

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.31

PART 1

Six issues per year

DUBNA 2000

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 31

ВЫПУСК 1

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 2000

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы Е.К.Аксенова, тел. (09621) 65-165

Э.В.Ивашкевич

Е.Ю.Шаталова

© ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 2000

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФОК

(К столетию со дня рождения)

Ю.В.Новожилов, В.Ю.Новожилов

Санкт-Петербургский государственный университет

Дан краткий обзор научной деятельности Владимира Александровича Фока и ее значения для современной физики. Более подробно обсуждается вклад В.А.Фока в развитие квантовой теории поля и теории тяготения.

A short review is given on research activity of Vladimir A. Fock and its role in modern physics. V.Fock's contribution to the development of quantum field theory and theory of gravity is discussed in more detail.

ВВЕДЕНИЕ

Исполнилось 100 лет со дня рождения Владимира Александровича Фока.

Данная статья посвящена жизни и деятельности В.А.Фока и его вкладу в создание квантовой теории и, особенно, методов квантовой теории поля. Раздел 1 содержит краткий обзор научной деятельности В.А.Фока. Мы предпосылаем обсуждению работ В.А.Фока раздел о роли математического аппарата в современной физике, чтобы расширить круг читателей и сделать эту статью более понятной тем, кто работает в области квантовой физики и теории тяготения.

В разделах 2 и 3 рассказывается более подробно об основных работах В.А.Фока по квантовой теории и общей теории относительности, за исключением работ по созданию и применению метода самосогласованного поля Хартри—Фока.

1. КРАТКИЙ ОБЗОР НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В.А.ФОКА

Роль математического аппарата в современной физике. До сих пор еще распространено неправильное представление о роли математического аппарата в современной физике и о том смысле, который при этом вкладывается в это понятие.

Обычно предполагается, что роль математического аппарата хотя и важна, но второстепенна и сводится к количественному описанию явлений; первое же место всегда отводится тем идеям, которые позволяют понять явление качественно. Идея или картина явления обычно формулируется при помощи

наглядных представлений, без применения математического аппарата. Так, например, когда говорят о полете спутника, то считается очевидным, что задача математического аппарата здесь заключается лишь в точном определении траектории спутника с учетом всех воздействий — и силы тяготения, и сопротивления воздуха, в то время как приблизительный вид траектории и характер влияния этих воздействий («качественное описание») могут быть поняты без обращения к математике. И действительно, качественная картина полета спутника нам понятна, она вполне наглядна, так как на основании опыта наблюдений и школьного курса физики мы хорошо знаем действие сил тяготения и сопротивления воздуха.

Но наглядные представления применимы далеко не всегда. Пожалуй, в новой физике даже трудно найти такую область, где общепринятые наглядные представления и «здоровый» смысл привели бы к «здоровым» результатам. Абстрактность представлений — характерная черта современных физических воззрений. В этом заключается одна из причин неудач многочисленных претендентов на объяснение явлений современной физики (главным образом, квантовой физики) с точки зрения наглядных представлений. И именно вследствие этого обстоятельства в новой физике математическому аппарату принадлежит решающее место. В отличие от ньютоновской, в современной физике фактически невозможно описать явление качественно, не пользуясь математическим аппаратом. Математические методы образуют основу современных физических теорий, и даже физическое толкование опирается на них. Роль математического аппарата в новой физике и, в частности, в физике элементарных частиц, таким образом, значительно шире той роли, которая ему обычно приписывается. Разумеется, обсуждая экспериментальные факты, ученые вполне в состоянии дать качественное объяснение «на пальцах», не обращаясь к уравнениям. Однако слова и фразы, описывающие картину явления, по существу, не что иное, как пересказ и толкование математической теории этого явления. (Известно, что математический язык — наиболее сжатый и точный язык.)

Важная роль математических методов в физике элементарных частиц видна также и в том, что сами основные понятия оказываются предметом математического исследования в теории элементарных частиц, в то время как основные понятия ньютоновской физики являются частью наших наглядных представлений. Так, понятие о координатах спутника по отношению к Земле включаются нами в схему наглядных представлений, а понятия о величинах, при помощи которых описывается движение квантовых полей (например, «столбец Фока»), составляют существенную часть математического аппарата квантовой теории поля.

Развитие физики идет по пути усложнения ее математического аппарата. Квантовая теория поля широко использует такие разделы математики, как теорию групп, теорию обобщенных функций и теорию операторов, и т.д.

Чем абстрактнее математический аппарат, тем необычнее и соответствующие физические теории. По абстрактности представлений квантовая теория поля занимает в современной физике, безусловно, первое место.

Следует помнить, что абстрактность и наглядность относительны. В самом деле, наглядное представление — это представление посредством привычных моделей и понятий. Когда какая-либо область науки хорошо изучена, вырабатывается система представлений, позволяющая объяснить «наглядно» все явления в этой области. Совершенно очевидно, что наглядным путем можно объяснить только явления, не выходящие за рамки привычных теорий. Если же новые факты выходят за рамки известных теорий, то бессмысленно объяснять их с точки зрения старых представлений наглядным образом. Тогда нужно создавать новую систему представлений.

Мнения разных людей о наглядности или абстрактности объяснений физического явления часто бывают различны, так как уровень «наглядности» определяется знаниями. Опираясь на школьный курс физики и повседневный опыт, большинство людей мыслит сейчас при помощи механических моделей. Значительно меньшее число людей может сказать, что они наглядно представляют себе электромагнитное поле, и уже совсем ничтожная доля может заявить, что для них наглядны квантовые понятия. Механические, квантовые представления и представления об электромагнитном поле образуют (каждое в отдельности) вполне стройную систему, способную объяснить явления в этой области. Понять же квантовые закономерности на основе механических представлений или представлений о поле невозможно так же, как нельзя понять электромагнитные явления при помощи механических моделей.

Весьма поучительна хорошо известная из истории физики попытка вывода свойств электромагнитного поля на основе механических воззрений. Во время развития электромагнитной теории механика достигла уже известной завершенности, хорошо объясняла многочисленные явления, представления ее были привычны, и многим казалось, что и все остальное должно укладываться в рамки механических воззрений. Для объяснения электромагнетизма было введено понятие об универсальной упругой среде, заполняющей все пустое пространство, — мировом эфире. Все тела считались погруженными в эфир и пронизанными эфиром. Электромагнитное поле по этой модели действовало в эфире; оно было, по тогдашним представлениям, не чем иным, как механическими напряжениями в эфире. Свет рассматривался как распространение упругих колебаний в эфире.

С развитием электромагнитной теории, с открытием новых опытных фактов при такой трактовке возникало все больше трудностей. Эфир приходилось наделять самыми противоречивыми свойствами: он должен был вести себя как твердое тело при быстрых колебаниях и не сопротивляться движению планет; эфир сравнивался с жидкостью, со смолой и т.д.

В дальнейшем, в связи с этими трудностями, стали рассматривать эфир

как особую материальную среду, наделенную свойствами, не имеющими ничего общего со свойствами обычных тел. Предполагалось только, что эфир может служить системой отсчета, т.е., что можно говорить о скорости Земли относительно эфира. Но и такие представления об эфире оказались неудовлетворительными. В опыте Майкельсона и в других опытах было установлено, что нельзя определить движение Земли относительно эфира. Понятие эфира как некоторой субстанции потеряло смысл. Нелепо было пытаться объяснить электромагнитные явления посредством упругих свойств среды (эфира), которая не могла быть обнаружена. Понятие об эфире было полностью устранено из электромагнетизма в теории относительности Эйнштейна, и теперь оно означает не более чем поэтический образ («радиоволны в эфире» и т.д.).

Но если при помощи механических моделей и нельзя сделать наглядным электромагнитное поле, то отсюда вовсе не следует, что электромагнитное поле недоступно для наглядного восприятия. Мы сможем представить себе наглядно электромагнитное поле, если изучим подробно его свойства и привыкнем к ним. Качественные соотношения, вытекающие из уравнений поля, и будут характеризовать поле «наглядным образом». Мы можем, например, представить электростатическое поле при помощи линий напряженности электрического поля и поверхностей равного потенциала; можем изобразить магнитное поле посредством магнитных силовых линий и т.д.

Мы видели, что чем необычнее закономерности природы, тем большую роль играет математический аппарат теории. В создании его главным стимулом служит стремление найти такое математическое оформление теории, которое наилучшим образом отражает положение вещей. Иной раз проходят годы и даже десятилетия, прежде чем физикам удастся создать окончательную математическую формулировку теории или, как говорят, придать теории простой и изящный вид.

Много первоначальных несовершенных построений при этом отпадает. Тем более удивительной кажется «живучесть» небольшого числа методов, разработанных еще в начале 30-х годов, — методов, в которых авторам удалось сразу же схватить «логику» природы и сформулировать ее новые необычные понятия.

В.А.Фок и современная физика. Научная деятельность В.А.Фока охватывала широкий круг проблем теоретической и математической физики, а также прикладной физики и математики. Приблизительно можно выделить следующие периоды научной деятельности В.А.Фока:

- Квантовая механика и квантовая теория поля — 1926–1937 и 1940–1941 гг.
- Общая теория относительности — 1938–1941 и 1949–1961 гг.
- Математика — 1942–1944 гг.
- Дифракция — 1944–1951 гг.

- Обсуждение принципиальных вопросов квантовой теории и теории относительности — вплоть до 1974 г., работа над книгой «Проблемы дифракции и распространения радиоволн» (1970) и над вторым изданием книги «Начала квантовой механики» (1973).

Из этой классификации выпали работы по математической физике и прикладной физике, выполненные в различные годы.

Наиболее значителен вклад В.А.Фока в квантовую физику. Он был одним из создателей квантовой механики и квантовой теории поля. Война задержала начало научной деятельности молодого Фока. Включившись в деятельность по построению квантовой физики несколькими годами позднее первопроходцев де Бройля, Гейзенберга, Шредингера и Дирака, В.А.Фок сумел сразу же выдвинуться в число ведущих теоретиков мира и открыть подходы к новым явлениям и методы расчета, которые сохраняют значение и сейчас. Его видение физических явлений и описывающего их математического аппарата с базисными понятиями было удивительным и опережало развитие физики на десятилетия. Подход В.А.Фока в ряде работ можно также описать словами самого В.А., сказанными по поводу Дирака: «Автор строит теорию по методу «математической гипотезы»: сперва вводится математический аппарат, а затем для него подыскивается физическое толкование». Иногда это даже мешало популярности его работ среди тех, кто привык работать по готовым рецептам и не мог воспринять новое, выходящее за рамки стандартных идей.

Место работ В.А.Фока в современной физике легче всего объяснить, если проследить историю ее развития.

Годы 1923–1927 в создании квантовой теории были критическими. К этому времени был накоплен достаточный экспериментальный материал, который не мог быть объяснен теорией Бора, его принципом соответствия и оболочечной моделью атома, представлениями о вероятностях переходов спонтанного и вынужденного излучения Эйнштейна. Аномальный эффект Зеемана, связанный с неизвестным еще тогда спином, вместе с явлениями, понятыми позже с помощью принципа запрета, и дуализмом частица—волна создавали физическую картину, трудную для объяснения в рамках одной теории. И действительно, квантовая теория была создана после того, как сперва были найдены три ключа к объяснению опытов — дуализм, принцип запрета, спин, а затем объединены в современную квантовую теорию. Де Бройль первым понял [1] в 1925 г., что в основе вещей находятся «волны материи». В том же году Паули [2] опубликовал принцип запрета, а Гейзенберг [3] сформулировал матричную механику, развитую в работах Борна и Йордана [4] и Борна, Йордана и Гейзенберга [5]. Идеи де Бройля были развиты и превращены в волновую механику Шредингером, четыре сообщения которого появились в 1926 г. в журнале «Annalen der Physik» [6] под общим заглавием «Квантование как проблема собственных значений» («Quantisierung als Eigenwertproblem»).

В.А.Фок включился в великое квантовое строительство в 1926 г. [7], сразу же после появления первой (из четырех) статьи Э.Шредингера. В статье [7] Фок обобщает уравнение Шредингера на случай сил, зависящих от скорости. Он опубликовал ее почти в то же время, когда вышел журнал со вторым сообщением Шредингера.

Уравнение Клейна—Фока и фазовое преобразование волновой функции [8,9]. В том же 1926 г. В.А.Фок и О.Клейн независимо дают физике релятивистское волновое уравнение — уравнение для частицы со спином 0. Как всегда у Фока, это сделано основательно — в присутствии внешних электромагнитного и гравитационного полей, путем изучения инвариантных свойств действия. Здесь рассматривается также градиентное (калибровочное) преобразование электромагнитных потенциалов и, впервые, соответствующее фазовое преобразование волновой функции заряженной частицы. В этой работе В.А.Фок использует переход к пространству пяти измерений с метрикой, зависящей от электромагнитного поля. Эта работа, безусловно, превосходит уровень теоретической физики того времени. Недаром многие физики предпочли сослаться на опубликованную позднее работу Гордона [10], где было предложено только аналогичное релятивистское уравнение для свободной частицы. Переход в пятимерное пространство, использованный как Фоком, так и Клейном, был впервые рассмотрен Калузой [11]. Через 40–50 лет переход к пространствам с дополнительными измерениями стал весьма популярен, и одно из направлений в таком духе получило название подхода Калузы—Клейна.

В это же время были сделаны другие большие открытия. Ферми предложил [12] статистику, совместную с принципом запрета Паули. Дирак сформулировал принцип запрета на языке антисимметричных волновых функций [13]. Борн [14] дал новой теории вероятностное истолкование. Гипотеза Уленбека и Гаудсмита о спине [15] была принята физиками. Этот первый этап построения квантовой механики завершился открытием Гейзенбергом [16] соотношений неопределенностей.

Представление Фока. В 1927 г. Дирак [17] создает квантовую теорию испускания и поглощения света, которая единым образом описывает как интерференционные явления, так и процессы испускания и рождения квантов света. В.А.Фок замечает, что математический аппарат этой замечательной теории не соответствует физике явления, и в 1928 г. предлагает другую математическую основу теории [18] — то, что Дирак называет [19] представлением Фока. Это представление операторов рождения и поглощения в гильбертовом пространстве теперь используется повсеместно; оно входит в любой учебный курс по квантовой механике. Однако редки те авторы, которые при этом упоминают имя В.А.Фока.

Уравнение Дирака в поле тяготения и параллельный перенос как способ задания калибровочного взаимодействия. В 1928 г. Дирак предложил

[20] уравнение для частицы со спином $1/2$. В 1929 г. в работе В.А. Фока и Д.Д. Иваненко [21] было высказано предположение, что матрицы Дирака имеют чисто геометрический смысл, а в следующей работе этих авторов [21a] было введено понятие параллельного переноса биспинора. Следующим шагом в геометризации теории Дирака было получение Фоком [22] уравнения для частицы со спином $1/2$ в гравитационном поле, переходящего в уравнение Дирака в пространстве Минковского. Об этом уравнении говорят как об уравнении Дирака в гравитационном поле; оно рассматривалось также Вейлем [23]. При параллельном переносе спинора в ковариантной производной появляется дополнительное слагаемое, имеющее смысл электромагнитного потенциала. Параллельный перенос выступает как способ задания взаимодействия и обеспечения калибровочной инвариантности взаимодействия между заряженными и тяготеющими телами. Такая геометрическая интерпретация взаимодействия имеет совершенно общий характер и приложима ко всем видам взаимодействия (с абелевой или неабелевой группой калибровочных преобразований). Эти работы показывают, как появляются калибровочные теории, представляющие собой основу современной квантовой теории поля. Значение этого результата было осознано примерно через 50 лет.

Метод Хартри—Фока. После построения квантовой механики одной частицы во внешнем поле и установления статистических свойств фундаментальной проблемой стала многоэлектронная задача квантовой механики и расчет строения атома. В 1928 г. Хартри [24] сделал первый шаг к решению, построив систему самосогласованных уравнений для одноэлектронных волновых функций. В.А.Фок поставил строго многоэлектронную задачу о волновой функции системы электронов, подчиняющейся уравнению Шредингера, принципу Паули и имеющей заданный момент количества движения. Приближенное решение [25] этой задачи в терминах одноэлектронных функций с помощью вариационного принципа дает самосогласованные уравнения Хартри—Фока, отличающиеся от системы Хартри наличием обменных членов. В.А.Фок в собственных расчетах [26] и в расчетах с М.И.Петрашень [27] показал эффективность такого подхода. Именно метод Хартри—Фока [25] служит основой вычислений в многочастичных задачах квантовой механики с момента создания по настоящее время. Метод учета парных корреляций был позднее разработан В.А.Фоком, М.Г.Веселовым и М.И.Петрашень [28].

Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского. Первая теория квантового поля принадлежит Гейзенбергу и Паули [30]. Эта теория встретила с рядом трудностей, которые, как выяснилось позднее, были типичны при применении канонического формализма в калибровочных теориях. Проблема введения релятивистски-инвариантного взаимодействия с заряженными частицами и происхождения кулоновских сил оставалась открытой. Дирак [31] выдвинул идею (и проиллюстрировал ее в одномерном случае), что кулоновские силы возникают в результате обмена скалярными

квантами. Релятивистскую инвариантность теории предлагалось обеспечить введением отдельного времени для каждой заряженной частицы. Фок и Подольский [32] рассмотрели случай трехмерного пространства и получили реальный кулоновский потенциал. Их совместная статья с Дираком [29] придала теории законченный вид. Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского — это элегантная релятивистски-инвариантная формулировка квантовой электродинамики с заданным числом заряженных спинорных частиц. Здесь впервые введено представление взаимодействия для поля. Поле и каждая частица описываются отдельными координатами и временами. Эта теория представляет собой важный этап в создании современной квантовой теории поля. Новейшее развитие многовременного формализма связано с именами К. Томонаги [33] и Ю. Швингера [34].

Пространство Фока. Метод вторичного квантования был развит Дираком [17], Йорданом и Паули [35], Йорданом и Вигнером [36]. В нем волновая функция частицы рассматривалась в качестве оператора. Возникал вопрос о том, в каком отношении полученная теория соотносится с квантовой механикой. Ответ на этот вопрос был дан в работе В.А.Фока «Вторичное квантование и конфигурационное пространство» [37]. Этот ответ включал и введение нового понятия, которое получило название пространства Фока. В этом пространстве живут квантовые системы с взаимодействием, изменяющим число частиц. Это пространство универсально, так как оно не зависит от конкретной динамики, определяемой гамильтонианом. Его областью применения является вся квантовая физика.

Симметрия атома водорода и динамическая симметрия. Характер вырождения уровней атома водорода свидетельствовал о существовании некоторой, еще неизвестной симметрии. Многочисленные попытки выявить эту симметрию были неудачны. В.А.Фок показал [38] с помощью изящного преобразования, что атом водорода обладает четырехмерной симметрией в импульсном пространстве. Эта симметрия необычна, так как она смешивает координаты и импульсы, т.е. представляет собой динамическую симметрию. Спустя 25 лет эта работа послужила начальным толчком к обширной деятельности и к появлению сотен работ, посвященных моделям динамической симметрии, в которых спектр системы генерируется группой симметрии [39–41].

Метод собственного времени Фока. В.А.Фок [42] сумел найти такое расширение уравнения Дирака с внешним полем в пятимерное пространство, когда пятой координате можно придать смысл собственного времени, тем самым обеспечив релятивистскую инвариантность вычислений на всех этапах и единственность решения задачи Коши, а также выделения появляющихся бесконечностей, т.е. решил одним махом три проблемы. Этот метод через 15 лет был развит Швингером [43] и позднее де Виттом [44]. Метод с успехом применялся Намбу [45], Боголюбовым и Ширковым [46]. Он стал основным

способом регуляризации континуальных интегралов (т.е. связанных с ними определителей). В этой же работе В.А.Фок предложил новое калибровочное условие для потенциалов, которое все чаще применяется в наши дни, особенно тогда, когда нужно использовать свойства самодуальности [47,48].

Метод функционалов Фока [49,50]. «Метод функционалов» — это название было дано самим В.А. в своей работе [50], объединяющей с единой точки зрения его трактовку квантовой электродинамики, начатую в 1928 г. статьей, где было дано «представление Фока». Разумеется, эта трактовка в упрощенном виде применима и к скалярным мезонным полям. В методе функционалов В.А. выдвигает на первый план идею о производящем функционале, зависящем от вспомогательных функций, разложение которого в ряд дает амплитуды вероятности. Идея о производящем функционале оказалась весьма плодотворной в новейшем развитии квантовой теории поля, где вспомогательными функциями служат источники (внешние токи), разложение по степеням которых дает функции Грина. Метод функционалов был включен в программу перенормировки [51]. Этот метод оказался исключительно эффективным в квантовой оптике [52] и при построении теории облаченных частиц [53].

Уравнения движения масс в общей теории относительности. Уравнения Эйнштейна включают как уравнения поля тяготения, так и уравнения движения масс. Этот принципиальный вывод был сделан Эйнштейном с сотрудниками [54] еще в 1927 г., но уравнения движения не были получены. Эйнштейн и Фок независимо вывели уравнения движения из уравнений Эйнштейна различными методами [55,56] в 1938 и 1939 гг. Это был крупнейший результат в развитии общей теории относительности после основополагающих работ Эйнштейна.

Дифракция. Результаты, полученные В.А. в этой области, изложены в его книгах [58–60]. Обзор вклада В.А. в проблему дифракции сделал В.И.Смирнов [61]. Л.Д.Фаддеев пишет [62]: «Здесь В.А.Фок создал мощнейшие асимптотические методы, равных которым в математической физике не было», и продолжает: «Работы по дифракции продолжаются. И почти каждая из них начинается словами о том, что автор использует идеи и методы, разработанные В.А.Фоком».

Прикладные задачи. Математическая мощь и физическая интуиция предопределили успех В.А.Фока при его обращении к задачам прикладного характера. Среди них имеют первостепенное значение следующие. Теория освещенности [63,64]: введены основные понятия и написаны уравнения теории векторного светового поля. Заложены основы современной светотехники. Теория каротажа [65]: дана математическая теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа. Теория доведена до таблиц и графиков для пользователей.

Книги «Теория пространства, времени и тяготения» [66, 67] и «Начала квантовой механики» [68, 69]. Эти книги уникальны. По объему оригинального материала фундаментального характера, содержащегося в них, они следуют непосредственно за книгой А.Эйнштейна по общей теории относительности и книгой П.А.М.Дирака по квантовой механике. Эти книги отличаются также тщательностью анализа физического истолкования теории. В связи с особой ролью математического аппарата в современной физике физическое истолкование новых теорий вместе с введением основных понятий приобретало фундаментальное значение. В этой деятельности подход В.А.Фока, работавшего в значительной мере по методу математической гипотезы, существенно отличался от подхода физика, не верящего, что математика есть часть Природы. Математический аппарат новой теории рассматривается В.А.Фоком, как если бы это была воля Природы, подлежащая объяснению прежде всего в понятиях новой теории, а затем уже переводу на привычный до этого язык. Физики другого типа попытались бы прежде всего сформулировать смысл новой теории с помощью деформированных понятий старой теории, и лишь спустя длительное время, или даже в новом поколении, восприняли бы новую теорию и новые понятия как первичные и не сводимые к старым понятиям. Относительность к средствам наблюдения — это понятие было введено В.А.Фоком как универсальное и представляющее собой основу описания физических явлений как в квантовой физике, так и в теории относительности.

Защита науки. Деятельность В.А.Фока по истолкованию квантовой механики и общей теории относительности служила также щитом, защищавшим науку от нападков невежественных философов и примкнувших к ним физиков, чиновников и лихих журналистов. Ряд статей В.А. написал, имея в виду как раз таких читателей, а также вульгаризаторов науки такого же толка. Нападки на науку нельзя было обходить молчанием, так как при отсутствии отпора могли последовать политические выводы — увольнения, аресты.

Советская наука пережила трудные годы репрессий 30-х годов, а в конце 40-х — начале 50-х вступила в новую полосу испытаний — время разгрома биологии, борьбы с теорией относительности и квантовой механикой, с «космополитизмом». Лысенковщина стала типичным методом истребления лучшей части науки. Уничтожив современную биологию, лысенковщина стала расползаться по другим наукам. Репрессии и лысенковщина нанесли потери и физикам-теоретикам университета. Были арестованы и безвременно погибли М.П.Бронштейн, В.Р.Бурсиан, В.К.Фредерикс, Ю.А.Крутков. Л.Э.Гуревич был уволен из университета. Сам В.А.Фок в 1938 г. был арестован и отправлен в Москву, но освобожден благодаря вмешательству П.Л.Капицы.

В.А.Фок активно боролся с лысенковщиной. Философские семинары физического факультета в начале 50-х годов были одним из оплотов борьбы за общую теорию относительности и квантовую механику.

ДАТЫ ЖИЗНИ ВЛАДИМИРА АЛЕКСАНДРОВИЧА ФОКА

- 1898, 22 декабря** родился в С.-Петербурге в семье инспектора лесов, ученого лесовода Александра Александровича Фока.
- 1916** Окончил реальное училище в Петрограде и поступил на физико-математический факультет Петроградского университета. Зачислен добровольцем в артиллерийское училище в Петрограде.
- 1917** Военная служба на фронте.
- 1918** Демобилизация и возвращение в университет.
- 1919** Лаборант Государственного оптического института (ГОИ). Академик Д.С.Рожественский набрал группу из числа наиболее успевающих студентов и зачислил их в штат ГОИ как лаборантов при мастерских, чтобы помочь им учиться. Стипендий в то время не существовало; лаборанты получали продовольственные карточки первой категории. Научным руководителем В.А.Фока был Юрий Александрович Крутков, ученик П.Эренфеста. Среди лекторов: А.Н.Крылов — приближенные вычисления, Я.Д.Тамаркин — теория операторов, интегральные уравнения. Среди профессоров — А.А.Фридман.
- 1922** Окончание университета, аспирант университета (оставленный при университете для подготовки к профессорскому званию), сотрудник ГОИ.
- 1923** Первая статья в «Zs. f. Phys.» [70] (совместно с Ю.А.Крутковым). Сокращение штатов теоретического отдела ГОИ, В.А.Фок покидает ГОИ.
- 1924** Переход из аспирантов в ассистенты университета. Выход в свет работы по теории освещенности, в которой В.А.Фок заложил основы теории векторного светового поля. Владимир Александрович активно изучает квантовую физику и работы Нильса Бора, о чем свидетельствует хвалебная ода Бору, сочиненная им в это время.
- 1924–1925** Консультант Главной геофизической обсерватории (ГГО). Из воспоминаний А.А.Стожарова [71]: «Владимир Александрович ожидал приема у директора А.А.Фридмана вместе с начальником вычислительного бюро ГГО, которое занималось вычислением медленно сходящегося ряда. Владимир Александрович за минуты ожидания доказал, что ряд сходится к нулю. А.А.Фридман пригласил В.А. стать консультантом».
- 1924–1936** Одновременно научный сотрудник Физико-технического института, возглавляемого А.Ф.Иоффе. Активно участвует в работе теоретического семинара.

- 1926** Публикует в «Zs. f. Phys.» статью [7] в развитие первой работы Шредингера по квантовой механике. Вторая статья В.А.Ф. в «Zs. f. Phys.» [9] содержит уравнение Клейна—Фока, известное также как уравнение Клейна—Гордона. Здесь также введено калибровочное (градиентное) преобразование электромагнитных потенциалов и волновой функции заряженной частицы.
- 1927** Получает стипендию Рокфеллеровского фонда и отправляется в Германию. Работает у Макса Борна. Совместная статья [72] с доказательством адиабатической гипотезы, предложенной Борном.
- 1928** Работа «Обобщение и решение статистического уравнения Дирака» [18], в которой дано «представление Фока» (терминология Дирака [19]) для операторов рождения и поглощения и введена производящая функция как волновая функция в гильбертовом пространстве. Возвращение в Петроград. Преподавание в университете в качестве доцента. Возобновление работы в ГОИ. Д.С. Рождественский восстанавливает теоретическую группу и приглашает В.А.Фока возглавить ее. Задача группы — расчет сил осцилляторов.
- 1929** Геометризация теории Дирака и вывод уравнения Дирака в гравитационном поле [21,22]. Фундаментальный результат: параллельный перенос есть способ задания взаимодействия между заряженными и тяготеющими телами; это понятие включает и калибровочную инвариантность. Начало исследований по задаче многих тел.
- 1930** Статьи «Приближенный способ решения квантово-механической задачи многих тел» и «Самосогласованное поле с обменом для натрия» [26], в которых дано обобщение метода Хартри с введением обменных членов — это рождение метода Хартри—Фока.
- 1932** Выход в свет книг «Механика сплошных сред» и «Начала квантовой механики». Лекции по квантовой механике были первым курсом, изданным в СССР. Научное признание: избрание членом-корреспондентом Академии наук и профессором Ленинградского университета. Статьи с Б.Подольским [32], развивающие для реального случая идею П.А.М.Дирака [31] о том, что кулоновское взаимодействие возникает в результате обмена скалярными квантами. Создание многовременного формализма Дирака—Фока—Подольского [29]. Статья «Вторичное квантование и конфигурационное пространство» [37], в которой было введено пространство Фока.
- 1933–1934** Продолжение работ по многочастичной задаче, создание группы атомных расчетов и публикация первых расчетов совместно с М.И.Петрашенем [26, 27]. Одновременно продолжают работы по прикладным

проблемам и математической физике. Выходит книга «Теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа» [65] и публикуются статьи об асимптотике бесселевых функций [73].

- 1935** Расчеты самосогласованного поля и волновых функций для атома лития и атомов типа бериллия совместно с М.И.Петрашень [74]. Открытие динамической симметрии на примере атома водорода в статье «Атом водорода и неевклидова геометрия» [38].
- 1936** Признание работ по методу Хартри—Фока: присуждение премии имени Д.И.Менделеева. В.А.Фок информирует физиков СССР о дискуссии Эйнштейна и Бора по принципиальным вопросам квантовой механики [75, 76]. Статья «Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике» [77].
- 1937** Статья «Собственное время в классической и квантовой механике» [42], послужившая началом метода Фока—Швингера—де Витта в квантовой теории поля. Статья «Метод функционалов в квантовой электродинамике» [50], завершающая создание метода функционалов Фока.
- 1938** Арест в Ленинграде. Доставлен в Москву к наркому внутренних дел А.Ежову, но освобожден после вмешательства П.Л. Капицы и А.Н.Крылова. Начало работ по общей теории относительности.
- 1939** Статья «О движении конечных масс в общей теории относительности» [58], в которой В.А.Фок, независимо от Эйнштейна с сотрудниками, решил проблему вывода уравнений движения масс из уравнений Эйнштейна. Избран действительным членом Академии наук СССР.
- 1940** Статьи по многоэлектронным системам:
- метод неполного разделения переменных В.А.Фока, М.Г.Веселова и М.И.Петрашень [28], в котором впервые учитывались парные динамические корреляции электронов;
 - свойства симметрии координатной волновой функции электронов при заданном суммарном спине системы [78].
- 1941** Статья по общей теории относительности об интегралах движения центра двух конечных масс [79,80]. Эвакуация вместе с университетом в Елабугу в связи с началом войны.
- 1942–1943** Жизнь в эвакуации. Работа в области математической физики: исследование интегральных уравнений [81] и свойств функций Лежандра с комплексным значком [82].

- 1943–1946** Переезд из Елабуги в Москву. Работа в Физическом институте им.П.Лебедева Академии наук. В.А.Фок занимается проблемой распространения радиоволн вокруг земного шара. Фундаментальный вклад в теорию дифракции и выход монографии «Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности». Присуждение Государственной премии 1 степени за научные работы по распространению радиоволн. Развитие метода параболического уравнения в совместной работе с М.А.Леонтовичем «Решение задачи о распространении электромагнитных волн над поверхностью Земли по методу параболического уравнения» [83].
- 1946** Возвращение в Ленинград и продолжение работы в университете в качестве заведующего кафедрой теоретической физики. Продолжение исследований по теории дифракции [84].
- 1947** Совместная работа со своим учеником Н.С.Крыловым [85] о соотношении неопределенностей для энергии и времени и о законе распада.
- 1949** Философская дискуссия по вопросам квантовой механики и теории относительности. С.Э.Фриш вспоминает [86]: «Был момент, когда полемика приняла очень острый характер. Группа противников теории относительности и квантовой механики пыталась получить официальную поддержку своей точки зрения. Требовалось определенное гражданское мужество, чтобы выступать против них. И Владимир Александрович это мужество проявил». Безвременная кончина 26-летнего Н.С.Крылова, незадолго защитившего докторскую диссертацию по статистической физике. В.А.Фок издает и редактирует исследования Н.С.Крылова [87] и пишет статью вместе с А.Б.Мигдалом [88], сокурсником и другом Н.С.Крылова.
- 1950** Работа «О применении двухэлектронных функций в теории химической связи» [89], давшая начало методу геминалей в квантовой химии.
- 1951–1953** В.А.Фок уделяет много времени расширению влияния курсов по теоретической физике на физическом факультете ЛГУ. В это время деканом факультета был С.Э.Фриш, а на кафедре теоретической физики, кроме В.А.Фока, работали профессора М.Г.Веселов и П.П.Павинский, доценты Г.Ф.Друкарев и В.Г.Невзглядов, ассистенты Ю.Н.Демков и Ю.В.Новожилов. Дискуссия с философами по вопросам истолкования квантовой механики и теории относительности продолжается. В.А.Фок пишет статью «Против невежественной критики современных физических теорий» [90] в журнал «Вопросы философии».
- 1954** Работает над книгой по теории тяготения, в которую включались оригинальные исследования этих лет, и читает курс по теории относительности и теории тяготения на физическом факультете университета.

- 1954** Статья «Об уравнении Шредингера для атома гелия» [91], в которой дано точное решение для гелиоподобных атомов в виде бесконечного ряда, обладающего хорошей сходимостью.
- 1955** Выход в свет книги «Теория пространства, времени и тяготения», в которой обычная теория относительности, теория тяготения Эйнштейна и оригинальные исследования В.А.Фока излагаются с единой точки зрения автора, отраженной в заглавии книги.
- 1956** Присуждение первой премии Ленинградского университета за книгу «Теория пространства, времени и тяготения».
- 1957** Продолжение работ по интерпретации квантовой механики: статья в УФН [92]. Статья в «Rev. Mod. Phys.» «Три лекции по теории относительности» [93]. Выход в свет сборника работ по квантовой теории поля [94] в издательстве Ленинградского университета. Поездка в Копенгаген и дискуссии с Нильсом Бором.
- 1958** Опубликование в УФН статей Н.Бора по философским проблемам квантовой механики [95,96] и замечаний В.А.Фока [97]. Избрание иностранным членом Норвежского Королевского общества в Тронхейме.
- 1959** Выход английского издания книги по теории тяготения в переводе Н.Кеммера «Theory of Space, Time and Gravitation».
- 1960** Присуждение Ленинской премии за книгу «Работы по квантовой теории поля». При кафедре появляются научные сотрудники и создается отдел теоретической физики. В числе научных сотрудников В.А.Франке, В.И.Очкур, Л.В.Прохоров, а также В.И.Свидерский, изгнанный еще ранее «за ересь» с философского факультета ЛГУ. Статьи о различных координатных условиях в теории тяготения [98] Эйнштейна и эйнштейновской статике в конформном пространстве [99], написанные при подготовке второго издания книги по теории тяготения. Появление немецкого издания книги по теории тяготения.
- 1961** Второе издание книги «Теория пространства, времени и тяготения». В.А.Фок подразделяет кафедру теоретической физики ЛГУ на две — кафедру квантовой механики и кафедру квантовой теории поля — и передает их своим ученикам М.Г.Веселову и Ю.В.Новожилову. В Научно-исследовательском институте физики ЛГУ образуется отдел теоретической физики, объединяющий научную деятельность обеих кафедр. В.А.Фок становится руководителем отдела теоретической физики.

1962–1966 Публикация серии статей с изложением взглядов на истолкование квантовой механики и физические принципы теории тяготения Эйнштейна. В числе работ «Дискуссия с Нильсом Бором» [100] и брошюра «Квантовая физика и строение материи» [101]. Владимир Александрович подготавливает книгу по дифракции и распространению радиоволн и публикует ее в издательстве «Pergamon Press».

1965 Второе английское издание книги по теории тяготения.

1965 Избрание иностранным членом Датского Королевского общества.

1966 Избрание почетным доктором Делийского университета. Лекции в индийских университетах. Дискуссии в Париже.

1967–1968 Публикация обзоров своих работ по квантовой задаче многих тел и методу параболического уравнения в теории дифракции. Брошюра «Теория Эйнштейна и физическая относительность», предназначенная для широкого круга физиков. Присвоение звания Героя Социалистического Труда.

1967 Избрание почетным доктором Мичиганского университета.

1969 Подготовка русского издания книги «Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн» (1970 г.).

1972 Избрание почетным доктором Лейпцигского университета.

1973 Подготовка второго издания книги «Начала квантовой механики».

Владимир Александрович Фок скончался 27 декабря 1974 г.

Могила В.А.Фока находится на сельском кладбище около Щучьего озера вблизи поселка Комарово (50 км от С.-Петербурга).

2. РАБОТЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Обобщение уравнения Шредингера и уравнение Клейна—Фока.

В своей первой работе по квантовой механике [7], которую Владимир Александрович отправил в журнал через неделю после получения журнала со статьей Шредингера, он обобщает уравнение Шредингера на случай магнитного поля и в качестве приложения выводит формулу для нормального расщепления уровней в магнитном поле. Кроме того, в этой статье Владимир Александрович находит расщепление уровней водородного атома в электрическом поле. Во второй работе [9] В.А.Фок дает релятивистское обобщение

уравнения Шредингера для частицы в электромагнитном поле, а также записывает его в общей теории относительности. О.Клейн [8] публикует свое обобщение ранее В.А.Фока, но статья В.А.Фока была сдана в печать до появления статьи Клейна. Затем, уже после статьи В.А.Фока, появляется статья Гордона с релятивистским уравнением для свободной частицы. Тем не менее во многих учебниках уравнение для частицы со спином нуль именуется не уравнением Клейна—Фока, а уравнением Клейна—Гордона. Оглядываясь назад, можно думать, что, благодаря своей новизне и нестандартному подходу, эта статья В.А.Фока [9] была трудна для восприятия физикам, имевшим узкое образование. Дело в том, что в статье [9] предлагается не только новое квантовое релятивистское уравнение для частицы, но и ряд других новинок. Эта статья отражала также активный интерес Владимира Александровича к общей теории относительности, ее возможным расширениям на многомерные пространства и к единым теориям поля. Эта работа замечательна не только получением уравнения Клейна—Фока для заряженной частицы в электромагнитном поле и в поле тяготения, но и тем, что в ней используется выход в пространство большего числа измерений $D > 4$, единообразный для классической и квантовой теорий. В этой работе впервые устанавливается закон преобразования волновой функции заряженной частицы при градиентном преобразовании.

Рассмотрим основные этапы этой работы. В.А.Фок находит пятимерную формулировку закона движения частицы как в классической, так и в квантовой физике. Он вводит пятимерное пространство с метрикой

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu - \frac{e^2}{m^2 c^4} (A_\nu dx_\nu + du)^2,$$

где A_ν — векторный потенциал, u — дополнительная координата. Метрика зависит от отношения заряда к массе e/m . В классической физике траектория заряженной частицы есть нулевая геодезическая линия $d\sigma = 0$ в таком пространстве. Функция действия S , дающая такую траекторию, имеет квадрат градиента в пятимерном пространстве, равный нулю. При этом обычная функция действия W получается из S выделением дополнительной координаты:

$$S = \frac{e}{c} u + W.$$

Важный вывод состоит в том, что уравнения в пятимерной формулировке инвариантны по отношению к преобразованиям

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad } f, \quad \Phi = \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad u = u' - f,$$

которые В.А.Фок называет градиентными [124].

Квантовые закономерности действуют в том же пространстве с метрикой, что и классические, и В.А.Фок получил квантовое волновое уравнение для частицы со спином нуль как уравнение Д'Аламбера для волновой функции ψ в пятимерном пространстве:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu}) - 2A^\nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial x_\nu} + (A_\nu A^\nu - \frac{m^2 c^4}{e^2}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 u} = 0.$$

Переходя к четырехмерному пространству и выделяя зависимость от u в волновой функции Ψ :

$$\Psi = e^{i \frac{e}{\hbar c} u} \psi,$$

где четырехмерная волновая функция ψ от u не зависит, получаем уравнение Клейна—Фока для заряженной частицы со спином нуль в искривленном пространстве. Фок устанавливает закон преобразования волновой функции ψ при градиентном преобразовании:

$$\psi' = e^{-i \frac{e f}{\hbar c}} \psi.$$

В этой работе В.А.Фока проявились характерные для него математическая мощь и физическая интуиция, позволившие угадать пятимерную формулировку как соответствующую физической задаче.

