Motion of Atomic Nuclei, October 1996, Brolo (Messina), Italy, eds. G.Giardina and F.Hanappe, World Scientific, Singapore 1997, p.47.
80. **Ogloblin A.A.** — Z. Physik, 1995, v.A351, p.355.
81. **Whetstone S.L. Jr., Thomas T.D.** — Phys. Rev., 1967, v.54, p.1174.
82. **Cosper S.W. et al.** — Phys. Rev., 1967, v.154, p.1193.
83. **Vorobiev A.A. et al.** — Phys. Lett., 1969, v.30B, p.332.
84. **Poskanzer A.M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1966, v.17, p.1271.
85. **Безногих Г.Г. и др.** — Письма в ЖЭТФ, 1979, т.30, с.349.
86. **Artukh A.G. et al.** — Nucl. Phys., 1971, v.A168, p.321.
87. **Оганесян Ю.Ц. и др.** — Письма в ЖЭТФ, 1982, т.3, с.104.
88. **Stevenson J.D., Price J.P.** — Phys. Rev., 1981, v.C24, p.2102.
89. **Musser J.A., Stevenson J.D.** — Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, p.2544.
90. **Guillemaud-Mueller D. et al.** — Z. Physik, 1985, v.A322, p.415.
91. **Guillemaud-Mueller D. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.C41, p.937.
92. **Sakurai H. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.R2802.
93. **Александров Д.В. и др.** — ЯФ, 1982, т.35, с.277; ЯФ, 1982, т.36, с.783.
94. **Bayer R. et al.** — Czech J. Phys., 1981, v.B31, p.1273.
95. **Korshennikov A.A. et al.** — Nucl. Phys., 1993, v.A559, p.208.
96. **Ostrowski A.N. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.B338, p.13.
97. **Goosman D.R.** — Nucl. Instr. Meth., 1974, v.116, p.445.
98. **Sagawa H.** — Nucl. Phys., 1992, v.A538, p.619c.
99. **Mayer-Kuckuk Th.** — Kernphysik, Stuttgart: Teubner 1994, p.197.
100. **Wilcox K.H. et al.** — Phys. Lett., 1975, v.59B, p.142.
101. **Абрамович С.Н. и др.** — Изв. АН СССР, сер.физ., 1973, т.37, с.1967.
102. **Barker F.C., Hickey G.T.** — J. Phys. G.: Nucl. Phys., 1977, v.3, p.L23.
103. **Амелин А.И. и др.** — ЯФ, 1990, т.52, с.1231.
104. **Warburton E.K., Brown B.A.** — Phys. Rev., 1992, v.C46, p.923.
105. **Bohlen H.G. et al.** — Z. Physik, 1993, v.A344, p.381.
106. **Bohlen H.G. et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.A616, p.254c.
107. **Young B.M. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.279.
108. **Caggiano J.A. et al.** — In: Book of Abstracts ENAM'98, 2nd Int. Conf. on Exotic Nuclei and Atomic Masses, 23–27 June 1998, Bellaire, Michigan, USA: contribution PB9.

109. **Zinser M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.1719.
110. **Zinser M. et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.A619, p.151.
111. **Shimoura S. et al.** — Nucl. Phys., 1998, v.A630, p.387c.
112. **Bohlen H.G. et al.** — Nucl. Phys., 1988, v.A488, p.89c;
Von Oertzen W. — Nucl. Phys., 1988, v.A482, p.357c.
113. **Абрамович С.Н. и др.** — ЭЧАЯ, 1995, т.26, вып.4, с.1001.
114. **Garrido E. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.3159.
115. **Garrido E. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.C55, p.1327.
116. **Anne R. et al.** — Phys. Lett., 1990, v.B250, p.19.
117. **Humbert F. et al.** — Phys. Lett., 1995, v.B347, p.198.
118. **Nilsson T. et al.** — Europhys. Lett., 1995, v.30, p.19.
119. **Vinh Mau N., Pacheco J.C.** — Nucl. Phys., 1996, v.A607, p.163.
120. **Wurzer J., Hofmann H.M.** — Z. Physik, 1996, v.A354, p.135.
121. **Thompson I.J., Zhukov M.V.** — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.1904.
122. **Nunes F.M. et al.** — Nucl. Phys., 1996, v.A596, p.171.
123. **Descouvemont P.** — Nucl. Phys., 1997, v.A626, p.647.
124. **McVoy K.W., Van Isacker P.** — Nucl. Phys., 1994, v.A576, p.157.
125. **Goldhaber A.S.** — Phys. Lett., 1974, v.53B, p.306.
126. **Arnold E. et al.** — Phys. Lett., (87), v.B197 p.311; Z. Physik, 1994, v.A349, p.337.
127. **Thibault C. et al.** — Phys. Rev., 1975, v.C12, p.644.
128. **Wouters J.M. et al.** — Z. Physik, 1988, v.A331, p.229.
129. **Kobayashi T.** — In: Proc. Int. Symp on the Structure and Reactions with Unstable Nuclei, Niigata, Japan, June 1991, eds. K.Ikeda, Y.Suzuki, World Scientific, Singapore, 1991, p.187.
130. **Young B.M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1993, v.71, p.4124.
131. **Kobayashi T. et al.** — Phys. Lett., 1989, v.B232, p.51.
132. **Ikeda K.** — Nucl. Phys., 1992, v.A538, p.355.
133. **Bertulani C., Baur G.** — Nucl. Phys., 1988, v.A480, p.615.
134. **Suzuki Y., Tosaka Y.** — Nucl. Phys., 1990, v.A517, p.599.
135. **Hayes A.C., Strottman D.** — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.2248.
136. **Hoshino T. et al.** — Nucl. Phys., 1990, v.A506, p.217.
137. **Garrido E. et al.** — Nucl. Phys., 1998, v.A630, p.409c.
138. **Karataglidis et al.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.1447.
139. **Belozyorov A.V. et al.** — In: Proc. Int. Conf. on Exotic Nuclei, Foros (Crimea) October 1991, Eds. Yu.E.Penionzhkevich, R.Kalpakchieva. World Scientific, Singapore, 1992, p.75.
140. **Bohlen H.G. et al.** — Z. Physik, 1995, v.A351, p.7.
141. **Korshennikov A.A. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.R537.
142. **Korshennikov A.A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.2317.
143. **Gornov M.G. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1998, v.81, p.4325.
144. **Sackett D. et al.** — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.118.

145. **Ieki K. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1993, v.70, p.730.
146. **Shimoura S. et al.** — Phys. Lett., 1995, v.B348, p.29.
147. **Ieki K. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.1589.
148. **Galonsky A. et al.** — Nucl. Phys., 1996, v.A599, p.353c.
149. **Harvey B.G.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.R1520.
150. **Gibbs W.R., Hayes A.C.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.67, p.1395.
151. **Bertsch G. et al.** — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.1154.
152. **Esbensen H. et al.** — Phys. Lett., 1992, v.B287, p.289.
153. **Tanihata I. et al.** — Phys. Lett., 1992, v.B287, p.307.
154. **Suzuki T., Otsuka T.** — Phys. Rev., 1994, v.C50, p.R555.
155. **Chaudhuri A.K. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.1603.
156. **Orr N.A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.2050.
157. **Tanihata I.** — Nucl. Phys., 1993, v.A553, p.361.
158. **Al-Khalili J.S., Tostevin J.A.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.76, p.3903.
159. **Orr N.A.** — Nucl. Phys., 1997, v.A616, p.155c.
160. **Moon C.-B. et al.** — Phys. Lett., 1992, v.B297, p.39.
161. **Lewitowicz M. et al.** — Nucl. Phys., 1993, v.A562, p.301.
162. **Hirenzaki S. et al.** — Nucl. Phys., 1993, v.A552, p.57.
163. **Esbensen H. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.C56, p.3054.
164. **Borge M.J.G. et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.A613, p.199.
165. **Borge M.J.G. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.C55, p.R8.
166. **Aoi N. et al.** — Z. Physik, 1997, v.A358, p.253.
167. **Audi G. et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.A624, p.1.
168. **Ajzenberg-Selove F.** — Nucl. Phys., 1990, v.A506, p.1.
169. **Cappuzzello F. et al.** — In: Proc. of the Int. Conf. on Large-Scale Collective Motion of Atomic Nuclei, 15–19 October 1996, Brolo, Messina, Italy, eds. G.Giardina, G.Fazio, M.Lattuada, World Scientific, Singapore, p.88.
170. **Wilkinson D.H., Alburger D.E.** — Phys. Rev., 1959, v.113, p.563.
171. **Talmi I., Unna I.** — Phys. Rev. Lett., 1960, v.4, p.469.
172. **Ragnarsson I. et al.** — Nucl. Phys., 1981, v.A361, p.1.
173. **Millener D.J. et al.** — Phys. Rev., 1983, v.C28, p.497.
174. **Fukuda M. et al.** — Phys. Lett., 1991, v.B268, p.339.
175. **Otsuka T. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1993, v.70, p.1385.
176. **Otsuka T. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.2289.
177. **Nakamura T. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.B331, p.296.
178. **Sagawa H. et al.** — Phys. Lett., 1993, v.B309, p.1.
179. **Vinh Mau N.** — Nucl. Phys., 1995, v.A592, p.33.
180. **Bhattacharya R., Krishan K.** — Phys. Rev., 1997, v.C56, p.212.

181. **Kelley J.H. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.74, p.30.
182. **Anne R. et al.** — Nucl. Phys., 1994, v.A575, p.125.
183. **Anne R. et al.** — Phys. Lett., 1993, v.B304, p.55.
184. **Fauerbach M. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.C56, p.R1.
185. **Bush J.E et al.** — Phys. Rev. Lett., 1998, v.81, p.61.
186. **Korshennikov A.A. et al.** — Phys. Lett., 1995, v.B343, p.53.
187. **Korshennikov A.A. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.A588, p.23c.
188. **Horiuchi H. et al.** — In: Proc. Int. Symp on the Structure and Reactions with Unstable Nuclei, Niigata, Japan, June 1991, eds. K.Ikeda, Y.Suzuki, World Scientific, Singapore, 1991, p.108.
189. **Kanada-En'yo Y. et al.** — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.628.
190. **Horiuchi H., Kanada-En'yo Y.** — Nucl. Phys., 1997, v.A616, p.394c.
191. **Thompson I.J., Zhukov M.V.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.708.
192. **Zahar M. et al.** — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.R1484.
193. **Gillibert A. et al.** — Phys. Lett., 1986, v.176B, p.317.
194. **Ostrowski A.N. et al.** — Z. Physik, 1992, v.A343, p.489.
195. **Descouvemont P.** — Phys. Lett., 1994, v.B331, p.271.
196. **Descouvemont P.** — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.704.
197. **Александров Д.В. и др.** — ЯФ, 1983, т.37, с.797.
198. **Александров Д.В. и др.** — Вопросы атомной науки и техники, 1985, вып.3.
199. **Belozorov A.V. et al.** — Nucl. Phys., 1998, v.A636, p.419.
200. **Wapstra A.H., Audi G.** — Nucl. Phys., 1985, v.A432, p.1.
201. **Ogloblin A.A., Penionzhkevich Yu.E.** — In: Treatise on Heavy Ion Science, ed.D.Allan Bromley, Plenum Press, New York, 1989, v.8, p.260.
202. **Bowman J.D. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1973, v.31, p.614.
203. **Gilman R. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.C30, p.958.
204. **Korshennikov A.A et al.** — Nucl. Phys., 1997, v.A616, p.189c.
205. **Zhongzhou Ren et al.** — Phys. Lett., 1995, v.B351, p.11.
206. **Tanihata I. et al.** — Nucl. Phys., 1988, v.A488, p.133c, и ссылки там же.
207. **Orr N. et al.** — In: Proc. 3rd Int. Conf. on Radioactive Nuclear Beams, East Lansing, Michigan, May 1993, ed. D.J.Morrissey, Editions Frontieres, p.389.
208. **Hansen P.G.** — Nucl. Phys., 1993, v.A553, p.89c.
209. **Von Oertzen W.** — Z. Physik, 1996, v.A354, p.37.
210. **Von Oertzen W.** — Z. Physik, 1997, v.A357, p.355.
211. **Von Oertzen W.** — Il Nuovo Cimento, 1997, v.110A, p.895.
212. **Von Oertzen W.** — Acta Physica Polonica, 1998, v.B29, p.247.
213. **Korshennikov A.A et al.** — Preprint RIKEN-AF-NP-175, July, 1994.
214. **Scharnweber D. et al.** — Nucl. Phys., 1971, v.A164, p.257.
215. **Arima A.** — In: Heavy Ion Collisions, ed. R.Bock, North-Holland, Amsterdam, 1979, v.1, p.417 .

-
216. **Musser J.A., Stevenson J.D.** — Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, p.2544.
217. **Bowman J.D. et al.** — Phys. Rev., 1974, v.C9, p.836.
218. **Gillibert A. et al.** — Phys. Lett., 1987, v.B192, p.39.
219. **Langevin M. et al.** — Phys. Lett. 1985, v.B150, p.71.
220. **Ball G.C. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1973, v.31, p.395.
221. **Naulin F. et al.** — In: 4th Int. Conf. on Nuclei Far from Stability, Helsingor, 1981, p.376.
222. **Baer H.W. et al.** — Phys. Rev., 1993, v.C28, p.761.
223. **Kissiner H.R., Eramzhyan R.A.** — Nucl. Phys., 1979, v.A326, p.289.
224. **Bohlen H.G. et al.** — 1995 Annual Report, HMI Berlin, HMI-B 540, p.55.
225. **Belbot M. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.C56, p.3038.
226. **Hotchkis M.A.C. et al.** — Nucl. Phys., 1983, v.A398, p.130.
227. **Bhatia T.S. et al.** — Phys. Lett., 1978, v.76B, p.562.
228. **Warburton E.K., Brown B.A.** — Phys. Rev., 1992, v.C46, p.923.
229. **Yoshiko Kanada-En'yo, Horiuchi H.** — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.647.
230. **Tanihata I.** — Prog. Part. Nucl. Phys., 1995, v.35, p.505.
231. **Kryger R.A. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.1971.
232. **Seya M. et al.** — Prog. Theor. Phys., 1981, v.65, p.204.
233. **Ikeda K. et al.** — Prog. Theor. Phys. Suppl., 1980, v.68.
234. **Калпакчиева Р. и др.** — ЭЧАЯ, 1998, т.29, вып.4, с.832.
235. Proc. Int. Symp. on the Structure and Reactions with Unstable Nuclei, Niigata, Japan, June 1991, eds. K.Ikeda, Y.Suzuki. World Scientific, Singapore, 1991.
236. Proc. Int. Conf. on Exotic Nuclei, Foros 1991, eds. Yu.E.Penionzhkevich and R.Kalpakchieva. World Scientific, Singapore, 1991.
237. Proc. Int. Conf. on Exotic Nuclei and Atomic Masses, Arles, France, June 1995, eds. M.de Saint Simon and O.Sorlin, Editions Frontieres, 1995.
238. Proc. Int. Symp. on Physics of Unstable Nuclei, Niigata, Japan, 1994, eds. H.Horiuchi, K.Ikeda, K.Sato, Y.Suzuki, I.Tanihata; Nucl. Phys., 1995, v.A588.
239. **Riisager K.** — Rev. Mod. Phys., 1994, v.66, p.1105.
240. **Tanihata I.** — Prog. Part. Nucl. Phys., 1995, v.35, p.505.
241. **Hansen P.G. et al.** — Ann. Rev. Nucl. Part. Science, 1995, v.45, p.591.
242. **Tanihata I.** — J. Phys. G, Nucl. Phys., 1996, v.22, p.157.

ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ ДЕЛЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР

В.И.Кузнецов, Н.К.Скобелев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен исследованию запаздывающего деления. Запаздывающее деление — пространственный вид радиоактивного распада тяжелых ядер с достаточно большой величиной энергии Q_β . Распадающееся материнское ядро (K -захват или β^- -распад) заселяет возбужденные состояния дочерних ядер, которые затем делятся. Рассмотрены основные идеи о развитии исследований запаздывающего деления, возможность определения высот барьеров деления атомных ядер по данным об измерениях вероятности запаздывающего деления и роль запаздывающего деления в процессах ядерного синтеза в импульсных нейтронных потоках ядерных взрывов и в r -процессе. Обращено внимание на следующие аспекты запаздывающего деления: измерительные и детектирующие средства, области материнских ядер запаздывающего деления до замкнутых ядерных оболочек $N = 126$ и $Z = 82$, средняя полная кинетическая энергия осколков деления, измерение совпадения осколков деления с рентгеновским излучением K -захвата дочернего делящегося ядра.

The review is devoted to the investigations of the delayed fission (DF). The delayed fission is general decay mode for heavy nuclei with sufficiently large Q_β values. A decaying parent nucleus (electron capture or β^- decay) populates excited states in its daughter nucleus, which then fissions. Basic theoretical ideas about evolution of delayed fission, the possibility of determining the fission barrier heights of the nuclear fission from the measured probabilities P_{DF} and the role of delayed fission in nuclear synthetic processes that occur in pulses neutron fluxes of nuclear tests and the r -process are considered. There are following aspects of the delayed fission in question: the measure and detection systems, the regions of the delayed fission predecessors before closed nuclear shells $N = 126$ and $Z = 82$, the average total kinetic energy of fission fragments of DF daughter nuclei, the measure fission fragments coincident with the K -capture x rays of decaying daughter nucleus.

ВВЕДЕНИЕ

Запаздывающее деление, наряду со спонтанным делением и спонтанно делящимися изомерами формы, относится к модам деления из низколежащих возбужденных состояний и дает дополнительные данные для понимания динамики процесса деления при стремлении энергии возбуждения делящегося ядра к нулю.

Впервые делящиеся продукты в минутном диапазоне периодов полураспада обнаружены в Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н.Флерова ОИЯИ в 1966 г. в опытах по синтезу нейтронодефицитных тяжелых ядер с целью поиска спонтанно делящихся изомеров формы [1]. Затем ядра были идентифицированы в реакциях на пучках ускоренных тяжелых ионов, и сделан вывод

о том, что ядра-предшественники делящихся нуклидов, вероятнее всего, испытывают K -захват, а образовавшиеся дочерние ядра испытывают деление из возбужденного состояния [2–4] (см. рис. 1). Такой процесс деления нейтронодефицитных тяжелых ядер, удаленных от линии β -стабильности, по аналогии с запаздывающим испусканием нуклонов назван нами запаздывающим делением. Авторам этих работ был выдан диплом [5] на открытие запаздывающего деления ядер с приоритетом от 12 июля 1971 г.

Энергия β -распада Q_β тяжелых ядер с удалением от линии β -стабильности (с ростом их нейтронного дефицита или избытка нейтронов) становится соизмеримой с высотой барьера деления дочерних ядер и даже превышает ее. Как правило, после β -распада дочерние ядра оказываются не только в основном, но и в возбужденных состояниях. Когда энергия возбужденного состояния E^* ($E^* \sim Q_\beta$) соизмерима с высотой B_f барьера деления дочернего ядра или выше него, вероятность заселения в области B_f может оказаться заметной величиной, и деление будет конкурировать с другими быстрыми процессами распада дочернего ядра, например, с испусканием γ -квантов или запаздывающих нейтронов. Наряду с этим необходимо, чтобы вероятности β -распада или электронного захвата (ЕС) материнского ядра не подавлялись параллельно проходящими процессами распада, например, в области нейтронодефицитных ядер, α -распадом. Если эти условия соблюдены, то деление дочерних ядер после ЕС/ β^- -распада доступно экспериментальному наблюдению. Период полураспада, измеренный по временному распределению осколков деления, равен периоду β -распада материнского ядра, так как деление дочернего ядра задерживается на время $10^{-9} \div 10^{-17}$ с.

1. КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ДЕЛЕНИЯ

Остановимся на некоторых основных характеристиках запаздывающего деления. Из них одна из наиболее значимых — вероятность запаздывающего деления P_{DF} . Величина $P_{DF} = N_{if}/N_i$, где N_i — полное число ЕС, либо β^- -распадов материнского ядра, а N_{if} — число распадов, сопровождающихся запаздывающим делением.

Одно из приближений, часто используемых для теоретических расчетов, представлено формулой (см. [6,7]):

$$P_{DF} = \frac{\int_0^{Q_i} W_i(Q_i - E) \frac{\Gamma_f}{\Gamma_{tot}}(E) dE}{\int_0^{Q_i} W_i(Q_i - E) dE}. \quad (1)$$

Здесь $W_i(Q_i - E)$ — функция вероятности перехода ($i \in \text{ЕС}$ при K -захвате и $i \in \beta$ при β -распаде материнского ядра), $\Gamma_f/\Gamma_{\text{tot}}(E)$ — отношение делительной ширины возбужденных уровней дочернего ядра к полной ширине распада этих состояний, E — энергия возбуждения дочернего ядра, а Q_i определяется как $Q_{\text{ЕС}}$ ($i \in \text{ЕС}$) или $Q_{\beta^\pm}$ ($i \in \beta^\pm$). При малой энергии возбуждения считается, что деление и испускание γ -квантов — это основные каналы снятия возбуждения.

Обычно предполагают, что другие возможные каналы распада не играют существенной роли и $\Gamma_f/\Gamma_{\text{tot}}(E) = [\Gamma_f/(\Gamma_f + \Gamma_\gamma)](E)$, где Γ_f и Γ_γ — делительные и радиационные ширины соответственно. В процессе β^- -запаздывающего деления в некоторых случаях следует принимать во внимание возможность испускания нейтронов.

Функция вероятности перехода на уровень E , $W_i(E)$, может быть представлена как произведение функции Ферми $f(Q_i - E, Z)$ и силовой функции β -распада $S_\beta(E)$:

$$W_i(Q_i - E) \approx f(Q_i - E, Z)S_\beta(E). \quad (2)$$

Функция Ферми $f(Q_i - E, Z)$ отражает кинематику бета-распада и может быть выражена как $f = (Q_{\text{ЕС}} - E)^2$ в случае K -захвата (запись функции Ферми в такой форме предполагает отсутствие канала β^+ -распада) и $(Q_\beta - E)^5$ для β -распада.

Силовая функция $S_\beta(E)$ представляет собой распределение по энергии возбуждения квадратов матричных элементов β -распадного типа — фермиевского, теллеровского и др. При низких энергиях возбуждения, не превосходящих величины энергии β -распада Q_β , силовая функция определяет характер и период полураспада ядра.

Не вполне ясен вопрос о силовой функции β -переходов. Величина $S_\beta(E)$ рассчитывается на основе различных моделей. В статистической модели

1) для качественных расчетов S_β предполагают постоянной, выше специфической энергии отсечки C , т.е. $S_\beta(E) = \text{const}$, $E > C$; а когда $E < C$, $S_\beta(E) = 0$;

2) полагают, что $S_\beta(E) \sim \rho(E)$, где $\rho(E)$ — плотность уровней дочернего ядра.

В резонансных нестатистических моделях $S_\beta(E)$ вычисляется на основе гросс-теории β -распада. Для нестатистического подхода зависимость $S_\beta(E)$ от энергии определяется структурой ядра и изовекторными частями эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия.

Если вероятность β -распада содержит вклад нескольких уровней, а запаздывающее деление идет с одного уровня с энергией E^* , то

$$P_{\beta\text{DF}} = \frac{\Gamma_f(E^*)S_\beta(E^*)f(Z, Q_\beta - E^*)}{\Gamma_{\text{tot}}(E^*)\sum S_\beta(E_i)f_i(Z, Q_\beta - E_i)}. \quad (3)$$

Клапдор и др. [8] показали существенное влияние на расчет характеристик запаздывающего деления низколежащих структур силовой функции β -распада.

Зависимость P_{DF} от энергии заселения уровней и структуры барьера деления обусловлена преимущественно делительной шириной, входящей в выражение $[\Gamma_f/(\Gamma_f + \Gamma_\gamma)](E)$. Величины Γ_f , Γ_γ — делительная и радиационная ширины соответственно. Радиационную ширину $\Gamma_\gamma(E)$ оценивают [6] по вероятностям γ -переходов P_γ :

$$\Gamma_\gamma = \frac{P_\gamma}{2\pi\rho} = \frac{C_\gamma \Theta^4 \exp(E/\Theta)}{2\pi\rho}. \quad (4)$$

Здесь ρ — плотность ядерных уровней, C_γ — постоянная, равная $9,7 \cdot 10^{-7} \text{ МэВ}^{-4}$, и Θ — температура ядра 0,5–0,6 МэВ.

Делительная ширина $\Gamma_f(E) = \frac{P_f(E)}{2\pi\rho}$, очевидно, зависит от проницаемости барьера деления P_f . Проницаемость барьеров тяжелых ядер рассчитывается по упрощенной формуле $P_f \approx P_A(E)R_B$, где $P_A(E)$ — проницаемость через внутренний барьер, а R_B — коэффициент прохождения, определяющий процесс деления ядра из нижнего состояния второй потенциальной ямы. Такое предположение требует, чтобы деление не происходило до тех пор, пока ядро не окажется в состоянии на нижнем уровне второй потенциальной ямы. В этом случае вычисление $P_f(E)$ значительно упрощается. Прохождение через внутренний барьер B_A сводится к задаче проникновения через параболический барьер на основе формализма Хилла и Уилера [9]:

$$P_A = \left\{ 1 + \exp \left[\frac{2\pi(B_f - E)}{\hbar\omega_f} \right] \right\}^{-1}, \quad (5)$$

где B_f — высота барьера и $\hbar\omega_f$ — энергия, определяющая его кривизну. Таким образом, делительная ширина может быть представлена как

$$\Gamma_f = \frac{R_B}{2\pi\rho} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{2\pi(B_f - E)}{\hbar\omega_f} \right] \right\}^{-1} \quad (6)$$

и

$$\frac{\Gamma_f}{\Gamma_f + \Gamma_\gamma}(E) \approx \frac{R_B \left\{ 1 + \exp \left[\frac{2\pi(B_f - E)}{\hbar\omega_f} \right] \right\}^{-1}}{C_\gamma \Theta^4 \exp(E/\Theta) + R_B \left\{ 1 + \exp \left[\frac{2\pi(B_f - E)}{\hbar\omega_f} \right] \right\}^{-1}}. \quad (7)$$

Анализ этой формулы выявляет сильную зависимость члена $\Gamma_f/(\Gamma_f + \Gamma_\gamma)$ от энергии распада и структуры барьера деления. В рамках сделанных предпо-

ложений можно записать простое уравнение для P_{EDF} — вероятности запаздывающего деления после электронного захвата (ECDF):

$$P_{\text{EDF}} = \frac{\int_C^{Q_{\text{EC}}} (Q_{\text{EC}} - E)^2 \frac{\Gamma_f}{\Gamma_f + \Gamma_\gamma}(E) dE}{\int_C^{Q_{\text{EC}}} (Q_{\text{EC}} - E)^2 dE}. \quad (8)$$

Здесь C — энергия отсечки, выше которой силовая функция S_β постоянна, а ниже предполагается равной нулю. В работе [10] величина C определена зависимостью $C = 26A^{-1/2}$ МэВ. Интеграл в знаменателе формулы (8):

$$\int_C^{Q_{\text{EC}}} (Q_{\text{EC}} - C)^2 dE = \frac{1}{3}(Q_{\text{EC}} - C)^3 = \frac{1}{3}(Q_{\text{EC}} - 26A^{-1/2})^3 \equiv [N_{\text{EC}}(A)]^{-1}, \quad (9)$$

где $N_{\text{EC}}(A)$ — величина нормировочной функции. Тогда формула (8) примет вид

$$P_{\text{EDF}} = N_{\text{EC}}(A) \int_C^{Q_{\text{EC}}} (Q_{\text{EC}} - E)^2 \frac{\Gamma_f}{\Gamma_\gamma + \Gamma_f} dE. \quad (10)$$

В то же время в случае β^- -распада $[N_\beta(A)]^{-1} \equiv \frac{1}{6}(Q_\beta - 26A^{-1/2})^6$.

Вероятность β -запаздывающего деления (βDF) качественно может быть представлена как

$$P_{\beta\text{DF}} \approx N_\beta(A) \int_C^{Q_\beta} (Q_\beta - E)^5 \frac{\Gamma_f}{\Gamma_\gamma + \Gamma_f}(E) dE. \quad (11)$$

Чтобы обнаружить запаздывающее деление в области $Z > 89$, где высоты барьеров лежат в интервале $4 \div 6$ МэВ, необходимо изучать ядра с Q_β такого же порядка величины. Запаздывающее деление в целом после электронного захвата происходит с большей вероятностью, чем после β^- -распада. Это следует из вида функции Ферми для этих распадов. Функция Ферми стремится к нулю в случае β^- -распада быстрее, чем в процессе электронного захвата. Поэтому исследовать запаздывающее деление после электронного захвата (ECDF) было бы проще, даже если бы не существовало известных трудностей синтеза нейтронообогащенных ядер. Следует отметить, что приведенные теоретические зависимости могут служить лишь для качественных оценок.

Проблемы, связанные с характером силовых функций, их резонансной структурой, в разных областях запаздывающего деления — для ядер с $Z > 89$, $N \sim 126$ или в окрестности $Z = 82$ — рассмотрены в обзорах [11,12].

Количественная модель должна включать также более детальное рассмотрение процесса прохождения через барьер деления, исключить упрощение, связанное с предположением об обязательном переходе на нижний уровень во второй потенциальной яме.

Условия, позволяющие экспериментально наблюдать запаздывающее деление, прежде всего выполняются для нечетно-нечетных нейтронодефицитных ядер.

Большая величина Q_β по сравнению с соседними ядрами, обусловленная нечетно-четным эффектом, приводит к тому, что Q_β и B_f сравнимы уже при относительно малом удалении от линии β -стабильности. Конкурирующий в материнских ядрах с K -захватом α -распад замедлен. Высокая энергия связи нейтрона B_n у дочернего четно-четного ядра позволяет не учитывать конкуренцию со стороны канала запаздывающих нейтронов. Плотность низколежащих уровней четно-четных дочерних ядер невелика. Последнее обстоятельство и более слабая зависимость функции Ферми от энергии при K -захвате благоприятствуют заселению высоколежащих уровней. Кроме того, делимость четно-четного дочернего ядра выше, чем у дочерних нечетных ядер.

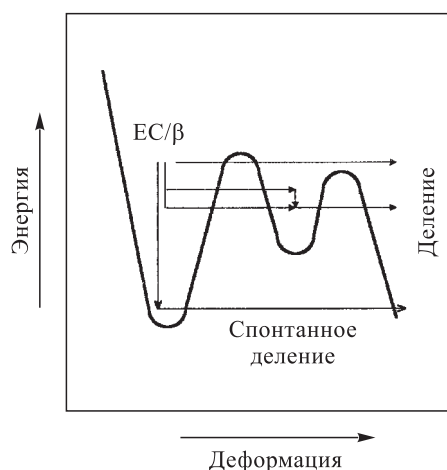


Рис. 1. Схема распада ядра в процессе запаздывающего деления

На рис.1 приведена схема процесса запаздывающего деления с обычным для тяжелых элементов двугорбым барьером. Указаны различные варианты переходов. Первоначально заселяются состояния в первой потенциальной яме дочернего ядра. Прямое заселение второй потенциальной ямы запрещено в связи с тем, что при этом необходима одновременная с β /ЕС-распадом существенная перестройка нуклонов ядра. Из первой потенциальной ямы ядро

может перейти в состояние с энергией E во второй яме и разделиться. На этих этапах весьма вероятно возвращение в основное состояние дочернего ядра.

Вероятность распада по каналу запаздывающего деления очень мала, ввиду конкурирующих с ним процессов. Так, величина вероятности запаздывающего деления $P_{DF} = N_{if}/N_i$ — отношение числа ЕС-распадов, сопутствующих запаздывающему делению N_{if} , к полному числу N_i ЕС/ β -распадов, в наиболее благоприятных случаях в области нейтронодефицитных ядер достигает всего $\sim 0,01$. Это приводит к следующему выводу: изучение таких ядер — сложная экспериментальная проблема.

2. ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Открытие запаздывающего деления. Запаздывающее деление впервые наблюдалось при облучении мишени ^{233}U ускоренными на циклотроне У-300 ионами ^{10}B и ^{11}B [1]. Эти эксперименты были специально подготовлены для поиска делящихся ядер в области с большим дефицитом нейтронов. Поэтому разработанная методика по тем временам отличалась высокой чувствительностью и позволяла регистрировать делящиеся ядра с эффективным сечением образования $(0,1 \div 1,0) \cdot 10^{-35} \text{ см}^2$ и периодами полураспада не менее 1 с. Наблюдение ядер со столь малыми сечениями обеспечивалось облучением мишени на внутреннем пучке тяжелых ионов циклотрона У-300. В этом случае достигалась высокая интенсивность тяжелых ионов ($\sim 100 \text{ мкА}$ ионов B^{+2} или Ne^{+4}), т.к. исключались фазовые потери на внешних орбитах классического циклотрона и системе вывода пучка. При этом с помощью передвижения мишени по радиусу магнитного полюса циклотрона можно было легко регулировать энергию ускоренного пучка.

Облучение проводилось на пробнике с наклонной мишенью, позволявшей реализовать высокие токи, а осколки деления регистрировались с помощью подвижных низкофоновых твердотельных трековых детекторов с эффективностью регистрации $0,90 \pm 0,05$. Наклон мишени по отношению к оси пучка составлял 12° (рис. 2; угол между осью пучка ускоренных ионов и нормалью к плоской поверхности мишени равен $\alpha = 78^\circ$). Таким образом, энергия пучка и облучаемое вещество распределялись по площади в 4,81 раз большей, чем при перпендикулярном расположении мишени. В результате простыми средствами удалось обеспечить охлаждение мишени. Другое преимущество наклонной мишени заключалось в торможении ядер отдачи, образующихся в ядерных реакциях, в тонком поверхностном слое вещества мишени. Очевидно, его толщина $d \approx R \cos \alpha$, где R — максимальный пробег ускоренных ионов в веществе мишени. В результате материал мишени не влиял на выход из него осколков деления. Мишень и экран над нею играли роль цилиндра

Фарадея. Мишень и охлаждающий контур были электрически изолированы. Эти меры позволили надежно измерять ток ионов (см. рис. 2).

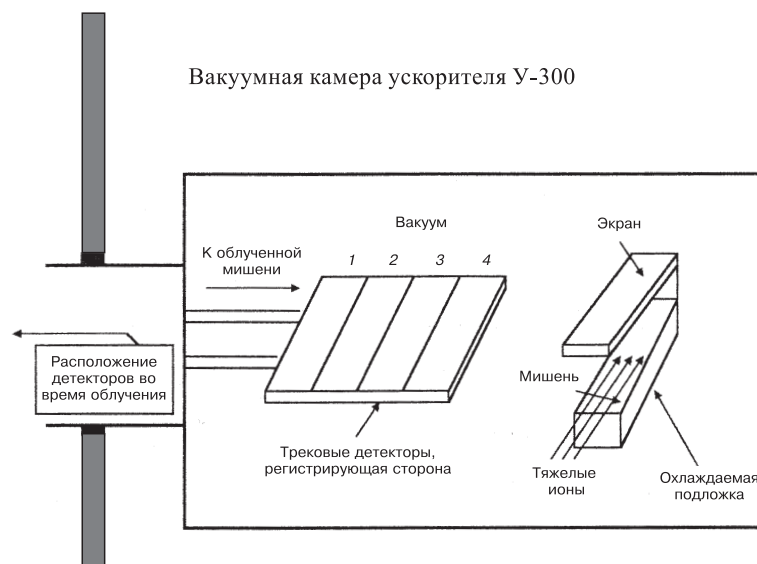


Рис. 2. Схема пробника с наклонной мишенью: 1 ÷ 4 — стеклянные трековые детекторы. Медная подложка охлаждается водой (система охлаждения не показана)

После облучения мишени заданным потоком ионов выключали пучок, и над мишенью автоматическая система последовательно устанавливала четыре твердотельных детектора на период, близкий к времени жизни исследуемого изотопа по отношению к K -захвату. К началу облучения мишени детекторная сборка перемещалась в камеру на достаточное расстояние от мишени, чтобы обеспечить защиту детекторов от рассеянных частиц и нейтронного фона. Затем процедура периодически повторялась.

Время переноса детекторов от защищающей камеры до мишени порядка 3–3,5 с. Применялась кассетная система установки детекторов, позволявшая заменять их за короткое время, что особенно важно при значительной активации мишени в экспериментах, когда интенсивность ускоренных тяжелых ионов обеспечивает регистрацию делящихся ядер с сечением образования до $\sim 1,0 \cdot 10^{-36} \text{ см}^2$.

В первых экспериментах легкий изотоп урана ^{233}U облучался ионами ^{10}B и ^{11}B . Интенсивность ускоренного пучка ионов бора достигала 10^{14} с^{-1} . При энергии ^{11}B большей 75 МэВ было зарегистрировано распределение осколков во времени, соответствующее минутным периодам полураспада. Кривая рас-

пада синтезированных нуклидов затем четко разделялась на две экспоненты с периодами полураспада (5 ± 1) с и $(2,6 \pm 0,2)$ мин. Изучался распад ядер только с $T_{1/2} = 2,6$ мин. Влияние короткоживущей компоненты исключалось путем задержки детекторов в камере на 33 с после выключения пучка. При этом число ионов бора в каждом цикле облучения равнялось $6 \cdot 10^{16}$, а их пробег в слое ^{233}U составлял $4,5 \text{ мг/см}^2$.

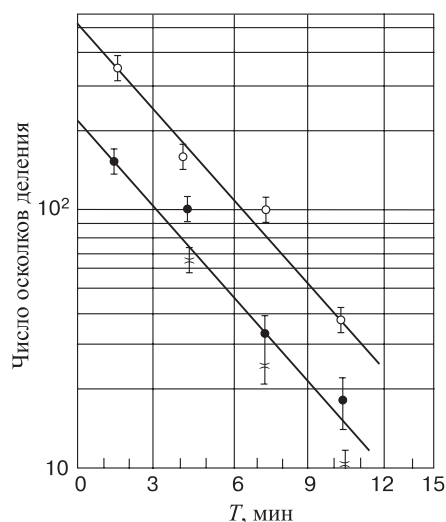


Рис. 3. Кривые распада $^{234}\text{Am} \rightarrow ^{234}\text{Pu} \rightarrow ff$ (осколки деления). Реакции $^{233}\text{U}(^{10}\text{B}, \alpha 5n)$ и $^{233}\text{U}(^{11}\text{B}, \alpha 6n)$. Светлые кружки — энергия иона ^{10}B $E = 60$ МэВ. Темные кружки — энергия ^{11}B $E = 75$ МэВ, крестики — энергия иона ^{11}B $E = 80$ МэВ

После обнаружения эффекта была измерена функция возбуждения реакции, ведущей к образованию делящихся нуклидов с периодом полураспада $T_{1/2} = 2,6$ мин. В этих измерениях использовалась тонкая мишень, так что максимальные потери энергии ионов ^{11}B в облучаемом материале не превышали 1 МэВ. Для каждой энергии ускоренных ионов, кроме измерения выхода делящихся ядер, снимались кривые их распада (рис. 3). По кривым распада можно было прийти к выводу, что в интервале энергии ионов бора от 75 до 83 МэВ в реакции $^{233}\text{U} + ^{11}\text{B}$ синтезируется один и тот же нуклид с $T_{1/2} = 2,6$ мин. Функция возбуждения реакции представлена на рис. 4. Расчет сечения образования делящегося продукта в интервале энергии, соответствующей его максимальному выходу, дает значение $2,0 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2$. При облучении ^{233}U ионами ^{10}B с энергией 60 МэВ также был обнаружен делящийся продукт примерно с таким же сечением образования и с периодом

полураспада $T_{1/2} = 2,6$ мин. В контрольных экспериментах облучалась изготовленная из ^{235}U толстая мишень ($4,5 \text{ мг/см}^2$) ионами ^{11}B с энергией 74 и 82 МэВ и ионами ^{10}B с энергией, равной 60 МэВ. Ионами ^{10}B с этой же энергией облучали ^{232}Th . Треки осколков делящихся ядер с периодами полураспада в минутном диапазоне зарегистрированы не были.

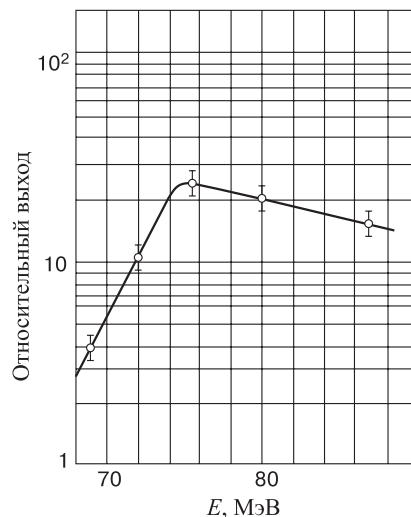


Рис. 4. Функция возбуждения реакции $^{233}\text{U}(^{11}\text{B}, \alpha 6n)^{234}\text{Am}$

Контрольные эксперименты подтвердили надежность полученных данных, ибо в них не наблюдали никакого постороннего фона, который мог бы повлиять на результаты экспериментов. Вместе с тем вид функции возбуждения реакции $^{233}\text{U} + ^{11}\text{B}$ не соответствовал форме испарительных реакций типа $^{233}\text{U}(^{11}\text{B}, xn)$, по кривой возбуждения которой можно было бы идентифицировать синтезированный нуклид. Функция возбуждения носила неопределенный характер, подобный тому, когда ядро испускает не только нейтроны, но и заряженные частицы.

Наиболее вероятное предположение состояло в следующем: наблюдаемые осколки деления — продукты ядер, рождающихся в реакциях типа $^{233}\text{U}(^{11}\text{B}, \alpha xn)$ и $^{233}\text{U}(^{10}\text{B}, \alpha xn)$. Таким образом, представлялось весьма вероятным, что испарительная реакция (НІ, xn) с $x = 5$ или 6 (НІ — тяжелые ионы), в которой бы синтезировались ядра с $T_{1/2} = 2,6$ мин, могла протекать на ионах бора при облучении мишени ^{230}Th .

Известно, что получить чистую мишень из ^{230}Th сложно, поэтому использовалась смесь окислов изотопов ^{230}Th и ^{232}Th . Для повышения прочности мишени в смесь добавлялись органические соединения и приготовленная масса наносилась на алюминиевую подложку тонкими слоями. При этом

органику выжигали после нанесения каждого слоя. Толщина мишени по изотопу ^{230}Th составляла 250 мкг/см^2 . Пробег ускоренных ионов в материале, эквивалентном чистому изотопу ^{230}Th , равнялся $1,2 \text{ мг/см}^2$. Максимальные потери в мишенном материале (с учетом изотопа ^{232}Th толщина мишени равна $2,4 \text{ мг/см}^2$) составляли $\sim 1,5 \text{ МэВ}$.

В процессе облучения мишени из «легкого» тория ускоренными ионами изотопов бора ^{10}B и ^{11}B в интервале энергий от 50 до 90 МэВ были зарегистрированы осколки деления ядра, распадающегося с периодом полураспада 2,6 мин. Форма функции возбуждения соответствовала испарительным реакциям с испусканием из составного ядра шести и семи нейтронов (для ^{10}B и ^{11}B соответственно). Положение максимумов функций возбуждения ядерных реакций $^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 6n)^{234}\text{Am}$ и $^{230}\text{Th}(^{11}\text{B}, 7n)^{234}\text{Am}$ найдены экспериментально. Максимумы функций возбуждения при энергиях ионов бора 70,5 МэВ (^{10}B) и 82,0 МэВ (^{11}B) совпадали с их расчетными значениями, когда температуру составного ядра T рассчитывали по систематике $T = f(A)$ [13]. Для составных ядер в приведенных выше реакциях $T = 1,5 \text{ МэВ}$.

На этом основании делящиеся ядра с периодом полураспада 2,6 мин идентифицированы как продукты распада изотопа америция с массовым числом 234.

Присутствие ^{232}Th в материале мишени не влияло на выход делящегося продукта с $T_{1/2} = 2,6 \text{ мин}$, как было показано контрольными экспериментами, в которых мишень ^{232}Th толщиной 5 мг/см^2 облучали ионами бора с энергиями 70,5 и 82,0 МэВ. При этом делящиеся продукты с минутными периодами полураспада не наблюдались. Фон мог возникать только за счет деления следов урана, содержащегося в стеклянных твердотельных детекторах. Вносимая этим погрешность в измерения не превышала 5%.

Сечения образования ядер ^{234}Am , сопровождающихся делением в реакциях $^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 6n)^{234}\text{Am}$ и $^{230}\text{Th}(^{11}\text{B}, 7n)^{234}\text{Am}$, рассчитанные на основе экспериментальных данных, равны, соответственно, $(5,7 \pm 0,5)10^{-34}$ и $(5,4 \pm 0,5)10^{-34} \text{ см}^2$ в максимумах функций возбуждения. В работе, опубликованной в 1967 г. (см.[3]), авторы пришли к выводу: «*Не исключена возможность запаздывающего деления, если при K-захвате ^{234}Am образуется ядро ^{234}Pu с большой энергией возбуждения*».

Когда энергия ускоренных ионов ^{10}B превосходила 82 МэВ, наблюдались делящиеся ядра с периодом полураспада 1,40 мин. Максимум функции возбуждения этого излучателя был сдвинут на 12 МэВ в сторону больших энергий относительно максимума функции возбуждения $^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 6n)$. Влияние распада этого изотопа было учтено при расчете сечения образования делящегося продукта в процессе синтеза ^{234}Am .

Обнаруженное деление ядер с периодом полураспада $T_{1/2} = 1,40 \text{ мин}$ изучили в специально поставленных экспериментах [2]. Время облучения мишени, задержку до начала регистрации осколков деления и время нахожде-

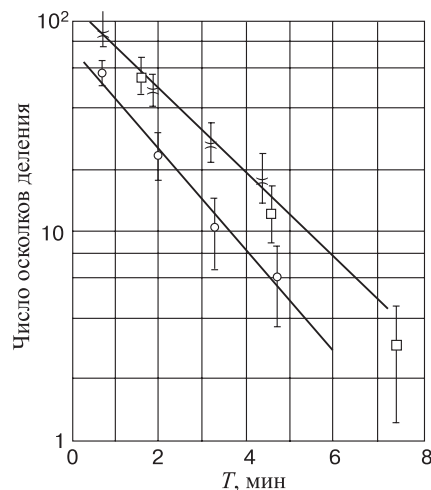
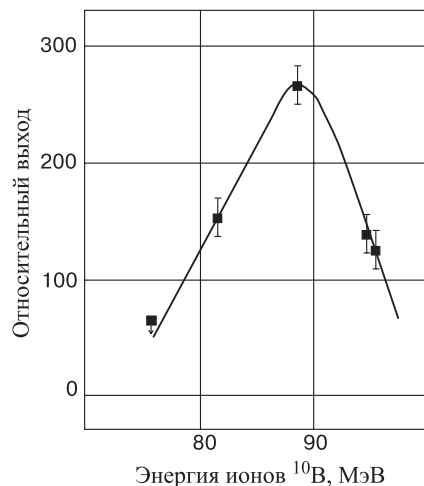


Рис. 5. Кривые распада изотопа ^{232}Am , полученные в результате регистрации осколков запаздывающего деления реакции $^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 8n)^{232}\text{Am}$ при различных энергиях ионов ^{10}B : крестики и светлые квадратики — 88,5 МэВ; светлые кружки — 82,0 МэВ

ния детектора над мишенью выбирали оптимальным образом для регистрации осколков деления продукта с периодом полураспада 1,40 мин. Полная эффективность счета осколков деления составляла около 15% (с учетом потерь на распад во время облучения и задержки). Кривые распада приведены на рис. 5. На рис. 6 представлена функция возбуждения делящегося нуклида с периодом полураспада 1,40 мин при нормировке числа осколков в каждой точке на $2,53 \cdot 10^{17}$ ионов ^{10}B . Форма функции возбуждения — колоколообразная, типичная для (HI, xn)-реакции. Из положения максимума функции возбуждения и характеризующей ее на уровне 0,5 полуширины следовало, что наблюдались осколки деления продукта реакции $^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 8n)^{232}\text{Am}$. Таким образом, делящийся нуклид с периодом полураспада 1,40 мин был идентифицирован как продукт изотопа ^{232}Am . Измеренное сечение образования ^{232}Am в максимуме функции возбуждения равно $(2,3 \pm 0,4)10^{-33} \text{ см}^2$.

В вышедшей в 1967 г. работе [2] авторы пришли к заключению: «Ядро ^{232}Am с периодом полураспада 1,40 мин претерпевает К-захват, что возможно, если исходить из ожидаемой энергии электронного захвата. При распаде на возбужденные уровни изотопа ^{232}Pu , близкие к высоте барьера деления, происходит деление из этих состояний».

Анализ периодов полураспада и энергий распада по отношению к электронному захвату и α -распаду легких изотопов Np и экстраполяция их значений на неизвестные нейтронодефицитные ядра нептуния привели к заключению о возможности наблюдения запаздывающего деления изотопов Np.

Рис. 6. Функция возбуждения реакции $^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 8n)^{232}\text{Am}$

Для проверки этого предположения висмутовую наклонную мишень с эффективной толщиной $9,5 \text{ мг/см}^2$ облучали ускоренными ионами ^{22}Ne с интенсивностью 10^{14} с^{-1} . Сеансы облучения длились 4 мин, а затем, после выключения циклотронного пучка, над облученным веществом последовательно через равные одной минуте интервалы устанавливали твердотельные детекторы. В результате удалось обнаружить в процессе облучения висмутовой мишени ускоренными до энергии 110 МэВ ионами ^{22}Ne делящийся изотоп с периодом полураспада $(60 \pm 5) \text{ с}$ [4].

На рис. 7 изображена кривая распада, полученная в двух независимых экспериментах. Для регистрации осколков деления также использовали твердотельные трековые детекторы. Функция возбуждения делящегося продукта получена, когда облучали тонкую висмутовую мишень ионами ^{22}Ne . Пробег иона в мишени равнялся $2,10 \text{ мг/см}^2$. Фон, возникавший из-за деления примесей урана в детекторах, контролировали по числу треков на обратных сторонах детекторов, недоступных осколкам деления ядерной реакции $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, xn)$.

Форма и положение максимума функции возбуждения нуклида с периодом полураспада $T_{1/2} = 60 \text{ с}$ (рис. 8) соответствовали ядерной реакции, протекающей через образование составного ядра с последующим испарением трех нейтронов.

Синтез делящихся изотопов в реакциях $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, p2n)$ и $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, \alpha 3n)$ исключали из рассмотрения путем контрольных экспериментов: облучали свинцовую мишень ускоренными ядрами неона. В реак-

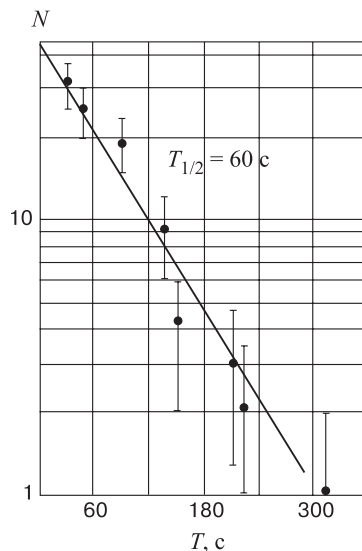
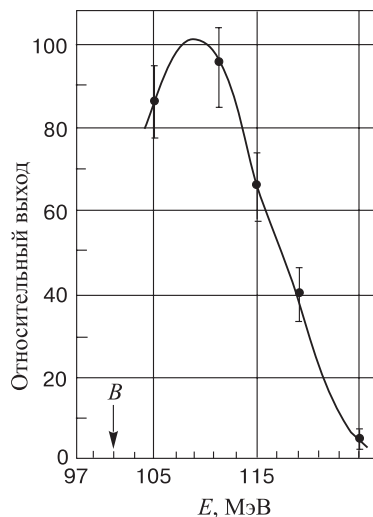


Рис. 7. Кривая распада делящихся продуктов реакции $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, 3n)^{228}\text{Np}$

циях $^{208}\text{Pb}(^{22}\text{Ne}, 3n)$ и $^{208}\text{Pb}(^{22}\text{Ne}, 4n)$ делящиеся продукты с периодами полураспада в минутной области не наблюдались в широком интервале энергий ^{22}Ne . Таким образом, реакции $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, p2n)$ и $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, p3n)$ не должны сопровождаться осколками деления. Не было зарегистрировано деления и при облучении ^{209}Bi ионами ^{18}O с энергией, достаточной для протекания реакции $^{209}\text{Bi}(^{18}\text{O}, 3n)$, что исключало возможность появления делящихся продуктов в реакции $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, \alpha 3n)$. Совокупность проведенных экспериментов позволила идентифицировать изотоп, сопровождаемый делением с периодом полураспада 60 с, как ^{228}Np . Сечение образования делящихся ядер в максимуме функции возбуждения реакции $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, 3n)$ равно $0,45 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2$. Все синтезированные нами нейтронодефицитные ядра нечетно-нечетные (^{228}Np , $^{232,234}\text{Am}$). Это обстоятельство, как упоминалось выше, благоприятствует протеканию процесса запаздывающего деления.

Позднее одним из авторов обзора в работе [14] проведен тщательный анализ рассмотренных выше экспериментов, в результате которого однозначно установлено, что наблюдаемые осколочные активности обусловлены делением из возбужденного состояния дочерних ядер, образовавшихся после ЕС-распада материнских ядер $^{232,234}\text{Am}$ и ^{228}Np . Автором также показано, что энергии ЕС-захвата $Q_{\text{ЕС}}$ ^{228}Np и ^{232}Am больше барьеров деления B_f дочерних ядер ^{228}U и ^{232}Pu , а у ядра ^{234}Am величина $Q_{\text{ЕС}}$ сравнима с B_f ядра ^{234}Pu . Здесь же оценены вероятности $P_{\text{ДФ}}$ для $^{228}\text{Np} \sim 10^{-3}$ и

Рис. 8. Функция возбуждения реакции $^{209}\text{Bi}(^{22}\text{Ne}, 3n)^{228}\text{Np}$

$^{232}\text{Am} \sim 10^{-2}$, получено соотношение между $P_{\text{DF}2}$ для ^{232}Am и $P_{\text{DF}4}$ для ^{234}Am : $P_{\text{DF}2} > P_{\text{DF}4}$.

Таким образом, на пучках тяжелых ионов нами были синтезированы материнские ядра ^{228}Np , ^{232}Am , ^{234}Am , дочерние продукты которых, возникающие после ЕС-захвата, ^{238}U , ^{232}Pu и ^{234}Pu испытывают деление из возбужденного состояния.

Минутные периоды полураспада материнских ядер по отношению к ЕС-захвату и относительно большие сечения образования сделали их основными объектами дальнейшего изучения запаздывающего деления нейтронодефицитных ядер, позволившими использовать радиохимические методы и получить прямое подтверждение, что нуклиды с $T_{1/2}$ порядка минут испытывают именно запаздывающее деление, хотя к этому времени существовавшие косвенные данные не вызывали сомнения в характере процесса [15–17]. Надо отметить, что в работе Соммервиля и др. [18], вышедшей в 1977 г., где были частично проверены наши эксперименты (подтверждено существование 2,6 мин активности и минутного изотопа ^{228}Np), высказывалось сомнение по поводу предложенной нами интерпретации наблюдаемого деления как запаздывающей моды, но опыты по поиску и идентификации запаздывающего деления ядер с $N < 126$ окончательно сняли вопрос о характере протекающих процессов, приводящих к делению продуктов нейтронодефицитных ядер.

2.2. Синтез и изучение нуклидов ^{234}Am и ^{232}Am в ядерных реакциях на ускоренных пучках α -частиц. Запаздывающее деление ядер ^{234}Am и

^{232}Am детально исследовали в ядерных реакциях на ускоренных α -частицах. Это связано с относительно большими периодами полураспада этих изотопов, открывающими путь для применения сложных методик, включая химическое разделение элементов, давшее возможность в значительной степени очистить америций от γ -активностей, затрудняющих регистрацию рентгеновского излучения, сопровождающего K -захват в дочерних ядрах плутония. Химическая очистка и разделение элементов стали существенным фактором, позволившим измерить совпадения осколков деления с рентгеновским излучением дочерних ядер, а также определить $\sigma_{\text{ЕС}}$ — сечение образования изотопов, испытывающих K -захват, и $P_{\text{ДФ}}$ — вероятность запаздывающего деления.

Хабс и др. [19] первыми синтезировали ^{232}Am на пучках α -частиц с энергией 104 МэВ в ядерной реакции $^{237}\text{Np}(\alpha, 9n)^{232}\text{Am}$. В процессе облучения мишени толщиной 100 мкг/см² из нее выбивались ядра отдачи и тормозились в тонкой графитовой пленке (100 мкг/см²), расположенной за мишенью на расстоянии 5 мм. После выключения пучка ускорителя пленку-сборник посредством пневмопочты переносили в зазор между двумя поверхностно-барьерными детекторами, удаленными на расстояние 60 см от мишени. Хабс первым применил такой метод регистрации в исследованиях запаздывающего деления.

Малая толщина графитовой пленки позволила регистрировать осколки деления и α -частицы продуктов ядерной реакции. Измерена кривая распада делящихся ядер, идентифицированных как продукт превращений ^{232}Am . Влияние распада других ядер, которые могли бы образоваться в параллельных реакциях, на полученный результат исключалось по ряду соображений. Так, если предположить, что наблюдавшийся распад связан с синтезом ядер ^{228}Np , то из полученных экспериментальных данных вероятность запаздывающего деления этого ядра окажется на несколько порядков выше, чем определенная в работах [1,18]. Не может повлиять на результаты и синтез ^{231}Pu . Если бы источником осколков был изотоп ^{231}Pu , то вероятность его запаздывающего деления достигала $P_{\text{ДФ}} \sim 8\%$, из чего следовало, что его период полураспада по отношению к спонтанному делению составляет $\sim 10^3$ мин. Последнее обстоятельство противоречит известным значениям периодов полураспада соседних изотопов, характерная величина для которых $T_{1/2} \sim 10^{10}$ лет. Другие ядра исключены на основе анализа результатов работы [3].

Характеристики α -распада изотопа ^{232}Am были измерены по совпадению α -частиц этого ядра с α -распадом дочерних ядер, периоды полураспада которых лежат в микросекундном диапазоне. Отношение вероятностей α -распада и ЕС-распада было оценено с точностью до 50%. Сечение $\sigma_{\text{ЕС}} = (0,4 \pm 0,7) \cdot 10^{-30}$ см² вычислено по данным измерения α -активных ядер и сечению образования ^{232}Am . Расхождение между значениями периодов полураспада ^{232}Am и измеренными в реакциях на тяжелых ионах объясняется малой статистикой и разным характером фона в экспериментах на пучках тя-

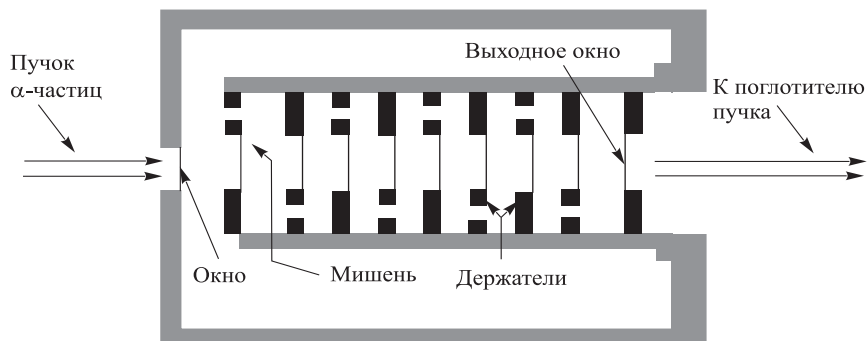


Рис. 9. Мультимишенная сборка. Показано 9 мишеней, установленных по оси пучка облучающих частиц за бериллиевым входным окном (в реальных экспериментах их число достигало 23). Поток гелия с аэрозолями KCl, поглотившими заторможенные в гелии ядра отдачи, проходит через объемы за каждой мишенью и переносит продукты синтеза к сборникам либо на диск (см. рис. 10), либо в химическую лабораторию

желых ионов и α-частиц. Впрочем, различие лежит в пределах погрешностей экспериментов.

Серьезным продвижением в исследовании запаздывающего деления стала разработка Холлом и др. методики, объединившей быстрый перенос продуктов ядерных реакций потоком аэрозолей в гелиевой среде [20,21] и мультимишенную сборку (впервые использована в работах Гангрского с сотр. [22]). Мультимишенная сборка с переносом продуктов ядерных реакций аэрозолями в гелиевой среде (ММСП) (см. рис. 9) использована Холлом и др. [7,20] для всестороннего изучения запаздывающего деления, сопровождающего материнские ядра ^{234}Am и ^{232}Am .

Ядра ^{234}Am синтезированы на ускоренных пучках α-частиц 88-дюймового циклотрона в Лаборатории им. Лоуренса в Беркли [20].

Обычно недостаток исследований на пучках дейтронов, ^3H , α-частиц, когда ядра-продукты собираются на сборник, заключается в необходимости облучения достаточно тонкой мишени, такой, чтобы длина свободного пробега синтезируемого ядра с малым импульсом отдачи, полученным от легкой частицы, превосходила толщину мишенного слоя. Применение ММСП этот недостаток устраняет и позволяет получить весьма высокий выход изотопов америция на пучке ускоренных α-частиц. Достигается это установкой вдоль оси ускоренного пучка α-частиц многих мишеней, с тонким слоем облучаемого вещества на каждой. Для синтеза ^{234}Am и ^{232}Am на пучках ускоренных ионов гелия наиболее подходит изотоп ^{237}Np . Он и послужил материалом, из которого приготовили для первых экспериментов 12 мишеней на молибденовой подложке толщиной 2,5 мкм с содержанием нептуния от 150 до 250 мкг. Площадь каждой мишени равна 1,23 см². Измеренные толщины мишеней

лежали в интервале от 125 до 200 мкг/см². Мишени устанавливались последовательно вдоль оси пучка на расстоянии ~ 1 см друг от друга. Фольга из бериллия толщиной 25 мкм служила входной, и другая такая же фольга играла роль вакуумного окна мишенной системы. Первые опыты показали, что молибденовые подложки сильно активируются, и их заменили бериллиевыми. При бомбардировке изотопа ^{237}Np ускоренными α -частицами интенсивность осколков запаздывающего деления, при прочих равных условиях, пропорциональна числу одновременно облучаемых мишеней. Ускоренная α -частица должна проходить тонкую мишень с малой потерей энергии. В этом случае во всех мишенях будут протекать идентичные ядерные реакции. Кроме того, если в одной из них происходит ядерная реакция с тяжелым ядром, ее продукт будет обладать достаточным импульсом, чтобы покинуть тонкий мишенный слой. В последующих опытах Холла одновременно облучали до 23 мишеней.

Ядра отдачи тормозились в гелии и их захватывали аэрозоли KCl. Из объема за каждой мишенью поток гелия увлекал аэрозоли к капиллярной хлорвиниловой трубке и переносил продукты реакций либо на пленку-сборник, закрепленную на вращающемся диске, либо на приемную фольгу в химическую лабораторию.

Кроме эффективного использования пучка α -частиц, ММСП обладает и другим существенным преимуществом — мишени расположены близко друг к другу, и вылетающие из них осколки деления ядер поглощаются в мишенях. В результате переносимые к детекторам аэрозоли не загрязняются осколками деления.

Для измерений характера деления $^{234}\text{Am} \rightarrow ^{234}\text{Pu} \rightarrow ff$ аэрозоли с продуктами ядерных реакций транспортировали на расстояние ~ 5 м и собирали их на полипропиленовую пленку-сборник толщиной ~ 40 мкг/см², расположенную на периферии диска. Диск перемещался с остановками через каждые 4, 5°, и пленка-сборник с продуктами ядерных реакций оказывалась между двумя кремниевыми поверхностно-барьерными детекторами (КПБД), расположенными над и под плоскостью диска (см. рис. 10). Всего вдоль диска устанавливалось шесть пар таких детекторов. На диске имелось 80 пленок-сборников. В случае изучения ядер ^{234}Am время экспозиции равнялось 2,5 мин на всех измерительных позициях. Каждая пленка-сборник занимала шесть позиций между каждой парой детекторов. Регистрировались осколки деления и α -частицы. Эффективность регистрации совпадающих осколков деления равна 60%. Такой же была эффективность регистрации α -частиц.

Первое положение пленки-сборника — перед соплом, подающим на нее аэрозоли из ММСП. Из этого положения сборник переходит на первую позицию счета между двумя КПБД. Только здесь регистрация α -частиц задерживается на 12 с, чтобы избежать фона от продуктов реакции на подложке мишени (осколки регистрируются непрерывно). Каждый сборник последова-

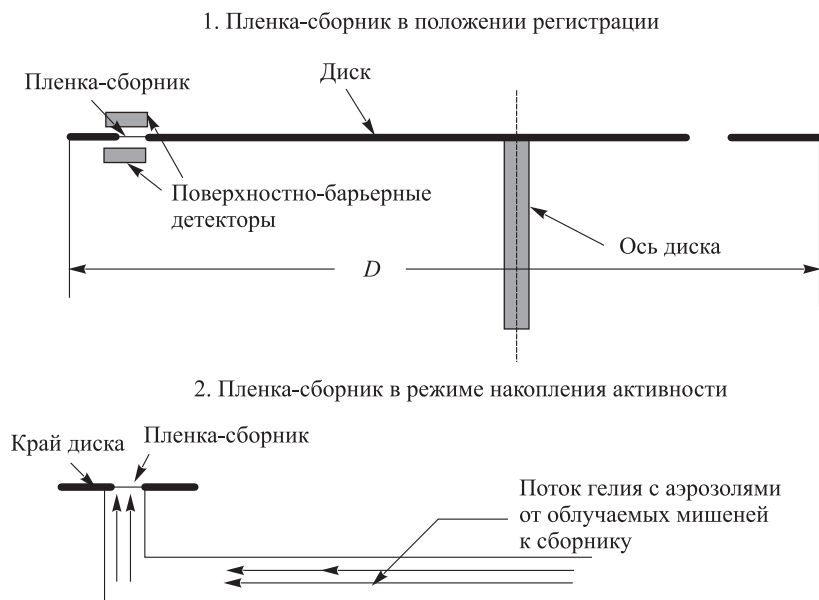


Рис. 10. На периферии диска находятся 80 пленок-сборников аэрозолей с продуктами реакций и шесть стоящих напротив друг друга пар поверхностно-барьерных детекторов, между которыми поворотом диска устанавливаются пленки-сборники с изучаемой активностью, захваченной аэрозолями

тельно проходит все шесть позиций счета, при этом измерения излучений ведутся на шести сборниках одновременно. После шестой позиции их активность не измеряют. Таким образом, на одном сборнике накапливается активность, а на шести других идет регистрация. Разрешение по энергии α -частиц составляет 40 кэВ. После полного оборота диска, примерно через 3 ч 20 мин, его заменяли, тем самым исключая фон от накопившихся долгоживущих спонтанно делящихся активностей, который мог бы внести погрешности в последующие измерения. Во всех экспериментах зарегистрировали 1188 совпадающих пар осколков деления. Период полураспада по этим данным был определен $T_{1/2} = (2,32 \pm 0,08)$ мин. Это значение практически не отличается от ранее измеренного $(2,6 \pm 0,2)$ мин, если принять во внимание погрешности измерений [1].

На основании анализа кривой распада оценивалось наблюдаемое сечение деления в реакции $^{237}\text{Np}(\alpha, 7n)$. Если принять, что толщина каждой мишени равна 75 мкг/см^2 , а эффективность аэрозольной системы сбора 100%, то это сечение $\sim 0,2 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2$.

Для изотопа ^{232}Am использовали практически ту же методику [7]. Период полураспада $T_{1/2}$ осколочной активности получили при облучении ми-

шени ^{237}Np α -частицами с энергией 99 МэВ. В процессе регистрации осколков запаздывающего деления $^{232}\text{Am} \rightarrow ^{232}\text{Pu} \rightarrow ff$ зафиксировали 2201 совпадение. Период полураспада ^{232}Am равен $(1,31 \pm 0,04)$ мин, в согласии с полученными ранее результатами в первых работах (см., напр., [3]), и существенно отличается от значения, приведенного Хабсом и др. [19]. На рис. 11 представлена кривая распада. Сечение образования делящегося ^{232}Pu по измерениям Холла равно $\sim 2,5 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2$.

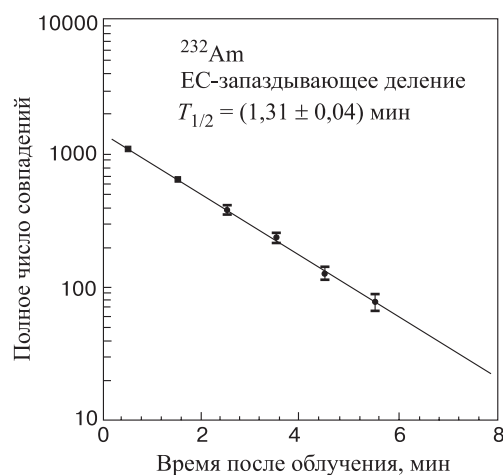


Рис. 11. Кривая распада $^{232}\text{Am} \rightarrow ^{232}\text{Pu} \rightarrow ff$, построенная по числу зарегистрированных совпадений осколков деления. Использовалась установка, приведенная на рис. 10. В каждой позиции между кремниевыми поверхностно-барьерными детекторами сборник находился одну минуту

В химической лаборатории использовались две методики разделения продуктов ядерных реакций. Первая процедура предназначалась для определения принадлежности источника делящегося продукта в реакции $^{237}\text{Np}(\alpha, 7n)$ или $^{237}\text{Np}(\alpha, 9n)$ к элементу с данным атомным номером, а именно к америцию. Так как атомный номер всех продуктов этой реакции $Z \geq 95$, то америций достаточно отделить только от актиноидов с $Z < 95$. Америций — единственный трехвалентный актиноид, образующийся в реакциях $^{237}\text{Np}(\alpha, xn)$, и простая колонка с анионитом отделяет его от актиноидов с меньшими атомными номерами. Очистка от продуктов деления для идентификации атомного номера не требуется.

Вторая операция применялась с целью очистки америция от осколков деления, фон от которых мог бы затруднить регистрацию рентгеновского излучения, возникающего в ядре дочернего плутония в процессе заселения осно-

бодившейся вакансии K -электрона при трансформации материнского ядра в дочернее.

Измерение рентгеновского излучения в совпадении с осколками запаздывающего деления позволяет экспериментально определить вероятность запаздывающего деления P_{DF} , и главный положительный результат такого эксперимента — прямое доказательство протекания именно процесса запаздывающего деления.

2.3. Идентификация атомного номера элемента. В данном разделе рассмотрена методика радиохимической идентификации америциевой фракции, содержащей изотопы $^{232,234}\text{Am}$ — предшественники запаздывающего деления [7,20]. Измерены их периоды полураспада и сечения образования.

Собранные в течение 3 мин продукты ядерных реакций, в процессе облучения мишени ^{237}Np α -частицами с энергией 75 МэВ, разделялись на ионно-обменных колонках. В америциевой фракции наблюдались 27 делений, а в нептуниев-плутониевой — только одно. Последнее согласовывалось с возможным загрязнением нептуниев-плутониевой фракции хвостами америциевой, содержащей изотоп ^{234}Am . (Контрольные опыты дали величину взаимного загрязнения фракций $\sim 2\%$.) Химические процедуры занимали всего 90 с.

В америциевой фракции регистрировалось α -излучение с энергией 6,46 МэВ. Франций, радий и актиний, лантаноиды при разделении на ионно-обменных типах смол следуют за америцием. Однако эти элементы (наблюдались в α -спектрах) образуются в ядерных реакциях при облучении α -частицами мишени ^{237}Np в ничтожно малых количествах, а ядра лантаноидов не делятся. Поэтому осколки могли быть только продуктом запаздывающего деления $^{234}\text{Am} \rightarrow ^{234}\text{Pu} \rightarrow ff$.

2.4. Измерение совпадений осколков запаздывающего деления и рентгеновских квантов K -захвата. Временные корреляции между рентгеновским излучением, сопровождающим K -захват в ядрах ^{234}Am и ^{232}Am , и осколками последующего запаздывающего деления ^{234}Pu и ^{232}Pu измеряли по активности на сборниках аэрозолей без стадии химического разделения [7,20,23]. Танталовую фольгу с аэрозолями, содержащими изучаемую активность, и установленный перед ней КПБД площадью 300 мм² помещали между двумя германиевыми детекторами γ -излучения. Измерительная установка включала в себя также γ -детектор NaI(Tl), позволявший добиться лучшего временного разрешения (см. рис. 12). Для калибровки служило рентгеновское K -излучение кюрия в совпадении с α -частицами материнского ядра ^{249}Cf . Эффективность регистрации рентгеновского излучения в плутониевой области оценили равной 9%. Измерения совпадений мгновенных γ -квантов с осколками деления ^{252}Cf позволили определить полную эффективность детектирования K -излучения ^{232}Pu в процессе запаздывающего деления ^{232}Am . Эта величина оказалась равной $\sim 12\%$.

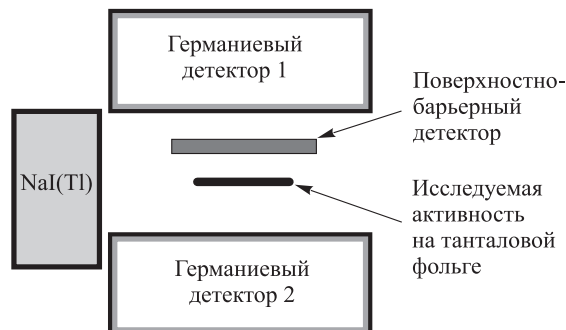


Рис. 12. Положение детекторов в установке регистрации корреляции осколков деления и рентгеновского излучения в процессе $^{234}\text{Am} \rightarrow ^{234}\text{Pu} \rightarrow f f$

На акт деления ядер с малой энергией возбуждения в области америций — калифорний осколки излучают около 10 γ -квантов [24]. Возникает высокая нагрузка детекторов γ -излучением. Ввиду наложения импульсов рентгеновского и мгновенного γ -излучений осколков часть рентгеновских квантов ^{234}Pu или ^{232}Pu не попадает в фотопик рентгеновского излучения. От наложений в значительной степени можно избавиться, уменьшив число регистрируемых γ -квантов. Однако при этом падает эффективность регистрации рентгеновского излучения и, как следствие, степень наблюдения корреляции. В конечном итоге удалось оптимизировать процесс регистрации корреляций рентгеновского деления и рентгеновских квантов. Расстояние между γ -детекторами и фольгой с активностью установили таким, чтобы уровень необнаруженных квантов рентгеновского излучения из-за совпадений с мгновенным излучением осколков деления минимизировать. В процессе измерения совпадений мгновенных γ -квантов с осколками спонтанного деления ^{252}Cf расстояние между γ -детекторами и мишенью с ^{252}Cf подбирали оптимальным для регистрации, так как числа мгновенных γ -квантов, рождающихся на одно деление америция или калифорния, практически совпадают. Уровень незарегистрированных рентгеновских квантов составлял не более 50%. При этом каждый детектор охватывал телесный угол, равный $\sim 6,7\%$ от 4π .

С целью изучения совпадений рентгеновских лучей и осколков деления изотопа ^{234}Pu на сборниках в течение 4 мин с помощью газовой струи накапливали активность продуктов реакции $^{237}\text{Np} + ^4\text{He}$ при энергии бомбардирующих α -частиц, соответствующей функции возбуждения реакции $^{237}\text{Np}(\alpha, 7n)$. Затем активность помещали в измерительную камеру.

Скорость счета γ -квантов $\sim 10^3 \text{ с}^{-1}$. Вероятность случайных совпадений осколков деления с γ -квантами менее 0,10%, так как ширина временного окна невелика. В дальнейшем ее уменьшили до 0,01%. На рис. 13 представ-

лены рентгеновские кванты и γ -спектры событий совпадения с сигналами от осколков деления.

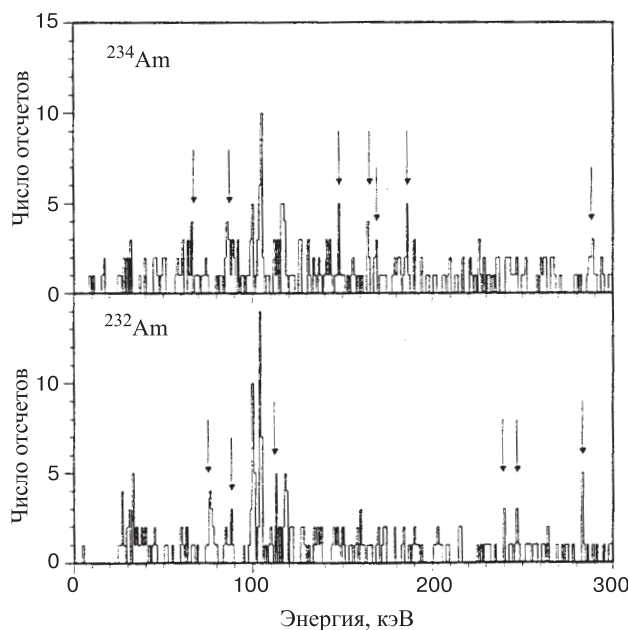


Рис. 13. Спектры рентгеновского и γ -излучения в совпадении с осколками деления ECDF ^{232}Am и ^{234}Am . Аномальные фоновые пики могут быть следствием γ -переходов во второй потенциальной яме (помечены стрелками)

В результате статистической обработки данных наиболее вероятная энергия $K\alpha_1$ -линии оказалась равной $(103,6 \pm 0,5)$ кэВ — в отличном согласии с табличным значением энергии $K\alpha_1$ плутония, равной 103,76 кэВ. Регистрация рентгеновских лучей плутония означала, что время жизни состояния в потенциальной яме, из которого идет деление, больше или одного порядка со временем $\sim 10^{-17}$ с, необходимым орбитальным электронам для заселения вакантного места в атомной K -оболочке [25]. Можно установить пределы, в которых лежит время жизни τ возбужденного состояния ядра ^{234}Pu : $10^{-17} < \tau < 3 \cdot 10^{-9}$ с.

Если ядро действительно задерживается во второй потенциальной яме барьера деления, то в этих пределах лежит и время жизни изомера формы ^{234f}Pu . Приведенные величины не противоречат систематике времени жизни изомеров формы плутония [27], из которой следует, что период полураспада изомера формы ^{234f}Pu $T_{1/2} = 10^{-8} \div 10^{-12}$ с.

Для дочернего продукта материнского ядра ^{232}Am , рождающегося после ЕС-захвата, по данным измерений наиболее вероятная энергия

$K\alpha_1 = (103,8 \pm 0,3)$ кэВ, практически совпадающая с табличным значением энергии $K\alpha_1$ плутония.

Так же, как и для ^{234}Pu , оценены времена жизни возбужденных состояний ^{232}Pu . Они лежат в интервале от 10^{-8} до $8 \cdot 10^{-9}$ с. Это означает, что в этих пределах находится время жизни изомера формы ^{232f}Pu . Систематика времен жизни спонтанно делящихся изомеров формы дает значения для ^{232f}Pu : $(1 \div 10) \cdot 10^{-12}$ с.

Кривые, представляющие спектр совпадения γ -излучения, содержат шесть слабых фотопиков в интервале энергий от 77 до 283 кэВ. Мгновенные γ -кванты осколков деления не образуют подобной структуры. Не исключено, что эти фотопики отражают структуру уровней во второй потенциальной яме изотопа ^{232}Pu . Если это так, то открывается новая возможность изучения изомеров формы.

2.5. Полная кинетическая энергия осколков запаздывающего деления изотопов ^{232}Am , ^{234}Am и их массовое распределение. Высокая интенсивность осколков запаздывающего деления, наблюдаемых авторами работ [7,20], благодаря применению мультимишленной сборки с аэрозольным переносом продуктов ядерных реакций (ММСР), по сравнению с опытами с одной мишенью сделала доступным измерения полной кинетической энергии осколков деления (ТКЕ) и их массового распределения в процессе запаздывающего деления ^{232}Am и ^{234}Am ($^{232,234}\text{Am}(\text{EC}) \rightarrow ^{232,234}\text{Pu}(f) \rightarrow ff$).

Эти характеристики представляли особый интерес в связи со значительным удалением от линии β -стабильности изотопов ^{232}Pu и ^{234}Pu и их делением из состояний с низкой энергией возбуждения. Изучение массового и энергетического распределений осколков деления $^{232,234}\text{Pu}$ дает возможность понять процессы, связанные с ториевой аномалией, и другие особенности деления тяжелых ядер. Массовое распределение осколков деления дочернего изотопа ^{234}Pu характеризуется сильной асимметрией. В опытах регистрировалось примерно от 1000 до 2000 актов деления. Это обстоятельство позволило выполнить измерения делительных характеристик с высокой точностью.

В табл. 1 содержатся характеристики деления ядер ^{232}Pu и ^{234}Pu , образовавшихся в процессе ECDE, их предшественников ^{234}Am и ^{232}Am .

Распределение выхода осколков в зависимости от средней полной кинетической энергии осколков деления (ТКЕ) симметрично относительно его максимального значения и содержит только одну составляющую. Среднее значение ТКЕ для осколков деления ^{234}Pu равно 175 МэВ и близко к предсказанной для деления из основного состояния [27,28].

Распределение ТКЕ для осколков деления ECDF $^{232}\text{Am} \rightarrow ^{232}\text{Pu} \rightarrow ff$ симметрично около энергии 174 МэВ и практически совпадает для измеренной ТКЕ осколков деления ^{234}Pu .

Таблица 1. Массовые и энергетические распределения осколков деления ядер ^{234}Pu и ^{232}Pu

Ядро	^{234}Pu	^{232}Pu
ТКЕ после испускания нейтронов, МэВ	171 ± 5	173 ± 5
ТКЕ до испускания нейтронов, МэВ	173 ± 5	174 ± 5
КЕ осколков с высокой энергией, МэВ	$98,6 \pm 2,0$	$99,4 \pm 1,9$
КЕ осколков с низкой энергией, МэВ	$72,3 \pm 1,5$	$73,6 \pm 2,0$
КЕ ₁ осколков с высокой энергией, МэВ	$99,4 \pm 2,0$	$100,2 \pm 1,9$
КЕ ₁ осколков с низкой энергией, МэВ	$72,9 \pm 1,5$	$74 \pm 2,0$
Средняя масса легких осколков, МэВ	$99,0 \pm 0,1$	$98,7 \pm 0,3$
Средняя масса тяжелых осколков, МэВ	$135,0 \pm 0,1$	$133,3 \pm 0,3$

Примечание. ТКЕ — средняя полная кинетическая энергия осколков деления, КЕ — средняя кинетическая энергия осколка деления после испускания нейтронов, КЕ₁ — средняя кинетическая энергия осколка деления до испускания нейтронов.

Исследование запаздывающего деления в значительной мере расширяет область нейтронодефицитных ядер, делительные характеристики которых могут быть изучены.

2.6. Изучение α -распада ^{234}Am и ^{232}Am . Исследование α -распада легких ядер америция представляет интерес для определения влияния α -ветви на процесс запаздывающего деления. Как будет показано ниже (см. п. 2.9), для ядер с $N < 126$ период α -распада определяет возможность регистрации запаздывающего деления. Поэтому было целесообразно изучить его влияние и в ядрах-предшественниках ECDF ^{234}Am и ^{232}Am .

На рис. 14 представлен α -спектр продуктов реакции $^{237}\text{Np} + ^4\text{He}$. Видны пики α -излучателей, образовавшихся в параллельных реакциях с ^{234}Am и реакциях со свинцовыми и висмутовыми примесями, как правило, присутствующими в мишенях. Высокая интенсивность β -излучения не дает возможности использовать первую позицию сборника на диске для изучения α -распада. Пик с энергией α -частиц 6,46 МэВ включал в себя две активности: одна с периодом полураспада около 2,3 мин, а другая с очень большим периодом полураспада, который в условиях проводимого эксперимента не мог быть измерен. Время 2,32 мин было отнесено к распаду ^{234}Am . Долгоживущая активность, предположительно, принадлежит «хвостам» ^{211}Bi , образовавшегося после β -распада ^{211}Pb .

Сравнение начальных активностей ветвей α - и ЕС-распада дает отношение ветвей α -распад/деление, равное $5,8 \pm 0,4$. На основе уже сделанных предположений об эффективности переноса активности аэрозолями KCl в гелиевом потоке и данных об эффективной толщине мишени нижний предел парциального сечения образования ^{234}Am был найден равным $1,1 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2$. Ветвь α -распада ядра ^{234}Am составила незначительную долю: $(3,9 \pm 1,2) \cdot 10^{-4}$.

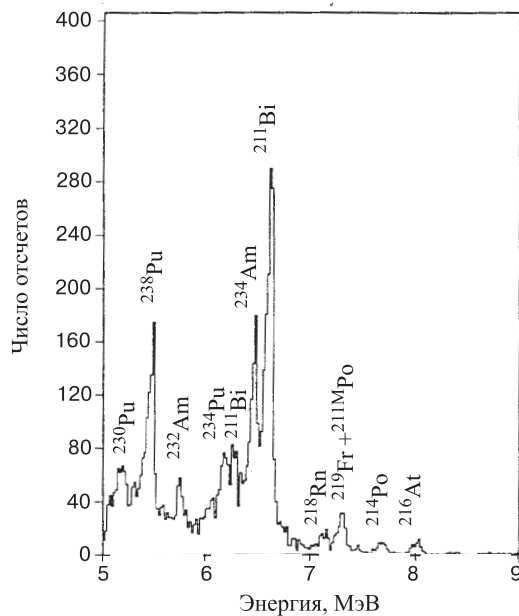


Рис. 14. Альфа-спектр продуктов реакций $^{237}\text{Np}(\alpha, xn)$ при исследовании изотопа ^{234}Am . Измерения проводились на установке с вращающимся диском (рис. 10) на второй позиции детекторов. Время экспонирования 2,50 мин

Измерить ветвь α -распада ^{232}Am на фоне α -излучения продуктов, образовавшихся в мишенях на содержащихся в них примесях свинца и висмута, в области ожидаемых энергий α -частиц не удалось.

2.7. Экспериментальное измерение вероятности запаздывающего деления P_{DF} и сечения образования $\sigma_{\text{ЕС}}$ ядра, испытывающего K -захват. Для экспериментального измерения P_{DF} требуется измерить отношение числа осколков запаздывающего деления к полному числу ЕС-захватов за данный промежуток времени. Прямые измерения P_{DF} затруднены тем, что в процессе ЕС-захвата не испускаются заряженные частицы, а ЕС-ветвь ведет к долгоживущим ядрам, распадающимся тем же способом. Ветвь ЕС-захвата можно измерить, только регистрируя рентгеновское излучение. Поэтому в последнем случае необходима высокая степень очистки америция от осколков деления, создающих интенсивный гамма-фон.

С этой целью использовали колонку с двумя типами ионно-обменных смол. Колонка размером 3×10 мм заряжалась катионитом, а затем анионитом, так что сверху находилась анионно-обменная смола. Вымывание концентрированной HCl отделяет америций от одновалентных, двухвалентных продуктов деления и лантаноидов в верхней части колонки, а затем плутоний и нептуний адсорбируются в ее нижней части [7,20].

Разделение элементов выполнялось в химической лаборатории, куда активность от мишенной транспортировалась на расстояние 80 м к коллектору. Соль KCl с захваченной ею активностью растворяли в 20 мм³ 0,5 М HCl. К раствору добавляли изотоп-отметчик ²⁴¹Am ($T_{1/2} = 432$ года) для контроля выхода. Далее раствор пропускали через колонку. Америций из колонки вымывали концентрированной соляной кислотой. Затем америциевую фракцию соосаждали совместно с CeF₃. Осадок после фильтрования и промывки помещали в γ -спектрометр с германиевыми детекторами (см. рис. 12). На все эти химические операции затрачивалось примерно четыре минуты.

Применялось такое же химическое разделение элементов и при изучении изотопа ²³²Am с одним отличием: опускался этап соосаждения с CeF₃ в опытах регистрации рентгеновского излучения ²³²Pu. Как следует из предыдущего, время на химические процедуры таким образом уменьшилось с 4 мин до 90 с.

Деление в цепочке ²³⁴Am $\rightarrow$ ²³⁴Pu изучалось также другим способом, на образцах, полученных таким же сбором аэрозолей, как и в предыдущих опытах, но без химических процедур. Танталовая фольга с активностью после температурной обработки помещалась в объем пропорционального счетчика с газовым потоком. Время экспозиции составляло 10 мин — достаточно, чтобы измерить полное число делений в собранном активном веществе. Эффективность регистрации деления составляла 98,6%.

Америциевые фракции периодически отделялись в течение четырехчасового облучения. Измерения характеристик деления ядер происходили одновременно с химическим разделением. Неоднократно, каждый раз по 40 мин, регистрировалось γ -излучение химически очищенного америция. Осколочные активности измерялись в объеме пропорционального счетчика — по 10 мин каждый. На рис. 15 показан характерный спектр γ -излучения. Был зарегистрирован распад изотопов ²³⁷Am и ²³⁸Am, синтезированных в реакциях передачи нуклонов. Видны также пики распада ядер — продуктов реакций с материалами подложки мишени и ее крепления.

Энергия γ -излучения (рис. 16), характерная для рентгеновского излучения америция, проявляется пиком, состоящим из двух компонент — короткоживущей, с периодом полураспада $T_{1/2} = 2,3$ мин, и долгоживущей с $T_{1/2} \sim 1$ ч. Долгоживущая компонента — смесь ²³⁷Am ($T_{1/2} = 73$ мин) и ²³⁸Am ($T_{1/2} = 1,63$ ч), а короткоживущая принадлежит ²³⁴Am.

Значение постоянной ЕС-распада ²³⁴Am использовалось для расчета $\sigma_{\text{ЕС}}$ и $P_{\text{ДФ}}$. Сечение $\sigma_{\text{ЕС}}$ определялось на основании следующих данных. Общая толщина всех 12 мишеней равнялась 0,90 мг/см², перенос аэрозолями активности условно считали равным 100%. Было сделано предположение: плотность уровней дочернего ядра высока, так что снятие возбуждения происходит каскадом высокоэнергичных переходов (500 ÷ 1000 кэВ) с малой мультипольностью. Поэтому возможность рождения K -рентгеновских квантов за счет

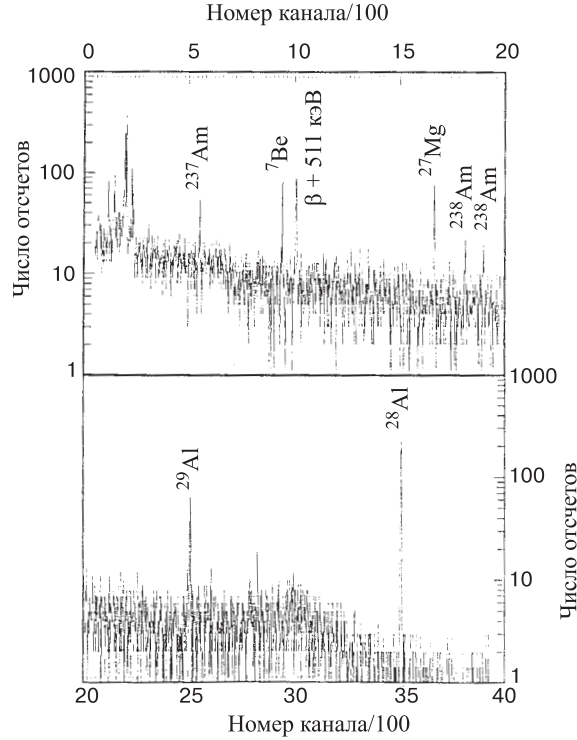


Рис. 15. Спектр γ -лучей в области энергии $0 \div 2$ МэВ, наблюдаемый в химически чистой фракции ^{234}Am . Область рентгеновского излучения Am показана на рис. 16

внутренней конверсии не принималась во внимание. В результате получили $\sigma_{\text{EC}} = (5,4 \pm 1,3)$ мкб. Вероятность P_{DF} вычислялась по начальной активности ЕС-захвата и числу зарегистрированных осколков деления. Измеряя каждую из этих величин практически одновременно, необходимо исключить влияние медленных изменений параметров самой установки. Таким образом, P_{DF} можно рассчитать, используя уравнение

$$P_{\text{DF}} = \frac{\lambda I_f [\exp(-\lambda t_1) - \exp(-\lambda(t_1 + t_2))]}{D_{\text{OEC}}}. \quad (12)$$

Здесь λ — постоянная распада ^{234}Am , I_f — число делений за время счета t_2 , t_1 — промежуток времени от окончания облучения до начала счета осколков. D_{OEC} — начальная активность ЕС-захвата. Вероятность запаздывающего деления вычислена для всех измерений, ее среднее значение $(6,6 \pm 1,8) \cdot 10^{-5}$. Отношение $W_\alpha/W_{\text{EC}} = (3,9 \pm 1,2) \cdot 10^{-4}$, где W_α и W_{EC} — вероятности α -распада и электронного захвата соответственно.

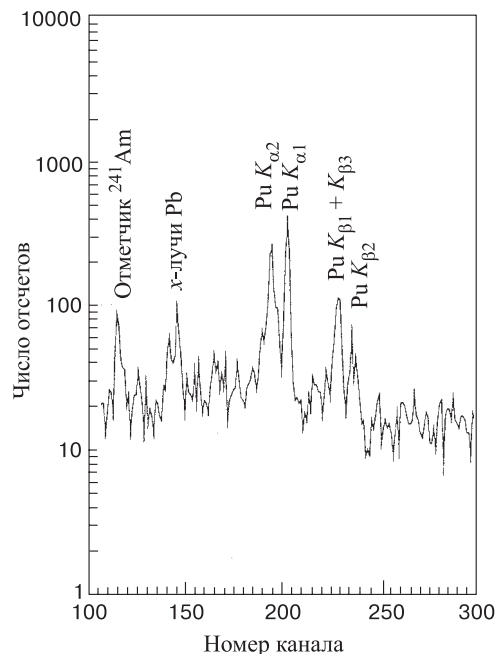


Рис. 16. Область рентгеновского излучения в γ -спектре химически чистого образца ^{234}Am

Подобная методика применялась и к изотопу ^{232}Am [23]. Измерялось рентгеновское излучение при заселении K -оболочки ^{232}Pu . Осколки деления и их энергия регистрировались безоконым пропорциональным счетчиком. Рентгеновское излучение дочернего ^{232}Pu слабое, но четко различимое. Наблюдались два периода полураспада: 1,31 мин (^{232}Pu) и ~ 1 ч (смесь ^{237}Am и ^{238}Am). Величина $\sigma_{\text{EC}} = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$. Вероятность запаздывающего деления $\sim 6 \cdot 10^{-4}$. Последняя величина отличается на 1–2 порядка от приведенных в ранних работах [19].

Итоговые значения нижнего предела сечений и ветвей распада для ^{232}Am : $\sigma_{\text{EC}} > 1,3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$, $\sigma_{\text{EF}} > 2,5 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2$, $P_{\text{DF}} = (6,9 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$, $T_{1/2} = (1,31 \pm 0,04) \text{ мин}$.

2.8. Изучение запаздывающего деления нечетно-нечетных изотопов с $Z > 96$. Более сложные задачи пришлось решать, исследуя запаздывающее деление ядер, цепи превращений которых начинались с материнских нейтронодефицитных нечетно-нечетных ядер берклия, эйнштейния и менделевия.

Изотопы ^{240}Bk , ^{242}Bk , ^{246}Es , ^{248}Es получали путем облучения толстых урановых и ториевых мишеней ускоренными ионами ^{14}N с интенсивностью пучка до 10^{14} частиц/с [6]. Активное мишенное вещество наносили на наклонную мишень, которая располагалась в камере циклотрона. Для регистра-

ции осколков деления использовалась полиэтилентерефталатная пленка толщиной 15 мкм. После травления пленки в NaOH оптимальной концентрации треки осколков деления подсчитывались с помощью оптического микроскопа. В некоторых экспериментах осколки деления регистрировались пробойными детекторами. Принцип действия таких детекторов основан на ослаблении электрической прочности пленки в момент прохождения через нее осколка деления. Если к пленке приложена достаточная разность потенциалов, то по треку осколка произойдет пробой, который сразу же регистрируется. Преимущество такого метода заключается в измерении осколочной активности в реальном масштабе времени.

Когда энергия ионов азота находилась в интервале от 74 до 76 МэВ, эйнштейний и берклий синтезировались в ядерных реакциях $^{238}\text{U}(^{14}\text{N}, 4n)^{248}\text{Es}$ и $^{232}\text{Th}(^{14}\text{N}, 4n)^{242}\text{Bk}$. Эти изотопы могли быть родоначальниками запаздывающего деления.

Однако экспериментально наблюдались лишь единичные осколки деления. Все же, несмотря на малую статистику, удалось оценить сечение образования ^{248}Es и установить верхний предел вероятности его запаздывающего деления.

С помощью облучения мишеней из ^{238}U и ^{232}Th ускоренными ионами ^{14}N с энергией в интервале $92 \div 94$ МэВ получили максимальный выход осколков деления с временным распределением осколков деления, соответствующим периодам полураспада (8 ± 2) и (5 ± 2) мин. В интервале $92 \div 94$ МэВ лежат максимумы функций возбуждения ядерных реакций $^{238}\text{U}(^{14}\text{N}, 6n)^{246}\text{Es}$ и $^{232}\text{Th}(^{14}\text{N}, 6n)^{240}\text{Bk}$, а измеренные периоды полураспада осколочной активности равны периодам полураспада ядер ^{246}Es и ^{240}Bk . Это однозначно свидетельствует о том, что осколки деления принадлежали дочерним ядрам ^{246}Es и ^{240}Bk .

Ввиду малого выхода осколков деления в этих реакциях, большую роль приобретают выявление и нейтрализация возможных источников осколочного фона. Так, в процессе облучения толстой мишени проверялся уровень генерации осколков в результате деления мишенного вещества мгновенными нейтронами, жесткими γ -квантами, испускаемыми мгновенными осколками, и γ -квантами ядер, образующихся в мишенной подложке.

Результаты контрольных экспериментов показали, что если регистрацию начать спустя десять минут после облучения мишени, фон γ -излучения и нейтронный фон мгновенных осколков деления не вносят погрешности в получаемые данные. Было замечено: использование в качестве подложки особо чистого алюминия значительно снижает поток γ -квантов и, следовательно, снижает фон, возникающий в результате взаимодействия вещества мишени с γ -квантами, генерируемыми в подложке.

В этих же экспериментах было показано, что в толстых урановых и ториевых мишенях фон превосходит допустимый уровень, при котором возможно

изучение запаздывающего деления с сечениями образования $\sim 10^{-35}$ см² и периодами полураспада порядка десяти минут. С учетом этого обстоятельства ядра отдачи ^{244}Es и ^{248}Md , ^{250}Md собирали из тонких мишеней на сборники, переносившие продукты реакции к детекторам осколков деления. При этом толщина мишени была в интервале $0,5 \div 1$ мг/см², а ток тяжелых ионов не превышал 5 мкА.

В работе Гангрского и др. [6] были получены распределения по времени выходов делящихся ядер в ядерных реакциях $^{235}\text{U}(^{14}\text{N}, 5n)^{244}\text{Es}$, $^{237}\text{Np}(^{14}\text{N}, 5n)^{244}\text{Es}$ при энергиях ^{14}N и ^{12}C , равных 82 и 86 МэВ соответственно, при этом период полураспада по отношению к запаздывающему делению $T_{1/2} = 37$ с. В реакции $^{243}\text{Am}(^{12}\text{C}, 5n)^{250}\text{Md}$ наблюдалось запаздывающее деление с периодом полураспада $T_{1/2} = 52$ с. Сопоставление данных о выходе делящихся ядер и дочерних ядер ^{244}Cf и ^{250}Fm , образующихся после ЕС-захвата ^{244}Es и ^{250}Md , позволило оценить сечение запаздывающего деления. У ядер с $Z > 95$ запаздывающее деление наблюдалось с малой статистикой.

Группа авторов изучила нейтронодефицитные запаздывающие излучатели на ускоренных пучках тяжелых ионов линейного ускорителя UNILAC (GSI, Дармштадт) [29]. При этом для разделения продуктов реакций использовался сепаратор скоростей ядер отдачи SHIP. В реакции $^{205}\text{Tl} + ^{40}\text{Ar}$ синтезировали изотоп ^{242}Es — материнское ядро ECDF: $^{242}\text{Es} \rightarrow ^{242}\text{Cf} \rightarrow ff$. Было зафиксировано три события. Сечение запаздывающего деления $\sigma_{\text{DF}} = 1,80 \cdot 10^{-34}$ см², а $P_{\text{DF}} = (1,4 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$. Это значение позволяет грубо оценить высоту барьера деления ^{242}Cf значением $\sim 5,4$ МэВ.

Позднее, в работах на том же ускорителе и сепараторе скоростей в реакции $^{209}\text{Bi}(^{40}\text{Ar}, 3n)^{246}\text{Md}$ обнаружилось [30], что после K -захвата менделевия образуется более сильная ветвь деления, чем возможная, благодаря только вкладу одного спонтанного деления дочернего ^{246}Fm . Поэтому дополнительный выход осколков деления авторы работы отнесли к запаздывающему делению ^{246}Md . Проведенные оценки дали для этого ядра $P_{\text{DF}} \sim 6,5 \cdot 10^{-2}$. Следует принять во внимание недостаточную точность полученных данных ввиду малого числа наблюдавшихся событий.

Идентифицированные нейтронодефицитные запаздывающие излучатели представлены в табл. 2.

2.9. Запаздывающее деление левее $N = 126$ и в области левее $Z = 82$. С ростом нейтронного дефицита ядер при приближении к оболочке $N = 126$ в области ультранейтронодефицитных ядер запаздывающее деление подавляется конкурирующим α -распадом. Однако левее $N = 126$ энергия α -распада Q_α резко падает, а затем медленно нарастает с увеличением нейтронного дефицита, уменьшается роль ветви α -распада, возрастает величина $T_\alpha/(T_\alpha + T_{\text{EC}})$, что соответствует усилению конкуренции ЕС-захвата с α -распадом. Энергия Q_{EC} здесь уже превышает высоту барьеров деления

Таблица 2. Исследованные нейтронодефицитные запаздывающие излучатели

Ядро	$T_{1/2}$	P_{DF}	Ядерные реакции
^{180}Tl	$0,70^{+0,12}_{-0,09}$ с	$\sim 10^{-6}$	
^{208}Ac	0,1 с	—	$^{197}\text{Au}(^{20}\text{Ne}, 9n)^{208}\text{Ac}$
^{228}Np	(60 ± 5) с	—	$^{209}\text{Bi}(^{20}\text{Ne}, 3n)^{228}\text{Np}$
^{232}Am	$(1,4 \pm 0,25)$ мин	$6,96 \cdot 10^{-2}$	$^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 8n)^{232}\text{Am}$
	$(0,92 \pm 0,12)$ мин	$1,3^{+4}_{-0,8} \cdot 10^{-2}$	$^{237}\text{Np}(\alpha, 9n)^{232}\text{Am}$
	$(1,31 \pm 0,04)$ мин	$(6,9 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$^{237}\text{Np}(\alpha, 9n)^{232}\text{Am}$
	$(2,6 \pm 0,2)$ мин	$6,95 \cdot 10^{-5}$	$^{230}\text{Th}(^{10}\text{B}, 6n)^{234}\text{Am}$
^{234}Am	$(2,6 \pm 0,2)$ мин	—	$^{233}\text{U}(^{11}\text{B}, \alpha 6n)^{234}\text{Am}$
	$(2,32 \pm 0,08)$ мин	$(6,6 \pm 1,8) \cdot 10^{-5}$	$^{237}\text{Np}(\alpha, 7n)^{234}\text{Am}$
^{238}Bk	(144 ± 6) с		
^{240}Bk	4 мин	10^{-5}	$^{232}\text{Th}(^{14}\text{N}, 6n)$
^{242}Es	5–25 с	$(1,4 \pm 0,8)10^{-2}$	$^{205}\text{Tl}(^{40}\text{Ar}, 3n)$
^{244}Es	37 с	10^{-4}	$^{235}\text{U}(^{14}\text{N}, 5n)$
			$^{237}\text{Np}(^{12}\text{C}, 5n)$
^{246}Es	8 мин	$3 \cdot 10^{-5}$	$^{238}\text{U}(^{14}\text{N}, 6n)$
^{248}Es	28 мин	$3 \cdot 10^{-7}$	$^{238}\text{U}(^{14}\text{N}, 4n)^{248}\text{Es}$
^{246}Md		$6,5 \cdot 10^{-2}$	$^{209}\text{Bi}(^{40}\text{Ar}, 3n)$
^{248}Md	7 с	$< 5 \cdot 10^{-4}$	$^{239}\text{Pu}(^{14}\text{N}, 5n)$
^{250}Md	52 с	$2 \cdot 10^{-4}$	$^{243}\text{Am}(^{12}\text{C}, 5n)^{250}\text{Md}$

дочерних, и в первую очередь, четно-четных ядер, и, следовательно, открывается возможность наблюдения запаздывающего деления.

Самыми первыми экспериментами, направленными на поиск ECDF в области заполненных нуклонных оболочек с $N = 126$ и $Z = 82$, когда $N < 126$ или $Z < 82$, были синтез и изучение осколочной активности изотопа ^{208}Ac в Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н.Флерова. Эти эксперименты стали сильным косвенным подтверждением существования нового вида радиоактивного распада — запаздывающего деления. Появление таких делящихся изотопов трудно объяснить с помощью иного процесса. В результате в 1981 г. зарегистрировано запаздывающее деление ядра $^{208}\text{Ac}(^{208}\text{Ac} \rightarrow ^{208}\text{Ra} \rightarrow ff)$ [15–17]. Идентифицированное дочернее делящееся ядро принадлежало уже к доактиноидным ядрам [31,32].

Мишень ^{197}Au облучали интенсивным пучком ионов ^{20}Ne с энергией до 11 МэВ/нуклон на ускорителе У-400. Сечения образования делящихся активностей находились в интервале $(1,5 - 2,0) \cdot 10^{-35}$ см². Наблюдали 35 случаев деления, и по их распределению во времени оценили период полураспада $T_{1/2} \sim 0,1$ с. Вероятность запаздывающего деления P_{DF} оказалась в пределах от 10^{-1} до 10^{-3} . Эти работы открыли замечательную возможность исследования ядер, удаленных на 15–20 нейтронов от линии β -стабильности.

В работе [33] исследовались ядра в районе оболочки $Z = 82$. При облучении мишени ^{144}Sm ионами ^{40}Ca с энергией до 230 МэВ авторы [33] обнаружили запаздывающее деление с $T_{1/2} \sim 0,70$ с, которое отнесли к последовательности $^{180}\text{Tl} \rightarrow ^{180}\text{Hg} \rightarrow ff$. В результате анализа цепи превращений $^{180}\text{Tl} \rightarrow ^{180}\text{Hg} \rightarrow ff$ оценили вероятность запаздывающего деления P_{DF} величиной $\sim 10^{-6}$.

Запаздывающее деление ^{180}Hg определяется в основном пиком в $S_{\beta}(E)$ при энергии возбуждения $E^* \simeq 6,8$ МэВ. Результаты вычисления P_{DF} приведены в табл. 3. Из сравнения рассчитанных и измеренных значений P_{DF} можно оценить барьер деления ядра ^{180}Hg : $B_f \simeq 11$ МэВ.

Таблица 3. Результаты расчета вероятности β -запаздывающего деления P_{DF} при различных высотах барьеров B_f ядра ^{180}Hg

B_f , МэВ	$h\omega$, МэВ	Δ , МэВ	$P_{\beta\text{DF}}(\text{Гс})$	$\Gamma_{\text{БВ}}$, МэВ	$P_{\beta\text{DF}}(\text{БВ})$
8	0,5	1	$1,5 \cdot 10^{-1}$	—	—
9	0,5	—	—	1	$1,5 \cdot 10^{-2}$
				2	$3,1 \cdot 10^{-2}$
10	1,0	1	$1,4 \cdot 10^{-5}$	1	$1,7 \cdot 10^{-3}$
		2	$9,3 \cdot 10^{-5}$	2	$3,7 \cdot 10^{-3}$
10	0,5	1	$5,8 \cdot 10^{-7}$	1	$7 \cdot 10^{-4}$
		2	$1,2 \cdot 10^{-5}$	2	$1,5 \cdot 10^{-3}$
11	1,0	1	$3,2 \cdot 10^{-8}$	1	$1,1 \cdot 10^{-5}$
		2	$2,4 \cdot 10^{-7}$	2	$2,3 \cdot 10^{-5}$
12	1,5	1	$9,5 \cdot 10^{-4}$	1	$2 \cdot 10^{-8}$
		2	$1,8 \cdot 10^{-7}$	2	$4,1 \cdot 10^{-8}$
13	1,5	—	—	1	$2,9 \cdot 10^{-8}$
				2	$6 \cdot 10^{-8}$

Примечание. ГС — S_{β} представлена гауссианом с полушириной Δ , БВ — S_{β} задана в виде распределения Брейта—Вигнера с шириной $\Gamma_{\text{БВ}}$. Максимум S_{β} — при $E = 6,8$ МэВ.

Экспериментальная оценка $P_{\text{DF}} \approx 10^{-6}$, $Q_{\beta} = 11$ МэВ.