Эти две статьи сделали имя Фока известным миру теоретической физики. Он получил стипендию Рокфеллеровского фонда для стажировки в Геттингене и Париже. В Геттингене Владимир Александрович работал с Максом Борном. Борн предложил «адиабатический принцип» в квантовой механике. В их совместной работе [72] адиабатическая теорема была доказана.

Теория излучения Дирака и представление Фока. В 1926 г. Дирак опубликовал замечательную работу [17] «Квантовая теория излучения и поглощения света». Для изучения переходов между энергетическими уровнями и изменения чисел заполнения Дирак предлагает рассматривать число систем n_s в состоянии s и фазу Θ_s как канонические переменные.

В пространстве этих переменных Дирак устанавливает уравнение для волновых функций как функций от числа n_s и времени. В.А.Фок в работе [18], 1928 г., «Обобщение и решение статистического уравнения Дирака» называет это пространство пространством Дирака и переформулирует теорию Дирака в комплексном гильбертовом пространстве, свойственном квантовой теории, и затем решает уравнение Дирака в общем виде. В.А.Фок показывает, что для формулировки теории в гильбертовом пространстве необходим иной выбор канонических координат Q и импульса P , а именно

$$Q_r = \bar{y}_r, \quad P_r = \frac{\hbar}{i} y_r,$$

$$Q_r = y_r, \quad P_r = -\frac{\hbar}{i} \bar{y}_r,$$

где операторы рождения y и поглощения $\bar{y}$ связаны с дираковскими переменными n_s и Θ_s каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{\frac{i}{\hbar} \Theta_s} = e^{\frac{i}{\hbar} \Theta_s} \sqrt{n_s + 1}, \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{-\frac{i}{\hbar} \Theta_s} = e^{-\frac{i}{\hbar} \Theta_s} \sqrt{n_s}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s + 1}, \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s}. \end{aligned}$$

Таким образом, В.А.Фок предлагает работать либо в представлении, где оператор рождения есть оператор умножения на вспомогательную функцию y_r , а оператор поглощения означает изменение знака и дифференцирование по y_r :

$$y_r \rightarrow y_r; \quad \bar{y}_r \rightarrow -\frac{\partial}{\partial y_r},$$

либо в представлении, где оператор поглощения есть оператор умножения на $\bar{y}_r$, а оператор рождения означает дифференцирование по $\bar{y}_r$:

$$\bar{y}_r \rightarrow \bar{y}_r; \quad y_r \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{y}_r}.$$

При этом $y\bar{y} = n$ есть оператор числа частиц, собственная функция которого имеет вид

$$f(n, z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}},$$

а разложение волновой функции в пространстве Дирака имеет вид

$$\bar{\Omega}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \psi(n_1, n_2, \dots) \frac{\bar{y}_1^{n_1} \bar{y}_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots}.$$

Коэффициенты разложения $\psi(n_1, n_2, \dots)$ есть волновые функции в пространстве Дирака. Формулы, выведенные В.А.Фоком в 1928 г., являются ныне стандартными и могут быть найдены в любом учебнике по квантовой теории. К сожалению, ссылка на Фока обычно отсутствует. В известной книге [19] Дирак называет даваемую ими картину представлением Фока.

Эта работа не была подхвачена теоретиками того времени, хотя по богатству идей она уникальна. Ее непосредственное развитие было осуществлено самим В.А.Фоком. Она оказалась предшественницей ряда известных методов. И пространство Фока, и метод функционалов Фока с родственным методом Тамма—Данкова [107, 108], и когерентные состояния [52, 53] выросли в конце концов из этой работы (см. обзор [109]).

Квантовая электродинамика и многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского. Год 1932 был очень плодотворным в творчестве В.А. Фока. В этом году вышли в свет его книги «Механика сплошных сред» и курс лекций «Начала квантовой механики», две работы по математической физике, две работы о теореме вириала, три работы по квантовой электродинамике совместно с Б.Подольским, ставшая классической работа Дирака, Фока и Подольского о многовременном формализме в квантовой электродинамике и великолепная работа по вторичному квантованию и конфигурационному пространству — пространству Фока. В.А.Фок работает интенсивно, продолжая заниматься наиболее актуальными и трудными проблемами теоретической физики. Темп развития квантовой теории в те годы продолжает быть высоким.

Квантовая теория излучения Дирака [17] и квантовая электродинамика Гейзенберга и Паули [30] содержали взаимодействие электрона с электромагнитным полем. Вопрос о происхождении кулоновского взаимодействия зарядов оставался открытым. Не были также выяснены вопросы трактовки дополнительного условия и релятивистской инвариантности теории в присутствии заряженных частиц. В начале 1932 г. Дирак опубликовал статью [31], в которой выдвинул идею, что кулоновский потенциал между частицами возникает в результате обмена скалярными квантами. Дирак пояснил свою идею на примере движения в одном измерении, получив логарифмический потенциал. В краткой заметке В.А.Фок и Б.Подольский [32] немедленно сделали расчет для трехмерного случая, ограничившись скалярным потенциалом, и получили реальное кулоновское взаимодействие.

В подробной работе «О квантовании электромагнитных волн и взаимодействии зарядов по теории Дирака» [32], посвященной систематическому изложению проблемы, В.А.Фоку и Б.Подольскому пришлось преодолевать дополнительные трудности. Во-первых, при квантовании электромагнитного поля в вакууме с помощью канонического формализма импульс, сопряженный скалярному потенциалу, равен нулю, и, во-вторых, уже в задаче о взаимодействии двух электронов с полем, взятых при одинаковых временах, утрачивается релятивистская форма теории.

Первую трудность Фок и Подольский обошли, введя в функцию Лагранжа член, фиксирующий калибровку:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi})^2.$$

При этом пространство состояний оказалось шире физического. Дополнительное условие $P_0 = 0$ на волновую функцию ψ выделяло физическое пространство состояний, в котором выполняются уравнения Максвелла. Такая трактовка условия Лоренца сохранилась и в современной теории. Цитируемая теперь работа Ферми [110] в «Rev.Mod.Phys.», 1932 г., в это время еще не была известна.

Вторая трудность была преодолена, так как они следовали замечанию Дирака о необходимости приписывать раздельное время каждому электрону и полю.

Этот цикл исследований был завершен совместной работой Дирака, Фока и Подольского. В ней новая форма релятивистской квантовой механики с фиксированным числом заряженных частиц была приведена в окончательный вид. В работе была доказана ее эквивалентность теории Гейзенберга и Паули. Главным шагом вперед было введение многовременного формализма и использование представления взаимодействия для электромагнитного поля. Волновые уравнения для общей волновой функции системы частиц и электромагнитного поля имеют вид

$$(R_s - i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s})\psi^* = 0,$$

где

$$R_s = c\bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s c^2 \beta_s + \varepsilon_s [\Phi(\mathbf{r}_s, t_s) - \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)].$$

Здесь каждая частица описывается собственным оператором Дирака R_s с электромагнитным полем, зависящим от координат и времени частицы. Уравнения электродинамики имеют вид уравнений свободного поля с собственной координатой:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A},$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0; \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0.$$

Дополнительное условие теперь зависит как от координат частиц, так и от координат поля:

$$C(\mathbf{r}, t)\psi = 0,$$

где

$$C(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta(X - X_s),$$

$\Delta(X)$ — функция Йордана—Паули:

$$\Delta(X) = \frac{1}{r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)].$$

В общей волновой функции интервалы между частицами должны быть пространственноподобными в силу условия причинности.

Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского был обобщен в 1946–1948 гг. независимо К.Томонагой [33] и Ю.Швингером [34]. В новой

обобщенной теории и электромагнетизм, и электроны с позитронами описываются квантовыми полями. В формализме Томонаги и Швингера каждой точке пространства сопоставляется свое время, а состояние задается на пространственноподобной поверхности, представляющей собой релятивистски-инвариантное обобщение трехмерного пространства в данное время. Использование представления взаимодействия как обобщения многовременного формализма является ключевым пунктом при построении теории Томонаги и Швингера. Если же число заряженных частиц остается неизменным, то многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского остается основным рабочим инструментом теоретика и в настоящее время. Его обобщение на неабелевы поля типа полей Янга—Миллса вполне тривиально.

Метод функционалов Фока. Этот метод берет начало в статье 1926 г. «Обобщение и решение дираковского статистического уравнения» [9], в которой было сформулировано представление Фока, где оператор рождения бозе-частиц есть оператор умножения на вспомогательную комплексную функцию, а оператор поглощения есть функциональная производная по этой функции. В работах В.А.Фока «О квантовой электродинамике» [49] и «Метод функционалов в квантовой электродинамике» [50] содержится систематическое изложение математического аппарата квантовой электродинамики в этом представлении, когда волновая функция представляет собой производящий функционал для амплитуд вероятностей при фиксированном числе частиц. Фактически первая из этих работ была завершена сразу же после статьи с Дираком и Подольским и доложена в ноябре того же 1932 г. на теоретическом семинаре в Ленинграде, но ее публикация задержалась. Вторая статья отличается от первой более подробным изложением идеи о производящем функционале.

В этом методе волновая функция поля представляет собой производящий функционал Ω для амплитуд вероятности состояний с определенным числом частиц:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n,$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \dots \int \psi(x_1 \dots x_n) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$\bar{b}(x)$ — вспомогательная функция. Операторы рождения и поглощения $b(k)$ и $b^+(k)$ имеют вид

$$b(k)\Omega = \frac{\delta\Omega}{\delta\bar{b}(k)}, \quad b^+(k)\Omega = \bar{b}(k)\Omega.$$

Скалярное произведение двух функционалов Ω и Ω' может быть определено при помощи волновых функций в подпространствах с определенным

числом частиц

$$(\Omega, \Omega') = \bar{\psi}_0 \psi'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \bar{\psi}(x_1 \dots x_n) \psi'(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

условие ортогональности есть

$$(\Omega, \Omega') = 0.$$

Заряженные частицы трактуются в духе многовременного формализма с условием Лоренца, рассматриваемым в качестве дополнительного условия на функционал, которое имеет вид системы двух уравнений первого порядка в функциональных производных. В.А.Фок находит решение этой системы с помощью неунитарного преобразования функционала

$$\Psi = e^{\chi \Omega(\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}))}.$$

Неунитарное преобразование уравнений приводит к исключению продольной и скалярной компонент и появлению кулоновского взаимодействия.

Уравнение Дирака в гравитационном поле. П.А.М.Дирак предложил [20] в 1928 г. релятивистски-инвариантное уравнение для электрона в плоском пространстве, включив тем самым электроны в квантово-механическое описание. Однако успех не был бы настоящим, если бы уравнение Дирака нельзя было обобщить на случай внешнего гравитационного поля, т.е. записать в пространстве Римана. Такое обобщение было найдено в 1929 г. В.А.Фоком [22] в работе «Геометризация дираковской теории электрона».

Обобщение на геометрию Римана должно отвечать двум требованиям. Во-первых, как и любое уравнение в общей теории относительности, уравнение для электрона должно быть ковариантно относительно произвольных преобразований координат. Во-вторых, группа Лоренца, по спинорному представлению которой преобразуется волновая функция электрона, должна относиться только к локальной системе координат, заданной в каждой точке пространства-времени. Релятивистской инвариантности уравнения Дирака в плоском пространстве должна соответствовать инвариантность относительно локальных преобразований Лоренца в пространстве Римана.

Локальное преобразование Лоренца задается в локальной прямоугольной системе осей, описываемых тетрадой $h_\mu^a(x)$, причем направления осей совпадают с направлениями касательных к четырем ортогональным семействам кривых $a = 1, \dots, 4$, проходящих через точку x . Таким образом, компонента тетрады имеет два индекса, один из которых (греческий) относится к системе координат, а другой (латинский) — к локальной лоренцевской (тетрадной) системе. Метрика в тетрадной системе есть

$$g^{\mu\nu} h_\mu^a h_\nu^b = \eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = (1, -1, -1, -1)$$

и связана с метрикой $g_{\mu\nu}$ пространства Римана соотношением

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b.$$

При локальном лоренцевском преобразовании $\Lambda_a^b(x)$ каждая μ -компонента преобразуется независимо:

$$h_a^\mu(x) = \Lambda_a^b(x) h_b^\mu(x), \quad \Lambda_a^b \Lambda_{a'}^{b'} \eta_{bb'} = \eta_{aa'}.$$

Вектор может быть задан своими компонентами $A_\mu(x)$ как в системе координат x , так и в локальной системе A'_a . Очевидно, что $A_\mu = h_\mu^a A'_a$. При параллельном переносе изменение координатных компонент вектора A_μ выражается через скобки Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, которые зависят только от метрики в пространстве Римана $g_{\sigma\rho}$:

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda dx^\nu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}.$$

Соответствующее изменение тетрадных компонент есть

$$\delta A'_a = \gamma_{abc} A'^b ds^c, \quad ds^c = h_\mu^c dx^\mu,$$

где ds^c — тетрадные компоненты бесконечно малого сдвига dx^μ , а γ_{abc} — коэффициенты вращения Риччи. Спинор ψ характеризуется своими трансформационными свойствами при лоренцевских преобразованиях, и поэтому может быть определен только в локальной лоренцевской системе. Матрицы Дирака γ_a в локальной системе постоянны и имеют тот же вид, что и в плоском пространстве:

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}.$$

Зависящие от x матрицы γ_μ имеют вид $\gamma_\mu(x) = h_\mu^a \gamma_a$.

Приращение спинора ψ при параллельном переносе с тетрадными компонентами ds^a есть

$$\delta\psi = C_a ds^a \psi,$$

где 4×4 -матрицы C_a должны быть найдены из требования, чтобы билинейные комбинации $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ имели обычный смысл компонент вектора и инвариантов в координатной системе. Для комплексного спинора это требование выполняется, если матрицы C_a имеют вид

$$C_a = \frac{1}{4} \gamma^b \gamma^c \gamma_{bac} + i\Phi_a,$$

т.е., кроме спинорной части, содержат также электромагнитный потенциал Φ_a . Иначе говоря, ковариантная производная от спинора $D'_a \psi$ в направлении тетрадной оси a может быть записана в виде

$$D'_a \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s^a} - C_a \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s^a} = h_a^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}.$$

Следовательно, ковариантная производная от спинора по координате $D_\mu\psi$ есть

$$D_\mu\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu\psi,$$

где введено обозначение $\Gamma_\mu = h_a^\mu C_a$.

Теперь можно написать уравнение Дирака в гравитационном поле, заменяя производные от спинора в плоском пространстве на ковариантные производные:

$$\left(\frac{1}{i}\gamma^\mu D_\mu + m\right)\psi = 0.$$

В.А. Фок находит также действие и тензор энергии-импульса для спинора в гравитационном поле, обладающие необходимыми свойствами эрмитовости и инвариантности.

В отсутствие гравитационного поля, когда коэффициенты Риччи равны нулю, $\gamma_{abc} = 0$, величины Γ_μ превращаются в компоненты электромагнитного потенциала. Тем самым придается геометрический смысл включению потенциала в уравнение Дирака. Значение этого результата стали понимать значительно позже. Если применить этот подход к случаю более сложных внутренних симметрий, открытых через несколько десятков лет, то мы получим взаимодействия спинора с калибровочными полями типа полей Янга—Миллса. Такое геометрическое истолкование взаимодействия может оказаться ключом к теориям будущего.

Как пишет В.А.Фок в 1929 г. [22]: «Включение в формулу для параллельного переноса 4-потенциала наряду с коэффициентами Риччи, с одной стороны, приводит к простому геометрическому обоснованию появления в волновом уравнении выражения $p_\mu - (\frac{e}{c})\Phi_\mu$, а с другой стороны, показывает, что здесь в отличие от эйнштейновского подхода потенциалы Φ_μ играют самостоятельную роль в геометрической картине мира и не обязаны быть функциями коэффициентов γ_{abc} ».

Пространство Фока [37]. Это одна из наиболее известных работ В.А.Фока. Ее известность сразу после опубликования была вызвана не только тем, что в ней было дано первое ясное и последовательное изложение метода вторичного квантования Дирака [17], Йордана, Клейна и Вигнера [35, 36] в связи с квантовой механикой системы частиц в конфигурационном пространстве, но и тем, что до появления этой работы предполагалось, что метод вторичного квантования выходит за рамки квантовой механики.

Эта классическая статья может служить и сейчас основным пособием для изучающих вторичное квантование. Пространство состояний с неопределенным числом частиц, введенное в статье, получило название пространства Фока. Задачи с переменным числом частиц встречаются во всех областях квантовой физики — как в нерелятивистской, так и в релятивистской теории, как в случае электромагнитного поля или гравитации, так и в случае

массивных частиц и псевдочастиц; столь же универсально понятие пространства Фока. Работа представляет собой прекрасный образец математического видения физической проблемы. Результат был подготовлен предыдущими работами В.А.Фока, а именно созданием представления Фока [9] и метода Хартри—Фока [25].

В.А.Фок предлагает представить волновую функцию системы с неопределенным числом частиц в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \end{pmatrix},$$

где каждая строка относится к состоянию с определенным числом частиц: верхняя строка относится к вакууму, вторая строка — к состоянию с одной частицей и т.д. Все переменные частицы обозначены символически посредством x . Многочастичные функции симметричны в случае статистики Бозе и антисимметричны в случае статистики Ферми—Дирака. Операторы рождения и поглощения сдвигают столбец вниз и вверх на единицу; вакуум уничтожается оператором поглощения:

$$\Psi(x) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \sqrt{2}\psi(x, x_1) \\ \sqrt{3}\psi(x, x_1, x_2) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Пространство состояний, построенное на столбцах Фока, называется пространством Фока. Именно в этом пространстве развивается динамика систем, в которых взаимодействие может изменять число частиц.

Из соотношений, которые используются ежедневно, но происхождение которых забыто, в этой работе изменение волновой функции во времени впервые представлено при помощи унитарного оператора:

$$\psi(\bullet, t) = S(t)\psi(\bullet, 0),$$

где точкой обозначены переменные системы, и, соответственно, дано выражение через $S(t)$ для оператора Гамильтона

$$i \dot{S}(t) S^+(t) = -i S(t) \dot{S}^+(t) = \frac{1}{\hbar} H$$

и производной от шредингеровского оператора

$$\frac{dL}{dt} \psi(\bullet, t) = S(t) \dot{S}^+(t) L \psi(\bullet, t) + \frac{d}{dt} [L \psi(\bullet, t)].$$

Чтобы понять с современной точки зрения, насколько эта (ныне простая) вещь была новой, приведем пояснение В.А.Фока к этой формуле: «Результат применения оператора dL/dt к волновой функции $\psi(\bullet, t)$ в шредингеровском представлении получается путем выполнения следующих операций:

1. Применение оператора L .
2. Продолжение во времени на величину t в отрицательном направлении.
3. Дифференцирование по t .
4. Продолжение во времени на величину t в положительном направлении».

Собственное время в классической и квантовой механике [42]. Калибровка Фока. Цель работы состояла в развитии релятивистски- и калибровочно-инвариантного квазиклассического метода интегрирования уравнения Дирака с внешним полем. Во время написания работы эта проблема становилась актуальной для теории позитронов по Дираку. Внешнее электромагнитное поле искажает электронные волновые функции как для состояний с положительными энергиями, так и для дираковского «подвала». Поэтому даже в отсутствие частиц появляются индуцированные токи и заряды (виртуальные электрон-позитронные пары) в вакууме, происходит поляризация вакуума. После открытия позитрона в 1932 г. приходилось признавать и реальность вакуумной поляризации. Возникла проблема релятивистски- и калибровочно-инвариантной трактовки этого эффекта и однозначного выделения конечных выражений из результатов вычислений, содержащих бесконечности. Как показал Вайскопф [113], расходимости в проблеме вакуумной поляризации имеют логарифмический характер. Наиболее простой способ обеспечения инвариантности вычислений состоит в использовании только инвариантных величин. Для уравнения Дирака с внешним электромагнитным полем это означает четырехмерную формулировку уравнения движения без выделенной роли времени и использование потенциалов, которые определяются однозначно по калибровочно-инвариантным напряженностям поля. В своей работе [42] В.А.Фок предлагает такую формулировку. Он вводит в уравнение Дирака собственное время и находит удобное калибровочное условие для потенциала. В дальнейшем этот подход получил развитие в работах Швингера [43] и де Витта [44], и в настоящее время метод собственного времени Фока—Швингера—де Витта представляет собой основной подход к релятивистски-инвариантным вычислениям функций Грина и детерминантов в квантовой теории поля (см., например, [114]).

Изучение уравнения Дирака второго порядка с внешним электромагнитным полем В.А.Фок заменяет изучением уравнения Дирака с собственным временем. Владимир Александрович вводит собственное время в качестве дополнительной переменной наряду с четырьмя координатами, имея в виду, помимо релятивистской и калибровочной инвариантности, еще и то обстоятельство, что в пространстве нечетного числа измерений фундаментальное решение определяется единственным образом. В случае же четного числа

измерений существует бесчисленное множество фундаментальных решений; эти решения имеют логарифмическую особенность, причем коэффициент при логарифме определяется однозначно. Владимир Александрович вводит новое калибровочное условие для электромагнитных потенциалов $\mathbf{A}$ и Φ :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \mathbf{A}' - c(t - t^0)\Phi' = 0.$$

Эта калибровка предполагает отсутствие особенностей у потенциалов. В калибровке Фока потенциалы выражаются однозначно через поле. Если обозначить двумя чертами сверху усреднение между точками $(\mathbf{r}^0, t^0)$ и $(\mathbf{r}, t)$, произведенное по формуле

$$\bar{\bar{f}} = 2 \int_0^1 f[\mathbf{r}^0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)u, t^0 + (t - t^0)u] u du,$$

то потенциалы равны

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= -\frac{1}{2}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \times \bar{\bar{\mathbf{H}}}] - \frac{1}{2}c(t - t^0)\bar{\bar{\mathbf{E}}}, \\ \Phi' &= -\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)\bar{\bar{\mathbf{E}}}. \end{aligned}$$

Калибровка Фока удобна при изучении самодуальных полей и при разложении по таким полям. В квантовой теории поля в этой калибровке духи Фаддеева—Попова отщепляются [47,48].

Развивая метод собственного времени, В.А.Фок вначале показывает, что в классической механике, теории относительности обычные уравнения Лагранжа можно получить также из видоизмененного действия в пятимерном пространстве так, чтобы дополнительная координата имела смысл собственного времени. Владимир Александрович вводит собственное время в уравнение Дирака второго порядка следующим образом. Если

$$\{\mathbf{P}^2 + m^2 c^2 - \frac{T^2}{c^2} + \frac{eh}{c}(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H}) - \frac{ieh}{c}(\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E})\}\Psi = 0,$$

где T — оператор для кинетической энергии

$$T = ih \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi$$

есть уравнение Дирака второго порядка в четырехмерном пространстве, то это уравнение можно написать в виде

$$h^2 \Lambda \Psi = 0,$$

где Λ — оператор второго порядка.

Решение уравнения можно искать в виде определенного интеграла

$$\Psi = \int_C F d\tau ,$$

взятого по вспомогательной переменной τ в некоторых постоянных пределах (или по некоторому контуру в комплексной плоскости) τ .

Функция F удовлетворяет уравнению Дирака с собственным временем τ

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta F = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \tau} ,$$

а функции F и $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ связаны соотношением

$$\int_C \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = F|_C ,$$

где интеграл берется по такому контуру C , на котором $F|_C = 0$. В.А.Фок показывает, что новая переменная имеет смысл собственного времени. Решение уравнения Дирака с собственным временем представляется в квазиклассическом виде, где классическое действие S удовлетворяет классическому уравнению с собственным временем. Интегрирование по собственному времени должно быть отложено на конец вычислений. Все расходимости сводятся тогда только к расходимостям в интегралах по собственному времени, которые не зависят от калибровки и релятивистски-инвариантны по своему определению.

Симметрия атома водорода и динамические группы. Элегантная работа В.А.Фока [40] «Атом водорода и неевклидова геометрия» о симметрии водородоподобных атомов не только объяснила случайное вырождение атомных уровней, но и послужила началом как нового метода расчета атомных свойств, так и поиска так называемых динамических групп или динамической симметрии. Известно, что в сферически-симметричном поле уровни энергии электрона определяются двумя квантовыми числами — главным квантовым числом и собственным значением момента количества движения. Однако уровни энергии атома водорода зависят только от главного квантового числа. Поскольку вырождение уровней связано с симметрией задачи, то возникает вопрос: какова та дополнительная симметрия кулоновского поля, которая выделяет это поле по сравнению с другими полями сферической симметрии? Эта проблема обсуждалась теоретиками до В.А.Фока и считалась сложной. В.А.Фок решил ее простым и изящным способом, где главную роль играли физическая интуиция и математическая изобретательность.

В.А.Фок записывает уравнение Шредингера с кулоновской потенциальной энергией в пространстве импульсов

$$\frac{1}{2m} p^2 \psi(\mathbf{p}) = -\frac{Ze^2}{2\pi^2 \hbar} \int \frac{\psi(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} (d\mathbf{p}') ,$$

где оно имеет вид интегрального уравнения. Для точечного спектра средний квадратичный импульс есть

$$p_0 = \sqrt{-2mE}.$$

Далее В.А.Фок переходит в импульсном пространстве к новым прямоугольным координатам на гиперплоскости, которая представляет собой стереографическую проекцию шара в четырехмерном евклидовом пространстве

$$\xi = \frac{2p_0 p_x}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$\eta = \frac{2p_0 p_y}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\zeta = \frac{2p_0 p_z}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \cos \theta,$$

$$\chi = \frac{p_0^2 - \mathbf{p}^2}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \cos \alpha,$$

радиус которого равен единице:

$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 + \chi^2 = 1.$$

Углы α, θ и φ являются сферическими координатами на гиперсфере, причем углы являются одновременно обычными сферическими углами в трехмерном пространстве импульсов. В новых координатах уравнение Шредингера принимает вид

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int \frac{\Psi(\alpha', \theta', \varphi')}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}} d\Omega', \quad (1)$$

где

$$\lambda = \frac{Zme^2}{\hbar p_0} = \frac{Zme^2}{\hbar \sqrt{-2mE}}.$$

Функция на гиперсфере связана с волновой функцией в импульсном пространстве соотношением

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} p_0^{-3/2} (p_0^2 + \mathbf{p}^2)^2 \psi(\mathbf{p}).$$

Величина $2 \sin \frac{\omega}{2}$ есть длина хорды, соединяющей точки α, θ, φ и $\alpha', \theta', \varphi'$ на четырехмерном шаре, так что

$$4 \sin^2 \frac{\omega}{2} = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 + (\chi - \chi')^2.$$

Уравнение (1) есть интегральное уравнение для шаровых функций четырехмерного шара.

Представление уравнения Шредингера в виде (1) есть основной результат работы [40]. Оно несет много важной информации.

1. Группа инвариантности водородоподобного атома совпадает с группой четырехмерных вращений. Это объясняет независимость уровней энергии от азимутального квантового числа и вводит гипersферические функции в расчеты таких систем. Фоковская группа особо полезна, когда необходимо усреднять или суммировать внутри одного слоя с заданным значением главного квантового числа.

2. В случае непрерывного спектра водородоподобного атома аналогичная трактовка приводит к симметрии группы Лоренца на поверхности четырехмерного гиперboloида.

3. Эта группа отличается от кинематической группы тем, что ее преобразования связывают функции с различной энергией E (вращения на угол α). Такие группы получили название динамических. Поиски динамических групп составляют одно из важных направлений современной физики.

4. В.А.Фок показал, что в пространстве импульсов водородоподобных атомов имеет место неевклидова геометрия, а именно геометрия Римана с постоянной положительной кривизной в случае точечного спектра и геометрия Лобачевского с постоянной отрицательной кривизной в случае сплошного спектра.

Проблемы истолкования квантовой теории. В.А.Фок всегда уделял значительное внимание вопросам истолкования квантовой механики. Он опубликовал около 30 работ, в которых развивал копенгагенскую интерпретацию квантовой механики и полемизировал со сторонниками другого истолкования. Дискуссии о смысле квантовой механики начались одновременно с ее созданием. Толкование Бора (копенгагенская интерпретация) постепенно приобретало ясность, но оставались трудные вопросы замкнутости и непротиворечивости теории. На Сольвеевском конгрессе в 1927 г. главными оппонентами Бора были Эйнштейн и Лоренц. В 1936 г. Эйнштейн, Подольский и Розен выступили со статьей «Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?» [75], продолжив тем самым дискуссию с Бором. Дискуссии Эйнштейна с Бором имели фундаментальное значение в понимании принципиальных вопросов квантовой теории. В.А.Фок в том же 1936 г. опубликовал перевод дискуссии Эйнштейна с Бором и написал вступительную статью [76]. Это было началом его деятельности по проблемам теории познания в физике микромира. Число физиков, внесших вклад в эти вопросы, невелико и исчисляется единицами. Для этого нужно было иметь физическую интуицию и математическую мощь Фока вместе с присущими ему внутренней потребностью к логической ясности теории и неприятием стиля рецептов и заклинаний. Эта деятельность В.А.Фока оказа-

лась весьма полезной также для того, чтобы оградить квантовую механику от наскоков части философов.

Выступление противников копенгагенской интерпретации квантовой механики показывало, что трудности восприятия ими квантовых закономерностей были во многом связаны с ее недостаточной логической детализацией.

Владимир Александрович Фок восполнил пробелы, оставленные общей концепцией дополнительности Нильса Бора. Логический анализ Фока опирается на три введенных им понятия:

- понятие относительности к средствам наблюдения;
- вероятность как фундаментальное понятие, относящееся к описанию в терминах;
- понятие о потенциальной возможности.

Первое из этих понятий обобщает понятие относительности к системе отсчета. Оно необходимо, так как в основе квантового описания находится акт взаимодействия объекта с прибором, и, следовательно, с точки зрения классической физики описание микрообъекта при помощи волновой функции является «неабсолютным». В классической физике относительность к средствам наблюдения совпадает с относительностью к системе отсчета. Понятия фундаментальной вероятности и потенциальной возможности возникают как замена лапласовского детерминизма и вероятности классической физики, отражавшей неполноту знаний о феномене. «Классическая» неполнота может быть исключена уточнением условий, «неполнота» квантовой теории с точки зрения классической теории не может быть устранена, так как она присуща квантовому описанию, опирающемуся на акт взаимодействия. Квантовая теория — это теория прогнозов, в которой понятие вероятности первично. Такое описание не противоречит принципу причинности. Действительно, принцип причинности как одно из начал научного объяснения не должен отождествляться с однозначной детерминированностью классической физики. В.А.Фок пишет: «Все явления происходят в пространстве и времени (ведь не в потустороннем же мире они происходят), а что касается причинности, то предметом теории, в частности квантовой механики, как раз и является отыскание причинной связи между явлениями; кроме того, нельзя смешивать причинность с однозначной детерминированностью, которая может и не иметь место» [113].

В.А.Фок анализирует эксперимент над атомной системой, подразделяя его на два опыта: начальный (приготовительный) и конечный (проверочный). Начальный опыт включает приготовление и создание внешних условий, которые описываются классически. Начальный опыт обращен к будущему, так как волновая функция, отправляясь от данных, полученных в начальном опыте, позволяет делать прогнозы, относящиеся к проверочному опыту. Волновая функция описывает потенциальные возможности для результатов измерения

над системой. Совокупность потенциальных возможностей для проверочного опыта, вытекающих из данного начального опыта, есть характеристика состояния системы. Максимально полная характеристика называется состоянием системы. Изменение волновой функции во времени по уравнению Шредингера отображает изменение этих прогнозов. Проверочный опыт обращен в прошлое. В нем потенциальные возможности различных измерений превращаются в действительность. Волновая функция имеет физический смысл только вплоть до момента проверочного опыта. Как в начальном, так и в конечном опыте устройство и действие прибора описываются классически. Совокупность начального и проверочного опытов, повторенных много раз, дает полный, или завершенный, опыт, позволяющий сравнение с теорией. Книга В.А.Фока «Начала квантовой механики» (2 издание) содержит ясное и систематическое изложение принципа относительности к средствам наблюдения применительно к квантовой механике, вероятностного истолкования и понятия потенциальных возможностей.

3. РАБОТЫ В.А.ФОКА ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Движение конечных масс в общей теории относительности. Значительное место в своем научном творчестве В.А.Фок посвятил теории тяготения. В середине 30-х годов основной проблемой общей теории относительности была проблема вывода уравнений движения масс из уравнений Эйнштейна.

Уравнения тяготения Эйнштейна для метрики $g_{\mu\nu}$ в присутствии масс содержат тензор материи $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{g} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T_{\mu\nu},$$

где R есть инвариант тензора кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ пространства с метрикой $g_{\mu\nu}$ и γ — ньютоновская постоянная тяготения. Тензор $T_{\mu\nu}$ отличен от нуля в областях, занимаемых массами, и также зависит от метрики. Уравнения тяготения Эйнштейна ковариантны относительно произвольного преобразования координат:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \\ g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

что отражает допустимость любых координатных систем для описания явлений.

Уравнения Эйнштейна представляют собой не только уравнения поля, но и уравнения движения масс. Движение масс нельзя задать произвольным образом независимо от уравнений поля. Действительно, тензор материи содержит, в качестве неизвестных функций, составляющие метрического тензора, от которых зависят характеристики состояния и движения материи.

Этот вопрос принципиального характера был выяснен Эйнштейном и Громмером [55] и Эйнштейном [56] в 1927 г. Они рассматривали массы как особенные точки поля и показали, что движение этих точек должно вытекать из уравнений тяготения. В.А.Фок писал в 1939 г. [58]: «Несмотря на огромную важность этого результата, он является, по нашему мнению, одним из главных обоснований общей теории относительности — указанные две работы Эйнштейна прошли малозамеченными и не получили надлежащего развития». Проблема вывода закона движения масс из уравнений Эйнштейна оставалась открытой.

Эйнштейн возвратился к этой проблеме через 10 лет. Практически одновременно В.А.Фок заметил, что столь важная проблема еще не решена, и начал искать ее решение. Эйнштейн с сотрудниками (Эйнштейн, Инфельд и Гофман [57]) и В.А.Фок [58] независимо решили проблему различными методами. Эйнштейн опубликовал свою первую работу по уравнению движения масс раньше В.А.Фока — в 1938 г. В.А.Фок ознакомился с ней, ожидая опубликования своей статьи в ЖЭТФ, и написал добавление в корректуре [58].

В.А.Фок рассматривал систему масс островного типа как наиболее характерную для астрономических задач. Такая система может рассматриваться как изолированная. На больших удалениях от масс пространство-время становится евклидовым, в нем различные декартовы координаты связаны преобразованиями Лоренца. Распределение плотности в небесных телах предполагается сферически-симметричным. Предполагается также, что линейные размеры тел весьма велики по сравнению с их гравитационными радиусами, но в то же время достаточно малы по сравнению с их взаимными расстояниями. Скорости тел малы по сравнению со скоростью света. Расположение и движение планет, т.е. областей, где тензор материи отличен от нуля, определяется метрическим тензором, который, в свою очередь, определяется расположением и движением планетных масс. В.А.Фоком ставилась задача определить приближенно метрический тензор для случая, когда имеется одна или несколько масс конечной величины, и при решении этой задачи попутно получить и уравнения движения для масс как условия разрешимости уравнений Эйнштейна. Эта нелинейная задача облегчается тем, что в случае островных масс тензор материи «малочувствителен» к метрике, и можно развить метод приближений, когда в исходном приближении тензор материи таков, как если бы тяготение не воздействовало на него. При решении задачи В.А.Фок применял также «полуобратный» метод: искать для метрики $g_{\mu\nu}$ такие значения, которые, будучи подставлены в левую часть уравнений Эйнштейна, дадут для тензора материи в правой части выражения, могущие быть истолкованными физически.

В.А.Фок выбирает координатную систему так, чтобы уравнения по возможности упростились, а сама система координат на больших расстояниях

от масс переходила бы в декартову. Такому критерию удовлетворяет гармоническая система координат $g_{\mu\nu}$, подчиненная условию гармоничности

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, тензор материи определяется одновременно с метрикой из уравнений Эйнштейна и условия гармоничности. Решение представлялось в виде разложения по обратным степеням скорости света.

В статье [58], опубликованной в 1939 г., Владимир Александрович получил уравнения движения в первом, ньютоновском приближении как условие разрешимости уравнений Эйнштейна во втором приближении. Этот результат подтверждал утверждение Эйнштейна, согласно которому уравнения движения уже содержатся в его уравнениях тяготения. Фок устанавливает также связь между законом эквивалентности массы и энергии и уравнениями Эйнштейна. Владимир Александрович отмечает особое положение рассмотренного им второго приближения для метрического тензора как наивысшего приближения, в котором можно заменить обобщенный оператор Д'Аламбера евклидовым оператором Д'Аламбера. Такая замена может быть истолкована как замена реального риманова пространства на фиктивное евклидово пространство, в котором поле тяготения рассматривается в качестве внешнего. Но в высших приближениях подобная замена невозможна. Все свои вычисления В.А.Фок подробно излагает в статье [58].

В работе Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [57] проблема вывода уравнений движения рассматривалась в иной постановке, вытекающей из точки зрения Эйнштейна, согласно которой элементарные частицы суть особенные точки поля. В ней получены уравнения движения во втором приближении, а проблемы тензора материи внутри масс не существует. Вычисления авторов работы [57] настолько сложны, что в журнальной статье для них не нашлось места, и читателю предлагалось обратиться к секретарю Института в Принстоне, где хранится полная рукопись.

Второе приближение к уравнениям движения по методу Фока было получено в 1940 г. в работе Н.М.Петровой [115], аспирантки Владимира Александровича. Война задержала публикацию статьи Петровой до 1949 г., но ее результаты были использованы и приведены Владимиром Александровичем в его работе [79], 1941 г. Развитие подхода Фока к уравнениям движения содержится в работах учеников Владимира Александровича [116,117], а также в [118,119].

Фундаментальная статья В.А. Фока об уравнениях движения масс существенно оживила мировую научную активность в области теории тяготения Эйнштейна и положила начало интенсивным гравитационным исследованиям в СССР.

В дальнейшем В.А. Фок обобщает уравнения движения на случай вращающихся тел, находит приближенное решение уравнений тяготения и ис-

следует асимптотический вид решений. Особое значение он придает вопросу о существовании системы координат, определяемой однозначно с точностью до преобразования Лоренца. В.А. Фок стремится сформулировать в теории тяготения правильную математическую постановку задачи, обеспечивающую единственность решения. Он показывает, что в случае островного расположения масс гармонические координаты представляют собой привилегированную систему координат, подобно тому, как инерциальная система координат оказывается преимущественной в отсутствие тяготения. Он доказывает единственность гармонической системы, характеризуемой дифференциальными уравнениями (1) и предельными условиями. Условие гармоничности (2) называют также условием де Дондера—Фока, поскольку впервые его можно найти у де Дондера [116], а Фок исчерпывающе изучил его и указал на важнейшие применения.

Книга «Теория пространства, времени и тяготения». В предисловии к книге В.А. Фок пишет: «Результаты этих исследований привели нас к убеждению о возможности, по крайней мере для наиболее важного класса физических задач, достигнуть однозначности решения уравнений тяготения путем наложения совместных с ними дополнительных условий. Это убеждение послужило основанием для новой точки зрения на всю теорию тяготения. Поэтому возникла потребность в изложении всей теории пространства, времени и тяготения с этой, вновь выработанной, точки зрения, что и сделано в этой книге».

В.А. Фок придает большое значение ясному педагогическому изложению материала, что тем более необходимо, так как в погоне за доступностью в понимании общей теории относительности некоторые вульгаризаторы науки жертвовали научной достоверностью. Во многих популярных изложениях общей теории относительности ковариантность смешивалась с инвариантностью, возможность произвольного выбора координатной системы отождествлялась с физическим содержанием общей теории относительности, основной критерий наличия тяготения — отличие от нуля тензора кривизны четвертого ранга — упоминался лишь мимоходом.

В.А. Фок включает в книгу изложение частной теории относительности в произвольных координатах, используемых в общей теории относительности, и подчеркивает, что ковариантность относительно самого общего преобразования координат («общековариантность») есть требование к любой теории, а не только к теории тяготения. Общековариантность вместе с локальностью лагранжиана представляют собой главные принципы современной теории. Основным материалом книги В.А. Фок излагал многократно в своих лекциях на физическом факультете ЛГУ. В.А. Фок подчеркивает, что физической инвариантностью могут обладать только решения уравнений Эйнштейна, когда устранена неоднозначность в определении координат с помощью дополнительных, координатных условий, совместных с уравнениями Эйнштейна. Об-

щековариантность (или калибровочная инвариантность) есть всеобщее требование, физическая инвариантность в теории тяготения и калибровочных теориях относится к данному решению. Общековариантность есть математическое выражение принципа относительности к средствам наблюдения. Группа физической инвариантности значительно уже, чем группа общековариантности: дополнительные условия нарушают общековариантность. Общековариантность относится к разному описанию одного и того же явления, в случае физической инвариантности существуют различные базисы и «соответствующие явления». Именно симметрия решений, лежащая в основе физической инвариантности, характеризует основные черты явлений. Эти идеи В.А. Фока имеют весьма общий характер, и их применение не ограничивается только теорией тяготения и калибровочными теориями. Важность изучения симметрии решений и плодотворность ее применения в физике продемонстрирована А.М.Балдиным и А.А.Балдиным [120].

Книга «Теория пространства, времени и тяготения» основана на огромном оригинальном материале. В ней излагаются не только фундаментальные исследования В.А. Фока по общей теории относительности, но перерабатываются с единой и оригинальной точки зрения известные главы, в которых дается более совершенный вывод и новое освещение. В.А. Фок получает физическое толкование координат, рассматривая распространение фронта световой волны. Он тщательно следит за логической стройностью изложения и приводит в книге новые результаты, полученные им при собственном прорабатывании частной теории относительности. В частности, он дает новое доказательство линейности преобразования, связывающего две инерциальные системы, и исследует вопрос об астрономической аберрации на основе понятия о пространстве скоростей Лобачевского—Эйнштейна. В книге изложены исследование о функции Лагранжа для системы зарядов, описывающей релятивистское приближение, а также оригинальный вывод интегралов движения.

Книга посвящена в основном теории пространства, времени и тяготения для островного расположения масс, т.е. для изолированной системы масс типа Солнечной системы, погруженной асимптотически в плоское пространство-время. В.А. Фок полагал, что теория пространства, времени и тяготения в этом случае имеет заверченный вид, в то время как изучение космологии только начинается. Из 96 параграфов книги только в двух рассматривается иное пространство с иным распределением масс, а именно изотропное пространство, пространство Фридмана—Лобачевского, с равномерной плотностью масс.

В случае островного распределения масс и отсутствия воздействий, приходящих извне, пространство, будучи неоднородным вблизи масс, становится евклидовым асимптотически. В этом случае существует привилегированная система координат — гармоническая, переходящая на бесконечности в галилеевскую и определенная однозначно с точностью до преобразования Ло-

ренца. Это означает, что в случае островного расположения масс возможна физическая относительность: если произвести преобразование Лоренца и сопроводить его соответствующим изменением в расположении и движении масс, то метрический тензор примет свой первоначальный вид. С этой точки зрения отыскание привилегированной системы координат, отвечающей природе явления, представляет собой первый шаг к пониманию физической инвариантности, присущей этому явлению. Математически такая система должна выделяться дополнительными условиями, устраняющими неоднозначность в определении координат и совместными с уравнениями Эйнштейна. В.А. Фок пишет в заключении к книге: «Значение привилегированной системы координат заключается не только в том, что она — стандартная и позволяет сравнивать решения, полученные разными способами. Существование привилегированной системы имеет и принципиальное значение, так как отражает объективные свойства пространства». В.А. Фок не был убежден, что теория тяготения Эйнштейна применима в масштабах Вселенной, ее экстраполяцию на такие масштабы он считал рискованной. Но он писал: «Заметим только, что теория тяготения Эйнштейна является примером такой физической теории, убедительность которой основана не только на ее согласии с опытом, но и на ее внутреннем совершенстве и изяществе. В этом отношении теория Эйнштейна является непревзойденной».

Принцип относительности Птолемея—Коперника и принцип относительности Галилея. В.А. Фок уделил сравнению этих принципов значительное место, включив эту тему в свои доклады на ряде конференций и опубликовав семь статей на различных языках [121–123]. На этом примере из истории науки Владимир Александрович обучал популяризаторов науки и философов, в чем состоит различие между понятиями ковариантности и физической инвариантности и как важно четко придавать смысл употребляемым понятиям.

Как известно, Птолемей считается автором такого описания Солнечной системы, в котором неподвижным центром системы является Земля. В системе Коперника в качестве неподвижного центра выбрано Солнце, вокруг которого вращаются Земля и другие планеты. Принцип относительности Птолемея—Коперника есть признание того, что обе эти системы, как геоцентрическая система Птолемея, так и гелиоцентрическая система Коперника, могут быть использованы для описания одного и того же явления, подчеркиваем — одного и того же явления, которое, в частности, может происходить на Земле. Этот принцип служит гарантией непротиворечивости описания явления в разных системах отсчета, и уравнения, написанные в разных системах, должны удовлетворять ему. Такое свойство уравнений называют ковариантностью. Принцип имеет не физический, а логический характер.

Принцип относительности Галилея проявляется в том, что в двух инерциальных системах отсчета (например, в двух кораблях), движущихся прямоли-

нейно и равномерно друг относительно друга, все физические процессы протекают одинаковым образом, т.е. этот принцип относится к разным явлениям. Принцип относительности Галилея допускает опытную проверку. Согласно этому принципу, любому явлению внутри одного корабля можно сопоставить такое же явление внутри другого корабля. Возможность сопоставления явлений есть возможность физической адаптации явления к новым координатам, что включает ковариантность уравнений и адаптацию начальных и предельных условий, т.е. изменение физических условий. При этом следует помнить, что эти дополнительные условия не являются ковариантными. Физическая инвариантность существует, если возможна адаптация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **De Broglie L.** — Ann. d. Phys., 1925, v.3, p.22.
2. **Pauli W.** — Zs. f. Phys., 1925, v.31, p.765.
3. **Heisenberg W.** — Zs. f. Phys., 1925, v.33, p.879.
4. **Born M., Jordan P.** — Zs. f. Phys., 1925, v.34, p.858.
5. **Born M., Heisenberg W., Jordan P.** — Zs. f. Phys., 1925, v.35, p.557.
6. **Schroedinger E.** — Ann. d. Phys., 1926, v.79, p.361, 489, 734; v.80, p.437; v.81, p.109.
7. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1926, v.38, p.242.
8. **Klein O.** — Zs. f. Phys., v.37, p.895.
9. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1926, v.39, p.226.
10. **Gordon W.** — Zs. f. Phys., 1926, v.40, p.117.
11. **Kaluza Th.** — Sitzungsber. d. Preuss. Akad., 1921, p.966.
12. **Fermi E.** — Zs. f. Phys., 1926, v.36, p.902.
13. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1926, v.A112, p.661.
14. **Born M.** — Zs. f. Phys., 1926, v.37, p.863; v.38, p.803.
15. **Uhlenbeck G.E., Goudsmit S.** — Naturwiss., 1925, v.13, p.953; Nature, 1926, v.117, p.264.
16. **Heisenberg W.** — Zs. f. Phys. 1927, v.43, p.172.
17. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1926, v.114, p.243.
18. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1928, v.49, p.339 (пер. на русск. [94, с.9]).
19. **Dirac P.A.M.** — The Principles of Quantum Mechanics, 4 ed., Oxford, Clarendon Press, 1958.
20. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1928, v.117, p.610.
21. **Fock V.A., Iwanenko D.D.** — Zs. f. Phys., 1929, v.54, p.798;
a) **Fock V.A., Iwanenko D.D.** — C. R. Acad. Sci. Paris, 1929, v.188, p.1470.
22. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1929, v.57, p.261; J. Phys. Radium, 1929, v.10, p.392.
23. **Weyl H.** — Zs. f. Phys., 1929, v.56, p.330.
24. **Hartree D.R.** — Proc. Camb. Phil. Soc., 1928, v.24, p.89.
25. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1930, v.61, p.126; v.62, p.795.

26. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1933, v.81, p.195.
27. **Фок В.А., Петрашень М.И.** — ЖЭТФ, 1934, т. 4, с.295; Sow.Phys. 1934, v.6, p.368; 1935, v.8, p.359.
28. **Фок В.А., Веселов М.Г., Петрашень М.И.** — ЖЭТФ, 1940, т.10, с.383.
29. **Dirac P.A.M., Fock V.A., Podolsky B.** — Sow. Phys., 1932, v.2, p.468 (пер. на русск. [94, с.70]).
30. **Heisenberg W., Pauli W.** — Zs. f. Phys., 1929, v.56, p.1; 1930, v.59, p.168.
31. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1932, v.A136, p.453.
32. **Fock V., Podolsky B.** — Sow. Phys., 1932, v.7, p.798; v.2, p.275 (пер. на русск. [94, с.52,55]).
33. **Tomonaga K.** — Prog. Theor. Phys., 1946, v.1, p.147.
34. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1948, v.74, p.1439; 1949, v.75, p.651; v.76, p.790.
35. **Jordan P., Klein O.** — Zs. f. Phys., 1927, v.45, p.751.
36. **Jordan P., Wigner E.** — Zs. f. Phys., 1928, v.47, p.631.
37. **Fock V.A.** — Zs. f. Phys., 1932, v.75, p.622 (пер. на русск. в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с.415).
38. **Фок В.А.** — Изв. АН СССР, сер. мат. и естеств. наук, 1935, с.169.
Fock V.A. — Zs. f. Phys., 1935, v.98, p.145.
39. **Barut A.O., Bohm A.** — Phys. Rev. 1965, v.139B, p.1107.
40. **Dothan Y., Gell-Mann M., Ne'eman Y.** — Phys. Lett., 1965, v.17, p.148.
41. **Mukunda N., O'Raifeartaigh L., Sudarshan E.** — Phys. Rev. Lett. 1965, v.15, p.1041.
42. **Фок В.А.** — Изв. АН СССР, серия физ., 1937, с.551.
Fock V.A. — Sow.Phys., 1937, v.12, p.404 (пер. на русск. [94, с.141]).
43. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, v.82, p.664.
44. **De Witt B.S.** — In: Relativity, Groups and Topology, eds. De Witt B.S., New York, Gordon and Breach, 1965, p.19.
45. **Nambu Y.** — Prog. Theor. Phys. 1950, v.5, p.82.
46. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
47. **Itabashi K.** — Prog. Theor. Phys., 1981, v.65, p.1423.
48. **Mecklenburg W., Mizrachi L.** — Phys. Rev., 1983, v.D27, p.1922.
49. **Fock V.** — Sow. Phys., 1934, v.6, p.425 (пер. на русск. [94, с.88]).
50. **Фок В.А.** — Уч. зап. ЛГУ, серия физ., 1937, т.3, с.109.
51. **Новожилов Ю.В.** — ЖЭТФ, 1952, т.22, с. 431; ДАН, 1952, т. 83, с.114.
52. **Glauber R.** — Phys. Rev., 1963, v.130, p.2529; v.131, p.2766.
53. **Klauder J.R., Sudarshan E.C.G.** — Fundamentals of Quantum Optics, W.A.Benjamin, New York, Amsterdam, 1966.
54. **Новожилов Ю.В.** — ЖЭТФ, 1958, т.35, с. 316; Nucl. Phys., 1960, v.15, p.430.
55. **Einstein A., Grommer J.** — Sitzungsber. Berlin. Akad., 1927, p.2.
56. **Einstein A.** — Sitzungsber. Berlin. Akad., 1927, p.235.
57. **Einstein A., Infeld L., Hoffman B.** — Ann. of Mathem., 1938, v.39, p.65.

-
58. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1939, т.9, с. 375; **Fock V.** — J. Phys., 1939. v.1, p.81.
 59. **Фок В.А.** — Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1946.
 60. **Fock V.** — Electromagnetic diffraction and propagation problems. Internat. series of monographs on electromagn. waves. Pergamon Press. Frankfurt, 1965.
 61. **Фок В.А.** — Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
 62. **Смирнов В.И.** — В кн.: Владимир Александрович Фок. Материалы к библиографии ученых СССР, Изд. АН СССР, 1956.
 63. **Фаддеев Л.Д.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, No.177, с.37.
 64. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1924, v.28, p.102; Труды ГОИ, 1924, т.3, с.1.
 65. **Фок В.А.** — Теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа. ГТТИ, 1933.
 66. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955. Theory of Space, Time and Gravitation, London, New York, Paris, Los Angeles, Pergamon Press, 1959.
 67. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2-е, дополненное, М.: Физматгиз, 1961. The Theory of Space, Time and Gravitation, 2nd revised edition, Oxford, London, Paris, 1964.
 68. **Фок В.А.** — Начала квантовой механики. Л.: Кубуч, 1932.
 69. **Фок В.А.** — То же, изд. 2-е, дополненное, М.: Наука, 1976.
 70. **Fock V., Krutkov Ju.A.** — Zs. f. Phys., 1923, v.13, p.195.
 71. **Стожаров А.А.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, вып.177, с.57.
 72. **Born M., Fock V.** — Zs. f. Phys., 1928, v.51, p.165.
 73. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1934, т.1, с.199, с.443.
 74. **Fock V., Petrashen M.I.** — Sow. Phys., 1935, v.8, p.359, 547.
 75. **Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н.** — УФН, 1936, т.16, с.440.
 76. **Фок В.А.** — УФН, 1936, т.16, с.436.
 77. **Фок В.А.** — УФН, 1936, т.16, с.1076.
 78. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1940, т.10, с.961.
 79. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1941, т.32, с.28.
 80. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1941, т.31, с.875.
 81. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1942, т.36, с.147.
 82. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1943, т.39, с.279.
 83. **Леонтович М.А., Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1946, т.16, с.557.
 84. **Фок В.А.** — Таблицы функций Эйри. М.: Инф. отдел. НИИ, 1946.
 85. **Фок В.А., Крылов Н.С.** — ЖЭТФ, 1947, т.17, с.93.
 86. **Фриш С.Э.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, вып.117, с.763.
 87. **Крылов Н.С.** — Работы по обоснованию статистической физики. Отв. ред. В.А.Фок. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1950.
 88. **Мигдал А.Б., Фок В.А.** — В кн.: Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.-Л., Изд. АН СССР, 1950, с.5.

-
89. **Фок В.А.** — ДАН СССР, 1950, т.73, с. 735.
 90. **Фок В.А.** — Вопросы философии, 1953, с.168.
 91. **Фок В.А.** — Изв. АН СССР, серия физ., 1954, т.18, с.161.
 92. **Фок В.А.** — УФН, 1957, т.62, с.461.
 93. **Fock V.** — Rev. Mod. Phys., 1957, v.29, p.335
 94. **Фок В.А.** — Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд. ЛГУ, 1957.
 95. **Бор Н.** — УФН, 1958, т.66, с.571.
 96. **Бор Н.** — Квантовая физика и философия. Избранные труды, т.2., М.: Наука, 1971, с.526.
 97. **Фок В.А.** — УФН, 1958, т.66, с.599.
 98. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.108.
 99. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.1476.
 100. **Фок В.А.** — Вопросы философии, 1964, вып.8, с.49.
 101. **Фок В.А.** — Квантовая физика и строение материи. Л.: Изд. ЛГУ, 1965.
 102. **Веселов М.Г.** — Труды ГОИ, 1978, т.43, вып.177, с.29.
 103. **Фок В.А.** — Труды ГОИ, 1926, 4, с.1.
 104. **Fock V.** — Arch. f. Elektrotechn., 1926, v.16, p.331.
 105. **Фок В.А.** — ЖРФХО, 1926, т.58, с.11.
 106. **Фок В.А.** — ЖРФХО, 1926, т.58, с.355.
 107. **Tamm I.E.** — J. Phys., 1945, v.9, p.449.
 108. **Dancoff S.** — Phys. Rev., 1951, v.78, p.382.
 109. **Novozhilov Yu.V., Tulub A.V.** — Method of Functionals. Gordon and Breach, New York, 1961.
 110. **Fermi E.** — Rev. Mod. Phys., 1932, v.4, p.87.
 111. **Franke V.A., Novozhilov Yu.V., Prokhvatilov E.V.** — Lett. Math. Phys., 1981, v.5, p.437.
 112. **Novozhilov Yu.V.** — Lett. Math. Phys., 1984, v.8, p.247.
 113. **Weisskopf V.** — Zs. f. Phys., 1934, v.89, p.27; v.90, p.817.
 114. **Ball R.** — Phys. Rep., 1989, v.182, p.1.
 115. **Петрова Н.М.** — ЖЭТФ, 1949, т.19, с.989.
 116. **Фихтенгольц И.Г.** — ЖЭТФ, 1950, т.20, с.233.
 117. **Кашкаров В.П.** — ЖЭТФ, 1954, т.27, с.563.
 118. **Papapetrou A.** — Proc. Phys. Soc. 1951, v.A64, p.57.
 119. **Meister H.** — Ann. d. Phys., 1957, v.19, p.268.
 120. **Балдин А.М., Балдин А.А.** — Краткие сообщения ОИЯИ, 17-86, Дубна, 1986, с.19; ЭЧАЯ, 1998, т.29, с.575.
 121. **Фок В.А.** — Система Коперника и система Птолемея в свете общей теории относительности. Сборник «Николай Коперник», Изд. АН СССР, 1947.
 122. **Фок В.А.** — Теория Эйнштейна и физическая относительность. М.: Знание, 1967.
 123. **Fock V.** — Ann. Inst. Henri Poincare, 1966, v.5, p.205.
 124. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1929, v.57, p.261-277.

В.А.ФОК — СУДЬБА НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТИЙ

Л.В. Прохоров

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

Дан обзор некоторых открытий, сделанных В.А.Фоком в 1926—1937 гг. и играющих важную роль в современной физике. Обсуждаются как незаслуженно забытые работы (тождества Фока—Фирца, квантование магнитного потока, теория Калуцы—Клейна—Фока), так и не вполне корректно цитируемые (уравнение Клейна—Фока—Гордона, калибровка Фока). Показана связь метода пятого параметра Фока (метод собственного времени) с современной теорией струн и мембран.

A review of some papers by V.A.Fock published in 1926—1937 and playing an important role in modern physics is given. The papers both unjustly forgotten (the Fock—Fierz identities, quantization of magnetic flow, the Kaluza—Klein—Fock theory), and not quite correctly cited (Klein—Fock—Gordon equation, the Fock gauge) are discussed. Connection between the Fock 5th parameter method (the proper time method) and the modern theory of strings and membranes is elucidated.

Открытия, как и люди, имеют свои судьбы: счастливые, драматические, курьезные. И это не зависит от научного авторитета их авторов. Несколько важных фактов, обнаруженных Владимиром Александровичем Фок в 1926—1937 годах, служат тому примером.

1. ТОЖДЕСТВА ФОКА—ФИРЦА

В работе [1] В.А.Фок ввел понятие параллельного переноса спинора в римановом пространстве и обобщил уравнение Дирака на случай общей теории относительности. Определив (в современных обозначениях) вектор, скаляр и псевдоскаляр:

$$\bar{V}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \bar{S} = \bar{\psi}\psi, \quad \bar{P} = \bar{\psi}\gamma_5\psi, \quad (1.1)$$

В.А.Фок отметил наличие тождества

$$\bar{V}_\mu^2 + \bar{P}^2 = \bar{S}^2. \quad (1.2)$$

В дальнейшем к этому тождеству не обращались, оно было забыто. Между тем, соотношение (1.2) есть частный случай тождеств Фирца, играющих важную роль в современной физике. В 1937 г. М.Фирц, будучи аспирантом

В.Паули, опубликовал работу [3], в которой установил существование носящих его имя тождеств:

$$(\bar{\psi}_a O_n \psi_b)(\bar{\psi}_c O_n \psi_d) = \frac{1}{4} \sum_k C_{nk} (\bar{\psi}_a O_k \psi_d)(\bar{\psi}_c O_k \psi_b), \quad (1.3)$$

где $\psi_a, \dots, \psi_d$ — спиноры Дирака полей $a, \dots, d$; O_k образуют полный набор матриц Дирака: $1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5$, дающих в спинорных обкладках соответственно скаляр, вектор, антисимметричный тензор, псевдовектор и псевдоскаляр. Используется стандартное представление матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (1.4)$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ^i — три матрицы Паули. Численные коэффициенты C_{nk} приведены в таблице.

Таблица

	S^T	V^T	T^T	A^T	P^T
S	1	1	-1	-1	1
V	4	-2	0	-2	-4
T	-6	0	-2	0	-6
A	-4	-2	0	-2	4
P	1	-1	-1	1	1

Левые части (1.3) обозначены в таблице через S, V, T, A, P , а правые (с переставленными спинорами ψ_b и ψ_d) — через S^T, V^T и т.д. Приведенная таблица отличается от таковой работы [3] лишь знаками в некоторых клетках, что связано с выбором конкретного вида матриц Дирака. Тождества (1.3) достаточно часто используются в современной физике (в частности, в моделях «Великого объединения» с техницветом [4]). Из (1.3) и таблицы находим

$$V - A = 2(S^T - P^T), \quad V + A = -V^T - A^T \quad (1.5)$$

и, полагая $\psi_a = \dots = \psi_d$ (теперь $V = \bar{V}_\mu^2 = V^T$, $S = \bar{S}^2 = S^T$ и т.д.), получаем $\bar{V}_\mu^2 = -\bar{A}_\mu^2$ и $\bar{V}_\mu^2 + \bar{P}^2 = \bar{S}^2$. Последнее тождество идентично тождеству (1.2). Таким образом, В.А.Фок был первым, кто обнаружил наличие тождественных соотношений между произведениями четырех спиноров.

Следует отметить, что тождества (1.3) тривиально следуют из тождества Паули

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma_{\alpha\beta}^A \gamma_{\rho\sigma}^A = 4\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}, \quad (1.6)$$

на которое Фирц опирался. В работе [3] нет ссылки на статью Фока [1].

2. КВАНТ МАГНИТНОГО ПОТОКА ЙОРДАНА—ФОКА

В небольшой, но содержательной работе [5] впервые был корректно определен квант магнитного потока Φ_0 . Работа замечательна своей простотой и ясностью изложения.

Идея такова. Из уравнения движения частицы с зарядом e и массой m в магнитном поле $\mathbf{H}$ ($c = 1$)

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e[\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{H}]$$

вытекает следующее равенство:

$$\frac{mv^2}{R} = evH_z. \quad (2.1)$$

Здесь R — радиус окружности, по которой движется частица, ее скорость $\mathbf{v}$ касательна к окружности; предполагается, что магнитное поле направлено по оси z . Из соотношения $eH_z = mv/R$ имеем для неопределенности магнитного поля $\Delta H_z = \Delta p_y/(eR)$. Полагая, что $R \sim \Delta x$ (неопределенность x -координаты), и учитывая соотношение неопределенностей $\Delta p_y \Delta y \geq \hbar$, приходим к неравенству

$$\Delta H_z \geq \frac{\hbar}{e\Delta x\Delta y}. \quad (2.2)$$

Этот случай именуется в [5] движением по окружности малого радиуса ($R \approx \Delta x$). Там же разобран случай «большого» радиуса окружности, $R \gg \Delta x$ (разумеется, с тем же результатом). Авторы отмечают, что магнитный поток

$$\Phi = \int \mathbf{H} d\mathbf{S} \quad (2.3)$$

не может быть определен с точностью, превосходящей $\hbar/e$:

$$\Delta\Phi \geq \frac{\hbar}{e} \quad (2.4)$$

(в гауссовских единицах). Как известно, квант магнитного потока в сверхпроводниках второго рода равен $\hbar/e^*$, где e^* — заряд носителей сверхпроводящего тока ($e^* = 2e$) [6]. В.А.Фок понимал важность этого результата и при случае о нем упоминал. Между тем, работа [5] была предана забвению и в связи с квантованием магнитного потока не упоминается.

Отметим, что в [5] было получено соответствующее неравенство и для напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Оба неравенства можно объединить в одной формуле:

$$\Delta F_{\mu\nu} \geq \frac{\hbar}{e\Delta x^\mu \Delta x^\nu}, \quad \mu \neq \nu, \quad (2.5)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля.

Отметим также, что квант магнитного потока определяет заряд магнитного монополя g , т.е. из (2.4) следует $eg \geq \hbar$. Позднее П.А.М.Дирак [7,8] получил общее условие для электрических и магнитных зарядов ($eg = \hbar n/2$, $n = 1, 2, \dots$), а Ю.Швингер (см. статью в сб. [8]) из требования релятивистской инвариантности пришел к условию $eg = \hbar n$.

3. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА—КЛЕЙНА—ФОКА—ГОРДОНА—...

Как известно [9], Э.Шредингер первоначально написал релятивистское волновое уравнение («уравнение Клейна—Гордона» с кулоновским потенциалом). Оно было им забраковано, так как не воспроизводило тонкую структуру спектра атома водорода. После публикации [10], в которой было дано стандартное (нерелятивистское) уравнение Шредингера, появились работы, посвященные его релятивистскому обобщению [11–14]. Уравнения (в современных обозначениях) фигурировали в разных формах:

$$(\square - m^2)\psi = 0, \quad \square = -\partial_t^2 + \Delta, \quad (3.1)$$

$$[-(\partial_t + ieA_0)^2 + \Delta - m^2]\psi = 0, \quad (3.2)$$

$$[-(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 - m^2]\psi = 0 \quad (3.3)$$

или в виде вытекающих отсюда стационарных уравнений ($\partial_t \rightarrow -iE$; здесь $\hbar = c = 1$). В свое время уравнение (3.1) не получило признания, поскольку оно содержит вторую производную по времени, и приходится задавать начальное значение не только волновой функции, но и ее первой производной по времени $\dot{\psi}$. От $\dot{\psi}$ зависит и плотность вероятности ($w \sim i(\varphi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \varphi)$), вследствие чего последняя может оказаться отрицательной в некоторых областях пространства. Позднее уравнение (3.1) было интерпретировано как уравнение для свободного бозонного поля с массой m [15]. Отметим, что в современной физике при описании процессов рассеяния релятивистских частиц (3.1) используется и как уравнение для волновых функций массивных или безмассовых ($m = 0$) частиц с целыми спинами (например, пионов, фотонов и т.д.). Уравнение (3.1) имеет такой же фундаментальный характер, как и уравнение Дирака.

Хронология получения редакциями и выхода в свет статей [11–14] в 1926 г. такова (соответственно, первая и вторая даты — день, месяц)

О.Клейн [11]	28.04	10.07
В.Фок [12]	11.06	28.07
В.Фок [13]	30.07	02.10
В.Гордон [14]	29.09	29.11.

Нужно отметить, что в [12] не только выписано уравнение, но и найдены решения для движения частицы в кулоновском поле (установлено наличие тонкой структуры спектра), а также в постоянных магнитном и электрическом полях (эффекты Зеемана и Штарка).

История уравнений (3.1)–(3.3) изложена в [9]. Шредингер получил релятивистское уравнение в середине декабря 1925 г. «На рубеже 1925/26 г. он направил в редакцию «Annalen der Physik» рукопись, в которой ... приводилось релятивистское волновое уравнение. ... Однако всего через несколько дней Шредингер забрал рукопись из редакции» ([16], с.43). В основной работе [10] он лишь упомянул об этом уравнении. Только в работе [17], датированной 21 июня*, Шредингер опубликовал релятивистское волновое уравнение для массивной заряженной частицы в электромагнитном поле. Стационарное уравнение, отвечающее (3.1), писал Л. де Бройль [18] (февраль 1925 г.). Но там речь шла об электромагнитной волновой функции, ассоциированной с электроном (т.е. не имелась в виду волновая функция электрона). В июле 1926 г. [19] де Бройль опубликовал корректное релятивистское уравнение для частицы в электромагнитном поле. Тогда же П.А.М.Дирак [20] (29 апреля) написал оператор уравнения (3.3), а в [21] (26 августа) уравнение (3.1) было выписано в явном виде.

Таким образом, именно в работе Клейна [11] впервые было опубликовано релятивистское волновое уравнение для частиц с целым спином. Однако цель работы [11] была другая — построение 5-мерной теории гравитационного и электромагнитного полей (подробнее см. [9]).

В дальнейшем появился целый ряд работ, в которых фигурировало обсуждаемое уравнение [22–25]. Отметим, что в [23] (5 июня) уравнение не связывалось явным образом с квантовой теорией. Это было сделано только в [24] (октябрь). В последующем данное уравнение публиковалось даже в журналах за 1927 г. (см. [9]).

Из авторов неопубликованных работ упомянем В.Паули, который рассматривал релятивистское волновое уравнение весной 1926 г. (оно воспроизводится в письме В.Гейзенберга Дираку от 26 мая [26], цитируется по [9]). Однако Паули от него отказался. В письме к Г.Вентцелю ([27], с.333) он писал, что «... полностью потерял веру в дифференциальное уравнение» (3.2) (в стационарном варианте).

Заключаем: уравнение (3.1) и его обобщения были получены многими авторами. Но называть его уравнением Клейна—Гордона, опуская имя Фока, — нонсенс.

*Здесь и далее указаны даты поступления работ в редакции.

4. ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА—ФОКА. КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП

Главным в работе [13], цитируемой обычно в связи с уравнением Клейна—Фока—Гордона, было не это уравнение (написанное, кстати, и в общеквариантном виде). Главным было объединение гравитационного и электромагнитного полей в рамках 5-мерного пространства-времени. Аннотация работы [13] гласит: «Волновое уравнение Шредингера представлено как инвариантное уравнение Лапласа, а уравнения движения — как геодезические в пятимерном пространстве. Лишний пятый координатный параметр находится в тесной связи с линейной дифференциальной формой электромагнитного потенциала». В первой же строке В.А.Фок ссылается на еще не опубликованную работу петербургского физика Генриха Манделя* и благодарит последнего за предоставленную возможность ознакомиться с рукописью работы. В.А.Фок также отмечает в сноске, что идея работы возникла в разговоре с профессором В.Фридериксом. Наконец, в примечании при корректуре говорится следующее: «В то время, как эта заметка была в печати, в Ленинграде была получена прекрасная работа Оскара Клейна» [11], «в которой автор пришел к результатам, в главном совпадающим с таковыми данной заметки. Однако, ввиду важности результатов, их вывод другим путем (обобщение анзаца, использованного в моей более ранней работе) может представлять интерес». Важность этих идей стала ясной только в последние десятилетия, отчасти в связи с программой суперструн, базирующейся на идеях многомерия.

Имя В.А.Фока (равно как и Г.Манделя) в связи с объединением гравитации и электромагнетизма обычно не упоминается. Между тем, А.Эйнштейн в письме к Г.Лоренцу (от 16 февраля 1927 г.) писал ([29], с.318): «Кажется, что гравитацию и теорию Максвелла удалось объединить вполне удовлетворительным образом в рамках пятимерной теории (Калуцы—Клейна—Фока)». Такое крещение представляется достаточно убедительным: теория должна называться «теорией Калуцы—Клейна—Фока» (или «теорией Калуцы—Клейна—Манделя—Фока»). Столетие со дня рождения В.А.Фока — хороший повод для восстановления исторической справедливости.

Работа [13] содержала еще одну фундаментальную идею — принцип калибровочной инвариантности. Важность этого принципа выяснилась только в наши дни: все известные взаимодействия (гравитационное, электрослабое, сильное) обладают свойством калибровочной инвариантности. Этот принцип лежит и в основе теории суперструн. Сам термин «калибровочная инвариантность» восходит к работе [30], в которой была сделана попытка

*Она напечатана в том же томе [28].

геометризации электромагнитного поля. Г.Вейль предполагал, что при параллельном переносе вектора в искривленном пространстве может меняться не только его направление, но и длина. Предполагалось также, что изменение длины вектора определяется некоторым векторным полем $A_\mu(x)$. Пусть $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ — квадрат интервала, $A = A_\mu(x)dx^\mu$ — 1-форма. Постулировалось, что при инфинитезимальном параллельном переносе

$$d(ds^2) = -A(ds^2). \quad (4.1)$$

Тогда при переносе на конечное расстояние из точки 1 в точку 2 вдоль пути $C(12)$ квадрат интервала меняется следующим образом:

$$(ds^2)_2 = \exp \left(- \int_{C(12)} A_\mu dx^\mu \right) (ds^2)_1. \quad (4.2)$$

Поле A_μ отождествлялось с вектором-потенциалом электромагнитного поля. Если $dA = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \neq 0$, то изменение длины интервала зависит от пути и имеющегося электромагнитного поля. Преобразование

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f(x), \quad (4.3)$$

где f — произвольная функция, исчезающая на бесконечности, влечет изменение интервала

$$ds^2 \rightarrow e^{-f} ds^2, \quad (4.4)$$

в связи с чем оно и стало именоваться «калибровочным». Если $dA = 0$ (электромагнитное поле отсутствует, $A = df$), то

$$(ds^2)_2 = \exp [f(1) - f(2)] (ds^2)_1. \quad (4.5)$$

Г.Вейль постулировал инвариантность физических процессов относительно общеквариантных преобразований и преобразований (4.3). Формулы (4.4), (4.5) означают, что в теории, задаваемой условиями (4.1), (4.2), понятие интервала (длины) теряет смысл.

Впервые корректное калибровочное преобразование сформулировал В.А.Фок [13]:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f(x), \quad \psi(x) \rightarrow \exp \left(\frac{ie}{\hbar} f(x) \right) \psi(x), \quad (4.6)$$

где ψ — волновая функция, f — произвольная функция, e — электрический заряд. Именно в такой форме эти преобразования вошли в физику (см., например, [31]), но без ссылок на Фока. После появления работы [13] их стали называть также *градиентными* (см. [32, с.91]; Фок говорил о добавлении к A_μ «градиентов»). Прилагательное «калибровочное», очевидно, оказалось лишенным смысла. Преобразования типа (4.4) (т.е. преобразования $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-f} g_{\mu\nu}$) именуются ныне *вейлевскими*.

5. МЕТОД ПЯТОГО ПАРАМЕТРА ФОКА (МЕТОД «СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ»)

Одиннадцатью годами позже В.А.Фок вернулся к идее пятого параметра ([33,34], с.141). Интерес к пятимерной теории уже значительно уменьшился, но Фок сумел взглянуть на проблему с новой точки зрения. Он применил трактовку, оказавшуюся, как теперь стало ясно, не менее плодотворной, чем идея 5-мерного псевдориманова пространства.

Изучая движение классической заряженной частицы со стандартным лагранжианом

$$L^0 = -m\sqrt{1 - (d\mathbf{x}/dt)^2} dt + eA_\mu \frac{dx^\mu}{dt}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad x^0 = t, \quad (5.1)$$

В.А.Фок отмечает, что попытка перейти к явно релятивистски-инвариантному описанию с привлечением собственного времени:

$$\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - (d\mathbf{x}/dt)^2} dt, \quad (5.2)$$

наталкивается на очевидное затруднение: задаваемый (5.2) параметр не есть независимая переменная (он зависит от пути частицы). Предлагается воспользоваться другим лагранжианом:

$$\tilde{L} = -\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 1) + eA_\mu \dot{x}^\mu, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(+---), \quad (5.3)$$

где τ — независимый инвариантный параметр. Лагранжиан (5.3) допускает интеграл движения $\dot{x}^2 = \text{const}$. Если положить $\dot{x}^2 = 1$, то параметр τ совпадает с собственным временем релятивистской частицы (5.2). При этом классические уравнения движения обоих лагранжианов также совпадают.

С современной точки зрения существо дела в следующем. Действие

$$S^0 = \int L^0 dt = \int L^0 \frac{dt}{d\tau} d\tau = -m \int (\sqrt{\dot{x}^2} - \frac{e}{m} A_\mu \dot{x}^\mu) d\tau \equiv \int L d\tau \quad (5.4)$$

инвариантно относительно репараметризации $\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau)$. Это есть локальное калибровочное преобразование, поэтому решения уравнений движения содержат произвол. Лагранжиан (5.1) отвечает выбору калибровки $\tau = t$, что и ведет к потере явной релятивистской инвариантности.

Лагранжиан (5.3) уже не обладает калибровочной инвариантностью, т.е. переход к нему можно рассматривать как способ фиксации калибровки. Выбирается динамическая калибровка [35], поскольку нефизическая степень

свободы подчиняется теперь уравнению движения второго порядка по времени. Таким образом, совершаются следующие шаги:

- 1) фиксируется калибровка (переход $L \rightarrow \tilde{L}$);
- 2) требуется выполнение связей (условие $\dot{x}^2 = 1$).

Все это выглядит очень профессионально с современной точки зрения, начало формированию которой положили работы П.Г.Бергмана и П.А.М.Дирака [36,37], выполненные двумя десятилетиями позже (см. также [38]). В различных вариациях и в применении к различным задачам эта идея используется вплоть до настоящего времени.

5.1. Релятивистская частица. Действие, отвечающее лагранжиану (5.3) при $A_\mu = 0$, записывается в виде

$$S^* = -\frac{1}{2} \int d\tau e(\tau) [e^{-2}(\tau) \dot{x}^2 + m^2] \equiv \int d\tau \tilde{L}(\dot{x}, e), \quad (5.5)$$

где $e(\tau)$ — «одномерная тетрада» (einbein). Варьирование S^* по e и x^μ дает уравнения движения свободной частицы (первое из них — лагранжевская связь):

$$\frac{\delta S^*}{\delta e} = \frac{1}{2}(e^{-2}\dot{x}^2 - m^2) = 0, \quad \frac{\delta S^*}{\delta x^\mu} = \frac{d}{d\tau}(e^{-1}\dot{x}_\mu) = 0. \quad (5.6)$$

При $\tau = t$ они совпадают с таковыми, вытекающими из лагранжиана (5.1) (при $A_\mu = 0$).

5.2. Струна. Действие для струны Намбу—Гото получается из действия для релятивистской частицы «размазыванием» массы по некоторой линии [39]:

$$S_{NG} = -\gamma \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad x' = \frac{dx}{d\sigma}, \quad (5.7)$$

где σ параметризует точки струны, $\gamma = \text{const}$ (размерность: $[\gamma] = M^2$). Действие (5.7) инвариантно относительно репараметризации $\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau, \sigma)$, $\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma'(\tau, \sigma)$, т.е. оно калибровочно-инвариантно. Действие

$$S_P = -\frac{c}{2} \int d^2u \sqrt{|g|} g^{ij} X_{,i}^\mu X_{,j}^\mu \quad (u_1 = \tau, u_2 = \sigma), \quad (5.8)$$

предложено А.Поляковым [40], аналогично действию (5.5). Варьирование производится по g^{ij} и X^μ :

$$\frac{\delta S_P}{\delta g^{ij}} = 0, \quad \frac{\delta S_P}{\delta X^\mu} = 0. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.9)* эквивалентны уравнениям, вытекающим из (5.7). Аналогия с переходом от (5.4) к (5.5) очевидна.

*Они не расшифровываются, так как ниже (п.5.4) приведены выкладки для общего случая.

5.3. p -браны. В физике предпланковских расстояний все более важную роль начинают играть *мембраны* (двумерные обобщения струны) и *p -браны* (ее p -мерные обобщения) [39,41]. Их действие задается интегралом*

$$S = -c \int d^m u \sqrt{-g}, \quad g_{ij} = \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu, \quad g = \det g_{ij}, \quad (5.10)$$

где X^μ — координаты в n -мерном пространстве, $\mu, \nu = 1, \dots, n$; $i, j = 1, \dots, m$; $\eta_{\mu\nu}(+ - \dots -)$, $c = \text{const}$, $m = p + 1$. Варьируя (5.10) по X^μ , несложно получить уравнения движения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j X^\mu(u)) = 0. \quad (5.11)$$

И здесь поступают аналогичным образом: переходят от S к $\tilde{S}$:

$$\tilde{S} = -\frac{c}{2} \int d^m u \sqrt{-g} [g^{ij} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu + (2 - m)], \quad g = \det g_{ij}. \quad (5.12)$$

Варьирование $\tilde{S}$ по g^{ij} и X^μ дает классические уравнения движения, эквивалентные (5.11):

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta g^{ij}} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{S}}{\delta X^\mu} = 0$$

(детали см. в п.5.4).

5.4. Обобщение. Неизвестно, какие соображения привели В.А.Фока к выбору лагранжиана (5.3). Представляется правдоподобным, что здесь сыграла роль идея пятимерия, когда (5.3) рассматривается как «нерелятивистский предел» 5-мерного лагранжиана (τ — пятый параметр). Замечательно, что эта идея оказывается плодотворной и во всех вышеприведенных случаях, если в дополнение к n -измерениям добавить не один («пятый») параметр, а несколько, т.е. перейти к пространству $n + l$ -измерений, в котором движется p -брана.

В самом деле, в дополнение к $X^\mu(u)$, $\mu = 1, \dots, n$ введем $\xi^a(u)$, $a = n + 1, \dots, n + l$, т.е. p -мерная мембрана движется в $(n + l)$ -мерном пространстве. Индуцированная метрика и действие таковы:

$$g_{ij}^* = \xi_{,i}^a \xi_{,j}^a + \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu \equiv \tilde{g}_{ij} + g_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (5.13)$$

$$S^* = -c \int d^m u \sqrt{-g^*}, \quad g^* = \det g_{ij}^*. \quad (5.14)$$

*Первым мембраны с действием (5.10) ($m = 3$, пространство Минковского) рассматривал П.А.М.Дирак в своей теории протяженного электрона [42,43].