2.10. Запаздывающее деление нейтроноизбыточных ядер. Исследования запаздывающего деления в области нейтроноизбыточных ядер представляют особый интерес, так как процесс деления после β -распада играет основную роль в синтезе тяжелых элементов Вселенной, включая и возможность образования сверхтяжелых элементов в области $Z \sim 114$ с магическим числом нейтронов. На значение запаздывающего деления в ядерном нуклеосинтезе указано в работе [34].

Гангский и др. [35] изучали запаздывающее деление изотопов протактиния с массовыми числами 234, 236, 238. Характеристики нечетно-нечетных ядер этих изотопов, реакции синтеза и сечения их образования приведены в табл. 4.

Таблица 4. Экспериментальные данные о β -запаздывающем делении

β -переход	Q , МэВ	Реакция	E , МэВ	σ , см ²	σ_f , см ²	P_{DF}
$^{238}\text{Pa} \rightarrow ^{238}\text{U}$	4,0	$^{238}\text{U}(n, p)$ (n, p)	14,7 8–20	$1,5 \cdot 10^{-27}$ $3,0 \cdot 10^{-27}$	10^{-33} $5 \cdot 10^{-33}$	$6 \cdot 10^{-7}$ $1,0 \cdot 10^{-8}$
$^{236}\text{Pa} \rightarrow ^{236}\text{U}$	3,1	$^{238}\text{U}(\gamma, np)$ $^{238}\text{U}(d, \alpha)$ ($p, 2pn$)	27 18 1000	$1,0 \cdot 10^{-27}$ $1,0 \cdot 10^{-28}$	10^{-36} $3 \cdot 10^{-38}$	10^{-9} $3 \cdot 10^{-10}$ 10^{-9}
$^{234}\text{Pa} \rightarrow ^{234}\text{U}$	2,2	$^{232}\text{Th}(\alpha, np)$	36	$3,0 \cdot 10^{-27}$	$\cdot 10^{-38}$	$3 \cdot 10^{-12}$
^{256m}Es		$^{254}\text{Es}(t, p)$	16			Деление с уровня 1425 кэВ $2 \cdot 10^{-5}$

Сечения реакций с дейтронами [36] и нейтронами с энергией 14,7 МэВ [37] были измерены ранее. Изотоп ^{238}Pa накапливался при облучении стопок из слоев урана в нейтронном потоке, генерируемом в бомбардируемой дейтронами толстой бериллиевой мишени. Энергетический спектр нейтронов находится в диапазоне 8 ÷ 20 МэВ. Среднее сечение реакции $^{238}\text{U}(n, p)$ оценено по этому спектру, функции возбуждения (n, p)-реакции и известному сечению при энергии нейтронов 14,7 МэВ.

В других случаях сечения определялись по интенсивности γ -линий в процессе распада ядер ^{234}Pa и ^{236}Pa . Для повышения интенсивности изучаемых излучений использовалась мультимишенная сборка (ММС). Поток частиц сразу падал на 20 урановых или ториевых мишеней толщиной 100 мг/см². Перед облучением урана мишени складывались вплотную. После окончания цикла облучения слои раздвигались на расстояние 4 мм друг от друга и в образовавшиеся зазоры периодически вводилась полиэтилентерефталатная пленка, служившая практически бесфоновым трековым детектором. Последовательная замена детекторов через заданные временные интервалы позволила измерить распределение по времени осколков и построить кривую распада.

Несмотря на использование МСС, число регистрируемых осколков оставалось незначительным. Приходилось тщательно анализировать возможные источники фона и принимать меры к их устранению. В результате совершенствования методики во всех экспериментах, кроме облучения нейтронами с

энергией 14,7 МэВ, наблюдаемое число осколков, сопровождавшее запаздывающее деление ядер, определенно превышало уровень фона.

Число зарегистрированных осколков оказалось недостаточным, чтобы определить периоды полураспада наблюдаемых активностей с удовлетворительной точностью. Однако полученные данные не противоречат значениям известных периодов полураспада ^{238}Pa и ^{236}Pa . Анализ ядерных реакций, протекающих одновременно с изучаемыми, привел к выводу: ни один из других возможных продуктов этих реакций не может быть источником осколочной активности как по причине малого времени жизни спонтанно делящихся изомеров формы в этой области ядер ($\sim 10^{-6}$ с), так и ввиду больших периодов полураспада по отношению к спонтанному делению.

Число зарегистрированных треков осколков деления во всех экспериментах нормировалось по отношению к выходу осколков мгновенного деления. Выход определялся по γ -излучению осколка ^{140}Ba . Полученные данные позволили вычислить сечение образования осколочной активности σ_{DF} и вероятность запаздывающего деления $P_{\text{DF}} = \sigma_{\text{DF}}/\sigma$. Запаздывающее деление ядра ^{234}Pa не наблюдалось.

Батист и др. [38] исследовали запаздывающее деление $^{236}\text{Pa} \rightarrow ^{236}\text{U} \rightarrow ff$ в реакции $^{238}\text{U}(p, 2pn)^{236}\text{Pa}$. Пучком протонов с энергией 1 ГэВ облучали приготовленную из уранилнитрата мишень, содержащую 5 г урана. Время однократного сеанса облучения составляло 7 мин. После длившегося 6 мин химического выделения протактиния из облученного вещества мишени протактиниевую фракцию помещали между слюдяными детекторами осколков деления. Одновременно с регистрацией осколков деления измерялся γ -спектр продуктов фракции с помощью германиевого детектора. Полное число синтезированных ядер ^{236}Pa определялось по убыванию интенсивности линии с энергией γ -квантов $E = 642$ кэВ, характерной для ^{236}Pa . В результате в экспериментах на протонах с энергией 1 ГэВ была получена вероятность запаздывающего деления $^{236}\text{Pa} \sim 10^{-9}$.

Холл и др. [39] изучали β -запаздывающее деление ^{256m}Es ($T_{1/2} = 7,6$ ч) $\rightarrow ^{256}\text{Fm}$ ($T_{1/2} = 2,63$ ч) $\rightarrow ff$. Изотоп ^{256m}Es синтезировали в ядерной реакции $^{254}\text{Es}(t, p)^{256m}\text{Es}$. На следующем этапе эйнштейний отделялся на ионно-обменной колонке от остальных продуктов ядерных реакций. После химического разделения изучался распад при переходе ^{256m}Es в ^{256}Fm с измерением $\beta-\gamma$, $\gamma-\gamma$, $\beta-f$ -совпадений. Удалось построить структуру уровней дочернего ядра ^{256}Fm и зарегистрировать акты запаздывающего деления.

Эксперимент проходил следующим образом. Из вещества, содержащего ^{254}Es ($T_{1/2} = 276$ сут) выделили 0,1 мкг чистого эйнштейния и электролитическим способом осадили на бериллиевую подложку толщиной 0,0125 мм, покрытую палладием. Эйнштейний высаживали на кружок диаметром 0,2 см. Толщина мишени, измеренная с помощью альфа-спектроскопии, равнялась 2,5 мкг/см². Мишень охлаждалась гелиевым потоком (см. рис. 17).

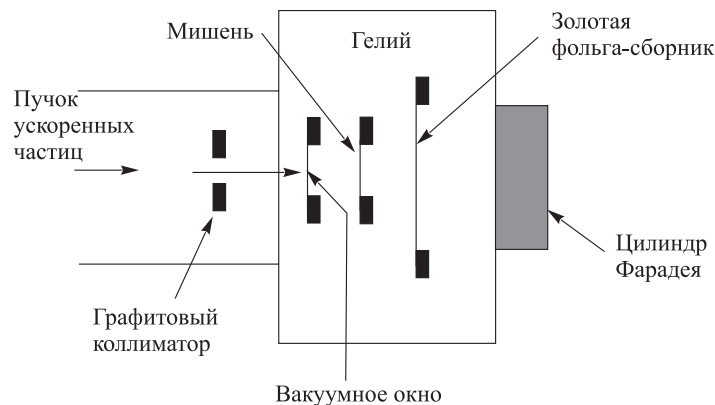


Рис. 17. Схема облучательного блока ^{254}Es в процессе синтеза ^{256m}Es : $^{254}\text{Es}(t, p)^{256m}\text{Es}$

Ввиду высокой активности эйнштейния весь охлаждающий газ проходил через фильтры, а вблизи мишенной камеры устанавливались детекторы, контролирующие активность воздуха. Мишень облучалась около 7 ч ускоренными до энергии 16 МэВ ионами трития с интенсивностью $6 \div 10$ мкА. Эта энергия трития соответствовала максимальному выходу ^{256m}Es . При этом сечение образования ^{256m}Es равнялось $1,6 \cdot 10^{-26}$ см². Продукты отдачи собирались на золотой сборник. После облучения мишень и мишенная камера «остывали» в течение часа. За это время распадались короткоживущие ядра, включая ^{256}Es ($T_{1/2} = 25$ мин). После облучения эйнштейний отделялся с помощью ионно-обменных методов от других продуктов реакции и материала мишени. Для освобождения от спонтанно делящегося ядра ^{256}Fm применялась двойная очистка. Тогда в начальный момент счета осколки спонтанного деления дочернего фермия не затрудняют измерения. Данные о схеме уровней ^{256}Fm получены при регистрации $\beta^- - \gamma$ и $\gamma - \gamma$ -совпадений, в то время как осколки β -запаздывающего деления ^{256m}Es зарегистрированы при $\beta - f$ -совпадениях. Авторы построили подробную схему уровней ^{256}Fm .

По данным $\beta - \gamma$ -совпадений период полураспада изомерного уровня 1425 кэВ оказался равным $(70 \pm 5) \cdot 10^{-9}$ с — значительно меньше, чем предполагали, опираясь на систематику K -запрещенных переходов.

В итоге авторы пришли к заключению, что запаздывающая делительная активность ^{256m}Es идет после заселения уровня 1425 кэВ. Действительно, в совпадении с β -частицами и задержкой ~ 70 нс наблюдалось всего два случая запаздывающего деления. Деление с изомерного уровня 1425 кэВ со спином и четностью 7^- ядра ^{256}Fm , по-видимому, первый случай, когда запаздывающее деление зарегистрировано как деление из изомерного состояния первой ямы. Очень малая величина ветви деления ($2 \cdot 10^{-5}$) уровня 1425 кэВ подтверждает

сделанный вывод. Парциальный период полураспада по отношению к делению оценили величиной $\sim 0,8$ мс.

Экспериментальные данные о β -запаздывающем делении в цепях с материнскими ядрами протактиния и эйнштейния приведены в табл. 4. Ввиду малых сечений образования материнских ядер-предшественников запаздывающего деления требуются большие усилия для решения проблем, возникающих при подавлении фона, обусловленного, например, делением урана запаздывающими нейтронами, γ -излучением осколков, спонтанным делением дочерних ядер.

Эти усилия оправданы тем, что на их основе получены сведения о глубоко-подбарьерном делении из идентифицированного изомерного уровня дочернего ядра.

Прямые эксперименты по изучению нейтроноизбыточных ядер, у которых $Q_\beta \sim B_f$, т.е. значительно удаленных от линии β -стабильности, могли быть, в принципе, поставлены в импульсных нейтронных потоках термоядерных взрывов. Однако разработка таких методик, по понятным причинам, сталкивается с огромными трудностями. К тому же сегодня в ряде стран запрещены испытания подземных термоядерных устройств. Остается надеяться на получение ускоренных пучков радиоактивных тяжелых ионов с большим избытком нейтронов, в реакциях на которых могли быть получены материнские нейтроноизбыточные изотопы в области, где ожидается запаздывающее деление.

В настоящее время имеются лишь косвенные данные о запаздывающем делении нейтроноизбыточных ядер, синтезированных в импульсных нейтронных потоках подземных термоядерных взрывов. Периоды полураспада материнских ядер-предшественников запаздывающего деления слишком малы, чтобы с имеющимися медленными методиками выделения изотопов тяжелых элементов можно было зарегистрировать их запаздывающее деление.

2.11. Барьеры деления ядер, удаленных от линии β -стабильности, и запаздывающее деление. Барьеры деления ядер — основная характеристика, определяющая стабильность наиболее тяжелых ядер, включая сверхтяжелые элементы. Основной объем имеющихся экспериментальных данных о барьерах деления относится к ядрам, лежащим в долине β -стабильности в области $90 < Z < 98$, $140 < N < 156$. Наиболее детальная информация о характеристиках этих ядер получена главным образом в реакциях типа (d, pf) , (t, pf) , (t, df) и в (n, f) -реакциях. Современное представление о барьерах деления тяжелых ядер и их зависимости от N и Z покоится на концепции о сильном влиянии оболочечных эффектов на энергию деформации ядра, согласно которой ядерные оболочки в процессе деформации сохраняются, изменяя лишь свои характеристики. Наиболее плодотворный подход к теоретическому исследованию барьеров деления — макро-микроскопический метод вычисления энергии при деформации ядер, развит в работе [40] и, в особенности, в

[41,42]. Идея метода заключается в том, что главная часть полной энергии ядра вычисляется макроскопически на основе модели жидкой капли или ее обобщений, а вклад эффектов внутренней структуры учитывается оболочечной поправкой и поправкой на спаривание. Таким образом,

$$E(q, N, Z) = \tilde{E}(q, N, Z) + \delta E(q, N, Z), \quad (13)$$

где q — набор параметров деформации, определяющих форму ядра; $E(q, N, Z)$ — макроскопическая часть полной энергии, описывающая плавные изменения E ; $\delta E(q, N, Z)$ — микроскопическая поправка, которая отражает локальные флуктуации энергии E , вычисляемая методом Струтинского, когда используют тот или иной одночастичный потенциал для деформированных ядер. Исследование поверхности $E(q, N, Z)$ на экстремумы и приводит к определению барьеров деления.

При сохранении основной идеи существуют различные варианты микро- и макроскопического подхода с многочисленными способами параметризации форм ядерной поверхности q , выбором конкретной модели для расчета гладкой части E , типом одночастичного потенциала для расчета микроскопических поправок δE . Варианты метода приводят к весьма сходным результатам для ядер, лежащих в долине β -стабильности. Поэтому отдать предпочтение какому-либо варианту микро-макроскопического подхода, опираясь на экспериментальные результаты исследований свойств атомных ядер только в долине β -стабильности, затруднительно. Вдали от линии β -стабильности положение меняется. Предсказания на основе различных вариантов моделей отличаются друг от друга не только количественно, но и качественно. Так, модель жидкой капли в варианте Майерса и Святецкого [40] и модель малой капли («дроплит»-модель) дают прямо противоположные тенденции в изменении макроскопической части барьера в зависимости от $(N - Z)/A$. Это приводит к большим расхождениям для барьеров атомных ядер, удаленных от линии β -стабильности, а значит, позволяет судить о степени применимости той или иной модели для расчета барьеров. Однако параметры барьеров таких ядер невозможно измерить при низких энергиях возбуждения в ядерных реакциях вынужденного деления [43] и в реакциях образования спонтанно делящихся изомеров, потому что отсутствуют подходящие мишени или нет спонтанно делящихся изомеров в исследуемой ядерной области.

Единственная возможность получения значений параметров деления ядер, сильно удаленных от линии β -стабильности, — это исследование запаздывающего деления. Еще в 1981 г. планировались эксперименты по изучению нейтронодефицитных ядер, удаленных на 15–20 нейтронов от линии β -стабильности [31]. В настоящее время определены значения барьеров деления ряда нейтронодефицитных и некоторых нейтроноизбыточных ядер по данным об их запаздывающем делении. К ним относятся, в частности, изотопы ^{232}Pu и ^{234}Pu .

Вычисленная высота барьера деления ^{232}Pu на основе данных по запаздывающему делению ^{232}Am , в предположении $S_\beta = \text{const}$ [19], не совпадает с рассчитанной по методу Струтинского. Изосимов и Наумов [44] рассчитали высоты барьеров деления ^{236}U и ^{238}U по измерениям запаздывающего деления в рамках различных моделей деления ядер с двугорбым барьером и различных предположений о характере силовой функции β -распада и показали, что необходимо учитывать резонансную структуру силовой функции β -распада.

Позднее в работах [44,45] были оценены высоты барьеров деления и вероятности P_{DF} ядер ^{232}Pu , ^{244}Cf , ^{248}Fm , ^{248}Cf , ^{240}Cm , где использовали более реалистические модели, включая нестатистическую силовую функцию ЕС-захвата с пиками гауссовской формы с центром на уровнях $0+$, $2+$ и полушириной 1 МэВ. Расчет процесса деления через двугорбый барьер с учетом частичного смешения состояний в первой и второй ямах дал значение вероятности запаздывающего деления, совпавшее с полученным экспериментально. Этот факт приводит к выводу о том, что барьеры $E_A(S)$, полученные с использованием метода Струтинского, согласуются с экспериментальными значениями барьеров E_A и данными о вероятностях запаздывающего деления (см. табл. 5).

Таблица 5. Экспериментальные и расчетные значения барьеров деления ядер изотопов трансурановых элементов

Ядро	E_A , МэВ (эксп.)	$E_A(S)$, МэВ	$P_{\text{DF}}^{\text{эксп}}$	$P_{\text{DF}}^{\text{теор}}$
^{232}Pu	4,0–4,5	3,5–4,3	$1,3_{-0,8}^{+4} \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
^{244}Cf	5,3	5,1–5,6	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
^{248}Fm	5,7	5,3–5,9	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
^{248}Cf	> 5, 8	5,4–5,9	$< 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$
^{240}Cm	4,7	4,9–5,5	10^{-5}	$9 \cdot 10^{-7}$

Изосимовым в работе [46] проведена оценка параметров барьеров деления ядер, синтезированных в области оболочки $Z = 82$. У этих нейтродефицитных ядер энергия связи нейтрона ≥ 11 МэВ, поэтому испускание нейтрона в процессе распада этих ядер не происходит. То же относится и к запаздывающим протонам, задерживаемым кулоновским барьером и не вносящим заметного вклада в полную ширину распада. Основной канал возбужденного дочернего ядра, конкурирующий с запаздывающим делением, — γ -распад. Делительная ширина рассчитывалась с учетом различных предположений о симметрии деформации ядер в седловых точках. Считалось, что различие во входных каналах слабо отражается на вероятности деления.

Результаты расчета P_{DF} приведены в табл. 3. Для ядра ^{180}Hg изменение высоты барьера на ~ 1 МэВ влечет за собой изменение вероятности запаздывающего деления на три порядка [45]. Поэтому из сравнения рассчитанных и измеренных значений $P_{\beta DF}$ высота барьера столь экзотического ядра, как ^{180}Hg , определяется с точностью ~ 1 МэВ. Если задать параметр $\hbar\omega = 1$ МэВ, то высота барьера деления ^{180}Hg составит ~ 11 МэВ. Для изотопа ^{174}Pt величина $P_{DF} \sim 10^{-6}$ и высота барьера равна 10 МэВ.

В общем случае корректный анализ экспериментальных данных возможен, если известна структура силовой функции β -переходов. Для некоторых нуклидов, например для ^{188}Pb , ^{190}Pb , без экспериментального измерения S_β оценка величин B_f затруднена. И все же для многих ядер неопределенности, обусловленные расчетными значениями S_β и ширин Γ_f и Γ_γ , ограничивают точность определения высоты барьера значением ~ 1 МэВ.

Таким образом, становится доступной информация о барьерах деления ядер, удаленных на два десятка нуклонов от линии β -стабильности, как, например, для ^{208}As и ^{180}Hg .

2.12. Влияние запаздывающего деления на синтез тяжелых элементов в термоядерных импульсных нейтронных потоках. Длительность нейтронного импульса подземного термоядерного взрыва — порядка 10^{-6} с. За это время происходит многократный захват нейтронов ядрами мишени. Полное время захвата нейтронов много меньше периодов β -распада всех синтезированных нейтроноизбыточных ядер. Поэтому процесс ядерных превращений в таком импульсном потоке состоит из двух этапов: 1) синтез в нейтронном потоке нейтроноизбыточных ядер с различными массовыми числами A и атомным номером Z , равным атомному номеру мишени; 2) образование тяжелых β -стабильных элементов и осколков деления в результате спонтанного деления и запаздывающих процессов, сопутствующих β -превращениям. Следует отметить ряд экспериментов с высокими флюенсами нейтронных потоков. В термоядерном взрыве «Майк» флюенс составлял около $2,0 \cdot 10^{24}$ нейтр./см². Примерно такое же значение было достигнуто в 1962 г. в эксперименте «Анакостия». В экспериментах «Пар» и «Барбел» в 1964 г. и «Цикламен» в 1966 г. флюенс достигал $4,5 \cdot 10^{24}$ и $1,2 \cdot 10^{25}$ нейтр./см² соответственно [47]. В эксперименте HUTCH в 1969 г. получен флюенс $4,5 \cdot 10^{25}$ нейтр./см² [48].

В нейтронных потоках термоядерных взрывов облучались урановые и ториевые мишени. В эксперименте «Цикламен» мишень содержала некоторое количество ^{243}Am . В момент прекращения импульсного нейтронного облучения урановой мишени образуются изотопы урана вплоть до $^{(238+m)}\text{U}$, где m — максимальное число нейтронов, последовательно захваченных исходными ядрами мишени; $m = 17 \div 19$.

В цепях β -превращений существенную роль играют два запаздывающих процесса — деление и запаздывающие нейтроны. Запаздывающее деление превращает тяжелые ядра в осколки, в то время как эмиссия запаздывающих

нейтронов только уменьшает массу на несколько единиц и сохраняет тяжелый нуклид. Вероятность деления дочернего ядра $(Z + 1, A)$ после β -распада материнского (Z, A) сложным образом зависит от их ядерных характеристик.

Следует отметить, что в цепи распада продуктов, образовавшихся в импульсных нейтронных потоках, энергия распада Q_β достигает таких значений, что энергия возбуждения дочернего ядра E^* оказывается достаточной для испускания нескольких нейтронов. Однако такие процессы при реальных флюенсах нейтронов в термоядерных взрывах не играют заметной роли. Определяющие процесс β -распада величины Q_β рассчитываются с использованием различных массовых формул, подходящих для специфических атомных ядер с большим избытком нейтронов. Удовлетворительной для рассматриваемой задачи считается массовая формула, когда масса деформированного ядра — функция не только Z и A , но и параметра деформации, определяемого экстраполяцией на область тяжелых нейтроноизбыточных ядер существующих данных. При этом принимают во внимание влияние ядерных оболочек с $Z = 114$ и $N = 184$.

Барьеры деления ядер — продуктов многократного захвата нейтронов тяжелой мишенью — рассчитываются макро-микроскопическим методом Струтинского. Параметры барьеров четно-четных ядер, которые входят в цепь превращений, известны [49]. Барьеры деления нечетно-нечетных и четно-нечетных ядер определяются путем интерполяции высот барьеров четно-четных ядер (увеличение высоты барьера на 0,70 МэВ для четно-нечетных ядер и на 0,80–1 МэВ для нечетно-нечетных).

Если энергия β -распада меньше полной энергии Q_β , то силовая функция S_β определяет его основные характеристики. В первом приближении силовую функцию нейтроноизбыточного ядра считают пропорциональной плотности уровней дочернего ядра [11].

На основе модели ферми-газа плотность структуры уровней дочернего ядра выражается формулой:

$$\rho(E) = C/U^2 \exp 2\sqrt{aU}, \quad (14)$$

где $a = 0, 125A$; $U = E - \Delta$; $\Delta = 0, 12A^{-1/2}, 24A^{-1/2}$ для нечетно-нечетных, четно-нечетных и четно-четных ядер соответственно.

В области $A < 248$ у всех β -активных ядер $Q_\beta < B_f$, если $Z \geq 92$, и, следовательно, запаздывающие процессы практически не сказываются на выходе и изотопном составе элементов, синтезируемых в импульсных нейтронных потоках. Положение меняется, когда $A \geq 250$. В этой области для ядер, лежащих в удалении на несколько нейтронов от линии β -стабильности, Q_β удовлетворяет условию $Q_\beta > B_f$, $Q_\beta > B_n$, в результате вероятности испускания запаздывающих нейтронов и процесса запаздывающего деления достаточно велики и от них зависит выход ядер с $A > 250$.

Наибольшие потери на запаздывающее деление приходятся на ядра с четным массовым числом A . Это объясняется тем, что в этот класс ядер входят нечетно-нечетные ядра, вероятность запаздывающего деления которых проявляется значительно раньше, чем у соседних.

С точки зрения исследователя запаздывающих процессов представляет особый интерес общая особенность массового распределения продуктов, синтезируемых в импульсном нейтронном потоке термоядерного взрыва, так называемое «обращение» четно-нечетного эффекта. Суть этого эффекта состоит в следующем. Если построить кривые выхода ядер с четным и нечетным A , то первая кривая с четными A вначале пойдет выше кривой с нечетными A . Затем, с ростом величины A , кривая выхода нуклидов с нечетными A начинает идти выше кривой с четными A — это эффект «обращения».

Делались различные предположения, чтобы объяснить явление, но безуспешно (см., например, [50]). Если принять во внимание влияние запаздывающего деления на процесс нуклеосинтеза, то естественным образом объясняется обращение четно-нечетного эффекта и его особенности.

Как уже упоминалось, если массовое число нейтроноизбыточного ядра $A < 250$, энергия возбуждения дочернего ядра меньше высоты барьера деления и энергии связи нейтрона B_n . Поэтому здесь запаздывающие процессы или запрещены, или протекают с весьма малой вероятностью. Сечения захвата нейтронов у четных изотопов урана меньше, чем у нечетных, поэтому выход четно-четных изотопов в области $A < 250$ должен быть больше. Это следует из того, что для двух соседних ядер в цепи изотопов урана, захватывающих нейтроны, справедливо соотношение $N_1/N_2 \approx \sigma_2/\sigma_1$, где N_1 — число ядер с сечением захвата σ_1 ; N_2 — число ядер с сечением захвата σ_2 .

Когда запаздывающее деление протекает с высокой вероятностью, потери в цепях превращений тяжелых ядер с четным A проявляются значительно раньше, чем ядер с нечетным A , так как именно к ядрам с четным A принадлежат нечетно-нечетные ядра, у которых при меньшем удалении от линии β -стабильности выполняются условия, когда запаздывающее деление протекает с большой вероятностью: $Q_\beta > B_f$.

Расчет выхода изотопов выявляет связь эффекта обращения с начальным отношением концентраций четных и нечетных изотопов урана, а также с флюенсом нейтронов nvt . В эксперименте HUTCH «нечетно-четное обращение» наблюдали, начиная со значений $A = 255$, а в эксперименте «Пар» эффект сдвигался влево к $A = 252$. Таким образом, при изменении флюенса от $7 \cdot 10^{24}$ («Пар») до $4,5 \cdot 10^{25}$ (HUTCH) эффект обращения смещается на три-четыре единицы к большим A .

Если включить запаздывающее деление в анализ процесса превращений цепи нейтроноизбыточных ядер, синтезированных в импульсном нейтронном потоке термоядерного взрыва, то простая модель не только предсказывает

появление эффекта, но и качественно объясняет его смещение в зависимости от флюенса.

Чтобы получить количественную картину выхода изотопов при облучении различных мишеней импульсными потоками нейтронов, когда время облучения $T_0 \ll T_\beta$, где T_β — наиболее короткий период β -распада в цепи превращений тяжелых нейтроноизбыточных ядер, необходимо разработать более строгие теоретические модели расчета.

2.13. Хронометрические пары и запаздывающее деление. Астрономы наблюдают тенденцию удаления внегалактических туманностей от нашей Галактики. Скорость удаления v [км/с] пропорциональна расстоянию R до Галактики: $v = HR$, где H — постоянная Хаббла, лежащая в интервале $50 \div 100$ (км/с)/Мпк; возраст Вселенной T_U оценивают как $1/H$ (выражение справедливо, когда $v \ll c$). Если принять $H = 75$ (км/с)/Мпк, то $T_U = 13 \cdot 10^9$ лет.

Альтернатива астрономическому методу определения возраста Вселенной — ядерный метод. Он сводится к расчету времени, прошедшего с момента образования элементов Вселенной в мощных нейтронных потоках r -процесса, который протекает, как принято считать, при плотностях нейтронов $\sim 10^{20} \div 10^{30}$ см $^{-3}$ и температурах $\sim (0,5 \div 5,0) \cdot 10^9$. Записывают систему уравнений ядерных превращений в течение нейтронного облучения и после его спада. В конечном итоге устанавливают связь между хронометрическими парами — изотопами с периодами полураспада, сравнимыми с возрастом Вселенной: $^{232}\text{Th}/^{238}\text{U}$, $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$, $^{244}\text{Pu}/^{238}\text{U}$ и значением T_U .

Наиболее обширные расчеты продолжительности ядерного синтеза элементов Вселенной и возраста Галактики представлены в работе [51]. В ней использовали экспоненциальную модель галактического нуклеосинтеза.

На пути r -процесса тяжелые элементы накапливаются, последовательно захватывая нейтроны, насыщаются ими, испытывают β -распад, а запаздывающие нейтроны и деление ядер формируют конечную кривую выхода тяжелых элементов при переходе к долине β -стабильности. Сравнением расчетных отношений хронометрических пар, в особенности пары $^{232}\text{Th}/^{238}\text{U}$, с определенными экспериментально и пересчитанными на время конденсации Солнечной системы, в принципе, можно получить длительность времени нуклеосинтеза и возраст Галактики.

По мнению авторов работы [51], предсказания возраста Галактики, на основе распространенности элементов, систематически занижались. Они предсказали область ядер в окрестности $Z = 94$, $N = 164$ с вероятностью запаздывающего деления 100%, которая преграждает путь к образованию сверхтяжелых элементов.

Используя экспоненциальную модель галактического нуклеосинтеза, возраст Галактики в [51] получили равным $(20,8^{+2}_{-4}) \cdot 10^9$ лет — больше, чем на основе данных о хронометрической паре $^{187}\text{Re}/^{187}\text{Os}$. Возраст Галактики

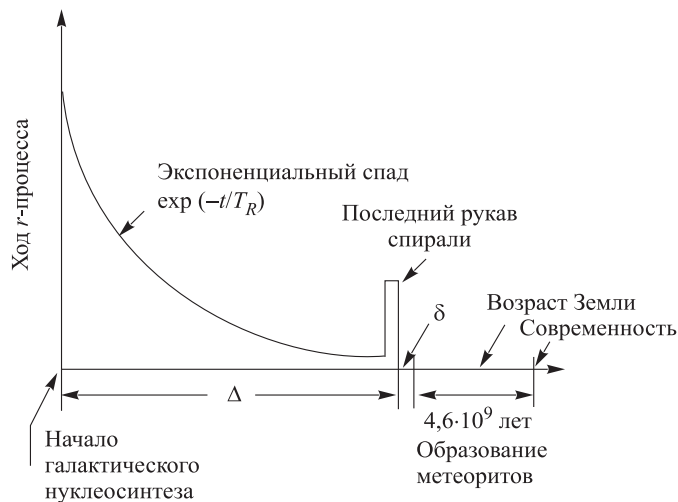


Рис. 18. Галактический нуклеосинтез. Временные интервалы

складывается из трех величин (см. рис. 18):

$$T_U = (\Delta + \delta + 4,6) \cdot 10^9 \text{ лет.} \quad (15)$$

Здесь Δ — время образования элементов в нейтронном потоке r -процесса, δ — время образования метеоритов, $4,6 \cdot 10^9$ лет — возраст Земли.

Однако в работах [52, 53] показано, что в исследованиях [51] вероятности запаздывающего деления завышены, и возраст Вселенной не превышает $15 \cdot 10^9$ лет. И все же расчеты с использованием разных моделей силовых функций и прочих параметров, определяющих протекание нуклеосинтеза, подтверждают: всегда имеется область с весьма высокой вероятностью запаздывающего деления тяжелых нейтроноизбыточных ядер, влияющая на определение возраста Вселенной.

В работах [54,55] авторы приходят к выводу: запаздывающее деление может уменьшить выход сверхтяжелых элементов с 2,6 до 190 раз в областях $Z = 110 \div 112$ и $A = 291 \div 297$ соответственно при значении константы поверхностной симметрии для жидкокапельной модели 1,79 и 2,3.

Если рассмотреть методы расчета образования элементов в быстрых нейтронных потоках, то можно прийти к заключению, что в настоящее время даже в самом современном подходе к решению теоретической проблемы о «ядерном» возрасте Вселенной все полученные оценки недостаточно надежны, так как пока нет необходимых сведений о характеристиках тяжелых нейтронообогащенных ядрах. По теоретическим оценкам высокая вероятность запаздывающего деления должна наблюдаться у ядер с избытком ней-

тронов более 10, по сравнению с известными ныне нейтроноизбыточными изотопами. Конечно, экспериментальные данные о подобных ядрах позволили бы уточнить возраст Вселенной. Однако пока нет путей синтеза таких ядер. Сегодня наиболее достоверным возрастом Вселенной считают значения в интервале $(13 \div 15) \cdot 10^9$ лет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические исследования запаздывающего деления прошли следующие основные этапы.

- Синтез трех нейтронодефицитных ядер в минутном диапазоне периодов полураспада ^{228}Np , ^{232}Am , ^{234}Am на ускоренных пучках тяжелых ионов, измерения времен жизни и предсказания их механизма распада как запаздывающего деления (1967 г.). В дальнейшем минутные запаздывающие излучатели ^{232}Am , ^{234}Am стали полигоном для детального исследования запаздывающего деления. Большие времена их жизни дали возможность использовать не только ядерно-физические, но и химические методы исследования.
- Детальная интерпретация распада ядер-предшественников ^{232}Am , ^{234}Am , входящих в процесс запаздывающего деления (1972 г.).
- Синтез запаздывающих излучателей нейтронодефицитных изотопов с $Z > 95$ на пучках тяжелых ионов от берклия до менделевия.
- Изучение β -запаздывающего деления нейтроноизбыточных ядер, полученных в ядерных реакциях на ускорителях.
- Открытие запаздывающего деления ультранейтронодефицитных ядер левее оболочек $N = 126$, а затем в области ядер с $Z = 82$, удаленных на 19–20 нейтронов от линии β -стабильности, ставшее сильным подтверждением сделанного предсказания о характере минутного распада ядер $^{232,234}\text{Am}$ и ^{228}Np .
- Исследование запаздывающего деления нейтронодефицитных ядер с $Z > 95$.
- Изучение запаздывающего деления нейтроноизбыточных ядер.
- Экспериментальное измерение основных характеристик запаздывающего деления: вероятности P_{DF} запаздывающего деления, сечений образования $\sigma_{\text{ЕС}}$ ядер, испытывающих электронный захват, и запаздывающего деления σ_{DF} .

- Прямое доказательство существования нового типа радиоактивного распада запаздывающего деления атомных ядер с регистрацией совпадений рентгеновского излучения плутония с осколками деления дочерних продуктов ядер ^{232}Am и ^{234}Am — ^{232}Pu и ^{234}Pu , а также регистрация совпадений осколков деления дочернего продукта — ядра ^{256}Fm из изомерного состояния с β -частицами распада ^{256m}Es .
- Изучение энергии и массового распределения осколков запаздывающего деления ядер ^{232}Pu и ^{234}Pu при симметричном распределении полной кинетической энергии.

Таким образом, совокупность экспериментов показала, что запаздывающее деление представляет собой общий канал распада тяжелых ядер с достаточно большими Q_β .

Полученные результаты использованы в теоретических работах по определению высоты барьеров деления ядер, удаленных на значительное расстояние от линии β -стабильности. На их основе разработан новый подход к расчету силовых функций β -распада.

Открытие запаздывающего деления стимулировало развитие исследований ядерной космохронологии, а также позволило понять некоторые процессы, протекающие в термоядерных взрывах.

Сегодня главная проблема в этом направлении исследований — это экспериментальное и теоретическое изучение нейтроноизбыточных ядер. Не исключено, что с развитием методов ускорения радиоактивных ядер удастся продвинуться в область ядер, удаленных от линии β -стабильности, на гораздо большее расстояние, чем удается сегодня.

Следует отметить, что еще недостаточно изучен ECDF-распад $^{228}\text{Np} \rightarrow ^{228}\text{U} \rightarrow ff$, хотя минутный период полураспада позволяет провести детальные исследования, а структура ядра ^{228}U представляет для изучения особый интерес. Заслуживает внимания возможность изучения структуры уровней во второй потенциальной яме изомеров формы в процессе запаздывающего деления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В.И., Скобелев Н.К., Флеров Г.Н. — Ядерная физика, 1966, т.4, с.99.
2. Кузнецов В.И., Скобелев Н.К. — Ядерная физика, 1967, т.5, с.1136.
3. Кузнецов В.И., Скобелев Н.К., Флеров Г.Н. — Ядерная физика, 1967, т.5, с.271.
4. Кузнецов В.И., Скобелев Н.К., Флеров Г.Н. — Ядерная физика, 1966, т.4, с.279.
5. Кузнецов В.И., Скобелев Н.К., Флеров Г.Н. — Государственный реестр открытий. Открытие № 160 с приоритетом от 12 июля 1971 г.

6. Гангрский Ю.П., Миллер М.Б., Михайлов Л.В., Харисов И.Ф. — Ядерная физика, 1980, т.31, с.306.
7. Hall H.I., Gregorich K.E., Henderson R.A. et al. — Phys. Rev. C, 1990, v.42, №4, p.1480.
8. Klapdor H.V., Wene C.-O., Izosimov I.N., Naumov Yu.W. — Z. Phys. A, 1979, v.292, p.249.
9. Hill D.L., Wheeler J.A. — Phys. Rev., 1953, v.89, p.1102.
10. Kratz K.L., Herrmann G. — Z. Phys., 1973, v.263, p.435.
11. Изосимов И.Н., Наумов Ю.В. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1978, т.42, № 11, с.2248.
12. Наумов Ю.В., Быков А.А., Изосимов И.Н. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, вып.2, с. 420.
13. Gilbert A., Cameron A.G.W. — Canad. J. Phys., 1965, v.43, p.1446.
14. Скобелев Н.К. — Ядерная физика, 1972, т.15, с.444.
15. Kuznetsov V.I., Lasarev Yu.A., Oganessian Yu.Ts., Plevе А.А. — In: Int. Conf. on Selected Aspects of Heavy Ion Reactions. Saclay, May 3–7, 1982.
16. Оганесян Ю.Ц., Кузнецов В.И., Лазарев Ю.А. — В сб.: Международный симпозиум по синтезу и свойствам новых элементов. Дубна, Д7-80-556, 1980, с.52.
17. Оганесян Ю.Ц., Кузнецов В.И., Лазарев Ю.А., Плеве А.А. — В сб.: Совещание по экспериментальным установкам У-400 и физической программе первоочередных экспериментов на них. Дрезден, 1982 г. Сб. аннотаций, ОИЯИ, Д-7-82-891, Дубна, 1982, с.50.
18. Sommerville L.P., Nurmia M.I., Ghiorso A., Seaborg G.T. — Annual Report, Lawrence Berkeley Laboratory, 1976, LBL-6575, p.39.
19. Habs D., Klewe-Nebenius H., Metag V. et al. — Z. Phys. A, 1968, v.285, p.53.
20. Hall H.I., Gregorich K.E., Henderson R.A. et al. — Phys. Rev. C, 1990, v.41, №2, p. 618.
21. Macfarlane R.D., McHarris W.C. — In: Nuclear Spectroscopy and Reactions. Editor J.Cerny. Part A. NY. and L., Academic Press, 1974, p.243.
22. Гангрский Ю.П., Маринеску Г.М., Миллер М.Б., Харисов И.Ф. — Ядерная физика, 1978, т.27, с.894.
23. Hall H.I., Gregorich K.E., Henderson R.A. et al. — Phys. Rev. Lett. 1989, v.63, p 2548.
24. Hoffmann D.C., Hoffmann M.M. — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1974, v.24, p.151.
25. Scofield J.H. — At. Data Nucl. Data Tables, 1974, v.14, p.121.
26. Poenaru D.N., Ivascu M.S., Mazilu D. — In: Charged Particle Emission from Nuclei, ed. by D.N. Poenaru and M.S.Ivascu, CRC Press, Boca Raton, 1989, v.III, p.41.
27. Viola V. — Nucl. Data, 1966, Sect. B1, p.391.
28. Unik J.P., Gindler J.E., Glendenin L.E. — In: Proc. of the 3rd IAEA Symposium on the Physics and Chemistry of Fission, 1973, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1974, v.2, p.19.
29. Hingmann R. et al. — Rep. GSI 85-1, 1985, p.88.
30. Stodel Ch. et al. — Intern. School-Seminar "Heavy Ion Physics", Dubna, 1997. Ed. Yu. Oganessian, World Scientific, Singapore, 1998, p.712.
31. Кузнецов В.И. — ЭЧАЯ, 1981, т.12. вып.6, с.1312.
32. Oganessian Yu.Ts., Lasarev Yu.A. — In: Treatise on Heavy Ions Science. Ed. Bromley D.A. NY, Plenum Press, 1985.
33. Lasarev Yu.A. et al. — Europhys. Lett., 1987, v.4, p.893.
34. Берлович Э.Е., Новиков Ю.Н. — Докл. АН СССР, 1969, т.185, с.1025.

35. Гангрский Ю.П., Маринеску Г.М., Миллер М.Б. и др. — ЯФ, 1978, т.27, с. 894.
36. Wolzak G., Marinaga H. — Radiochem. Acta, 1963, v.1, p.23..
37. Trautman N., Denig R., Herrmann G. — Radiochem. Acta, 1969, v.11, p.168.
38. Батист Л.Х. и др. — Препринт ЛИЯФ, 1977, № 363, Л1977.
39. Hall H.I., Gregorich K.E., Henderson R.A. et al. — Phys. Rev. C, 1989, p.1866.
40. Myers W.D., Swiatecki W.J. — Nucl. Phys., 1966, v.81, p.1.
41. Струтинский В.М. — Ядерная физика, 1966, т.3, с.614.
42. Brack M. et al. — Rev. Mod. Phys., 1972, v.44, p.320.
43. Back B.B. et al. — Phys. Rev. C, 1974, v.9, p.24.
44. Klapdor H.V., Wene C.D., Izosimov I.N. — Z. Phys. A, 1979, v.292, p.249;
Изосимов И.Н. — Известия АН СССР, сер. физ., 1989, т.53, с.2451.
45. Изосимов И.Н. — ЭЧАЯ, 1999, т.30, с.321.
46. Изосимов И.Н. — Изв. АН, сер. физ., 1993, т.57, №1, с.29.
47. Ingley J.S. — Nucl. Phys. A, 1969, v.124, p.130.
48. Cowan G.A. — In: R.A.Welch Foundation Conference on Chemical Research, XIII, Houston, Texas, 1969, p.130.
49. Bell I.G. — In: Intern. Conf. on the Study of Nuclear Structure with Neutrons. Antwerpen, July, 1965, p.127.
50. Dorn D.W., Hoff R.W. — Phys. Rev. Lett., 1965, v.14, p.440.
51. Tielmann F.K., Metzinger J., Klapdor H.V. — Z. Phys. A, 1983, v.309, p.301.
52. Hoff R.W. — In: Weak and Electromagnetic Interaction in Nuclei. Ed. H.V.Klapdor. Heidelberg. Springer Verlag, 1986, p.12.
53. Hoff R.W. — Inst. Phys. Conf. Ser. №88; J. Phys. G: Nucl. Phys., 1988, 14(Suppl.) p.343.
54. Aleklett K., Nyman G., Rudstam G. — Nucl. Phys. A, 1975, v.245, p.425.
55. Möller P., Nix J.R. — In: Proc. of the 3rd IAEA Symp. on Phys. and Chem. of Fission, Rochester, NY, 1973, IAEA, Vienna, 1974, v.1, p.103.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЯДЕРНЫХ ЧАСТИЦ

В.В.Путышев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре представлены как классические, так и новые методы и результаты аналитических исследований строений стационарных уравнений Шредингера и Фаддеева и их решений, описывающих состояния трехчастичных систем с центральными и S -волновыми взаимодействиями. Особое внимание уделено угловому анализу этих уравнений и точным законам преобразования трехчастичных координат, операторов, базисных и волновых функций при циклической перестановке частиц. Дан анализ проблемы ложных решений.

In the review we present classical and new methods and results of analytical studying of structure of stationary Shrödinger and Faddeev equations and their solutions describing the states of three particle systems with two-body center and S -wave potentials. A special attention is paid to the angular analysis of those equations and exact transformation laws of three-body coordinates, operators, basic and wave functions at cyclic permutation of the particles. Analysis of the spurious-solutions-problem is given.

1. ВВЕДЕНИЕ

К сожалению, в физической литературе используются не только самые разнообразные обозначения одной и той же величины, оператора или функции, но и нередко вводятся неадекватные определения и концепции. Поэтому обсуждение той или иной проблемы приходится начинать с оговорок о том, какой смысл будет иметь тот или иной термин и символ.

В настоящем обзоре, как правило, используется терминология и обозначения, принятые в известных учебниках [1–5] и справочниках [6–9] по различным разделам математики, классическому курсу квантовой механики [10], книгах по теории потенциального рассеяния [11–21] и углового момента [22–24], а также в монографиях, посвященных методу гипергармоник [25–27]. Все термины и компактные авторские обозначения подробно поясняются до их первого использования. Абсолютное большинство таких обозначений совпадает с использованными в серии работ [28–74], выполненных автором либо при его посильном участии. Всюду ниже знак $\equiv$ связывает символ и его определение либо левую и правую части тождества; векторы, матрицы и множества обозначаются жирными и, соответственно, прописными буквами.

Как известно автору из его многолетнего опыта, у довольно широкого круга читателей-физиков словосочетание «аналитические результаты исследования математически корректно поставленной задачи» ассоциируется только с явными и замкнутыми выражениями для точных решений такой задачи, обладающих сугубо физическим смыслом. Такое восприятие термина «аналитические результаты...» является слишком узким. В математике к аналитическим результатам анализа поставленной задачи принято относить все утверждения и символные выражения, доказанные без каких-либо вычислений и описывающие самые разнообразные свойства как самой задачи, так и всех ее решений, а также глобальные и локальные свойства вспомогательных операторов и функций.

В настоящем обзоре анализируются шредингеровская и фаддеевская формулировки задачи трех квантово-механических частиц с парными взаимодействиями в виде произвольных суперпозиций кулоновского и ядерного потенциалов. Предполагается, что каждое парное взаимодействие зависит только от относительных координат частиц в рассматриваемой паре. Для краткости такая задача названа «задачей трех ядерных частиц».

Перечислим объекты квантовой теории нескольких частиц, аналитическое исследование которых представляется фундаментальным для дальнейшего развития этой теории. Особое место занимают точные законы преобразования операторов, базисных, вспомогательных и волновых функций при геометрических преобразованиях разнообразных систем координат. Не менее важны аналитические методы проектирования многомерных динамических уравнений на различные полные базисы с целью уменьшения числа независимых переменных. При такой редукции неизбежно возникают матричные элементы от взаимодействий и различного рода интегралы перекрытия между базисными и искомыми функциями. Знание аналитических свойств этих объектов позволяет существенно упростить анализ редуцированных уравнений и их численное решение. С теоретической и практической точек зрения, несомненно, интересны исследования эквивалентности различных формулировок одной и той же многочастичной задачи. Одна из проблем такого рода — существование регулярных, но лишенных физического смысла решений переформулированной задачи. Доказательства критериев существования таких особых решений, их классификация и способы точного исключения, безусловно, важны для построения математически корректной теории. Очевидно, что такая теория окажется незавершенной без асимптотических методов, позволяющих построить в явном виде полные асимптотические разложения волновых функций в физически интересных пределах по аргументам и параметрам.

Основная цель настоящего обзора — подробное описание некоторых фундаментальных методов аналитического исследования упомянутых выше объектов задачи трех ядерных частиц и анализ на достоверность некоторых

точных результатов, полученных в рамках теории фаддеевских уравнений и метода гипергармоник в координатном пространстве.

Такой выбор обусловлен тем, что автор выполнил серию исследований [57–72,74] задачи трех ядерных частиц именно этими методами. Обсуждение других подходов к точному решению такой задачи невозможно из-за жестких ограничений на допустимый объем обзора и представляется излишним из-за наличия фундаментальных статей обзорного характера и монографий. Упомянем наиболее важные из таких публикаций, чтобы напомнить основы наиболее часто используемых аналитических методов и попутно пояснить, какие именно аналитические результаты не суммировались и почему это необходимо сделать в настоящем обзоре.

Один из наиболее распространенных способов исследования многомерных динамических уравнений для нескольких частиц основан на представлении искомым функций и (или) операторов в виде рядов по подходящим базисам и последующем проектировании уравнений на такие базисы. Угловыми базисами называются полные наборы из собственных функций квадратов операторов угловых моментов, содержащихся в свободном гамильтониане. Задача проектирования уравнений на угловые базисы часто именуется угловым анализом этих уравнений. Угловые базисные функции известны в явном виде, хорошо изучены и по определению не зависят от взаимодействий. По этим причинам угловые базисы используются наиболее часто. Проектированием на подходящий угловой базис исходные уравнения точно сводятся к уравнениям с меньшим числом независимых переменных. Аналитический и численный анализ уравнений в пространстве небольшой размерности — задача менее сложная и во многих случаях достаточно полно решенная. Пример такой задачи — двухчастичное уравнение Шредингера с центральным (сферически-симметричным) взаимодействием [14]. Изначально это уравнение формулируется в трехмерном пространстве $\mathcal{R}_x^3$ векторов $\mathbf{x}$, характеризующих относительное расположение двух частиц в некоторой фиксированной системе координат S_3 . В качестве углового базиса часто используются сферические функции [23] или их линейные комбинации. Сферические функции $Y_{b\beta}(\hat{x})$ зависят от двух сферических углов $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ вектора $\mathbf{x}$, являются собственными для квадрата оператора углового момента $\mathbf{L}_x$ и образуют полный ортонормированный базис на единичной сфере S_x^2 в $\mathcal{R}_x^3$. Поэтому такой базис нередко называют сферическим. Исходное трехмерное уравнение Шредингера с центральным взаимодействием проектированием на сферический базис сводится к системе незацепляющихся обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций одной переменной x . Такие уравнения принято называть радиальными уравнениями Шредингера.

Общая теория обыкновенных дифференциальных уравнений [1,6,8] достаточно развита. Ее методами радиальное уравнение Шредингера точно ре-

шено для серии модельных потенциалов. К ним относятся кулоновский и осцилляторный потенциалы, потенциалы Морса и прямоугольной ямы [10], а также семейство баргмановских потенциалов [18].

Для большинства **реалистических** потенциалов, воспроизводящих экспериментальные данные по двухчастичным спектрам и фазам рассеяния, радиальные уравнения Шредингера точно не разрешены. С целью их аналитического исследования и приближенного решения были разработаны различные подходы: метод аппроксимации локальных взаимодействий сепарабельными потенциалами конечного ранга [17], вариационный метод [20], метод потенциала нулевого радиуса [16], теория возмущений [14,19], квазиклассическое приближение [4,11] и различные версии [73,74] метода фазовых функций [12,13].

Обобщение всех вышеперечисленных методов для аналитического исследования задачи трех частиц и развитие любых других подходов к такому исследованию затрудняются всего двумя обстоятельствами: сравнительно большой размерностью трехчастичного пространства и общепринятым способом описания взаимодействий. Обсудим оба обстоятельства для ясного понимания того, какие трудности можно преодолеть, а какие — в принципе, нельзя.

В системе координат S_3 , связанной в $\mathcal{R}^3$ с центром масс трехчастичной системы, относительное положение трех частиц характеризуется уже не тремя, как в случае двух частиц, а шестью координатами. В качестве таковых часто используются трехмерные векторы Якоби [17] $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или сопоставленные им гиперсферические координаты [1] (r, Ω) : гиперрадиус $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ и набор из пяти гиперуглов $\Omega \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \varphi)$, где $\varphi \equiv \arctg(y/x)$. Длины x и y ассоциируются с расстояниями между частицами в выбранной паре частиц и расстоянием от третьей частицы до центра масс этой пары. Ясно, что для координатного описания трехчастичной конфигурации необходимо ввести шестимерное координатное пространство $\mathcal{R}^6 \equiv \mathcal{R}_x^3 \oplus \mathcal{R}_y^3$. Угловой базис на четырехмерном торе $\mathcal{T}_{xy}^4 \equiv \mathcal{S}_x^2 \oplus \mathcal{S}_y^2$ (единичной пятимерной сфере $\mathcal{S}^5$) в $\mathcal{R}^6$ образует бисферические (гиперсферические) гармоники [1,23]. Бисферические гармоники $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})$ зависят от четырех переменных и являются собственными функциями квадратов операторов угловых моментов $\mathbf{l}_x$ и $\mathbf{l}_y$, сопряженных векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и квадрата оператора полного углового момента $\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y$. Гиперсферические гармоники (гипергармоники) $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)$ зависят от пяти углов и являются собственными функциями как всех квадратов вышеперечисленных операторов, так и квадрата шестимерного углового момента (гипермомента) $\mathbf{L}$. Разложение исследуемой функции в ряд по бисферическим гармоникам (гипергармоникам) будем называть ее бисферическим (гиперсферическим) рядом. Коэффициенты таких рядов назовем бисферическими или гиперсферическими компонентами разложенной функции. По определению бисферические компоненты — функции двух аргументов x, y или r и φ , а гиперсферические компоненты зависят только от одной коорди-

наты r . Область допустимых значений переменных x, y или r, φ — первый квадрант $\mathcal{R}_2^+$ двумерной плоскости $\mathcal{R}_2$, а гиперрадиус r всегда принадлежит неотрицательной полуоси $\mathcal{R}_1^+$.

Если функции, подчиненные в $\mathcal{R}^6$ исследуемым трехчастичным уравнениям, заменить их бисферическими (гиперсферическими) рядами и затем спроектировать уравнения на бисферический (гиперсферический) базис, то получатся точные двумерные (одномерные) уравнения в $\mathcal{R}_+^2$ ($\mathcal{R}_+^1$) для неизвестных бисферических (гиперсферических) компонент. В абсолютном большинстве случаев совокупности уравнений для компонент — бесконечные системы зацепляющихся уравнений. Зацепление обуславливается интегральными операторами, функциями и числовыми коэффициентами.

Например, трехчастичные уравнения Шредингера в $\mathcal{R}_+^1$ зацепляются элементами матрицы полного взаимодействия в базисе гипергармоник [25], уравнения Фаддеева в $\mathcal{R}_+^2$ зацепляются и матрицами парных взаимодействий в бисферическом базисе, и интегральными операторами.