Разложим g^* по степеням g_{ij} :

$$g^* = \tilde{g} + \frac{\partial g^*}{\partial \tilde{g}_{ij}} g_{ij} + \dots = \tilde{g}(1 + \tilde{g}^{ij} g_{ij} + \dots) \quad (dg = g g^{ij} dg_{ij}). \quad (5.15)$$

Тогда имеем приближенное выражение для S^* :

$$S^* \approx -c \int d^m u \sqrt{-\tilde{g}} (1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ij}(u) \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu) \equiv \tilde{S}. \quad (5.16)$$

Варьируя (5.16) по $\tilde{g}^{ij}$ и X^μ , находим

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \tilde{g}^{ij}} = \frac{c\sqrt{-\tilde{g}}}{2} [\tilde{g}^{ij}(1 + \frac{1}{2} \tilde{g}_{kl} \eta_{\mu\nu} X_{,k}^\mu X_{,l}^\nu) - \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu] = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta X^\mu} = \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} X_\mu) = 0. \quad (5.18)$$

Ищем решения уравнений (5.17) в виде

$$\tilde{g}_{ij} = f(u) \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu,$$

где $f(u)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение в (5.17), находим

$$\tilde{g}_{ij}(1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} f^{-1} \tilde{g}_{kl}) - f^{-1} \tilde{g}_{ij} = 0,$$

т.е. $f^{-1} = 1 + m/(2f)$ и $f = (2 - m)/2$. Таким образом,

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{2 - m}{2} g_{ij} \quad (5.19)$$

и уравнения (5.18) превращаются в уравнения движения p -браны (5.11), вытекающие из действия (5.10). Подстановка (5.19) в (5.16) дает

$$\tilde{S}|_{\tilde{g}_{ij}=f g_{ij}} = -\frac{c}{2} \left(\frac{2}{2 - m} \right)^{\frac{2-m}{2}} \int d^m u \sqrt{-g} [g^{ij} \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu + (2 - m)], \quad (5.20)$$

что, за исключением не влияющего на уравнения движения множителя перед интегралом, совпадает с действием (5.12) (включая слагаемое $(2 - m)$; мы не обсуждаем здесь смысл множителя перед интегралом и другие тонкости). Разумеется, при желании переход к $(n + l)$ -мерному пространству может рассматриваться как эвристический прием, хотя за ним, конечно, стоит нечто большее. Итак, идея многомерия, выдвинутая в работах Калуцы, Клейна, Манделя, Фока, оказалась не только живучей, но и плодотворной.

В заключение отметим, что идея инвариантного параметра полезна и в стандартной квантовой теории поля. Так, Швингер [44] воспользовался ею при вычислении эффективного действия в квантовой электродинамике, а в монографии [46] она применялась при изучении модели Блоха—Нордсика.

6. КАЛИБРОВКА ФОКА

В той же работе [33] содержалась еще одна великолепная идея, важность которой становится понятной лишь в настоящее время. Решая уравнение Дирака для электрона во внешнем поле, В.А.Фок использовал калибровку

$$(x^\mu - x_0^\mu)A_\mu(x) = 0, \quad (6.1)$$

где x_0 — фиксированная точка. Более того, в [33] выписано и решение этого уравнения:

$$A_\mu(x) = \int_0^1 s(x^\nu - x_0^\nu)F_{\mu\nu}(x_0 + s(x - x_0))ds. \quad (6.2)$$

Здесь заслуживают внимания два обстоятельства.

6.1. Лемма Пуанкаре. Формула (6.2) являет собой частный случай интегрирования в теории внешних дифференциальных форм [47]. Для m -формы ω имеет место тождество

$$\omega = d(I\omega) + I(d\omega), \quad (6.3)$$

в котором оператор интегрирования I задан равенством

$$I\omega = \sum_{\{i\}} \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \int_0^1 dt t^{m-1} \omega_{i_1 \dots i_m}(tx) x^{i_r} [dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}]_r. \quad (6.4)$$

Здесь $\{i\}$ символизирует суммирование по всем i_k , $k = 1, \dots, m$ в пределах $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$; индекс r у квадратной скобки означает отсутствие дифференциала dx^{i_r} . В случае звездной области замкнутая форма ($d\omega = 0$) является точной ($\omega = d\Omega$); область $S \in R^n$ называется звездной, если из $x \in S$ следует $tx \in S$, $0 \leq t \leq 1$. В электродинамике тензор напряженностей $F_{\mu\nu}$ есть 2-форма $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Определяя 1-форму $A = A_\mu dx^\mu$, имеем $F = dA$, т.е. F — точная 2-форма. Следовательно, формула В.А.Фока (6.2) есть частный случай формул Пуанкаре (6.3), (6.4) со сдвинутым началом координат [35,48]: $A = IF$, $d(IA) = 0$ (последнее равенство фиксирует калибровку). Связь калибровки Фока с теорией внешних дифференциальных форм свидетельствует о ее фундаментальном характере. Об этом же свидетельствует и тот факт, что она применима и в теориях с неабелевой калибровочной группой.

6.2. Связь с другими калибровками. На первый взгляд калибровка (6.1) не кажется естественной: наличие выделенной точки x_0 в пространстве нарушает трансляционную инвариантность теории. В действительности это —

ключ к ее пониманию. Подобно выбору координат, выбор калибровки связан с физикой задачи.

При калибровочном (градиентном) преобразовании $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ выбор f в виде [33]

$$f = \int_x^{x_0} A_\mu dx^\mu = \int_0^1 A_\mu(x + s(x_0 - x))(x_0^\mu - x^\mu) ds, \quad (6.5)$$

где интегрирование ведется по прямой, соединяющей точки x_0, x , определяет вектор-потенциал A'_μ , удовлетворяющий условию (6.1). Поле ψ с зарядом e приобретает фактор

$$\psi' = e^{ief} \psi, \quad (6.6)$$

т.е. степень свободы электромагнитного поля f оказалась ассоциированной с полем ψ . Тем самым оно исключается из динамики поля A'_μ . Отсюда следует, что калибровка Фока является естественной в задачах с заряженными частицами: нарушающий трансляционную инвариантность параметр x_0 фиксирует координаты массивного точечного заряда. Калибровка Фока лежит в основе физически важных калибровок.

(i) *Калибровка Максвелла* [35] $\partial \mathbf{A} = 0$ (радиационная или кулоновская калибровка). При переходе к этой калибровке поле ψ преобразуется согласно (6.6), где $f = -\Delta^{-1} \partial \mathbf{A}$, т.е.

$$\psi' = \exp(-ie\Delta^{-1} \partial \mathbf{A}) \psi. \quad (6.7)$$

Хорошо известно [49, §80], что экспонента в (6.7) описывает кулоновское поле заряда. Вспоминая выражение для ядра оператора $\Delta^{-1}(x, y) = -(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{-1}$ и интегрируя в показателе экспоненты (6.7) по частям, находим

$$\psi'(x) = \exp \left[ie \int \frac{d^3 y}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right] \psi(x). \quad (6.8)$$

Видно, что показатель экспоненты отвечает калибровке Фока (6.1) в случае, когда контур интегрирования в (6.5) берется при $t = t_0$. Это становится еще более очевидным, если принять во внимание, что описывающий кулоновское поле фактор в (6.7) может быть представлен в виде бесконечного произведения линейных экспонент с показателями типа (6.5), в которых интегрирование ведется по прямым из точки, где расположен заряд, до бесконечности [38, 50, 51]:

$$\prod_{i,j}^N \exp \left[-ie \int_{-\infty}^x A_\mu(y_{ij}) dy_{ij}^\mu \right] \rightarrow \exp(-ie\Delta^{-1} \partial \mathbf{A}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

Индексы i, j нумеруют площадки, покрывающие единичную сферу, через которые проходят прямые (заряд расположен в центре сферы, при $N \rightarrow \infty$ площадки стягиваются в точки).

(ii) *Другие калибровки.* При изучении проблемы инфракрасных расходимостей переходят к полям ψ' , в которых экспоненциальный фактор имеет вид [52]

$$\exp \left(ie \int_0^\infty dt \int d^3x A_\mu^Q J_\mu \right) \equiv \exp(ie\chi), \quad (6.10)$$

где $J_\mu = (ep_\mu/E_p)\delta(\mathbf{x} - t\mathbf{p}/E_p)$ есть классический ток ($E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$) и A_μ^Q — оператор:

$$A_\mu^Q(x) = \int_0^\infty \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2|\mathbf{q}|} [c_\mu(q)e^{-iqx} + c_\mu^+(q)e^{iqx}]. \quad (6.11)$$

Итак, здесь с полем ψ ассоциированы мягкие фотоны с энергией $\omega < Q$. Тем самым они изымаются из динамики электромагнитного поля. S -матрица, описывающая рассеяние квантов поля $\psi' = \exp(ie\chi)\psi$, свободна от инфракрасных расходимостей [52,53]. Показатель экспоненты в (6.10) можно переписать в виде

$$\chi = \int_0^\infty A_\mu^Q(n_p t) n_p^\mu dt = \int_{n_p} A_\mu^Q dx^\mu, \quad (6.12)$$

где $n_p = p/E_p = dx/dt$, $p^2 = m^2$, а в последнем выражении интегрируется по прямой, задаваемой вектором n_p . По существу, используется калибровка Фока для поля A_μ^Q или, если угодно, модифицированная калибровка Фока.

Но техника мягких фотонов применима и в случае излучения жестких фотонов ($\omega > m$), если энергия частицы $E_p \rightarrow \infty$. В этом случае $n_p^2 = m^2/E_p^2 \rightarrow 0$, $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$, и мы приходим к калибровке светового конуса $A_\mu^Q n^\mu = 0$, $n^2 = 0$ ($E_p \gg Q \gg m$).

Таким образом, калибровка Фока (6.1) удобна в задачах с массивными точечными частицами или с частицами высоких энергий ($E_p \gg m$), т.е. тогда, когда можно пренебречь реакцией излучения на частицу.

Все эти особенности калибровки Фока, важные сами по себе, становятся важными вдвойне, если учесть, что равенства (6.1), (6.2) сохраняются и в неабелевых теориях. Ее применение (возможно, в модифицированном виде) позволяет описывать рассеяние адронов высоких энергий.

7. ОДНА ИЗ ПОСЛЕДНИХ ПУБЛИКАЦИЙ В.А.ФОКА

В 1971 г. В.А.Фок опубликовал краткую заметку «Возможное обобщение понятия физического пространства» [54]. Суть ее сводилась к следующему. Понятие физического пространства тесно связано со свойствами движения физических тел, поскольку только по движению тел мы судим о свойствах пространства. Например, размерность пространства отождествляется с числом степеней свободы материальной точки. В квантовой физике можно предположить, что простейший физический объект (материальная точка) обладает свойствами электрона. Но у электрона помимо трех степеней свободы материальной точки имеется еще одна — спин. Соответствующая независимая переменная способна принимать лишь два значения. То, что нерелятивистский электрон характеризуется лишь координатой x и спиновой переменной $\sigma = \pm 1$ (в единицах $\hbar/2$), подчеркивает и тот факт, что волновая функция антиперестановочна по отношению ко всем четырем переменным:

$$\psi(\dots x_j, \sigma_j; \dots x_k, \sigma_k; \dots) = -\psi(\dots x_k \sigma_k; \dots x_j \sigma_j; \dots). \quad (7.1)$$

После этого В.А.Фок замечает: «Применяя к данному случаю (молчаливо допускаемое) классическое предположение, что физическое пространство определяется совокупностью переменных, описывающих степени свободы простейшего физического тела (именуемого обычно материальной точкой), мы приходим к заключению, что, если мы примем электрон за простейшее физическое тело, мы должны допустить, что точка в физическом пространстве определяется совокупностью четырех переменных (x, y, z, σ) . Это ведет к обобщению физического пространства. Определенное выше обобщенное физическое пространство может быть названо спинорным пространством». И далее: «Таким образом, введение спиновой переменной, допускающей конструирование спиноров (allowing the construction of spinors), составляет важный шаг в изучении свойств пространства и может рассматриваться как обобщение понятия физического пространства».

К сказанному можно сделать два замечания.

1. Осталось сделать лишь шаг, чтобы прийти к понятию суперпространства — наиболее необычному и важному понятию современной физики, появившемуся, кстати, тогда же [55,56]. Именно, осталось допустить, что новая спиновая переменная (обозначим ее θ) принимает значения из грассмановской алгебры и преобразуется как спинор. Тогда поля должны зависеть от двух переменных (x, θ) , т.е. мы приходим к понятию суперполя $\Phi(x, \theta)$ [57].

2. Работа [54] предвосхитила идеи так называемой *некоммутативной геометрии* [58]. Это интенсивно развивающееся обобщение классической геометрии рассматривает, в частности, пространства, состоящие из нескольких экземпляров евклидовых, или римановых, или расслоенных пространств. Последние оказались полезными при формулировании, например, модели

Вайнберга—Салама [59], модели «Великого объединения» [60]. При этом достигается геометризация поля Хиггса. Общая схема такова.

Рассмотрим пространство, состоящее из двух листов — пространств Минковского. Допустим, что имеется локальная калибровочная симметрия. Тогда для нетривиального геометрического объекта $\psi(x, i)$, определенного на каждом из листов ($i = 1, 2$; поля $\psi(x, 1)$ и $\psi(x, 2)$ могут иметь разную геометрическую природу, скажем, изоскаляр и изоспинор), можно задать операции параллельного переноса.

1. Параллельный перенос в пределах одного листа вдоль пути $C(2, 1) \equiv C(x_2, x_1)$:

$$\tilde{\psi}(x_2, i) = P(C(2, 1); i)\psi(x_1, i). \quad (7.2)$$

2. Параллельный перенос с одного листа на другой в данной точке x :

$$\tilde{\psi}(x, i) = H(x, i, j)\psi(x, j), \quad i \neq j, \quad H(x, i, j) = H^+(x, j, i). \quad (7.3)$$

В первом случае можно рассмотреть перенос в бесконечно близкую точку:

$$P(x + dx, x; i) \approx 1 + iA_\mu(x, i)dx^\mu, \quad (7.4)$$

где A_μ — связность, элемент алгебры Ли калибровочной группы. При калибровочных преобразованиях поля меняются следующим образом:

$$\psi'(x, i) = U(x, i)\psi(x, i), \quad P'(C(2, 1); i) = U(x_2, i)P(C(2, 1); i)U^{-1}(x_1, i), \quad (7.5)$$

$$A'_\mu(x, i) = U(x, i)A_\mu(x, i)U^{-1}(x, i) + iU(x, i)\partial_\mu U^{-1}(x, i), \quad (7.6)$$

$$H'(x, i, j) = U(x, i)H(x, i, j)U^{-1}(x, j). \quad (7.7)$$

Полагая $H(x, i, j) = 1 + B(x, i, j)$, получаем

$$B'(x, i, j) = U(x, i)B(x, i, j)U^{-1}(x, j) + U(x, i)(U^{-1}(x, j) - U^{-1}(x, i)) \quad (7.8)$$

в полной аналогии с преобразованием (7.6). Следовательно, $B(x, i, j)$ играет роль связности, задающей параллельный перенос с одного листа на другой. Теперь можно вычислять «тензоры кривизн». Возможны контуры трех типов.

1. Инфинитезимальные замкнутые контуры на каждом из листов; тензор кривизны дается стандартным выражением $\hat{F}_{\mu\nu}(x) = -i[\hat{D}_\mu(x, i), \hat{D}_\nu(x, i)]$, где $\hat{D}_\mu(x, i) = \partial_\mu + i\hat{A}_\mu(x, i)$ — ковариантная производная.

2. Четырехугольные контуры с инфинитезимальными переносами на каждом из листов и двумя переносами с одного листа на другой в точках x и $x + dx$. Это дает в качестве тензора кривизны $F_{\mu H} = \hat{D}_\mu H(x, i, j)$.

3. Наконец, «двуугольный» контур в данной точке x : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ дает $F_{HH} = 1 - HH^+$ ($H(x, i, i) = 1$, подробнее см. [59, 60]).

Полагая лагранжиан линейной комбинацией квадратов трех типов кривизн, получаем лагранжиан бозонной части модели Хиггса. Правильное выражение получается и для фермионной части [59,60]. Пространство Фока с двумя листами $(x, +)$, $(x, -)$ оказывается полезным и при формулировании сверхпроводимости в рамках идей некоммутативной геометрии [61]. Таким образом, и здесь идеи В.А.Фока предвосхитили современное развитие и геометрии, и физики элементарных частиц.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В работе [1] содержалась еще одна в высшей степени важная идея: при параллельном переносе спинора в римановом пространстве автоматически появлялось векторное поле A_μ , которое отождествлялось с электромагнитным полем. Оно аддитивно входило в связность, определяющую правило параллельного переноса спинора, и полагалось пропорциональным единичной матрице Дирака. При этом оказывалось, что тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ комбинируется с тензором кривизны Риччи $R_{\mu\nu}$, т.е. также может трактоваться как тензор кривизны. Тем самым достигалась геометризация электромагнитного поля. Это на много лет предвосхитило современную трактовку поля A_μ как связности в расслоенном (зарядовом) пространстве.

Более того, в [1] содержался намек на возможность введения полей Янга—Миллса. В.А.Фок писал ([2], с.419): «Если ограничиться четырехрядными матрицами [Дирака], то коммутативность [поля A_μ] со всеми α -матрицами означает пропорциональность [A_μ] единичной матрице. Если же рассматривать матрицы с большим числом строк и столбцов, то матрицы Φ'_l [т.е. A_μ] не будут обязательно пропорциональными единичной матрице». После слова «столбцов» — сноска: «Такие матрицы могли бы возникнуть при некоторых обобщениях уравнения Дирака (например, на случай задачи двух тел)».

В этой же работе было подчеркнуто, что «... в отличие от эйнштейновского подхода потенциалы φ_l [т.е. A_μ] играют самостоятельную роль в геометрической картине мира и не обязаны быть функциями коэффициентов γ_{ikl} [символов Риччи, т.е. связности]». Для того времени — весьма ответственное заявление.

2. Г.Вейль во втором издании своей книги «Теория групп и квантовая механика» [62] назвал уравнение (3.2) (в стационарном варианте) «уравнением де Бройля». Это вызвало неудовольствие Шредингера. В письме к Вейлю от 1 апреля 1931 г., обосновывая свой приоритет, он, в частности, писал: «Я никогда не возражал против того, что это уравнение сейчас обычно связывается с именем Гордона, потому что это очень удобно для его различения (as a distinction)» ([9], с.1025). Похоже, этот несколько курьезный аргумент отражает мнение физической общественности того времени.

3. Теория 5-мерия пережила взлеты и падения. В 1927 г. А.Эйнштейн считал ее успешной (см. разд.4). Более того, в том же году он опубликовал на эту тему две заметки [63]. Но здесь начинаются загадки. В замечании к обоим сообщениям при корректуре читаем ([64], с.197): «Г.Мандель сообщил мне, что изложенные здесь результаты не новы и содержатся в работах Клейна [Z. Phys., 1926, **37**, 12, 895]. Ср. также работу В.А.Фока [Z. Phys., 1926, **39**, 226]». Удивительно то, что в письме к П.Эренфесту от 3 сентября 1926 г. Эйнштейн писал ([29], с.318): «Статья Клейна очень изящна и убедительна...». После появления уравнения Дирака Клейн разочаровался в 5-мерной теории. Он вспоминал ([9], с.1029): «В то время я полагал, что не было причин для этой пятимерной теории, и я ее оставил. Я вспоминаю, что весной 28 года после моего возвращения из Кембриджа Паули был в Копенгагене и обедал с нами. У нас была бутылка вина, и мы выпили за кончину пятого измерения».

В настоящее время ситуация радикально изменилась. Б.Де Витт показал ([65], упр.77), что в рамках многомерной теории гравитацию можно объединить не только с электромагнитным полем, но и с полями Янга—Миллса (также впервые обсуждавшимися О.Клейном [66]). Последние лежат в основе современной физики фундаментальных полей. Идея многомерия лежит и в основе программы суперструн [41] — наиболее перспективной из имеющихся единых теорий.

Отметим, впрочем, что модель типа «Великого объединения» [67–69] и модель типа Калуцы—Клейна—Фока при ее прямолинейном обобщении не вполне согласуются друг с другом. Если в первой число калибровочных векторных полей равно размерности калибровочной группы, то во второй оно равно размерности дополнительного подпространства (т.е. $n - 4$), группа симметрии которого имеет размерность $(n - 4)(n - 5)/2$. Приведенные числа совпадают лишь при $n = 7$ (в абелевом случае теории согласуются при $n = 5$).

4. Лагранжианы (5.3), (5.4) встречались и ранее [22]; более того, отмечалось, что соответствующий (5.4) гамильтониан равен нулю. Однако в дальнейшем эти идеи Кударом не развивались.

5. Во время научной командировки в Германию (1927—1928 гг.) на семинаре в Геттингене В.А.Фок доложил работу о рассеянии на кулоновском центре. Было найдено точное решение соответствующего уравнения Шредингера в параболических координатах. После семинара В.Гордон заявил, что им выполнена точно такая работа и статья уже отправлена в печать ([69], поступила 4 марта). Фок решил свою работу не публиковать. Позднее выяснилось, что упомянутая статья была послана в журнал после семинара, а задача решалась в сферических координатах. В том же году была опубликована работа [71] (поступила 22 сентября) с решением в параболических координатах.

Из писем Фока [72]: «8.02.1928 г. ... решил строго задачу, о которой Борн упоминал на лекции. Получилось другое, чем у него, и я с ним ожесточенно спорил. Задача такая: Резерфордское рассеяние по новой квантовой

механике». И далее: «26.02.1928 г. ... Долго возился с выводом формул для задачи о столкновении α -частиц с атомом, о которой я писал. Но физическая часть задачи, т.е. рецепт получения из шредингеровской волны числа частиц, рассеянных в данном направлении, мне до сих пор не ясна. Все говорят по-разному, а Борн говорит то так, то этак». Трудность заключалась в том, что кулоновский потенциал убывает слишком медленно, поэтому падающую и рассеянную волны нельзя считать невозмущенными на сколь угодно больших расстояниях. Прошли десятилетия, прежде чем проблема построения оператора рассеяния для потенциала Кулона получила удовлетворительное решение [52,73]. Решение В.А.Фока приведено в его книге [74].

6. В работе Фока [75], выполненной в Геттингене (1928 г., поступила 12 января), рассмотрен осциллятор в магнитном поле. Выписано решение, найдены уровни энергии. Ландау два года спустя [76] рассматривал частный случай — движение свободной частицы в магнитном поле, причем был найден лишь спектр энергии. Ни в [76], ни в учебниках на работу [75] не ссылаются. На нее обратили внимание только в последнее время при изучении наноструктур в твердом теле (см., например, Труды 38-й Летней школы шотландских университетов ([77], с.31, 251, 287)). В результате текст иногда выглядит так. В лекции В.Хансена ([77], с.287) после формулы для энергии из работы Фока [75] $E_{n,l} = \hbar(2n + |l| + 1)(\Omega^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\hbar l\omega_c$ (Ω и ω_c — осцилляторная и ларморовская частоты, l — орбитальный момент, $n = 0, 1, \dots$) читаем: «При конечных полях [т.е. при переходе от $\omega_c = 0$ к конечным ω_c] уровни энергии меняются так, что образуют уровни, близкие к энергиям Ландау ... в пределе сильных полей [$\omega_c \rightarrow \infty$]». Комментарии здесь излишни. Конечно, Фок не мог предположить, что переход в формуле для $E_{n,l}$ к пределу $\Omega \rightarrow 0$ или к пределу сильных полей может вызвать затруднения.

7. В работе [78] помимо фундаментального результата — получения уравнений движения из уравнений Эйнштейна — был сделан вывод о выделенности гармонических координат (термин предложен Фоком). Здесь прежде всего обращает на себя внимание реалистичность постановки задачи. В отличие от работы [79], в которой изучалось движение точечных частиц (δ -образных особенностей), Фоком решалась задача движения протяженных тел. Материальная точка — объект, чуждый теории тяготения; именно это обстоятельство побудило Дирака заняться теорией протяженного электрона [42,43]. Он считал [43], что «с физической точки зрения поле Эйнштейна» не может иметь «...точечных сингулярностей. Каждая частица должна иметь конечный размер, не меньший радиуса Шварцшильда».

В современной монографической литературе выделенность гармонических координат, породившую столько споров, полагают чем-то само собой разумеющимся, иногда даже не ссылаясь на Фока (см., например, ([80], с.177), где просто констатируется: «Особенно удобны условия гармоничности координат»).

Другой важный вывод, сделанный В.А.Фоком [81], касается понятия «относительность» в общей теории относительности (ОТО) и специальной теории относительности (СТО). Фок обратил внимание на то, что слово «относительность» имеет совершенно разный смысл в этих теориях. На современном языке указанное различие формулируется просто: инвариантность теории относительно преобразований Лоренца ведет к существованию законов сохранения, инвариантность же относительно общековариантных преобразований — к связям. Подчеркивание В.А.Фоком этого очевидного факта вызывало отрицательную, иногда прямо-таки болезненную реакцию некоторых физиков (см. ([82], с.192, 194): «Все известные физики в Советском Союзе ... были против экспериментов(!) Фока. ... Все физики, чьи имена хоть что-то значат в мире, единодушно выступили в защиту(?) Эйнштейна»). Однако научные истины не устанавливаются голосованием. Конец спорам положил Е.Вигнер. В Нобелевской лекции он подчеркнул ([83], с.52): «... я, разделяя взгляды Фока, не считаю преобразования криволинейных координат общей теории относительности преобразованиями симметрии...». Вигнер называл локальные калибровочные преобразования (как в ОТО) *динамическими*, а глобальные преобразования (как в СТО) — *геометрическими*.

8. Вывод соотношения (2.2) для магнитного поля и получение минимального значения (2.4) для магнитного потока («флаксон Йордана—Фока») примерно из тех же соображений продолжался спустя десятилетия (см., например, [84]).

9. Судьбы обсуждавшихся выше работ оказались большей частью не очень счастливыми. Разумеется, в течение разбираемого десятилетия В.А. Фок опубликовал и другие работы, которые получили всеобщее признание: метод Хартри—Фока, пространство Фока, метод функционалов Фока, представление Фока, симметрия атома водорода по Фоку, уравнение Дирака в пространстве Римана и др. Но именно поэтому имеет смысл вспомнить о работах, вошедших в обиход современной физики, но утративших, если можно так выразиться, «родовое имя».

10. Но даже с хорошо известными работами происходят удивительные вещи. Поистине анекдотическая история связана с калибровкой Фока. Она неоднократно переоткрывалась и каждый раз получала новое имя.

Швингер в своей книге ([85], с.342) дал ее подробное изложение, не славившись на Фока. В предисловии он отметил: «При написании книги я не старался давать по ходу изложения ... исторические комментарии со ссылками на то, кто, что и когда сделал первым». Для этого помимо причины личного свойства «... имеется и более веская причина. ... если бы развитие нового подхода сопровождалось постоянными ссылками на аппарат, который предполагается устаревшим, это слишком рассеивало бы внимание».(!). После этого калибровка (6.1) стала именоваться калибровкой Фока—Швингера [86], Швингера—Фока и даже калибровкой Швингера ([87], с.115). Далее, в

работе [88] она фигурирует под именем «калибровки фиксированной точки», а в статье [48] условие (6.1) при $x_0 = 0$ называлось «калибровкой Пуанкаре». Однако она была переоткрыта еще раньше в статьях [89,90], так что в обзоре [91] именуется «мультиполярной калибровкой», а работы [89,90] квалифицируются как пионерские.

Впрочем, ожидать справедливости в вопросах приоритетов и связанной с ними терминологии (т.е. с общепринятым признанием этих приоритетов) — дело, по-видимому, безнадежное. Надо полагать, эти проблемы существовали всегда. Рассказывают следующую историю. Как известно, И.Бернулли учил маркиза Г.Лопиталья исчислению бесконечно малых. В частности, он открыл ему правило разрешения неопределенностей. Лопиталь поделился своими знаниями с другими математиками, после чего это правило стали связывать с его именем («правило Лопиталья»). Бернулли был недоволен. Он разослал письма, в которых указывал на свой приоритет и отмечал, что это не единственный способ решения задачи, что ему известно еще и другое правило, каковое он и воспроизводил на страницах своих посланий. В результате это новое правило стали именовать «вторым правилом Лопиталья».

Автор глубоко благодарен В.В.Нестеренко и В.Ф.Осипову за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1929, v.57, p.261. Перевод: ([2], с.415).
2. **Фок В.А.** — В кн: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.
3. **Fierz M.** — Zs. f. Phys., 1937, v.104, p.553.
4. **Dimopoulos S., Susskind L.** — Nucl. Phys., 1979, v.B155, p.237.
5. **Jordan P., Fock V.** — Zs. f. Phys., 1930, v.66, p.206.
6. **Шмидт В.В.** — Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982.
7. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1931, v.A133, p.60. Перевод: [8].
8. Монополь Дирака. — Сб.: Пер. с англ. под ред. Б.М.Болотовского и Ю.Д.Усачева. М.: Мир, 1970.
9. **Kragh H.** — Am. J. Phys., 1984, v.52, p.1024.
10. **Schroedinger E.** — Ann. d. Phys., 1926, v.79, p.361.
11. **Klein O.** — Zs. f. Phys., 1926, v.37, p.895.
12. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1926, v.38, p.242.
13. **Fock V.** — Zs. f. Phys., 1926, v.39, p.226.
14. **Gordon W.** — Zs. f. Phys., 1926, v.40, p.117.
15. **Pauli W., Weisskopf V.** — Helv. Phys. Acta, 1934, v.7, p.136.
16. **Хоффман Д.** — Эрвин Шредингер. М.: Мир, 1987.
17. **Schroedinger E.** — Ann. d. Phys., 1926, v.81, p.109.

18. **de Broglie L.** — Comt. Rend., 1925, v.180, p.498.
19. **de Broglie L.** — Comt. Rend., 1926, v.183, p.272.
20. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1926, v.A112, p.661.
21. **Dirac P.A.M.** — Proc. Cambr. Phil. Soc., 1926, v.23, p.500.
22. **Kudar J.** — Ann. d. Phys., 1926, v.81, p.632.
23. **de Donder Th., Van den Dungen Fr.** — Comt. Rend., 1926, v.183, p.22.
24. **de Donder Th.** — Comt. Rend., 1926, v.183, p.594.
25. **Guth E.** — Zs. f. Phys., 1927, v.41, p.235.
26. Archive for the History of Quantum Physics.
27. **Pauli W.** — Wissenschaftlicher Briefwechsel. Eds. Hermann A., Meyenn K. and Weisskopf V.F., N.Y., Springer, 1979, v.I.
28. **Mandel H.** — Zs. f. Phys., 1927, v.39, p.136.
29. **Пайс А.** — Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. Пер. с англ. под ред. А.А.Логанова. М.: Наука, 1989.
30. **Weyl H.** — Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1918, p.465.
31. **Pauli W., Heisenberg W.** — Zs. f. Phys., 1930, v.59, p.168. Перевод: [32].
32. **Паули В.** — Труды по квантовой теории. Статьи 1928—1958. М.: Наука, 1977.
33. **Фок В.А.** — Изв. АН СССР, ОМОН, 1937, с.551; Sow. Phys., 1937, v.12, p.404.
34. **Фок В.А.** — Работы по квантовой теории поля. Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.
35. **Прохоров Л.В.** — ЭЧАЯ, 1996, т. 27, с.1399.
36. **Bergmann P.G.** — Phys. Rev., 1949, v.75, p.680.
37. **Dirac P.A.M.** — Can. Journ. Math., 1950, v.2, p.129.
38. **Прохоров Л.В., Шабанов С.В.** — Гамильтонова механика калибровочных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
39. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
40. **Polyakov A.M.** — Phys. Lett., 1981, v.B103, p.207.
41. **Грин М., Шварц Дж., Витген Э.** — Теория суперструн, т. 1,2. М.: Мир, 1990.
42. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1962, v.A268, p.57.
43. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1962, v.A270, p.354.
44. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, v.82, p.664. Перевод: ([45], с.254).
45. Новейшее развитие квантовой электродинамики. Сб. статей под ред. Д.Д.Иваненко, пер. с англ. А.М.Бродского. М.: ИЛ, 1954.
46. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1985, 4-е издание.
47. **Картан А.** — Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с фр. М.: Мир, 1971.
48. **Brittin W.E., Smythe W.R., Wyss W.** — Am. J. Phys., 1982, v.50, p.693.
49. **Дирак П.А.М.** — Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960; Наука, 1974, 1979.
50. **Прохоров Л.В.** — Вестн. ЛГУ, 1990, No.18, с.3.

51. Прохоров Л.В. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.559.
52. Прохоров Л.В. — УФН, 1999, т.169, с.1199.
53. Murota T. — Progr. Theor. Phys., 1960, v.24, p.1109.
54. Fock V. — Phys. Norveg., 1971, v.5, p.149.
55. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452.
56. Волков Д.В., Акулов В.П. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621.
57. Весс Ю., Беггер Дж. — Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ. под ред. В.И. Оги-евецкого. М.: Мир, 1986.
58. Connes A. — Noncommutative Geometry. Acad. Press, London, 1994.
59. Konisi G., Saito T. — Progr. Theor. Phys., 1996, v.95, p.657.
60. Kubo M., Maki Z., Nakahara M., Saito T. — Progr. Theor. Phys., 1998, v.100, p.165.
61. Пронин Н.А., Прохоров Л.В. — Теория сверхпроводимости и некоммутативная геометрия. Вестник СПбГУ (направлено в печать).
62. Weyl H. — Gruppentheorie und Quantenmechanik. 2 Auflage. Leipzig, 1931.
63. Einstein A. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1927, v.60, p.23,26. Перевод: ([64], с.190,193).
64. Эйнштейн А. — Собрание научных трудов, т.2. М.: Наука, 1966.
65. Девитт Б.С. — Динамическая теория групп и полей. Пер. с англ. под ред. Г.А.Вилковьского. М.: Наука, 1987.
66. Klein O. — New Theories in Physics. Conference in Warsaw. 1938, p.66.
67. Прохоров Л.В. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.561.
68. Georgi H., Glashow S.L. — Phys. Rev. Lett., 1974, v.32, p.438.
69. Прохоров Л.В. — Письма в ЖЭТФ, 1997, т.66, с.293.
70. Gordon W. — Zs. f. Phys., 1928, v.48, p.180.
71. Temple G. — Proc. Roy. Soc., 1928, v.A121, p.673.
72. Владимирова Л.Ф. — В.А. Фок. Жизнь и творчество (готовится к печати).
73. Dollard J. — J. Math. Phys., 1964, v.5, p.729.
74. Фок В.А. — Начала квантовой механики. Л.: КУБУЧ, 1932, с.251; изд. 2-ое, доп. М.: Наука, 1976, с.229.
75. Fock V. — Zs. f. Phys., 1928, v.47, p.446.
76. Landau L. — Zs. f. Phys., 1930, v.64, p.629.
77. Physics of Nanostructures, ed. by J.H. Davies, A.R. Long., London, 1992.
78. Фок В.А. — ЖЭТФ, 1939, т.9, с.375.
79. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. — Ann. Math., 1938, v.39, p.65.
80. Вейнберг С. — Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. Пер. с англ. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1975.
81. Фок В.А. — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.
82. Инфельд Л. — Новый мир, 1965, No.9, с.169.
83. Вигнер Е. — Этюды о симметрии. Пер. с англ. под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1971.
84. Crawford M. — Am. J. Phys., 1982, v.50, p.514.

85. **Швингер Ю.** — Частицы. Источники. Поля. Пер. с англ. под. ред. А.М. Бродского. М.: Мир, 1973.
86. **Leibbrandt G.** — Rev. Mod. Phys., 1987, v.59, p.1067.
87. **Радюшкин А.В.** — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.58.
88. **Dubovikov M.S., Smilga A.V.** — Nucl. Phys., 1981, v.B185, p.109.
89. **Power E.A., Zienau S.** — Nuovo Cim., 1957, v.6, p.7.
90. **Power E.A., Zienau S.** — Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1959, v.A251, p.427.
91. **Yang K.-H.** — Ann. Phys., 1988, v.186, p.209.

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили

Институт физики высоких энергий, 142284, г. Протвино Московской обл.

*К столетию со дня рождения академика
Владимира Александровича Фока*

Подробно обсуждаются фундаментальные работы В.А.Фока по теории тяготения. Показано, что его основные физические представления находят отражение в релятивистской теории гравитации, в которой гравитационное поле, как и все другие поля, рассматривается в пространстве Минковского.

The fundamental works by V.A.Fock on gravitation theory are discussed in detail. It is also shown that his basic physical ideas are represented in the relativistic theory of gravitation where the gravitational field is treated in Minkowski space as any other fields.

В настоящем обзоре мы хотели бы отдать дань глубокого уважения крупнейшему ученому — академику В.А.Фоку, внесшему выдающийся вклад в теоретическую и математическую физику. Мы остановимся только на работах В.А.Фока по теории тяготения и точно воспроизведем его основные положения и выводы по наиболее принципиальным проблемам теории тяготения, в создание которой он внес неоценимый вклад. В.А.Фок стремился раскрыть физические представления о тяготении, скрытые под покровом формально-абстрактного аппарата общей теории относительности (ОТО). Это ему в значительной степени удалось, однако при этом он вышел за пределы эйнштейновской общей теории относительности. В.А.Фок считал необходимым (для островных систем) к системе уравнений Гильберта—Эйнштейна добавить еще гармонические условия в декартовых (галилеевых) координатах. Введение декартовых координат фактически означало введение в теорию тяготения инерциальных систем координат, что и обеспечивало абсолютный характер ускорения. Строго говоря, ОТО Эйнштейна и теория тяготения В.А.Фока — различные теории. Это обстоятельство особо отмечал Л.Инфельд, который писал: «Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных

системах координат». Однако на самом деле введение инерциальных систем координат в теорию тяготения с необходимостью требует коренного отхода от всей концепции общей теории относительности. Но на этом мы остановимся позднее. Обратимся теперь непосредственно к работам [1] и [2]. Прежде всего остановимся на принципе относительности, без понимания сути которого невозможно осмыслить, что таится за словами «общая относительность». В.А.Фок дал предельно ясную формулировку принципа относительности. Так, он писал ([1], с. 242): *«Установим теперь, что понимается в формулировке принципа относительности под равноправием систем отсчета. Две системы отсчета (x) и (x') можно назвать физически равноправными, если в них явления протекают одинаковым образом. Последнее означает, что если возможен процесс, описываемый в координатах x функциями*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x), \quad (49.*03)$$

то возможен и другой процесс, который описывается в координатах (x') теми же самыми функциями

$$\varphi_1(x'), \varphi_2(x') \dots \varphi_n(x'), \quad (49.*04)$$

*и обратно, всякому процессу вида (49.*04) во второй системе соответствует возможный процесс вида (49.*03) в первой системе». И далее он подчеркнул: «Таким образом, принцип относительности есть утверждение о существовании соответственных процессов в системах отсчета определенного класса, каковые системы признаются в этом случае равноправными. Из этого определения ясно, что как самый принцип относительности, так и равноправие двух систем отсчета, представляют понятия физические, и утверждение, что то и другое имеет место, заключает в себе определенную физическую гипотезу, а не является просто условным».*

На языке теории поля **принцип относительности можно сформулировать так: уравнения поля, описывающие физические процессы, должны быть форминвариантны относительно преобразований Лоренца от одной галилеевой системы координат x к другой системе x' .**

Именно такое ясное понимание физической сути принципа относительности и явилось для В.А.Фока исходным положением для критического анализа понятия «общей относительности». В этой связи он писал ([1], с. 17): *«Термин «общая теория относительности» или «общий принцип относительности» употребляется (прежде всего самим Эйнштейном) еще и в смысле условного наименования для теории тяготения. Уже основная работа Эйнштейна по теории тяготения (1916 г.) озаглавлена «Основы общей теории относительности». Это еще больше запутывает дело, так как словам «общий» и «относительный» придается здесь несвойственный им смысл. Так, поскольку в теории тяготения пространство предполагается*

неоднородным, а относительность связана с однородностью, то выходит, что в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности».

И далее он отмечал ([1], с. 244): «Поскольку наибольшая возможная однородность выражается преобразованиями Лоренца, более общего принципа относительности, чем тот, который рассматривается в обычной теории относительности, быть не может. Тем более не может быть общего принципа относительности, как физического принципа, который имел бы место по отношению к произвольным системам отсчета. Чтобы уяснить себе этот факт, необходимо четко различать между физическим принципом, утверждающим существование соответственных явлений в разных системах отсчета, и простым требованием ковариантности уравнений при переходе от одной системы отсчета к другой. Ясно, что из принципа относительности вытекает ковариантность уравнений, но обратное не имеет места: ковариантность дифференциальных уравнений возможна и тогда, когда принцип относительности не выполняется». Глубокое понимание основ физической теории позволило В.А.Фоку сделать однозначный вывод: **«Общий принцип относительности, как физический принцип, который имел бы место по отношению к произвольным системам отсчета, невозможен».**

Другим фундаментальным вопросом в теории тяготения был вопрос о существовании привилегированных систем координат. По этому поводу В.А.Фок писал ([1], с. 473): «По Эйнштейну, никаких привилегированных систем координат не существует, и система координат остается неопределенной до конца. Сторонники этой точки зрения возводят эту неопределенность в достоинство и усматривают в ней глубокий смысл, а именно выражение некоего «общего принципа относительности», в силу чего и вся теория Эйнштейна названа им «общей теорией относительности». С такой точкой зрения мы согласиться никак не можем».