Напомним основные причины, порождающие зацепление. Пусть (i, j, k) — триада различных индексов, нумерующих три частицы и принимающих разные значения 1, 2 или 3. Имеется ровно три разбиения $i(j, k)$ на пару частиц с номерами j и k и частицу, имеющую номер i . Каждому $(i = 1, 2, 3)$ разбиению $i(j, k)$ отвечает своя пара якобиевских векторов $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ или сопоставленных им гиперсферических координат (r, Ω_i) . При циклической перестановке индексов $i(j, k) \rightarrow k(i, j)$ пара $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ переходит в пару $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$. Координаты, помеченные индексом i , принято называть собственными для разбиения $i(j, k)$ и несобственными для двух других разбиений. Взаимодействия в системе трех частиц априорно считаются парными. Более того, постулируется, что полное взаимодействие V равно сумме всех трех парных взаимодействий V_i , а взаимодействия V_i в каждой паре (j, k) описываются функцией $V_i(\mathbf{x}_i)$, заданной по определению в собственных для этой пары координатах $\mathbf{x}_i$. Постулат о таком аддитивном представлении полного взаимодействия подтвержден разнообразными экспериментальными данными. Определение функциональной зависимости парных взаимодействий в несобственных координатах, в принципе, возможно путем экспериментального анализа трехчастичных процессов. Такие эксперименты достаточно сложны, а их последующая обработка вносит многочисленные теоретические неопределенности. Поэтому парные взаимодействия экспериментально восстанавливаются в их собственных координатах и в таком виде входят в теорию. Очевидно, что если записать полное взаимодействие в одной системе координат Якоби, то она окажется собственной для одного парного взаимодействия и несобственной для двух других. При переходе от собственных координат к несобственным взаимодействия и функции обычно теряют многие свои свойства, а их функциональная зависимость, как правило, усложняется. Например, центральное взаимодействие $V_k(x_k)$ в несобственных координатах описывается функцией сложного аргу-

мента $V_k(x_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i))$, не обладающей сферической симметрией ни по одному из новых аргументов $\mathbf{x}_i$ или $\mathbf{y}_i$.

Итак, взаимодействия приходится считать парными и заданными в их собственных координатах. Поэтому развитие точных методов решения редуцированных трехчастичных уравнений невозможно без знания всех свойств объектов, обуславливающих зацепление таких уравнений, и способов минимизации зацеплений. Мощный прием, минимизирующий зацепление, — одновременное использование различных систем координат и разбиение искомой функции на вспомогательные компоненты. Этот прием часто используется в молекулярной, атомной и ядерной физике и позволяет существенно упростить как математическую постановку задачи нескольких частиц, так и последующие аналитическое и численное исследования уже поставленной задачи.

Яркий пример вышесказанного — фаддеевское разбиение [21] трехчастичной T -матрицы на три уравнения для ее компонент $T_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$, записанных в их собственных координатах — импульсах Якоби $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i$, сопряженных координатам Якоби $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$. Именно такое разбиение и способ записи позволили Фаддееву впервые математически корректно сформулировать в его работе [75] задачу трех частиц с парными короткодействующими потенциалами.

В методе гипергармоник [25–27] одновременное использование трех ($i = 1, 2, 3$) систем гиперсферических координат (r, Ω_i) позволяет значительно упростить и унифицировать вычисление матричных элементов парных взаимодействий в гиперсферическом базисе [76].

Одновременное использование нескольких систем координат невозможно без знания законов преобразования операторов, базисных, вспомогательных и волновых функций при переходе от одной системы координат к другой. Преобразования операторов парных взаимодействий, угловых моментов и сферических функций при отражении, сдвиге и вращении систем координат в $\mathcal{R}_x^3$ тщательно исследованы [22, 23]. Для матричных элементов многих двухчастичных операторов, действующих в $\mathcal{R}_x^3$, известны явные выражения и развиты эффективные алгебраические методы вычисления [22–24]. Преобразования трехчастичных операторов, угловых базисов и различных вспомогательных функций при циклической перестановке частиц в $\mathcal{R}^6$ (или переходе от одного набора координат Якоби к другому) изучены не столь подробно. Поэтому в разд. 2 дан оригинальный анализ более общего, чем циклическая перестановка частиц, кинематического преобразования координат, операторов и угловых базисов. Особое внимание уделено исследованию общих и локальных свойств ядер интегральных операторов фаддеевских уравнений в $\mathcal{R}_+^2$ и коэффициентов унитарного преобразования гипергармоник при переходе $(r, \Omega_i) \rightarrow (r, \Omega_k)$. Стоит отметить, что при $\ell = L = 0, 1, 2, 3$ явные выражения для таких коэффициентов выведены Богословским и Клепиковым [77], а в общем случае — получены позже Рейналом и Реваи [78]. Ко-

эффиценты Рейнала—Реваи — шестикратные суммы, содержащие $3j$ - и $9j$ -символы и тригонометрические функции так называемого кинематического угла γ . Столь сложное представление оказалось крайне неудобным с вычислительной точки зрения. Поэтому впоследствии для коэффициентов Рейнала—Реваи были выведены разнообразные рекуррентные соотношения [25,79–81], системы линейных уравнений [72,79,82], интегральное и дифференциальное представления [65,72].

Однако рекуррентные соотношения слишком сложны для исследования аналитических свойств коэффициентов Рейнала—Реваи как функций кинематического угла γ . Знание таких свойств необходимо не только для ускорения вычислений различных матричных элементов в базисе гипергармоник [25] и построения функций с наперед заданной симметрией [81,83–86], но и для суммирования в явном виде различных рядов, содержащих коэффициенты Рейнала—Реваи. Задачи о существовании некоторых точных [66] и ложных [67–71] решений уравнений Фаддеева сводятся к определению значений параметра γ , при которых разрешимы алгебраические системы уравнений, содержащие коэффициенты Рейнала—Реваи. Задача суммирования рядов, содержащих эти коэффициенты, возникает при исследовании асимптотик трехчастичных волновых функций и их фаддеевских компонент в окрестности точки тройного столкновения [64,68].

Таким образом, имеется широкий круг проблем, решение которых невозможно без предварительного исследования общих и локальных свойств коэффициентов Рейнала—Реваи как функций кинематического угла. Исследованию таких свойств посвящены работы [58,65,72]. Изложением их основных результатов и некоторых оригинальных численных алгоритмов завершается разд. 2.

Следующий раздел начинается с отсутствующего в литературе подробного и единообразного описания строений трехчастичных уравнений Шредингера и Фаддеева в бисферическом и гиперсферическом базисах и общих аналитических свойств решений таких уравнений.

Математически корректная формулировка квантовой задачи трех частиц с парными короткодействующими потенциалами впервые была дана Фаддеевым в импульсном пространстве [75]. Позднее наряду с интегральными уравнениями Фаддеева для компонент T -матрицы стали интенсивно применяться дифференциальные уравнения Фаддеева для трех компонент Ψ_i волновой функции $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$ в шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$. Главная проблема квантовой теории трех частиц в координатном пространстве заключалась в выводе физических граничных условий в пределе больших относительных расстояний между частицами, гарантирующих существование и единственность решений уравнений Фаддеева. Основной вклад в решение этой сложной задачи был сделан Меркурьевым в его собственных работах и работах, выполненных в соавторстве. Многочисленные ссылки на

эти работы и альтернативные исследования даны в книге [21] и подробных обзорах [87–91].

Уравнения Фаддеева в $\mathcal{R}_+^2$ являются интегродифференциальными уравнениями для неизвестных бисферических компонент, зависящих от двух аргументов x и y или r и φ . Интенсивное исследование и практическое применение интегродифференциальных уравнений было обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что существование и единственность решений таких уравнений установлены для широкого класса локальных парных взаимодействий [21] в случае как нейтральных, так и заряженных частиц. Во-вторых, тем, что интегральные операторы действуют лишь на одну переменную φ . Поэтому дискретизацией интегродифференциальные уравнения сводятся к системе линейных уравнений с ленточной матрицей [59, 88, 92]. Именно разреженность матрицы линейной задачи в сочетании с простыми граничными условиями и обуславливает широкое практическое применение интегродифференциальных уравнений для исследования различных свойств трехчастичных систем. С этой целью были развиты разнообразные численные алгоритмы, основанные на конечно-разностной аппроксимации [88], аппроксимации кубическими эрмитовыми сплайнами [92–94] и кубическими сплайнами, обладающими вторыми непрерывными производными [59]. Недавно был предложен метод сильной связи каналов для уравнений Фаддеева [95]. Преимущества этого подхода по сравнению с методом конечномерных аппроксимаций гамильтонианов подсистем, развитым в работах [29–38] в рамках многочастичного уравнения Липпмана—Швингера, стоит пояснить более подробно. Метод конечномерных аппроксимаций для такого уравнения имеет слишком узкую область применения [35], ограниченную отрицательными значениями полной энергии системы. Этот метод, в принципе, не позволяет учесть непрерывные спектры всех подсистем, а при практическом применении требует аппроксимации парных взаимодействий сепарабельными потенциалами конечного ранга. Три упомянутых ограничения оказываются несущественными в методе сильной связи каналов для уравнений Фаддеева [95], основанном на разложении компонент волновой функции по базисам из собственных функций гамильтонианов двухчастичных подсистем [96]. Этот метод базируется на уравнениях Фаддеева и поэтому обладает рядом преимуществ по сравнению с методом сильной связи каналов для уравнения Шредингера [14]. Как отмечалось в работе [95], главное из них — отсутствие в окончательных уравнениях членов, связанных с неортогональностью каналов рассеяния [97, 98], и возможность строгого учета вкладов непрерывного спектра взаимодействующих кластеров.

Эффективность всех способов дискретизации интегродифференциальных уравнений Фаддеева в $\mathcal{R}_+^2$ существенно зависит от выбора двумерной сетки узлов. Оптимальный выбор определяется качественной зависимостью искомых решений (бисферических фаддеевских компонент) от их аргументов. Поэтому

знание аналитических свойств таких компонент, в первую очередь, их полных асимптотических разложений вблизи всех границ области $\mathcal{R}_+^2$ представляется особо важным и для экономизации вычислительных алгоритмов. Исследование аналитических свойств бисферических фаддеевских компонент затруднено тем, что они зависят от двух переменных и подчинены уравнениям, содержащим нелокальные операторы. Поэтому важным и вполне естественным представлялся следующий шаг редукции, намеченный Мандельцвейгом [99]. Этот шаг заключается в разделении переменных r и φ разложением фаддеевских бисферических компонент по наиболее удобному базисным функциям угловой переменной φ . Основная проблема такого разделения заключалась в выборе наиболее удобного углового базиса и исследовании аналитических свойств ядер интегральных операторов. Достаточно полному решению этих задач были посвящены работы [58,67,72]. В них исследовался переход от уравнений Фаддеева в бисферическом базисе к уравнениям Фаддеева в гиперсферическом базисе. Анализом этого перехода как исходного этапа объединения теории Фаддеева и метода гипергармоник завершается разд. 3.

Упомянутое объединение открывает немало возможностей для точного решения уравнений Фаддеева с произвольными парными взаимодействиями. Особое место среди множества точных решений трехчастичных уравнений Фаддеева с заданными парными взаимодействиями занимают решения, не несущие никакой информации о взаимодействиях. Такие нетривиальные ($\Psi_i \neq 0$) решения уравнений Фаддеева отвечают тривиальной волновой функции ($\Psi \equiv 0$) и называются ложными решениями или решениями-призраками. Факт существования ложных решений отмечался многими авторами обзоров [100,101] и оригинальных работ [57,66–68,102–107]. Общие свойства трехчастичного гамильтониана, порождающие ложные решения и такие общие вопросы, как полнота пространства ложных и физических решений, исследовались в работах [102–105]. Наиболее значимое для спектральной теории фаддеевских трехчастичных уравнений утверждение доказано Яковлевым [105] в случае полного трехчастичного гамильтониана с чисто дискретным спектром. В этом случае матричные операторы, соответствующие трехчастичным уравнениям Фаддеева и сопряженным уравнениям, имеют два типа инвариантных пространств. На пространствах первого типа спектр операторов совпадает со спектром полного гамильтониана, на пространствах второго типа эти же операторы эквивалентны свободному трехчастичному гамильтониану.

В явном виде ложные решения для системы трех тождественных частиц, взаимодействующих посредством S -волновых парных потенциалов и находящихся в состоянии с полным угловым моментом $\ell = 0$, были найдены в работах [57,67,106,107]. Ложные решения для такой же системы, но в состоянии с $\ell = 1$, упоминались в работах [66,68]. Для произвольной трехчастичной системы с парными центральными потенциалами критерий существования

ложных решений, обладающих наперед заданным ℓ , был впервые доказан в работе [71]. Ложные решения для систем из трех тождественных бозонов или фермионов в состояниях с $\ell = 0$ получены в явном виде в работе [108].

Уравнения, определяющие ложные решения, не содержат потенциалы. Поэтому ложные решения, найденные аналитически, можно использовать как универсальные эталонные функции для тестирования алгоритмов численного решения фаддеевских уравнений с произвольными взаимодействиями. Существование ложных решений иногда ошибочно трактуется как неэквивалентность трехчастичного уравнения Шредингера и отвечающих ему уравнений Фаддеева. Такое понимание порождается главным образом неоднозначной разрешимостью уравнений Фаддеева, не дополненных физическими граничными условиями или же содержащих потенциалы, для которых факт существования и единственности фаддеевской краевой задачи не установлен. Из последних замечаний ясно, что обсуждение известных свойств ложных решений и проблем, порождаемых этими свойствами, представляется особо важным и интересным. Анализом общих свойств ложных решений начинается разд. 4, посвященный точным решениям уравнений Фаддеева. Точные решения известны лишь для некоторых потенциалов. К ним относятся потенциал гармонического осциллятора [57,106] и потенциал, убывающий обратно пропорционально квадрату расстояния [66,109]. Теорема существования и единственности решений фаддеевской задачи с парными потенциалами, растущими на бесконечности или же имеющими сингулярности центробежного типа при малых расстояниях, не доказана. Более того, в этих случаях асимптотики фаддеевских компонент при больших расстояниях неизвестны. Поэтому анализ точных решений задачи трех тождественных бозонов с потенциалами осцилляторного и центробежного типов интересен для обобщения теории Фаддеева. Еще одна причина продолжить разд. 4 таким анализом вызвана другими немаловажными для ядерной физики фактами. Перечислим их.

Исследование задачи N квантовых частиц с парными взаимодействиями, имеющими при $x \rightarrow 0$ сингулярности типа αx^{-2} , где α — некоторый коэффициент, а x — относительное расстояние между частицами, представляется достаточно интересным как для обобщения теории рассеяния, так и для математически корректного решения такой задачи. Дело в том, что многие нуклон-нуклонные (NN) потенциалы, полученные из современных теоретико-полевых моделей NN -взаимодействия [74], например боннский потенциал [110], содержат короткодействующие слагаемые с асимптотикой $O(x^{-2})$ при $x \rightarrow 0$. Однако критерий существования регулярных решений N -частичного уравнения Шредингера с такими сингулярными потенциалами известен лишь в частных случаях. При $N = 2$ такие решения существуют [10], если $\alpha > -1/4$. В работе [109] Авишаи численно исследовал задачу трех тождественных бозонов с полным моментом $\ell = 0$ и S -волновыми парными потенциалами αx_i^{-2} . Итогом исследования было первое численное

доказательство того факта, что при некоторых значениях параметра α уравнения Фаддеева имеют регулярные решения в виде произведения функции Бесселя $J_\nu(r)$ на функцию гиперугла φ . В работе [66] исследовалась такая же трехчастичная задача, но в случае произвольного ℓ . В этом общем случае был доказан критерий существования точных решений, представимых в виде произведения функции Бесселя $J_\nu(r)$ на конечную линейную комбинацию гипергармоник. Раздел 4 завершается доказательством этого критерия и сопоставлением результатов работ [66] и [109].

Не менее важным для теории является знание асимптотик волновых функций в физически интересных пределах их параметров. Один из них — полная энергия. Некоторые аналитические методы построения низкоэнергетических разложений в задачах двух и трех ядерных частиц описаны в работах [39–56]. Анализ современного состояния теории низкоэнергетических разложений для таких задач дан в предыдущих обзорах [73] и [74].

Настоящий обзор написан в том же методическом духе, что и эти публикации: особое внимание уделяется выводу наиболее значимых соотношений, сопоставлению известных результатов, обсуждению их физического и математического смысла. Чтобы сделать такое описание доступным и не столь утомительным для максимально широкого круга читателей, в обзоре специально приводятся простые поясняющие примеры, материал излагается по принципу перехода от простого к сложному, а сам переход описывается достаточно подробно. Особо важные утверждения сначала формулируются, затем доказываются и обсуждаются. Такая последовательность изложения материала представляется автору оптимальной, потому что предоставляет читателю полное право на выбор: ограничиться прояснением сути рассматриваемого вопроса в целом или же познакомиться со всеми «подводными камнями», прочитав полное доказательство и обсуждение особых случаев. Выбрать в разделе нужный параграф позволит краткий план изложения, которым начинается каждый раздел, за исключением разд. 5, составленного из выводов и заключительных замечаний.

2. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Этот раздел посвящен более общему, чем известная циклическая перестановка частиц, кинематическому преобразованию в задаче трех тел. В п. 2.1 вводятся декартовы и гипersферические координаты Якоби, а затем поясняется геометрический смысл их кинематического преобразования в общем и двух особых случаях: когда все частицы расположены в координатной плоскости и на одной прямой. В п. 2.2 операторными методами теории углового момента последовательно анализируется кинематическое преобразование

функций произвольной формы, угловых базисов и разложений по таким базисам. Анализ начинается в пп. 2.2.1 с определения операторов перестановки, отражения и поворотов и построения операторов кинематического преобразования. Затем в пп. 2.2.2 перечисляются основные свойства угловых базисов, а в пп. 2.2.3 поясняется связь между теоремами сложения и кинематическим преобразованием. Далее в пп. 2.2.4 и 2.2.5 описывается кинематическое преобразование бисферических и гипersферических рядов.

2.1. Кинематическое преобразование координат. Рассмотрим систему трех частиц с массами m_i , $i = 1, 2, 3$. В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ введем декартову систему координат S_3 с направляющими ортами $\hat{\mathbf{e}}_i$. Пусть $\mathbf{a}_i$ — радиус-вектор частицы с номером i в системе S_3 . Введем три системы относительных координат Якоби:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\equiv \hbar^{-1} \left(\frac{2m_i m_j}{m_i + m_j} \right)^{1/2} (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i), \\ \mathbf{y}_k &\equiv \hbar^{-1} \left(\frac{2m_k (m_i + m_j)}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j}{m_i + m_j} - \mathbf{a}_k \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы i, j, k образуют циклическую перестановку триады индексов $(1, 2, 3)$: индекс i переходит в k , j — в i , а k — в j . Приведенные векторы Якоби $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ объединим в двухкомпонентные столбцы $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^T$ и шестимерные векторы $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$. Произвольным образом выберем два из трех таких векторов и введем сокращенные обозначения:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \quad \mathbf{r}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \equiv \mathbf{r}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k). \quad (2)$$

По определению вектор $\mathbf{r}$ с трехмерными компонентами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежит шестимерному координатному пространству $\mathcal{R}^6 \equiv \mathcal{R}_x^3 \oplus \mathcal{R}_y^3$, которое является прямой суммой трехмерных пространств $\mathcal{R}_x^3$ и $\mathcal{R}_y^3$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Декартову систему координат S_6 в $\mathcal{R}^6$ выберем так, чтобы проекции r_ν вектора $\mathbf{r}$ на направляющие орты $\hat{\mathbf{n}}_\nu$ этой системы были бы связаны с координатами $x_\mu \equiv \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu$ и $y_\mu \equiv \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu$, $\mu = 1, 2, 3$, векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в системе S_3 следующим образом: $r_\nu \equiv x_\nu$, если $\nu = 1, 2, 3$, и $r_\nu \equiv y_{\nu-3}$ при $\nu = 4, 5, 6$. При таком определении системы S_6 гипersферические углы $\Omega = (\hat{x}, \hat{y}, \varphi)$ вектора $\mathbf{r}$ в $\mathcal{R}^6$ допускают наглядную геометрическую интерпретацию в трехмерных терминах: пара $\hat{q} \equiv (\theta_q, \varphi_q)$ сферических углов вектора $\mathbf{q}$ определяет направление вектора $\mathbf{q} = \mathbf{x}, \mathbf{y}$ в S_3 , а величина гиперугла $\varphi \equiv \arctg(y/x) \in [0, \pi/2]$ фиксирует отношение трехмерных длин x и y векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Поэтому в отличие от углов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ угол φ не изменяется при произвольном трехмерном повороте векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или координатной системы S_3 . Взаимное расположение трех частиц в системе их центра масс характеризуется шестью числами. В качестве совокупности таких чисел, обозначаемой далее дираковским кет-символом $|\mathbf{r}\rangle$, будем одновременно использовать декартовы координаты x_μ ,

y_μ трехмерных компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{r}$ в системе S_3 , его декартовы координаты r_ν в системе S_6 и отвечающие им гиперсферические координаты (r, Ω) : гиперрадиус $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ и набор углов Ω . Ту же самую трехчастичную конфигурацию $|\mathbf{r}\rangle$ можно описать в координатах $x'_\mu, y'_\mu; r'_\nu$ или (r', Ω') , $\Omega' \equiv (\hat{x}', \hat{y}', \varphi')$ вектора $\mathbf{r}'$, потому что между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ имеется взаимно однозначное соответствие. Действительно, из определения (1) следует, что столбцы $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')^T$ выбранных векторов Якоби, отвечающие векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, связаны линейным ортогональным и однопараметрическим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +\cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Абсолютное значение его параметра γ для исследуемой трехчастичной системы фиксируется только отношениями масс частиц, а знак определяется четностью перестановки триады (k, i, j) индексов, нумерующих частицы, к триаде $(1, 2, 3)$. В нашем случае $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i, \mathbf{y} = \mathbf{y}_i$, а $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_k, \mathbf{y}' = \mathbf{y}_k$ и

$$\gamma \equiv \gamma_{ki} \equiv \varepsilon_{ki} \arctg(m_j(m_1 + m_2 + m_3)/m_i m_k)^{1/2}, \quad (4)$$

причем $\varepsilon_{ki} = -\varepsilon_{ik} = 1$ для $(k, i) = (3, 1), (1, 2), (2, 3)$. Так как параметр γ имеет смысл угла, определяемого только кинематическими характеристиками трехчастичной системы, то его принято называть кинематическим углом, а соотношение (3) — кинематическим преобразованием пар векторов Якоби и сопоставленных им шестимерных векторов.

Опишем область допустимых и множество особых значений кинематических углов. Согласно определению (4) три кинематических угла с индексами из разных триад линейно зависимы:

$$\gamma_{31} + \gamma_{12} + \gamma_{23} = \pi, \quad \gamma_{13} + \gamma_{21} + \gamma_{32} = -\pi, \quad (5)$$

а при любых ненулевых и конечных значениях масс частиц значение любого из всех шести кинематических углов принадлежит интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$. Точки $0, \pm\pi/4$ и $\pm\pi/2$ являются предельными в следующем смысле. Для трехчастичных систем из одной легкой и двух тяжелых частиц, сравнимых по массам, значения кинематических углов близки к 0 и $\pm\pi/2$. Если же система состоит из одной тяжелой частицы и двух легких частиц с равными массами, то значения кинематических углов близки к $\pm\pi/4$ и $\pm\pi/2$.

Например, согласно равенствам (4) и (5),

$$\gamma_{12} \rightarrow 0; \gamma_{31}, \gamma_{23} \rightarrow \pi/2, \quad \text{если} \quad m_3/m_1 \rightarrow 0, \quad m_1 = O(m_2),$$

$$\gamma_{12} \rightarrow \pi/2; \gamma_{31}, \gamma_{23} \rightarrow \pi/4, \quad \text{если} \quad m_3/m_1 \rightarrow \infty, \quad m_1 = m_2.$$

В вышеуказанных пределах ($\gamma = \gamma_{12} \rightarrow 0, \pi/2$) соотношение (3) принимает соответствующий асимптотический вид:

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x} + \mathbf{y} O(\gamma), \mathbf{y}' = -\mathbf{y} + \mathbf{x} O(\gamma), \quad \gamma \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{y} + \mathbf{x} O(\gamma'), \mathbf{y}' = \mathbf{x} + \mathbf{y} O(\gamma'), \quad \gamma' \equiv (\pi/2 - \gamma) \rightarrow 0. \quad (7)$$

При всех γ линейные комбинации (3) $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ неколлинеарных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат одной и той же плоскости $\mathcal{P}$, проходящей через три частицы. При любом γ кинематическое преобразование (3) сохраняет и нормаль $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x}' \times \mathbf{y}', \quad (8)$$

к этой плоскости, и длину ($r = r'$) шестимерного вектора $\mathbf{r}$. По этой и многим другим причинам удобно использовать гиперсферические координаты (r, Ω) и (r, Ω') векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Опишем кинематическое преобразование гиперсферических углов в общем и двух частных случаях. Используя формулы (3) и определение этих углов, можно выразить трехмерные проекции x'_μ и y'_μ векторов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ на орты $\hat{\mathbf{e}}_\mu$ системы S_3 и векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через длину r вектора $\mathbf{r}$ и его гиперсферические углы Ω , а затем найти в явном виде зависимость $\Omega' = \Omega'(\Omega; \gamma)$ углов Ω' от углов Ω и параметра γ . Формулы, описывающие такую зависимость, будут иметь компактный вид, если использовать комбинацию u тригонометрических функций углов $\hat{x}$ и $\hat{y}$, равную косинусу угла θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$u \equiv \cos \theta \equiv u_{xy} = \cos \theta_x \cos \theta_y + \sin \theta_x \sin \theta_y \cos(\varphi_x - \varphi_y). \quad (9)$$

Например, угол φ' и инвариантные по отношению к трехмерным поворотам системы координат S_3 косинусы u_{ab} углов θ_{ab} между различными векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'$ и угол φ' представятся как функции $\varphi' = \varphi'(\varphi, u; \gamma)$ и $u_{ab} = u_{ab}(\varphi, u; \gamma)$ двух аргументов φ и u и параметра γ :

$$\cos 2\varphi' = \cos 2(\gamma - \varphi) + (u - 1) \sin 2\gamma \sin 2\varphi, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_{xx'} &\equiv \cos \theta_{xx'} = -\sec \varphi' (\cos \gamma \cos \varphi + u \sin \gamma \sin \varphi), \\ u_{xy'} &\equiv \cos \theta_{xy'} = \operatorname{cosec} \varphi' (\sin \gamma \cos \varphi - u \cos \gamma \sin \varphi), \\ u_{yx'} &\equiv \cos \theta_{yx'} = -\sec \varphi' (\sin \gamma \sin \varphi + u \cos \gamma \cos \varphi), \\ u_{yy'} &\equiv \cos \theta_{yy'} = -\operatorname{cosec} \varphi' (\cos \gamma \sin \varphi - u \sin \gamma \cos \varphi), \\ u_{x'y'} &\equiv \cos \theta_{x'y'} = -\operatorname{cosec} 2\varphi' (\sin 2\gamma \cos 2\varphi - u \cos 2\gamma \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Функциональная зависимость $\Omega' = \Omega'(\Omega; \gamma)$ существенно упрощается при некоторых частных значениях гиперуглов Ω , отвечающих особым конфигурациям трехчастичной системы. Опишем две такие конфигурации.

Пусть плоскость $\mathcal{P}$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ совпадает с плоскостью $\mathcal{P}_{13}$ ортов $\hat{\mathbf{e}}_1$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$, а вектор $\mathbf{x}$ коллинеарен орту $\hat{\mathbf{e}}_3$. Другими словами, пусть нормаль (8) и вектор $\mathbf{x}$ ориентированы так, что $\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = N$ и $\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = x$. Тогда в силу равенств (3), (9) и (11)

$$\begin{aligned} \theta_x, \varphi_x &= 0; \quad \theta_y = \theta, \varphi_y = 0; \\ \theta_{x'} &= \arccos u_{xx'}, \varphi_{x'} = \pi(\text{sign} \gamma + 1)/2; \quad \theta_{y'} = \arccos u_{xy'}, \varphi_{y'} = \pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Наборы Ω и Ω' таких гипербесферических углов, описывающие кинематическое преобразование в плоскости $\mathcal{P}_{13}$, пометим индексом p , т.е. введем обозначения $\Omega_p \equiv (0, 0, \theta, 0, \varphi)$ и $\Omega'_p(\theta_{xx'}, \varphi_{x'}, \theta_{xy'}, 0, \varphi')$.

Пусть теперь все три частицы лежат на одной и той же прямой $\mathcal{L}_3$, что и орт $\hat{\mathbf{e}}_3$, причем вектор $\mathbf{y}$ коллинеарен этому орту, т.е. $\mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = y$. Тогда по определению (9) имеем $u = 1$. При $u = 1$ и любых φ и γ функции (11) достигают своих экстремальных значений, причем

$$u_{xx'} = -\text{sign}(\pi/2 + \gamma - \varphi), \quad u_{xy'} = \text{sign}(\gamma - \varphi), \quad (13)$$

а из равенства (10) следуют алгебраические соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi' &= |\varphi - \gamma|, \quad \gamma \geq 0; \\ \varphi' &= \pi/2 + (\varphi - \gamma - \pi/2) \text{sign}(\pi/2 - \varphi + \gamma), \quad \gamma < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя равенства (12) и (13), находим, что рассматриваемой конфигурации отвечают экстремальные значения сферических углов:

$$\begin{aligned} \theta_x, \varphi_x, \quad \theta_y, \varphi_y &= 0; \\ \theta_{x'} &= \pi(1 + \text{sign}(\pi/2 + \gamma - \varphi))/2, \quad \varphi_{x'} = \pi(\text{sign} \gamma + 1)/2; \\ \theta_{y'} &= \pi(1 - \text{sign}(\gamma - \varphi))/2, \quad \varphi_{y'} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Наборы Ω и Ω' углов (14) и (15), описывающие кинематическое преобразование на прямой $\mathcal{L}_3$, совпадающей с ортом $\hat{\mathbf{e}}_3$, пометим индексом l , т.е. положим по определению $\Omega_l \equiv (0, 0, 0, 0, \varphi)$ и $\Omega'_l(0, \theta_{xy'}, \theta_{xx'}, \varphi')$, где согласно равенствам (13) и (15) углы $\theta_{xy'}$ и $\theta_{xx'}$ совпадают с углами $\theta_{y'}$ и $\theta_{x'}$ и равны 0 или π .

Дадим геометрическую интерпретацию кинематического преобразования на прямой $\mathcal{L}_3$. Для этого введем вспомогательное двумерное пространство $\mathcal{R}_q^2$ векторов $\mathbf{q}$ с координатами $q_1 \equiv r \cos \varphi$ и $q_2 \equiv r \sin \varphi$ в некоторой фиксированной декартовой системе координат S_2 . Как следует из формул (3) и (14), кинематическое преобразование (3) на прямой $\mathcal{L}_3$ состоит из отражения вектора $\mathbf{q}$ и поворота полученного вектора $-\mathbf{q}$ на угол $u\gamma$ в $\mathcal{R}_q^2$.

Покажем, что для произвольного кинематического преобразования, за исключением вышеупомянутого частного случая, в $\mathcal{R}^3$ всегда существует система координат S_{p3} , в которой это преобразование происходит в координатной плоскости $\mathcal{P}_{p13}$ ее ортов $\hat{\mathbf{e}}_{p1}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{p3}$.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ произвольные, но неколлинеарные векторы. В $\mathcal{R}^3$ введем систему координат S_{p3} с ортами $\hat{\mathbf{e}}_{p2}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{p3}$, коллинеарными нормали (8) и вектору $\mathbf{x}$. Система S_{p3} получается поворотом системы S_3 . В S_3 этот поворот определяется совокупностью ω трех углов Эйлера [24]:

$$\omega \equiv (\varphi_x, \theta_x, \tilde{\varphi}_y), \quad \tilde{\varphi}_y \equiv \varphi_y - \varphi_x, \quad (16)$$

и описывается трехмерной матрицей $\mathbf{R}(\omega)$: компоненты любого вектора $\mathbf{q}$ в S_{3p} и S_3 связаны матричными равенствами [24]:

$$\begin{aligned} (q_{1p}, q_{2p}, q_{3p})^T &= \mathbf{R}^{-1}(\omega) (q_1, q_2, q_3)^T, \\ \mathbf{R}(\omega) &= \mathbf{R}(\varphi_x, \hat{\mathbf{e}}_3) \mathbf{R}(\theta_x, \hat{\mathbf{e}}_2) \mathbf{R}(\tilde{\varphi}_y, \hat{\mathbf{e}}_3), \end{aligned} \quad (17)$$

в которых $\mathbf{R}(\alpha, \hat{\mathbf{e}}_i)$ — матрица поворота на угол α вокруг оси $\hat{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{R}(\alpha, \hat{\mathbf{e}}_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\alpha, \hat{\mathbf{e}}_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В системе S_{p3} пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ векторов Якоби связаны кинематическим преобразованием в плоскости $\mathcal{P}_{p13}$ векторов $\hat{\mathbf{e}}_{p1}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{p3}$, а гиперуглы векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, отвечающие этим парам, равны Ω_p и Ω'_p .

Теперь опишем кинематическое преобразование (3) на операторном языке. Введем операторы P_x, P_y и T_{xy} перестановки и отражения компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{r}$ и операторы P_r и $\mathbf{R}_{r\nu}(\gamma)$ отражения и поворота этого вектора в гиперплоскостях ортов $\hat{\mathbf{n}}_\nu$ и $\hat{\mathbf{n}}_{\nu+3}$ на угол γ вокруг нормалей $\mathbf{N}_\nu \equiv \hat{\mathbf{n}}_\nu \times \hat{\mathbf{n}}_{\nu+3}$:

$$\begin{aligned} P_x|\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle &\equiv |-\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \quad P_y|\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \equiv |\mathbf{x}, -\mathbf{y}\rangle, \quad P_r \equiv P_x P_y; \\ T_{xy}|\mathbf{r}\rangle &= T_{xy}|\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \equiv |\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle; \\ \mathbf{R}_{r\nu}(\gamma) \begin{pmatrix} r_\mu \\ r_{3+\mu} \end{pmatrix} &\equiv \left((1 - \delta_{\mu\nu}) + \delta_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & +\cos \gamma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} r_\mu \\ r_{3+\mu} \end{pmatrix}, \\ \mu, \nu &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразование (3) вектора $\mathbf{r}$ в вектор $\mathbf{r}'$ опишем оператором

$$K_r(\gamma) : |\mathbf{r}\rangle \rightarrow |\mathbf{r}'\rangle \equiv K_r(\gamma)|\mathbf{r}\rangle. \quad (20)$$

Выразим его через операторы (19) в пределах (6) и (7) и в общем случае:

$$K_r(0) = P_r, \quad K_r(\pi/2) = P_x T_{xy} = T_{xy} P_y, \quad (21)$$

$$K_r(\gamma) = P_r R_r(-\gamma) = R_r(-\gamma) P_r, \quad R_r(\gamma) \equiv \mathbf{R}_{r1}(\gamma) \mathbf{R}_{r2}(\gamma) \mathbf{R}_{r3}(\gamma). \quad (22)$$

Используя равенства (3), (19), (20) и (22), выводим формулу сложения:

$$K_r(\gamma_1 + \gamma_2) = P_r K_r(\gamma_1) K_r(\gamma_2), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2, \quad (23)$$

и серию тождеств по углу γ :

$$\begin{aligned} K_r(-\gamma) &= P_x K_r(\gamma) P_x = P_y K_r(\gamma) P_y = T_{xy} K_r(\gamma) T_{xy}, \\ K_r(\pi/2 - \gamma) &= T_{xy} K_r(\gamma) P_x = P_y K_r(\gamma) T_{xy}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поясним геометрический смысл кинематического преобразования в доступных для наглядного представления трехмерных терминах. Как видно из формул (21), при частных значениях 0 и $\pi/2$ угла γ кинематическое преобразование (3) сводится к отражению и перестановке трехмерных компонент вектора $\mathbf{r}$. Равенства (22) означают, что в общем случае кинематическое преобразование в $\mathcal{R}^6$ состоит из отражения вектора $\mathbf{r}$ и последующего поворота получившегося вектора в гиперплоскости $\mathcal{P}$. Отражение и поворот — коммутативные операции. Поворот описывается оператором $R_r(-\gamma)$ и представляется произвольной последовательностью трех коммутирующих поворотов вокруг нормалей $\mathbf{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, на одинаковые углы, равные $-\gamma$.

Следует отметить, что определение векторов Якоби (1) не совсем удобно. Однако именно такое определение используется в литературе наиболее часто и принято в книгах [21,25]. Это единственная причина — не использовать альтернативное определение векторов Якоби [26], при котором кинематическое преобразование — поворот в гиперплоскости $\mathcal{P}$ на угол γ .

2.2. Кинематическое преобразование функций. Преобразование функций, зависящих от нескольких или всех шестимерных компонент вектора $\mathbf{r}$, при кинематическом преобразовании их аргументов назовем кинематическим. Далее рассматривается только кинематическое преобразование **скалярных** функций, заданных, вообще говоря, в $\mathcal{R}^6$. Множество всех таких функций обозначим символом $\mathcal{A}$. При необходимости дополнительными ограничениями на гладкость функций будем выделять из этого множества подмножества и указывать, на каком подмножестве справедливо обсуждаемое соотношение.

2.2.1. Операторы перестановок, отражения, поворотов и кинематического преобразования. Пусть I — оператор тождественного преобразования: $I\Psi \equiv \Psi$. Введем операторы P_1, P_2, P, T и $K(\gamma)$, описывающие преобразование произвольной функции $\Psi \in \mathcal{A}$ при соответствующей операции (19) и (20) над ее аргументами:

$$\begin{aligned} P_1 \Psi(\mathbf{r}) &\equiv \Psi(P_x \mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad P_2 \Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(P_y \mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{x}, -\mathbf{y}), \\ P \Psi(\mathbf{r}) &\equiv P_1 P_2 \Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(P_r \mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r}), \\ T \Psi(\mathbf{r}) &\equiv \Psi(T_{xy} \mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Psi(\mathbf{r}') \equiv K(\gamma)\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(K_r(\gamma)\mathbf{r}). \quad (26)$$

Известным в теории углового момента [24] способом построим оператор кинематического преобразования функций $K(\gamma)$ в дифференциальной форме. Сначала, используя равенства (21) и (26), выражаем этот оператор при частных значениях $\gamma = 0, \pi/2$ через операторы отражения и перестановки (25):

$$K(0) = P, \quad K(\pi/2) = P_1 T = T P_2. \quad (27)$$

Далее заметим, что из равенств (23) и (26) следует операторное тождество

$$K(\gamma_1 + \gamma_2) \equiv P K(\gamma_1) K(\gamma_2), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2. \quad (28)$$

Теперь рассмотрим случай $\gamma \rightarrow 0$. Используя представление $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, разложим функцию $\Psi(\mathbf{r}')$ в ряд Тейлора в точке $-\mathbf{r}$. Учтя соотношения (6), получим формулу преобразования функции $\Psi(\mathbf{r})$ при инфинитезимальном (бесконечно малом) кинематическом изменении ее аргументов:

$$K(\gamma)\Psi(\mathbf{r}) = P(I - i\gamma J)\Psi(\mathbf{r}) + O(\gamma^2), \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (29)$$

Здесь символом J обозначен не зависящий от вида функции оператор инфинитезимального поворота в гиперплоскости $\mathcal{P}$ пространства $\mathcal{R}^6$:

$$J \equiv -i(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) = -i \sum_{\mu=1}^3 (x_{\mu} \partial_{y_{\mu}} - y_{\mu} \partial_{x_{\mu}}). \quad (30)$$

Выразим оператор $K(\gamma)$ через операторы P и J . Для этого положим в тождестве (28) $\gamma = \gamma_1$ и $\delta\gamma = \gamma_2 \rightarrow 0$. Учтя равенство (29), получим асимптотическое соотношение:

$$K(\gamma + \delta\gamma) = P K(\gamma) K(\delta\gamma) = K(\gamma)(I - i\gamma J) + O(\delta\gamma^2), \quad \delta\gamma \rightarrow 0. \quad (31)$$

Оно порождает операторное дифференциальное уравнение:

$$dK(\gamma)/d\gamma = -iJ K(\gamma). \quad (32)$$

Дополним его граничным условием (27) в точке $\gamma = 0$. Единственное решение получившейся краевой задачи представим рядом

$$K(\gamma) = P \exp(-i\gamma J) \equiv P \sum_{n=0}^{\infty} (-i\gamma)^n J^n / \Gamma(n+1). \quad (33)$$

Исследование этого ряда начнем с анализа свойств оператора J , не зависящих от вида функции $\Psi \in \mathcal{A}$. К таким свойствам относятся прежде всего коммутационные соотношения. Используя определения (25) и (30), убедимся

в том, что оператор J антикоммутирует с оператором T и коммутирует с оператором P . Теперь перепишем выражение (30) в координатах $(r_1, \dots, r_6)$ в виде суммы

$$J = \sum_{\mu=1}^3 L_{\mu, \mu+3}, \quad L_{\mu\nu} \equiv -i (r_\mu \partial_{r_\nu} - r_\nu \partial_{r_\mu}), \quad (34)$$

трех из пятнадцати ($\mu > \nu; \mu, \nu = 1, 2, \dots, 6$) компонент $L_{\mu\nu}$ оператора гипермомента L , подчиненных известным коммутационным условиям [26]:

$$[L_{k\ell}, L_{mn}]_- = i (\delta_{nk} L_{m\ell} + \delta_{m\ell} L_{nk} - \delta_{mk} L_{n\ell} - \delta_{n\ell} L_{mk}). \quad (35)$$

Выразим через операторы $L_{\mu\nu}$ операторы угловых моментов $\mathbf{l}_x, \mathbf{l}_y$, сопряженные векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и оператор полного углового момента $\mathbf{l}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_x &\equiv -i \mathbf{x} \times \nabla_x = \sum_{i=1}^3 l_{xi} \hat{\mathbf{e}}_i = L_{23} \hat{\mathbf{e}}_1 + L_{31} \hat{\mathbf{e}}_2 + L_{12} \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{l}_y &\equiv -i \mathbf{y} \times \nabla_y = \sum_{i=1}^3 l_{yi} \hat{\mathbf{e}}_i = L_{56} \hat{\mathbf{e}}_1 + L_{64} \hat{\mathbf{e}}_2 + L_{45} \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{l} &\equiv \mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y = \sum_{i=1}^3 l_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad l_i = l_{xi} + l_{yi}. \end{aligned} \quad (36)$$

Напомним, что

$$\mathbf{L}^2 = - \sum_{\mu > \nu} L_{\mu\nu}^2, \quad (37)$$

а в гиперсферических координатах

$$\mathbf{l}_q^2 = -\operatorname{cosec}^2 \theta_q \left(\sin \theta_q \partial_{\theta_q} (\sin \theta_q \partial_{\theta_q}) + \partial_{\varphi_q}^2 \right), \quad l_{q3} = i \partial_{\varphi_q}, \quad q = x, y; \quad (38)$$

$$\mathbf{L}^2 = -\partial_\varphi^2 - 4 \operatorname{ctg} 2\varphi \partial_\varphi + \mathbf{l}_x^2 / \cos^2 \varphi + \mathbf{l}_y^2 / \sin^2 \varphi. \quad (39)$$

Используя равенства (34)–(39), можно показать, что оператор J не коммутирует с операторами $\mathbf{l}_q^2, l_{q3}$, $q = x, y$, но коммутирует с операторами $\mathbf{l}^2, l_3$ и $\mathbf{L}^2$. Просуммируем все вышеупомянутые коммутационные соотношения:

$$[J, T]_+ = [J, Q]_- = 0, \quad Q = P, \mathbf{L}^2, \mathbf{l}^2, l_3; \quad [J, q]_- \neq 0, \quad q = \mathbf{l}_x^2, \mathbf{l}_y^2, l_{x3}, l_{y3}. \quad (40)$$

Построим оператор, унитарноподобный оператору J по отношению к трехмерному повороту (16), (17) системы координат S_3 к системе S_{p3} . В определении (30) оператора J перейдем к гиперсферическим координатам (r, Ω) . Возникшие комбинации тригонометрических функций выразим через

производные от функции $u = u(\hat{x}, \hat{y})$, заданной формулой (9). Тогда получим равенство

$$J = -i \left(\operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_y} \partial_{\theta_y} + \operatorname{cosec}^2 \theta_y \frac{\partial u}{\partial \varphi_y} \partial_{\varphi_y} \right) \right) + \\ + i \left(\operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_x} \partial_{\theta_x} + \operatorname{cosec}^2 \theta_x \frac{\partial u}{\partial \varphi_x} \partial_{\varphi_x} \right) \right) - i u \partial_{\varphi}. \quad (41)$$

Используя его и определение (9) функции u , доказываем эквивалентность,

$$J F(r, u, \varphi) = J_p F(r, u, \varphi), \quad J_p \equiv i(2 \operatorname{ctg} 2\varphi (1 - u^2) \partial_u + u \partial_{\varphi}), \quad (42)$$

операторов J и J_p на множестве функций $\Psi(r, \Omega) = F(r, u, \varphi)$, зависящих от сферических углов векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ лишь посредством их комбинации u .

Заметим, что любая функция $\Psi(r, \Omega)$, заданная в системе координат S_3 , в частном случае $\Omega = \Omega_p$ становится функцией $\Psi(r, \Omega_p)$ типа $F(r, u, \varphi)$.

Как известно [23], при переходе (16)–(18) от системы координат S_3 к системе S_{p3} функции класса $\mathcal{A}$ преобразуются по закону

$$\Psi(r, \Omega) = D^{-1}(\omega) \Psi(r, \Omega_p) = D^{-1}(\omega) F(r, u, \varphi), \quad (43)$$

где оператор Вигнера выражается через проекции $l_2 = L_{13} + L_{46}$ и $l_3 = L_{12} + L_{45}$ оператора полного углового момента (36) на орты $\hat{\mathbf{e}}_2$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$ формулой

$$D(\omega) \equiv \exp(-i\varphi_x l_3) \exp(-i\theta_x l_2) \exp(-i\tilde{\varphi}_y l_3). \quad (44)$$

Используя формулы (42) и (43), запишем цепочку равенств

$$J \Psi(r, \Omega_p) = J(D(\omega) \Psi(r, \Omega)) = J_p \Psi(r, \Omega_p) = J_p D(\omega) \Psi(r, \Omega) \quad (45)$$

и тем самым докажем унитарное подобие операторов J и J_p :

$$J = D^{-1}(\omega) J_p D(\omega). \quad (46)$$

Перечислим свойства оператора $K(\gamma)$, не зависящие от вида функции Ψ . Из представлений (30) и (33) следуют соотношения унитарности

$$K(\gamma) K(-\gamma) = I, \quad K^+(\gamma) = K^{-1}(\gamma) = K(-\gamma) \quad (47)$$

и дифференциальные тождества

$$\partial_{\gamma}^n K(\gamma) = (-iJ)^n K(\gamma), \quad n = 0, 1, \dots \quad (48)$$

В силу равенств (33) и (40) верны коммутационные соотношения:

$$[K(\gamma), Q]_- = 0, \quad Q = P, \mathbf{L}^2, l^2, l_3; \quad [K(\gamma), q]_- \neq 0, \quad q = l_x^2, l_y^2, l_{x3}, l_{y3} \quad (49)$$

и унитарное подобие операторов K и K_p относительно трехмерного поворота (43), (44):

$$K(\gamma) = D(\omega) K_p(\gamma) D^{-1}(\omega), \quad K_p(\gamma) \equiv P \exp(-i\gamma J_p). \quad (50)$$

Равенства (24)–(26) порождают следующие тождества по углу γ :

$$\begin{aligned} K(-\gamma) &= P_1 K(\gamma) P_1 = P_2 K(\gamma) P_2 = T K(\gamma) T, \\ K(\pi/2 - \gamma) &= T K(\gamma) P_1 = P_2 K(\gamma) T. \end{aligned} \quad (51)$$

Поясним, как для данной трехчастичной системы операторы любых перестановок частиц можно выразить через операторы P_1 и $K(\gamma)$. В принятых обозначениях (2) оператор отражения P_1 эквивалентен оператору P_{jk} перестановки частиц с номерами j и k . Согласно определению (1) при циклической перестановке частиц с номерами i, j, k векторы $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ переходят в векторы $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$. Поэтому из равенств (3) и (26) следует, что оператор $K(\gamma)$ эквивалентен оператору циклической перестановки частиц P_{ijk} только при определенном значении параметра γ , а именно при $\gamma = \gamma_{ki}$:

$$K(\gamma_{ki}) = P_{ijk} \equiv P_{ki} P_{jk}. \quad (52)$$

Поэтому оператор $K(\gamma)$ описывает более общее преобразование, чем циклическая перестановка частиц. Учтя связи (52), представим операторы S^- и S^+ антисимметризации и симметризации по отношению к любым перестановкам частиц в инвариантном по отношению к выбору индекса i виде:

$$\begin{aligned} S^\pm &= (I \pm (P_{ij} + P_{ik} + P_{jk}) + P_{ik} P_{jk} + P_{ik} P_{ij})/6, \\ S^\pm &= S_i S_{jk}^\pm, \quad S_i \equiv (I + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}))/3, \quad S_{jk}^\pm \equiv (1 \pm P_{jk})/2. \end{aligned} \quad (53)$$

Отметим, что образ $S_{jk}^\pm \Psi(\mathbf{r}_i)$ любой функции $\Psi(\mathbf{r}_i)$ — (анти)симметричная функция относительно перестановки частиц с номерами j и k , а оператор S_i отображает функцию, уже обладающую такой симметрией, в функцию (анти)симметричную относительно любых перестановок.

2.2.2. Основные свойства угловых базисов. Напомним некоторые известные свойства сферических функций, бисферических гармоник [23,24] и трехчастичных гипергармоник [1,25,26].

Трехчастичные гипергармоники запишем в виде произведений

$$\begin{aligned} |L\ell m a b\rangle &\equiv |\ell m a b\rangle |Lab\rangle, \\ \langle \Omega | L\ell m a b\rangle &\equiv Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega) \equiv W_{Lab}(\varphi) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned} \quad (54)$$

функций $|Lab\rangle$

$$\langle \varphi | Lab\rangle \equiv W_{Lab}(\varphi) \equiv N_{Lab} (\sin \varphi)^a (\cos \varphi)^b P_n^{(a+1/2, b+1/2)}(\cos 2\varphi) \quad (55)$$

с нормировочными множителями

$$N_{Lab} \equiv \left(\frac{(2L+4)\Gamma(n+1)\Gamma(L-n+2)}{\Gamma(n+a+3/2)\Gamma(n+b+3/2)} \right)^{1/2} \quad (56)$$

и бисферических гармоник

$$\langle \hat{x}, \hat{y} | \ell m a b \rangle \equiv \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha} C_{a\alpha b\beta}^{\ell m} Y_{a\alpha}(\hat{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad (57)$$

содержащих коэффициенты Клебша — Гордона $C_{a\alpha b\beta}^{\ell m}$ и сферические функции

$$\langle \hat{q} | c\delta \rangle \equiv Y_{c\delta}(\hat{q}) = (2\pi)^{-1/2} \exp(i\delta\varphi_q) \Theta_{c\delta}(\cos\theta_q), \quad \hat{q} = \hat{x}, \hat{y}. \quad (58)$$

Счетные множества функций

$$\begin{aligned} & Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad b = 0, 1, \dots; \quad \beta = -b, -b+1, \dots, b; \\ & \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \\ & \ell = 0, 1, \dots; \quad -\ell \leq m \leq \ell; \quad |a-b| \leq \ell \leq a+b; \quad L = a+b, a+b+2n, n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (59)$$

образуют полные и ортонормированные базисы, соответственно, на единичной двумерной сфере $\mathcal{S}_x^2$ в $\mathcal{R}_x^3$, четырехмерном торе $\mathcal{T}_{xy}^4 \equiv \mathcal{S}_x^2 \otimes \mathcal{S}_y^2$ и пятимерной единичной сфере $\mathcal{S}_{xy}^5$ в $\mathcal{R}^6$. Ортонормированность угловых базисов (59) означает, что при любых допустимых значениях индексов выполняются соответствующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \langle b\beta | b'\beta' \rangle & \equiv \int_{\mathcal{S}_x^2} d\hat{x} (Y_{b\beta}(\hat{x}))^* Y_{b'\beta'}(\hat{x}) = \delta_{bb'} \delta_{\beta\beta'}, \\ \int_{\mathcal{S}_x^2} d\hat{x} & \equiv \int_0^\pi d\theta_x \sin\theta_x \int_0^{2\pi} d\varphi_x; \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \langle \ell m a b | \ell' m' a' b' \rangle & \equiv \int_{\mathcal{T}_{xy}^4} d\hat{x} d\hat{y} (\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}))^* \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell' m'}(\hat{x}, \hat{y}) = \\ & = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m,m'} \delta_{aa'} \delta_{bb'}, \\ \int_{\mathcal{T}_{xy}^4} d\hat{x} d\hat{y} & \equiv \int_{\mathcal{S}_x^2} d\hat{x} \int_{\mathcal{S}_y^2} d\hat{y}; \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \langle L\ell m a b | L'\ell' m' a' b' \rangle & \equiv \int_{\mathcal{S}^5} d\Omega (Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega))^* Y_{L'a'b'}^{\ell' m'}(\Omega) = \\ & = \delta_{L'L} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta_{aa'} \delta_{bb'}, \\ \int_{\mathcal{S}_{xy}^5} d\Omega & \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho^2(\varphi) \int_{\mathcal{T}_{xy}^4} d\hat{x} d\hat{y}, \quad \rho(\varphi) \equiv \sin\varphi \cos\varphi. \end{aligned} \quad (62)$$

Полнота базисов (59) означает, что произвольная функция $\Psi(\mathbf{r})$, квадратично-интегрируемая ($\Psi \in \mathcal{L}^2(g)$) на множестве $g = \mathcal{S}_x^2, \mathcal{T}_{xy}^4, \mathcal{S}_{xy}^5$, представима соответствующим рядом:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{b\beta} \Psi_{b\beta}(r, \hat{y}, \varphi) Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad (63)$$

$$\Psi_{b\beta}(r, \hat{y}, \varphi) \equiv \langle b\beta | \Psi \rangle \equiv \int_{\mathcal{S}_x^2} d\hat{x} (Y_{b\beta}(\hat{x}))^* \Psi(\mathbf{r});$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m} \sum_{ab} \Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad (64)$$

$$\Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi) \equiv \langle \ell m ab | \Psi \rangle \equiv \int_{\mathcal{T}_{xy}^4} d\hat{x} d\hat{y} (\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}))^* \Psi(\mathbf{r});$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_L \sum_{\ell m} \sum_{ab} \Psi_{Lab}^{\ell m}(r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad (65)$$

$$\Psi_{Lab}^{\ell m}(r) \equiv \langle L \ell m ab | \Psi \rangle \equiv \int_{\mathcal{S}_{xy}^5} d\Omega (Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega))^* \Psi(\mathbf{r}).$$

В рядах (63)–(65) индексы пробегает только указанные в равенствах (59) значения. Проекция $\Psi_{ab}^{\ell m}$ и $\Psi_{Lab}^{\ell m}$ функции Ψ на бисферическую гармонику $|\ell m ab\rangle$ и гипергармонику $|L \ell m ab\rangle$ часто называют, соответственно, парциальной компонентой [17] этой функции и гиперрадиальной функцией [25] либо коэффициентами разложений функции Ψ по бисферическому или гиперсферическому базисам. Более адекватными и менее громоздкими представляются используемые далее термины бисферическая и гиперсферическая компоненты. Бисферические компоненты $\Psi_{ab}^{\ell m}$ — функции двух переменных x, y или же r, φ , принадлежащих области

$$\mathcal{R}_+^2 \equiv \{x, y : 0 \leq x, y \leq \infty\} = \{r, \varphi : 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

В силу соотношений $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ в такой области r и φ являются полярными координатами. Единственный аргумент r гиперсферических компонент $\Psi_{Lab}^{\ell m}(r)$ всегда принадлежит неотрицательной числовой полуоси:

$$\mathcal{R}_1^+ \equiv \{r : 0 \leq r \leq \infty\}.$$

Следующие замечания особо важны для понимания, в каком смысле функции (55) являются базисными. Функции $|Lab\rangle$ и $|L'ab\rangle$ с одинаковыми индексами a и b ортонормированы по аргументу φ на отрезке $[0, \pi/2]$:

$$\langle Lab | L'ab \rangle \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi) W_{L'ab}(\varphi) = \delta_{LL'}, \quad (66)$$

где вес ρ^2 задан формулой (62). Так как каждая гипергармоника $|L\ell mab\rangle$ — произведение (54) функций $|Lab\rangle$ и $|\ell mab\rangle$, а базисы гипергармоник и бисферических гармоник полны и ортонормированы, то на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ счетное ($L = a+b, a+b+2, \dots$) множество функций $|Lab\rangle$ является полным и ортонормированным с весом $\rho^2(\varphi)$ базисом для бисферической компоненты $\Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi)$ рассматриваемой функции $\Psi(\mathbf{r})$. Другими словами, для каждой бисферической компоненты имеет место точное разложение:

$$\Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi) = \sum_L \Psi_{Lab}^{\ell m}(r) W_{Lab}(\varphi), \quad \forall (r, \varphi) \in \mathcal{R}_+^2, \quad (67)$$

$$\Psi_{Lab}^{\ell m}(r, \varphi) \equiv \langle Lab | \Psi_{ab}^{\ell m} \rangle \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi) \Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi),$$

где индекс L — целое число ($L = 2n + a + b, n = 0, 1, \dots$) той же четности $\sigma = (-1)^{a+b} = (-1)^L$, что и сумма $a + b$.