Далее он отмечает ([1], с. 475): «Мы неоднократно подчеркивали принципиальное значение существования привилегированной координатной системы, определяемой с точностью до преобразования Лоренца. Оно проявляется и в следующем. Только признав его, можно говорить о правильности гелиоцентрической системы Коперника, в том же смысле, в каком это было возможно в механике Ньютона. Непризнание же привилегированных координатных систем ведет к той точке зрения, согласно которой гелиоцентрическая система Коперника и геоцентрическая система Птолемея будто бы равноправны. Такая точка зрения противоречит данному в §49 определению равноправия систем отсчета и представляется нам неправильной» (см. формулы (49.*03) и (49.*04) — авторы). Выдвигая идею о существовании привилегированных систем координат, В.А.Фок руководствовался глубокой физической интуицией, поскольку он ясно понимал, что только в этом случае можно говорить об «абсолютности ускорения». Так, он

писал ([1], с. 499): «Предельные или иные условия, характеризующие пространство в целом, совершенно необходимы, а поэтому и понятие «ускорение по отношению к пространству» сохраняет в той или иной форме свой смысл. Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие «вращения по отношению к пространству», тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое — нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия «ускорения по отношению к пространству».

Как же В.А.Фок выбирает привилегированные системы координат? Детализируя выражение для тензора $R^{\mu\nu}$ ([1], доп. Г-35), он находит

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \cdot \Gamma_{\alpha\beta}^\nu. \quad (1)$$

Здесь

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x^\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \Gamma^\alpha \right), \quad \Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\sqrt{-g} g^{\nu\sigma}), \quad (2)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}), \quad \Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu. \quad (3)$$

Все эти выражения записаны в произвольных координатах. Если имеет место условие гармоничности

$$\Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\sqrt{-g} g^{\nu\sigma}) = 0, \quad (4)$$

то $\Gamma^{\mu\nu} = 0$, а следовательно, выражение для $R^{\mu\nu}$ существенно упрощается:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \cdot \Gamma_{\alpha\beta}^\nu. \quad (5)$$

Этим самым достигается, как писал В.А.Фок ([2], с. 382): «...то огромное преимущество, которое имеет гармоническая система координат перед всеми другими. Действительно, в гармонической системе координат в каждое из десяти уравнений тяготения входят (как мы уже неоднократно отмечали) вторые производные только от одной компоненты фундаментального тензора, причем эти вторые производные группируются в виде оператора Даламбера». И далее он отмечает ([2], с. 382): «При помощи гармонической системы координат в уравнениях тяготения достигается «разделение переменных» в отношении высших (т.е. вторых) производных. Оно

представляет аналогию с тем, которое достигается в задачах электродинамики путем введения декартовых компонент векторного потенциала. В декартовых координатах известные уравнения для потенциалов имеют вид

$$\Delta A_k - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = -4\pi \frac{j_k}{c}, \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho, \quad (6)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, каждое из этих уравнений содержит только одну компоненту для потенциала. Но если перейти от декартовых к произвольным криволинейным координатам, то каждое из уравнений, связывающее потенциалы с током, будет уже содержать, вообще говоря, не одну, а несколько криволинейных компонент векторного потенциала. Разделение переменных в уравнениях можно, следовательно, рассматривать как одно из свойств декартовой координатной системы». Условие гармоничности (4) имеет место для любых координатных систем, и упрощение тензора $R^{\mu\nu}$ достигается в любых произвольных координатах. Поэтому проводить параллель между условием гармоничности и выбором декартовых координат в электродинамике не совсем правомерно. Но В.А.Фок делает следующий важный шаг: он фактически записывает условия гармоничности в декартовых (галилеевых) координатах, несмотря на то, что в римановом пространстве таких координат нет. Так, например, он особо отмечает ([1], с. 296): «...сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3 ? Нам представляется единственно правильным второе определение». Так в теории В.А.Фока возникают декартовы координаты. Фактически, неявно Фок имел дело с пространством Минковского в галилеевых координатах, именно по этой причине у него и появились привилегированные системы координат. Суть дела, таким образом, не только в гармонических условиях, но и в том, что эти условия записываются в декартовых (галилеевых) координатах:

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad (8)$$

x^μ — декартовы координаты пространства Минковского. В такой форме эти условия нельзя применять в случае криволинейных координат, например сферических. С точки зрения риманова пространства гармонические условия не общековариантны. В.А.Фок по этому поводу пишет: «Упомянутые дополнительные уравнения (имеются в виду гармонические условия — авторы) не являются очевидно общековариантными». Но, так как В.А.Фок фактически, хотя и неявно, имел дело с пространством Минковского в декартовых

(галилеевых) координатах, ситуация изменяется, и гармонические условия (8) могут быть представлены в общековариантной форме. Действительно, если от декартовых координат пространства Минковского перейти к произвольным криволинейным координатам y , то уравнение (8) принимает (см. доп. А.10) общековариантный вид:

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(y) + \gamma_{\alpha\beta}^\nu(y) \tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = 0. \quad (9)$$

Здесь $\gamma_{\alpha\beta}^\nu$ — символы Кристоффеля пространства Минковского в координатах y . Уравнение (9) можно записать (см. доп. Б.14) и в форме

$$\square y^\lambda = -\gamma_{\alpha\beta}^\lambda(y) g^{\alpha\beta}(y), \quad (10)$$

где через $\square$ обозначен оператор

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}} \cdot \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left(\tilde{g}^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} \right). \quad (11)$$

Таким образом, запись гармонического условия (8) в декартовых (галилеевых) координатах пространства Минковского автоматически приводит к общековариантным уравнениям в пространстве Минковского в форме (9) или (10). Отсюда следует, что уравнения (9) являются не координатными условиями, а полевыми уравнениями.

В.А.Фок выбирает координаты y^λ , удовлетворяющие уравнению

$$\square y^\lambda = 0, \quad (10a)$$

и требует, чтобы решение этого уравнения удовлетворяло евклидовости на бесконечности и некоторым дополнительным условиям. Этим путем он фактически находит декартовы координаты, для которых символы Кристоффеля $\gamma_{\alpha\beta}^\nu$ всегда равны нулю, поэтому уравнение (10) сводится к уравнению (10a). Но такие координаты возможны в пространстве Минковского, а не в римановом пространстве. Именно здесь В.А.Фок неявно использовал пространство Минковского и вышел за рамки эйнштейновской общей теории относительности.

В случае криволинейных координат символы Кристоффеля $\gamma_{\alpha\beta}^\nu(y)$ отличны от нуля, поэтому условие гармоничности уже нельзя записать в форме (8), а необходимо записывать в форме (9). В.А.Фок не получал уравнений ни в форме (9), ни в форме (10), поэтому само пространство Минковского присутствовало в его рассуждениях и расчетах неявно. Он шел к декартовым координатам через решения уравнения (10a), удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Он стремился ввести привилегированные системы координат, подобные тем, какие имеют место в классической механике и специальной теории относительности. Именно только при наличии

таких систем координат и можно говорить об абсолютности ускорения. Совершенно очевидно, что, оставаясь в рамках общей теории относительности, таких систем ввести нельзя. В общей теории относительности ускорение, как и скорость, относительны, поскольку отсутствует понятие силы тяготения. Именно все это В.А.Фок как физик и не хотел принять. Отсюда, в принципе, можно было прийти к рассмотрению гравитационного поля как физического поля типа Фарадея—Максвелла в пространстве Минковского. На этом же пути можно было в теории тяготения сохранить фундаментальные законы материи — законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Пытался ли В.А.Фок рассматривать гравитационное поле в пространстве Минковского? Нет, такую мысль он не разделял. Он писал об этом ([2], с. 409): *«Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого мы отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в рамки евклидова пространства».*

В работе ([2], с. 409) он отмечал: *«При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной».* И далее он пишет ([2], с. 409): *«Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом определенной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной».* Но, как мы уже отмечали, суть дела не столько в условиях гармоничности, а прежде всего в том, что эти условия записываются в декартовых (галилеевых) координатах, что, по существу, и означает использование инерциальной системы координат в пространстве Минковского, поскольку в римановом пространстве инерциальной системы координат в принципе не может быть. В произвольных координатах пространства Минковского возникают силы инерции, обязанные появлению символов Кристоффеля $\gamma_{\alpha\beta}^{\nu}(y)$. В галилеевых координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль и силы инерции отсутствуют, а уравнение (9) сводится к условию гармоничности (8) в декартовых координатах. Именно на этом основании и можно частично согласиться с В.А.Фоком ([1], с. 306): *«Произвольные преобразования координат, посредством которых вводятся фиктивные поля тяготения, нарушают условия гармоничности и предельные условия. Поэтому можно считать, что введение гармонических координат исключает все фиктивные поля тяготения».*

Во-первых, произвольные преобразования, как мы показали (см. доп. А), превращают гармонические условия в декартовых координатах (8) в общеквариантные уравнения (9). Во-вторых, выбор декартовых координат действительно превращает уравнение (9) в (8), поскольку символы Кристоффеля $\gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$ в декартовых координатах равны нулю. Обращение в нуль символов Кристоффеля в пространстве Минковского действительно устраняет силы инерции, т.е. исключает все фиктивные поля тяготения. Далее В.А.Фок пишет ([1], с. 475): **«Таким образом, принцип относительности, выражаемый пре-**

образованиями Лоренца, возможен и в неоднородном пространстве, общий же принцип относительности невозможен». Если оставаться в римановом пространстве, а в общей теории относительности (ОТО) другого пространства и нет, то первая часть утверждения противоречит правильному выводу В.А.Фока, что «*в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности*». Но если принять во внимание, что В.А.Фок фактически имел дело с декартовыми (галилеевыми) координатами пространства Минковского, то это утверждение правильно, поскольку переход от одной инерциальной системы к другой осуществляется с помощью преобразования Лоренца. Но это означает, что Фок в поисках физической истины вышел за пределы ОТО. Все это особо ясно видно в релятивистской теории гравитации [3]. Мы далее покажем на примере получения строгого решения уравнений тяготения для одной сосредоточенной массы сам факт использования символов Кристоффеля в пространстве Минковского при написании гармонических условий в сферических координатах.

Интервал в римановом пространстве ([1], с. 279) имеет вид

$$ds^2 = c^2 V^2 dt^2 - \frac{1}{V^2} d\sigma^2, \quad (12)$$

где

$$d\sigma^2 = F^2 d\overset{*}{r}{}^2 + \rho^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2). \quad (13)$$

Интервал в пространстве Минковского в сферических координатах будет равен

$$d\Sigma^2 = c^2 dt^2 - d\overset{*}{r}{}^2 - \overset{*}{r}{}^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2). \quad (14)$$

Отсюда непосредственно следует

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{11} = -1, \quad \gamma_{22} = -\overset{*}{r}{}^2, \quad \gamma_{33} = -\overset{*}{r}{}^2 \sin^2 \Theta. \quad (15)$$

Используя выражение для символа Кристоффеля в пространстве Минковского

$$\gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} \gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \gamma_{\mu\nu}), \quad (16)$$

находим

$$\begin{aligned} \gamma_{22}^1 &= -\overset{*}{r}, \quad \gamma_{33}^1 = -\overset{*}{r} \sin^2 \Theta, \quad \gamma_{12}^2 = \gamma_{13}^3 = \frac{1}{\overset{*}{r}}, \\ \gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, \quad \gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \Theta, \end{aligned} \quad (17)$$

все остальные символы Кристоффеля равны нулю.

На основании (17) уравнение (9) для $\nu = 1$ принимает вид

$$\frac{d}{d\overset{*}{r}} \left(\frac{\rho^2}{F} \right) = 2 \overset{*}{r} F, \quad (18)$$

при этом мы явно использовали символы Кристоффеля $\gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Введя новую переменную

$$dr = F d^* r, \quad (19)$$

уравнение (18) можно записать в форме

$$\frac{d}{dr} \left(\rho^2 \frac{d^* r}{dr} \right) = 2^* r, \quad (20)$$

но это как раз и совпадает с уравнениями (57.14) работы В.А.Фока ([1], с. 280). Таким образом, Фок фактически использует пространство Минковского в сферических координатах (14), а гармоническое условие (8) — в декартовых (галилеевых) координатах пространства Минковского.

Мы получили уравнение (20) на основе уравнения в форме (9), когда пришлось явно использовать символы Кристоффеля пространства Минковского в сферических координатах. Тот же результат можно получить, если использовать уравнение в форме (10). Действительно, для декартовых (галилеевых) координат « y » символы Кристоффеля $\gamma_{\alpha\beta}^\lambda(y)$ все равны нулю, и уравнение (10) принимает вид

$$\square y^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left(\tilde{g}^{\nu\sigma} \frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma} \right) = 0. \quad (21)$$

Именно такое уравнение использует В.А.Фок. Следует особо подчеркнуть, что оно возникает только в том случае, когда все $\gamma_{\alpha\beta}^\lambda(y)$ равны нулю. Это обстоятельство Фоком не было отмечено. Принимая во внимание выражения (12) и (13), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \frac{F\rho^2}{V^2} \sin \Theta, \quad \tilde{g}^{00} = \frac{F\rho^2}{V^4} \sin \Theta, \quad \tilde{g}^{11} = -\frac{\rho^2 \sin \Theta}{F}, \\ \tilde{g}^{22} &= -F \sin \Theta, \quad \tilde{g}^{33} = -\frac{F}{\sin \Theta}. \end{aligned} \quad (22)$$

В качестве z^ν выберем переменные $z^0 = y^0 = ct$, $^*r, \Theta, \Phi$. На основании (22), а также принимая во внимание то обстоятельство, что функции V , F и ρ зависят только от *r , уравнение (21) принимает форму

$$\frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial ^*r} \left(\frac{\rho^2}{F} \frac{\partial y^i}{\partial ^*r} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial y^i}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \cdot \frac{\partial^2 y^i}{\partial \Phi^2} = 0. \quad (23)$$

Введем новую переменную r :

$$F d^* r = dr,$$

тогда уравнение (23) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\rho^2 \frac{\partial y^i}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial y^i}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \cdot \frac{\partial^2 y^i}{\partial \Phi^2} = 0. \quad (24)$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что следующие функции:

$$\begin{aligned} y^1(\overset{*}{r}, \Theta, \Phi) &= \overset{*}{r}(r) \sin \Theta \cos \Phi, \\ y^2(\overset{*}{r}, \Theta, \Phi) &= \overset{*}{r}(r) \sin \Theta \sin \Phi, \\ y^3(\overset{*}{r}, \Theta, \Phi) &= \overset{*}{r}(r) \cos \Theta, \end{aligned} \quad (25)$$

удовлетворяют (24), если только $\overset{*}{r}(r)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(\rho^2 \frac{d \overset{*}{r}}{dr} \right) = 2 \overset{*}{r},$$

т.е. для $\overset{*}{r}$ мы опять пришли к уравнению (20). Если при получении уравнения (20) из уравнений (9) приходится прямо использовать символы Кристоффеля пространства Минковского, то при нахождении этих уравнений из уравнений (10) этот факт несколько скрыт и проявляется только на стадии вывода уравнений (21).

Идеи В.А.Фока о существовании инерциальных систем координат, об абсолютности ускорения «относительно пространства», о необходимости построения полной системы уравнений теории тяготения, о форминвариантности уравнений теории тяготения относительно преобразований Лоренца точно реализуются в релятивистской теории гравитации (РТГ) [3]. При построении РТГ как классической теории гравитационного поля мы исходили из следующих общих физических представлений, восходящих к точке зрения Пуанкаре. Пространство-время открывается путем изучения свойств и законов развития материального мира. Пространство-время, как неотъемлемая сущность материи, отражает общие свойства, присущие любому виду материи. Такими общими свойствами материи являются интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Именно они и предопределили псевдоевклидову структуру пространства-времени как универсальную. Хотя псевдоевклидова структура пространства-времени и открылась путем изучения движения материи (особенно электромагнетизма), но в силу универсальности и независимости ее от форм материи она может рассматриваться абстрактно, в отрыве от материи, как своеобразная арена, на фоне которой протекают все физические явления природы. При таком представлении псевдоевклидова структура пространства-времени как бы мысленно имеет место и в отсутствие всей материи. Таким путем достигается отделение общих свойств

материи, нашедших отражение в структуре пространства-времени, от других свойств, присущих данному конкретному виду материи.

Универсально взаимодействующие поля (такие, например, как тяготение), имеющиеся в природе, всегда могут найти отражение в структуре пространства-времени, но уже в виде эффективного пространства-времени, обязанного наличию данного универсального поля.

Именно в РТГ эффективное риманово пространство создается благодаря существованию универсального гравитационного поля в пространстве Минковского.

Если предположить, что пространство-время искривлено и в отсутствие всех форм материи, то, в принципе, невозможно с точки зрения физики найти причину этой искривленности, поскольку без материи нет и физики.

В основу РТГ положено предположение, что источником гравитационного поля является сохраняющийся тензор энергии-импульса всей материи, включая и гравитационное поле. Гравитационное поле, как и все другие поля материи, развивается в пространстве Минковского. Гравитационное поле обладает спинами 2 и 0, и, что особенно существенно, оно имеет массу покоя m_g . Риманово пространство возникает как эффективное пространство из-за действия гравитационного поля. Силы инерции и гравитации разделены: они имеют разную природу. Полная система уравнений РТГ общековариантна относительно произвольных координатных преобразований и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. В эту систему уравнений непосредственно входит метрический тензор пространства Минковского. Уравнения (9) являются следствиями уравнений гравитационного поля и уравнений движения вещества. В РТГ реализуется принцип Маха — инерциальная система координат определяется распределением вещества и гравитационного поля. В РТГ ускорение имеет абсолютный смысл. При вычислении эффектов гравитации в Солнечной системе в уравнениях РТГ (в галилеевых координатах инерциальной системы) можно пренебречь влиянием массы гравитона, и тогда приближенная система уравнений совпадает с системой уравнений, которую изучал В.А.Фок.

Решая эту систему уравнений, Фок разработал изящный и эффективный метод нахождения постньютоновского приближения. Это стало возможным благодаря удачному выбору в качестве независимой переменной плотности тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$, а также использованию гармонических условий в декартовых координатах. Именно в силу этих обстоятельств чрезвычайно упростился весь вычислительный процесс, поскольку уже во втором приближении из всех десяти компонент $\tilde{g}^{\mu\nu}$ осталась только одна компонента $\tilde{g}^{00}$ [3]. Такое найденное техническое упрощение, оказывается, как это видно из РТГ, имеет под собой физическую основу: во-первых, переменная $\tilde{g}^{\mu\nu}$ естественно возникает при построении РТГ, во-вторых, в первом приближении по G все компоненты $g_{\mu\nu}$, соответствующие сферически-симметричному статическому

полю, создаваемому телом массы M , определяются только единственной компонентой тензора вещества T^{00} [3], и интервал эффективного риманова пространства имеет вид

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2MG}{c^2 r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) .$$

Влияние массы гравитона существенно, когда радиус тела приближается к радиусу Шварцшильда. В неинерциальной системе координат пренебрегать массой гравитона также нельзя. Заметим, что даже если формально опустить массу гравитона, то система уравнений РТГ совпадает с системой уравнений, которую изучал В.А.Фок, только в галилеевых координатах инерциальной системы, в любой другой системе, например неинерциальной, они уже существенно отличаются. Это происходит потому, что система уравнений Фока не общековариантна, тогда как система уравнений РТГ общековариантна. РТГ изменяет представления об эволюции Вселенной и коллапсе. Введение массы гравитона имеет принципиальное значение для данной теории, поскольку только с ее введением возможно построение теории, в которой гравитационное поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского. Полевые представления с необходимостью требуют введения массы гравитона и, как следствие, в уравнениях РТГ появляется и метрический тензор пространства Минковского. Именно это обстоятельство позволяет фиксировать инерциальную систему и тем самым установить связь инерциальной системы с распределением вещества и гравитационного поля, т.е. реализовать принцип Маха: инерциальная система определяется распределением материи. Без вещества не может существовать гравитационное поле. Наличие в уравнениях РТГ метрического тензора пространства Минковского позволяет однозначным образом вычислить гравитационный эффект. Согласно РТГ инерциальные системы так же, как в специальной теории относительности, имеют абсолютный смысл.

РТГ возвращает в физику инерциальные системы координат, которые были отвергнуты ОТО, так как в этой теории они не существуют. Эйнштейн в 1955 г. писал: *«Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить «инерциальную систему» (или «инерциальные системы»)»*. Инерциальные системы в РТГ возникают из-за рассмотрения гравитационного поля как физического поля, развивающегося, как и все другие поля материи, в пространстве Минковского. Благодаря этому полю и создается эффективное риманово пространство полевого происхождения. При таком подходе полностью сохраняется десятипараметрическая группа движения пространства-времени — группа Пуанкаре. Именно поэтому в теории имеют место законы сохранения энергии-импульса, момента количества движения вещества и гравитационного поля вместе взятых. Специальная теория относительности точно выполняется

для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Поэтому слово «специальная» можно было бы опустить и писать просто — теория относительности, понимая под этим форминвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца. Более общего принципа относительности, чем этот, быть не может. Перейдем теперь к изучению эволюции Вселенной и коллапса.

Согласно РТГ однородная и изотропная Вселенная является «плоской» и развивается циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т.д. Для однородной изотропной Вселенной уравнения РТГ в галилеевых координатах инерциальной системы принимают вид

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(\tau) - \frac{\omega}{R^6} \left(1 - \frac{3R^4}{R_{\max}^4} + 2R^6\right), \quad (26)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) - 2\omega \left(1 - \frac{1}{R^6}\right). \quad (27)$$

Здесь G — гравитационная постоянная, R — масштабный фактор,

$$\omega = \frac{1}{12} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2. \quad (28)$$

Из уравнения (26) видно, что при уменьшении R отрицательный член $\frac{\omega}{R^6}$ в правой части уравнения растет по абсолютной величине быстрее, чем плотность вещества для радиационно-доминантной стадии. Но, так как левая часть уравнения (26) положительна, сжатие должно остановиться при некотором минимальном значении $R_{\min}$, отвечающем значению $\frac{dR}{d\tau} = 0$. При увеличении R отрицательный член ω в правой части уравнения становится больше, чем плотность вещества на стадии доминантности нерелятивистской материи, поэтому в силу положительной левой части уравнения (26) произойдет остановка расширения при значении $R_{\max}$, отвечающем значению $\frac{dR}{d\tau} = 0$. Таким образом, однородная и изотропная Вселенная развивается циклически от некоторой максимальной плотности вещества до минимальной $\rho_{\min}$, равной

$$\rho_{\min} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2, \quad (29)$$

m_g — масса гравитона, затем опять до максимальной и т.д. Отсюда следует, что никакого **Большого взрыва**, в принципе, не могло быть. Из уравнения (26) при $R \gg 1$ следует, что плотность вещества во Вселенной равна

$$\rho(\tau) = \rho_c(\tau) + \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2. \quad (30)$$

Здесь $\rho_c(\tau)$ — критическая плотность, определяемая «постоянной» Хаббла H :

$$\rho_c(\tau) = \frac{3H^2(\tau)}{8\pi G}, \quad H(\tau) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\tau}. \quad (31)$$

Входящая в уравнение (26) величина $R_{\max}$ может быть выражена через максимальную плотность вещества во Вселенной:

$$R_{\max}^4 = \frac{1}{8E} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2, \quad (32)$$

где E равно

$$E = 7,4 \cdot 10^4 \cdot \left[\frac{\left(\frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^{10}}{(16\pi G)^2 \rho_{\max}} \right]^{1/3}, \quad (33)$$

$\rho_{\max}$ — фактически является интегралом движения. Из уравнений (26) и (27) можно получить выражение для параметра замедления Вселенной $q(\tau)$. На современной стадии доминантности нерелятивистской материи (давление p равно нулю)

$$q(\tau) = -\frac{1}{H^2} \cdot \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4H^2} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2. \quad (34)$$

Соотношение (34) дает возможность определить массу гравитона m_g по двум наблюдаемым величинам H и q . Она оказывается ограничена следующим неравенством [4]:

$$m_g \leq 4,5 \cdot 10^{-66} \text{ Г}. \quad (35)$$

На основании (30) и (35) видно, что современная плотность $\rho(\tau)$ близка к критической плотности ρ_c , определяемой «постоянной» Хаббла. Отсюда с необходимостью следует существование во Вселенной большой скрытой массы «темной материи», что согласуется с современными наблюдательными данными. Время расширения Вселенной от максимальной плотности $\rho_{\max}$ до минимальной $\rho_{\min}$ определяется в основном стадией доминантности нерелятивистской материи и равно [5]

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\pi \hbar}{m_g c^2}. \quad (36)$$

С точки зрения РТГ красное смещение происходит не из-за эффекта Доплера, а вследствие изменения гравитационного поля во времени, поскольку вещество Вселенной покоится в инерциальной системе координат. Инерциальная система выделена самой Природой. Следует также отметить, что, в

отличие от ОТО, согласно РТГ гравитационное поле не может существовать без порождающего его вещества. Под веществом имеется в виду вся материя, за исключением гравитационного поля.

Перейдем к рассмотрению коллапса. Согласно РТГ коллапс невозможен, а поэтому не могут существовать и «черные дыры». Ситуация здесь кардинально отличается от ОТО, поскольку из-за наличия массы гравитона решение уравнений РТГ в области, близкой к сфере Шварцшильда, существенно отличается от решения Шварцшильда. Для сферически-симметричного статического тела интервал в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$ds^2 = U(z)dt^2 - V(z)dz^2 - z^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2). \quad (37)$$

Если перейти в синхронную систему свободно падающих пробных частиц, имеющих на бесконечности нулевую скорость, с помощью преобразований

$$\tau = t + \int dz \left[\frac{V(1-U)}{U} \right]^{1/2}, \quad R = t + \int dz \left[\frac{V}{U(1-U)} \right]^{1/2}, \quad (38)$$

то получим следующее выражение для интервала:

$$ds^2 = d\tau^2 - (1-U)dR^2 - z^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2). \quad (39)$$

Радиальная скорость частицы, падающей вдоль радиуса, равна

$$\frac{dz}{d\tau} = -\sqrt{\frac{1-U}{UV}}. \quad (40)$$

Для сферически-симметричного статического тела метрические коэффициенты риманова пространства имеют в области, близкой к сфере Шварцшильда, следующий вид [6]:

$$U(z) = \frac{z - z_g}{z} + qm_g^2 M^2, \quad V(z) = \frac{z}{z - z_g}. \quad (41)$$

Здесь q — некоторая положительная постоянная. Подставляя (41) в (40), получаем

$$\frac{dz}{d\tau} \simeq -\frac{1}{\sqrt{q}m_g M} \sqrt{\frac{z - z_g}{z}}. \quad (42)$$

Отсюда очевидно, что наличие массы гравитона m_g приводит к явлению отталкивания частиц вещества от сферы, близкой к сфере Шварцшильда. Точка $z = z_g$ является точкой поворота. Сфера радиуса $z = z_g$ становится сингулярной, причем эту особенность нельзя устранить выбором системы координат. Поскольку внешнее решение необходимо сшить с внутренним решением, то

это означает, что сфера с радиусом $z = z_g$ не может находиться вне вещества. В противном случае невозможно было бы осуществить сшивание решений.

С точки зрения ОТО объекты больших масс ($M > 3M_\odot$), если при эволюции они не потеряли значительную часть массы, обязательно должны стать «черными дырами». При сферически-симметричной аккреции вещества на «черную дыру» лишь небольшая часть массы покоя падающего вещества может идти на излучение, поскольку каждая частица вещества, падая, уносит всю энергию в «черную дыру». С точки зрения РТГ «черные дыры», в принципе, невозможны, а поэтому объекты больших масс, встречающиеся в природе и находящиеся на заключительной стадии эволюции, не являются «черными дырами». Выделение энергии при аккреции вещества на такие объекты связано с падением вещества на поверхность объекта, т.е. в этом случае действует тот же механизм выделения энергии, что и при аккреции вещества на нейтронную звезду. Это означает, что и при сферически-симметричной аккреции должно быть значительное выделение энергии. При этом, конечно, необходимо учитывать уменьшение уносимой энергии из-за красного смещения.

Следует отметить, что поскольку эффективное риманово пространство в РТГ возникает на основе физического гравитационного поля, которое описывается в пространстве Минковского, то отсюда следует, что оно имеет простую топологию и определяется в одной карте. В теории тяготения В.А.Фока, даже для островных систем, фундаментальная роль условия гармоничности в декартовых координатах скорее была интуитивно угадана, чем доказана.

Во-первых, условие гармоничности возникло как техническое средство, упрощающее уравнения Гильберта—Эйнштейна. Но это упрощение достигается в любых криволинейных координатах риманова пространства. Почему их необходимо записывать в декартовых (галилеевых) координатах? Ведь таких координат в римановом пространстве нет. Здесь проявилась глубокая физическая интуиция В.А.Фока, основанная на ясном понимании, что ускорение абсолютно, оно не может быть относительным. Именно поэтому в теории тяготения Фока, по крайней мере для островных систем, возникли привилегированные системы координат, подобные тем, какие имеют место в специальной теории относительности. Фактически В.А.Фок имел дело с пространством Минковского в галилеевых координатах.

Во-вторых, почему нельзя было бы взять вместо условий гармоничности какие-либо другие условия и записать их также в декартовых координатах? Почему именно условия гармоничности в декартовых координатах приобретают в теории тяготения В.А.Фока фундаментальную роль? Они ведь не являются следствиями принципа наименьшего действия, они привносятся со стороны. Именно поэтому Фок не считал гармонические условия универсальными. Он особо отмечал, что *«гармонические координаты существуют не для любых распределений масс»*. Все это проясняется в РТГ, где общекосмологические уравнения (9) точно следуют из принципа наименьшего действия

как полевые уравнения. Они универсальны и справедливы для любого распределения вещества. В этом их отличие от гармонических условий, которые В.А.Фок применял только для островных систем. Уравнения (9) исключают из тензорного гравитационного поля представления со спинами 1 и 0' и оставляют представления со спинами 2 и 0. В РТГ силы инерции и гравитации разделены, они совершенно разной природы. Силы инерции можно уничтожить выбором инерциальной системы координат, тогда как гравитационное поле как физическую реальность никогда нельзя уничтожить выбором системы координат. Известное равенство инертной и гравитационной масс является прямым следствием предположения, что источником гравитационного поля является сохраняющийся тензор энергии-импульса всей материи, включая и гравитационное поле. Именно поэтому равенство инертной и тяжелой масс не может являться аргументом в пользу общего принципа относительности, поскольку причина равенства масс совершенно другая. Работы В.А.Фока чрезвычайно содержательны, и именно его физические положения, которые он закладывал в основу теории тяготения, нашли полное отражение в РТГ. Однако при этом пришлось полностью отказаться от концепции ОТО и ввести представление о гравитационном поле как физическом поле типа Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского. Поскольку В.А.Фок при развитии теории тяготения совершил ряд принципиальных шагов, которые выходили за рамки эйнштейновской общей теории относительности и углубляли физическую суть теории, мы сочли необходимым неоднократно, в каждом случае особо подчеркнуть эти обстоятельства.

Авторы выражают благодарность С.С.Герштейну и В.А.Петрову за ценные обсуждения.

Дополнение А

Запишем гармоническое условие в декартовых (галилеевых) координатах:

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}(x). \quad (A.1)$$

Здесь x^μ — декартовы координаты. В декартовых (галилеевых) координатах пространства Минковского

$$\gamma(x) = \det \gamma_{\mu\nu} = -1. \quad (A.2)$$

Согласно тензорному закону преобразования имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)}{\sqrt{-\gamma(y)}}, \quad (A.3)$$

y — произвольные координаты.

Запишем уравнение (A.1) в форме

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}(x)}{\partial y^\tau} . \quad (A.4)$$

Для дальнейших вычислений приведем формулы

$$\gamma_{\alpha\beta}^\nu(y) = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \cdot \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial y^\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \gamma_{\tau\lambda}^\lambda(y) . \quad (A.5)$$

Подставляя (A.3) в правую часть (A.4), получаем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0 . \quad (A.6)$$

Множитель второго члена запишем в форме

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\tau} \cdot \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \gamma_{\alpha\beta}^\sigma(y) . \quad (A.7)$$

Подставляя это выражение в (A.6), получаем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \gamma_{\alpha\beta}^\sigma(y) \tilde{g}^{\alpha\beta} \right) = 0 , \quad (A.8)$$

т.е. имеем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} D_\alpha \tilde{g}^{\alpha\sigma}(y) = 0 . \quad (A.9)$$

Здесь D_α — ковариантная производная в пространстве Минковского. Итак, нами установлено, что плотность тензора $\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)$ в произвольных координатах y удовлетворяет общеквариантному уравнению

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\nu\mu}(y) + \gamma_{\alpha\beta}^\mu(y) \tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = 0 , \quad (A.10)$$

если исходное гармоническое условие (A.1) записано в декартовых (галилеевых) координатах x .

Дополнение Б

Запишем уравнение (A.10) в несколько другой форме. Для этой цели, используя определение для символа Кристоффеля:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu(y) = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) , \quad (B.1)$$

найдем

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = \sqrt{-g} \left(g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} g_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} \right). \quad (Б.2)$$

Принимая во внимание равенства

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\sigma} \sqrt{-g}, \quad \partial_{\alpha} g^{\alpha\nu} = -g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} g_{\sigma\beta}, \quad (Б.3)$$

перепишем (Б.2) в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = -\sqrt{-g} \partial_{\sigma} g^{\sigma\nu} - g^{\nu\sigma} \partial_{\sigma} \sqrt{-g} = -\frac{\partial \tilde{g}^{\sigma\nu}}{\partial y^{\sigma}}. \quad (Б.4)$$

С учетом этого равенства уравнение (А.10) принимает вид

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(y) - \gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(y))g^{\alpha\beta} = 0. \quad (Б.5)$$

Если от координат y перейти к другим криволинейным координатам z , то символы Кристоффеля принимают вид

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(y) = \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}} \cdot \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial y^{\mu}} \cdot \frac{\partial z^{\beta}}{\partial y^{\nu}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}(z) + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu} \partial y^{\nu}} \cdot \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}. \quad (Б.6)$$

Используя это выражение, находим

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(y)g^{\mu\nu}(y) = \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}} \left[\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}(z)g^{\alpha\beta}(z) + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu} \partial y^{\nu}} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}} g^{\alpha\beta}(z) \right]. \quad (Б.7)$$

На основании (Б.4) выражение (Б.7) запишем в форме

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(y)g^{\mu\nu}(y) &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} \left(\tilde{g}^{\mu\sigma} \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}} \right) + \\ &+ g^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 y^{\lambda}}{\partial z^{\mu} \partial z^{\sigma}} + \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}} \cdot \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu} \partial y^{\nu}} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}} g^{\alpha\beta}(z). \end{aligned} \quad (Б.8)$$

Продифференцировав равенство

$$\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}} \cdot \frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\sigma} \quad (Б.9)$$

по z^{β} , получим

$$\frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu} \partial y^{\nu}} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}} = -\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial z^{\alpha} \partial z^{\beta}}. \quad (Б.10)$$

Учитывая это равенство, в третьем члене (Б.8) находим

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right). \quad (Б.11)$$

Подставляя это выражение в (Б.5), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right) = -\gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(y)g^{\alpha\beta}(y). \quad (Б.12)$$

Вводя обозначение

$$\square y^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right), \quad (Б.13)$$

мы можем записать уравнение (Б.12) в форме

$$\square y^{\lambda} = -\gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(y)g^{\alpha\beta}(y). \quad (Б.14)$$

Таким образом, вместо уравнения (А.10) нами получено то же уравнение в форме (Б.14). Согласно (Б.14) уравнение гармоничности Фока

$$\square y^{\lambda} = 0 \quad (Б.15)$$

имеет место, если символы Кристоффеля $\gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ всюду равны нулю. Это возможно, если интервал $d\sigma$ в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu},$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — произвольные постоянные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. Государственное изд-во физ.-мат. литературы, М., 1961.
2. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1939, т.9, №4, с.375.
3. **Логунов А.А.** — ЭЧАЯ, 1998, т.29, вып.1, с.5.
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
4. **Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — ДАН, 1998, т.360, №3, с.332.
5. **Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — ЯФ, 1998, т.61, №8, с.1526.
6. **Лоскутов Ю.М.** — ТМФ, 1990, т.82, №2, с.304.
Власов А.А., Логунов А.А. — ТМФ, 1989, т.78, №3, с.323.

FOCK'S THEORY OF HYDROGEN ATOM AND QUANTUM SPACE*

R.M.Mir-Kasimov **

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia
and
Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey

It is shown that Fock's theory of hydrogen atom gives an example of the nonrelativistic Snyder-like Quantum Geometry (QG).

Показано, что теория Фока атома водорода является примером нерелятивистской квантовой геометрии снайдеровского типа.

1. INTRODUCTION

Fock's theory of hydrogen atom [1] is a very bright landmark in the history of quantum theory. Many physicists trust that the meaning of this theory is much more general and important than the explanation of the symmetry of one specific atomic system though very important one. They believe that its actual meaning still must be understood, that it contains some "signal from the future", some features of the true quantum theory of particle interactions. The search for this more general sense of [1] can only be based on attempts to develop Fock's idea in this or in that way, making "experiments" on it, for example, generalizing it to the case of the relativistic quantum (field) theory. And attempts to interpret [1] in a new sense take place indeed. Works based on the historical paper [1] have permanently appeared since the time it was published in 1935, certifying the faith of the authors in its more profound destination.

In the present paper an attempt has been made to look at Fock's approach from the point of view of Quantum Geometry and noncommutative differential calculus. This work is a development of the article [9].

There are no grounds to transfer the geometric notions derived from the macroscopic experience to small (microscopic) distances. From the philosophical point of view this question has been discussed since ancient times. The term

*This work is partly supported by INTAS grant 93-127

**e-mail: < mirkr@thsun1.jinr.dubna.su >

”*αμερος*” has been introduced simultaneously with ”*ατομος*” and denotes the smallest, indivisible portion of the space.

The suggestions to consider geometry as a subject of quantization naturally appeared almost simultaneously with quantum theory itself. So, Quantum Geometry (QG) is as old as quantum theory itself. One of the first QG models was suggested by H.Snyder [2,3]. In this approach usual commuting position operators were changed for the noncommuting quantities of a concrete form. W.Pauli [3] stressed that new Snyder’s coordinate operators could be considered as boosts of the momentum space of constant curvature (De Sitter or Anti De Sitter momentum space). In other words, the Snyder quantization of space-time is based on the substitution of the pseudo-Euclidean geometry of the momentum space by the De Sitter geometry.

To be more exact, actually Snyder didn’t use the connection of his quantum coordinates with generators of the isometry group of the curved momentum space (see [3]). The idea to consider the momentum space with non-Euclidean geometry as a cornerstone of the theory with quantum space-time belongs to Yu.A.Golfand [5] and was developed by I.E.Tamm [6] and others [7–12].

Such a change of the geometry of the momentum space leads to the modification of the procedure of extension of the S matrix off the mass shell [11], i.e., to the different dynamical description. In fact, the statement on the geometry of the momentum space off the mass shell is an additional axiom of quantum field theory (QFT). Actually in the standard QFT, this axiom is accepted without saying. In the nonrelativistic theory, the extension off the energy shell on the ground of Schrödinger equation in the momentum space and Lippmann–Schwinger equation must be considered.

We can think that some background interaction exists, which modifies the geometry of the momentum space. See in this connection Ref. 8. As we have stressed above, all other axioms are fulfilled, including the standard translation invariance. The last means that there are relative coordinates (properly defined) which are the subjects of quantization [11]. In consequence of the change of the geometry of the p space, the space-time becomes quantum (noncommutative).

We stress that physical meaning of the geometry and topology of the momentum space has not obtained clear physical interpretation yet. The space-time groups considered in QFT as the covariance groups are the isometry groups of space-time.

It is worth mentioning a series of recent papers [14–16] where it has been shown that the curved momentum space and the corresponding Snyder-like quantum space naturally arise when considering the 2+1 model of gravity interacting with the scalar field. (The canonical momenta belong to the hyperboloid in four-dimensional projective hyperboloid.)

The explicit character of Snyder’s approach to space-time quantization has a remarkable consequence: we can define the spectrum of a commutative set

of operators constructed from $\hat{x}_\mu$ and other generators of the De Sitter group. As was shown in [11], the formulation of the generalized causality condition and QFT in terms of the points of this new numerical quantum space-time is as comprehensive procedure as it is in the usual QFT with the Minkovskian space-time. In this approach the structure of the singular field-theoretic functions is entirely reconstructed as compared to the standard QFT, and the corresponding perturbation theory is free of ultraviolet divergences.