Операторы отражений и перестановки (25), как и операторы угловых моментов (36)–(39) и трехмерного поворота (44), преобразуют базисы (55) и (59) по очень простым формулам. Прокомментируем некоторые из них.

Матрица квадрата гипермомента (37), (39) диагональна в бисферическом базисе. Каждый элемент ее диагонали — дифференциальный оператор

$$L_{ab}^2(\varphi) \equiv \langle \ell mab | L^2 | \ell mab \rangle = -\partial_\varphi^2 - 4 \operatorname{ctg} 2\varphi \partial_\varphi + \frac{a(a+1)}{\sin^2 \varphi} + \frac{b(b+1)}{\cos^2 \varphi}, \quad (68)$$

для которого функция $|Lab\rangle$ является собственной:

$$(L_{ab}^2 - L(L+4)) |Lab\rangle = 0. \quad (69)$$

Все функции $|Lab\rangle$ инвариантны относительно отражений (25) и поворота (43), (44). При перестановке $x \leftrightarrow y$ угол φ переходит в угол $\varphi \rightarrow \pi/2 - \varphi$, а функция $\langle \varphi | Lab \rangle$ преобразуется по правилу

$$\langle \varphi | T | Lab \rangle = (-1)^{(L-a-b)/2} \langle \varphi | Lba \rangle. \quad (70)$$

Сферические функции (58) аргументов $\hat{x}$ — собственные функции операторов $\mathbf{I}_x^2$, l_{x3} и P_1 :

$$(\mathbf{I}_x^2 - b(b+1)) |b\beta\rangle, (l_{x3} - \beta) |b\beta\rangle, (P_1 - (-1)^b) |b\beta\rangle = 0. \quad (71)$$

Аналогичными свойствами по отношению к операторам $\mathbf{I}_y^2$, l_{y3} и P_2 обладают сферические функции аргументов $\hat{y}$:

$$(\mathbf{I}_y^2 - a(a+1)) |a\alpha\rangle, (l_{y3} - \alpha) |a\alpha\rangle, (P_2 - (-1)^a) |a\alpha\rangle = 0. \quad (72)$$

Используя перечисленные свойства (70)–(72) сомножителей произведений (54) и (57) и известное равенство для коэффициентов Клебша—Гордона

$$C_{\alpha\alpha b\beta}^{c\delta} = (-1)^{c-a-b} C_{b\beta a\alpha}^{c\delta}, \quad (73)$$

нетрудно показать, что любая бисферическая гармоника $|\ell m a b\rangle$ и соответствующая ей гипергармоника $|L\ell m a b\rangle$ являются одновременно собственными функциями операторов $P_1, P_2, P, I_x^2, I_y^2, I_z^2, l_3$, а действие оператора T на такие гармоники сводится к перестановке индексов a и b и умножению на определенный фазовый множитель. В силу равенств (68) и (69) гипергармоники являются собственными функциями оператора $\mathbf{L}^2$. Просуммируем все упомянутые свойства следующим компактным образом:

$$\begin{aligned} & (P_1 - (-1)^b)|Q_{ab}^{\ell m}\rangle, (P_2 - (-1)^a)|Q_{ab}^{\ell m}\rangle, (P - (-1)^{a+b})|Q_{ab}^{\ell m}\rangle = 0, \quad (74) \\ & (I_x^2 - b(b+1))|Q_{ab}^{\ell m}\rangle, (I_y^2 - a(a+1))|Q_{ab}^{\ell m}\rangle = 0, \\ & (I^2 - \ell(\ell+1))|Q_{ab}^{\ell m}\rangle, (l_3 - m)|Q_{ab}^{\ell m}\rangle, |Q_{ab}^{\ell m}\rangle = |\ell m a b\rangle, |L\ell m a b\rangle; \\ & T|\ell m a b\rangle = (-1)^{\ell-a-b}|\ell m b a\rangle, \\ & T|L\ell m a b\rangle = (-1)^{(L-2\ell+a+b)/2}|L\ell m b a\rangle, (\mathbf{L}^2 - L(L+4))|L\ell m a b\rangle = 0. \end{aligned}$$

Оператор $D(\omega)$ поворота (43) системы координат S_3 к системе S_{3p} связывает функции (54), (57) и (58), записанные в системе S_3 в координатах Ω или Ω' , с линейными комбинациями соответствующих функций, записанных в системе S_{3p} в координатах Ω_p или Ω'_p , и функций Вигнера $D_{mm_p}^{\ell}(\omega)$. Базисные функции гиперуглов Ω преобразуются по правилам

$$Y_{\delta}(\hat{q}) = D^{-1}(\omega) Y_{c\delta}(\hat{q}_p) = \sum_{\delta_p} D_{\delta\delta_p}^{c*}(\omega) Y_{c\delta_p}(\hat{q}_p), \quad q = x, y, \quad (75)$$

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) = D^{-1}(\omega) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_p, \hat{y}_p) = \sum_{m_p} D_{mm_p}^{\ell*}(\omega) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m_p}(\hat{x}_p, \hat{y}_p), \quad (76)$$

$$Y_{ab}^{\ell m}(\Omega) = D^{-1}(\omega) Y_{ab}^{\ell m}(\Omega_p) = \sum_{m_p} D_{mm_p}^{\ell*}(\omega) Y_{Lab}^{\ell m_p}(\Omega_p), \quad (77)$$

а правила преобразования этих же базисных функций, но от аргументов Ω' получаются заменой $\Omega \rightarrow \Omega'$ и $\Omega_p \rightarrow \Omega'_p$.

Переопределим гипергармоники (54) следующим образом [67]:

$$Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega) = \rho^{-1}(\varphi) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \tilde{W}_{Lab}(\varphi), \quad (78)$$

$$\langle \varphi | L\tilde{a}b \rangle = \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \equiv \rho(\varphi) W_{Lab}(\varphi). \quad (79)$$

Из этих определений и равенств (66)–(69) следуют два факта. Во-первых, счетное ($L = a+b, a+b+2, \dots$) множество функций $|L\tilde{a}b\rangle$ является полным и

ортонормированным с **единичным** весом базисом для разложения бисферической компоненты $\Psi_{ab}^{\ell m}$ произвольной функции Ψ на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi/2$:

$$\langle L\tilde{a}b | L'\tilde{a}b \rangle = \int_0^{\pi/2} d\varphi \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \tilde{W}_{L'ab} = \delta_{LL'}, \quad (80)$$

$$\Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi) = \sum_L \Psi_{Lab}^{\ell m}(r) \tilde{W}_{Lab}(\varphi), \quad (81)$$

$$\Psi_{Lab}^{\ell m}(r, \varphi) \equiv \langle L\tilde{a}b | \Psi_{ab}^{\ell m} \rangle \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \Psi_{ab}^{\ell m}(r, \varphi).$$

Во-вторых, функции $|L\tilde{a}b\rangle$ с разными $L = a + b, a + b + 2, \dots$, но фиксированными a и b , являются собственными для оператора $\tilde{L}_{ab}^2$:

$$(\tilde{L}_{ab}^2 - (L + 2)^2) |L\tilde{a}b\rangle = 0, \quad (82)$$

$$\tilde{L}_{ab}^2 \equiv -\partial_\varphi^2 + a(a + 1)/\sin^2 \varphi + b(b + 1)/\cos^2 \varphi. \quad (83)$$

Опишем разложения функций класса $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_{xy}^5)$, представленных в виде

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = (xy)^{-1} U^\varepsilon(\mathbf{r}) = 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi U^\varepsilon(\mathbf{r}) \quad (84)$$

и являющихся собственными для трех операторов $\mathbf{l}^2$, l_3 и P :

$$(\mathbf{l}^2 - \ell(\ell + 1))|\Psi^\varepsilon\rangle, \quad (l_3 - m)|\Psi^\varepsilon\rangle, \quad (P - \sigma)|\Psi^\varepsilon\rangle = 0, \quad \varepsilon \equiv (\ell, m, \sigma). \quad (85)$$

Здесь и далее собственные функции определенного набора операторов помечаем мультииндексом ε , компоненты которого — собственные числа этих операторов. Множество таких функций в классе $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_{xy}^5)$ обозначаем символом $\mathcal{A}^\varepsilon$.

В силу равенств (74) для функций (84) разложения (64) и (65) по базисам бисферических гармоник (57) и гипергармоник (54) или (78) вырождаются в двух- и трехкратные суммы:

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = (xy)^{-1} \sum_{ab} U_{ab}^\ell(r, \varphi) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad U_{ab}^\ell(r, \varphi) \equiv \langle \ell m ab | U^\varepsilon \rangle; \quad (86)$$

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} \sum_{Lab} U_{Lab}^\ell(r, \varphi) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad U_{Lab}^\ell(r) \equiv \langle L \ell m ab | U^\varepsilon \rangle, \quad (87)$$

в которых индексы a и b подчинены условию $(-1)^{a+b} = \sigma$. Для полноты опишем альтернативный вывод представления (87). Учтя равенство

$xy = r^2 \rho(\varphi)$, разложим бисферические компоненты $\rho^{-1} U_{ab}^\ell$ функции $r^2 \Psi^\varepsilon$ в ряды по базисам (55) или (79). Тогда получим ряды

$$U_{ab}^\ell(r, \varphi) = \rho(\varphi) \sum_L U_{Lab}^\ell(r) W_{Lab}(\varphi) = \sum_L U_{Lab}^\ell(r) \tilde{W}_{Lab}(\varphi), \quad (88)$$

$$U_{Lab}^\ell(r) \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho(\varphi) W_{Lab}(\varphi) U_{ab}^\ell(r, \varphi) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \tilde{W}_{Lab}(\varphi) U_{ab}^\ell(r, \varphi).$$

Используя их, преобразовываем ряд (86) в ряд (87). С помощью определений (39), (68) и (83) выводим тождества

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^2 + 4) (xy)^{-1} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) Q(r, \varphi) &\equiv \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) (L_{ab}^2 + 4) (xy)^{-1} Q(r, \varphi) \equiv \\ &\equiv (xy)^{-1} Y_{ab}^{\ell m}(\Omega) \tilde{L}_{ab}^2 Q(r, \varphi), \quad \forall Q(r, \varphi). \end{aligned} \quad (89)$$

В заключение отметим, что экономные алгоритмы вычисления бисферических функций с $\ell \leq 3$ предложены в работе [111].

2.2.3. Кинематическое преобразование и теоремы сложения. Анализ кинематического преобразования угловых базисов начнем с самых простых примеров. В качестве таких рассмотрим известные теоремы сложения для полиномов Лежандра P_n и шаровых сферических и бисферических функций, связанных с гипергармониками (54) формулами [24]:

$$\mathcal{Y}_{b\beta}(\mathbf{x}) \equiv x^b Y_{b0b}^{b\beta}(\Omega), \quad \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv r^\ell Y_{a+b, ab}^{\ell m}(\Omega). \quad (90)$$

Словосочетанием теорема (формула) сложения часто называют разложение функции от суммы двух векторов в ряд по функциям, зависящим только от координат одного или другого вектора. Пример такой факторизации — теорема сложения [23] для сферических шаровых функций (90):

$$\mathcal{Y}_{b\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}) = \sum_{c+d=b} A_{cd}^b \mathcal{Y}_{cd}^{b\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{v}), \quad A_{cd}^b \equiv \left(\frac{4\pi\Gamma(2b+2)}{\Gamma(2c+2)\Gamma(2d+2)} \right)^{1/2}. \quad (91)$$

Этот же термин (теорема или формула сложения) часто используется и для обозначения разложения функции, аргумент которой сам является функцией двух векторов в упомянутую выше сумму с разделенными переменными. Хорошо известный пример [6] такого представления — теорема сложения для полиномов Лежандра $P_n(u)$, аргумент которых является функцией (9) сферических координат двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Перепишем эту теорему в виде теоремы сложения для функций $\Theta_{n0}(u)$, образующих полный и ортонормированный базис [23] на отрезке $-1 \leq u \leq 1$:

$$\Theta_{n0}(u) = \sqrt{n+1/2} P_n(u) = (-1)^n 2\pi \mathcal{Y}_{nn}^{00}(\hat{x}, \hat{y}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (92)$$

Кинематическое преобразование (3) якобиевских координат (1) одновременно переводит вектор $\mathbf{x}$ в сумму $\mathbf{x}'$ векторов $-\mathbf{x} \cos \gamma$ и $-\mathbf{y} \sin \gamma$, вектор $\mathbf{y}$ в сумму $\mathbf{y}'$ векторов $\mathbf{x} \sin \gamma$ и $-\mathbf{y} \cos \gamma$, а угол φ в функцию (10) $\varphi'(\varphi, u; \gamma)$ переменных u, φ и γ . Следовательно, построение разложений кинематического образа $\Psi(\Omega'(\Omega; \gamma)) = K(\gamma)\Psi(\Omega)$ по угловым базисам (59) аргументов Ω означает доказательство теорем сложения. Первый способ доказательства таких теорем — применить уже известные соотношения должным образом. Для примера разложим кинематический образ

$$\langle \Omega | K(\gamma) | Y_{b'\beta'}(\hat{x}) \rangle = Y_{b'\beta'}(\hat{x}') \quad (93)$$

сферической функции $Y_{b'\beta'}(\hat{x})$ в ряд по функциям переменных Ω . Применим формулу (91) к правой части равенства (93). Результат перепишем в координатах Ω . Степени тригонометрических функций углов φ, φ' и γ выразим через функции (55). В итоге получим искомое разложение:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | K(\gamma) | Y_{b'\beta'}(\hat{x}) \rangle &= Y_{b'\beta'}(\hat{x}') = \frac{(-1)^{b'} N_{b'0b'}}{W_{b'0b'}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))} \times \\ &\times \sum_{c+d=b'} A_{cd}^{b'} N_{b'cd}^{-2} W_{b'cd}(\varphi) W_{b'cd}(\gamma) \mathcal{Y}_{cd}^{b'\beta'}(\hat{x}, \hat{y}). \end{aligned} \quad (94)$$

Аналогичным образом доказываем формулу

$$\begin{aligned} \langle \Omega | K(\gamma) | Y_{a'\alpha'}(\hat{y}) \rangle &= Y_{a'\alpha'}(\hat{y}') = \frac{N_{a'a'0}}{W_{a'a'0}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))} \times \\ &\times \sum_{c+d=a'} (-1)^c A_{cd}^{a'} N_{a'cd}^{-2} W_{a'cd}(\varphi) W_{a'dc}(\gamma) \mathcal{Y}_{cd}^{a'\alpha'}(\hat{x}, \hat{y}). \end{aligned} \quad (95)$$

Применив правила (94) и (95) кинематического преобразования к каждой сферической функции, содержащейся в бисферической гармонике $\mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}', \hat{y}')$, получим ее разложение по функциям переменных Ω :

$$\begin{aligned} \langle \Omega | K(\gamma) | \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}', \hat{y}') \rangle &= \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) = \\ &= (2a' + 1)^{1/2} (2b' + 1)^{1/2} \frac{(-1)^{b'} N_{a'+b', a'b'}}{4\pi W_{a'+b', a'b'}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))} \times \\ &\times \sum_{c+d=a'} (-1)^c A_{cd}^{a'} \sum_{e+f=b'} A_{ef}^{b'} \frac{W_{a'+b', d+e, c+f}(\gamma)}{N_{a'+b', d+e, c+f}} \frac{W_{a'+b', c+e, d+f}(\varphi)}{N_{a'+b', c+e, d+f}} \times \\ &\times \sum_{gh} B_{ce}^g B_{df}^h \begin{Bmatrix} c & e & g \\ d & f & h \\ a' & b' & \ell \end{Bmatrix} \mathcal{Y}_{gh}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \\ B_{ab} &\equiv ((2a + 1)(2b + 1))^{1/2} C_{a0b0}^{c0}. \end{aligned} \quad (96)$$

$$B_{ab} \equiv ((2a + 1)(2b + 1))^{1/2} C_{a0b0}^{c0}. \quad (97)$$

Отметим, что в силу равенств (73) коэффициенты B_{ab}^c равны нулю в случае $(-1)^{a+b+\ell} = 1$, а доказанные соотношения (94)–(96) верны при всех значениях пяти углов Ω и параметра γ , т.е. являются пятимерными тождествами по этим шести углам.

Следующий способ доказательства теорем сложения для базисов (59) более изящен, чем описанная выше громоздкая цепочка построений, и состоит в редукции известных многомерных тождеств, связывающих угловые функции аргументов Ω и $\Omega'(\Omega; \gamma)$, к тождествам меньшей размерности. Такое построение можно реализовать выбором частных значений углов Ω , при которых функции, содержащиеся в исходном тождестве, принимают более простой вид или же обращаются в нуль. Для примера исследуем тождества (94)–(96) при частных значениях их аргументов (12) и (13)–(15).

Сначала приведем вспомогательные формулы. При экстремальных значениях аргумента θ_q сферические функции $Y_{c\delta}(\hat{q})$ обращаются в нуль, если $\delta \neq 0$, либо зависят только от их второго аргумента φ_q , причем [23]

$$\begin{aligned} Y_{c\delta}(\hat{v}) &= \delta_{\delta 0} \sqrt{(2c+1)/4\pi}, \quad \hat{v} = (0, 0), \\ Y_{c\delta}(\hat{q}) &= Y_{c\delta}(\hat{v}) (-1)^{(c-\delta)\theta_q/\pi} \exp(i\delta\varphi_q). \end{aligned} \quad (98)$$

Поэтому в случае (12), когда $\varphi_x, \theta_y, \varphi_y = 0$ и $\theta_y = \theta$, имеем

$$\begin{aligned} Y_{b\beta}(\hat{x}) &= Y_{b\beta}(\hat{v}), \quad Y_{a\alpha}(\hat{y}) = (2\pi)^{-1/2} \Theta_{a\alpha}(u), \\ Y_{b'\beta'}(\hat{x}') &= (-\text{sign } \gamma)^{\beta'} (2\pi)^{1/2} \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}), \\ Y_{a'\alpha'}(\hat{y}') &= (-1)^{\alpha'} (2\pi)^{-1/2} \Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'}), \end{aligned} \quad (99)$$

а в случае (13)–(15), когда $\varphi_x, \theta_x, \theta_y, \varphi_y = 0$, получаем

$$\begin{aligned} Y_{c\delta}(\hat{q}) &= Y_{c\delta}(\hat{v}), \quad \hat{q} = \hat{x}, \hat{y}; \quad W_{Lab}(\varphi') = W_{Lab}(\varphi - \gamma); \\ Y_{b'\beta'}(\hat{x}') &= (-2\text{sign } \gamma)^{\beta'} 2^{-\beta'} (\text{sign}(\pi/2 - \gamma + \varphi) - 1)^{\beta' - b'} Y_{b'\beta'}(\hat{v}), \\ Y_{a'\alpha'}(\hat{y}') &= (-2)^{\alpha'} 2^{-\alpha'} (\text{sign}(\gamma - \varphi) - 1)^{\alpha' - \alpha'} Y_{a'\alpha'}(\hat{v}). \end{aligned} \quad (100)$$

Используя формулы (98), (99), доказываем, что в случае (12) соотношения (94)–(96) вырождаются в двумерные тождества по переменным u и φ :

$$\begin{aligned} \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}) &= \frac{(-1)^{b'} N_{b'0b'}}{\sqrt{2\pi} W_{b'0b'}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))} (-\text{sign } \gamma)^{\beta'} \times \\ &\times \sum_{c+d=b'} \sqrt{d+1/2} \frac{A_{cd}^{b'}}{N_{b'cd}^2} C_{c\beta'd0}^{b'\beta'} W_{b'cd}(\varphi) W_{b'cd}(\gamma) \Theta_{c\beta'}(u), \end{aligned} \quad (101)$$

$$\Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'}) = \frac{N_{a'a'0}}{\sqrt{2\pi} W_{a'a'0}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))} (-1)^{\alpha'} \times \quad (102)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{c+d=a'} \sqrt{d+1/2} \frac{(-1)^c A_{cd}^{a'}}{N_{a'cd}^2} C_{c\alpha'd0}^{a'a'} W_{a'cd}(\varphi) W_{a'dc}(\gamma) \Theta_{c\alpha'}(u), \\
 & (-1)^m \sum_{\alpha'} (-\text{sign } \gamma)^{\beta'} C_{a\alpha'b\beta'}^{\ell m} \Theta_{a\alpha'}(u_{xy'}) \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}) = \\
 & = ((2a'+1)(2b'+1))^{1/2} \frac{(-1)^{b'} N_{a'+b',a'b'}}{4\pi W_{a'+b',a'b'}(\varphi'(\varphi, u; \gamma))} \times \\
 & \times \sum_{c+d=a'} (-1)^c A_{cd}^{a'} \sum_{e+f=b'} A_{ef}^{b'} \frac{W_{a'+b',d+e,c+f}(\gamma)}{N_{a'+b',d+e,c+f}} \frac{W_{a'+b',c+e,d+f}(\varphi)}{N_{a'+b',c+e,d+f}} \times \\
 & \times \sum_{gh} B_{ce}^g B_{df}^h \begin{Bmatrix} c & e & g \\ d & f & h \\ a' & b' & \ell \end{Bmatrix} \sqrt{h+1/2} C_{gmh0}^{\ell m} \Theta_{gm}(u).
 \end{aligned} \tag{103}$$

С помощью равенств (73) и (100) показываем, что в случае (13)–(15) тождество (94) с $\beta' \neq 0$, тождество (95) с $\alpha' \neq 0$ и тождество (96) с $m \neq 0$, $(-1)^{a'+b'} \neq (-1)^\ell$ вырождаются в тривиальное равенство $0 \equiv 0$. Если же $\beta', \alpha', m, (-1)^{a'+b'-\ell} - 1 = 0$, то в рассматриваемом случае (13)–(15) тождества (94)–(96) порождают следующие теоремы сложения для функций $W_{La'b'}$ с индексом $L = a' + b'$:

$$\begin{aligned}
 W_{b'0b'}(\varphi - \gamma) &= (2\sqrt{2\pi})^{-1} N_{b'0b'} (-1)^{b'} \sum_{c+d=b'} A_{cd}^{b'} B_{cd}^{b'} N_{b'cd}^{-2} W_{b'cd}(\varphi) W_{b'cd}(\gamma), \\
 W_{a'a0}(\varphi - \gamma) &= (2\sqrt{2\pi})^{-1} N_{a'a'0} \sum_{c+d=a'} (-1)^c A_{cd}^{a'} B_{cd}^{a'} N_{a'cd}^{-2} W_{a'cd}(\varphi) W_{a'dc}(\gamma), \\
 W_{a'+b',a'b'}(\varphi - \gamma) &= (-1)^{b'} N_{a'+b',a'b'} (4\pi C_{a'0b'0}^{\ell 0})^{-1} \times \\
 & \times \sum_{c+d=a'} (-1)^c A_{cd}^{a'} \sum_{e+f=b'} A_{ef}^{b'} \frac{W_{a'+b',d+e,c+f}(\gamma)}{N_{a'+b',d+e,c+f}} \frac{W_{a'+b',c+e,d+f}(\varphi)}{N_{a'+b',c+e,d+f}} \times \\
 & \times \sum_{gh} B_{ce}^g B_{df}^h \begin{Bmatrix} c & e & g \\ d & f & h \\ a' & b' & \ell \end{Bmatrix} B_{gh}^\ell.
 \end{aligned} \tag{104}$$

Доказанные соотношения (104) можно трактовать и как правила преобразования функции $W_{a+b,ab}(\varphi)$ при сдвиге ее аргумента на угол γ . Полезно показать, что оператор $K(\gamma)$ в частном случае (13)–(15) совершает именно такое преобразование. С этой целью исследуем кинематическое преобразование (26) функции $\Psi = W_{Lab}(\varphi)$. В силу равенств (42), (46) и (50) имеем двумерные по аргументам u и φ тождества:

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega | J | W_{Lab}(\varphi) \rangle &= \langle \Omega | J_p | W_{Lab}(\varphi) \rangle = u \partial_\varphi W_{Lab}(\varphi), \\
 \langle \Omega | K(\gamma) | W_{Lab}(\varphi) \rangle &= \langle \Omega | K_p(\gamma) | W_{Lab}(\varphi) \rangle = W_{Lab}(\varphi'(\varphi, u; \gamma)),
 \end{aligned} \tag{105}$$

которые описывают кинематическое преобразование функции $W_{Lab}(\varphi)$ в функцию переменных u и φ . Полагая $u = 1$ в тождествах (105), переходим к случаю (13)–(15) и получаем операторные формулы дифференцирования и сдвига аргумента функции $W_{Lab}(\varphi)$ на угол γ :

$$J_p W_{Lab}(\varphi) = \partial_\varphi W_{Lab}(\varphi), \quad K_p(\gamma) W_{Lab}(\varphi) = W_{Lab}(\varphi - \gamma). \quad (106)$$

Третий и наиболее общий подход к доказательству теорем сложения для угловых базисов (59) состоит в исследовании интегралов перекрытия между базисными функциями и их кинематическими образами. Этот метод демонстрируется в пп. 2.2.4 и 2.2.5 описанием известных и новых способов понижения размерности таких интегралов.

2.2.4. Кинематическое преобразование бисферических рядов. Чтобы существенно сократить выкладки, поступим следующим образом. Сначала исследуем не зависящие от вида множителя $Q(r, \varphi)$ свойства кинематического преобразования (26) произведений

$$|\Psi\rangle \equiv |Q\ell m a' b'\rangle, \quad \Psi(\mathbf{r}) = Q(r, \varphi) \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (107)$$

Положив в выведенных формулах $Q \equiv 1$, $\Psi_{a'b'}^{\ell m}$, $U_{a'b'}^\ell$, $W_{La'b'}$, докажем правила кинематического преобразования бисферического базиса, рядов (64), (86) и представление матричных элементов оператора $K(\gamma)$ в гиперсферическом базисе в виде двойных интегралов.

Согласно равенствам (25), (38), (40) и (49) операторы P, I^2, I_3 не действуют на переменную φ и коммутируют с операторами J и $K(\gamma)$. Значит, функции типа (107) и их кинематические образы $J\Psi$ и $K(\gamma)\Psi$ являются собственными функциями операторов P, I^2, I_3 и отвечают собственным значениям $\ell(\ell+1)$, m и $\sigma' = (-1)^{a'+b'}$. Однако операторы J и $K(\gamma)$ не коммутируют с операторами I_x^2 и I_y^2 . Следовательно, коэффициенты $\langle \ell m a b | K(\gamma) | \Psi \rangle$ разложения кинематического образа функции (107) по бисферическому базису, вычисляемые по правилам (64), диагональны только по квантовым числам ℓ, m, σ :

$$\begin{aligned} \langle \ell' m' a b | K(\gamma) | Q\ell m a' b' \rangle &\equiv \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} \delta_{\sigma'\sigma} \langle a b | K(\gamma) | Q a' b' \rangle_\ell(\varphi), \\ \langle a b | K(\gamma) | Q a' b' \rangle_\ell(\varphi) &\equiv \int_{T_{xy}^4} d\hat{x} d\hat{y} (\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}))^* Q(r, \varphi') \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}', \hat{y}'). \end{aligned} \quad (108)$$

Здесь переменные $\hat{x}', \hat{y}'$ и φ' — функции аргументов $\hat{x}, \hat{y}, \varphi$ и параметра γ . Поэтому функцию $Q(r, \varphi')$ нельзя вынести из-под знака интеграла, а сам интеграл зависит от индекса ℓ и является функцией аргумента φ и параметра γ . Исследуем интегралы такого типа.

Записав тождества (47) и (51) в обкладках $\langle \ell m a b |$ и $|Q\ell m a' b'\rangle$ и используя свойства (74) операторов (25), докажем соотношения симметрии:

$$\langle a b | K(\gamma) | Q a' b' \rangle_\ell(\varphi) = \langle Q a' b' | K(-\gamma) | a b \rangle_\ell(\varphi) = \quad (109)$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle ba|K(\gamma)|Qb'a'\rangle_\ell(\pi/2 - \varphi) = \\
 &= (-1)^a \langle ab|K(-\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) = \\
 &= (-1)^{\ell+a'} \langle ba|K(\pi/2 - \gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\pi/2 - \varphi) = \\
 &= (-1)^{\ell+a} \langle ab|K(\pi/2 - \gamma)|Qb'a'\rangle_\ell(\pi/2 - \varphi).
 \end{aligned}$$

Они означают, что функции $\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi)$ с любыми индексами являются четными или нечетными относительно точки $\gamma = 0$ на интервале $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, а при $a = b$ и (или) $a' = b'$ такие функции обладают определенной четностью относительно точки $\gamma = \pi/4$ на интервале $0 < \gamma < \pi/2$.

Применив равенства (27) и (74), получим

$$\begin{aligned}
 \langle ab|K(0)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) &= (-1)^{a'+b'} \delta_{aa'} \delta_{bb'} Q(r, \varphi), \\
 \langle ab|K(\pi/2)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) &= (-1)^{\ell-b'} \delta_{ab'} \delta_{a'b} Q(r, \pi/2 - \varphi).
 \end{aligned} \quad (110)$$

В силу равенств (108) бисферический ряд (64) функции $|\Psi\rangle = K(\gamma)|Q\ell m a' b'\rangle$ вырождается в двойную сумму:

$$\begin{aligned}
 K(\gamma)Q(r, \varphi) \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) &= Q(r, \varphi') \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}', \hat{y}') = \\
 &= \sum_{ab} \langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}),
 \end{aligned} \quad (111)$$

где a и b пробегают все возможные при данных ℓ и σ значения. При $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$, благодаря равенствам (110), эта сумма содержит одно слагаемое.

Равенство (111) справедливо при всех значениях углов Ω , т.е. является пятимерным тождеством по переменным $\hat{x}, \hat{y}$ и φ , от которых зависят переменные $\hat{x}', \hat{y}'$ и φ' . В частном случае (12) выполняются равенства (99) и поэтому тождество (111) становится двумерным тождеством по переменным φ и u :

$$\begin{aligned}
 Q(r, \varphi') \sum_{\alpha'} (\text{sign} \gamma)^{\alpha'} C_{a'\alpha'b'\beta'}^{\ell m} \Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'}) \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}) &= \\
 = \sum_{ab} (-\text{sign} \gamma)^m \sqrt{b+1/2} C_{amb0}^{\ell m} \Theta_{am}(u) \langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi),
 \end{aligned} \quad (112)$$

где u_{ab} и φ' — функции (10) и (11) переменных φ , u и параметра γ . В частном случае (13)–(15) тождество (111), благодаря равенствам (100) и определениям (97) коэффициентов B_{ab}^c , вырождается в тривиальное равенство $0 = 0$, если $m, (-1)^{a+b+\ell} - 1 \neq 0$. Если $m, (-1)^{a+b+\ell} - 1 = 0$, то это тождество становится одномерным тождеством по переменной φ и параметру γ :

$$B_{a'b'}^\ell Q(r, \varphi - \gamma) = \sum_{ab} B_{ab}^\ell \langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_\ell(\varphi). \quad (113)$$

Четырехкратный интеграл (108) можно свести к одномерному. Сначала опишем самый простой способ такой редукции. Умножим каждое $(m = -\ell, \dots, \ell)$ тождество (112) на соответствующую функцию $C_{amb0}^{\ell m} \Theta_{am}(u)$, проинтегрируем получившиеся равенства по переменной u на отрезке $[-1, 1]$ и, наконец, просуммируем получившиеся интегральные соотношения по индексу m . Итоговую сумму упростим, используя условия ортогональности для функций $\Theta_{\ell m}$ и коэффициентов Клебша—Гордона [23]:

$$\int_{-1}^1 du \Theta_{am}(u) \Theta_{bm}(u) = \delta_{ab}, \quad \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{amb0}^{\ell m} C_{amc0}^{\ell m} = \delta_{bc} \frac{2\ell+1}{2b+1}. \quad (114)$$

Таким способом для интеграла (108) выводим искомое представление:

$$\langle ab|K(\gamma)|Qa'b'\rangle_{\ell}(\varphi) = \int_{-1}^1 du K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) Q(r, \varphi'(\varphi, u; \gamma)), \quad (115)$$

$$\begin{aligned} K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) &= \frac{\sqrt{4b+2}}{2\ell+1} \sum_m (-\text{sign}\gamma)^m C_{amb0}^{\ell m} \Theta_{am}(u) \times \\ &\times \sum_{\alpha'} (\text{sign}\gamma)^{\alpha'} C_{a'\alpha'b'\beta'}^{\ell m} \Theta_{a'\alpha'}(u_{xy'}) \Theta_{b'\beta'}(u_{xx'}). \end{aligned} \quad (116)$$

В пяти частных случаях, когда $\ell = 0$ либо $\ell \neq 0$, а два индекса из четверки индексов (a, b, a', b') равны нулю, двойная сумма (116) заметно упрощается:

$$\begin{aligned} K_{aaa'a'}^0(\varphi, u; \gamma) &= (-1)^{a+a'} ((2a+1)(2a'+1))^{1/2} P_a(u) P_{a'}(u_{x'y'}), \\ K_{0\ell 0\ell}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) &= P_{\ell}(u_{xx'}), \quad K_{\ell 0 \ell 0}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) = P_{\ell}(u_{yy'}), \\ K_{0\ell \ell 0}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) &= P_{\ell}(u_{xy'}), \quad K_{\ell 0 0 \ell}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) = P_{\ell}(u_{yx'}). \end{aligned} \quad (117)$$

Напомним, что в равенствах (116) и (117) аргументы функций Θ_{am} и P_n являются функциями (11) независимых переменных u и φ .

Приведем иной вывод [67] соотношений (115)–(117), основанный на правилах преобразования бисферических функций при трехмерных поворотах. В интеграле (108) заменим эти функции суммами (76) и перейдем от переменных $\hat{x}, \hat{y}$ к переменным ω и u . Тогда в подынтегральной функции от совокупности ω трех углов Эйлера (16) будут зависеть только произведения

$$(D_{mm_p}^{\ell}(\omega))^* D_{m'm_p}^{\ell}(\omega).$$

Если применить соотношения ортогональности для D -функций [23] и вычислить интегралы по углам ω от такого произведения, то получится однократный интеграл (115) с ядром (116).

Еще один и самый громоздкий способ преобразования интеграла (108) к одномерному интегралу (115) и выводу для функции $K_{aba'b'}^\ell$ представления в виде семикратной суммы подробно описан в книге [21] в случае равных масс частиц. Опишем этот способ для произвольных масс. В интеграле (108) заменим функцию $\mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}$ рядом (96), а функцию $W_{a'+b',a'b'}^{-1}Q$ разложим в ряд по базису (92):

$$\begin{aligned} W_{a'+b',a'b'}^{-1}(\varphi')Q(r, \varphi') &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{Y}_{nn}^{00}(\hat{x}, \hat{y}) \times \\ &\times \int_{-1}^1 du \Theta_{n0}(u) W_{a'+b',a'b'}^{-1}(\varphi'(u, \varphi; \gamma)) Q(r, \varphi'(\varphi, u; \gamma)). \end{aligned} \quad (118)$$

Далее проинтегрируем произведения трех бисферических функций по тору $\mathcal{T}_{xy}^4$ с помощью известной формулы [23]:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{nn}^{00}(\hat{x}, \hat{y}) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) &= \\ &= \frac{(-1)^{a+b+\ell}}{4\pi(2n+1)^{1/2}} \sum_{cd} (-1)^c B_{an}^c B_{bn}^d \left\{ \begin{matrix} d & c & \ell \\ a & b & n \end{matrix} \right\} \mathcal{Y}_{cd}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \end{aligned} \quad (119)$$

где коэффициенты B_{cd}^a заданы формулами (97). Используя получившиеся равенства:

$$\begin{aligned} \Gamma_{aba'b'}^{\ell n} &\equiv \int_{\mathcal{T}_{xy}^4} d\hat{x} d\hat{y} (\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}))^* \mathcal{Y}_{nn}^{00}(\hat{x}, \hat{y}) \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) = \\ &= \frac{(-1)^{a'+b'+\ell}}{4\pi(2n+1)^{1/2}} B_{a'n}^a B_{b'n}^b \left\{ \begin{matrix} b & a & \ell \\ a' & b' & n \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (120)$$

сводим исследуемый интеграл (108) к однократному интегралу (115) с ядром:

$$\begin{aligned} K_{aba'b'}^\ell(\varphi, u; \gamma) &= (-1)^{a'+b'+b+\ell} (2a+1)(2b+1) \times \\ &\times (2\Gamma(2a+1)\Gamma(2b+1))^{1/2} N_{a'+b',a'b'} W_{a'+b',a'b'}^{-1}(\varphi'(\varphi, u; \gamma)) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{(a+b+a'+b')/2} (-1)^n \sqrt{4n+2} \Theta_{n0}(u) \times \\ &\times \sum_{d+e=a} \sum_{f+g=b} (-1)^d (\Gamma(2d+2)\Gamma(2e+2)\Gamma(2f+2)\Gamma(2g+2))^{-1/2} \times \\ &\times N_{a+b,e+f,d+g}^{-1} N_{a+b,d+f,e+g}^{-1} W_{a+b,e+f,d+g}(\gamma) W_{a+b,d+f,e+g}(\varphi) \times \\ &\times \sum_{s,t} B_{df}^s B_{eg}^t B_{ns}^{a'} B_{nt}^{b'} \left\{ \begin{matrix} b' & a' & \ell \\ s & t & n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & e & a \\ f & g & b \\ s & t & \ell \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (121)$$

До сих пор переменные φ и u были аргументами ядер $K_{aba'b'}^\ell$ интегралов (115) и произвольной функции $Q(r, \varphi'(\varphi, u; \gamma))$, а переменная u — переменной интегрирования. Опишем более подробно, чем в книге [21], замену переменных $u \rightarrow \varphi'$. Из равенства (10) выразим переменную u как функцию аргументов φ , φ' и параметра γ :

$$u(\varphi, \varphi'; \gamma) = (\cos 2\varphi' - \cos 2\gamma \cos 2\varphi) \operatorname{cosec} 2\gamma \operatorname{cosec} 2\varphi. \quad (122)$$

Подставив u в таком виде в равенства (11), получим функции $u_{ab} = u_{ab}(\varphi, \varphi'; \gamma)$ новых переменных φ и φ' :

$$\begin{aligned} u_{xx'} &= -\sec \varphi' \left(\cos 2\varphi + \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma + 1 \right) / 4, \\ u_{xy'} &= -\operatorname{cosec} \varphi' \left(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi' - \cos 2\gamma + 1 \right) / 4, \\ u_{yx'} &= \sec \varphi' \left(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma - 1 \right) / 4, \\ u_{yy'} &= \operatorname{cosec} \varphi' \left(\cos 2\varphi + \cos 2\varphi' - \cos 2\gamma - 1 \right) / 4, \\ u_{x'y'} &= \operatorname{cosec} 2\varphi' \operatorname{cosec} 2\gamma \left(\cos 2\varphi + \cos 2\varphi' \cos 2\gamma \right) / 4. \end{aligned} \quad (123)$$

Вычислим якобиан исследуемого преобразования $u \rightarrow \varphi'$

$$\partial_{\varphi'} u(\varphi, \varphi'; \gamma) = -t(\varphi, \varphi'; \gamma) \operatorname{sign} \gamma, \quad t(\varphi, \varphi'; \gamma) \equiv \frac{2 \sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi |\sin 2\gamma|} \quad (124)$$

и пределы интегрирования C_- и C_+ по новой переменной φ' , отвечающие граничным значениям $u = -1$ и $u = 1$ переменной u . Если $\gamma > 0$, то всегда $\partial_{\varphi'} u \leq 0$, а верхний предел C_+ не меньше нижнего предела C_- . При $\gamma < 0$ $\partial_{\varphi'} u \geq 0$, а верхний предел C_+ не превышает нижний предел C_- . В случае $\gamma < 0$ можно поменять пределы интегрирования местами и изменить знак перед интегралом. Такое тождественное преобразование не потребуется, если производную (124) заменить ее модулем t , а нижний и верхний пределы C_- и C_+ переопределить равенствами

$$C_-(\varphi; \gamma) \equiv |\varphi - |\gamma||, \quad C_+(\varphi; \gamma) \equiv \min \{ \varphi + \gamma, \pi - \varphi - |\gamma| \}. \quad (125)$$

Используя соотношения (123)–(125), записываем интеграл (115) в виде

$$\langle ab | K(\gamma) | Qa'b' \rangle_\ell(\varphi) = \int_{C_-(\varphi; \gamma)}^{C_+(\varphi; \gamma)} d\varphi' K_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma) Q(r, \varphi'), \quad (126)$$

$$K_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma) \equiv t(\varphi, \varphi'; \gamma) K_{aba'b'}^\ell(\varphi, u(\varphi, \varphi'; \gamma)). \quad (127)$$

Пусть $Q \equiv 1$. Тогда функция (107) — бисферическая гармоника, а равенства (109) и (110) описывают симметрию и предельные значения матричных элементов (108) оператора $K(\gamma)$ в бисферическом базисе. Эти матричные элементы удовлетворяют правилам сумм (112) и (113) и представимы интегралами (115) от функций (116), (117) или (121).

При $Q \equiv \Psi_{a'b'}^{\ell m}$ формулы (115), (116) и (126), (127) становятся правилами кинематического преобразования слагаемого $\Psi_{a'b'}^{\ell m} \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}$ бисферического ряда (64) произвольной функции Ψ . Применяв их к каждому слагаемому этого ряда, получим его разложение по бисферическим функциям $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})$:

$$\begin{aligned} K(\gamma) \sum_{\ell m} \sum_{a'b'} \Psi_{a'b'}^{\ell m}(r, \varphi) \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{\ell m} \sum_{a'b'} \Psi_{a'b'}^{\ell m}(r, \varphi') \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}', \hat{y}') = \\ &= \sum_{\ell m} \sum_{ab} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \int_{-1}^1 du K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) \Psi_{a'b'}^{\ell m}(r, \varphi'(\varphi, u; \gamma)) = \\ &= \sum_{\ell m} \sum_{ab} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \int_{C_-(\varphi; \gamma)}^{C_+(\varphi; \gamma)} d\varphi' K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, \varphi'; \gamma) \Psi_{a'b'}^{\ell m}(r, \varphi'). \end{aligned} \quad (128)$$

Отметим, что согласно этим формулам кинематический образ функции $\Psi(x)$ модуля вектора $\mathbf{x}$, т.е. бисферический ряд из одного слагаемого

$$\Psi(x) = \mathcal{Y}_{00}^{00}(\hat{x}, \hat{y}) \Psi_{00}^{00}(x), \quad \Psi_{00}^{00}(x) = (4\pi) \Psi(x),$$

— бесконечная сумма по всем бисферическим функциям с $\ell, m = 0$:

$$K(\gamma) \Psi(x) = \sum_{ab} \mathcal{Y}_{ab}^{00}(\hat{x}, \hat{y}) \int_{-1}^1 du K_{ab00}^0(\varphi, u; \gamma) \Psi(r \cos \varphi'(\varphi, u; \gamma)). \quad (129)$$

Если $Q \equiv U_{a'b'}^{\ell}$, то формулы (115), (116) и (126), (127) описывают кинематическое преобразование слагаемого $U_{a'b'}^{\ell} \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}$ ряда (86) функции (84), подчиненной условиям (85). Для такой функции

$$\begin{aligned} K(\gamma) \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}) &= K(\gamma)(xy)^{-1} \sum_{a'b'} U_{a'b'}^{\ell}(r, \varphi) \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) = \\ &= (x'y')^{-1} \sum_{a'b'} U_{a'b'}^{\ell}(r, \varphi') \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}', \hat{y}') = \\ &= (xy)^{-1} \sum_{ab} \sum_{a'b'} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \langle r, \varphi | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma) | U_{a'b'}^{\ell} \rangle. \end{aligned} \quad (130)$$

Здесь введен интегральный оператор $h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma)$. По определению он отображает произвольную функцию $Q(r, \varphi)$, заданную в $\mathcal{R}_+^2$, в однократные интегралы

$$\langle r, \varphi | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma) | Q \rangle \equiv \int_{-1}^1 du h_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) Q(r, \varphi'(\varphi, u; \gamma)) = \quad (131)$$

$$= \int_{C_-(\varphi; \gamma)}^{C_+(\varphi; \gamma)} d\varphi' h_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma) Q(r, \varphi'),$$

ядра которых связаны с функциями (116) и (127) равенствами

$$\begin{aligned} h_{aba'b'}^\ell(\varphi, u; \gamma) &\equiv (xy/x'y') K_{aba'b'}^\ell(\varphi, u; \gamma), \\ h_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma) &\equiv (\sin 2\varphi / \sin 2\varphi') K_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma). \end{aligned} \quad (132)$$

Теперь, используя прием, описанный в работе [67], сведем матричные элементы оператора $K(\gamma)$ в базисе гипергармоник к двумерным интегралам с ядрами $K_{aba'b'}^\ell$. Для этого положим $Q = W_{La'b'}(\varphi)$. Интеграл (108) умножим на функцию $\rho^2(\varphi)W_{Lab}(\varphi)$. Получившееся выражение проинтегрируем по переменной φ на отрезке $[0, \pi/2]$. Итоговый интеграл будет интегралом от произведения гипергармоник $\langle L\ell mab | \Omega \rangle$ и $\langle \Omega | K(\gamma) | L\ell ma'b' \rangle$ по гиперсфере S_{xy}^5 . Интегрируя по тору $\mathcal{T}_{xy}^4$ любым из вышеописанных способов, получаем для такого интеграла искомое представление:

$$\begin{aligned} \langle L\ell mab | K(\gamma) | L\ell ma'b' \rangle &\equiv \int_{S_{xy}^5} d\Omega (Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega))^* Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega; \gamma)) = \\ &= \int_0^{\pi/2} \rho^2(\varphi) W_{Lab}(\varphi) \int_{-1}^1 du K_{aba'b'}^\ell(\varphi, u; \gamma) W_{La'b'}(\varphi'). \end{aligned} \quad (133)$$

Используя определения (79), (131) и (132), перепишем это представление в виде связи между матричными элементами операторов $K(\gamma)$ и $h_{aba'b'}^\ell$ в базисе гипергармоник и функций $\tilde{W}_{Lab}$:

$$\begin{aligned} \langle L\ell mab | K(\gamma) | L\ell ma'b' \rangle &= \langle L\tilde{a}b | h_{aba'b'}^\ell(\gamma) | L\tilde{a}'b' \rangle \equiv \\ &\equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \int_{C_-(\varphi; \gamma)}^{C_+(\varphi; \gamma)} d\varphi' h_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma) \tilde{W}_{La'b'}(\varphi'). \end{aligned} \quad (134)$$

В принципе, представления (133) и (134) позволяют воспроизвести свойства всех матричных элементов оператора $K(\gamma)$ в гиперсферическом базисе по известным свойствам ядер $K_{aba'b'}^\ell$ или $h_{aba'b'}^\ell$. Такой способ исследования кинематического преобразования гипергармоник не только до сих пор не реализован из-за отсутствия полного анализа этих ядер как функций двух переменных φ и u или φ и φ' , но и представляется слишком сложным. Более простой подход, основанный на применении операторных методов теории углового момента непосредственно к гипергармоникам, описывается ниже.

2.2.5. Кинематическое преобразование гиперсферических рядов. Сначала опишем кинематическое преобразование (26) гипергармоник (54) на операторном языке. В базисе гипергармоник единичный оператор имеет очень простое спектральное представление:

$$I = \sum_{L\ell mab} |L\ell mab\rangle \langle L\ell mab|, \quad (135)$$

а матрицы операторов J и K существенно разрежены, благодаря коммутационным соотношениям (40) и (49). В силу этих соотношений образы $J|L\ell mab\rangle$ и $K(\gamma)|L\ell mab\rangle$ любой гипергармоники $|L\ell mab\rangle$ являются собственными функциями операторов $P, \mathbf{I}^2, l_z$ и $\mathbf{L}^2$, но не являются таковыми для операторов $\mathbf{I}_x^2$ и $\mathbf{I}_y^2$. Иначе говоря, при кинематическом преобразовании гипергармоник $|L\ell mab\rangle$ как на бесконечно малый, так и на любой конечный угол γ сохраняются квантовые числа L, ℓ, m и $\sigma = (-1)^L$, но не сохраняются числа a и b . Значит верны представления

$$\langle L'\ell'm'a'b'|Q|L\ell mab\rangle = \delta_{L'L} \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} \langle a'b'|Q|ab\rangle_{L\ell}, \quad Q = J, K(\gamma). \quad (136)$$

По определению (30) оператор J — антисимметризованное по перестановке $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$ скалярное произведение трехмерных векторов $\mathbf{x}$ и ∇_y . Как известно [23], в общем случае операторы умножения на вектор $\mathbf{q}$ и оператор градиента ∇_q отображают сферическую функцию $Y_{\ell m}(\hat{q})$ в линейную комбинацию двух сферических функций $Y_{\ell \pm 1, m}(\hat{q})$. Следовательно, в общем случае функция $J|L\ell mab\rangle$ — линейная комбинация типа

$$J|L\ell mab\rangle = \sum_{\mu, \nu = \pm 1} \langle a + \mu, b + \nu | J | mab \rangle_{L\ell} |L\ell m, a + \mu, b + \nu\rangle. \quad (137)$$

Подействуем оператором J на эту комбинацию. Образы $J|L\ell m, a + \mu, b + \nu\rangle$ выразим суммами того же типа (137). Повторим описанное построение $n - 2$ раза. Тогда образ $J^n|L\ell mab\rangle$ представится линейной комбинацией гипергармоник $|L\ell m, a', b'\rangle$ с индексами a' и b' , заданными формулами $a' = a - n + 2\mu$ и $b' = b - n + 2\nu$, где μ и ν принимают только те целые значения от 0 до n , при которых $|a' - b'| \leq \ell \leq a' + b'$. Значит, для оператора J^n верны следующие правила отбора:

$$\langle a'b'|J^n|ab\rangle_{L\ell} = 0, \quad n < \max\{|a - a'|, |b - b'|\}, \quad (138)$$

а все остальные матричные элементы, вообще говоря, отличны от нуля. Используя эти правила отбора и тот факт, что при $|\gamma| \neq 0, \pi/2$ оператор $K(\gamma)$ — бесконечный ряд (33) по целым степеням оператора J , доказываем, что в общем случае

$$K(\gamma)|L\ell ma'b'\rangle = \sum_{ab} \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} |L\ell mab\rangle, \quad (139)$$

где индексы a и b принимают все возможные при данных L и ℓ значения. Применяя формулы (27) и (74), показываем, что при $\gamma = 0, \pi/2$ каждая строка матрицы оператора $K(\gamma)$ имеет только один ненулевой элемент:

$$\langle ab|K(0)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L \delta_{aa'} \delta_{bb'}, \quad (140)$$

$$\langle ab|K(\pi/2)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^{(L-2\ell+a'-b')/2} \delta_{ab'} \delta_{a'b}. \quad (141)$$

Поэтому в случаях $\gamma = 0, \pi/2$ сумма (139) состоит из одного слагаемого.

Теперь опишем кинематическое преобразование гипергармоник в координатном представлении $\langle \mathbf{r} | = \langle r, \Omega |$. В общем случае связи (139) между гипергармониками до и после кинематического преобразования являются тождествами относительно пяти независимых переменных $\Omega = (\theta_x, \varphi_x, \theta_y, \varphi_y, \varphi)$ и индексов a' и b' :

$$\langle \Omega | K(\gamma) | L\ell m a' b' \rangle = Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega; \gamma)) = \sum_{ab} \langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega). \quad (142)$$

На плоскости $\mathcal{P}$ (случай (12)) выполняются равенства (99), в силу которых гипергармоники и их кинематические образы становятся функциями двух, а не пяти переменных. Поэтому на плоскости $\mathcal{P}$ связи (142) вырождаются в двумерные тождества относительно независимых переменных u и φ , параметра γ и индексов a' и b' :

$$\begin{aligned} \sum_{ab} (-\text{sign} \gamma)^m \sqrt{b+1/2} C_{amb0}^{\ell m} \Theta_{am}(u) W_{Lab}(\varphi) \langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \\ = \sum_{\alpha'} (\text{sign} \gamma)^{\alpha'} C_{a'\alpha'b'\beta}^{\ell m} \Theta_{a'\alpha}(u_{xy'}) \Theta_{b'\beta}(u_{xx'}) W_{La'b'}(\varphi'). \end{aligned} \quad (143)$$

На прямой $\mathcal{L}_3$ (случай (13)–(15)) верны равенства (100), согласно которым гипергармоники и их кинематические образы тождественно равны нулю, если $m \neq 0$ или $(-1)^{\ell+L} \neq 1$, а в противном случае вырождаются в функции одной переменной. Поэтому на прямой $\mathcal{L}_3$ тождества (142) и (143) вырождаются в тривиальные соотношения $0 = 0$, если $m \neq 0$ или $(-1)^{\ell+L} = -1$, а в случае $m = (-1)^{\ell+L} - 1 = 0$ — принимают вид одномерных тождеств по гиперуглу φ , параметру γ и индексам a' и b' :

$$\sum_{ab} B_{ab}^{\ell} W_{Lab}(\varphi) \langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = (-1)^L B_{a'b'}^{\ell} W_{La'b'}(\varphi - \gamma), \quad (144)$$

где коэффициенты B_{ab}^c заданы равенствами (97).