In the present paper, we shall use Fock's theory of hydrogen atom symmetry to show that it is in fact the realization of the picture described above in the nonrelativistic case: The Coulomb field fulfills the role of the background interaction mentioned above, which provides the non-Euclidean geometry of momentum space. The modified shifts of the last (which are up to some similarity transformation the Runge–Lenz vector's components) can be considered as nonrelativistic analogs of Snyder's coordinates (2).

The paper is organized as follows. In Section 2, we consider Snyder's theory. In Section 3, we recall briefly the necessary moments of Fock's theory of hydrogen atom. Sections 4, 5 are devoted to the analysis of the spectrum and matrix elements of unitary irreducible representations of the isometry group of momentum space and the interpretation of the spectrum as quantum space (QS) is given. It is shown that the Schrödinger equation in QS is a differential-difference equation with the increment equal to Bohr's radius. In Section 6, an introduction to the noncommutative differential calculus with impact to apply it to the Schrödinger equation in QS is given. Section 7 contains the theory of the Schrödinger equation in QS as a noncommutative differential equation in QS. In the last 8th Section an example of integrable case (q-oscillator) of the generalized Schrödinger equation is given.

2. SNYDER APPROACH

In this approach the usual quantum mechanical coordinate operators

$$x_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial p^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (1)$$

i.e., the generators of translations of the Minkovski momentum space, are substituted by Snyder quantum coordinates $\hat{x}_\mu$, i.e., the generators of De Sitter boosts:

$$\hat{x}_\mu = il_0 \left(p^4 \frac{\partial}{\partial p^\mu} - p_\mu \frac{\partial}{\partial p^4} \right), \quad [\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = -il_0^2 \hat{M}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

where l_0 , the "fundamental length", indicates the scale at which the effects of QG become appreciable. A plausible candidate for this role is Planck's length $l_{Planck} = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}}$.

3. FOCK'S THEORY OF HYDROGEN ATOM

The Schrödinger equation for Hydrogen atom (we limit ourselves with the case of continuum part of spectrum)

$$H\psi(\vec{x}) = \left(E_p - \frac{e^2}{|\vec{x}|} \right) \psi(\vec{x}) = E_q \psi(\vec{x}) = \frac{q^2}{2\mu} \psi(\vec{x}), \quad (3)$$

where $E_p = \frac{p^2}{2\mu}$, $E_q = \frac{q^2}{2\mu}$, in the momentum representation takes the form

$$(p^2 - q^2) \psi(\vec{p}) = \frac{\hbar}{\pi^2 a} \int \frac{d^3 p' \psi(\vec{p}')}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2}, \quad (4)$$

where a is the atomic unit of length (Bohr's radius)

$$a = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}. \quad (5)$$

Recall that atomic units of energy, momentum and time are correspondingly

$$e_a = \frac{\mu e^4}{\hbar^2}, \quad \pi_a = \frac{\mu e^2}{\hbar}, \quad \tau_a = \frac{\hbar^3}{\mu e^4}. \quad (6)$$

Following V.A.Fock [1] we take into account the non-Euclidean geometry of momentum space, naturally arising here. For the continuous part of the energy spectrum it is pseudo-Euclidean 3-dimensional space of negative curvature (Lobachevsky space). Introducing 4-dimensional projective momenta P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) we have

$$\vec{P} = \frac{2q \vec{p}}{\vec{p}^2 - q^2}, \quad P_0 = \frac{\vec{p}^2 + q^2}{\vec{p}^2 - q^2}, \quad q = \sqrt{2\mu E}, \quad (7)$$

$$P_0^2 - \vec{P}^2 = 1, \quad (8)$$

or inverse relation

$$\vec{p} = \frac{q \vec{P}}{P_0 - 1}, \quad p^2 = q^2 \frac{P_0 + 1}{P_0 - 1}. \quad (9)$$

Equation (8) describes the two-sheet hyperboloid (the upper sheet corresponds to $1 \leq P_0 < +\infty$; the lower pole, to $-\infty < P_0 \leq -1$).

It is convenient to use the hyperspherical coordinates

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sinh \alpha \vec{n}, \quad P_0 = \pm \cosh \alpha, \\ \vec{n} &= \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \end{aligned} \quad (10)$$

The volume element in the Lobachevsky space is

$$d\Omega_P = \frac{d^3 P}{|P_0|} = \sinh^2 \alpha \sin \theta d\alpha d\theta d\phi. \quad (11)$$

The distance $s(P, P')$ of two points of the Lobachevsky space (8) is given by

$$\cosh s(P, P') = \left| 1 - \frac{(P - P')^2}{2} \right|. \quad (12)$$

In terms of P_μ equation (4) takes the form

$$\Phi_r(P) = \frac{r}{2\pi^2 a} \int \frac{d\Omega_{P'}}{(P - P')^2} \Phi_r(P'), \quad (13)$$

where

$$\Phi_r(P) = (p^2 - q^2)^2 \psi(\vec{p}), \quad r = \frac{\hbar}{q}. \quad (14)$$

This equation is manifestly invariant under the group of motions of the Lobachevsky momentum space which is Lorentz group. The generators of the Lorentz group boosts

$$\hat{x}_i = -i \left[P_0 \frac{\partial}{\partial P^i} - P_i \frac{\partial}{\partial P^0} \right] \quad (15)$$

up to some similarity transformation coincide with the additional integrals of motion of the Coulomb problem, i.e., Runge–Lenz invariants. From the other side their similarity to Snyder coordinates (2) is evident.

4. WAVE FUNCTIONS AND DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SCHRÖDINGER EQUATION IN QUANTUM SPACE

As was shown by V.A.Fock [1] the solutions of the Schrödinger equation in momentum space (13) are the eigen-functions of the Laplace–Beltrami operator on the Lobachevsky space (8), or the Casimir operator of the Lorentz group:

$$\left(\vec{x}^2 - \frac{1}{\hbar^2} \vec{L}^2 \right) \Phi_r(P) = \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) \Phi_r(P), \quad (16)$$

where $\vec{L}$ is the vector of angular momentum operators. The solutions of (16) are the matrix elements of unitary irreducible (infinite dimensional) representations of the Lorentz group. For the principal series of unitary representations of the Lorentz group the parameter r runs over the interval

$$0 \leq r < \infty \quad (17)$$

which coincides with the physically admissible region of variation (see (14)). From the other side the interval (17) is the range of variation of the relative distance in the three-dimensional Euclidean space. Taking these properties of r into account we interpret the parameter r as the relative distance in the quantum space [8, 10].

Let us consider the quantities

$$\Phi_r(P) = \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle = \left| P_0 - \vec{P} \vec{n}_r \right|^{-1 - i \frac{r}{a}}, \quad (18)$$

where

$$\vec{r} = r \vec{n}_r, \quad \vec{n}_r^2 = 1. \quad (19)$$

Expression (18) from the one hand is the solution of the equation (16), from the other hand it is the generating function for the radial solutions of the Schrödinger equation in the momentum space (13). The expression (18) plays the role of the plane wave in quantum r space. The radial solutions of the Schrödinger equation in the momentum space can be obtained from the expansion in spherical harmonics:

$$\langle \vec{r} | \vec{P} \rangle = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} i^l \langle \rho, l, | \alpha \rangle \langle \vec{n}_r | l, m \rangle \langle l, m | \vec{n} \rangle, \quad (20)$$

where ρ is the dimensionless parameter:

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (21)$$

and

$$\langle l, m | \vec{n} \rangle = \langle l, m | \theta, \phi \rangle = Y_{lm}(\vec{n}), \quad \langle \vec{n} | l, m \rangle = Y_{lm}^*(\vec{n}). \quad (22)$$

The functions $\langle \rho, l | \alpha \rangle$ are the radial wave functions of the Coulomb problem in the momentum space. They can be obtained also as the Fourier transforms of the radial solutions in configurational space. We present the different representations of $\langle \rho, l | \alpha \rangle$ in terms of Legendre functions $P_{i\rho - \frac{1}{2}}^{-l - \frac{1}{2}}(\cosh \alpha)$:

$$\langle \rho, l | \alpha \rangle = (-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2 \sinh \alpha}} \frac{\Gamma(i\rho + l + 1)}{\Gamma(i\rho + 1)} P_{i\rho - \frac{1}{2}}^{-l - \frac{1}{2}}(\cosh \alpha), \quad (23)$$

the Gegenbauer functions $C_{i\rho-l-1}^{l+1}(\cosh \alpha)$:

$$\begin{aligned} & \langle \rho, l | \alpha \rangle = \\ & (-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2 \sinh \alpha}} \left(\frac{\sinh \alpha}{2} \right)^{l+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(2l+2) \Gamma(i\rho-l)}{\Gamma(i\rho+1) \Gamma(l+\frac{3}{2})} C_{i\rho-l-1}^{l+1}(\cosh \alpha), \end{aligned} \quad (24)$$

and hypergeometric function ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$:

$$\begin{aligned} \langle \rho, l | \alpha \rangle &= (-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2 \sinh \alpha}} \left(\frac{\sinh \alpha}{2} \right)^{l+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(i\rho+l+1)}{\Gamma(i\rho+1) \Gamma(l+\frac{3}{2})} \times \\ & \times {}_2F_1 \left(i\rho+l+1, -i\rho+l+1; l+\frac{3}{2}; -\sinh^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &= (-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2 \sinh \alpha}} \left(\frac{\sinh \alpha}{2} \right)^{l+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(i\rho+l+1)}{\Gamma(i\rho+1) \Gamma(l+\frac{3}{2})} e^{\alpha(i\rho-l-1)} \times \\ & \times {}_2F_1 \left(-i\rho+l+1, l+1; 2l+2; 2e^{-\alpha} \sinh \alpha \right) = \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-i \frac{\sinh \alpha}{2} \right)^l \frac{\Gamma(i\rho+l+1)}{\Gamma(i\rho+1) \Gamma(l+\frac{3}{2})} \times \\ & \times {}_2F_1 \left(\frac{i\rho+l+1}{2}, \frac{-i\rho+l+1}{2}; l+\frac{3}{2}; -\sinh^2 \alpha \right). \end{aligned} \quad (27)$$

These different representations are convenient for performing the contraction limit when we consider in the next section the correspondence with usual (non-quantum) space limit. The following orthogonality and completeness conditions for the radial solutions are valid

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sinh^2 \alpha \, d\alpha \langle \rho, l | \alpha \rangle \langle \alpha | \rho', l \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^2}, \quad (28)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \rho^2 d\rho \langle \alpha | \rho, l \rangle \langle \rho, l | \alpha' \rangle = \frac{\delta(\alpha - \alpha')}{\sinh^2 \alpha}, \quad (29)$$

and corresponding conditions for the plane waves (18):

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle \langle \vec{P} | \vec{r}' \rangle d\Omega_P = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (30)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \vec{P} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{P}' \rangle d^3r = \delta(\vec{P} - \vec{P}') P_0. \quad (31)$$

The plane wave in quantum space and its radial part obey the following equations off the energy shell, i.e., for $E_p \neq E_q$ or $p \neq q$:

$$e_a \left[\cosh \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{i}{\rho} \sinh \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\Delta_{\theta, \phi}}{\rho^2} e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} - 1 \right] \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle =$$

$$= \hat{H}_0 \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle = E_P \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle, \quad (32)$$

$$e_a \left[\cosh \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{i}{\rho} \sinh \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} - 1 \right] \langle \rho, l | \alpha \rangle =$$

$$= \left(\hat{H}_{0l} - E_P \right) \langle \rho, l | \alpha \rangle, \quad (33)$$

where $E_P = e_a (|P_0| - 1) = 2e_a \sinh^2 \frac{\alpha}{2}$, $e_a = \frac{\mu e^4}{\hbar^2}$ is the atomic unit of energy. The strong argument for the idea that plane wave $\langle \vec{r} | \vec{P} \rangle$ describes the free motion in the quantum r space is the existence of three more differential-difference operators $\hat{p}_i$ for which $\langle \vec{r} | \vec{P} \rangle$ is the eigenfunction with eigenvalues equal to the momentum components

$$\hat{p}_i \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle = p_i \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle, \quad (34)$$

where

$$\hat{p}_1 = \pi_a \left\{ \sin \theta \cos \phi \left(e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} - \hat{H}_0 \right) - i \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} \right\}$$

$$\hat{p}_2 = \pi_a \left\{ \sin \theta \sin \phi \left(e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} - \hat{H}_0 \right) - i \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} \right\}$$

$$\hat{p}_3 = \pi_a \left\{ -\cos \theta \left(e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} - \hat{H}_0 \right) + i \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} \right\} \quad (35)$$

$\pi_a = \frac{\mu e^2}{\hbar}$ is the atomic unit of momentum.

It looks now quite natural to make the next step and introduce the interaction term $V(r)$ into the free differential-difference Schrödinger equation in quantum space (32). From the usual point of view this corresponds to some perturbations for the Coulomb potential. We stress that there are even integrable cases for such differential-difference equations (see [13] and references therein).

5. CONTRACTION

The important requirement to the theory with curved momentum space is its correspondence with the usual theory. In the physical regime, when we can neglect the effects of curvature, all relations must go over into the usual ones. Let us first analyse this problem in the momentum space (7). The vicinities of the tops of both poles

$$P_0 \approx \pm 1 \quad (36)$$

carry the flat geometry. For these regions we are in the regime when the Inönü–Wigner contraction [17] is an actual approach. For example Snyder's quantum coordinate operators (15) go over into usual coordinate operators (1) in these regions.

The tops of the hyperboloid (8) are:

$$P_0 = 1 \text{ or } q \cong 0, \text{ i.e. } \rho \gg \frac{\pi_a}{|\vec{p}|}, \quad (37)$$

$$P_0 = -1 \text{ or } q \rightarrow \infty, \text{ i.e. } |\vec{p}| \ll \frac{\pi_a}{\rho}. \quad (38)$$

In classical physics the small p -s correspond to great impact parameters. In this regime the scattered particle slightly feels the Coulomb field. In the case of the bound states we must consider the orbits corresponding to big values of principal quantum number n . In the contraction limit all finite-difference relations reduce to standard differential relations of Quantum Mechanics. For example the differential-difference operators of momentum (35) reduce to usual momentum operators

$$\hat{p}_i e^{\frac{i\vec{r}\vec{P}}{\hbar}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} e^{\frac{i\vec{r}\vec{p}}{\hbar}} = p_i e^{\frac{i\vec{r}\vec{p}}{\hbar}}, \quad (39)$$

and the plane wave (18) converts to usual exponential function:

$$\begin{aligned} & \left| P_0 - \vec{P} \vec{n}_r \right|^{-1-i\frac{r}{a}} \\ & \langle \vec{r} | \vec{P} \rangle = \exp \left\{ - \left(1 + i\frac{r}{a} \right) \ln \left(P_0 - \vec{P} \vec{n}_r \right) \right\} \approx \\ & \approx \exp \left\{ - \left(1 + i\frac{r}{a} \right) \ln \left(1 - \vec{P} \vec{n}_r + \dots \right) \right\} \approx \\ & \approx \exp \left\{ i\frac{r}{a} \vec{P} \vec{n}_r + \dots \right\} \approx e^{i\frac{\vec{P}\vec{x}}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (40)$$

6. NONCOMMUTATIVE DIFFERENTIAL CALCULUS AND FINITE-DIFFERENCE DERIVATIVES

We start this section with an historical remark. Referring to the second Snyder's paper on quantum space (the second paper of [2]) we invite the reader to convince that his generalization of Maxwell's equations for the case of QG is based, in fact, on a version of the noncommutative differential calculus.

Let us show that the finite-difference Schrödinger equation (33) is naturally described in terms of noncommutative differential calculus [18–23]. This calculus can be naturally and most easily introduced on a ground of the theory of differential forms as its deformation. We shall limit ourselves with the differential calculus over the associative algebra A over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. In our case the necessity to consider an algebra over $\mathbb{C}$ follows from the form of the finite-difference Schrödinger equation, containing shifts by the imaginary quantity ia . This is general property of the finite-difference Schrödinger equation (33) corresponding to the continuous part of the spectrum of hydrogen atom, requiring to consider the wave functions in the complex ρ plane. Finite linear combinations of elements of A and finite products are again elements of A . The multiplication is associative. A differential calculus on A is a $\mathbb{Z}$ -graded associative algebra over $\mathbb{C}$

$$\Omega(A) = \sum_{r=0} \oplus \Omega^r(A), \quad (41)$$

$$\Omega^0(A) = A, \quad \Omega^r(A) = \{0\} \forall r < 0. \quad (42)$$

The elements of $\Omega^r(A)$ are called r forms. There exist an exterior derivative operator d which satisfies the following conditions

$$d^2 = 0 \quad (43)$$

and

$$d(\omega\omega') = (d\omega)\omega' + (-1)^r \omega d\omega', \quad (44)$$

where ω and ω' are r and r' forms, respectively. A is the commutative algebra generated by the coordinate functions x^i , $i = 1, \dots, n$. In the standard differential calculus on usual manifolds differentials commute with functions:

$$[x^i, dx^j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (45)$$

in terms of real coordinates x^i . For us it is essential that (45) can be generalized (deformed) in different ways with (41)–(44) still true. Let us consider in more detail the deformation of (45) of the form

$$[x^i, x^j] = 0, \quad (46)$$

$$[x^i, dx^j] = \sum_{k=1}^n dx^k C^{ij}_k, \quad (47)$$

where the C^{ij}_k are (complex) constants which are constrained by the requirement of a consistent differential calculus.

- Let us apply d to (46) and use (47), this gives

$$d[x^i, x^j] = -[x^j, dx^i] + [x^i, dx^j] = \quad (48)$$

$$= -\sum_{k=1}^n dx^k C^{ji}_k + \sum_{k=1}^n dx^k C^{ij}_k = 0,$$

or

$$C^{ij}_k = C^{ji}_k. \quad (49)$$

This means in particular

$$[x^i, dx^j] = [x^j, dx^i]. \quad (50)$$

The last relation can be proved directly:

$$\begin{aligned} [x^i, dx^j] &= (dx^i) x^j - x^j dx^i = \\ &= \underbrace{d(x^i x^j - x^j x^i)}_{=0} + x^j dx^i - x^i dx^j = [x^j, dx^i]. \end{aligned} \quad (51)$$

- Taking the commutator of dx^i with (46) we obtain

$$\begin{aligned} [[x^i, dx^j], dx^k] &= \\ &= x^i \left\{ dx^k x^j + \sum_{l=1}^n dx^l C^{jk}_l \right\} - x^j \left\{ dx^k x^i + \sum_{l=1}^n dx^l C^{ik}_l \right\} - \\ &\quad - dx^k (x^i x^j - x^j x^i) = \\ &= \left\{ dx^k x^i + \sum_{m=1}^n dx^m C^{ik}_m \right\} x^j + \sum_{l=1}^n \left\{ dx^l x^i + \sum_{m=1}^n dx^m C^{il}_m \right\} C^{jk}_l - \quad (52) \\ &\quad - \left\{ dx^k x^j + \sum_{m=1}^n dx^m C^{jk}_m \right\} x^i - \sum_{l=1}^n \left\{ dx^l x^j + \sum_{m=1}^n dx^m C^{jl}_m \right\} C^{ik}_l - \end{aligned}$$

$$dx^k (x^i x^j - x^j x^i) = \sum_{l,m=1}^n dx^m (C^{il}_m C^{jk}_l - C^{jl}_m C^{ik}_m) = 0,$$

or

$$\sum_{l=1}^n C^{ik}_l C^{jl}_m = \sum_{l=1}^n C^{jk}_l C^{il}_m, \quad (53)$$

using (49) the last equation can also be written in a form

$$\sum_{l=1}^n C^{k[i}_l C^{j]l}_m = 0. \quad (54)$$

This means that n matrices C^i with entries C^{ik}_l mutually commute.

• Taking the commutator of x^k with (47) also yields (53) and therefore no additional conditions.

Acting with d on (47) and using the Leibniz rule (44) we obtain the classical commutation rule

$$dx^i dx^j = -dx^j dx^i \quad (55)$$

for differentials. The equations obtained by commuting x^k through these relations are identically satisfied.

The Hodge $*$ operator (or duality transformation) for the noncommutative differential forms is introduced by the standard formula

$$* (dx^{i_1} \dots dx^{i_k}) = \frac{1}{(n-k)!} \sum \epsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} dx^{i_{k+1}} \dots dx^{i_n}. \quad (56)$$

For convenience we shall make difference between right $\vec{*}$ and left $\overleftarrow{*}$ Hodge operators. By definition $\vec{*}$ acts on the forms of the type

$$\sum (dx^{i_1} \dots dx^{i_k} f(x)), \quad (57)$$

$\overleftarrow{*}$ acts on the forms of the type

$$\sum (f(x) dx^{i_1} \dots dx^{i_k}) \quad (58)$$

in both cases by the standard formula (56). Action of the operator $\vec{*}$ on the forms of the type (58) and action of the operator $\overleftarrow{*}$ on the forms of the type (57) gives 0. Correspondingly we introduce right and left δ operations

$$\vec{\delta} = \vec{*} d \vec{*}, \quad \overleftarrow{\delta} = \overleftarrow{*} d \overleftarrow{*}. \quad (59)$$

Let A be the algebra of all functions on $\mathbb{C}$. In what follows we consider the one-dimensional case. It is generated by canonical coordinate function of one

variable $\psi(\rho) = \rho$. One of the simplest deformations of the ordinary differential calculus on A is

$$[d\rho, \rho] = \frac{i}{2} d\rho, \quad (60)$$

where i (in dimensional units ia) is the step in the finite-difference Schrödinger equation. To establish the connection between the noncommutative differential calculus and finite-difference operations (in Schrödinger eq.) is our goal here. This is a special case of the commutation structure (47) considered above. Similar relations are encountered when considering the differential calculus on the lattice [18–23]. Equation (60) can be rewritten in a form

$$d\rho \rho = \left(\rho + \frac{i}{2} \right) d\rho, \quad (61)$$

which can be generalized to the total algebra A as

$$d\rho \psi(\rho) = \psi \left(\rho + \frac{i}{2} \right) d\rho. \quad (62)$$

Then we can introduce the generalized derivatives (left and right) corresponding to our deformed differential calculus. For the left derivative we write

$$d\psi(\rho) = \left(\vec{\partial} \psi(\rho) \right) d\rho. \quad (63)$$

From Leibniz rule (44) we have

$$\begin{aligned} d(\psi(\rho) \varphi(\rho)) &= d\rho \left(\vec{\partial} (\psi(\rho) \varphi(\rho)) \right) = (d\psi(\rho)) \varphi(\rho) + \psi(\rho) (d\varphi(\rho)) = \\ &= d\rho \left(\vec{\partial} \psi(\rho) \right) \varphi(\rho) + \psi(\rho) d\rho \left(\vec{\partial} \varphi(\rho) \right) \end{aligned} \quad (64)$$

after using (62)

$$d(\psi(\rho) \varphi(\rho)) = d\rho \left(\vec{\partial} \psi(\rho) \right) \varphi(\rho) + d\rho \psi \left(\rho + \frac{i}{2} \right) \left(\vec{\partial} \varphi(\rho) \right). \quad (65)$$

Now from the commutativity rule (46)

$$\psi(x) \varphi(x) = \varphi(x) \psi(x) \quad (66)$$

it follows also that equivalent Leibniz rule is valid

$$\begin{aligned} d(f(x) g(x)) &= dx \left(\vec{\partial} (f(x) g(x)) \right) = (dg(x)) f(x) + g(x) (df(x)) = \\ &= dx \left(\vec{\partial} g(x) \right) f(x) + dx g \left(x + \frac{i}{2} \right) \left(\vec{\partial} f(x) \right). \end{aligned} \quad (67)$$

Equalizing (65) and (67) we obtain

$$\left(\vec{\partial} \psi(\rho)\right) \left[\varphi(\rho + i\frac{a}{2}) - \varphi(\rho)\right] = \left(\vec{\partial} \varphi(\rho)\right) \left[\psi(\rho + \frac{I}{2}) - \psi(\rho)\right], \quad (68)$$

or

$$\frac{\vec{\partial} \psi(\rho)}{\psi(\rho + \frac{i}{2}) - \psi(\rho)} = \frac{\vec{\partial} \varphi(\rho)}{\varphi(\rho + \frac{i}{2}) - \varphi(\rho)} = \text{const}, \quad (69)$$

where *const* is the same for any function under differentiation. To calculate this *const* we choose

$$\psi(\rho) = \rho. \quad (70)$$

This gives

$$d\rho = d\rho \left(\vec{\partial} \rho\right) \implies \left(\vec{\partial} \rho\right) = 1 \quad (71)$$

and

$$\text{const} = \frac{\vec{\partial} \rho}{(\rho + \frac{i}{2}) - \rho} = \frac{2}{i}. \quad (72)$$

The ultimate expression for the left partial derivative is

$$\vec{\partial} \psi(\rho) = \frac{\psi(\rho + \frac{i}{2}) - \psi(\rho)}{\frac{i}{2}}. \quad (73)$$

The expression for the right derivative $\overleftarrow{\partial} \psi(\rho)$ is obtained in a similar way and has the form

$$\overleftarrow{\partial} \psi(\rho) = \frac{\psi(\rho) - \psi(\rho - \frac{i}{2})}{\frac{i}{2}}. \quad (74)$$

7. NONCOMMUTATIVE DIFFERENTIAL CALCULUS AND SCHRÖDINGER EQUATION IN QUANTUM SPACE

In this section we shall apply the noncommutative differential calculus of previous section to the Schrödinger equation (33). Let us exclude the "first finite-difference radial derivative" from this equation making a substitution

$$\psi_l(\rho) = \frac{<\rho, l | \alpha>}{\rho}. \quad (75)$$

Recall that similar substitution excludes the first radial derivative in the usual Schrödinger (differential) equation. Taking into account the following rules for finite-difference operations $\sinh\left(i\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$ and $\cosh\left(i\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$:

$$\sinh i\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho)\varphi(\rho) =$$

$$= \sinh i \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho) \cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho) + \cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho) \sinh i \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho) \quad (76)$$

$$\begin{aligned} & \cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho) \varphi(\rho) = \\ & = \cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho) \cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho) + \sinh i \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho) \sinh i \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho) \end{aligned} \quad (77)$$

and relations

$$\cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} = \frac{\rho}{\rho^2 + 1}, \quad \sinh i \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} = \frac{-i}{\rho^2 + 1}, \quad (78)$$

we obtain

$$\begin{aligned} & e_a \left[\cosh \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{l(l+1)}{2\rho} e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} \frac{1}{\rho} - 1 + V(\rho) - E_P \right] \psi_l(\rho) = \\ & = e_a \left[2 \sinh^2 \left(\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{l(l+1)}{2\rho} e^{i \frac{\partial}{\partial \rho}} \frac{1}{\rho} + V(\rho) - E_P \right] \psi_l(\rho) = \\ & = \left(\rho \hat{H}_{0l} \frac{1}{\rho} + V(\rho) - E_P \right) \psi_l(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Let us consider the expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\vec{\delta} d + \overleftarrow{\delta} d \right) \psi(\rho) = \frac{1}{2} \left(\vec{\delta} + \overleftarrow{\delta} \right) d \psi(\rho) = \frac{1}{2} \left(\vec{*} d \vec{*} d + \overleftarrow{*} d \overleftarrow{*} d \right) \psi(\rho) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\vec{\delta} + \overleftarrow{\delta} \right) \left(\left(\vec{\partial} \psi(\rho) \right) d\rho + d\rho \left(\overleftarrow{\partial} \psi(\rho) \right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\vec{\delta} + \overleftarrow{\delta} \right) \left[\left(\frac{\psi(\rho + \frac{i}{2}) - \psi(\rho)}{\frac{i}{2}} \right) d\rho + d\rho \left(\frac{\psi(\rho) - \psi(\rho - \frac{i}{2})}{\frac{i}{2}} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left(\vec{*} + \overleftarrow{*} \right) d \left[\frac{\psi(\rho + \frac{i}{2}) - \psi(\rho - \frac{i}{2})}{\frac{i}{2}} \right] = \\ & - \left(\vec{*} + \overleftarrow{*} \right) \left[\left(\psi(\rho + i) - \psi(\rho) - \psi(\rho + \frac{i}{2}) + \psi(\rho - \frac{i}{2}) \right) d\rho + \right. \\ & \left. + d\rho \left(\psi(\rho - i) - \psi(\rho) + \psi(\rho + \frac{i}{2}) - \psi(\rho - \frac{i}{2}) \right) \right] = \\ & = -2 \left(\cosh i \frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right) \psi(\rho) = -4 \sinh^2 \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho). \end{aligned} \quad (80)$$

Using this result we can define left and right momentum operators in the form

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{*} d, \quad \overleftarrow{p} = -i\hbar \overleftarrow{*} d \quad (81)$$

and free particle momentum operator

$$\hat{p} = \frac{1}{2} \left(\vec{p} + \overleftarrow{p} \right), \quad (82)$$

where $\vec{p}$ is not a vector but the right momentum operator! So, the first term in (79) takes the form

$$\frac{\hat{p}^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \left(-2\pi_0 \sinh \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2. \quad (83)$$

The centrifugal term in (79) can be written in the form

$$\frac{l(l+1)}{\rho(\rho+i)} e^{i\frac{\partial}{\partial \rho}} = \frac{1}{\rho} \frac{\overrightarrow{\lambda}^2}{\lambda} \frac{1}{\rho}, \quad (84)$$

where

$$\overrightarrow{\lambda} = \sqrt{l(l+1)} \left(1 - \frac{\vec{p}}{2\pi_0} \right). \quad (85)$$

Ultimately we obtain the Schrödinger equation in quantum space in terms of noncommutative differential calculus as

$$H\psi_l(\rho) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{\rho} \frac{\overrightarrow{\lambda}^2}{\lambda} \frac{1}{\rho} + V(\rho) \right) \psi_l(\rho) = E_P \psi_l(\rho). \quad (86)$$

8. LINEAR OSCILLATOR = q -OSCILLATOR IN QUANTUM SPACE

From the usual point of view the interaction term $V(\rho)$ in the differential-difference Schrödinger equation (32) corresponds to the perturbed Coulomb potential. Let us consider an example of integrable case for the Schrödinger equation with interaction. We write the ladder operators

$$\begin{aligned} a^\pm &= \mp \frac{i}{\sqrt{2}\pi_a \cos \frac{r}{2l_0}} e^{\pm \frac{1}{2} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2} \left(\hat{p} \right) e^{\mp \frac{1}{2} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2} \\ &= \pm \frac{i\sqrt{2}}{\cos \frac{r}{2l_0}} e^{\pm \frac{1}{2} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2} \left(\sinh \frac{ia}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) e^{\mp \frac{1}{2} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2}, \end{aligned} \quad (87)$$

$\hat{p}$ is the noncommutative differential operator of radial momentum introduced in previous section, ω is the frequency, λ_0 is a parameter of dimension of length:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}. \quad (88)$$

The ladder operators (87) obey the deformed commutation relation

$$[a^-, a^+]_q = qa^-a^+ - q^{-1}a^+a^- = 2(q^{-1} - q), \quad (89)$$

which guarantees the exact solubility of this finite-difference problem, q is a dimensionless quantity, parameter of deformation, which is expressed in terms of physical parameters:

$$q = e^{-\frac{a^2}{4\lambda_0^2}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{4e_a}} = e^{-\frac{\omega\hbar^3}{4\mu e^4}}. \quad (90)$$

We introduce the Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \{a^-, a^+\}_q = \frac{1}{2} \{qa^-a^+ + q^{-1}a^+a^-\} \quad (91)$$

obeying deformed commutation relations with ladder operators

$$\left[a^\pm, \hat{H} \right]_{q^{\mp 1}} = \pm (q^2 - q^{-2}) a^\pm, \quad (92)$$

which in fact guarantee the integrability, and obtain the energy spectrum

$$E_n = 2e_a \left(e^{\frac{\hbar\omega}{2e_a}(n+\frac{1}{2})} - \cosh \frac{\hbar\omega}{4e_a} \right). \quad (93)$$

This integrable case can be easily identified with the well-known q oscillator.

REFERENCES

1. **Fock V.A.** — Zs. Phys., 1935, v.98, p.145.
2. **Snyder H.** — Phys. Rev., 1947, v.71, p.38; *ibid* 1947, v.72, p.68.
3. **Pauli W.**, unpublished, see footnote in the first Snyder's paper.
4. **Yang C.N.** — Phys. Rev., 1947, v.72, p.874.
5. **Gelfand Yu.A.** — Sov. Phys. JETP, 1963, v.16, p.184; *ibid* 1964, v.17, p.848.
6. **Tamm I.E.** — Collection of Scientific Works, Nauka Publishers, Moscow, 1975.
7. **Kadyshevsky V.G.** — Sov. Phys. JETP, 1961, v.14, p.1340; Sov. Phys. Doklady, 1963, v.7, p.235; *ibid*, 1963, v.7, p.1031.

8. **Mir-Kasimov R.M.** — Sov. Phys. JETP, 1966, v.22, p.629; *ibid*, 1966, v.22, p.807.
9. **Mir-Kasimov R.M.** — Sov. Phys. JETP, 1967, v.25, p.348.
10. **Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B.** — Nuovo Cimento, 1968, v.55A, p.233.
11. **Donkov A., Kadyshevsky V.G., Mateev M., Mir-Kasimov R.M.** — In: Proceedings of V.A.Steklov Mathematical Institute, CXXXVI, 1975, p.85.
12. **Kadyshevsky V.G., Fursaev D.V.** — Theor. and Math. Phys, 1990, v.83, p.197.
13. **Mir-Kasimov R.M.** — Phys. Lett. B, 1991, v.259, p.79; J. Phys., 1991, v.A24, p.4283; Phys. Lett. B, 1996, v.378, p.181; Turkish Journal of Physics, 1997, v.21, p.472; Int. Journ. Mod. Phys., 1997, v.12, No.1, p.24; Yadernaya Fizika, (Physics of Atomic Nuclei), 1998, v.61, No.11, p.1951.
14. **Deser S., Jackiw R., 't Hooft G.** — Ann. Phys., 1988, v.117, p.685.
15. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1988, v.B311, p.46.
16. **'t Hooft G.** — Class. Quant. Grav., 1996, v.13, p.1023.
17. **Inönü E., Wigner E.** — Nuovo Cimento, 1952, v.IX, p.705.
18. **Woronowich S.L.** — Commun. Math. Phys., 1989, v.122, p.125.
19. **Wess J., Zumino B.** — Nucl. Phys. (Proc.Suppl.), 1990, v.B18, p.302.
20. **Dubois-Violette M., Kerner R., Madore J.** — Journ. Math. Phys., 1990, v.31, p.323.
21. **Connes A.** — Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.
22. **Madore J.** — An Introduction to Noncommutative Geometry and Its Physical Applications, Cambridge University Press, 1995.
23. **Dimakis A., Müller-Hoissen F.** — Journ. Math. Phys., 1998, v.40, p.1518.

TOPOLOGICAL EFFECTS IN MEDIUM

A.N.Sissakian, O.Yu.Shevchenko, S.B.Solganik***

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

Developing Fock's ideas, we consider here the topological effects in the gauge field theory. Two closely related topological phenomena are studied at finite density and temperature. These are chiral anomaly and the Chern–Simons term. It occurs that the chiral anomaly doesn't depend on density and temperature. The Chern–Simons term appearance in even dimensions is studied under two types of constraints: chiral and usual charges conservation. In odd dimensions, by using different methods, it is shown that $\mu^2 = m^2$ is the crucial point for Chern–Simons at zero temperature. So when $\mu^2 < m^2$, μ influence disappears and we get the usual Chern–Simons term. On the other hand, when $\mu^2 > m^2$, the Chern–Simons term vanishes because of nonzero density of background fermions. The connection between parity anomalous Chern–Simons in odd dimension and chiral anomaly in even dimension is established at arbitrary density and temperature. These results hold in any dimension both in Abelian and in non-Abelian cases.

Развивая идеи Фока, мы рассматриваем здесь топологические эффекты в теории калибровочных полей. Изучаются два тесно связанных топологических эффекта при конечных плотности и температуре. Это киральная аномалия и черн-саймоновский член. Оказывается, что киральная аномалия не зависит от температуры и плотности. Генерация черн-саймоновского члена изучается в четномерных пространствах при двух типах связей, отражающих сохранение кирального и обычного зарядов. В нечетномерных пространствах при использовании различных методов показывается, что $\mu^2 = m^2$ является критической точкой для черн-саймоновского члена при нулевой температуре. Так, в случае, когда $\mu^2 < m^2$, μ -зависимость исчезает и мы получаем обычный черн-саймоновский член. С другой стороны, когда $\mu^2 > m^2$, черн-саймоновский член исчезает благодаря ненулевой плотности фоновых фермионов. Устанавливается связь между P -аномальным черн-саймоновским членом в нечетномерных и киральной аномалией в четномерных пространствах при произвольных плотностях и температуре. Эти результаты имеют силу при любой размерности как в абелевом, так и в неабелевом случаях.

1. INTRODUCTION

Famous Russian theorist V.A. Fock was one of the first physicists who realized [1] the whole importance of topological phenomenons both in gauge field theory and in general relativity (which, as is well known, may also be viewed as a gauge theory). Namely this interesting subject is the topic of our review article.

*E-mail: shevch@nusun.jinr.ru

**E-mail: solganik@thsun1.jinr.ru

There is a lot of physical processes where density and temperature play essential role. These are processes occurred under large density background, for example, in quark-gluon plasma or in neutron stars. On the other hand, there exist processes where even negligible density or temperature may give rise to principal effects. One of the most interesting areas, where density and temperature influence could be considerable, is the area of topological effects. Here, even negligible density or temperature could change the topology of the problem as a whole, what could lead to considerable influence. In particular, here we are interested in the Chern–Pontriagin and the Chern–Simons secondary characteristic classes. That corresponds to chiral anomaly in even dimensions and to Chern–Simons (parity anomaly) in odd dimensions. Both phenomena are very important in quantum physics. So, chiral anomalies in quantum field theory have certain direct applications to the decay of π_0 into two photons ($\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$), in the understanding and solution of the U(1) problem and so on. On the other hand, there are many effects caused by the Chern–Simons secondary characteristic class. These are, for example, gauge particles mass appearance in quantum field theory, applications to condense matter physics such as the fractional quantum Hall effect and high T_c superconductivity, possibility of free of metric tensor theory construction, etc.

It must be emphasized that these two phenomena are closely related. As was shown (at zero density) in [2–4] the trace identities connect even dimensional anomaly with the odd dimensional Chern–Simons. The main goal of this article is to consider these anomalous objects at finite density and temperature.

It was shown [5,6] in a conventional zero density and temperature gauge theory that the Chern–Simons term is generated in the Euler–Heisenberg effective action by quantum corrections. Since the chemical potential term $\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi$ is odd under charge conjugation we can expect that it would contribute to P - and CP -nonconserving quantity — the Chern–Simons term. As we will see, this expectation is completely justified. The zero density approach usually is a good quantum field approximation when the chemical potential is small as compared with characteristic energy scale of physical processes. Nevertheless, for investigation of topological effects it is not the case. As we will see below, even a small density could lead to principal effects.

In the excellent paper by Niemi [2] it was emphasized that the charge density at $\mu \neq 0$ becomes nontopological object, i.e., contains both topological part and nontopological one. The charge density at $\mu \neq 0$ (nontopological, neither parity odd nor parity even object)* in QED_3 at finite density was calculated and exploited in [8]. It must be emphasized that in [8] charge density (calculated in the constant pure magnetic field) contains as well parity odd part corresponding to

*For abbreviation, speaking about parity invariance properties of local objects, we will keep in mind symmetries of the corresponding action parts.

the Chern–Simons term, so as parity even part, which can’t be covariantized and don’t contribute to the mass of the gauge field. Here we are interested in finite density and temperature influence on covariant parity odd form in action leading to the gauge field mass generation — the Chern–Simons topological term. Deep insight on these phenomena at small densities was done in [2,4]. The result for the Chern–Simons term coefficient in QED_3 is

$$\left[\operatorname{th} \frac{1}{2} \beta(m - \mu) + \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta(m + \mu) \right],$$

see [4], formulas (10.18). However, to get this result it was heuristically supposed that at small densities index theorem could still be used and only odd in energy part of spectral density is responsible for parity nonconserving effect. Because of this in [4] it had been stressed that the result holds only for small μ . However, as we’ll see below this result holds for any values of chemical potential. Thus, to obtain trustful result at any values of μ one has to use transparent and free of any restrictions on μ procedure, which would allow one to perform calculations with arbitrary non-Abelian background gauge fields.

It was shown at zero chemical potential in [2,4,5] that the Chern–Simons term in odd dimensions is connected with chiral anomaly in even dimensions by trace identities. As we’ll see below generalization of the trace identity on nonzero density is not trivial. It connects chiral anomaly with the Chern–Simons term, which has μ - and T -dependent coefficient. We will see below that despite chemical potential and temperature give rise to a coefficient in front of the Chern–Simons term [9] they don’t influence chiral anomaly [10,11]. Indeed, anomaly is a short distance phenomenon, which should not be affected by medium (density and temperature) effects, or more quantitatively, so as the anomaly has ultraviolet nature, temperature and chemical potential should not give any ultraviolet effect since distribution functions decrease exponentially with energy in the ultraviolet limit.