Гипerradius не изменяется при кинематическом преобразовании координат. Поэтому формулы кинематического преобразования (26) гиперсферического ряда (65) произвольной функции Ψ можно вывести, применив правило (142) к каждой гипергармонике такого ряда. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | K(\gamma) | \Psi(\mathbf{r}) \rangle &= \sum_{\ell m} \sum_{La'b'} \Psi_{La'b'}^{\ell m}(r) Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega') = \\ &= \sum_{\ell m} \sum_{Lab} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega) \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} \Psi_{La'b'}^{\ell m}(r). \end{aligned} \quad (145)$$

Так как эта цепочка равенств справедлива для любой функции класса $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_{xy}^5)$, а гипергармоники образуют ортонормированный базис в этом классе, то справедливо спектральное представление

$$K(\gamma) = \sum_{\ell m} \sum_{a b a' b'} \sum_L |L \ell m a b\rangle \langle a b | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L \ell} \langle L \ell m a' b' |, \quad (146)$$

в котором действие бра- и кет-операторов определено равенствами (62)–(65). Используя определение (54) этих операторов как произведений операторов $|\ell m a b\rangle$ и $|L a b\rangle$, выделим в сумме (146) подсумму $K_{a b a' b'}^\ell(\gamma)$ по индексу L . Тогда получим

$$K(\gamma) = \sum_{\ell m} \sum_{a b} |\ell m a b\rangle \sum_{a' b'} K_{a b a' b'}^\ell(\gamma) \langle \ell m a' b' |, \quad (147)$$

$$K_{a b a' b'}^\ell(\gamma) \equiv \sum_L |L a b\rangle \langle a b | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L \ell} \langle L a' b' |. \quad (148)$$

В силу равенств (128) и (145) любой из операторов $K_{a b a' b'}^\ell(\gamma)$ действует на бисферическую компоненту $\Psi_{a' b'}^{\ell m}(r, \varphi)$ точно так же, как интегральный оператор (126) с ядром (121):

$$\langle \mathbf{r} | K_{a b a' b'}^\ell | \Psi_{a' b'}^{\ell m}(r, \varphi) \rangle = \int_{C_-(\varphi; \gamma)}^{C_+(\varphi; \gamma)} d\varphi' K_{a b a' b'}^\ell(\varphi, \varphi'; \gamma) \Psi_{a' b'}^{\ell m}(r, \varphi'). \quad (149)$$

Для полноты описания кинематического преобразования гипербисферических рядов остается перечислить свойства матричных элементов операторов J и K и способы их вычисления.

Матричные элементы оператора J . Рассмотрим интеграл (136) в случае $Q = J$. Используя соотношение (46), заменим оператор J произведением $D^{-1} J_p D$. Далее применим правило (77) и сделаем замену переменных $\hat{x}, \hat{y} \rightarrow \omega, u$. В силу равенств (99) в получившемся подынтегральном выражении от набора углов ω зависят только D -функции. Проинтегрировав по этим углам, сведем исследуемый интеграл к двукратному интегралу:

$$\begin{aligned} \langle a b | J | a' b' \rangle_{L \ell} &= (2\ell + 1)^{-1} ((2b + 1)(2b' + 1))^{1/2} N_{L a b} N_{L a' b'} \times \\ &\times \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{a m b 0}^{\ell m} C_{a' m b' 0}^{\ell m} \int_0^{\pi/2} d\varphi \rho^2(\varphi) W_{L a b}(\varphi) \times \\ &\times \int_{-1}^1 du \Theta_{a m}(u) J_p(\varphi, u) (\Theta_{a' m}(u) W_{L a' b'}(\varphi)). \end{aligned} \quad (150)$$

Чтобы вычислить его, преобразуем подынтегральные функции

$$J_p \Theta_{c \delta}(u) W_{L a b}(\varphi) = i(1 - u^2) \partial_u \Theta_{c \delta}(u) 2 \operatorname{ctg} 2\varphi W_{L a b}(\varphi) + i u \Theta_{c \delta}(u) \partial_\varphi W_{L a b}. \quad (151)$$

Сначала перепишем известные соотношения [23] в компактном виде:

$$(1 - u^2) \partial_u \Theta_{c\delta}(u) = \sum_{\tau=\pm 1} (c+1)(2)^\tau C_\tau^{c\delta} \Theta_{c+\tau,\delta}(u), \quad (152)$$

$$u \Theta_{c\delta}(u) = \sum_{\tau=\pm 1} C_\tau^{c\delta} \Theta_{c+\tau,\delta}(u), \quad C_\tau^{c\delta} \equiv \left(\frac{(c+1/2+\tau/2)^2 - \delta^2}{4(c+1/2+\tau/2)^2 - 1} \right)^{1/2}.$$

Теперь докажем серию тождеств для функций W_{Lab} . Операторы $2\text{ctg}2\varphi$ и ∂_φ , содержащиеся в исследуемом соотношении (151), выразим через более удобные операторы. Используя известные [6] формулу дифференцирования и соотношения для полиномов Якоби $P_n^{(a+1/2, b+1/2)}$ с верхними индексами, отличающимися на ± 1 , убедимся в том, что операторы

$$W_{++}^{ab} \equiv \partial_\varphi - a \text{ctg}\varphi + b \text{tg}\varphi, \quad W_{-+}^{ab} \equiv \partial_\varphi + (a+1) \text{ctg}\varphi + b \text{tg}\varphi, \quad (153)$$

$$W_{+-}^{ab} \equiv \partial_\varphi - a \text{ctg}\varphi - (b+1) \text{tg}\varphi, \quad W_{--}^{ab} \equiv \partial_\varphi + (a+1) \text{ctg}\varphi - (b+1) \text{tg}\varphi$$

изменяют индексы a и b функции W_{Lab} на единицу, но сохраняют индекс L :

$$W_{\mu\nu}^{ab} W_{Lab}(\varphi) = \langle a+\mu, b+\nu | W_{\mu\nu}^{ab} | ab \rangle_L W_{L, a+\mu, b+\nu}(\varphi), \quad \mu, \nu = \pm 1; \quad (154)$$

$$\langle a+1, b+1 | W_{++}^{ab} | ab \rangle_L = -2(n(n+a+b+2))^{1/2},$$

$$\langle a-1, b+1 | W_{-+}^{ab} | ab \rangle_L = ((2n+2a+1)(2n+2b+3))^{1/2},$$

$$\langle a+1, b-1 | W_{+-}^{ab} | ab \rangle_L = -((2n+2b+1)(2n+2a+3))^{1/2},$$

$$\langle a-1, b-1 | W_{--}^{ab} | ab \rangle_L = 2((n+1)(n+a+b+1))^{1/2}.$$

Так как четыре оператора $W_{\pm 1, \pm 1}^{ab}$ линейно зависимы,

$$\sum_{\nu=\pm 1} (W_{\nu\nu}^{ab} - W_{\nu, -\nu}^{ab}) = 0, \quad (155)$$

то операторы $2\text{ctg}2\varphi$ и ∂_φ можно представить в виде линейных комбинаций четырех или трех таких операторов. Например,

$$\partial_\varphi = W_{++}^{ab} - b(2b+1)^{-1} W_{-+}^{ab} - a(2a+1)^{-1} W_{+-}^{ab} + \quad (156)$$

$$+ \left(1 - \frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)} \right) W_{--}^{ab} =$$

$$= \frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)} W_{++}^{ab} + b(2b+1)^{-1} W_{-+}^{ab} + a(2a+1)^{-1} W_{+-}^{ab},$$

$$2\text{ctg}2\varphi = -(2a+1)^{-1} W_{++}^{ab} + (2b+1)^{-1} W_{--}^{ab} + \quad (157)$$

$$+ \frac{2(b-a)}{(2a+1)(2b+1)} (W_{-+}^{ab} - W_{+-}^{ab}) =$$

$$= (2a+1)^{-1} (W_{-+}^{ab} - W_{++}^{ab}) + (2b+1)^{-1} (W_{+-}^{ab} - W_{--}^{ab}).$$

Используя равенства (153)–(155), выводим из соотношения (156) две эквивалентные формулы дифференцирования функций W_{Lab} :

$$\begin{aligned} \partial_\varphi W_{Lab}(\varphi) &= 2 \left[1 - \frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)} \right] \times \\ &\times [(n+1)(n+a+b+1)]^{1/2} W_{L,a-1,b-1}(\varphi) - \\ &- \frac{b}{b+1} \left[(2n+2a+1)(2n+2b+3) \right]^{1/2} W_{L,a-1,b+1}(\varphi) + \\ &+ \frac{a}{a+1} \left[(2n+2b+1)(2n+2a+3) \right]^{1/2} W_{L,a+1,b-1}(\varphi) - \\ &- 2[n(n+a+b+2)]^{1/2} W_{L,a+1,b+1}(\varphi), \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \partial_\varphi W_{Lab}(\varphi) &= \frac{a}{2a+1} \left[(2n+2a+1)(2n+2b+3) \right]^{1/2} W_{L,a-1,b+1}(\varphi) - \\ &- \frac{a}{2b+1} \left[(2n+2b+1)(2n+2a+3) \right]^{1/2} W_{L,a+1,b-1}(\varphi) - \\ &- 2 \frac{a+b+1}{(2a+1)(2b+1)} \left[n(n+a+b+2) \right]^{1/2} W_{L,a+1,b+1}(\varphi). \end{aligned} \quad (159)$$

Из-за указанной эквивалентности функции $W_{L,a\pm 1,b\pm 1}$ линейно зависимы.

Используя разложения (152), (156) и (157), сведем равенство (151) к сумме

$$\begin{aligned} J_p(\varphi, u) \Theta_{c\delta} W_{Lab}(\varphi) &= i \sum_{\tau, \mu, \nu = \pm 1} C_\tau^{a\delta} D_{\tau\mu\nu}^{ab\delta} \times \\ &\times \langle a+\mu, b+\nu | W_{\mu\nu}^{ab} | ab \rangle_L \Theta_{a+\tau, \delta}(u) W_{L,a+\mu, b+\nu}(\varphi), \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} D_{\tau 1, -1}^{ab\delta} &\equiv (2(2a)^\tau (a+1)(b-a) - b(2a+1)) / (2a+1)(2b+1), \\ D_{\tau -1, 1}^{ab\delta} &\equiv D_{\tau 1, -1}^{ba\delta}, \quad D_{\tau 11}^{ab\delta} \equiv 1 - (2a)^\tau (a+1) / (2a+1), \\ D_{\tau, -1, -1}^{ab\delta} &\equiv (1+3a+3b+8ab) / (2a+1)(2b+1) - D_{\tau 11}^{ab\delta}, \end{aligned} \quad (161)$$

означающей, что оператор J отображает функции типа $\Theta_{c\delta}(u) W_{Lab}(\varphi)$ в конечные линейные комбинации четырех функций того же типа. Для вычисления интегралов (150) используем этот факт и известные связи [23] между коэффициентами Клебша—Гордона с индексами моментов, отличающимися на ± 1 . В итоге доказываем правила отбора (138) для оператора J и находим в явном виде все его ненулевые матричные элементы. Для их полного описания приведем формулы

$$\langle a+1, b+1 | J | ab \rangle_{L\ell} = i (n(n+a+b+2))^{1/2} \times \quad (162)$$

$$\times \left\{ \frac{(\ell + a + b + 2)(\ell + a + b + 3)(\ell - a - b - 1)(\ell - a - b - 2)}{(2a + 1)(2a + 3)(2b + 1)(2b + 3)} \right\}^{1/2},$$

$$\langle a - 1, b + 1 | J | ab \rangle_{L\ell} = (i/2) ((2n + 2a + 1)(2n + 2b + 1))^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(\ell + a - b + 1)(\ell + b - a + 2)(\ell + a - b - 1)(\ell + a - b)}{(2a - 1)(2a + 1)(2b + 1)(2b + 3)} \right\}^{1/2},$$

в которых $n = (L - a - b)/2$, перечислим свойства симметрии:

$$\begin{aligned} \langle a' b' | J | ab \rangle_{L\ell} &= -\langle ab | J | a' b' \rangle_{L\ell}, \\ \langle a + 1, b - 1 | J | ab \rangle_{L\ell} &= -\langle a - 1, b + 1 | J | ab \rangle_{L\ell}, \\ \langle a + \mu, b + \nu | J | ab \rangle_{L\ell} &= (-1)^{\mu+\nu+1} \langle b + \nu, a + \mu | J | ba \rangle_{L\ell} \end{aligned} \quad (163)$$

и дополнительные правила отбора:

$$\langle a + \nu, a - \nu | J | aa \rangle_{L\ell} = 0, \quad \nu = \pm 1, \quad \ell = 0, 1. \quad (164)$$

Коэффициенты $\langle ab | J^n | a' b' \rangle_{L\ell}$ с $n > 1$ можно выразить через суммы матричных элементов оператора J , используя тождество $J^n \equiv JIJ \dots JIJ$ и равенства (135), (162) и (163). Например, при $n = 2$ имеем

$$\langle ab | J^2 | a' b' \rangle_{L\ell} = \sum_{\mu, \nu = \pm 1} \langle ab | J | a' + \mu, b' + \nu \rangle_{L\ell} \langle a' + \mu, b' + \nu | J | a' b' \rangle_{L\ell}.$$

Матричные элементы оператора K . Начнем с анализа глобальных свойств матричных элементов оператора (γ) . Записывая тождества (47) и (51) в базисе гипергармоник и учитывая свойства (74) операторов (25), доказываем соотношения симметрии

$$\begin{aligned} \langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} &= \langle a' b' | K(-\gamma) | ab \rangle_{L\ell} = \\ &= (-1)^{(a-b+a'-b')/2} \langle ba | K(\gamma) | b' a' \rangle_{L\ell} = \\ &= (-1)^{a+a'} \langle ab | K(-\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = (-1)^{b+b'} \langle ab | K(-\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \\ &= (-1)^{\ell+b'+(L+a+b)/2} \langle ba | K(\pi/2 - \gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \\ &= (-1)^{\ell+a+(L+a'+b')/2} \langle ab | K(\pi/2 - \gamma) | b' a' \rangle_{L\ell}. \end{aligned} \quad (165)$$

Эти равенства означают, что все функции $\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$ являются четными или нечетными относительно точки $\gamma = 0$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, а в частных случаях $a = b$ и (или) $a' = b'$ такие функции обладают определенной четностью относительно точки $\gamma = \pi/4$ на интервале $(0, \pi/2)$.

Запишем операторные равенства (28), (47) и (48) в базисе гипергармоник. Подставляя между всеми операторными сомножителями единичный оператор (135) и учитывая правило (137), выводим для функций $\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$

соотношение унитарности и формулы сложения и дифференцирования:

$$\sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell} \langle ab|K(-\gamma)|a''b''\rangle_{L\ell} = \delta_{a'a''} \delta_{b'b''}, \quad (166)$$

$$\langle a'b'|K(\gamma_1 + \gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma_1)|ab\rangle_{L\ell} \langle ab|K(\gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell}, \quad (167)$$

$$\begin{aligned} i \partial_\gamma \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \\ = \sum_{\mu, \nu=\pm 1} \langle ab|J|a+\mu, b+\nu\rangle_{L\ell} \langle a+\mu, b+\nu|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}. \end{aligned} \quad (168)$$

Используя формулу дифференцирования (168) и граничные значения (140) и (141), доказываем полезное интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} i \sum_{\mu, \nu=\pm 1} \langle ab|J|a+\mu, b+\nu\rangle_{L\ell} \int_0^{\pi/2} d\gamma \langle a+\mu, b+\nu|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = \\ = (-1)^L \delta_{aa'} \delta_{bb'} - (-1)^{(L-2\ell+a'-b')/2} \delta_{ab'} \delta_{a'b}. \end{aligned} \quad (169)$$

Отметим, что формулы (165)–(169) верны в обоих случаях $(-1)^{\ell+L} = \pm 1$.

В случае $(-1)^{\ell+L} = 1$ коэффициенты (97) не обращаются в нуль и тождества (144) являются нетривиальными. Выведем из этих тождеств серию дополнительных соотношений для матричных элементов оператора $K(\gamma)$. По определению (55) в точках $\varphi = 0, \pi/2$ все функции $W_{Lab}(\varphi)$ с отличным от нуля индексом a или, соответственно, b обращаются в нуль. Поэтому в пределах $\varphi \rightarrow 0, \pi/2$ тождества (144) превращаются в соответствующие и справедливые при любых a' и b' равенства:

$$\langle 0\ell|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L B_{a'b'}^\ell W_{La'b'}(\gamma) / \left((2\ell+1)^{1/2} W_{L0\ell}(0) \right), \quad (170)$$

$$\langle \ell 0|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L B_{a'b'}^\ell W_{La'b'}(\gamma) / \left((2\ell+1)^{1/2} W_{L\ell 0}(\pi/2) \right). \quad (171)$$

В силу равенств (156) производная $\partial_\varphi W_{Lab}(\varphi)$ отлична от нуля при $\varphi = 0$ только в случае $a = 1$. Поэтому, продифференцировав тождество (144) по переменной φ и положив затем $\varphi = 0$, получим равенство

$$\sum_b B_{1b}^\ell \partial_\varphi W_{L1b}(0) \langle 1b|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^{L+1} B_{a'b'}^\ell \partial_\gamma W_{La'b'}(\gamma), \quad (172)$$

в котором сумма вычисляется по всем значениям индекса b , допустимым при $a = 1$. Аналогичным способом выводим тождество

$$\sum_{a=0,2} \sum_b B_{ab}^\ell \partial_\varphi^2 W_{Lab}(0) \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} = (-1)^L B_{a'b'}^\ell \partial_\gamma^2 W_{La'b'}(\gamma), \quad (173)$$

в котором индекс b пробегает все допустимые при $a = 0$ и $a = 2$ значения. Далее по индукции доказываем, что в рассмотренном случае $(-1)^{L+\ell} = 1$ верна серия тождеств

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_b B_{n-2k,b}^\ell \partial_\varphi^n W_{L,n-2k,b}(0) \langle n-2k, b | K(\gamma) | a'b' \rangle_{L\ell} = \quad (174)$$

$$= (-1)^{L+n} B_{a'b'}^\ell \partial_\gamma^n W_{La'b'}(\gamma), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где индекс b пробегает все значения, допустимые при данном индексе $a = n - 2k$, а символом $[n]$ обозначена целая часть числа n .

Продолжим описание глобальных свойств матричных элементов оператора $K(\gamma)$ анализом их известных представлений, справедливых в обоих случаях $(-1)^{L+\ell} = \pm 1$. Согласно формулам (139) и (142) такие матричные элементы описывают связь между гипергармониками, аргументы которых связаны кинематическим преобразованием. Коэффициенты такого вида принято называть коэффициентами Рейнала—Реваи. Между нашими обозначениями для таких коэффициентов и обозначениями, использованными в книге [25] и работе [78], имеется простое соответствие:

$$\langle ab | K(\gamma) | a'b' \rangle_{L\ell} = {}^i \langle ba | b'a' \rangle_{L\ell}^k = (-1)^{a+a'} \langle ba | b'a' \rangle_{L\ell}^\gamma, \quad \gamma = \gamma_{ki}. \quad (175)$$

Используя эти связи, перепишем явные выражения коэффициентов Рейнала—Реваи, полученные в работе [78], в виде громоздких сумм:

$$\langle ab | K(\gamma) | a'b' \rangle_{L\ell}(\gamma) = \frac{\pi}{4} (C_{ab}^n C_{a'b'}^{n'})^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{cdef} (-1)^{c+d} i^{e+f+b-b'} B_{ce}^{a'} B_{df}^{b'} B_{cf}^a B_{ed}^b \begin{Bmatrix} c & e & a \\ f & d & b \\ a' & b' & \ell \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \sum_{gh} (-1)^g C_{df}^g C_{cd}^h (\cos \gamma)^{2h+c+d} (\sin \gamma)^{2g+e+f}, \quad (176)$$

где коэффициенты B_{ab}^c и C_{ab}^c заданы формулами (97) и равенствами

$$C_{ab}^c \equiv \frac{\Gamma(2c + a + b + 2)}{\Gamma(c + 1)\Gamma(a + b + c + 2)\Gamma(c + a + 3/2)\Gamma(c + b + 3/2)}.$$

Теперь, развивая идею работы [72], рассмотрим соотношения (168) как систему уравнений для неизвестных функций $\langle ab | K(\gamma) | a'b' \rangle_{L\ell}$ с фиксированными индексами L, ℓ, a' и b' и всеми возможными значениями a и b . Символом N обозначим число таких пар индексов a и b . Рассматриваемую систему дополним граничными условиями (140). Исследуем получившуюся краевую

задачу известным в теории дифференциальных уравнений [8] способом решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Индексом $i = 1, \dots, N$ пронумеруем все возможные пары индексов a и b . Предположим, что спектральная задача

$$\sum_{\mu, \nu = \pm 1} \langle ab | J | a + \mu, b + \nu \rangle_{L\ell} X_{a+\mu, b+\nu} = -\lambda X_{ab}, \quad \forall a, b, \quad (177)$$

имеет N различных собственных значений $\lambda = \lambda_j$ и отвечающих им собственных решений $X_{ab} = X_{ab}^j$, $j = 1, \dots, N$. Тогда исходной задаче (140), (168) удовлетворяют суммы

$$\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \sum_{j=1}^N C_j X_{ab}^j \exp(i\lambda_j \gamma) \quad (178)$$

с коэффициентами C_j , подчиненными системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N C_j X_{ab}^j = (-1)^L \delta_{aa'} \delta_{bb'}, \quad (179)$$

обеспечивающей выполнение граничных условий (140).

Докажем, что все собственные значения задачи (177) не вырождены. Предположим противное: пусть хотя бы одно из них, а именно λ_1 , имеет кратность $s + 1 > 1$. Как известно [8], такому значению отвечает фундаментальное решение системы уравнений (168):

$$Z_{ab}(\gamma) = X_{ab}^1 P_s(\gamma) \exp(i\lambda_1 \gamma),$$

где P_s — полином степени s переменной γ . Следовательно, общее решение этой системы запишется в виде суммы, содержащей этот же полином:

$$\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = C_1 Z_{ab}(\gamma) + \sum_{j=2}^N C_j X_{ab}^j \exp(i\lambda_j \gamma). \quad (180)$$

Однако в общем случае коэффициент Рейнала—Реваи (175), (176) — ряд по целым степеням функций $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$. Такой ряд сводится к конечной линейной комбинации функций $\exp(\pm i n \gamma)$ с целыми индексами $n = 0, 1, \dots$. Такая комбинация не имеет слагаемых с полиномиальной зависимостью от γ и поэтому не может быть представлена в виде (180). Полученное противоречие означает, что все собственные числа λ_j задачи (177) являются невырожденными и целыми числами.

Решения исследуемой задачи (168), (140) можно представить и в виде однократных либо двухкратных интегралов. Чтобы вывести первое интегральное представление, умножим каждое ($m = -\ell, \dots, \ell$) тождество (143) на соответствующую функцию $C_{amb0}^{\ell m} \Theta_{am}(u)$. Получившиеся $(2\ell + 1)$ равенства проинтегрируем по переменной u на отрезке $-1 \leq u \leq 1$ и просуммируем по индексу m . Итоговое равенство сведем, используя соотношения (114) и (116), к одномерному интегральному тождеству по переменной φ :

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}(\gamma) = W_{Lab}^{-1}(\varphi) \int_{-1}^1 du K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, u; \gamma) W_{La'b'}(\varphi'(\varphi, u; \gamma)). \quad (181)$$

Заменив переменную интегрирования u на φ' по правилам (122)–(127), перепишем это тождество в виде

$$\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}(\gamma) = W_{Lab}^{-1}(\varphi) \int_{C_+(\varphi; \gamma)}^{C_-(\varphi; \gamma)} d\varphi' K_{aba'b'}^{\ell}(\varphi, \varphi'; \gamma) W_{La'b'}(\varphi'). \quad (182)$$

Используя определения (79) и (131), представим полученное соотношение в виде равенства

$$\langle \varphi|h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma)|\tilde{W}_{La'b'}(\varphi)\rangle = \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} \tilde{W}_{Lab}(\varphi). \quad (183)$$

Теперь умножим тождество (181) на функцию $\rho^2(\varphi)W_{Lab}(\varphi)$. Применяя условия ортонормированности (66) для таких функций, проинтегрируем обе части получившегося соотношения по переменной φ на отрезке $[0, \pi/2]$. В результате матричный элемент $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ представится в виде двойного интеграла (133), равного интегралу (134).

Приступим к выводу дискретных представлений функций $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ в виде однократных или двухкратных сумм по произвольным узловым значениям совокупностей аргументов Ω или, соответственно, u и φ .

Пусть N — число гипергармоник (54) с данными индексами L, ℓ и m . Запишем пятимерное тождество (142) в N произвольных, но различных точках $\Omega = \Omega_i$, $i = 1, \dots, N$, единичной гипертсферы $\mathcal{S}_{xy}^5$, отличных от точек с координатами Ω_p (случай (12)) или Ω_l (случай (13)–(15)). Тогда получим систему из N линейных уравнений для неизвестных функций $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ с фиксированными индексами L, ℓ, a' и b' и всеми возможными при таком условии индексами a и b :

$$Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega_i; \gamma)) = \sum_{ab} \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (184)$$

Индексы a и b пронумеруем индексом $j = 1, \dots, N$, чтобы переписать уравне-

ния (184) в виде, удобном для численного решения:

$$\sum_{j=1}^N Y_{ij} X_j = Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega_i; \gamma)), \quad (185)$$

$$X_j \equiv \langle a_j b_j | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}, \quad Y_{ij} \equiv Y_{La_j b_j}^{\ell m}(\Omega_i), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Так как гипергармоники $Y_{a_j b_j}^{\ell m}(\Omega)$ с $j = 1, \dots, N$ линейно независимы на $\mathcal{S}_{xy}^5$, то матрица $\mathbf{Y}$ системы (185) не вырождена при любом выборе точек Ω_i . Следовательно, эта система всегда имеет единственное решение. Оно инвариантно относительно выбора узлов Ω_i и представимо в виде

$$\langle a_j b_j | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \sum_{i=1}^N Y_{ji}^{-1} Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega_i; \gamma)), \quad j = 1, \dots, N. \quad (186)$$

Идея описанной дискретизации тождества (142) и использования представления (186) для вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи принадлежит Эфросу [82]. Развивая эту идею, выведем для таких коэффициентов более удобное с вычислительной точки зрения дискретное представление.

Пусть теперь N — число возможных значений индекса a гипергармоник с данными L, ℓ и m , а M — число возможных значений индекса b таких гипергармоник при фиксированном индексе a . Все возможные значения индекса a расположим в порядке возрастания и пронумеруем целым индексом: $a = a_i, i = 1, \dots, N, a_1 < a_2 < \dots < a_N$. Аналогичное соответствие введем для всех возможных при данном a значений индекса b : $b = b_j, j = 1, \dots, M, b_1 < b_2 < \dots < b_M$. Зафиксируем значения индексов a' и b' . Для упрощения вычислений положим $m = (1 - (-1)^{\ell+L})/2$. Тождество (143) с выбранными a', b' и m запишем в виде

$$\sum_{j=1}^N \Theta_{a_j m}(u) X_j(\varphi; \gamma) = Q_{a'b'}(u, \varphi; \gamma), \quad (187)$$

$$X_j(\varphi; \gamma) \equiv \sum_{t=1}^M (b_t + 1/2)^{1/2} C_{a_j m b_t 0}^{\ell m} W_{La_j b_t}(\varphi) \langle a_j b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}. \quad (188)$$

На интервале $(-1, 1)$ зададим некоторую сетку узлов $u_i, i = 1, \dots, N$. Запишем тождество (187) на этой сетке. В результате такой дискретизации получим систему линейных уравнений для неизвестных функций (188):

$$\sum_{j=1}^N \Theta_{ij} X_j(\varphi; \gamma) = Q_{a'b'}(u_i, \varphi; \gamma), \quad \Theta_{ij} \equiv \Theta_{a_j m}(u_i), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (189)$$

На интервале $(-1, 1)$ функции $\Theta_{am}(u)$ с фиксированным индексом m и различными индексами a линейно независимы [6]. Поэтому при любом выборе сетки матрица Θ системы (189) не вырождена. Обратив эту матрицу, для каждого j получим соответствующее тождество по переменной φ :

$$\sum_{t=1}^M (b_t + 1/2)^{1/2} C_{a_j m b_t 0}^{\ell m} W_{La_j b_t}(\varphi) \langle a_j b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle = \quad (190)$$

$$= \sum_{i=1}^N \Theta_{ji}^{-1} Q_{a' b'}(u_i, \varphi; \gamma).$$

Записав каждое такое тождество в узлах φ_s , $s = 1, \dots, M$, произвольной сетки, заданной на интервале $(0, \pi/2)$, получим соответствующую систему линейных уравнений для искомых функций $\langle a b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$ с одинаковыми индексами $a = a_j$ и a' , b' , но разными индексами b_t :

$$\sum_{t=1}^M W_{st} \langle a_j b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \sum_{i=1}^N \Theta_{ji}^{-1} Q_{a' b'}(u_i, \varphi_s; \gamma), \quad s = 1, \dots, M. \quad (191)$$

Докажем, что матрица $\mathbf{W}$,

$$W_{st} \equiv (b_t + 1/2)^{1/2} C_{a_j m b_t 0}^{\ell m} W_{La_j b_t}(\varphi_s), \quad s, t = 1, \dots, M, \quad (192)$$

системы уравнений (191) не вырождена. Введя обозначения $\alpha \equiv a_j$, $\beta \equiv b_1$, $z \equiv \cos 2\varphi$ и используя определение (55) функций W_{Lab} , запишем все матричные элементы (192) в виде

$$W_{st} = 2^{t-1} (b_t + 1/2)^{1/2} C_{a_j m b_t 0}^{\ell m} N_{La_j b_t}(\sin \varphi_s)^{a_j} (\cos \varphi_s)^{b_1} F_{st}, \quad (193)$$

где матрица $\mathbf{F}$ составлена из узловых значений функций

$$f_t(z) \equiv (1+z)^{t-1} P_{M-t}^{(\alpha, \beta+2(t-1))}(z), \quad t = 1, \dots, M, \quad (194)$$

по правилам

$$F_{st} \equiv f_t(z_s), \quad z_s \equiv \cos 2\varphi_s, \quad s, t = 1, \dots, M. \quad (195)$$

Применив известные рекуррентные соотношения для полиномов Якоби [6], представим все функции (194) в виде разложений

$$f_t(z) = \sum_{k=0}^{M-1} C_{tk} P_k^{(\alpha, \beta+M-1)}(z), \quad t = 1, \dots, M, \quad (196)$$

по системе из M функций $P_k^{(\alpha, \beta+M-1)}(z)$, $k = 1, \dots, M$. Известно [6], что такие полиномы линейно независимы на интервале $z \in (-1, 1)$. В силу представления (196) этим же свойством обладает и система из M функций (194).

Поэтому при любом выборе узлов φ_s матрица (195), а значит, и матрица (193), имеют обратные матрицы $\mathbf{F}^{-1}$ и $\mathbf{W}^{-1}$. Следовательно, система (191) всегда имеет единственное решение. Оно не зависит от выбора узлов u_i и φ_s и представимо в виде

$$\langle a_j b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = \sum_{s=1}^M W_{ts}^{-1} \sum_{i=1}^N \Theta_{ji}^{-1} Q_{a'b'}(u_i, \varphi_s; \gamma), \quad t = 1, \dots, M. \quad (197)$$

Выведем соотношения, позволяющие исследовать такие локальные свойства функций $\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$, как асимптотики в выбранной точке γ_0 и положения экстремумов.

Применив формулы (48) и (138), разложим функцию $\langle ab | K(\gamma_0 + \gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$ в ряд Тейлора с центром в точке γ_0 :

$$\begin{aligned} \langle ab | K(\gamma_0 + \gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i\gamma)^n \sum_{\mu, \nu=0}^n \langle ab | J^n | a - n + 2\mu, b - n + 2\nu \rangle_{L\ell} \times \\ &\times \langle a - n + 2\mu, b - n + 2\nu | K(\gamma_0) | a' b' \rangle_{L\ell}. \end{aligned} \quad (198)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ такой ряд можно аппроксимировать его конечной подсуммой и использовать ее для качественного описания поведения функции $\langle ab | K(\gamma_0 + \gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$ в малой окрестности точки γ_0 . В качестве простых примеров рассмотрим случаи $\gamma_0 = 0, \pi/2$. Положим в ряде (198) сначала $\gamma_0 = 0$, а затем $\gamma_0 = \pi/2$. Далее, учитывая равенства (138), (140) и (141), получаем разложения

$$\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{n=0}^{\infty} (-i\gamma)^{N+n} \langle ab | J^{N+n} | a' b' \rangle_{L\ell}, \quad (199)$$

$$\langle ab | K(\pi/2 + \gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = (-1)^{(L+2\ell+a'-b')/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\gamma)^{N'+n} \langle ab | J^{N'+n} | b' a' \rangle_{L\ell},$$

$$N \equiv \max \{|a' - a|, |b' - b|\}, \quad N' \equiv \max \{|a' - b|, |b' - a|\},$$

согласно которым при $\gamma \rightarrow 0, \pi/2$ функции $\langle ab | K(\gamma) | ab \rangle_{L\ell}$ стремятся к ± 1 , если $a' = a, b' = b$ или $a' = b, b' = a$, а в других случаях сходятся к нулю не медленнее, чем соответствующие степенные функции γ^N и $(\pi/2 - \gamma)^{N'}$.

Производная функции $\langle ab | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$ обращается в нуль тогда и только тогда, если равна нулю правая часть уравнения (168). Поэтому положение локальных экстремумов этой функции определяется уравнением

$$\sum_{\mu, \nu=\pm 1} \langle ab | J | a + \mu, b + \nu \rangle_{L\ell} \langle a + \mu, b + \nu | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell} = 0. \quad (200)$$

Теперь докажем теорему сложения для полиномов Якоби с полуцелыми верхними индексами. Теорема сложения для полиномов Якоби с целыми верхними индексами приведена в книге [23] в виде теоремы сложения для D -функций Вигнера. Теорема сложения для полиномов Якоби в случае полуцелых верхних индексов не упоминается ни в этой книге, ни в специальных математических справочниках [6] и [7]. Поэтому представляется важным рассмотреть этот случай. Используя определения (55) функций W_{Lab} , перепишем тождество (144) в терминах полиномов Якоби. Таким образом, доказываем следующую теорему.

Теорема 1. При любых целых индексах

$$\ell, a, b, a', b'; L = 2n + a + b = 2n' + a' + b'; (-1)^{a+b+\ell} = 1$$

и условиях $\varphi' = \varphi - \gamma \neq 0, \pm\pi/2, \pm\pi$ верна формула сложения

$$\begin{aligned} P_{n'}^{(a'+1/2, b'+1/2)}(\cos 2\varphi') &= (-1)^{a'+b'} \sum_{ab} \frac{B_{ab}^{\ell} N_{Lab}}{B_{a'b'}^{\ell} N_{La'b'}} \langle ab | K(\gamma) | a'b' \rangle_{L\ell} \times \\ &\times \frac{(\sin \varphi)^a (\cos \varphi)^b}{(\sin \varphi')^{a'} (\cos \varphi')^{b'}} P_n^{(a+1/2, b+1/2)}(\cos 2\varphi), \end{aligned}$$

где коэффициенты N_{Lab} и B_{ab}^{ℓ} заданы формулами (56) и (97).

Обсудим новые способы вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи. Коэффициенты Рейнала—Реваи (175) можно найти интегрированием системы дифференциальных уравнений (168) с граничным условием (140) или решением эквивалентной матричной задачи (177)–(179), а также вычислением одномерных интегралов (181), (182) или же решением совокупности конечных систем линейных уравнений (187)–(192). Размерность матрицы $\mathbf{Y}$ системы (185) возрастает при $L \rightarrow \infty$, как $O(L^4)$. Поэтому при больших L вместо представления (186) разумнее использовать представление (197), размерности матриц $\mathbf{\Theta}$ и $\mathbf{W}$ которого растут гораздо медленнее. Действительно, для вычисления по формулам (187)–(192), (197) всех коэффициентов Рейнала—Реваи $\langle a_j b_t | K(\gamma) | a' b' \rangle_{L\ell}$ с данными индексами L, ℓ и a', b' необходимо один раз обратить матрицу $\mathbf{\Theta}$ размерности $N \sim L$, построить N обратных матриц $\mathbf{W}^{-1}$ размерности $M \sim L$ и, наконец, вычислить суммы (197) для всех $j = 1, \dots, N$ и $t = 1, \dots, M$.

Существенно сократить объем математических операций, необходимых для вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи любым из перечисленных выше способов, позволяют соотношения симметрии (165) и формула сложения (167). Применяя эту формулу, можно вычислить коэффициенты Рейнала—Реваи при кинематическом угле $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ по известным значениям этих коэффициентов для $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$. В предельных случаях (6) и (7)

коэффициенты Рейнала—Реваи можно аппроксимировать конечными суммами соответствующих рядов (199). Тщательный контроль точности вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи любым из вышеупомянутых способов можно осуществить, подставив результаты вычислений в левые части соотношений (143), (144), (166), (169), (172)–(174) и (200) и сравнив затем полученные значения со значениями соответствующих правых частей этих же соотношений.

В заключение перечислим формулы, доказанные ранее в других работах, но более сложными способами, чем упомянутые выше. Формулы (162)–(164) доказаны в работе [79] предельным переходом $\gamma \rightarrow 0$ в явных выражениях для коэффициентов Рейнала—Реваи (176). В этой же работе для таких коэффициентов были выведены системы линейных уравнений типа (168) и доказано, что собственные числа задачи (177) являются целыми. Формулы (170) и (171) получены в работе [80] как частный случай сложных рекуррентных соотношений. Интегральное представление (181)–(183) впервые доказано в работе [65].

3. УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФАДДЕЕВА

Основная цель этого раздела — описать, используя понятие и свойства кинематического преобразования, редукцию уравнений Шредингера и Фаддеева, изначально записанных в $\mathcal{R}^6$, к системам уравнений в $\mathcal{R}_+^2$ или $\mathcal{R}_+^1$. В п. 3.1 перечислены некоторые известные операторные и спектральные свойства свободного трехчастичного гамильтониана. В п. 3.2 поясняются матричные представления центрального и S -волнового взаимодействий в угловых базисах. Строению и угловому анализу уравнений Шредингера и Фаддеева посвящены п. 3.3 и 3.4.

3.1. Основные свойства свободного гамильтониана. В квантовой механике [10] состояния $|\varepsilon\rangle$ системы частиц классифицируются наборами ε сохраняющихся квантовых чисел. Состоянию $|\varepsilon\rangle$ ставится в соответствие регулярная волновая функция $\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv \langle \mathbf{r} | \varepsilon \rangle$. Волновая функция Ψ^ε трех свободных частиц подчинена уравнению Шредингера

$$(H_0(\mathbf{r}) - E)\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = 0, \quad (201)$$

где числовой параметр E имеет смысл полной энергии, а свободный трехчастичный гамильтониан H_0 в представлении $|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ эквивалентен сумме двух операторов Лапласа:

$$H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -\Delta_x - \Delta_y, \quad \Delta_q \equiv \sum_{\mu=1}^3 \partial_{q_\mu}^2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{x}, \mathbf{y}. \quad (202)$$

Здесь и далее для ясности в скобках за символом рассматриваемого оператора указываем при необходимости переменные, на которые он действует.

Перечислим другие часто используемые представления гамильтониана H_0 . Используя определения операторов угловых моментов (36) и (37), можно переписать гамильтониан (202) в виде суммы операторов, действующих на модули векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и их сферические углы, либо на гиперрадиус r и гиперсферические углы Ω :

$$H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x^{-2} \partial_x (x^2 \partial_x) - y^{-2} \partial_y (y^2 \partial_y) + x^{-2} \mathbf{I}_x^2(\hat{x}) + y^{-2} \mathbf{I}_y^2(\hat{y}), \quad (203)$$

$$H_0(r, \Omega) = -r^{-5} \partial_r (r^5 \partial_r) + r^{-2} \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (204)$$

Используя эти представления и свойства (89) оператора $\mathbf{L}^2$, несложно показать, что для любой функции Q переменных x, y ; r, φ или r верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (xy)^{-1} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) Q(x, y) &= -(xy)^{-1} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \tilde{H}_{0ab}(x, y) Q(x, y), \\ \tilde{H}_{0ab}(x, y) &\equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 - a(a+1)y^{-2} - b(b+1)x^{-2}; \end{aligned} \quad (205)$$

$$\begin{aligned} H_0(r, \Omega) (xy)^{-1} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) Q(r, \varphi) &= (xy)^{-1} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \tilde{H}_{0ab}(r, \varphi) Q(r, \varphi), \\ \tilde{H}_{0ab}(r, \varphi) &\equiv \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} \tilde{L}_{ab}^2(\varphi); \end{aligned} \quad (206)$$

$$\begin{aligned} H_0(r, \Omega) (xy)^{-1} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega) Q(r) &= -r^{-2} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega) \tilde{H}_{0L}(r) Q(r), \\ \tilde{H}_{0L}(r) &\equiv \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} (L+2)^2. \end{aligned} \quad (207)$$

Опишем два способа разделения переменных в уравнении (201) и его частные и общие решения. В силу равенств (25), (36), (37), (202) и (204)

$$[H_0, Q]_- = 0, \quad Q = \mathbf{I}^2, l_3, \mathbf{I}_x^2, \mathbf{I}_y^2, \mathbf{L}^2, P_1, P_2, P, T. \quad (208)$$

Благодаря этим коммутационным соотношениям, собственные функции операторов $\mathbf{I}^2, l_3$ и P являются собственными и для оператора H_0 . Поэтому решение Ψ^ε уравнения (201) с набором квантовых чисел $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ ищем в виде функции (84), подчиненной условиям (85) и представленной бисферическим рядом (86). Заменим им функцию Ψ^ε в уравнении (201). Используя равенства (206), спроектируем полученное уравнение на бисферический базис. Тогда для искомого бисферического компонента U_{ab}^ℓ получим бесконечную систему незацепляющихся по индексам a и b уравнений:

$$\left(\tilde{H}_{0ab}(r, \varphi) + E \right) U_{ab}^\ell(r, \varphi) = 0. \quad (209)$$

Искомое решение U_{ab}^ℓ , $(-1)^{a+b} = \sigma$, каждого такого уравнения заменим его рядом (88) по базисным функциям $\tilde{W}_{Lab}$. Получившееся уравнение спроектируем, используя свойство (82) оператора $\tilde{L}_{ab}^2$, на такой базис. Тогда для каждой неизвестной функции U_{Lab}^ℓ , $L = a+b, a+b+2, \dots$, получим уравнение

$$(\tilde{H}_{0L}(r) + E) U_{Lab}^\ell(r) = 0. \quad (210)$$

Сведем его подстановкой

$$z = \sqrt{E}r, \quad \nu = L+2, \quad U_{Lab}^\ell(r) = Z_\nu(z)$$

к каноническому уравнению для цилиндрических функций Бесселя [6]:

$$(z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + z^2 - \nu^2) Z_\nu(z) = 0. \quad (211)$$

Это уравнение, а значит и исходное уравнение (210), имеет нетривиальное регулярное решение J_{L+2} только при $E > 0$. Следовательно, при любых допустимых индексах a, b и L

$$U_{Lab}^\ell(r) = J_{L+2}(\sqrt{E}r), \quad E > 0, \quad (212)$$

а общее регулярное решение U_{ab}^ℓ уравнения (210) описывается равенствами

$$U_{ab}^\ell(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & E < 0 \\ \sum_L C^L J_{L+2}(\sqrt{E}r) \tilde{W}_{Lab}(\varphi), & E > 0 \end{cases}, \quad (213)$$

где C^L — произвольные числа. По построению решению (212) уравнения (210) отвечает собственная функция оператора H_0 и всех коммутирующих с ним операторов (208):

$$\Psi_0^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} J_{L+2}(\sqrt{E}r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad \varepsilon = (L, a, b, \ell, m, \sigma). \quad (214)$$

Линейная комбинация таких функций со всеми возможными индексами L, a и b — искомое решение Ψ^ε , $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$, уравнения (201).

Итак, в свободном уравнении Шредингера (201) можно последовательно отделить переменные $\hat{x}, \hat{y}$ от переменных r, φ , а затем и переменные r и φ друг от друга. Разделение переменных достигается проектированием исходного уравнения на бисферический базис и последующим за ним проектированием каждого получившегося уравнения (209) на соответствующий базис из функций $\tilde{W}_{Lab}$.

Альтернативный, но эквивалентный способ основан на использовании для искомой функции Ψ^ε , $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$, гипербисферического анзаца (84), (87) и состоит в одноэтапном разделении переменных Ω от r путем проектирования

уравнения (201) сразу на гиперсферический базис. С помощью формул (207) нетрудно проверить, что в результате такого проектирования для искоемых гиперсферических компонент U_{Lab}^ℓ получаются те же самые уравнения (210), что и в ранее описанном способе.

Известно [14,19], что множество функций (214) со всеми возможными компонентами мультииндекса ε является фундаментальной системой регулярных решений (ФСР) свободного уравнения Шредингера: любое другое регулярное решение представимо в виде конечной или бесконечной линейной комбинации функций (214) и произвольных числовых коэффициентов. Например, решение, описывающее плоскую волну и отвечающее набору сохраняющихся квантовых чисел $\varepsilon = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ из шести координат двух трехмерных импульсов рассеяния $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, представимо в виде [25]

$$\begin{aligned} \Psi_0^{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(\mathbf{r}) &= \exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{y})) = \frac{8\pi^3}{E} \sum_{\ell m} \sum_{ab} \sum_L i^L (Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_s))^* \times \\ &\times r^{-2} J_{L+2}(\sqrt{E}r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad \mathbf{s} \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad E = p^2 + q^2. \end{aligned} \quad (215)$$

3.2. Матричное представление операторов взаимодействия. Известный способ изыскного решения задачи проектирований операторных соотношений на угловые базисы основан на использовании матричных представлений операторов. Приведем и прокомментируем такие представления для двух типов парных операторов взаимодействия $V_i(\mathbf{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$, действующих в пространстве $\mathcal{R}^6$ только на относительные координаты $\mathbf{x}_i$ соответствующей пары частиц с номерами j и k .

Напомним относительные понятия собственного (несобственного) координатного представления и углового базиса. Координатное представление $\langle \mathbf{r}_i |$ или система координат $\mathbf{r}_i$ называется собственным для некоторого оператора V_i или функции Ψ_i , помеченных одинаковым индексом i . Два других представления $\langle \mathbf{r}_k |$, $k \neq i$, будут несобственными для такого оператора или такой функции. Аналогично определяются собственные и несобственные угловые базисы: угловой базис, составленный из функций аргументов $\mathbf{r}_i$ ($\mathbf{r}_k$), называется собственным (несобственным) для V_i или Ψ_i .

Ниже для краткости опустим индексы i и k , представление $\langle \mathbf{r} | \equiv \langle \mathbf{r}_i |$ или $\langle \mathbf{r}' | \equiv \langle \mathbf{r}_k |$ считаем собственным или несобственным.

Оператор $V(\mathbf{r})$, действующий в собственном координатном представлении $\langle \mathbf{r} |$ на произвольную функцию $\Psi(\mathbf{r})$ как оператор обычного умножения на функцию-потенциал $V(x)$, называют центральным или сферически-симметричным парным взаимодействием [10]. В $\mathcal{R}^6$ оператор $V(\mathbf{r})$ не действует на переменные $\mathbf{y}$, а функция $V(x)$ не зависит от углов $\hat{x}$. Поэтому ненулевые элементы матриц оператора $V(\mathbf{r})$ в его собственных угловых базисах задаются формулами

$$\langle b\beta | V(\mathbf{r}) | b\beta \rangle = \langle \ell m a b | V(\mathbf{r}) | \ell m a b \rangle = V(x), \quad (216)$$

$$\begin{aligned}\langle L\ell mab|V(\mathbf{r})|L'\ell mab\rangle &= \langle L\tilde{a}b|V(r\cos\varphi)|L'\tilde{a}b\rangle = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \tilde{W}_{Lab}(\varphi)V(r\cos\varphi)\tilde{W}_{L'ab}(\varphi) \equiv V_{ab}^{LL'}(r).\end{aligned}$$

Используя эти правила отбора и угловые бра- и кет-операторы, определенные равенствами (63)–(65), запишем центральное взаимодействие в виде бесконечной суммы b -волновых операторов V^b :

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{b=0}^{\infty} V^b(\mathbf{r}), \quad (217)$$

$$V^b(\mathbf{r}) = \sum_{\beta=-b}^b |Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle V(x) \langle Y_{b\beta}(\hat{x})|, \quad (218)$$

$$V^b(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m} \sum_a |\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})\rangle V(x) \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})|, \quad (219)$$

$$V^b(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m} \sum_a \sum_{LL'} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)\rangle V_{ab}^{LL'}(r) \langle Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega)|. \quad (220)$$

Как следует из матричных представлений (218)–(220), каждый оператор V^b не является проектором ($V^b V^b \neq I$), но обладает проекционными свойствами:

$$(V^b(\mathbf{r}) - \delta_{bb'} V(x)) |Q_{b'\beta}\rangle = 0, \quad \forall |Q_{b'\beta}\rangle = |b'\beta\rangle, |\ell m a' b'\rangle, |L\ell m a' b'\rangle, \quad (221)$$

и поэтому отображает произвольную функцию $\Psi(\mathbf{r})$ в собственную функцию оператора I_x^2 , отвечающую его собственному значению $b(b+1)$.

В ядерной физике операторы V^b с индексом $b=0, 1$ называются S - и P -волновыми взаимодействиями. В рядах (218)–(220) для S - и P -волновых взаимодействий $a=\ell, b=0$ и, соответственно, $a=\ell, \ell\pm 1, b=1$.

3.3. Строение и угловой анализ уравнения Шредингера. Уравнение Шредингера для волновой функции Ψ^ε состояния $|\varepsilon\rangle$ трех частиц с парными взаимодействиями V_i обычно приводится в компактной (операторной) форме [10]:

$$(H - E)\Psi^\varepsilon = 0, \quad H \equiv H_0 + V, \quad V \equiv \sum_{k=1}^3 V_k, \quad (222)$$

и подразумевается, что все парные взаимодействия заданы в своих собственных координатах, а все операторы и искомое решение Ψ^ε — в каком-то одном координатном представлении $\langle \mathbf{r}_i |$. Ясно, что при любом выборе одного из трех таких представлений оно оказывается несобственным для двух

взаимодействий, а именно для V_j и V_k . Поясним, почему это непреодолимое в рамках шредингеровской постановки задачи трех частиц обстоятельство существенно затрудняет аналитическое исследование данной задачи. С этой целью рассмотрим случай центральных взаимодействий.

Запишем уравнение (222), учитывая общепринятые и перечисленные выше правила и определение (26) оператора $K(\gamma)$. Тогда в пространстве $\mathcal{R}^6$ получим дифференциальное уравнение Шредингера в его канонической форме:

$$\left(H_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + V_i(x_i) - E + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) V_k(x_i) \right) \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = 0. \quad (223)$$

Здесь $V_i(x_i)$ — функция трех аргументов $\mathbf{x}_i$, а два кинематических образа — функции шести переменных $\mathbf{r}_i$:

$$K(\gamma_{ki}) V_k(x_i) = V_k(x_k(\mathbf{r}_i)), \quad k \neq i. \quad (224)$$

Именно из-за такой функциональной зависимости построить точное решение исходного уравнения Шредингера (223) не так просто даже в случае парных взаимодействий, описываемых в собственных координатах элементарными функциями.

Напомним, что мешает построению точного решения методом разделения переменных. В случае центральных взаимодействий полный гамильтониан H удовлетворяет соотношениям

$$[H, Q]_- = 0, \quad Q = \mathbf{I}^2, l_3, P; \quad [H, q]_- \neq 0, \quad q = \mathbf{L}^2, \mathbf{I}_x^2, \mathbf{I}_y^2, \quad (225)$$

поэтому сохраняется набор квантовых чисел $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ и для искомой функции Ψ^ε верны представления (84)–(86). В уравнении (223) заменим функцию Ψ^ε , кинематические образы (224) и взаимодействие $V_i(x_i)$ их бисферическими рядами, записанными в представлении $\langle \mathbf{r}_i |$ по соответствующим правилам (86), (129) и (219). Используя равенства (119), (120) и (206), спроектируем получившееся уравнение на его собственный бисферический базис из функций $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$. Тогда для неизвестных бисферических компонент U_{ab}^ℓ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & (\tilde{H}_{0ab}(r, \varphi_i) - V_i(r \cos \varphi_i) + E) U_{ab}^\ell(r, \varphi_i) = \\ & = \sum_{k \neq i} \sum_{a' b'} \Gamma_{aba' b'}^{\ell m} \left(\int_{C-(\varphi_i, \gamma_{ik})}^{C+(\varphi_i, \gamma_{ik})} d\varphi_k K_{aba' b'}^\ell(\varphi_i, \varphi_k; \gamma_{ki}) V_k(r \cos \varphi_k) \right) U_{ab}^\ell(r, \varphi_i). \end{aligned} \quad (226)$$

Кинематические образы (224) в их несобственном бисферическом базисе имеют недиагональные матрицы. Поэтому число уравнений системы (226)

бесконечно по индексам a и b , а сами уравнения зацепляются по индексам a' и b' , содержат коэффициенты $\Gamma_{aba'b'}^{\ell m}$ (интегралы (120) от трех бисферических функций) и достаточно сложные интегралы от двух потенциалов.