The paper is organized as follows. In section 2 we briefly discuss the introducing of the chemical potential, chiral chemical potential and temperature to a theory. Section 3 is devoted to qualitative consideration of chiral anomaly in 2 and 4 dimensions. The rigorous proof of density and temperature independence of axial anomaly is presented in section 4. Also, it is shown in 2-dimensional Schwinger model that chiral anomaly is not influenced not only by chemical potential μ , but also by Lagrange multiplier κ at the constraint of chiral charge conservation. Section 5 is concerned to the Chern–Simons term in even dimensions and its reduction to odd dimension in high temperature limit. In section 6 we obtain the Chern–Simons term in 3-dimensional theory at finite density and temperature by use of a few different methods. In section 7 we evaluate Chern–Simons term in the presence of nonzero temperature and density in 5-dimensional theory and generalize this result on arbitrary non-Abelian odd-dimensional theory.

Nonrelativistic consideration is presented in section 8. In section 9 we generalize trace identity on arbitrary density of background fermions on the basis of the previous calculations. Section 10 is devoted to concluding remarks.

2. CHEMICAL POTENTIAL

As is well known, chemical potential can be introduced in a theory as Lagrange multiplier at corresponding conservation laws. In nonrelativistic physics this is conservation of full number of particles. In relativistic quantum field theory these are conserving charges. The ground state energy can be obtained by use of variational principle

$$\langle \psi^* \hat{H} \psi \rangle = \min \quad (1)$$

under charge conservation constraint for relativistic equilibrium system

$$\langle \psi^* \hat{Q} \psi \rangle = \text{const}, \quad (2)$$

where $\hat{H}$ and $\hat{Q}$ are Hamiltonian and charge operators. Instead, we can use method of undetermined Lagrange multipliers and seek absolute minimum of expression

$$\langle \psi^* (\hat{H} - \mu \hat{Q}) \psi \rangle, \quad (3)$$

where μ is Lagrange multiplier. Since $\hat{Q}$ commute with the Hamiltonian, $\langle \hat{Q} \rangle$ is conserved.

On the other hand, we can impose another constraint, which implies chiral charge conservation

$$\langle \psi^* \hat{Q}_5 \psi \rangle = \text{const}, \quad (4)$$

or in Lagrange approach we have

$$\langle \psi^* (\hat{H} - \kappa \hat{Q}_5) \psi \rangle = \min, \quad (5)$$

where κ arises as Lagrange multiplier at $\langle \hat{Q}_5 \rangle = \text{const}$ constraint. Thus, μ corresponds to nonvanishing fermion density (number of particles minus number of antiparticles) in background. Meanwhile, κ is responsible for conserving asymmetry in numbers of left- and right-handed background fermions.

It must be emphasized that the formal addition of a chemical potential in the theory looks like a simple gauge transformation with the gauge function μt . However, it doesn't only shift the time component of a vector potential but also gives corresponding prescription for handling Green's function poles. The

correct introduction of a chemical potential redefines the ground state (Fermi energy), which leads to a new spinor propagator with the correct ϵ prescription for poles. So, for the free spinor propagator we have (see, for example, [12, 13])

$$G(p; \mu) = \frac{\tilde{\not{p}} + m}{(\tilde{p}_0 + i\epsilon \operatorname{sgn} p_0)^2 - \vec{p}^2 - m^2}, \quad (6)$$

where $\tilde{p} = (p_0 + \mu, \vec{p})$. Thus, when $\mu = 0$ one at once gets the usual ϵ prescription because of the positivity of $p_0 \operatorname{sgn} p_0$. In the presence of a background Yang–Mills field we consequently have for the Green function operator (in Minkovski space)

$$\hat{G} = (\gamma \tilde{\pi} - m) \frac{1}{(\gamma \tilde{\pi})^2 - m^2 + i\epsilon(p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0)}, \quad (7)$$

where $\tilde{\pi}_\nu = \pi_\nu + \mu \delta_{\nu 0}$, $\pi_\nu = p_\nu - gA_\nu(x)$.

In Euclidian metric one has

$$G(p; \mu) = \frac{\tilde{\not{p}} + m}{\tilde{p}_0^2 + \vec{p}^2 + m^2}, \quad (8)$$

where $\tilde{p} = (p_0 + i\mu, \vec{p})$.

For temperature introduction we will use a standard Matsubara approach valid for systems in equilibrium. That is Euclidian generating functional with temperature instead of time, and antiperiodic conditions on fermion fields $\psi(0, \vec{x}) = -\psi(\beta, \vec{x})$ and periodic for boson ones $A(0, \vec{x}) = A(\beta, \vec{x})$. Thus, for transfer to finite temperature case we will use

$$\begin{aligned} \int d^D x &\rightarrow i \int_0^\beta dx_0 \int d^{D-1} x, \\ \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} &\rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}}, \end{aligned}$$

together with $p_0 \rightarrow \omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$. Here, the chemical potential also can be introduced by adding it to a Matsubara frequency $p_0 \rightarrow \omega_n = (2n + 1)\pi/\beta + i\mu$.

3. CHIRAL ANOMALY. QUALITATIVE CONSIDERATION

First of all let us consider simple but rather intuitive than rigorous derivation of axial anomaly [14]. Let us start with 2-dimensional right-handed Weyl fermion theory coupled to a uniform electric field $\dot{A}_1 = E$ in the temporal gauge. The one component right-handed Weyl equation for $\psi_R = 1/2(1 + \gamma_5)\psi$ reads

$$i\psi_R(x) = (-i\partial_x - A^1)\psi_R(x). \quad (9)$$

The dispersion law is $\omega(P) = P$. Corresponding to the classical equation of a charged particle in the presence of an electric field where $\dot{P} = eE$, the acceleration of the right-handed particles in quantum theory is given by $\dot{\omega} = \dot{P} = eE$. The creation rate of the right-handed particles per unit time and unit length is determined by a charge of the Fermi surface, which distinguishes the filled and unfilled states. Let the quantization length be L ; the density of states per length L is $L/2\pi$ and the rate of change of right-handed particle number N_R is

$$\dot{N}_R = L^{-1}(L/2\pi)\dot{\omega} = (e/2\pi)E. \quad (10)$$

This particle creation is the axial anomaly. Consequently the chiral charge Q_R is not conserved and $\dot{Q}_R = \dot{N}_R = (e/2\pi)E$. It follows from an analogous reasoning that the annihilation rate of left-handed particles with the dispersion law $\omega = -P$ is

$$\dot{N}_L = -(e/2\pi)E. \quad (11)$$

Therefore the anomaly for the Dirac particles is

$$\dot{N}_R - \dot{N}_L = (e/\pi)E, \quad (12)$$

which gives $\dot{Q}_5 = (e/\pi)E$.

In 4 dimensions we first calculate the energy levels of the right-handed Weyl fermion in the presence of the applied uniform magnetic field along the third direction given by

$$A^2 = Hx^1 \quad \text{and} \quad A^\mu = 0 \quad \text{otherwise.}$$

The solution to the equation for two-component right-handed field ψ_R of the form

$$[i\partial/\partial t - (\mathbf{P} - e\mathbf{A})\sigma] \psi_R(x) = 0 \quad (13)$$

is expressed in terms of a solution of the auxiliary equation

$$[i\partial/\partial t - (\mathbf{P} - e\mathbf{A})\sigma][i\partial/\partial t + (\mathbf{P} - e\mathbf{A})\sigma] \Phi = 0 \quad (14)$$

as

$$\psi_R = [i\partial/\partial t + (\mathbf{P} - e\mathbf{A})\sigma] \Phi. \quad (15)$$

From Eq. (14) the energy and the P_2, P_3 eigenfunction satisfies an equation of the harmonic oscillator type

$$[-(\partial/\partial^1)^2 + (eH)^2(x^1 + P_2/eH) + (P_3)^2 + eH\sigma] \Phi = \omega^2 \Phi,$$

where $\sigma = \pm 1$. The energy levels are given by the Landau levels,

$$\omega(n, \sigma, P_3) = \pm [eH(2n+1) + (P_3)^2 + eH\sigma]^{1/2}, \quad (16)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

except for the $n = 0$ and $\sigma = -1$ mode, where

$$\omega(n = 0, \sigma = -1, P_3) = \pm P_3. \quad (17)$$

The eigenfunction takes the form

$$\Phi_{n\sigma}(x) = Nn\sigma \exp(-iP_2x^2 - iP_3x^3)$$

$$\exp[-1/2eH(x_1 + P_2/eH)^2] H_n(x_1 + P_2/eH)\xi(\sigma), \quad (18)$$

with $Nn\sigma$ as the normalization constant. Here $\xi(\sigma)$ denotes the eigenfunctions of the Pauli spin σ_3 which can be taken as $\xi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\xi(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. The solution of (14) is obtained by inserting (18) into (15). This leads to the relations

$$\psi_R^{(n+1, \sigma=-1)} = (N_{n+1, \sigma=-1}/N_{n, \sigma=1})\psi_R^{(n, \sigma=1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

and

$$\psi_R^{(n=0, \sigma=-1)} = 0, \quad \text{with } \omega = -P_3.$$

Thus the energy levels of ψ_R are (16) and

$$\omega(n = 0, \sigma = -1, P_3) = P_3. \quad (19)$$

Next a uniform electric field is turned on along the third direction parallel to H . As for the zero mode ($n = 0, \sigma = -1$) the dispersion law is the same as that for 2 dimensions and the creation rate of the particles is calculated in a similar manner. It should be noted that when E varies adiabatically there is no particle creation in the $n = 0$ modes. The density of the state per length L is $LeH/4\pi^2$ and the creation rate is given by

$$\dot{N}_R = L^{-1}(LeH/4\pi^2)\dot{\omega}(n = 0, \sigma = -1, P_3) = (e^2/4\pi^2)EH, \quad (20)$$

which equals to $\dot{Q}_R$.

For the left-handed fermions the annihilation rate of the left-handed particles is

$$\dot{N}_L = -(e^2/4\pi^2)EH, \quad (21)$$

which is $\dot{Q}_L$.

We then have for the Dirac field

$$\dot{Q}_5 = \dot{Q}_R - \dot{Q}_L = (e^2/2\pi^2)EH, \quad (22)$$

that is the chiral anomaly.

Now we can easily estimate influence of background density on the anomaly in this approach. From the above consideration we can see that the anomaly is proportional to the time derivative of the zero mode energy. Taking into account that nonzero fermion density influence just reduces to the shift of the Landau levels on μ which doesn't depend on time, we can conclude that finite density doesn't influence the chiral anomaly. The same arguments are just for the Lagrange multiplier at the axial charge κ , the only difference is that κ makes shift for left- and right-handed fermions with opposite sign. So, until μ (κ) is time independent it won't affect the chiral anomaly. We would like to stress that here there was made adiabatic approximation, when we turn on electric field. So, this consideration is just a plot and it needs a strict proof.

4. CHIRAL ANOMALY AT FINITE TEMPERATURE AND DENSITY

4.1. Two Dimensions. Since anomaly term originates from the ultraviolet divergent part, it is not expected to be changed by the temperature. Indeed, it was shown in several papers (see [10] and references therein). Moreover, the same can be said about the influence of background fermion density that has been checked in the works [11].

To clear understand the nature of anomaly μ independence we'll first consider the simplest case — 2-dimensional QED by the use of the Schwinger nonperturbative method [16]. Thus, following Schwinger one writes

$$J^\mu = -ig \operatorname{tr} \left[\gamma^\mu G(x, x') \exp \left(-ig \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right) \right]_{x' \rightarrow x}, \quad (23)$$

where $G(x, x')$ is a propagator satisfying the following equation

$$\gamma^\mu (\partial_\mu^x - ig A_\mu(x)) G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (24)$$

Further we use Schwinger's anzats

$$G(x, x') = G^0(x, x') \exp \left[ig(\phi(x) - \phi(x')) \right], \quad (25)$$

where $G^0(x, x')$ is a free propagator

$$\gamma^\mu \partial_\mu^x G^0(x, x') = \delta(x - x').$$

Thus, for ϕ we can write $\gamma^\mu \partial_\mu \phi = \gamma^\mu A_\mu$. At finite density $G^0(x, x')$ has the form

$$\begin{aligned} G^0(x, x') &= \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{ip(x-x')} \frac{\not{p}}{p^2 + i\varepsilon(p_0 + \mu) \operatorname{sgn} p_0} = \\ &= -i \not{\partial} \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{ip(x-x')} \frac{1}{p^2 + i\varepsilon} - \right. \\ &\quad \left. -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \theta(-\tilde{p}_0 \operatorname{sgn} p_0) e^{ip(x-x')} \Im m \frac{1}{p^2 + i\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

So, beside the usual zero density part μ -dependent one appears. Further, we have to regularize current by use of symmetrical limit $x \rightarrow x'$. After some simple algebra it is clearly seen that all μ -dependent terms after taking off the limit will disappear. Thus, contribution to the current arises from the Schwinger part only, so

$$\begin{aligned} J^\mu &= i \frac{g^2}{2\pi} \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\partial^2} \right) A_\nu \\ J_5^\mu &= i \frac{g^2}{2\pi} \left(\varepsilon^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\alpha} \frac{\partial^\alpha \partial^\nu}{\partial^2} \right) A_\nu, \end{aligned} \quad (27)$$

and we get usual anomaly in chiral current

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \partial_\mu J_5^\mu = i \frac{g^2}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = i \frac{g^2}{4\pi} *F. \quad (28)$$

It is natural to introduce Lagrange multiplier κ at corresponding constraint to support the conservation of the Q^5 charge, i.e., the difference of left and right fermion densities $Q_L - Q_R$. Since κ and μ are Lagrange multipliers at corresponding conservation laws they, in principle, have to influence some way a symmetry violation by a quantum corrections, i.e., anomalies. However, the rather amazing situation occurs. The demand of chiral charge conservation (instead of the usual charge conservation) on the quantum level doesn't influence the chiral anomaly. Really, in 2-dimensions introduction of Lagrange multiplier κ at the chiral charge conservation gives the term $\kappa \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^0 \psi = \kappa \bar{\psi} \gamma^1 \psi$ in Lagrangian. So, κ affects in the same way as μ , i.e., κ doesn't influence the chiral anomaly (it is also seen in direct calculations, which are similar to presented above for the case with μ). That could be explained due to ultraviolet nature of the chiral anomaly, while κ (μ) doesn't introduce new divergences in the theory.

From the calculations it is clearly seen the principal difference of the chiral anomaly and Chern-Simons. The ultraviolet regulator — P exponent — gives rise to the anomaly, but (as we'll see below) doesn't influence Chern-Simons.

Thus, it is natural that the anomaly doesn't depend on μ , κ , and T because it has ultraviolet regularization nature, while neither density nor temperature does influence ultraviolet behavior of the theory. The general and clear proof of axial anomaly temperature independence in any even dimension will be presented in section 9 on the basis of the trace identities.

4.2. Four Dimensions. In [11] direct calculations of axial anomaly at finite temperature and density in 4-dimensional gauge theory were performed by using imaginary and real time formalism by Fujikawa method [15]. Here we present the derivation of the axial anomaly using the elegant Fujikawa procedure. Considering a system of fermions and gauge bosons in thermodynamical equilibrium at temperature $T = \beta^{-1}$ and nonzero chemical potential μ in the imaginary time formalism one reads the generating functional of correlation functions

$$Z[J_\nu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}(\vec{x}, \tau) + J_\nu A^\nu + \bar{\psi} \eta + \psi \bar{\eta}) \right], \quad (29)$$

where

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \tau) = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{GF}$$

represents the effective Lagrangian density of the $SU(N)$ Yang–Mills field $A = (A_\rho^j)$ coupled to fermion fields $\psi = (\psi_\alpha^a)$, $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_\alpha^a)$ and to Faddeev–Popov ghost fields $c = (c_\alpha)$, $\bar{c} = (\bar{c}_\alpha)$. $\eta = (\eta_\alpha^a)$, $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_\alpha^a)$ and $J = (J_\rho^j)$ are external sources. A_ρ^j , J_ρ^j , c_α , $\bar{c}_\alpha$ are periodic in τ with period β , while ψ_α^a , $\bar{\psi}_\alpha^a$, η_α^a , $\bar{\eta}_\alpha^a$ are antiperiodic. Upper latin indices and lower Greek ones indicate flavor and $SU(N)$ internal (color) indices respectively, and $j = 1, \dots, N^2 - 1$, the number of standard $SU(N)$ generators (T^j). $\mathcal{L}_{YM}$ and $\mathcal{L}_c$ are standard Lagrangian densities for Yang–Mills bosons and ghosts, while $\mathcal{L}_{GF}$ describes gauge fixing. On the other hand, one has

$$\mathcal{L}_\psi = \sum_{a=1}^{N_f} \bar{\psi}^a (i \not{D}_{T,\mu}^a - m^a) \psi^a$$

(lower color indices being also implicitly contracted), with N_f the number of flavors,

$$i \not{D}_{T,\mu}^a = i \not{D}_T + \mu^a \gamma_0$$

and

$$\not{D}_T = i\gamma^0 (\partial/\partial\tau + A_4) - \gamma^k (\partial/\partial x^k + A_k),$$

where $iA_\rho = gT^j A_\rho^j$ and the Wick rotation has been performed in the imaginary time formalism ($x_0 \rightarrow \tau = ix_0$, $A_0 \rightarrow A_4 = -iA_0$) so that $\not{D}_T$ becomes

Hermitian. It is considered a chemical potential μ^a for each flavor (there is no flavor mixing).

Following Fujikawa [15] we are interested in the chiral transformation of the fermion fields:

$$\psi_\alpha^a \rightarrow \exp[i\delta(\vec{x}, \tau)\gamma_5]\psi_\alpha^a, \quad \bar{\psi}_\alpha^a \rightarrow \bar{\psi}_\alpha^a \exp[i\delta(\vec{x}, \tau)\gamma_5],$$

which produces a change in the fermion measure $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow C\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$, giving rise to the anomaly factor in the chiral current conservation law, C , which is the direct finite temperature and density extension of the zero temperature and density factor appearing in [15]. The chemical potential term is invariant under the above chiral transformation. Then the only possible finite temperature and density effects must be contained in C . In order to display them, let us expand

$$\psi^a(\vec{x}, \tau) = \sum_n a_n \phi_n^a(\vec{x}, \tau), \quad \bar{\psi}^a(\vec{x}, \tau) = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^{a+}(\vec{x}, \tau),$$

$a_n, \bar{b}_n$ being elements of the Grassmann algebra. On the other hand, $\phi_n^a(\vec{x}, \tau)$, which is antiperiodic in τ , is an eigenfunction of the Hermitian operator $\mathcal{D}_{T,\mu}^a = \mathcal{D}_T + \mu^a \gamma_0$, i.e., $\mathcal{D}_{T,\mu}^a \phi_n^a = \lambda_n \phi_n^a$, (λ_n being real and color indices being omitted) and it fulfills

$$\int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi_n^{a+} \phi_r^a = \delta_{nr}.$$

Moreover, it can be Fourier-expanded as

$$\phi_n^a(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^3k e^{i\omega_n \tau} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \phi_j^a(\vec{k}), \quad (30)$$

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}.$$

Then, the measure $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ becomes $\prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m$, and by extending directly the zero temperature and density calculations [15], one finds

$$C = \exp \left[-2i \int_0^\beta d\tau \int d^3x \delta(\vec{x}, \tau) a(\vec{x}, \tau) \right] \quad (31)$$

with

$$a(\vec{x}, \tau) = \sum_{a=1}^{N_f} \sum_n \phi_n^{a+}(\vec{x}, \tau) \gamma_5 \phi_n^a(\vec{x}, \tau). \quad (32)$$

The finite temperature and density anomaly $a(\vec{x}, \tau)$ can be regularized by extending again Fujikawa's trick as

$$a(\vec{x}, \tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{a=1}^{N_f} \sum_n \phi_n^{a+}(\vec{x}, \tau) \gamma_5 \exp \left[-M^{-2} (\mathcal{D}_{T,\mu}^a)^2 \right] \phi_n^a(\vec{x}, \tau), \quad (33)$$

and by changing the basis vectors to "plane waves" with (30). We remark that $\mathcal{D}_{T,\mu}^a$ is equivalent to $\mathcal{D}_T$ provided that, in the latter, one replaces A_4 by $A_4 - i\mu^a$. This replacement leaves $F_{\rho\nu}$ invariant ($F_{\rho\nu} = \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho + [A_\rho, A_\nu]$): notice that μ^a is constant and $[\mu^a, T^j] = 0$ for $a = 1 \dots N_f$, $j = 1 \dots N^2 - 1$. One obtains

$$a(\vec{x}, \tau) = N_f \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left(\gamma_5 \{ [\gamma^\rho, \gamma^\nu] F_{\rho\nu} \}^2 \right) \frac{1}{8M^2} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp \left[- \left(\frac{\omega_n^2 + \vec{k}^2}{M^2} \right) \right], \quad (34)$$

where the trace tr runs over both internal and γ matrices indices.

The infinite series on the right-hand side of (34) displays what is, quite likely, the most important difference between the actual finite temperature and density case and the zero temperature and density one treated in [15]. We recall the following formula valid for any M :

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\pi^2}{M^2 \beta^2} (2n+1)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \exp \left[- \left(\frac{k^0}{M} \right)^2 \right]. \quad (35)$$

A simple derivation of (35) can be found in [25].

By using (35) in (34) and taking the trace over the γ matrices, we arrive at the final formula:

$$a(\vec{x}, \tau) = -\frac{N_f}{16\pi^2} \text{tr} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} F_{\sigma\nu} \right), \quad (36)$$

where the trace now runs only over internal indices. We can see that there are no finite temperature and density corrections to the chiral anomaly, as we have expected from the previous considerations.

5. CHERN-SIMONS IN EVEN DIMENSIONAL THEORY

It will be natural to introduce in Lagrangian the classical conservation law — the conservation of the Q^5 charge, i.e., the difference of left and right fermion densities $Q_L - Q_R$. Thus the Lagrangian with constraint on Q_5 has the form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \text{tr} F F + \bar{\psi} \left(i\hat{\partial} - g\hat{A} + i\kappa\gamma^0\gamma^5 \right) \psi. \quad (37)$$

Thus, if we will deal with such a Lagrangian we must get theory in which Q^5 -charge is conserved. To get effective action only background field dependent we have to take over $d\bar{\psi} d\psi$ integration. There are two ways to do it: one can calculate straight forward by using the perturbation theory and get the effective action, another one is proper time method. Certainly, we have to take into account that at high temperatures dimensional reduction takes place. Thus, for example, vacuum polarization tensor in reduced — 3-dimensional — theory can be written as

$$\Pi_{ij}(p^2) = (g_{ij}p^2 - p_i p_j) \Pi^{(1)}(p^2) + i e_{ijk} p^k \Pi^{(2)}(p^2) + p_i p_j \Pi^{(3)}(p^2). \quad (38)$$

The part of the vacuum polarization tensor containing Levi–Chivita tensor $i e_{ijk} p^k \Pi^{(2)}(p^2)$ gives rise to the Chern–Simons term.

It is convenient to rewrite Lagrangian in more appropriate form using projection operators

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr} F F + \bar{\psi}_L \left(i\hat{\partial} - g\hat{A} + i\kappa\gamma^0 \right) \psi_L + \bar{\psi}_R \left(i\hat{\partial} - g\hat{A} - i\kappa\gamma^0 \right) \psi_R, \quad (39)$$

where we have used $I = P_+ + P_-$, $\gamma^5 = P_+ - P_-$, $P_+ = \frac{1+\gamma^5}{2}$, $P_- = \frac{1-\gamma^5}{2}$.

So, now we can evaluate J_L and J_R separately. One can easily see that the Lagrangian we have got is absolutely analogous to finite temperature and density Lagrangian with left(right)-handed fermions which was considered in [17] using perturbative expansion.

Thus we can immediately write the answer for J_L and J_R currents

$$J_{(L/R)}^\mu = (\pm) \frac{\kappa}{4\pi} \beta W[A], \quad (40)$$

where $W[A]$ is the Chern–Simons term. And consequently for full current and chiral current we'll get correspondingly

$$J^\mu = 0, \quad (41)$$

$$J_5^\mu = 2 \frac{\kappa}{4\pi} \beta W[A]. \quad (42)$$

It is also possible to obtain Chern–Simons at zero temperature for $\kappa \neq 0$ with clear physical sense (see, for example, [18] where chiral fermions are considered at finite density and [14] where Weyl particles are considered). In the 2-dimensional Schwinger model there is chiral anomaly

$$\partial_\mu J_\mu^5 = -\frac{1}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (43)$$

It could be derived by using the picture of energy levels crossing, see for example [14, 19]. Here, we will exploit this method for consideration of the Chern–Simons

term. Thus we will consider the Schwinger model (37) on a ring with periodic for A_μ and antiperiodic for ψ boundary conditions

$$\begin{aligned} A(x = -L/2, t) &= A(x = L/2, t), \\ \psi(x = -L/2, t) &= -\psi(x = L/2, t). \end{aligned} \quad (44)$$

Thus, fields A and ψ could be expanded in Fourier modes $\exp(ikx2\pi/L)$ for bosons and $\exp(i[k + 1/2]x2\pi/L)$ for fermions. The Lagrangian (37) is invariant under local gauge transformations:

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha(x,t)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x,t).$$

It is easily seen that due to local gauge transformations, we can put all modes of A_1 to be zero except for the zero-mode. Thus, we can consider A_1 to be x -independent. There exists another type of gauge transformations (large gauge transformations)

$$\alpha = \frac{2\pi}{L}nx,$$

where n is an integer number. Nevertheless, this gauge is not periodic, it satisfies condition (44). Really, $\partial\alpha/\partial x = \text{const}$ and $\partial\alpha/\partial t = 0$, thus periodicity of A_μ is conserved, the same is also true for ψ . So, we can consider the model on the circle $[0, 2\pi/L]$. Further, we use adiabatic approximation, putting that A_1 is independent of time (to a slight time dependence we will turn on later), and that $A_0 = 0$. This adiabatic approximation is quite natural from the physical point of view, see for example elegant consideration by Shifman [19]. We now calculate number density of real left(right) fermions $n_{L/R}[A_1]$ and fermionic energy density $\varepsilon_{L/R}[A_1]$, assuming that number density $n_{L/R}$ at $\dot{A}_1 = 0$ is fixed. Note that system with fixed $n_{L/R}$ can be prepared by inserting fermions into the box, which is initially empty.

It is straightforward to calculate the fermionic spectrum at $A_1 \neq 0$,

$$E_{L/R} = \frac{2\pi}{L}(k \mp N_{CS}) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad , \quad (45)$$

where

$$N_{CS} = \frac{1}{2\pi} \int A_1 dx^1 \quad (46)$$

is the Chern–Simons number in (1+1) dimensions. As the gauge field changes from zero to some fixed A_1 , $[N_{CS}]$ levels of left-handed fermions cross zero from above and the same number of right-handed fermionic levels cross zero from below. This means that $[N_{CS}]$ left-handed fermions fill the negative energy levels in the Dirac sea, see Fig.1, and the same number of right-handed fermions

leave it. We would like to stress, that in this physical clear picture it is essential to use the adiabatic approximation. The number densities for left(right)-handed fermions are

$$n_{L/R}[A_1] = n_{L/R}^0 \mp n_{CS} + O(L^{-1}), \quad (47)$$

where $n_{CS} = N_{CS}/L$ is the average Chern–Simons density.

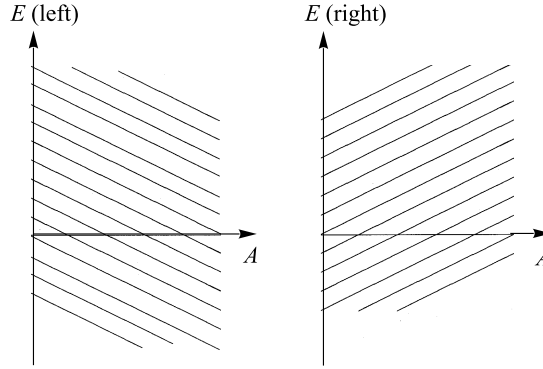


Fig. 1. Behaviour of the left(right)-handed fermionic levels

Note that equation (47) is essentially the integral form of the anomaly equation (43). The average energy density of real fermions is

$$\varepsilon_{L/R} = \frac{2}{L} \sum_{[N_{CS}]+1}^{N_{L/R}^0/2} \varepsilon_k = \frac{\pi}{2} (n_{CS}^0 \mp n_{CS})^2 + O(L^{-2}). \quad (48)$$

We can introduce chemical potential for left(right)-handed fermions in a standard way

$$\mu_{L/R} = \frac{\partial \varepsilon_{L/R}}{\partial n_{L/R}} \quad (49)$$

and we obtain

$$\mu_{L/R} = \pi (n_{L/R} \mp n_{CS}). \quad (50)$$

Introducing the standard Legendre transform

$$\tilde{E}_{L/R}[\mu_{L/R}, A_1] = E_{L/R} \mp \mu_{L/R} N_{L/R} \quad (51)$$

we find

$$\Delta E = (\mu_R - \mu_L)N_{CS}, \quad (52)$$

so, for the case when $\mu_R = \mu_L = \mu$ we'll get energy unchanged. On the other hand, for chiral fermions [18] sign of term μ_R will change and

$$\Delta E = -2\mu N_{CS}. \quad (53)$$

If we impose conservation of the left- and right-handed fermions (with Lagrangian multiple κ) instead of separate conservation of left (right)-fermions, we'll get

$$\Delta E = -2\kappa N_{CS}. \quad (54)$$

Thus, the same result arises both for chiral fermions at finite density, and for usual fermions under conservation of chiral charge. One should notice that here there were used two approximations. The first one is time independence of A_0 , the second is adiabatic approximation. Nevertheless, this consideration is valuable due to construction of clear physical picture of the phenomenon.

The Chern–Simons term appearance in even dimensional theory could be shown in simple and clear way. The only thing we need for it is temperature and density independence of chiral anomaly (see previous sections). From the definition one has

$$\frac{\partial I_{eff}}{\partial \kappa} = \int d^D x \langle J_5^0 \rangle. \quad (55)$$

Since axial anomaly doesn't depend on κ , effective action contains the term proportional to anomalous Q_5 charge with κ as a coefficient. The same is for a chiral theory, there effective action contains the term proportional to anomalous Q charge with μ as a coefficient, see for example [17, 18, 20]. So, we have

$$\Delta I_{eff} = -\kappa \int dx_0 W[A] \quad (56)$$

in conventional gauge theory and

$$\Delta I_{eff}^{chiral} = -\mu \int dx_0 W[A] \quad (57)$$

in the chiral theory. Here $W[A]$ is the Chern–Simons term. Thus we get Chern–Simons with Lagrange multiplier as a coefficient.

It is well known that at nonzero temperature in $\beta \rightarrow 0$ limit the dimensional reduction effect occurs. So, extra t -dependence of Chern–Simons term in (56) disappears and Chern–Simons can be treated as a mass term in 3-dimensional

theory with $i\kappa/T$ coefficient (the same for chiral theory with μ , see [17]). For anomalous parts of effective action we have

$$\Delta I_{eff} = -i\kappa\beta W[A] , \quad \Delta I_{eff}^{\text{chiral}} = -i\mu\beta W[A] \quad (58)$$

in conventional and chiral gauge theories correspondingly. The only problem arises in treating Chern–Simons as a mass term is that the coefficient is imaginary, see discussions on the theme in [17,20]. The other problem is that the coefficient is not the integer function, see discussions in conclusion. One can notice, that results (56), (57) and (58) hold in arbitrary even dimension. Let us stress, that we don't need any complicated calculations to obtain (56)–(58). The only thing we need is the knowledge of chiral anomaly independence on μ , κ , and β .

This result also can be derived by use of the proper-time method. Chiral current reads as follows

$$\begin{aligned} J_5^\mu &= -ig \operatorname{tr} \left[\gamma^5 \gamma^\mu G(x, x') \right] = -ig \operatorname{tr} \left[\gamma^5 \gamma^\mu \frac{1}{i \not{\partial} - g \not{A} + \gamma^5 \gamma^0 \kappa} \right] = \\ &= -ig \operatorname{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{i \not{\partial} - g \gamma^5 \not{A} + \gamma^0 \kappa} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

The propagator has the following form

$$G(x, x') = [i \not{\partial} - g \gamma^5 \not{A}] (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau U(x, x'; \tau), \quad (60)$$

where $U(x, x'; \tau)$ is the evolution operator in a proper time. The propagator after substitution of the evolution operator can be rewritten as

$$G(x, x') = \exp \left(-ig \gamma^5 \int_{x'}^x d\zeta_\mu A^\mu \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} G(p), \quad (61)$$

where $G(p)$ has the form

$$\begin{aligned} G(p) &= -ia_d \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{\tau^{d/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left[\frac{i}{4\tau} \operatorname{ch}(gF\tau) \right] \right) - \\ &\quad - ip(gF)^{-1} \operatorname{th}(gF\tau) p \left[\gamma^5 \gamma^\alpha (\operatorname{th}(gF\tau))^{\alpha\nu} p^\nu - \not{p} \right] \\ &\quad \exp \left(i \frac{g}{2} \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tau \right), \end{aligned} \quad (62)$$

where $a_d = e^{i\pi d/4}/(2\pi)^{d/2}$. Substituting expression for the propagator in (59), we will get for the chiral current

$$J_5^\mu = ga_d \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{\tau^{d/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left[\frac{i}{4\tau} \operatorname{ch}(gF\tau) \right] \right)$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-ip(gF)^{-1} \text{th}(gF\tau)p) p^\nu \text{tr} \left[(\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\alpha [\text{th}(gF\tau)]^{\alpha\nu} - \gamma^\mu \gamma^\alpha g^{\alpha\nu}) \exp\left(i\frac{g}{2} \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tau\right) \right]. \quad (63)$$

Taking into account that p integration is at finite density and temperature, i.e., integral in p_0 is changed on sum, and extracting the Levi–Chivita tensor containing part (it is really simple, if one takes traces in covariant form) we obtain

$$J_5^\mu = \frac{g^2}{8\pi^2} \beta \int \frac{d\tau}{\tau^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \exp\left(i\frac{\beta^2 m^2}{4\tau}\right) \text{sh}(\beta m \kappa) * F^{\mu 0}. \quad (64)$$

To regulate this expression we use dimensional regularization, which can be expressed in terms of generalized Riemann zeta functions. Also, we take high temperature limit, i.e., $\beta \rightarrow 0$, and finally get

$$J_5^\mu = i\kappa \frac{g^2}{2\pi^2} * F^{\mu 0}. \quad (65)$$

6. CHERN–SIMONS IN THREE-DIMENSIONAL THEORY

6.1. Constant Magnetic Field. Let us first consider a (2+1)-dimensional Abelian theory in the external constant magnetic field. We will evaluate fermion density by performing the direct summation over Landau levels. As a starting point, we will use the formulae for fermion number at finite density and temperature [2]

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2} \sum_n \text{sgn}(\lambda_n) + \sum_n \left[\frac{\theta(\lambda_n)}{\exp(-\beta(\mu - \lambda_n)) + 1} - \frac{\theta(-\lambda_n)}{\exp(-\beta(\lambda_n - \mu)) + 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \text{th} \frac{1}{2} \beta(\mu - \lambda_n) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_n \text{sgn}(\mu - \lambda_n). \end{aligned} \quad (66)$$

Landau levels in the constant magnetic field have the form [21]

$$\lambda_0 = -m \text{sgn}(eB) \quad , \quad \lambda_n = \pm \sqrt{2n|eB| + m^2}, \quad (67)$$

where $n=1,2, \dots$. It is also necessary to take into account in (66) the degeneracy of Landau levels. Namely, the number of degenerate states for each Landau level is $|eB|/2\pi$ per unit area. Even now we can see that only zero modes (because of

$\text{sgn}(eB)$) could contribute to the parity odd quantity. So, for zero temperature, by using the identity

$$\text{sgn}(a - b) + \text{sgn}(a + b) = 2 \text{sgn}(a)\theta(|a| - |b|),$$

one gets for zero modes

$$\begin{aligned} \frac{|eB|}{4\pi} \text{sgn}(\mu + m \text{sgn}(eB)) &= \frac{|eB|}{4\pi} \text{sgn}(\mu)\theta(|\mu| - |m|) + \\ &+ \frac{|eB|}{4\pi} \text{sgn}(eB) \text{sgn}(m)\theta(|m| - |\mu|), \end{aligned} \quad (68)$$

and for nonzero modes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{|eB|}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sgn}(\mu - \sqrt{2n|eB| + m^2}) + \text{sgn}(\mu + \sqrt{2n|eB| + m^2}) &= \\ = \frac{|eB|}{2\pi} \text{sgn}(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \theta(|\mu| - \sqrt{2n|eB| + m^2}). \end{aligned} \quad (69)$$

Combining contributions of all modes we get for fermion density

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{|eB|}{2\pi} \text{sgn}(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \theta(|\mu| - \sqrt{2n|eB| + m^2}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{|eB|}{2\pi} \text{sgn}(\mu)\theta(|\mu| - |m|) + \frac{1}{2} \frac{eB}{2\pi} \text{sgn}(m)\theta(|m| - |\mu|) = \\ &= \frac{|eB|}{2\pi} \text{sgn}(\mu) \left(\text{Int} \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right] + \frac{1}{2} \right) \theta(|\mu| - |m|) + \\ &+ \frac{eB}{4\pi} \text{sgn}(m)\theta(|m| - |\mu|). \end{aligned} \quad (70)$$

Here we see that zero modes contribute both to parity odd and to parity even part, while nonzero modes contribute to the parity even part only (note that under parity transformation $B \rightarrow -B$). Thus, fermion density contains both Chern–Simons part and parity even part. At finite temperature it is also possible to get Chern–Simons. Substituting zero modes into (66) one gets

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{|eB|}{2\pi} \frac{1}{2} \text{th} \left[\frac{1}{2} \beta (\mu + m \text{sgn}(eB)) \right] = \\ &= \frac{|eB|}{4\pi} \left[\frac{\text{sh}(\beta\mu)}{\text{ch}(\beta\mu) + \text{ch}(\beta m)} + \text{sgn}(eB) \frac{\text{sh}(\beta m)}{\text{ch}(\beta\mu) + \text{ch}(\beta m)} \right], \end{aligned} \quad (71)$$

so, excluding parity odd part, one gets for Chern–Simons at finite temperature and density

$$N_{CS} = \frac{eB}{4\pi} \frac{\text{sh}(\beta m)}{\text{ch}(\beta\mu) + \text{ch}(\beta m)} = \frac{eB}{4\pi} \text{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \text{ch}(\beta\mu)/\text{ch}(\beta m)}. \quad (72)$$

So, the result coincides with the result for Chern–Simons term coefficient by Niemi and Semenoff [4] obtained for small μ

$$\left[\operatorname{th} \frac{1}{2} \beta(m - \mu) + \operatorname{th} \frac{1}{2} \beta(m + \mu) \right].$$

It is obviously the limit to zero temperature. The lack of this method is that it works only for Abelian and constant field case.