Опишем нетрадиционный способ редукции уравнения (223). Оператор H_0 , функцию Ψ^ε в выражении $H_0\Psi^\varepsilon$ и оба сомножителя произведения $V_i\Psi^\varepsilon$ запишем в представлении $\langle \mathbf{r}_i |$, а сомножители обоих ($k \neq i$) произведений $V_k\Psi^\varepsilon$ — в соответствующих собственных представлениях $\langle \mathbf{r}_k |$. Тогда получим уравнение

$$(H_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + V_i(x_i) - E) \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) (V_k(x_k) \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_k)) = 0. \quad (227)$$

Используя анзац (84), (86) и формулы (130), (217)–(219), сводим нестандартное уравнение Шредингера (227) к системе уравнений

$$\begin{aligned} & (\tilde{H}_{0ab}(r, \varphi_i) - V_i(r \cos \varphi_i) + E) U_{ab}^\ell(r, \varphi_i) = \\ & = \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \int_{C_-(\varphi_i, \gamma_{ki})}^{C_+(\varphi_i, \gamma_{ki})} d\varphi_k (h_{aba'b'}^\ell(\varphi_i, \varphi_k; \gamma_{ki}) V_k(r \cos \varphi_k) U_{a'b'}^\ell(r, \varphi_k)). \end{aligned} \quad (228)$$

Эти уравнения содержат под знаками интегралов и потенциалы, и искомые функции U_{ab}^ℓ и поэтому являются еще более неудобными для точного решения, чем рассмотренные ранее уравнения (226).

Испытав все отличные от описанных выше способы представления слагаемых операторного уравнения Шредингера (222), можно убедиться в том, что проектирование получающихся дифференциальных уравнений Шредингера на бисферический базис приводит к системам интегродифференциальных уравнений.

Рассмотрим важный для ядерной физики случай трех тождественных частиц. В этом случае все частицы имеют одинаковые массы, по определению (4) модули всех кинематических углов равны $\pi/3$, а все парные взаимодействия в их собственных системах координат описываются одним и тем же оператором V :

$$m_i = m, \quad |\gamma_{ki}| = \pi/3, \quad V_i(\mathbf{r}_i) = V(\mathbf{r}_i), \quad \forall k \neq i = 1, 2, 3. \quad (229)$$

По принципу Паули волновая функция Ψ^ε должна быть (анти)симметричной относительно любых перестановок тождественных (фермионов) бозонов:

$$S^\pm \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (230)$$

Здесь знак минус или плюс берется в случае фермионов или, соответственно, бозонов, а операторы $S^\pm$ определены равенствами (52) и (53).

При дополнительном условии (230) тождественности системы уравнений Шредингера (226) или (227) упрощаются несущественно: в силу равенств (229) вместо разных матриц взаимодействия эти системы содержат лишь одну матрицу $\mathbf{V}$, однако остаются системами бесконечного ранга.

Итак, уравнение Шредингера содержит сумму всех парных взаимодействий, каждое из которых задано по определению в своем собственном координатном представлении. Проектирование уравнения с такой структурой на бисферический базис приводит к бесконечным системам дифференциальных уравнений (226) с громоздкими коэффициентами (120) и интегралами от потенциалов либо к бесконечным системам интегродифференциальных уравнений типа (228). Этот вывод остается справедливым и в случае тождественных частиц, и, как несложно убедиться, в случае S -волновых взаимодействий. Во всех этих случаях и по той же причине не менее громоздко выглядят системы дифференциальных уравнений, полученные проектированием уравнения Шредингера (223) или (227) на гипербисферический базис.

Перечисленные выше факты подсказывают, как следует переформулировать уравнение Шредингера, чтобы получить дифференциальную задачу с более простой структурой. Это уравнение необходимо свести к системе трех уравнений. Каждое уравнение должно содержать только одно взаимодействие V_i и записываться в собственном для этого взаимодействия представлении $\langle \mathbf{r}_i |$. По такому пути была построена теория Фаддеева [21].

3.4. Строение и угловой анализ уравнений Фаддеева. Проанализируем строение дифференциальных уравнений Фаддеева в пространстве $\mathcal{R}^6$, пока не накладывая каких-либо ограничений на массы частиц и вид парных взаимодействий. Ключевыми, но до сих пор не имеющими прозрачной физической интерпретации, математическими объектами теории Фаддеева являются три фаддеевские компоненты:

$$\Psi_i^\varepsilon \equiv G_0(Z) V_i \Psi^\varepsilon + \Psi_{i0}^\varepsilon, \quad G_0(Z) \equiv (H_0 - Z)^{-1}, \quad Z \equiv E + i0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (231)$$

волновой функции Ψ^ε рассматриваемого трехчастичного состояния $|\varepsilon\rangle$:

$$\Psi^\varepsilon = \sum_{k=1}^3 \Psi_k^\varepsilon. \quad (232)$$

Эти компоненты подчинены системе трех ($i = 1, 2, 3$) операторных уравнений:

$$(H_0 - E) \Psi_i^\varepsilon = -V_i \Psi^\varepsilon = -V_i \sum_{k=1}^3 \Psi_k^\varepsilon \quad (233)$$

и обладают важным свойством. Как следует из равенств (231), если Ψ^ε — собственная функция некоторого оператора, коммутирующего с H_0 и V_i , то Ψ_i^ε будет собственной функцией этого же оператора. Обратное утверждение

не всегда верно: если Ψ_i^ε — собственная функция некоторого оператора, коммутирующего с H_0 и V_i , то функция Ψ^ε может оказаться несобственной для этого же оператора.

Соотношения (231)–(233) представляются в $\mathcal{R}^6$ по следующему правилу: каждая фаддеевская компонента Ψ_i^ε и само уравнение, в левой части которого она содержится, записываются в их собственном представлении $\langle \mathbf{r}_i |$. Итак, в $\mathcal{R}^6$ компоненты Ψ_i^ε определяются формулами

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \equiv G_0(\mathbf{r}_i; Z) V_i(\mathbf{r}_i) \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (234)$$

складываются в сумму (232) по правилу

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \quad (235)$$

и подчинены трем ($i = 1, 2, 3$) дифференциальным уравнениям:

$$(H_0(\mathbf{r}_i) - E) \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = -V_i(\mathbf{r}_i) \left(\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ik}) \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \right). \quad (236)$$

Физические решения этой системы ищутся в классе функций $\mathcal{C}^2(\mathcal{R}^6)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям:

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \rightarrow (x_i y_i)^{-1} U_i^{as}(\mathbf{r}_i), \quad r \rightarrow \infty, \quad (237)$$

где U_i^{as} — известная функция, отвечающая исследуемой трехчастичной конфигурации: связанному состоянию или состояниям рассеяния.

Следуя книге [21], но используя операторы $K(\gamma_{ki})$, напомним, как и почему в случае тождественных частиц система трех уравнений (236) сводится к одному уравнению.

Пусть кроме необходимых условий тождественности частиц (229) и постулата Паули (230) выполняются равенства

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = S_{jk}^\pm \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (238)$$

Они означают, что по построению для трех (фермионов) бозонов каждая фаддеевская компонента — (анти)симметричная относительно отражения $\mathbf{x}_i \rightarrow -\mathbf{x}_i$ (перестановки частиц с номерами j и k) функция. Подействуем оператором $K(\gamma_{ki})$ на равенство (234), определяющее компоненту Ψ_i^ε . Тогда из-за условий симметрии (230) волновой функции и тождественности взаимодействий (229) это равенство перейдет в равенство (234), определяющее компоненту Ψ_k^ε . Значит, тождественность частиц порождает простые связи между фаддеевскими компонентами:

$$\Psi_i(\mathbf{r}_k) = K(\gamma_{ki}) \Psi_k(\mathbf{r}_i). \quad (239)$$

Благодаря им (анти)симметричная волновая функция (235) выражается через свою компоненту и кинематические образы этой же компоненты:

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = S_i \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \left(I + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) \right) \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i). \quad (240)$$

В силу соотношений (229) и (240) для тождественных фермионов или бозонов все три уравнения системы (236) принимают функционально одинаковый вид:

$$(H_0(\mathbf{r}) - E) \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}) = -V(\mathbf{r}) S_i \Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}), \quad (241)$$

где $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i$, а опущенный индекс i может принимать любое из трех значений.

Обсудим существенное различие в строении уравнений Шредингера и Фаддеева. В уравнении Шредингера (223) кинематическому преобразованию подвергаются две компоненты полного взаимодействия, в то время как в каждом уравнении Фаддеева (236) такому преобразованию подвергаются лишь две компоненты искомой волновой функции. Такое строение уравнений Фаддеева в $\mathcal{R}^6$ существенно упрощает их редукцию к системам интегродифференциальных (дифференциальных) уравнений в $\mathcal{R}_+^2$ ($\mathcal{R}_+^1$).

Перейдем к анализу такой редукции в случаях центральных, а затем и S -волновых взаимодействий. В обоих случаях отдельно рассмотрим примеры не-тождественных и тождественных частиц. Особое внимание обратим на эквивалентность двух способов редукции исходных уравнений Фаддеева к уравнениям в $\mathcal{R}_+^1$. Парные взаимодействия обоих рассматриваемых типов (217)–(220) коммутируют с операторами l^2, l_3 и P . Поэтому выполняются соотношения (225), а фаддеевские компоненты (231) и волновая функция (232) являются собственными функциями этих же операторов. Следовательно, для этих компонент верны точные представления в виде рядов типа (84)–(87) с мультииндексом $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$. Всюду далее используем такие анзацы в качестве исходных, а где это будет возможным дополним набор ε другими сохраняющимися квантовыми числами.

3.4.1. Угловой анализ в случае центральных взаимодействий. Пусть частицы не тождественны. Компоненты Ψ_i^ε представим рядами

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i U_i^\ell(\mathbf{r}_i), \quad U_i^\ell(\mathbf{r}_i) = \sum_{ab} U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i), \quad (242)$$

$$U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) = \sum_L \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i) U_{iLab}^\ell(r), \quad (243)$$

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = r^{-2} \sum_L \sum_{ab} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) U_{iLab}^\ell(r). \quad (244)$$

Кинематические образы этих рядов выразим по правилам (130)–(132) и (145). Тогда для волновой функции (235) получим разложения

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) &= 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i \sum_{ab} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \times \\ &\times \left(U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle r, \varphi_i | h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki}) | U_{ka'b'}^\ell \rangle \right), \\ \langle r, \varphi_i | h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki}) | U_{ka'b'}^\ell \rangle &\equiv \int_{C_-(\varphi_i; \gamma_{ki})}^{C_+(\varphi_i; \gamma_{ki})} d\varphi_k h_{aba'b'}^\ell(\varphi_i, \varphi_k; \gamma_{ki}) U_{ka'b'}^\ell(r, \varphi_k), \end{aligned} \quad (245)$$

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} \sum_{Lab} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) \left(U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) + \right. \\ &\left. + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} U_{ka'b'}^\ell(r) \right). \end{aligned} \quad (246)$$

Заменим в уравнениях (236) взаимодействия и фаддеевские компоненты их бисферическими рядами (219) и (242). Используя равенства (206), спроектируем каждое из трех получившихся уравнений на его собственный бисферический базис. Тогда получим бесконечную по индексам a и b систему интегрированных дифференциальных уравнений в $\mathcal{R}_+^2$:

$$\begin{aligned} &\left(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} \tilde{L}_{ab}^2(\varphi_i) + E - V_i(r \cos \varphi_i) \right) U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) = \\ &= V_i(r \cos \varphi_i) \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle r, \varphi_i | h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki}) | U_{ka'b'}^\ell \rangle. \end{aligned} \quad (247)$$

Дополним эту систему до краевой задачи граничными условиями

$$U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) = 0, \quad \varphi_i = 0, \pi/2, \quad r \in \mathcal{R}_+^1; \quad r = 0, \forall \varphi_i, \quad (248)$$

$$U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) \rightarrow U_{iab}^{as}(r, \varphi_i) \equiv \langle \ell m a b | U_i^{as} \rangle, \quad r \rightarrow \infty. \quad (249)$$

Тогда фаддеевские компоненты (242) будут регулярными функциями с нужными асимптотиками (237).

Способом, предложенным в работе [67], сведем получившуюся краевую задачу (247)–(249) к одномерной. Сначала пронумеруем мультииндексом $\tau \equiv (i, a, b)$ уравнения системы (247). Уравнение, содержащее в левой части искомую функцию U_{iab}^ℓ , назовем τ -уравнением. В этом уравнении заменим все без исключения бисферические компоненты $U_{ia'b'}^\ell(r, \varphi_i)$ рядами (243) по собственным базисным функциям $\tilde{W}_{La'b'}(\varphi_i)$. Рассмотрим, как эти функции

отображаются операторами $\tilde{L}_{ab}^2$, $h_{aba'b'}^\ell$ и V_i . Согласно равенствам (82) функция $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ является собственной для оператора $\tilde{L}_{ab}^2(r, \varphi_i)$. В силу свойства (183) функция $\tilde{W}_{La'b'}(\varphi_k)$ отображается оператором $h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})$ в функцию $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$. Наконец, из равенств (217)–(220) следует, что образ $V_i \tilde{W}_{Lab}$ — линейная комбинация функций $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ по индексу L . Следовательно, рассматриваемое τ -уравнение сводится к равной нулю сумме по индексу L . Каждое ее слагаемое — произведение функции $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ на дифференциальное соотношение по переменной r для функций $U_{kLa'b'}^\ell(r)$. Функции $\tilde{W}_{Lab}$ с разными L , но одинаковыми a и b , линейно независимы. Поэтому рассматриваемая сумма равна нулю в $\mathcal{R}_2^+$ тогда и только тогда, если каждое такое дифференциальное соотношение равно нулю. Значит, τ -уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений для функций $U_{kLa'b'}^\ell(r)$, $k = 1, 2, 3$.

Сформулируем доказанные утверждения. Во-первых, счетное ($L = a + b, a + b + 2, \dots$) множество функций $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$ является полным базисом для τ -уравнения системы (247), содержащего в своей левой части функцию U_{iab}^ℓ с выбранными индексами i, a, b . Во-вторых, в этом и только в этом уравнении для операторов $\tilde{L}_{ab}^2$, $h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})$ и V_i верны спектральные представления:

$$\tilde{L}_{ab}^2(\varphi_i) = \sum_L |\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\rangle (L+2)^2 \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|, \quad (250)$$

$$h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki}) = \sum_L |\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\rangle \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell} \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_k)|, \quad k \neq i, \quad (251)$$

$$V_i(r \cos \varphi_i) = \sum_{L', L=a+b} |\tilde{W}_{L'ab}(\varphi_i)\rangle V_{iab}^{LL'} \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|. \quad (252)$$

Используя представления (243) и (250)–(252), спроектируем каждое τ -уравнение системы (247) и ее граничные условия (248) и (249) на соответствующий собственный базис из функций $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$. Таким образом, в $\mathcal{R}_+^1$ поставим краевую задачу для неизвестных функций $U_{iLab}^\ell(r)$:

$$\begin{aligned} & (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}(L+2)^2 + E) U_{iLab}^\ell(r) = \\ & = \sum_{L'} V_{iab}^{LL'}(r) \left(U_{iL'ab}^\ell(r) + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle a'b'|K(\gamma_{ki})|ab\rangle_{L'\ell} U_{kL'a'b'}^\ell(r) \right), \end{aligned} \quad (253)$$

$$U_{iLab}^\ell(0) = 0; \quad U_{iLab}^\ell(r) \rightarrow \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|U_{iab}^{as}(r, \varphi_i)\rangle, \quad r \rightarrow \infty. \quad (254)$$

Гипергармоники (78) — произведения бисферических гармоник на функции (79). Следовательно, разложение фаддеевских компонент сначала в бисферические ряды (242), а затем в ряды (243) по функциям $|\tilde{L}\tilde{a}\tilde{b}\rangle$ эквивалентно результирующему разложению этих компонент в гиперсферические

ряды (244). Поэтому ту же самую краевую задачу (253), (254) можно вывести альтернативным способом: подстановкой анзацев (244) в уравнения (236) и граничные условия (237) и последующим проектированием полученных соотношений на их собственные гиперсферические базисы.

Итак, переход от фаддеевских уравнений в бисферическом базисе (247) к фаддеевским уравнениям в гиперсферическом базисе (253) осуществляется проектированием первых уравнений на соответствующие собственные базисные функции $\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)$. Это утверждение в самом общем случае было доказано в препринте [61] и упоминалось в его существенно сокращенном журнальном варианте [67]. Обратный переход, то есть вывод фаддеевских уравнений в бисферическом базисе из фаддеевских уравнений в гиперсферическом базисе, был реализован в работе [112] только в частном случае, а именно для системы трех тождественных бозонов с S -волновыми взаимодействиями и нулевым полным моментом.

Рассмотрим случай тождественных частиц. Перестановка частиц с номерами j и k эквивалентна отражению вектора $\mathbf{x}_i$. При такой операции бисферические гармоники $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ приобретают фазовый множитель $(-1)^b$. Поэтому дополнительное условие симметрии (238) будет автоматически выполняться, если в анзацах (242) и (244) для искомой фаддеевской компоненты трех(фермионной)бозонной волновой функции положить по определению все бисферические и гиперсферические компоненты с (четными) нечетными индексами b равными нулю:

$$U_{iab}^{\ell}(r, \varphi_i), \quad U_{iLab}^{\ell}(r) \equiv 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{фермионы} & b = 1, 3, \dots \\ \text{бозоны} & b = 0, 2, \dots \end{array} \right.$$

Подставив таким образом модифицированные разложения фаддеевских компонент в равенство (240), получим разложения волновой функции в случае тождественных частиц в представлении $\langle \mathbf{r}_i |$:

$$\begin{aligned} \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) &= 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i \sum_{ab} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \sum_{a'b'} \langle r, \varphi_i | S_{aba'b'}^{\ell} | U_{ia'b'}^{\ell} \rangle, \\ \langle r, \varphi_i | S_{iaba'b'}^{\ell} | U_{ia'b'}^{\ell} \rangle &\equiv \langle \ell m a b | S_i | \ell m a b U_{ia'b'}^{\ell} \rangle \equiv \\ &\equiv \delta_{aa'} \delta_{bb'} U_{iab}^{\ell}(r, \varphi_i) + \sum_{k \neq i} \langle r, \varphi_i | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma_{ki}) | U_{ia'b'}^{\ell} \rangle, \end{aligned} \quad (255)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} \sum_{Lab} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) \sum_{a'b'} \langle ab | S_i | a'b' \rangle_{L\ell} U_{Lab}^{\ell}(r), \\ \langle ab | S_i | a'b' \rangle_{L\ell} &\equiv \langle L\ell m a b | S_i | L\ell m a'b' \rangle \equiv \delta_{aa'} \delta_{bb'} + \sum_{k \neq i} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell}. \end{aligned} \quad (256)$$

3.4.2. *Угловой анализ в случае S-волновых взаимодействий.* Перейдем к угловому анализу уравнения (241) для трех бозонов с S-волновыми взаимодействиями, заданными равенствами (218) с $b = 0$. В этом уравнении положим $V_i = V_i^0$, а функции Ψ_i^ε и Ψ^ε представим бисферическими рядами (242) и (255) с четным индексом b . Спроектируем получившееся уравнение на его собственный бисферический базис. Благодаря проекционному свойству (221) взаимодействия V_i^0 , для каждой бисферической компоненты U_{iab}^ℓ с индексом $b \neq 0$ получится однородное уравнение типа (209) с известным решением (213), а уравнение для компоненты $U_{i\ell 0}^\ell$ с $b = 0$ будет неоднородным. Запишем это уравнение в виде

$$\left(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} \tilde{L}_{\ell 0}^2 + E \right) U^\ell(r, \varphi) = V(r \cos \varphi) \langle r, \varphi | S^\ell | U^\ell \rangle, \quad (257)$$

где опущены индексы i , $a = \ell$ и $b = 0$,

$$U^\ell \equiv U_{i\ell 0}^\ell, \quad \langle r, \varphi | S^\ell | U^\ell \rangle \equiv \langle r, \varphi | S_{i\ell 0 \ell 0}^\ell | U_{i\ell 0}^\ell \rangle, \quad (258)$$

и согласно формулам (115), (117), (123), (127), (132) и (255)

$$\begin{aligned} \langle r, \varphi | S^\ell | U^\ell \rangle &= U^\ell(r, \varphi) + \\ &+ (4/\sqrt{3}) \int_{C_-(\varphi, \pi/3)}^{C_+(\varphi, \pi/3)} d\varphi' P_\ell(u_{yy'}(\varphi, \varphi'; \pi/3)) U^\ell(r, \varphi'), \\ u_{yy'}(\varphi, \varphi'; \pi/3) &= (2(\cos 2\varphi + \cos 2\varphi') - 1) / (4 \sin \varphi \sin \varphi'). \end{aligned} \quad (259)$$

Опишем строение волновой функции Ψ^ε . Если $E < 0$, то $\forall U_{iab}^\ell \equiv 0$ при $b \neq 0$ и бисферический ряд (255) этой функции вырождается в равенство

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi \langle r, \varphi | S^\ell | U^\ell \rangle \mathcal{Y}_{\ell 0}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (260)$$

Такая функция является собственной для операторов $\mathbf{I}_x^2$ и $\mathbf{I}_y^2$:

$$\mathbf{I}_x^2 \Psi^\varepsilon = 0, \quad (\mathbf{I}_y^2 - \ell(\ell + 1)) \Psi^\varepsilon = 0.$$

Значит, при $E < 0$ сохраняются пять квантовых чисел: $\varepsilon = (\ell, m, \sigma, a, b)$, где $\sigma = (-1)^\ell$, $a = \ell$ и $b = 0$. В случае $E \geq 0$ бисферический ряд (255) волновой функции Ψ^ε содержит только одно зависящее от взаимодействия слагаемое, а остальные слагаемые априори известны в явном виде. Поэтому всюду далее при любом знаке энергии E исследуем только части фаддеевских компонент

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}) = 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi U_{\ell 0}^\ell(r, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell 0}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i, \quad (261)$$

зависящие от потенциала, и отвечающую им функцию (260).

Разделим переменные r и φ в уравнении (257). Для этого запишем искомую функцию U^ℓ и матричные представления всех операторов (250)–(252), содержащихся в этом уравнении, в сокращенных обозначениях (258) и (259):

$$U^\ell(r, \varphi) = \sum_L U_L^\ell(r) \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi), \quad (262)$$

$$\tilde{L}_{\ell 0}^2(r, \varphi) = \sum_L |\tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\rangle (L+2)^2 \langle \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)|, \quad (263)$$

$$S^\ell = \sum_{L=\ell}^{\infty} |\tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\rangle S_L^\ell \langle \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)|, \quad (264)$$

$$S_L^\ell \equiv S_{\ell 0 \ell 0}^\ell = 1 + 2\langle \ell 0 | K(\pi/3) | \ell 0 \rangle_{L\ell}, \quad (265)$$

$$V(r \cos \varphi) = \sum_{LL'} |\tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)\rangle V_{\ell 0}^{LL'}(r) \langle \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi)|. \quad (266)$$

Теперь, используя представления (262)–(266), спроектируем уравнение (257) на его собственный базис из функций $\tilde{W}_{L\ell 0}$, $L = \ell, \ell + 2, \dots$. В итоге получим искомую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}(L+2)^2 + E) U_L^\ell(r) &= R_L^\ell(r) \equiv \\ &\equiv \sum_{L'} V_{\ell 0}^{LL'}(r) S_L^\ell U_{L'}^\ell(r). \end{aligned} \quad (267)$$

В заключение с помощью формул (262) и (264) выразим волновую функцию (260) через гипертсферические компоненты, подчиненные системе уравнений (267):

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} \sum_L Y_{\ell 0}^{\ell m}(\Omega) S_L^\ell U_L^\ell(r), \quad \varepsilon = (\ell, m, \sigma, a, b), \quad \sigma = (-1)^\ell, a = \ell, b = 0. \quad (268)$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

В п. 4.1 обсуждаются условия существования и способы построения ложных решений фаддеевских уравнений (236), приводятся примеры ложных решений в случае центральных, S - и P -волновых взаимодействий. В п. 4.2 рассмотрены три частных случая, когда решения, обладающие физическим смыслом, и специальные (ложные) слагаемые таких решений можно найти точно.

4.1. Ложные решения. Для начала поясним, почему ложные решения могут существовать и почему их исследование представляется интересным. В уравнении Шредингера (223) неизвестной функцией Ψ^ε является вся фаддеевская сумма (232). В системе уравнений Фаддеева (233) неизвестными функциями являются слагаемые этой суммы. Вообще говоря, сумма трех некоторых функций, отличных от нуля, может быть тождественно равной нулю. Следовательно, система (233), без каких-либо дополнительных условий, может иметь нетривиальное и регулярное решение $(\Psi_1^\varepsilon, \Psi_2^\varepsilon, \Psi_3^\varepsilon)$, сумма (232) компонент которого тождественно равна нулю, $\Psi^\varepsilon \equiv 0$. Такое решение (обозначим его совокупностью (S_1, S_2, S_3)) обращает в нуль одновременно как правую, так и левую части системы (236):

$$S_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} K(\gamma_{ki}) S_i(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (269)$$

$$(H_0(\mathbf{r}_i) - E) S_i(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (270)$$

Совокупность (S_1, S_2, S_3) дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих только системе уравнений (269), (270), принято [100] называть ложным решением фаддеевских уравнений (236). Так как ложное решение удовлетворяет свободному уравнению Шредингера (270), то оно не содержит никакой информации о парных потенциалах. Согласно равенствам (269) ложное решение отвечает тривиальному решению ($\Psi^\varepsilon \equiv 0$) уравнения Шредингера (222). Следовательно, ложное решение не соответствует никакому физическому состоянию системы трех частиц. Как отмечалось в работе [108], система уравнений (269), (270) всегда имеет нетривиальное двухпараметрическое решение. Построим его.

Пусть Ψ_0 и E — некоторые собственные функции и значение свободного гамильтониана H_0 . При любых числах c_i функции

$$S_i(\mathbf{r}_i) \equiv c_i \Psi_0(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (271)$$

удовлетворяют уравнению (270). Положим $c_1 = -c_2 - c_3$. Тогда коэффициенты c_2 и c_3 останутся независимыми, а функции (271) удовлетворят уравнению (269). Следовательно, любому решению Ψ_0 свободного уравнения Шредингера отвечает двухпараметрическое ложное решение (271) уравнений Фаддеева (236). Компоненты S_i такого решения не всегда будут собственными функциями для заданного набора операторов, коммутирующих с полным гамильтонианом H . Приведем поясняющий пример. С этой целью заменим функцию Ψ_0 в соотношениях (271) собственной функцией (215) шести операторов импульсов. Наложим условие $c_1 = -c_2 - c_3$. Компоненты полученного ложного решения будут собственными функциями тех же операторов импульсов, но в силу разложения (215) не будут собственными функциями

операторов I^2, l_3, P . Всегда ли существуют ложные решения, отвечающие наперед заданному набору $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ собственных чисел таких операторов? Если такие решения существуют, то как их можно построить в явном виде и учесть при решении уравнений Фаддеева для системы из трех частиц с произвольными массами и центральными либо b -волновыми взаимодействиями? Ответам на эти вопросы посвящена работа [71]. Изложим ее основные результаты: доказательство критерия существования ложных решений в классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$ и способ исключения таких решений.

Сначала исследуем условие (269), а затем — условие (270). Согласно условию (269) сумма всех компонент ложного решения должна быть нулевой в **каждом** из трех ($i = 1, 2, 3$) наборов координат Якоби. Рассмотрим эти условия как три уравнения для неизвестных компонент. Компоненты будем искать в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ в виде гиперсферических рядов по их собственным базисам:

$$S_i(\mathbf{r}_i) \equiv S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = r^{-2} \sum_L \sum_{ab} S_{iLab}(r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \quad (272)$$

Подставим эти ряды в уравнения (269). Учтем равенства (142). Тогда для каждого значения L получим линейную и однородную систему уравнений:

$$S_{iLa'b'}(r) + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} S_{kLa'b'}(r) = 0, \quad (273)$$

в которой $i = 1, 2, 3$, а индексы a, b, a', b' принимают все значения, допустимые при заданных L и ℓ . Число таких значений ограничено. Поэтому матрица $\mathbf{M}^L$ рассматриваемой системы (273) имеет конечную размерность, равную утроенному числу гипергармоник (54) с данными квантовыми числами L, ℓ и m . Из теории матриц [2] известно, что система (273) имеет

$$N^L = \dim \mathbf{M}^L - \text{rank } \mathbf{M}^L$$

нетривиальных и линейно независимых решений тогда и только тогда, если детерминант этой матрицы равен нулю,

$$\det \mathbf{M}^L = 0. \quad (274)$$

Пусть $\mathcal{D}$ — множество значений L , при которых выполняются условия (274). Если это множество пустое ($\mathcal{D} = \emptyset$), то есть $\det \mathbf{M}^L \neq 0$ при любом L , то не существует отличных от нуля функций (272), удовлетворяющих уравнениям (269). В этом тривиальном случае уравнения Фаддеева (233) не имеют ложных решений в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$. Так как уравнения (269) сводятся к незацепляющимся системам уравнений (273), то их общее решение (272) является линейной комбинацией

$$S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \sum_{L \in \mathcal{D}} C^L S_i^L(\mathbf{r}_i) \quad (275)$$

некоторых числовых коэффициентов C^L и частных решений:

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = \sum_{ab} S_{iLab}(r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad (276)$$

обладающих дополнительным к набору $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ квантовым числом L . Сформулируем доказанные выше утверждения в виде леммы.

Лемма. В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ система уравнений (269) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, если $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Все такие решения — линейные комбинации (275) функций (276) с гиперсферическими компонентами, подчиненными условиям (273).

Теперь из всех решений (275) уравнений (269) выберем решения, удовлетворяющие условию (270). Такие решения и будут ложными. В уравнениях (270) подставим искомые функции S_i^ε в их общем виде (275), (276). Используя равенства (69), спроектируем получившиеся уравнения на их собственные гиперсферические базисы. Далее подстановкой $z = \sqrt{E}r$, $Z_\nu(z) = S_{iLab}(r)$ сведем уравнение для каждой искомой компоненты $S_{iLab}(z)$ с $L \in \mathcal{D}$ к уравнению Бесселя (211) с индексом $\nu = L + 2$. Оно имеет нетривиальные регулярные решения лишь при действительном $z > 0$, то есть при $E > 0$. Все такие решения пропорциональны регулярным функциям Бесселя:

$$S_{iLab}(r) = D_{iab}^L J_{L+2}(\sqrt{E}r), \quad E > 0. \quad (277)$$

При каждом заданном $L \in \mathcal{D}$ функции (277) зависят от r одинаковым образом, поэтому они удовлетворяют системе (273) тогда и только тогда, если коэффициенты D_{iab}^L подчиняются системе уравнений

$$D_{iab}^L + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} D_{ka'b'}^L = 0, \quad (278)$$

которая имеет ту же самую матрицу $\mathbf{M}^L$, что и система (273).

Подставив анзац (277) в условие (276), получим частное ложное решение с квантовыми числами ℓ, m, σ и $L \in \mathcal{D}$:

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = r^{-2} J_{L+2}(\sqrt{E}r) \sum_{ab} D_{iab}^L Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \quad (279)$$

Если все такие решения подставить в сумму (275), то получится общее ложное решение с квантовыми числами $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$:

$$S_i^\varepsilon = r^{-2} \sum_{L \in \mathcal{D}} C^L J_{L+2}(\sqrt{E}r) \sum_{ab} D_{iab}^L Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \quad (280)$$

В силу леммы и соотношений (277)–(280) справедлив следующий критерий.

Теорема 2. В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнения Фаддеева (236) имеют ложные решения $(S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon, S_3^\varepsilon)$ тогда и только тогда, если $E > 0$ и $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Все такие ложные решения — суммы (280), в которых коэффициенты C^L — произвольные числа, а коэффициенты D_{ab}^L подчинены условиям (278).

Теперь докажем, что все ложные решения обладают одним и тем же дополнительным к набору $\varepsilon = (\ell, m, \sigma)$ квантовым числом. Пусть $\mathcal{S}^\varepsilon$ и $\mathcal{U}^\varepsilon$ — линейные подпространства пространства $\mathcal{A}^\varepsilon$, базисы которых на $\mathcal{S}^\varepsilon$ в $\mathcal{R}^6$ образуют гипергармоники (54) с соответствующими индексами $L \in \mathcal{D}$ и $L \notin \mathcal{D}$. Тогда операторы

$$P_s \equiv \sum_{L \in \mathcal{D}} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\rangle \langle Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)|, P_u \equiv \sum_{L \notin \mathcal{D}} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\rangle \langle Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)| \quad (281)$$

являются проекторами на соответствующие подпространства $\mathcal{S}^\varepsilon$ и $\mathcal{U}^\varepsilon$, ортогональные друг другу относительно интегрирования на гиперсфере $\mathcal{S}^5$ по совокупности гиперуглов Ω_i . Так как кинематическое преобразование гипергармоник (142) является унитарным, то представления (281) проекторов P_s и P_u инвариантны относительно выбора индекса i . Учитывая это свойство, подействуем проекторами на ложные решения (280). Тогда получим равенства

$$P_s S_i^\varepsilon = p_s S_i^\varepsilon, \quad p_s = 1; \quad P_u S_i^\varepsilon = 0, \quad (282)$$

означающие, что компоненты S_i^ε всех ложных решений $(S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon, S_3^\varepsilon)$ являются собственными функциями оператора P_s , отвечающими одному и тому же собственному числу $p_s = 1$ и принадлежащими множеству $\mathcal{S}^\varepsilon$. Следовательно, в подпространстве $\mathcal{U}^\varepsilon$ уравнения Фаддеева (233) или (236) не могут иметь ложных решений.

Используя этот факт, выводим из уравнений Фаддеева модифицированные уравнения, не имеющие ложных решений. Так как $\mathcal{U}^\varepsilon$ является ортогональным дополнением $\mathcal{S}^\varepsilon$ до $\mathcal{A}^\varepsilon$, то компоненты любого нетривиального решения уравнений (233) представимы в виде сумм их проекций на эти подпространства:

$$\Psi_i^\varepsilon = P_u \Psi_i^\varepsilon + P_s \Psi_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3. \quad (283)$$

Используя это представление, докажем от противного, что

$$\sum_{k=1}^3 P_u \Psi_k^\varepsilon \neq 0, \quad \sum_{k=1}^3 P_s \Psi_k^\varepsilon = 0. \quad (284)$$

Пусть при любом $i = 1, 2, 3$ и некоторых ненулевых функциях $R_i \in \mathcal{S}^\varepsilon$

$$\sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{r}_i | P_u \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k) \rangle = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{r}_i | P_s \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k) \rangle = R_i.$$

Заменим в этих предполагаемых равенствах функции Ψ_i^ε и R_i их гиперсферическими рядами типа (65):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \sum_L \sum_{ab} \Psi_{iLab}^\ell(r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad R_i(\mathbf{r}_i) = \sum_L \sum_{ab} R_{iLab}^\ell(r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i),$$

а операторы P_s и P_u представим в виде (281). Полученные соотношения спроектируем на гиперсферический базис с помощью формул (145). Таким образом, для каждого фиксированного L имеем систему уравнений

$$\Psi_{iLab}^\ell + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} \Psi_{kLa'b'}^\ell = \begin{cases} 0, & L \notin \mathcal{D} \\ R_{iLab}^\ell, & L \in \mathcal{D}, \end{cases} \quad (285)$$

где a и b принимают все значения, возможные при данных L и ℓ . Если $L \notin \mathcal{D}$, то однородная система (285) имеет лишь тривиальное решение, так как ее матрица $\mathbf{M}^L$ не вырождена. В случае $L \in \mathcal{D}$ неоднородная система (285) имеет вырожденную матрицу $\mathbf{M}^L$ и несовместна по альтернативе Фредгольма [2]. Полученные противоречия доказывают справедливость соотношений (284).

Обозначим $U_i^\varepsilon \equiv P_u \Psi_i^\varepsilon$. С помощью равенств (281)–(284) спроектируем уравнения (233) на подпространство $\mathcal{U}^\varepsilon$. Любое нетривиальное решение полученных модифицированных уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E) U_i^\varepsilon = -P_u V_i \Psi^\varepsilon = -P_u V_i \sum_{k=1}^3 U_k^\varepsilon \quad (286)$$

принадлежит пространству $\mathcal{U}^\varepsilon$, а отвечающая ему волновая функция $\Psi^\varepsilon = U_1^\varepsilon + U_2^\varepsilon + U_3^\varepsilon$ не равна тождественно нулю.

Исследование общих свойств ложных решений завершим формулировкой теоремы, суммирующей доказанные утверждения (283), (284) и (286), и поясняющими замечаниями.

Теорема 3. В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ фаддеевские компоненты Ψ_i^ε представимы в виде сумм (283) ортогональных слагаемых $P_u \Psi_i^\varepsilon$ и $P_s \Psi_i^\varepsilon$, которые удовлетворяют соотношениям (284). Слагаемые $U_i^\varepsilon \equiv P_u \Psi_i^\varepsilon$ подчинены системе уравнений (286), не имеющей ложных решений.

Отметим, что необходимое условие ($E > 0$) существования ложных решений указывалось в давней работе [100], а представление (283) было доказано в работе [103] другим, менее наглядным способом. Согласно терминологии этой работы пространства $\mathcal{U}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}^\varepsilon$ называются пространствами физических и ложных решений уравнений Фаддеева. Поэтому основное утверждение теоремы 3 можно сформулировать следующим образом: уравнения Фаддеева в физическом пространстве (286) не имеют ложных решений.

Приведем примеры ложных решений из работы [71]. Начнем с более общего случая центральных взаимодействий. Затем перейдем к частным слу-

чаям S - и P -волновых взаимодействий. В силу формул (217)–(221) для перехода от центральных взаимодействий к $\tilde{b}$ -волновым нужно запретить индексам b и b' принимать в соотношениях (276)–(280) значения, отличные от $\tilde{b}$. Для S -волновых взаимодействий этот факт был доказан в пп.3.4.2, в случае P -волновых взаимодействий имеется аналогичное доказательство.

Ложные решения в случае центральных взаимодействий. Заметим, что только при $L, \ell = 0$ или $L = 2, \ell = 1$ индексы a и b гипергармоник (54) могут принимать значения $a, b = 0$ и, соответственно, $a, b = 1$. В этих случаях имеется только один коэффициент Рейнала—Реваи, отличный от нуля и равный единице: $\langle aa|K(\gamma_{ki})|aa\rangle_{L\ell} = 1$. Поэтому связи (142) вырождаются в равенства

$$Y_{Laa}^{\ell m}(\Omega_i) = Y_{Laa}^{\ell m}(\Omega_k), \quad \ell, L = 0; \quad \ell = 1, L = 2, \quad (287)$$

а все элементы матриц $\mathbf{M}^0$ и $\mathbf{M}^2$ систем (278) равны единице. Итак,

$$\dim \mathbf{M}^L = 3, \quad \text{rank } \mathbf{M}^L = 1, \quad L, \ell = 0; \quad L = 2, \ell = 1.$$

В обоих случаях общее решение систем (278) таково: D_{2ab}^L и D_{3ab}^L — произвольные числа, не равные нулю одновременно, а

$$D_{1ab}^L = -D_{2ab}^L - D_{3ab}^L.$$

По формуле (279) находим фаддеевские компоненты

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = r^{-2} J_{L+2}(\sqrt{E}r) (D_{2ab}^L(\delta_{i2} - \delta_{i1}) + D_{3ab}^L(\delta_{i3} - \delta_{i1})) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) \quad (288)$$

частных ложных решений, обладающих сохраняющимися квантовыми числами $L, \ell, m, a, b = 0, \sigma = 1$ или $L = 2; \ell, a, b = 1; m = 0, \pm 1, \sigma = 1$. Найденные решения (288) не зависят от масс частиц и вырождаются в тривиальные, если все три частицы тождественные.

Докажем это утверждение. Напомним, что для любого состояния $|\varepsilon\rangle$ системы трех тождественных частиц компоненты физического решения уравнений Фаддеева (233) подчинены дополнительным условиям (238) и (239). Наложим аналогичные условия и на компоненты ложного решения: пусть

$$S_i^\varepsilon(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = \pm S_i^\varepsilon(-\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i); \quad S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = S_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k(\mathbf{r}_i)), \quad \forall k \neq i = 1, 2, 3. \quad (289)$$

Используя равенства (287), показываем, что условиям симметрии (289) удовлетворяют только тривиальные ложные решения (288) с коэффициентами $D_{iab}^L = 0, i = 1, 2, 3$, что и требовалось доказать.

Ложные решения в случае S-волновых взаимодействий. В случае S -волновых взаимодействий сохраняется набор квантовых чисел $\varepsilon = (\ell, m, a, b, \sigma)$, $a = \ell, b = 0$. При любых L и ℓ индексы a, b и a', b' в формулах (276)–(280)

могут принимать лишь следующие значения: $a, a' = \ell$ и $b, b' = 0$. Поэтому матрица $\mathbf{M}^L$ системы (278) всегда имеет размерность, равную трем. Все недиагональные элементы этой матрицы находим по формуле (170), согласно которой

$$\begin{aligned} M_{ki}^L &\equiv \langle \ell 0 | K(\gamma_{ki}) | \ell 0 \rangle_{L\ell} = \\ &= (-1)^L (\cos \gamma_{ki})^\ell \frac{P_n^{(\ell+1/2, 1/2)}(-\cos 2\gamma_{ki})}{P_n^{(\ell+1/2, 1/2)}(-1)}, \quad n = (L - \ell)/2. \end{aligned} \quad (290)$$

Условие (274) сводим к равенствам

$$\det \mathbf{M}^L = 1 - (M_{12}^L)^2 - (M_{31}^L)^2 - (M_{23}^L)^2 + 2 M_{12}^L M_{31}^L M_{23}^L = 0. \quad (291)$$

Пусть $\ell = 0$, $L = 2$. Тогда $a, b, a', b' = 0$. С помощью формул (290) и (291) находим, что при любых массах частиц

$$\text{rank } \mathbf{M}^2 = 2; \det \mathbf{M}^2 = 0; \quad M_{ii}^2 = 1, \quad M_{ki}^2 = \cos 2\gamma_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3; k \neq i.$$

Далее, используя два свойства кинематических углов (4),

$$\gamma_{12}, \gamma_{31}, \gamma_{23} > 0; \quad \gamma_{23} = \pi - \gamma_{12} - \gamma_{31},$$

показываем, что все решения системы (278) пропорциональны решению

$$D_{iab}^L = \sin(L(\gamma_{23}\delta_{i1} + \gamma_{31}\delta_{i2} + \gamma_{12}\delta_{i3})), \quad i = 1, 2, 3. \quad (292)$$

Подставляя его в равенства (279), находим три ($i = 1, 2, 3$) компоненты ложного решения, обладающего квантовыми числами $\ell, a, b = 0$, $\sigma = 1$ и $L = 2$ и зависящего от масс частиц посредством кинематических углов:

$$\begin{aligned} S_i^L(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} J_{L+2}(\sqrt{E}r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) \times \\ &\times \sin(L(\gamma_{23}\delta_{i1} + \gamma_{31}\delta_{i2} + \gamma_{12}\delta_{i3})). \end{aligned} \quad (293)$$

Пусть $L, \ell = 1$. Тогда всюду $a, a' = 1$ и $b, b' = 0$. В силу равенств (290) и (291) имеем

$$\text{rank } \mathbf{M}^1 = 2; \det \mathbf{M}^1 = 0; \quad M_{ii}^1 = 1, \quad M_{ki}^1 = -\cos \gamma_{ki}, \quad k, i = 1, 2, 3; k \neq i.$$

Решение системы (278) и отвечающее ему ложное решение (279) представляем формулами (292) и (293) с индексами $L, \ell, a = 1$, $\sigma = -1$ и $b = 0$.

Пусть L и ℓ любые, но частицы имеют одинаковые массы. Тогда $a, a' = \ell$ и $b, b' = 0$ и $\forall |\gamma_{ki}| = \pi/3$. Поэтому все недиагональные элементы (290) матрицы $\mathbf{M}^L$ равны друг другу и условие (291) упрощается: при каждом фиксированном ℓ оно сводится к диофантову уравнению

$$(-2)^{\ell-1} P_{(L-\ell)/2}^{(\ell+1/2, 1/2)}(-1) = P_{(L-\ell)/2}^{(\ell+1/2, 1/2)}(1/2) \quad (294)$$

относительно L . При $\ell = 0$ или $\ell = 1$ имеется по одному решению: $L = 2$ или $L = 1$, а соответствующие компоненты (293) ложного решения удовлетворяют условиям симметрии (289) и имеют вид

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = (-1)^{L+1}(\sqrt{3}/2)r^{-2}J_{L+2}(\sqrt{E}r)Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \quad (295)$$

Отметим, что в случае S -волновых взаимодействий пространственная часть волновой функции квартетного по спину ($s = 3/2$) рассеяния нейтрона на дейтроне в состоянии с $\ell = 0$ полностью симметрична [21]. Фаддеевские компоненты этой части волновой функции подчинены системе (233), которая имеет ложное решение (295) с $L = 2$.

Ложные решения в случае P -волновых взаимодействий. Пусть взаимодействия P — волновые, а массы частиц — произвольны. Теперь, кроме чисел ℓ, m и σ , сохраняется число $b = 1$, а индекс a может принимать не более трех значений $a = \ell, \ell \pm 1$ и, вообще говоря, не сохраняется. Следовательно, индексы a, b и a', b' в формулах (276)–(280) этих решений могут принимать только такие значения: $b, b' = 1$; $a, a' = \ell, \ell \pm 1$. Поэтому размерность матрицы $\mathbf{M}^L$ системы (278) не может быть больше девяти. Исключения составляют исследованный выше случай $L = 2, \ell = 1$ и случаи $L = 2, \ell = 0$ и $L, \ell = 1$. Рассмотрим их.

Пусть $\ell = 0$ и $L = 2$. Тогда $a, b, a', b' = 1$. По формулам, приведенным в книге [25], находим все недиагональные элементы матрицы $\mathbf{M}^2$ системы (278). Получаем $M_{ii}^2 = 1$ и $M_{ki}^2 = \cos 2\gamma_{ki}$. Эта матрица совпадает с матрицей $\mathbf{M}^2$, исследованной ранее в случае S -волновых потенциалов. Поэтому формулы (292) и (293) верны и в рассматриваемом случае, когда $\ell = 0$; $a, b = 1$ и $L = 2$.

Пусть $\ell, L = 1$. Тогда $a, a' = 1$ и $b, b' = 0$. Теперь матрица $\mathbf{M}^1$ совпадает с матрицей $\mathbf{M}^1$, рассмотренной выше в случае S -волновых потенциалов. Значит формулы (292) и (293) справедливы и в рассматриваемом случае, то есть при $a, b, \ell, L = 1$ и $a = 0$.

В обоих рассмотренных случаях ($\ell = 0, L = 2$ и $\ell, L = 1$) частные ложные решения (293) при равных массах частиц сводятся к соответствующим ложным решениям (295), которые удовлетворяют условиям (289), обеспечивающим полную антисимметрию волновой функции Ψ^e . В связи с этим замечанием рассмотрим систему из трех нейтронов в состоянии с $\ell = 1$, $s = 3/2$ и полным моментом ($\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$), равным $5/2$. В таком состоянии нейтроны взаимодействуют только посредством P -волновых потенциалов, а пространственная часть их волновой функции полностью антисимметрична. Ее фаддеевские компоненты подчинены системе (233), которая имеет ложное решение (295) с $L = 1$.

4.2. Примеры точных физических решений и их ложных слагаемых. В п. 4.2 рассматривается система трех тождественных бозонов с S -волновыми

взаимодействиями осцилляторного, запирающего и центробежного типов. Такие взаимодействия описываются формулами (217)–(219), в которых $b = 0$ и, соответственно,

$$V(x) = (\omega x)^2/6 = (\omega r \cos \varphi)^2/6, \quad \omega, x \in \mathcal{R}_+^1, \quad (296)$$

$$V(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty, \quad (297)$$

$$V(x) = \alpha x^{-2} = \alpha(r \cos \varphi)^{-2}, \quad |\alpha|, x \in \mathcal{R}_+^1. \quad (298)$$

Случай осцилляторных взаимодействий. В работе [106] Фраер, Гибсон и Пейн исследовали строение фаддеевской компоненты Ψ_1^ε волновой функции

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = (1 + P^+ + P^-)\Psi_1^\varepsilon(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1, \quad P^\pm = K(\pm\pi/3) \quad (299)$$

основного состояния $\varepsilon = (\ell, m, \sigma, a, b)$; $\ell, m, a, b = 0$, $\sigma = 1$, трех тождественных бозонов с S -волновыми потенциалами (296). В этом случае уравнение Шредингера (223) для волновой функции (299) сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и y :

$$(x^{-2}\partial_x(x^2\partial_x) + y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y) - \omega^2(x^2 + y^2)/4 + E)\Psi^\varepsilon(r) = 0, \quad (300)$$

а уравнение Фаддеева (236) для компоненты Ψ_1^ε имеет вид

$$6(\triangle_x + \triangle_y + E)\Psi_1^\varepsilon(x, y) = (\omega x)^2\Psi^\varepsilon(r). \quad (301)$$

Подставив известное точное решение [113] уравнения Шредингера (300)

$$\Psi^\varepsilon(r) = 3 \exp(-\omega r^2/2), \quad E = 3\omega, \quad (302)$$

в уравнение Фаддеева (301), авторы вывели уравнение

$$2(\triangle_x + \triangle_y + 3\omega)\Psi_1^\varepsilon(x, y) = (\omega x)^2 \exp(-\omega r^2/4). \quad (303)$$

По определению образ (299) решения этого уравнения должен совпадать с точной волновой функцией (302). Поэтому в использованном далее анзаце

$$\Psi_1^\varepsilon(x^2, y^2) = \exp(-\omega r^2/4) + S(x^2, y^2) \quad (304)$$

на искомую функцию S было наложено дополнительное условие:

$$(1 + P^+ + P^-)S(x^2, y^2) \equiv 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}_+^1. \quad (305)$$

Далее Фраер, Гибсон и Пейн заметили, что в силу тождеств

$$P^\pm(x^2 + y^2) \equiv x^2 + y^2, \quad (1 + P^+ + P^-)(x^2 - y^2) \equiv 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}_+^1,$$

этому условию удовлетворяют все функции типа

$$S(x^2, y^2) = (\omega/4) (x^2 - y^2) Z(s), \quad s \equiv \sqrt{\omega/2} r. \quad (306)$$

Подстановкой (304), (306) авторы свели уравнение (303) к неоднородному уравнению Бесселя для функции $Z(s)$.

Как известно [8], общее регулярное решение такого неоднородного уравнения представимо в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения исходного уравнения. Общее регулярное решение однородного уравнения Бесселя равно произведению функции Бесселя J_ν определенного порядка на произвольную постоянную λ , а частное решение неоднородного уравнения Бесселя дается сверткой функции Грина с его правой частью.

Используя описанное выше представление функции Z и анзац (306), Фраер, Гибсон и Пейн впервые нашли явное выражение:

$$\begin{aligned} S(x^2, y^2) = & \left((x^2 - y^2)/\omega r^4 \right) \left(\lambda J_4(t) + \right. \\ & \left. + \pi \int_0^t ds s^3 \exp(-s^2) (Y_4(t) J_4(s) - J_4(t) Y_4(s)) \right), \quad t \equiv \sqrt{3\omega} r, \end{aligned} \quad (307)$$

для необычного слагаемого S фаддеевской компоненты (304) и назвали это слагаемое ложным. Хотя ложное слагаемое (307) определено неоднозначно, при любом значении параметра λ оно не дает, в силу равенства (305), никакого вклада в волновую функцию (299). Кроме того, ложное слагаемое имеет медленно убывающую и осциллирующую при $r \rightarrow \infty$ асимптотику. Другими словами, фаддеевскому уравнению (301) или (303) удовлетворяет однопараметрическое $(\Psi_1^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon(x, y; \lambda))$ множество решений (304), (307) с осциллирующими асимптотиками. Однако любому элементу этого множества отвечает только одно решение (302) уравнения Шредингера (300) с экспоненциально убывающей асимптотикой. Как отметили Фраер, Гибсон и Пейн, такая ситуация имеет место лишь в рассмотренном ими конкретном случае, а вопрос о существовании ложных слагаемых фаддеевских компонент в общем случае требует специальных исследований.

Случай произвольных запирающих взаимодействий. Выводы Фраера, Гибсона и Пейна были обобщены автором в работе [57], в которой удалось доказать, что ложные слагаемые фаддеевских компонент существуют для связанных состояний с $\ell = 0$ трех тождественных бозонов с произвольными S -волновыми запирающими потенциалами (297). Такое обобщение необходимо по следующим причинам.

Как известно [19], трехчастичное уравнение Шредингера с конфайнмент-потенциалами (297) имеет только положительные собственные значения ($E > 0$), а отвечающие этим значениям собственные функции принадлежат

классу $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^6)$. Однако теорема о существовании и единственности решений уравнений Фаддеева в случае парных потенциалов, растущих на больших расстояниях, не доказана [21] ни в каком классе функций. Более того, асимптотики возможных решений этих уравнений неизвестны.

В силу перечисленных фактов для конфайнмент-потенциалов стоит исследовать строение фаддеевских компонент в более широком классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$, чем класс квадратично-интегрируемых функций $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^6)$. При таком исследовании достаточно ограничиться поиском всех фаддеевских компонент, которым отвечает квадратично-интегрируемая волновая функция с положительной полной энергией. Примером того, как это можно сделать, является работа [57]. Изложим ее основные результаты.

Напомним, что в случае S -волновых взаимодействий бисферическая компонента U^ℓ и гиперсферические компоненты U_L^ℓ волновой функции (260), (268) трех тождественных бозонов подчинены уравнениям (257) и (267). Исследуем строение общих регулярных решений этих уравнений в случае $E > \ell = 0$, пока не конкретизируя форму запирающего потенциала. Прежде всего заметим, что при $\ell = 0$, согласно определению (79),

$$\tilde{W}_{L00}(\varphi) = (2/\sqrt{\pi}) \sin(L+2)\varphi, \quad L = 0, 2, \dots, \quad (308)$$

а разложение (262) становится дискретным преобразованием Фурье [3]:

$$U^0(r, \varphi) = (2\sqrt{\pi}) \sum_{L=0}^{\infty} U_L^0(r) \sin(L+2)\varphi. \quad (309)$$

По формулам (264) и (265) находим

$$\begin{aligned} S_L^0 &= 1 + 4 \frac{\sin(L+2)\pi/3}{(L+2)\sin 2\pi/3}, \quad L = 0, 2, \dots, \\ S_0^0 &= 1, \quad S_2^0 = 0, \quad S_L^0 \neq 0, \quad \forall L > 2. \end{aligned} \quad (310)$$

Так как $S_2^0 = 0$, то при любом потенциале V система уравнений (267) распадается на систему ($L = 0, 4, 6, \dots$) уравнений

$$(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - (L+2)^2 r^{-2} + E) U_L^0(r) = R_L^0(r) \equiv \sum_{L' \neq 2} V_{00}^{LL'}(r) S_{L'}^0 U_{L'}^0(r), \quad (311)$$

не содержащую функцию U_2^0 , и дифференциальное соотношение

$$(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - 16r^{-2} + E) U_2^0(r) = R_2^0(r) \equiv \sum_{L' \neq 2} V_{00}^{2L'}(r) S_{L'}^0 U_{L'}^0(r), \quad (312)$$

определяющее функцию U_2^0 через все остальные функции U_L^0 с индексами $L \neq 2$. Заменой аргумента $t \equiv r\sqrt{E}$ сведем это соотношение к неодно-

родному уравнению Бесселя. Общее регулярное в нуле решение $U_2^0(t)$ полученного уравнения содержит общее регулярное решение $\lambda J_4(t)$ соответствующего однородного уравнения и частное решение исходного уравнения. Поэтому при $E > 0$ уравнение (312) имеет однопараметрическое множество решений с параметром λ и осциллирующей при $r \rightarrow \infty$ асимптотикой:

$$U_2^0(r; \lambda) = \lambda J_4(t) + (\pi/2) \int_0^r ds s (Y_4(t)J_4(s) - J_4(t)Y_4(s)) R_2^0(s/\sqrt{E}), \quad t = r\sqrt{E}. \quad (313)$$

Следовательно, общее решение (309) уравнения (257) также зависит от параметра λ и представимо в виде суммы физического (заключенного в скобки) и ложного слагаемых:

$$U^0(r, \varphi) = (2/\sqrt{\pi}) \left(\sum_{L \neq 2} U_L^0(r) \sin(L+2)\varphi \right) + (2/\sqrt{\pi}) U_2^0(r; \lambda) \sin 4\varphi. \quad (314)$$

Такое представление порождает следующее разбиение каждой ($i = 1, 2, 3$) фаддеевской компоненты (261):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i; \lambda) = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}r^2} \sum_{L \neq 2} U_L^0(r) \frac{\sin(L+2)\varphi_i}{\sin 2\varphi_i} \right) + \frac{8}{\sqrt{\pi}r^2} U_2^0(r; \lambda) \cos 2\varphi_i. \quad (315)$$

Здесь слагаемые, заключенные в скобки, — физические, а вторые слагаемые — ложные. Действительно, в силу равенства $S_2^0 = 0$ они не дают никакого вклада в гиперсферическое разложение (268) волновой функции:

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \frac{4}{\sqrt{\pi}r^2} \left(3U_0^0(r) + \sum_{L=4}^{\infty} S_L^0 U_L^0(r) \frac{\sin(L+2)\varphi_i}{\sin 2\varphi_i} \right). \quad (316)$$

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера частный случай осцилляторных конфайнмент-потенциалов (296). Применив формулы (216), (266), (308) и тождество

$$2 \cos^2 \varphi \sin(L+2)\varphi \equiv \sin(L+4)\varphi - \sin L\varphi,$$

вычислим матричные элементы таких потенциалов:

$$V_{00}^{LL'}(r) = \pm(\omega r^2) \delta_{L', L \pm 2}/12.$$

Так как $V_{00}^{LL'} = 0$ при $L' \neq L \pm 2$ и $S_2^0 = 0$, то система уравнений (311) расщепляется на однородное уравнение для функции U_0^0 :

$$(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - 4r^{-2} + E - (\omega r)^2/4) U_0^0(r) = 0, \quad (317)$$

и систему ($L = 4, 6, \dots$) зацепляющихся уравнений, не содержащих функций U_0^0 и U_2^0 :

$$24 \left(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - (L+2)^2 r^{-2} + E \right) U_L^0(r) = (\omega r)^2 \sum_{L'=L\pm 2} S_{L'}^0 U_{L'}^0(r). \quad (318)$$

По той же причине соотношение (312) принимает вид

$$24 \left(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - 16r^{-2} + E \right) U_2^0(r) = (\omega r)^2 \left(3 U_0^0(r) + U_6^0(r) \right). \quad (319)$$

Построим решения системы уравнений (317)–(319). Как известно [8], уравнение (317) в классе функций $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}_+^1)$ имеет счетное ($p = 0, 1, \dots$) множество решений, причем каждому собственному значению $E = E_p$ отвечает одна собственная функция, содержащая полином Лягера L_p^2 :

$$\begin{aligned} E &= E_p = (3 + 2p) \omega, \\ U_0^0(r; E_p) &= r^2 L_p^2(s) \exp(-s/2), \quad s \equiv \omega r^2/2, \quad p = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (320)$$

Для каждого p в качестве регулярного решения системы уравнений (318) выберем тривиальное:

$$U_L^0(r; E_p) \equiv 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_+^1, \quad L = 4, 6, \dots \quad (321)$$

Тогда каждому ($p = 0, 1, \dots$) решению (320) уравнения (317) будет отвечать свое однопараметрическое множество (313) решений уравнения (319):

$$\begin{aligned} U_2^0(r; E_p, \lambda) &= \lambda J_4(t_p) + \\ &+ (\pi \omega^2/16) \int_0^r ds s^3 \left(Y_4(t_p) J_4(s) - J_4(t_p) Y_4(s) \right) U_0^0(s; E_p) \end{aligned} \quad (322)$$

с аргументом $t_p \equiv r \sqrt{E_p}$ и параметром λ . При выборе (321) формулы (314)–(316) заметно упрощаются: ряд (314) вырождается в сумму двух функций:

$$U^0(r, \varphi; E_p, \lambda) = (2/\sqrt{\pi}) \left(U_0^0(r; E_p) \sin 2\varphi + U_2^0(r; E_p, \lambda) \sin 4\varphi \right),$$

вторая из них порождает ложное слагаемое фаддеевской компоненты (315):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i, E_p; \lambda) = \frac{4}{\sqrt{\pi} r^2} \left(U_0^0(r; E_p) + 2 U_2^0(r; E_p, \lambda) \cos 2\varphi_i \right).$$

Для основного состояния ($p = 0$) это слагаемое пропорционально ложному слагаемому (307), найденному Фраером, Гибсоном и Пейном. Волновая функция (316) p -состояния,

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i; E_p) = (2/3\sqrt{\pi}) U_0^0(r; E_p),$$

с точностью до нормировочного множителя совпадает с соответствующей волновой функцией, полученной решением уравнения Шредингера (223) методом гипергармоник [114].

Теперь на примере уравнения (257) с некоторым запирающим потенциалом (297) и $E > \ell = 0$ поясним способы, позволяющие, в принципе, избавиться от ложных слагаемых, и проанализируем, каким образом при численном решении этого уравнения со стандартным граничным условием происходит выбор амплитуды λ неоднозначной части ложного слагаемого.

Самый надежный способ избавиться от ложного слагаемого основан на теореме 3. Этот способ реализуется дополнением уравнения (257) условием ортогональности искомого решения U^0 функции W_{200} , описывающей гиперугловую зависимость ложного слагаемого:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \sin 4\varphi U^0(r, \varphi; \lambda) \equiv 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_+^1. \quad (323)$$

Такое условие несложно включить в известные алгоритмы [59,60,88,92,93] численного решения уравнения (257).

Ложное слагаемое — неинтегрируемая по переменной r функция. Поэтому избавиться от его неоднозначной части позволяет замена условия (323) альтернативным условием:

$$\int_0^\infty dr (U^0(r, \varphi; \lambda))^2 \equiv 0, \quad \forall \varphi \in [0, \pi/2], \quad (324)$$

порождающим равенство $\lambda = 0$. Однако это условие, сужающее класс искоемых решений U^0 до класса $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}_+^2)$ функций, не так просто включить в традиционные алгоритмы численного решения фаддеевских уравнений. Обычно такие уравнения для задачи на трехчастичное связанное состояние решаются при значениях переменной r , ограниченных ($r \leq R$) некоторым достаточно большим, но конечным параметром $R < \infty$, а условие (324) заменяется требованием

$$U^0(r, \varphi; \lambda) \equiv 0, \quad \forall r \geq R, \quad \forall \varphi \in [0, \pi/2]. \quad (325)$$

Ясно, что при любом, но конечном R решение U^0 уравнения (257) с граничным условием (325) квадратично-интегрируемо во всей области $\mathcal{R}_+^2$. Тем не менее вычисленная функция U^0 , а значит и сопоставленная ей фаддеевская компонента (315), содержат ложные слагаемые. Докажем это утверждение, рассмотрев два возможных случая (A) и (B), когда число $q \equiv \sqrt{E}R$ совпадает или не совпадает с каким-либо корнем функции J_4 :

$$J_4(q) \neq 0 \quad (A); \quad J_4(q) = 0 \quad (B). \quad (326)$$

В силу линейной независимости базисных функций (308) ряд (309) для функции U^0 обращается в нуль при $r = R$ тогда и только тогда, если все

его компоненты U_L^0 равны нулю в этой точке. Следовательно, условие (325) порождает равенство $U_2^0(R; \lambda) = 0$.

В случае (A) это равенство не противоречит представлению (313) только при одном, вообще говоря, отличном от нуля значении параметра λ :

$$\lambda = \lambda(R, E) = -\frac{\pi}{2J_4(q)} \int_0^R ds s (Y_4(q)J_4(s) - J_4(q)Y_4(s)) R_2^0(s/\sqrt{E}). \quad (327)$$

Следовательно, при всех $r < R$ вычисленная функция U^0 содержит однозначно определенное ложное слагаемое $\lambda(R, E)J_4(\sqrt{E}r) \sin 4\varphi$. Кроме того, если число q стремится к какому-либо корню функции Бесселя J_4 , то функция $\lambda(R, E)$ неограниченно возрастает, что порождает неустойчивость в вычисляемых значениях функции U^0 .

В случае (B) независимо от значения параметра λ первое слагаемое λJ_4 суммы (313), пропорциональное знаменателю дроби (327), обращается в нуль при $r = R$. В силу условия $U_2^0(R; \lambda) = 0$ в этой же точке нулевым становится и второе (интегральное) слагаемое этой суммы, пропорциональное числителю дроби (327). Поэтому рассматриваемая дробь (327) теряет смысл, параметр λ может принимать любые значения, а функция U^0 при всех $r \leq R$ содержит все однопараметрическое множество ложных слагаемых типа $\lambda J_4(\sqrt{E}r) \sin 4\varphi$. Рассмотренный случай (B) не реализуется на практике из-за ошибок округления, возникающих, например, при вычислении нулей функции J_4 .

В заключение сформулируем доказанную альтернативу.

Теорема 4. *Граничному условию (325) с выбранным $R < \infty$ отвечает либо единственное ложное слагаемое с определенным формулой (327) коэффициентом λ , либо все однопараметрическое множество ложных слагаемых. Первый случай реализуется и в теории, и на практике при условии (326)(A), второй — теоретически возможен при условии (326)(B).*

Случай взаимодействий центробежного типа. Рассмотрим систему трех тождественных бозонов с S -волновыми взаимодействиями (218), (298). Исследуем фаддеевское уравнение (257) с некоторым ℓ -методом разделения переменных [8]. Предположим, что p^2 — постоянная разделения переменных r и φ , а искомое решение имеет вид

$$U^\ell(r, \varphi) = Z_p(\sqrt{E}r) F_p^\ell(\varphi). \quad (328)$$

Подставив такой анзац в уравнение (257), выведем два незацепляющихся уравнения: уравнение Бесселя (211) с индексом $\nu = p$ для функции $Z_p(\sqrt{E}r)$ и интегродифференциальное уравнение для функции $F_p^\ell(\varphi)$:

$$\cos^2 \varphi \left(p^2 - \tilde{L}_{\ell 0}^2 \right) F_p^\ell(\varphi) = \alpha \langle \varphi | S^\ell | F_p^\ell \rangle. \quad (329)$$

Выясним, при каких условиях этому уравнению удовлетворяет конечная линейная комбинация

$$F_p^\ell(\varphi) = F_{pt}^\ell(\varphi) \equiv \sum_{L=\ell}^t B_L^\ell \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi), \quad t < \infty, \quad (330)$$

с пока еще неизвестными постоянными p и B_L^ℓ .

Используя рекуррентные соотношения для полиномов Якоби с нижними индексами n и $n \pm 1$, доказываем ключевое разложение

$$\cos^2 \varphi \tilde{W}_{L\ell 0}(\varphi) = \sum_{s=0, \pm 1} C_{Ls}^\ell \tilde{W}_{L+2s, \ell 0}(\varphi), \quad (331)$$

в котором $C_{Ls}^\ell = 0$ при $L + 2s < \ell$, а в противном случае

$$\begin{aligned} 2C_{L's}^\ell &\equiv \delta_{s0} \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{(L+1)(L+3)} \right) + \\ &+ \left(\frac{n(2n+1)(n+\ell+1)(L+\ell+1)}{L(L+2)(L+1)^2} \right)^{1/2}, \\ s &= 0, \pm 1; \quad L' \equiv L - 2\delta_{s1}; \quad L = 2n+1. \end{aligned} \quad (332)$$

Подставим искомую функцию (330) в уравнение (329). Используя равенства (263), (264) и (331), выводим соотношение $p^2 = (t+2)^2$, определяющее постоянную разделения p^2 переменных r и φ , и систему линейных уравнений для искомых коэффициентов B_L^ℓ . Для столбца $\mathbf{B}^\ell \equiv (B_\ell^\ell, B_{\ell+2}^\ell, \dots, B_t^\ell)^T$, составленного из таких коэффициентов, эту систему можно записать в виде однородного матричного уравнения:

$$\mathbf{A}^\ell(\alpha) \mathbf{B}^\ell = 0 \quad (333)$$

или в виде обобщенной спектральной матричной задачи:

$$\mathbf{A}^\ell(0) \mathbf{B}^\ell = \alpha \mathbf{S}^\ell \mathbf{B}^\ell. \quad (334)$$

Ненулевые элементы диагональной матрицы

$$\text{diag } \mathbf{S}^\ell = (S_\ell^\ell, S_{\ell+2}^\ell, \dots, S_t^\ell)$$

заданы формулами (265), а элементы главной ($s = 0$), верхней ($s = +1$) и нижней ($s = -1$) диагоналей трехдиагональной матрицы

$$\mathbf{A}^\ell(\alpha) = \mathbf{A}^\ell(0) - \alpha \mathbf{S}^\ell$$

выражаются через коэффициенты (265) и (332) равенствами

$$A_{Ls}^\ell \equiv \left(p^2 - (L + 2s + 2)^2 \right) C_{L+2s, -s}^\ell - \alpha S_L^\ell \delta_{s0}, \quad L = \ell, \ell + 2, \dots, t. \quad (335)$$

Благодаря им матричный элемент $A_{L'0}^\ell$ не зависит от α тогда и только тогда, если $S_{L'}^\ell = 0$. В этом особом случае функция $\tilde{W}_{L'\ell 0}$ согласно равенствам (264) и (265) отображается оператором S^ℓ в тождественный нуль, а уравнения (333) обращаются в тождества, если $t = L'$ и лишь один из элементов столбца $\mathbf{B}$, а именно $B_{L'}^\ell$, отличен от нуля. Согласно анзацу (328) такому столбцу отвечает нетривиальное решение уравнения (257), не зависящее от параметра α :

$$U^\ell(r, \varphi) = B_{L'}^\ell J_{L'+2}(\sqrt{E}r) \tilde{W}_{L'\ell 0}(\varphi).$$

Если это ложное решение подставить в формулу (260), то получится тривиальная волновая функция $\Psi^\varepsilon \equiv 0$. Как отмечалось в п.4.1, для рассматриваемой трехчастичной системы такая ситуация реализуется только при $L, \ell = 1$ или $L = 2, \ell = 0$. Во всех остальных случаях, когда задача (333) имеет нетривиальное решение, бисферической компоненте U^ℓ , определенной формулами (328) и (330), отвечает трехчастичная волновая функция (260):

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} Z_p(\sqrt{E}r) \sum_{L=\ell}^t S_L^\ell B_L^\ell Y_{L\ell 0}^{\ell m}(\Omega). \quad (336)$$

По альтернативе Фредгольма [2] нетривиальное решение уравнения (333), имеющее вид столбца $\mathbf{B}^\ell$ с двумя и более ненулевыми элементами, существует тогда и только тогда, если параметр α является нулем детерминанта матрицы $\mathbf{A}^\ell(\alpha)$. Из равенств (335) следует, что при любых ℓ и t последний элемент A_{t0}^ℓ главной диагонали матрицы $\mathbf{A}^\ell$ равен $-\alpha S_t^\ell$, а в особых случаях, $L, \ell = 1$ и $L = 2, \ell = 0$, верно равенство $\partial_\alpha A_{L0}^\ell = 0$. Поэтому $\alpha = 0$ является корнем полинома $\det \mathbf{A}^\ell(\alpha)$, а число его остальных вещественных нулей не превышает

$$N_t^\ell \equiv (t - \ell)/2 - \delta_{\ell 0} - \delta_{\ell 1}. \quad (337)$$

Если матрица $\mathbf{A}^\ell$ имеет диагональное преобладание, то она невырожденная [2]. В противном случае нули ее детерминанта удовлетворяют хотя бы одному ($L = \ell, \ell + 2, \dots, t$) из неравенств

$$|A_{L0}^\ell(0) - \alpha S_L^\ell| < \sum_{s=\pm 1} A_{Ls}^\ell(0). \quad (338)$$

Приведем некоторые точные решения задачи (333).

Пусть $\ell = 0$. Тогда при $t = 0$ существует лишь тривиальное решение $\mathbf{B}^0 = (0)^T$, а при $t = 2$ и любом α имеется особое решение $\mathbf{B}^0 = (0, 1)^T$. Если $t = 4$, то единственное решение таково:

$$\alpha = 4, \quad \mathbf{B}^0 = (-5, 4, 5)^T.$$

В случае $t = 6$ существуют два решения:

$$\alpha_\pm = 9 \pm \sqrt{11}, \quad \mathbf{B}_\pm^0 = \left(4, \alpha_\pm - 10, \frac{60}{21 - \alpha_\pm}, \frac{280}{\alpha_\pm(21 - \alpha_\pm)} \right)^T.$$

Пусть $\ell = 1$. Тогда при $t = 1$ и любом α существует особое решение $\mathbf{B}^1 = (1)^T$, при $t = 3$ решения нет, а при $t = 5$ имеется одно решение:

$$\alpha = 79/6, \quad \mathbf{B}^1 = \left(79\sqrt{3}, -395, 120\sqrt{2}/S_5^1 \right)^T.$$

Если $\ell > 1$ и $t = \ell$, то имеется только тривиальное решение, а в случае $t = \ell + 2$ существует одно нетривиальное решение:

$$\alpha = 6/(1 + 2(-2)^\ell), \quad \mathbf{B}^\ell = \left(\sqrt{3(\ell + 4)} S_{\ell+2}^\ell, \sqrt{2\ell + 3} S_\ell^\ell \right)^T.$$

В других случаях спектральную задачу (333) или (334) нетрудно решить известными численными методами [2]. Обсудим известные результаты [66, 109] численного решения этой задачи в случае $\ell = 0$. Используя равенства (332) и (335), убедимся в том, что соотношения (338) не выполняются ни при каком $\alpha \leq 0$. Значит, все собственные значения α задачи (334) с $\ell = 0$ — неотрицательные числа. Минимальное из них равно $9 - \sqrt{11}$, некоторые другие приведены в виде таблицы в работе [66]. Эти данные дополняют таблицу работы [109], в которой был выполнен численный анализ уравнения (329) в случае $\ell = 0$ и $-\alpha = 1, 2, \dots, 6$. Докажем, что функции $F_p^0(\varphi)$, соответствующие таким отрицательным значениям параметра α , не представимы в виде (330). Предположим противное: пусть при $\alpha < \ell = 0$ имеется хотя бы одно решение уравнения (333) типа (330). Тогда спектральная задача (333) имеет нетривиальное решение $\mathbf{B}^0$, отвечающее выбранному отрицательному собственному значению $\alpha < 0$. Как пояснялось ранее, таких собственных значений нет. Полученное противоречие доказывает тот факт, что все функции $F_p^0(\varphi)$, вычисленные в работе [109], являются **бесконечными** рядами по функциям $\tilde{W}_{L\ell 0}$.

В заключение сформулируем доказанный критерий.

Теорема 5. Уравнение Шредингера для системы трех тождественных бозонов с S -волновыми потенциалами (298) имеет точные решения (336) тогда и только тогда, если параметр α и соответствующий ему столбец $\mathbf{B}^\ell(\alpha)$ удовлетворяют спектральной задаче (334). При любых фиксированных индексах ℓ и t ее собственные значения подчиняются неравенству (338), а их число не превышает числа N_t^ℓ , заданного равенством (337).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные итоги обзора были кратко сформулированы в виде теорем 1–5 либо приводились как выводы, завершающие изложение раздела или параграфа. Поэтому в заключении перечислим лишь некоторые интересные, но нерешенные проблемы. Обобщение теорем 1–5 на случай трех частиц с

дискретными (спин-изоспиновыми) степенями свободы не вызывает принципиальных затруднений и может быть осуществлено после отделения спин-изоспиновых переменных описанными в обзоре способами. Для дальнейшего развития точных методов решения трехчастичной задачи с центральными взаимодействиями представляется важным анализ кинематического преобразования углового базиса из D -функций Вигнера и исследования строения ложных и физических решений уравнений Фаддеева, записанных в таком базисе. Не менее интересной и актуальной задачей является построение полных и явных асимптотических разложений волновых функций в окрестностях точек тройного и парных столкновений. Сравнительный анализ известных подходов к решению этой проблемы не вошел в обзор и будет дан в отдельной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Vilenkin N.Ja.** — Special Functions and the Theory of Group Representations. Am. Math. Soc. Providence, 1968.
2. **Lankaster P.** — Theory of Matrixes. New York — London: Academic Press, 1969.
3. **Смирнов В.И.** — Курс высшей математики, М.: Наука, 1974, т.3, ч.1,2.
4. **Федорюк М.В.** — Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** — Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. **Erdelyi A.** (ed.) — Higher Transcendental Functions. New York: McGraw-Hill, 1953.
7. **Abramowitz M., Stegun I.A.** — Handbook of Mathematical Functions. Washington: D.C., 1972.
8. **Камке Э.** — Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М.: Наука, 1976.
9. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** — Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
10. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
11. **Фреман Н., Фреман П.У.** — ВКБ-приближение. Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
12. **Calogero F.** — Variable Phase Approach to Potential Scattering. New York and London: Academic Press, 1967.
13. **Бабиков В.В.** — Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
14. **Taylor J.R.** — Scattering Theory. New York: Wiley, 1972.
15. **Петеркоп П.К.** — Теория ионизации атомов электронным ударом. Рига: Зинатне, 1975.
16. **Демков Ю.Н., Островский В.Н.** — Метод потенциалов нулевого радиуса. Л.: ЛГУ, 1975.
17. **Schmid E.W., Ziegelmann H.** — The Quantum Mechanical Three-Body Problem. Pergamon Press, 1977.
18. **Chadan K., Sabatier P.C.** — Inverse Problem in Quantum Scattering Problem. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977.
19. **Reed M., Simon B.** — Scattering Theory (Methods of Modern Mathematical Physics III). New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979.

20. **Зубарев А.Л.** — Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М.: Энергоатомиздат, 1981.
21. **Faddeev L.D., Merkuriev S.P.** — Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems. Kluwer: Academic Publishers, 1993.
22. **El Bas E., Castel B.** — Graphical Methods of Spin Algebras in Atomic, Nuclear and Particle Physics. New York: Markel Dekker. Inc, 1972.
23. **Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.** — Квантовая теория углового момента. М: Наука, 1975.
24. **Biedenharn L.C., Louck J.D.** — Angular Momemtum in Quantum Physics. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1981, v.1.
25. **Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б.** — Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
26. **Avery J.** — Hyperspherical Harmonics, Application in Quantum Theory. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1989.
27. **Джибути Р.И., Шитикова К.В.** — Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.
28. **Belyaev V.B., Pupyshev V.V., Wrzecionko E.** — In: International Symposium on Few Particle Problems in Nuclear Physics, JINR, Dubna, 1979, p.39.
29. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — ЯФ, 1980, т.31, с.1324.
30. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-81-143, Дубна, 1981.
31. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — ЯФ, 1982, т.35. с.905.
32. **Belyaev V.B., Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-82-815, Dubna, 1982.
33. **Belyaev V.B., Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Czes. J. Phys., 1982, v.32, p.294.
34. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — В сб.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории систем нескольких частиц с сильным взаимодействием, Л.: ЛГУ, 1983, с.121.
35. **Беляев В.Б., Пупышев В.В.** — ЯФ, 1984, т.39, с.594.
36. **Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — ЯФ, 1985, т.41, с.1159.
37. **Беляев В.Б., Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — ЯФ, 1985, т.42, с.1104.
38. **Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — ЯФ, 1986, т.43, с.867.
39. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-346, Дубна, 1986.
40. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЯФ, 1988, т.47, с.60.
41. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — In: Cont. to the XII Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics, ed. Jennings B.K., Vancouver, B.C.Canada, 1989, p.D8.
42. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — JINR Preprint E4-89-432, Dubna, 1989.
43. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — JINR Preprint E4-90-447, Dubna, 1990.
44. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — In: Proc. of the 12th European Conf. on Few-Body Physics, Uzhgorod, eds. Lendyel V.I. and Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.340.
45. **Pupyshev V.V.** — In: Proc. of the 12th Europ. Conf. on Few-Body Physics, eds. Lendyel V.I., Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.346.
46. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics, eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.61B.

47. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics, eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.62B.
48. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-92-213, Dubna, 1992.
49. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Proc. of National Con. on Physics of Few-Body and Quark-Hadronic Systems, eds. Boldyshev V., Kotlyar V., Shebeko A., Kharkov: KFTI, 1992, p.388.
50. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.2713.
51. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — ЯФ, 1993, т.56, p.46.
52. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — Z. Phys., 1994, v.A348, p.227.
53. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — In: Cont. to the Int. Conf. Mesons and Nuclei at Intermediate Energies, eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B., Dubna: JINR, 1994, p.84.
54. **Pupyshev V.V.** — J. Math. Phys., 1995, v.A28, p.3305.
55. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Phys. Lett., 1995, v.B354, p.1.
56. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЯФ, 1996, т.59, с.1807.
57. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-85-313, Dubna, 1985.
58. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.260.
59. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.1318.
60. **Пупышев В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-386, Дубна, 1986.
61. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint P5-87-153, Dubna, 1987.
62. **Pupyshev V.V.** — In: JINR Rapid Comm. 2[22]-87, Dubna, 1987, p.45.
63. **Pupyshev V.V.** — In: JINR Rapid Comm. 4[24]-87, Dubna, 1987, p.31.
64. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E5-87-902, Dubna, 1987.
65. **Pupyshev V.V.** — In: Contr. Papers to XII Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics, ed. Jennings B.K., 1989, Vancouver, B.C. Canada, p.F11.
66. **Pupyshev V.V.** — Phys. Lett., 1989, v.A140, p.151.
67. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1989, т.81, с.86.
68. **Pupyshev V.V.** — Few-Body Systems, 1990, v.8, p.105.
69. **Pupyshev V.V.** — JINR Preprint E4-95-152, Dubna, 1995.
70. **Pupyshev V.V.** — In: VII Int. Conf. on Symmetry Methods in Physics, Dubna, 1995, p.42.
71. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1996, т.107, с.501.
72. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1998, т.61, с.1960.
73. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЭЧАЯ, 1996, т.4, с.859.
74. **Пупышев В.В.** — ЭЧАЯ, 1997, т.28, с.1457.
75. **Фаддеев Л.Д.** — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.1459.
76. **Novoselsky A., Barnea N.** — Phys. Rev., 1995, v.A51, p.2777.
77. **Богословский Г.Ю., Клепиков Н.П.** — ЯФ, 1968, т.7, с.644.
78. **Raunai J., Revai J.** — Nuovo Cim., 1970, v.A68, p.612.
79. **Raunai J.** — Nucl. Phys., 73, v.A202, p.631.
80. **Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1973, т.17, с.210.

81. **Сморodinский Я.А., Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1976, т.23, с.715.
82. **Efros V.D.** — Few-Body Systems, 1995, v.19, p.167.
83. **Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1972, т.15, с.226.
84. **Эфрос В.Д.** — ЯФ, 1973, т.17, с.988.
85. **Barnea N., Novoselsky A.** — Ann. Phys. (NY), 1977, v.256, p.192.
86. **Novoselsky A., Katriel J.** — Phys. Rev., 1994, v.A49, p.833.
87. **Noyes H.P.** — Three-Body Problem in Nuclear and Particle Physics. North-Holland, Amsterdam, 1970.
88. **Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A.** — Ann. Phys. (NY), 1976, v.99, p.30.
89. **Merkuriev S.P.** — Ann. Phys. (NY), 1980, v.130, p.395.
90. **Квицинский А.А. и др.** — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.267.
91. **Квицинский А.А., Кострыкин В.В., Меркурьев С.П.** — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.1301.
92. **Bosveld G.D., Schellingerhout N.W.** — Report 231, Groningen: University of Groningen, 1989.
93. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1981, v.C24, p.2279.
94. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1982, v.C26, p.1385.
95. **Яковлев С.Л., Филихин И.Н.** — ЯФ, 1993, т.56, с.98.
96. **Яковлев С.Л., Филихин И.Н.** — Вестн. ЛГУ. Физика. Химия., 1982, сер.4, вып.3, с.24.
97. **Benayoun J.J., Gignoux C., Chauvin J.** — Phys. Rev., 1981, v.C23, p.1854.
98. **Adhikary S.K., Birse M.S. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.30, p.780.
99. **Mandelzweig V.B.** — Ann. Phys. (NY), 1977, v.104, p.1.
100. **Adhikari S.K., Glöckle W.** — Phys. Rev., 1979, v.C19, p.616.
101. **Levin F.S.** — Ann. Phys. (NY), 1980, v.130, p.139.
102. **Evans J.W.** — J. Math. Phys., 1981, v.22, p.1672.
103. **Evans J.W., Hoffman D.K.** — J. Math. Phys., 1981, v.22, p.2858.
104. **Yakovlev S.L.** — LTPE Preprint, Orsay 91/14, 1991.
105. **Яковлев С.Л.** — ТМФ, 1995, т.102, с.323.
106. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.284.
107. **Fabre de la Ripelle M., Larsen S.Y.** — Few-Body System, 1992, v.13, p.199.
108. **Руднев В.А., Яковлев С.Л.** — ЯФ, 1995, т.58, с.1762.
109. **Avishai Y.** — J. Math. Phys., 1975, v.16, p.1491.
110. **Machleidt R., Holinde K., Elster Ch.** — Phys. Rep., 1987, v.149, p.1.
111. **Fiar J.L., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1988, v.C38, p.1.
112. **Fabre de la Ripelle M.** — Few-Body Systems, 1986, v.1, p.181.
113. **Noyes H.P.** — Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.1201.
114. **Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В.** — ЭЧАЯ, 1977, т.8, с.847.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.14

Релятивистская теория эволюции структуры нуклона в ядре. Буров В.В., Молочков А.В., Смирнов Г.И. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1337.

Представлен обзор экспериментальных и теоретических исследований глубоко-неупругого рассеяния (ГНР) лептонов на ядерных мишенях. Очерчены основные проблемы, которые необходимо решить при анализе x - и A -зависимостей сечений ГНР. Анализируется ряд моделей, предлагавшихся для изучения вклада ядерных эффектов в структурные функции $F_2(x)$. Разработан и реализован релятивистский теоретико-полевой подход для рассмотрения ГНР лептонов на легчайших ядрах. Впервые в рамках единого подхода выполнено исследование модификации структуры нуклона в D , 3H , 3He и 4He . Найдено, что эволюция модификаций полностью отличается от эволюции, наблюдавшейся ранее для тяжелых ядер. В частности, обнаружено, что картина модификаций $F_2(x)$, представленная в терминах отношений $F_2^A / F_2^{N(D)}$, определяется значениями $(1-x_3) = 0,32(D/N)$, $0,16({}^3He/D)$ и $0,08({}^4He/D)$. Полученные результаты позволяют определить класс модификаций структуры связанного нуклона и ввести единицу модификации структуры нуклона. Получено также теоретическое обоснование концепции двухэтапной эволюции структуры нуклона как функции A , происходящей на первом этапе для $A \leq 4$ и затем для $A > 4$. Давняя проблема природы ЕМС-эффекта понимается как модификация структуры нуклона в поле ядерных сил трехнуклонной связанной системы.

Ил.10. Библиогр.: 95.

УДК 539.172.3

Фотообразование легких η -ядер. Трясучев В.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1391.

На основе анализа экспериментальных и теоретических данных о взаимодействии η -мезонов с нуклонами и ядрами в рамках модели с мезон-ядерным оптическим потенциалом прямоугольной формы доказывается возможность существования сверхлегких η -ядер с $A > 2$. Образование η -ядер впервые рассматривается во взаимодействии фотонов высоких энергий с атомными ядрами в реакциях вида $\gamma + A \rightarrow N + {}_\eta A'$, сопровождающихся вылетом «быстрого» нуклона N . Предложен и реализован простейший механизм такой реакции. Подчеркивается важная роль взаимодействия в конечном состоянии в околопороговой области энергий фотонов. Рассчитаны вероятности образования сверхлегких η -ядер ${}_\eta T$ и ${}_\eta He$ фотонами и изучена возможность их наблюдения по пику в спектре выбиваемых нуклонов из ядра-мишени 4He . В области энергий налетающих γ -квантов от порога до 1 ГэВ исследована зависимость сечений реакций ${}^{12}C(\gamma, N){}_\eta A'$, ${}^{16}O(\gamma, N){}_\eta A'$ от квантовых чисел ядерных остовов η -ядер и квантовых чисел уровней образуемых η -ядер. Впервые рассчитаны вероятности образования η -ядер в $1p$ -состоянии.

Табл.2. Ил.19. Библиогр.: 58.

УДК 539.143; 539.172.17

Сильнонейтроноизбыточные изотопы легких элементов. Структура ядер. *Калпакчиева Р., Пенцонжкевич Ю.Э., Болен Х.Г.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1429.

В работе исследуется структура сильнонейтроноизбыточных изотопов легких элементов ($2 \leq Z \leq 5$). Представлена последняя информация о схемах энергетических уровней этих ядер, их массах, энергиях связи. Благодаря развитию измерительной техники, а также получению интенсивных пучков тяжелых ионов с высоким энергетическим разрешением, были обнаружены новые связанные нейтроноизбыточные ядра, а также ядра, расположенные за границей нейтронной стабильности. Такие ядра, являясь нейтронно-нестабильными, живут достаточно долго и проявляются в виде резонансов. При этом в ядерных системах существуют основное и возбужденные состояния, а также определенная структура возбужденных уровней. Исследование этих ядер представляет значительный интерес в связи с их необычными свойствами — нейтронное гало, новые области деформаций, новые типы распадов, особенности заполнения оболочек. В обзоре дается достаточно полная информация о характеристиках нейтронно-нестабильных ядер. Подробно описываются свойства нейтронного гало, проявляющиеся в супернейтроноизбыточных ядрах легких элементов. Обсуждаются особенности структуры ядер с двухнейтронным гало (${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^{14}\text{Be}$). Экспериментальные результаты сравниваются с предсказаниями различных теоретических моделей, рассчитывающих положение границы нуклонной стабильности ядер. Новые возможности в подобных исследованиях открывают вторичные пучки радиоактивных ядер. В настоящее время в качестве ускоренных пучков экспериментаторы используют относительно интенсивные пучки ускоренных экзотических ядер ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^{14}\text{Be}$ и проводят с ними исследования. Результаты, полученные на вторичных пучках радиоактивных ядер и перспективы исследований с ними, также обсуждаются в настоящем обзоре.

Табл.11. Ил.39. Библиогр.: 242.

УДК 539.173

Запаздывающее деление атомных ядер. *Кузнецов В.И., Скобелев Н.К.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1514.

Изложена история открытия, методы синтеза и регистрации запаздывающего деления как вида радиоактивного распада атомных ядер, лежащих в отдалении от полосы бета-стабильности. Рассмотрена качественная теория, описывающая этот вид радиоактивного распада. Отмечено существование областей атомных ядер, испытывающих запаздывающее деление левее ($N < 126$, $Z < 82$) нуклонных оболочек $N = 126$ и $Z = 82$. Приведены примеры вычисления на основе экспериментальных данных о запаздывающем делении высот барьеров деления ядер, удаленных от линии бета-стабильности. Показано, что в настоящее время только изучение этого процесса дает возможность получить достоверные данные о высотах барьеров деления ядер с большим избытком или недостатком нейтронов. Обсуждено влияние запаздывающего деления на процесс нуклеосинтеза в импульсных нейтронных потоках термоядерных взрывов, на синтез элементов Вселенной, в частности, на образование хронометрических пар и, как следствие, на оценку возраста Галактики.

Табл.5. Ил.18. Библиогр.:55.

УДК 539.17

Некоторые методы и результаты аналитических исследований задачи трех ядерных частиц. *Пунышев В.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999, том 30, вып.6, с.1562.

В обзоре представлены как классические, так и новые методы и результаты аналитических исследований строения стационарных уравнений Шредингера и Фаддеева и их решений, описывающих состояния трехчастичных систем с центральными и S -волновыми взаимодействиями. Особое внимание уделено угловому анализу этих уравнений и точным законам преобразования трехчастичных координат, операторов, базисных и волновых функций при циклической перестановке частиц. Дан анализ проблемы ложных решений. Подробно изложены новые методы вычисления коэффициентов Рейнала—Реваи и способы исключения ложных решений при численном анализе уравнений Фаддеева.

Библиогр.:114.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ, т. 30, 1999

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

- Агапов Н.Н.** Криогенные технологии в сверхпроводящем ускорителе релятивистских ядер — нуклотроне. 3, 760(322)
- Александров Ю.А.** О знаке и величине среднего квадрата внутреннего зарядового радиуса нейтрона. 1, 72 (29)
- Амирханов И.В.**, см. Пузынин И.В. и др.
- Гарсеванишвили В.Р., Тавхелидзе А.Н.** Квазипотенциальный подход в формализме квантовой теории поля на нуль-плоскости. 3, 613 (258)
- Гогилидзе С., Первушин В.Н., Хведелидзе А.** Редукция в системах с локальной симметрией. 1, 160(66)
- Займидорога О.А.** Радиальные возбуждения систем из легких кварков. 1, 5(1)
- Зайцев Л.Н.** Проблема увеличения радиационного ресурса сцинтилляционных детекторов для протонных и ионных коллайдеров. 5, 1292
- Земляная Е.В.**, см. Пузынин И.В. и др.
- Лаерманн Э.** КХД при конечной температуре на решетке. 3, 720(304)
- Ляхно В.Д.**, см. Пузынин И.В. и др.
- Лохтин И.П., Сарычева Л.И., Снигирев А.М.** Диагностика сверхплотной материи в ультрарелятивистских столкновениях ядер. 3, 660(279)
- Манджавидзе И.** Функции Вигнера существенно неравновесных систем. 1, 123(49)
- Манов С.** Пространства с контравариантной и ковариантной аффинными связностями и метриками. 5, 1211
- Маршаков А.В.** Интегрируемость в суперсимметричных калибровочных теориях. 5, 1120
- Первушин В.Н.**, см. Гогилидзе С. и др.
- Первушин В.Н.**, см. Пузынин И.В. и др.
- Пузынин И.В., Амирханов И.В., Земляная Е.В., Первушин В.Н., Пузынина Т.А., Стриж Т.А., Ляхно В.Д.** Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей. 1, 210(87)
- Пузынина Т.А.**, см. Пузынин И.В. и др.
- Робертс К.Д.** Непертурбативные эффекты в КХД при конечной температуре и плотности. 3, 537(223)
- Сарычева Л.И.**, см. Лохтин И.П. и др.
- Сисакян А.Н., Соловцов И.Л.** Вариационные разложения в квантовой хромодинамике. 5, 1057
- Снигирев А.М.**, см. Лохтин И.П. и др.
- Соловцов И.Л.**, см. Сисакян А.Н. и др.
- Стриж Т.А.**, см. Пузынин И.В. и др.
- Тавхелидзе А.Н.**, см. Гарсеванишвили В.Р. и др.
- Трошин С.М., Тюрин Н.Е.** За пределом черного диска: от теневой к антитеновой моде рассеяния. 5, 1270
- Тюрин Н.Е.**, см. Трошин С.М. и др.
- Хведелидзе А.**, см. Гогилидзе С. и др.

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

- Аракелян Г.Г.**, см. Лыкасов Г.И. и др.
Баструков С.И., Молодцова И.В., Подгайный Д.В., Вебер Ф., Папоян В. В.
 Эластодинамические свойства ядерной материи нейтронных звезд. 4,992(436)
- Болен Х.Г.**, см. Калпакчиева Р. и др.
Буров В.В., Молочков А.В., Смирнов Г.И. Релятивистская теория эволюции структуры нуклона в ядре. 6,1337
- Вебер Ф.**, см. Баструков С.И., и др.
Вебер Ф., см. Григорян Х., и др.
Григорян Х., Херман Б., Вебер Ф.
 Кварк-адронный фазовый переход в нейтронных звездах. 2,380(156)
- Ворожцова С.В.**, см. Федоренко Б.С. и др.
Грайнер В., см. Сэндулеску А. и др.
Герасименко В.Н., см. Федоренко Б.С. и др.
Дружинин С.В., см. Федоренко Б.С. и др.
Захарьев Б.Н., Чабанов В.М. К качественной теории элементарных преобразований одно- и многоканальных квантовых систем в подходе обратной задачи (их конструирование с заданными спектральными параметрами). 2,277(111)
- Изосимов И. Н.** Проявление нестатистических эффектов в атомных ядрах. 2,321(131)
- Калпакчиева Р., Пенионжкевич Ю.Э., Болен Х.Г.** Сильнонейтроноизбыточные изотопы легких элементов. Структура ядер. 6,1429
- Князьков О.М., Кухтина И.Н., Фаянс С.А.** Сечения взаимодействия и структура легких экзотических ядер. 4,870(369)
- Кузнецов В.И., Скобелев Н.К.** Запаздывающее деление атомных ядер. 6,1514
- Кухтина И.Н.**, см. Князьков О.М., и др.
Кырстойу Ф., см. Сэндулеску А. и др.
- Лыкасов Г.И., Аракелян Г.Г., Сергеев М.Н.** Модель кварк-глюонных струн: мягкие и полужесткие адронные процессы. 4,817(343)
- Мишику Ш.**, см. Сэндулеску А. и др.
Молодцова И.В., см. Баструков С.И., и др.
Молочков А.В., см. Буров В.В. и др.
Мровчински С. Некоторые вопросы транспортной теории кварк-глюонной плазмы. 4,954(419)
- Папоян В. В.**, см. Баструков С.И. и др.
Пенионжкевич Ю.Э., см. Калпакчиева Р. и др.
Подгайный Д.В., см. Баструков С.И. и др.
Пупышев В.В. Некоторые методы и результаты аналитических исследований задачи трех ядерных частиц. 6,1562
- Сэндулеску А., Мишику Ш., Кырстойу Ф., Грайнер В.** Моды холодного деления ²⁵⁴Cf. 4,908(386)
- Сергеев М.Н.**, см. Лыкасов Г.И. и др.
Скобелев Н.К., см. Кузнецов В.И. и др.
Смирнов Г.И., см. Буров В.В. и др.
Снигирева Г.П., см. Федоренко Б.С. и др.
Тарантин Н.И. Методы измерения атомных масс в ядерной физике. Основа масс-анализа — диспергирование ионов или заряженных частиц. 2,405(167)
- Трясучёв В.А.** Фотообразование легких η -ядер. 6,1391
- Фаянс С.А.**, см. Князьков О.М. и др.
Федоренко Б.С., Ворожцова С.В., Герасименко В.Н., Дружинин С.В., Юдаева Л.А., Снигирева Г.П., Шевченко В.А. Цитогенетические нарушения в клетках экспериментальных животных и человека при действии ускоренных заряженных частиц и космического излучения. 2,469(195)
- Херман Б.**, см. Григорян Х. и др.
Чабанов В.М., см. Захарьев Б.Н. и др.

Шевченко В.А., см. Федоренко Б.С.
и др.

Юдаева Л.А., см. Федоренко Б.С.
и др.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ, Т.30, 1999

А

Агапов Н.Н. 3,760(322)
Александров Ю.А. 1,72(29)
Амирханов И.В. 1,210(87)
Аракелян Г.Г. 4,817(343)

Б

Баструков С.И. 4,992(436)
Болен Х.Г. 6,1429
Буров В. В. 6,1337

В

Вебер Ф. 2,380(156)
Вебер Ф. 4,992(436)
Ворожцова С.В. 2,469(195)

Г

Гарсеванишвили В.Р. 3,613(258)
Герасименко В.Н. 2,469(195)
Гогилдзе С. 1,160(66)
Грайнер В. 4,908(386)
Григорян Х. 2,380(156)

Д

Дружинин С.В. 2,469(195)

З

Займидорога О.А. 1,5(1)
Зайцев Л.Н. 5,1292
Захарьев Б.Н. 2,277(111)

Земляная Е.В. 1,210(87)

И

Изосимов И.Н. 2,321(131)

К

Калпакчиева Р. 6,1429
Князьков О.М. 4,870(369)
Кузнецов В.И. 6,1514
Кухтина И.Н. 4,870(369)
Кырстойу Ф. 4,908(386)

Л

Лаерманн Э. 3,720(304)
Лахно В.Д. 1,210(87)
Лохтин И.П. 3,660(279)
Лыкасов Г. И. 4 ,817(343)

М

Манджавидзе И. 1,123(49)
Манов С. 5,1211
Маршаков А. В. 5,1120
Мишику Ш. 4,908(386)
Молодцова И.В. 4,992(436)
Молочков А. В. 6,1337
Мровчински С. 4,954(419)

П

Папоян В.В. 4,992(436)
Пенионжкевич Ю.Э. 6,1429
Подгайный Д.В. 4,992(436)

Первушин В.Н. 1,160(66)
Первушин В.Н. 1,210(87)
Пузынин И.В. 1,210(87)
Пузынина Т.А. 1,210(87)
Пупышев В.В. 6,1562

Р

Робертс К.Д. 3,537(223)

С

Сарычева Л.И. 3,660(279)
Сергеенко М.Н. 4,817(343)
Сисакян А.Н. 5,1057
Скобелев Н.К. 6,1514
Смирнов Г. И. 6,1337
Снигирев А.М. 3,660(279)
Снигирева Г.П. 2,469(195)
Соловцов И.Л. 5,1057
Стриж Т.А. 1,210(87)
Сэндулеску А. 4,908(386)

Т

Тавхелидзе А.Н. 3,613(258)
Тарантин Н.И. 2,405(167)
Трошин С.М. 5,1270
Трясучёв В.А. 6,1391
Тюрин Н.Е. 5,1270

Ф

Фаянс С.А. 4,870(369)
Федоренко Б.С. 2,469(195)

Х

Хведелидзе А. 1,160(66)
Херман Б. 2,380(156)

Ч

Чабанов В.М. 2,277(111)

Ш

Шевченко В.М. 2,469(195)

Ю

Юдаева Л.А. 2,469(195)

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Буров В.В., Молочков А.В., Смирнов Г.И.</i> Релятивистская теория эволюции структуры нуклона в ядре	1337
<i>Трясучёв В.А.</i> Фотообразование легких η-ядер	1391
<i>Калпакчиева Р., Пенионжкевич Ю.Э., Болен Х.Г.</i> Сильнонейтроноизбыточные изотопы легких элементов. Структура ядер	1429
<i>Кузнецов В.И., Скобелев Н.К.</i> Запаздывающее деление атомных ядер	1514
<i>Пупышев В.В.</i> Некоторые методы и результаты аналитических исследований задачи трех ядерных частиц	1562
Тематический указатель	1647
Авторский указатель	1649

CONTENTS

<i>Burov V.V., Molochkov A.W., Smirnov G.I.</i> Relativistic Theory of Evolution of Nucleon Structure in Nuclei	1337
<i>Tryasuchev V.A.</i> Photoproduction of Light Eta-Nuclei	1391
<i>Kalpachieva R., Penionzhkevich Yu.E., Bohlen H.G.</i> Very Neutron-Rich Isotopes of Light Elements. Nuclear Structure	1429
<i>Kuznetsov V.I., Skobelev N.K.</i> Delayed Fission	1514
<i>Pupyshev V.V.</i> Some Methods and Results of Analytical Investigations to the Problem of Three Nuclear Particles	1562
Subject indexes	1647
Author's indexes	1649

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с одной стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркиваются двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, векторы — синим, либо знаком снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например, ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами: не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год

издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbiner A.V.** — Comm. Math. Phys., 1988, v.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Е.Ю.Шаталова.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 26.08.99. Подписано в печать 28.10.99. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 20,6. Уч.-изд.л. 24,08.
Тираж 400. Заказ 51691. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1999. Том 30. Вып.6. 1333—1660.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЭВОЛЮЦИИ СТРУКТУРЫ НУКЛОНА В ЯДРЕ

В.В. Буров, А.В. Молочков, Г.И. Смирнов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1337
ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ	1344
ФОРМАЛИЗМ	1348
Амплитуда Бете—Солпитера	1349
Анализ матричных элементов	
в формализме Бете—Солпитера	1351
Уравнение Бете—Солпитера	1354
ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НА ДЕЙТРОНЕ	1359
Амплитуда комптоновского рассеяния на дейтроне	1360
Адронный тензор дейтрона	1364
Структурная функция дейтрона F_2^D	1366
Нерелятивистский предел	1370
СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕГКИХ ЯДЕР	1372
Обобщение формализма для легких ядер	1374
Структурные функции ядер для $A = 3, 4$	1378
Правило сумм Готтфрида	1384
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1386
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1388

ФОТООБРАЗОВАНИЕ ЛЕГКИХ η -ЯДЕР

В.А.Трясучёв

Томский политехнический университет, Томск

ВВЕДЕНИЕ	1391
η -ЯДРА И ИХ СВОЙСТВА	1393
Оптическая модель взаимодействия η -мезонов с ядрами	1393
Свойства η -ядер	1395
ФОТООБРАЗОВАНИЕ η -МЕЗОНОВ НА НУКЛОНАХ И ЯДРАХ	1399
Фоторождение η -мезонов на нуклонах	1399
Амплитуда реакции $A(\gamma, \eta N) A'$ на p -оболочечных ядрах	1402
Сечения реакций $A(\gamma, \eta N) A'$	1406
ФОТОРОЖДЕНИЕ ЛЕГКИХ η -ЯДЕР	1411
Модель фоторождения η -ядер	1411
Фоторождение сверхлегких η -ядер	1412
Фотообразование η -ядер в $1s$ -состояниях	1416
Фотообразование η -ядер в $1p$ -состоянии	1421
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1426
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1426

СИЛЬНОНЕЙТРОНОИЗБЫТОЧНЫЕ ИЗОТОПЫ ЛЕГКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Структура ядер

Р.Калтакчиева, Ю.Э.Пенионжкевич

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Х.Г.Болен

Институт им. Гана — Майтнер, Берлин, Германия

ВВЕДЕНИЕ	1429
ИЗОТОПЫ ГЕЛИЯ	1431
Ядро ${}^6\text{He}$	1432
Ядро ${}^7\text{He}$	1439
Ядро ${}^8\text{He}$	1442
Ядро ${}^9\text{He}$	1447
Ядро ${}^{10}\text{He}$	1452
Изотопы гелия с $A > 10$	1458
ИЗОТОПЫ ЛИТИЯ	1460
Ядро ${}^{10}\text{Li}$	1460
Ядро ${}^{11}\text{Li}$	1469
Дальнейшее изучение ${}^{10}\text{Li}$ и ${}^{11}\text{Li}$.	
Более тяжелые изотопы лития	1480
ИЗОТОПЫ БЕРИЛЛИЯ	1481
Ядро ${}^{11}\text{Be}$	1481
Ядро ${}^{12}\text{Be}$	1485
Ядро ${}^{13}\text{Be}$	1488
Ядро ${}^{14}\text{Be}$	1493
Более тяжелые изотопы Be	1497
Кластеризация в изотопах бериллия	1497
ИЗОТОПЫ БОРА	1500
Ядро ${}^{14}\text{B}$	1500
Ядро ${}^{15}\text{B}$	1501
Ядро ${}^{16}\text{B}$	1502

Кластеризация в изотопах В	1504
Дальнейшее исследование изотопов бора	1505
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1505
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1506

ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ ДЕЛЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР

В.И.Кузнецов, Н.К.Скобелев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1514
КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ДЕЛЕНИЯ	1515
ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	1520
Открытие запаздывающего деления	1520
Синтез и изучение нуклидов ^{234}Am и ^{232}Am	
в ядерных реакциях на ускоренных пучках α -частиц	1528
Идентификация атомного номера элемента	1534
Измерение совпадений осколков запаздывающего деления и рентгеновских квантов K -захвата	1534
Полная кинетическая энергия осколков запаздывающего деления изотопов ^{232}Am , ^{234}Am и их массовое распределение	1537
Изучение α -распада ^{234}Am и ^{232}Am	1538
Экспериментальное измерение вероятности запаздывающего деления $P_{\text{ДФ}}$ и сечения образования $\sigma_{\text{ЕС}}$ ядра, испытывающего K -захват	1539
Изучение запаздывающего деления нечетно-нечетных изотопов с $Z > 96$	1542
Запаздывающее деление левее $N = 126$ и в области левее $Z = 82$	1544
Запаздывающее деление нейтроноизбыточных ядер	1546
Барьеры деления ядер, удаленных от линии β -стабильности, и запаздывающее деление	1550
Влияние запаздывающего деления на синтез тяжелых элементов	
в термоядерных импульсных нейтронных потоках	1553
Хронометрические пары и запаздывающее деление	1556
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1558
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1559

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЗАДАЧИ ТРЕХ ЯДЕРНЫХ ЧАСТИЦ

В.В.Пупышев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1562
КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	
В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ	1572
Кинематическое преобразование координат	1573
Кинематическое преобразование функций	1578
Операторы перестановок, отражения, поворотов и кинематического преобразования	1578
Основные свойства угловых базисов	1582
Кинематическое преобразование и теоремы сложения	1588
Кинематическое преобразование бисферических рядов	1592
Кинематическое преобразование гиперсферических рядов	1598
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФАДДЕЕВА	1613
Основные свойства свободного гамильтониана	1613
Матричное представление операторов взаимодействия	1616
Строение и угловой анализ уравнения Шредингера	1617
Строение и угловой анализ уравнений Фаддеева	1620
Угловой анализ в случае центральных взаимодействий	1622
Угловой анализ в случае S -волновых взаимодействий	1626
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА	1627
Ложные решения	1628
Примеры точных физических решений и их ложных слагаемых	1635
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1646