This result at zero temperature can be obtained using the Schwinger proper-time method. Consider $(2+1)$ -dimensional theory in the Abelian case and choose background field in the form

$$A^\mu = \frac{1}{2} x_\nu F^{\nu\mu}, \quad F^{\nu\mu} = \text{const.}$$

To obtain the Chern–Simons term in this case, it is necessary to consider the background current

$$\langle J^\mu \rangle = \frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu}$$

rather than the effective action itself. This is because the Chern–Simons term formally vanishes for such the choice of A^μ but its variation with respect to A^μ produces a nonvanishing current. So, consider

$$\langle J^\mu \rangle = -ig \operatorname{tr} \left[\gamma^\mu G(x, x') \right]_{x \rightarrow x'}, \quad (73)$$

where

$$G(x, x') = \exp \left(-ig \int_{x'}^x d\zeta_\mu A^\mu(\zeta) \right) \langle x | \hat{G} | x' \rangle. \quad (74)$$

Let us rewrite Green function (7) in a more appropriate form

$$\hat{G} = (\gamma \tilde{\pi} - m) \left[\frac{\theta((p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0))}{(\gamma \tilde{\pi})^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\theta(-(p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0))}{(\gamma \tilde{\pi})^2 - m^2 - i\epsilon} \right]. \quad (75)$$

Now, we use the well-known integral representation of denominators

$$\frac{1}{\alpha \pm i0} = \mp i \int_0^\infty ds e^{\pm i\alpha s},$$

which corresponds to introducing the "proper-time" s into the calculation of the Euler–Heisenberg Lagrangian by the Schwinger method [22]. We obtain

$$\begin{aligned} \hat{G} = & i(\gamma \tilde{\pi} - m) \int_0^\infty ds \left[-\exp(is[(\gamma \tilde{\pi})^2 - m^2 + i\epsilon]) \right. \\ & \left. \theta((p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0)) + \right. \\ & \left. + \exp(-is[(\gamma \tilde{\pi})^2 - m^2 - i\epsilon]) \theta(-(p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0)) \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

For simplicity, we restrict ourselves only to the magnetic field case, where $A_0 = 0$, $[\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_\mu] = 0$. Then we easily can factorize the time dependent part of Green function

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{G} e^{ip(x-x')} = \\ &= \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \hat{G}_{\vec{x}} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \int \frac{dp_0}{2\pi} \hat{G}_{x_0} e^{ip_0(x_0-x'_0)}. \end{aligned} \quad (77)$$

By using the obvious relation

$$(\gamma\tilde{\pi})^2 = (p_0 + \mu)^2 - \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}g\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (78)$$

one gets

$$\begin{aligned} G(x, x')|_{x \rightarrow x'} &= -i \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} (\gamma\tilde{\pi} - m) \int_0^\infty ds \\ &\left[e^{is(\vec{p}_0^2 - m^2)} e^{-is\vec{\pi}^2} e^{isg\sigma F/2} - \theta(-(p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0)) \right. \\ &\left. \left(e^{is(\vec{p}_0^2 - m^2)} e^{-is\vec{\pi}^2} e^{isg\sigma F/2} + e^{-is(\vec{p}_0^2 - m^2)} e^{is\vec{\pi}^2} e^{-isg\sigma F/2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Here the first term corresponds to the usual μ -independent case and there are two additional μ -dependent terms. In the calculation of the current the following trace arises:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[\gamma^\mu (\gamma\tilde{\pi} - m) e^{isg\sigma F/2} \right] &= 2\pi^\nu g^{\nu\mu} \cos(g|*F|s) + \\ &+ 2 \frac{\pi^\nu F^{\nu\mu}}{|*F|} \sin(g|*F|s) - 2im \frac{*F^\mu}{|*F|} \sin(g|*F|s), \end{aligned}$$

where $*F^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/2$ and $|*F| = \sqrt{B^2 - E^2}$. Since we are interested in calculation of the parity odd part (Chern-Simons term) it is enough to consider only terms proportional to the dual strength tensor $*F^\mu$. On the other hand the term $2\pi^\nu g^{\nu\mu} \cos(g|*F|s)$ at $\nu = 0$ (see expression for the trace, we take in mind that here there is only magnetic field) also gives nonzero contribution to the current J^0 [8]

$$J_{\text{even}}^0 = g \frac{|gB|}{2\pi} \left(\operatorname{Int} \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|gB|} \right] + \frac{1}{2} \right) \theta(|\mu| - |m|). \quad (80)$$

This part of current is parity invariant because under parity $B \rightarrow -B$. It is clear that this parity even object does contribute neither to the parity anomaly nor to

the mass of the gauge field. Moreover, this term has been obtained [8] in the pure magnetic background and scalar magnetic field occurs in the argument's denominator of the cumbersome function — integer part. So, the parity even term seems to be "noncovariantizable", i.e., it can't be converted in covariant form in effective action. For a pity, in papers [8] charge density consisting of both parity odd and parity even parts is dubbed Chern–Simons, what leads to misunderstanding. The main goal of this article is to explore the parity anomalous topological Chern–Simons term in the effective action at finite density. So, just the term proportional to the dual strength tensor $*F^\mu$ will be considered. The relevant part of the current reads

$$J_{CS}^\mu = \frac{g}{2\pi} \int dp_0 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \int_0^\infty ds \frac{2im^*F^\mu}{|*F|} \sin(g|*F|s) \left[e^{is(\tilde{p}_0^2 - m^2)} e^{-is\tilde{\pi}^2} - \theta(-(p_0 + \mu) \operatorname{sgn}(p_0)) \left(e^{is(\tilde{p}_0^2 - m^2)} e^{-is\tilde{\pi}^2} - e^{-is(\tilde{p}_0^2 - m^2)} e^{is\tilde{\pi}^2} \right) \right]. \quad (81)$$

Evaluating integral over spatial momentum we derive

$$J_{CS}^\mu = \frac{g^2}{4\pi^2} m^*F^\mu \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \int_0^\infty ds \left[e^{is(\tilde{p}_0^2 - m^2)} - \theta(-\tilde{p}_0 \operatorname{sgn}(p_0)) \left(e^{is(\tilde{p}_0^2 - m^2)} + e^{-is(\tilde{p}_0^2 - m^2)} m \right) \right]. \quad (82)$$

Thus, we have got besides the usual Chern–Simons part [6], also the μ -dependent one. It is easy to calculate it by use of the formula

$$\int_0^\infty ds e^{is(x^2 - m^2)} = \pi \left(\delta(x^2 - m^2) + \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{x^2 - m^2} \right)$$

and we get eventually

$$\begin{aligned} J_{CS}^\mu &= \frac{m}{|m|} \frac{g^2}{4\pi} *F^\mu [1 - \theta(-(m + \mu) \operatorname{sgn}(m)) - \theta(-(m - \mu) \operatorname{sgn}(m))] \\ &= \frac{m}{|m|} \theta(m^2 - \mu^2) \frac{g^2}{4\pi} *F^\mu. \end{aligned} \quad (83)$$

Let us now discuss the non-Abelian case. Then $A^\mu = T_a A_a^\mu$ and current reads

$$\langle J_a^\mu \rangle = -ig \operatorname{tr} \left[\gamma^\mu T_a G(x, x') \right]_{x \rightarrow x'}.$$

It is well known [6,23] that there exist only two types of the constant background fields. The first is the "Abelian" type (it is easy to see that the self-interaction $f^{abc}A_b^\mu A_c^\nu$ disappears under that choice of the background field)

$$A_a^\mu = \eta_a \frac{1}{2} x_\nu F^{\nu\mu}, \quad (84)$$

where η_a is an arbitrary constant vector in the color space, $F^{\nu\mu} = \text{const.}$ The second is the pure "non-Abelian" type

$$A^\mu = \text{const.} \quad (85)$$

Here the derivative terms (Abelian part) vanish from the strength tensor and it contains only the self-interaction part $F_a^{\mu\nu} = g f^{abc} A_b^\mu A_c^\nu$. It is clear that to catch the Abelian part of the Chern-Simons term we should consider the background field (84), whereas for the non-Abelian (derivative noncontaining, cubic in A) part we have to use the case (85).

Calculations in the "Abelian" case reduces to the previous analysis, except the trivial adding of the color indices in the formula (83):

$$J_a^\mu = \frac{m}{|m|} \theta(m^2 - \mu^2) \frac{g^2}{4\pi} F_a^\mu. \quad (86)$$

In the case (85) all calculations are similar. The only difference is that the origin of term $\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ in (78) is not the linearity A in x (as in Abelian case) but the pure non-Abelian $A^\mu = \text{const.}$ Here term $\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ in (78) becomes quadratic in A and we have

$$J_a^\mu = \frac{m}{|m|} \theta(m^2 - \mu^2) \frac{g^3}{4\pi} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \text{tr} [T_a A^\alpha A^\beta]. \quad (87)$$

Combining formulas (86) and (87) and integrating over field A_a^μ we obtain eventually

$$S_{eff}^{CS} = \frac{m}{|m|} \theta(m^2 - \mu^2) \pi W[A], \quad (88)$$

where $W[A]$ is the Chern-Simons term

$$W[A] = \frac{g^2}{8\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr} \left(F_{\mu\nu} A_\alpha - \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\alpha \right).$$

It may seem that covariant notation is rather artificial. However, it helps us to extract the Levi-Chivita tensor containing part of action, i.e., parity anomalous Chern-Simons term.

6.2. Arbitrary External Field. One can see that the methods we have used above for calculation of the Chern–Simons term are noncovariant. Indeed, both of them use the constant magnetic background. Therefore, here we will use completely covariant approach, which allows an arbitrary initial field configuration and non-Abelian fields. We will employ the perturbative expansion at once in the non-Abelian case.

Let us first consider non-Abelian 3-dimensional gauge theory. The only graphs whose P-odd parts contribute to the parity anomalous Chern–Simons term are shown in Fig. 2.

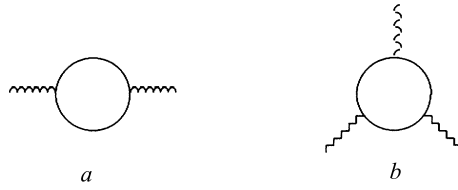


Fig. 2. Graphs whose P-odd parts contribute to the Chern–Simons term in non-Abelian 3D gauge theory

Thus, the part of effective action containing the Chern–Simons term looks as

$$I_{eff}^{CS} = \frac{1}{2} \int_x A_\mu(x) \int_p e^{-ixp} A_\nu(p) \Pi^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{3} \int_x A_\mu(x) \int_{p,r} e^{-ix(p+r)} A_\nu(p) A_\alpha(r) \Pi^{\mu\nu\alpha}(p, r), \quad (89)$$

where polarization operator and vertices have a standard form

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= g^2 \int_k \text{tr} [\gamma^\mu S(p+k; \mu) \gamma^\nu S(k; \mu)] \\ \Pi^{\mu\nu\alpha}(p, r) &= g^3 \int_k \text{tr} [\gamma^\mu S(p+r+k; \mu) \gamma^\nu S(r+k; \mu) \gamma^\alpha S(k; \mu)], \end{aligned} \quad (90)$$

here, under integration we understand

$$\int_x = i \int_0^\beta dx_0 \int d\vec{x} \quad \text{and} \quad \int_k = \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2}.$$

First consider the second order term (Fig. 2, graph (a)). It is well known that the only object giving us the possibility of constructing P - and T -odd form in action is Levi–Chivita tensor*. Thus, we will drop all terms noncontaining Levi–Chivita

*In three dimensions it arises as a trace of three γ matrices (Pauli matrices).

tensor. Signal for the mass generation (Chern–Simons term) is $\Pi^{\mu\nu}(p^2 = 0) \neq 0$. So we get

$$\Pi^{\mu\nu} = g^2 \int_k (-i2me^{\mu\nu\alpha} p_\alpha) \frac{1}{(\tilde{k}^2 + m^2)^2}. \quad (91)$$

After some simple algebra one obtains

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -i2mg^2 e^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + m^2)^2} = \\ &= -i2mg^2 e^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{4\pi} \frac{1}{\omega_n^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (92)$$

where $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta + i\mu$. Performing summation we get

$$\Pi^{\mu\nu} = i \frac{g^2}{4\pi} e^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)}. \quad (93)$$

It is easily seen that at $\beta \rightarrow \infty$ limit we'll get zero temperature result [9]

$$\Pi^{\mu\nu} = i \frac{m}{|m|} \frac{g^2}{4\pi} e^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \theta(m^2 - \mu^2). \quad (94)$$

In the same manner handling the third order contribution (Fig. 2b) one gets

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\alpha} &= -2g^3 i e^{\mu\nu\alpha} \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{m(\tilde{k}^2 + m^2)}{(\tilde{k}^2 + m^2)^3} = \\ &= -i2mg^3 e^{\mu\nu\alpha} \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + m^2)^2} \end{aligned} \quad (95)$$

and further all calculations are identical to the second order

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = i \frac{g^3}{4\pi} e^{\mu\nu\alpha} \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)}. \quad (96)$$

Substituting (93), (96) in the effective action (89) we get eventually

$$\begin{aligned} I_{eff}^{CS} &= \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)} \frac{g^2}{8\pi} \int d^3 x e^{\mu\nu\alpha} \\ &\quad \operatorname{tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\alpha - \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\alpha \right). \end{aligned} \quad (97)$$

Thus, we get Chern–Simons term with temperature and density dependent coefficient.

7. CHERN–SIMONS TERM IN ARBITRARY ODD DIMENSION

Let's now consider 5-dimensional gauge theory. Here the Levi–Chivita tensor is 5-dimensional $e^{\mu\nu\alpha\beta\gamma}$ and the relevant graphs are shown in Fig. 3.

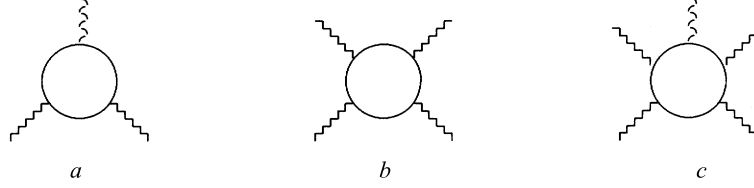


Fig. 3. Graphs whose P -odd parts contribute to the Chern–Simons term in non-Abelian 5D theory

The part of effective action containing the Chern–Simons term reads

$$\begin{aligned}
 I_{eff}^{CS} = & \frac{1}{3} \int_x A_\mu(x) \int_{p,r} e^{-ix(p+r)} A_\nu(p) A_\alpha(r) \Pi^{\mu\nu\alpha}(p, r) \\
 & + \frac{1}{4} \int_x A_\mu(x) \int_{p,r} e^{-ix(p+r+s)} A_\nu(p) A_\alpha(r) A_\beta(s) \Pi^{\mu\nu\alpha\beta}(p, r, s) \\
 & + \frac{1}{5} \int_x A_\mu(x) \int_{p,r} e^{-ix(p+r+s+q)} A_\nu(p) A_\alpha(r) A_\beta(s) A_\gamma(q) \\
 & \times \Pi^{\mu\nu\alpha\beta\gamma}(p, r, s, q). \quad (98)
 \end{aligned}$$

All calculations are similar to 3-dimensional case. First consider third order contribution (Fig. 3a)

$$\Pi^{\mu\nu\alpha}(p, r) = g^3 \int_k \text{tr} [\gamma^\mu S(p+r+k; \mu) \gamma^\nu S(r+k; \mu) \gamma^\alpha S(k; \mu)]. \quad (99)$$

Taking into account that trace of five γ matrices in 5-dimensions is

$$\text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho] = 4i e^{\mu\nu\alpha\beta\rho},$$

we extract the parity odd part of the vertices

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = g^3 \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (i4m e^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} p_\beta r_\sigma) \frac{1}{(\vec{k}^2 + m^2)^3}, \quad (100)$$

or in more transparent way

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = i4mg^3 e^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} p_\alpha r_\sigma \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2)^3} =$$

$$= i4mg^3 e^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} p_\alpha r_\sigma \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{64\pi^2} \frac{1}{\omega_n^2 + m^2}. \quad (101)$$

Evaluating summation one comes to

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = i \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)} \frac{g^3}{16\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} p_\alpha r_\sigma. \quad (102)$$

In the same way operating graphs (b) and (c) (Fig. 3) one will obtain

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta} = i \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)} \frac{g^4}{8\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} s_\sigma \quad (103)$$

and

$$\Pi^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} = i \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)} \frac{g^5}{16\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta\sigma}. \quad (104)$$

Substituting (102)–(104) in the effective action (98) we get the final result for Chern–Simons in 5-dimensional theory

$$I_{eff}^{CS} = \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)} \frac{g^3}{48\pi^2} \int_x e^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \operatorname{tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{3}{2} g A_\mu A_\nu A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{3}{5} g^2 A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta A_\gamma \right). \quad (105)$$

It is remarkable that all parity odd contributions are finite both in 3-dimensional and in 5-dimensional cases. Thus, all values in the effective action are renormalized in a standard way, i.e., the renormalizations are determined by conventional (parity even) parts of vertices.

From the above direct calculations it is clearly seen that the chemical potential and temperature-dependent coefficient is the same for all parity odd parts of diagrams and doesn't depend on space dimension. So, the influence of finite density and temperature on the Chern–Simons term generation is the same in any odd dimension:

$$I_{eff}^{CS} = \operatorname{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\beta\mu)/\operatorname{ch}(\beta m)} \pi W[A] \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{m}{|m|} \theta(m^2 - \mu^2) \pi W[A], \quad (106)$$

where $W[A]$ is the Chern–Simons secondary characteristic class in any odd dimension. Since only the lowest orders of perturbative series contribute to the Chern–Simons term at finite density and temperature (the same situation is well known at zero density), the result obtained by using formally perturbative technique appears to be nonperturbative. Thus, the μ - and T -dependent Chern–Simons

term coefficient reveals the amazing property of universality. Namely, it does depend on neither dimension of the theory nor Abelian or non-Abelian gauge theory is studied.

The arbitrariness of μ gives us the possibility to see Chern–Simons coefficient behaviour at any masses. It is very interesting that $\mu^2 = m^2$ is the crucial point for Chern–Simons at zero temperature. Indeed, it is clearly seen from (106) that when $\mu^2 < m^2$, μ influence disappears and we get the usual Chern–Simons term

$$I_{eff}^{CS} = \pi W[A].$$

On the other hand, when $\mu^2 > m^2$, the situation is absolutely different. One can see that here the Chern–Simons term disappears because of nonzero density of background fermions. We would like to emphasize the important massless case $m = 0$ considered in many papers, see for example [4,6,24]. Here even negligible density or temperature, which always take place in any physical processes, leads to vanishing of the parity anomaly. Let us stress again that we nowhere have used any restrictions on μ . Thus we not only confirm result of [4] for Chern–Simons in QED_3 at small density, but also expand it on arbitrary μ , non-Abelian case and arbitrary odd dimension.

8. NONRELATIVISTIC CONSIDERATION

Here, we will show that in nonrelativistic case there is no Chern–Simons term, there is only pseudo Chern–Simons, which is even under parity transformation. It is also presented the possibility of getting mixed Chern–Simons term in nontrivial external field.

First, we would like to notice that there are two approaches in fermion number definition. The first one is (see for example [32])

$$\langle Q \rangle_{\beta, \mu} = \sum_n \frac{1}{e^{\beta(\lambda_n - \mu)} + 1}, \quad (107)$$

and a normal ordering is performed at the given value of the chemical potential μ . (This normal ordering is suppressed here since it is inessential to the present discussion.) The other definition (see [2]) is related to the above by

$$\langle Q \rangle_{\beta, \mu} = \langle N \rangle_{\beta, \mu} + \frac{1}{2} \zeta_H(0), \quad (108)$$

where ζ_H is the Riemann ζ function related to the even part of the spectral density of the Hamiltonian H

$$\zeta_H(s) = \int_0^\infty d\lambda [\rho_H(\lambda) + \rho_H(-\lambda)] \lambda^{-s}. \quad (109)$$

So, the difference in the definitions is given by a β and μ independent constant, $\zeta_H(0)$. Indeed, one can easily check that at the operator level, these two definitions are related as

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} + \frac{1}{2} \int dx \{ \psi^+(x), \psi(x) \} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2} \int dx [\psi^+(x), \psi(x)] . \quad (110)$$

As we have seen above, the fermion number density has the following form

$$N = \frac{1}{2} \sum_n \text{th} \frac{1}{2} \beta (\mu - \lambda_n) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_n \text{sgn}(\mu - \lambda_n). \quad (111)$$

Landau levels in the relativistic case are

$$\lambda_0 = -m \text{sgn}(eB) \quad , \quad \lambda_n = \pm \sqrt{2n|eB| + m^2}, \quad (112)$$

where $n = 1, 2, \dots$. On the other hand, in the nonrelativistic case energy levels have the form

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2})\Omega, \quad (113)$$

where $\Omega = |eB|/m$ cyclotron frequency, $n = 0, 1, 2, \dots$

As we have seen above in the relativistic case fermion density has the form

$$N = \frac{|eB|}{2\pi} \text{sgn}(\mu) \left(\text{Int} \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right] + \frac{1}{2} \right) \theta(|\mu| - |m|) + \frac{eB}{4\pi} \text{sgn}(m) \theta(|m| - |\mu|). \quad (114)$$

Thus we can see that in the relativistic case there is especial zero mode, the only mode which contributes to parity-odd part of fermion number. On the contrary, in the nonrelativistic case there is no special zero mode, all modes contribute to the parity even part only. Thus, we have at zero temperature

$$Q = \frac{|eB|}{2\pi} \sum_n \theta \left(\mu - (n + \frac{1}{2})\Omega \right) = \frac{|eB|}{2\pi} \text{Int} \left[\frac{\mu m}{|eB|} + \frac{1}{2} \right]. \quad (115)$$

One can see that fermion number in the nonrelativistic case is parity even ($B \rightarrow -B$ under parity). Therefore, it does not give rise to the parity-odd Chern–Simons term in action. Instead of being variational derivative of the true Chern–Simons, fermion number is the derivative of the pseudo Chern–Simons [26]

$$\langle Q \rangle = \frac{\delta}{\delta A_0} I_{\text{pseudoCS}}. \quad (116)$$

In the same manner it is possible to get fermion number with temperature introduced. For example, such calculations were done in [27], there was used another method. There the pseudo- Chern–Simons term coefficient has the form

$$\begin{aligned} \Pi_1^E &= \frac{1}{\pi} \sum_n (\exp \beta(\lambda_n - \mu) + 1)^{-1} - \\ &- \frac{1}{8\pi} \frac{\beta}{m l^2} \sum_n (2n+1) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \beta(\lambda_n - \mu) \right). \end{aligned} \quad (117)$$

It is clearly seen that this expression can be rewritten in the way

$$\begin{aligned} \Pi_1^E &= \frac{1}{\pi} \sum_n \left[\frac{1}{\exp \beta(\lambda_n - \mu) + 1} - \right. \\ &- \left. \frac{\beta \lambda_n}{\exp \beta(\lambda_n - \mu) + \exp(-\beta(\lambda_n - \mu)) + 2} \right]. \end{aligned} \quad (118)$$

After taking $\beta \rightarrow \infty$ limit one gets

$$\Pi_1^E = \frac{1}{\pi} \sum_n \theta(\mu - \lambda_n), \quad (119)$$

that coincides with the above calculations.

Another paper is [26]. There was also considered chemical potential influence on fermion number in nonrelativistic case. In this section we treat a nonrelativistic electron gas confined to a plane. We expect that some new qualitative features arise from the fact that in this case the spin degree of freedom is not enslaved by the dynamics. We continue to use a relativistic notation with $\partial_\mu = (\partial_0, \nabla$, $\partial^\mu = (\partial_0, -\nabla)$, where ∇ is the gradient operator, and $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$.

Let us consider the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger (i\partial_0 + \mu - H_P) \Psi + b \Psi^\dagger \frac{\sigma^3}{2} \Psi \quad (120)$$

which governs the dynamics of the Pauli spinor field Ψ , with Grassmann components $\psi_\uparrow$ and $\psi_\downarrow$ describing the electrons with spin- $\uparrow$ and $\downarrow$. The role of the chemical potential μ and the spin source b is the same as in the previous calculation. The Pauli Hamiltonian

$$H_P = \frac{1}{2m} (i\nabla + e\mathbf{A})^2 - g_0 \mu_B \frac{\sigma^3}{2} B + eA_0, \quad (121)$$

with $\mu_B = e/2m$ — the Bohr magneton and g_0 — the electron g -factor, contains a Zeeman term which couples the electron spins to the background magnetic field. Usually this term is omitted. The reason is that in realistic systems the g factor

is much larger than two, the value for a free electron. In strong magnetic fields relevant to the QHE the energy levels of spin- $\downarrow$ electrons are too high and cannot be occupied; the system is spin polarized, and the electron spin is irrelevant to the problem. Setting again $A^0 = A^1 = 0$, $A^2 = Bx^1$, one finds as eigenvalues for H_P

$$E_{n,\pm} = \frac{|eB|}{m}(n + \frac{1}{2}) - \frac{eB}{m}S_{\pm}, \quad (122)$$

with $S_{\pm} = \pm\frac{1}{2}$ for spin- $\uparrow$ and spin- $\downarrow$ electrons, respectively. We note that in the nonrelativistic limit, corresponding to taking $m \rightarrow +\infty$, the relativistic Landau levels reduce to

$$E_{+n} \rightarrow \text{const} + \frac{|eB|}{m}(n + \frac{1}{2}) - \frac{eB}{2m}, \quad (123)$$

where we omitted the negative energy levels which have no meaning in this limit. The main difference with (122) stems from the fact that there the spin degree of freedom is considered as an independent quantity, not enslaved by the dynamics as is the case in the relativistic problem.

The induced fermion number density and spin density may be obtained in a similar calculation as in the preceding section. From the effective action,

$$S_{\text{eff}} = -i \text{tr} \ln(i\partial_0 - H_P + \mu + \frac{b}{2}\sigma^3), \quad (124)$$

one obtains

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{|eB|}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dk_0}{2\pi i} & \left[\ln(k_0 - E_{n,+} + \mu + \frac{b}{2}) + \right. \\ & \left. + \ln(k_0 - E_{n,-} + \mu - \frac{b}{2}) \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

The resulting value of the induced fermion number density is

$$\rho = \frac{|eB|}{2\pi}(N_+ + N_-), \quad (126)$$

with $N_{\pm}$ the number of filled Landau levels for spin- $\uparrow$ and spin- $\downarrow$ electrons,

$$N_{\pm} = \left\lceil \frac{m\mu_{\pm}}{|eB|} + \frac{1}{2} \right\rceil, \quad (127)$$

and

$$\mu_{\pm} = \mu + \frac{eB}{m}S_{\pm} \quad (128)$$

their effective chemical potentials. The square brackets denote again the integer-part function. Implicit in this framework is the assumption that, just like in

the relativistic case, the chemical potential lies between two Landau levels. The induced fermion number density (126) is related to a Chern–Simons term in the effective action, with a coefficient

$$\theta = \text{sgn}(eB) \frac{1}{2\pi} (N_+ + N_-). \quad (129)$$

Because of the presence of the $\text{sgn}(eB)$ factor, which changes sign under a parity transformation, this Chern–Simons term is invariant under such transformations. The induced spin density turns out to be independent of $N_{\pm}$, viz.

$$s = \frac{eB}{4\pi}. \quad (130)$$

This follows from the symmetry in the spectrum $E_{n+1,+} = E_{n,-}$ ($eB > 0$), or $E_{n,+} = E_{n+1,-}$ ($eB < 0$). The magnetic moment, M can be obtained from (130) by multiplying s with twice the Bohr magneton, μ_B . This leads to the text-book result for the magnetic spin susceptibility χ_P

$$\chi_P = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{e^2}{4\pi m} = 2\mu_B^2 \nu_{2D}(0), \quad (131)$$

with $\nu_{2D}(0) = m/(2\pi)$ the density of states per spin degree of freedom in two space dimensions.

At zero field, ρ reduces to the standard fermion number density in two space dimensions $\rho \rightarrow \mu m/\pi = k_F^2/(2\pi)$, where k_F denotes the Fermi momentum. A single fluxon carries according to (130) a spin $S_{\otimes} = \frac{1}{2}$ and, since for small fields

$$\rho \rightarrow \frac{\mu m}{\pi} + \frac{|eB|}{2\pi}, \quad (132)$$

also one unit of fermion charge. That is, in the nonrelativistic electron gas the fluxon may be thought of as a fermion in that it has both the spin and charge of a fermion. However, the close connection between spin of a fluxon and induced Chern–Simons term for arbitrary fields that we found in the relativistic case is lost. This can be traced back to the fact that in the nonrelativistic case the electron spin is an independent degree of freedom. In the next section we point out that the spin of the fluxon does not derive from the ordinary Chern–Simons term, but from the so-called mixed Chern–Simons term. Such a term is absent in the relativistic case.

To see how the spin contribution (131) to the magnetic susceptibility compares to the orbital contribution we evaluate the k_0 -integral in the effective action (125) with $b = 0$ to obtain

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{|eB|}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varsigma=\pm} (\mu - E_{n,\varsigma}) \theta(\mu - E_{n,\varsigma}). \quad (133)$$

The summation over n is easily carried out with the result for small fields

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\varsigma=\pm} \left[\mu_{\varsigma}^2 m - \frac{(eB)^2}{4m} \right] = \frac{\mu^2 m}{2\pi} + \frac{(eB)^2}{8\pi m} [(2\sigma)^2 - 1], \quad (134)$$

where $\sigma = \frac{1}{2}$ and $\mu_{\pm}$ is given by (128). The first term in the right-hand side of (134), which is independent of the magnetic field, is the free particle contribution

$$\frac{\mu^2 m}{2\pi} = -2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) \theta \left(\mu - \frac{k^2}{2m} \right). \quad (135)$$

The second term yields the low-field susceptibility

$$\chi = (-1)^{2\sigma+1} 2\mu_B^2 \nu_{2D}(0) [(2\sigma)^2 - 1]. \quad (136)$$

Equation (136) shows that the ratio of orbital to spin contribution to χ is different from the three-dimensional case. Also, whereas a 3D electron gas is paramagnetic ($\chi > 0$) because of the dominance of the spin contribution, the 2D gas is not magnetic ($\chi = 0$) at small fields since the orbital and spin contributions to χ cancel.

8.1. Mixed Chern–Simons Term. As we have seen above, in the non-relativistic case there are no true Chern–Simons terms. Now, we will present consideration of this problem in nontrivial background field.

In this section we investigate the origin of the induced spin density (130) we found in the nonrelativistic electron gas. To this end we slightly generalize the theory (120) and consider the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger \left[i\partial_0 - eA_0 + \mu - \frac{1}{2m} (i\nabla + e\mathbf{A})^2 \right] \Psi + \frac{e}{m} B^a \Psi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \Psi. \quad (137)$$

It differs from (120) in that the spin source term is omitted, and in that the magnetic field in the Zeeman term is allowed to point in any direction in some internal space labelled by latin indices $a, b, c = 1, 2, 3$. As a result also the spin will have components in this space. It is convenient to consider a magnetic field whose direction in the internal space varies in space-time. We set

$$B^a(x) = B n^a(x), \quad (138)$$

with n^a a unit vector in the internal space. The gauge potential A_μ appearing in the first term of (137) still gives $\epsilon_{ij} \partial_i A^j = B$. Equation (138) allows us to make the decomposition

$$\Psi(x) = S(x) \chi(x); \quad S^\dagger S = 1, \quad (139)$$

with $S(x)$ a local SU(2) matrix which satisfies

$$\sigma \cdot \mathbf{n}(x) = S(x) \sigma^3 S^\dagger(x). \quad (140)$$

In terms of these new variables the Lagrangian (137) becomes

$$\mathcal{L} = \chi^\dagger \left[i\partial_0 - eA_0 - V_0 + \mu - \frac{1}{2m}(i\nabla + e\mathbf{A} + \mathbf{V})^2 \right] \chi + \frac{eB}{2m} \chi^\dagger \sigma^3 \chi, \quad (141)$$

where the 2×2 matrix $V_\mu = -iS^\dagger(\partial_\mu S)$ represents an element of the SU(2) algebra, which can be written in terms of (twice) the generators σ^a as

$$V_\mu = V_\mu^a \sigma^a. \quad (142)$$

In this way the theory takes formally the form of a gauge theory with gauge potential V_μ^a . In terms of the new fields the spin density operator,

$$j_0^a = \Psi^\dagger \frac{\sigma^a}{2} \Psi, \quad (143)$$

becomes [29]

$$j_0^a = R_{ab} \chi^\dagger \frac{\sigma^b}{2} \chi = -\frac{1}{2} R_{ab} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_0^b}. \quad (144)$$

In deriving the first equation we employed the identity

$$S^\dagger(\theta) \sigma^a S(\theta) = R_{ab}(\theta) \sigma^b, \quad (145)$$

which relates the SU(2) matrices in the $j = \frac{1}{2}$ representation, $S(\theta) = \exp(\frac{i}{2}\theta \cdot \sigma)$, to those in the adjoint representation ($j = 1$), $R(\theta) = \exp(i\theta \cdot \mathbf{J}^{\text{adj}})$. The matrix elements of the generators in the latter representation are $(J_a^{\text{adj}})_{bc} = -i\epsilon_{abc}$.

The projection of the spin density j_0^a onto the spin quantization axis, i.e. the direction n^a of the applied magnetic field [29],

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_0^3}, \quad (146)$$

only involves the spin gauge field V_μ^3 . So when calculating the induced spin density $s = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_0 \rangle$ we may set the fields V_μ^1 and V_μ^2 equal to zero and consider the simpler theory

$$\mathcal{L} = \sum_{\varsigma=\pm} \chi_\varsigma^\dagger \left[i\partial_0 - eA_0^\varsigma + \mu_\varsigma - \frac{1}{2m}(i\nabla + e\mathbf{A}^\varsigma)^2 \right] \chi_\varsigma, \quad (147)$$

where the effective chemical potentials for the spin- $\uparrow$ and spin- $\downarrow$ electrons are given in (128) and $eA_\mu^\pm = eA_\mu \pm V_\mu^3$. Both components $\chi_\uparrow$ and $\chi_\downarrow$ induce a Chern–Simons term, so that in total we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CS}} &= \frac{e^2}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (\theta_+ A_\mu^+ \partial_\nu A_\lambda^+ + \theta_- A_\mu^- \partial_\nu A_\lambda^-) \\ &= \frac{\theta_+ + \theta_-}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (e^2 A_\mu \partial_\nu A_\lambda + V_\mu^3 \partial_\nu V_\lambda^3) + e(\theta_+ - \theta_-) \epsilon^{\mu\nu\lambda} V_\mu^3 \partial_\nu A_\lambda, \end{aligned} \quad (148)$$

where the last term involving two different vector potentials is a mixed Chern–Simons term. The coefficients are given by

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(eB) N_{\pm}, \quad (149)$$

assuming that $|eB| > \frac{1}{2} |\epsilon_{ij} \partial_i V_j^3|$, so that the sign of eB is not changed by spin gauge contributions. The integers $N_{\pm}$ are the number of filled Landau levels for spin- $\uparrow$ and spin- $\downarrow$ electrons given by (127). Since $N_+ - N_- = \text{sgn}(eB)$, we obtain for the induced spin density s precisely the result (130) we found in the preceding section,

$$s = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_0 \rangle = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial V_0^3} \right|_{V_{\mu}^3=0} = \frac{eB}{4\pi}. \quad (150)$$

The present derivation clearly shows that the induced spin in the nonrelativistic electron gas originates not from the standard Chern–Simons term, but from the mixed Chern–Simons term involving the electromagnetic and spin gauge potential.

The first term in (148) is a standard Chern–Simons term, the combination $\theta_+ + \theta_-$ precisely reproduces the result (129) and is related to the induced fermion number density (126).

9. TRACE IDENTITY

As was shown in [2–4] the trace identities connect the Chern–Simons term and chiral anomaly. These identities may be derived for Hamiltonians of the form

$$H = \begin{bmatrix} m & D \\ D^+ & -m \end{bmatrix}. \quad (151)$$

Here m is a constant; D , a differential operator of the form $D = iP_i \partial_i + Q(x)$; and D^+ , the hermitian conjugate of D . The P_i are constant matrices that satisfy $P_i^+ P_j + P_j^+ P_i = 2\delta_{ij}$ and $P_i P_j^+ + P_j P_i^+ = 2\delta_{ij}$ and $Q(x)$ includes all background fields. It is assumed that these background fields are static, so

$$H = H_0 + m\Gamma^c = i\Gamma_i \partial_i + K(x) + m\Gamma^c, \quad (152)$$

where

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & P_i \\ P_i^+ & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, K(x) = \begin{bmatrix} 0 & Q(x) \\ Q^+(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (153)$$

here Γ matrices satisfy the Euclidian Dirac algebra and the operator H_0 anticommutes with Γ^c . As a consequence $H^2 = H_0^2 + m^2 \geq m^2$ and all eigenvalues of H

$$H\Psi = H \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda\Psi \quad (154)$$

satisfy $\lambda^2 \geq m^2$. Using (151) we obtain the first-order equations

$$D^+u = (\lambda + m)v, \quad Dv = (\lambda - m)u \quad (155)$$

and by iterating, we find

$$DD^+u = (\lambda^2 - m^2)u, \quad (156)$$

$$D^+Dv = (\lambda^2 - m^2)v. \quad (157)$$

If u is a solution of (156) with eigenvalue $\lambda^2 - m^2 = \chi \neq 0$, then D^+u is a solution of (157) with the same eigenvalue χ . However, if u is a zero mode of D^+ , in general it is not a zero mode of D . Every solution of (156) or (157) yields two solutions of (154) if $\lambda \neq \pm m$ and one if $\lambda = \pm m$, and consequently the Dirac problem (154) is equivalent to (156), (157).

The fermion number operator has the form (for discussion on fermion number definition see beginning of section 8)

$$N = \frac{1}{2} \int dx [\Psi^+(x), \Psi(x)]. \quad (158)$$

At the time $t = 0$ the second quantized fermion field operator can be expanded as

$$\Psi(x) = \sum_n b_n \omega_n(x) + \sum_n d_n^+ \phi_n(x) + \int dk (b_k \omega_k(x) + b_k^+ \phi_k(x)), \quad (159)$$

where $\omega_n(x)$ and $\phi_n(x)$ are the positive and negative energy bound state solutions of the eigenvalue equation

$$H\psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad (160)$$

and $\omega_k(x)$ and $\phi_k(x)$ are the positive and negative energy continuum solutions. Thus, the fermion number operator can be rewritten as follows

$$N = N_0 - \frac{1}{2} \eta_H, \quad (161)$$

where we have defined

$$N_0 = \sum_n [b_n^+ b_n - d_n^+ d_n] + \int dk [b_k^+ b_k - d_k^+ d_k],$$

$$\eta_H = \sum_k \text{sgn}(\lambda_k). \quad (162)$$

The summation extends over both the discrete and continuum portions of the spectrum, and if a continuum spectrum is present, we rather write as

$$\eta_H = \int d\lambda \rho_H(\lambda) \operatorname{sgn}(\lambda). \quad (163)$$

Here $\rho_H(\lambda)$ is the spectral density function of the Hamiltonian H , and we may express it in terms of its even and odd parts:

$$\rho_H(\lambda) = \frac{1}{2} [\rho_H(\lambda) + \rho_H(-\lambda)] + \frac{1}{2} [\rho_H(\lambda) - \rho_H(-\lambda)] = \tau_H(\lambda) + \sigma_H(\lambda). \quad (164)$$

If we substitute it in (163) we obtain

$$\eta_H = \int d\lambda \sigma_H(\lambda) \operatorname{sgn}(\lambda) \quad (165)$$

since only the odd part of $\rho_H(\lambda)$ can contribute to η_H . So, η_H yields the difference in the number of positive and negative energy eigenstates of the Hamiltonian H , and thus it is a measure of its spectral asymmetry. However, the sum is not absolutely convergent and it needs to be regulated: the Atiyah–Patodi–Singer η invariant of the Hamiltonian H is defined by

$$\eta_H(s) = \sum_k \operatorname{sgn}(\lambda_k) |\lambda|^{-s} = \int d\lambda \sigma_H(\lambda) \operatorname{sgn}(\lambda) |\lambda|^{-s}. \quad (166)$$

For a large class of Hamiltonians the residue at $s = 0$ vanishes, and we assume that $s = 0$ is a regular point of $\eta_H(s)$, so we can define

$$\eta_H = \lim_{s \rightarrow 0} \eta_H(s) = \sum_k \operatorname{sgn}(\lambda_k) \equiv \int d\lambda \sigma_H(\lambda) \operatorname{sgn}(\lambda). \quad (167)$$

We shall now show how the spectral density $\rho_H(\lambda)$ of the Hamiltonian (151) can be represented in terms of the spectral densities $\rho_{DD^+}(\chi)$ and $\rho_{D^+D}(\chi)$ of the operators DD^+ and D^+D , respectively. For this we first consider the following Stieltjes transformation of the even part of $\rho_H(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho_H(\lambda) \frac{1}{\lambda^2 + z^2} = 2 \int_{|m|}^{\infty} d\lambda \tau_H(\lambda) \frac{1}{\lambda^2 + z^2}. \quad (168)$$

Here z^2 is an arbitrary complex number which does not belong to the spectrum of H . Introducing the coordinate representation we obtain

$$\begin{aligned} & 2 \int_{|m|}^{\infty} d\lambda \tau_H(\lambda) \frac{1}{\lambda^2 + z^2} = \int dx \operatorname{tr} \langle x | \frac{1}{H^2 + z^2} | x \rangle \\ &= \int dx \left(\operatorname{tr} \langle x | \frac{1}{DD^+ + m^2 + z^2} | x \rangle + \operatorname{tr} \langle x | \frac{1}{D^+D + m^2 + z^2} | x \rangle \right) \\ &= \int d\chi (\rho_{DD^+}(\chi) + \rho_{D^+D}(\chi)) \frac{1}{\chi + m^2 + z^2} \equiv F(m^2 + z^2). \end{aligned} \quad (169)$$

Comparing (168) with (169) we conclude that

$$\tau_H(\lambda) = |\lambda| (\rho_{DD^+}(\lambda^2 - m^2) + \rho_{D^+D}(\lambda^2 - m^2)). \quad (170)$$

Similarly, we find a representation for the odd part of $\rho_H(\lambda)$ by considering

$$\begin{aligned} 2 \int_{|m|}^{\infty} d\lambda \sigma_H(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda^2 + z^2} &= \int dx \operatorname{tr} \langle x | \frac{H}{H^2 + z^2} | x \rangle \\ &= \int dx \left(\operatorname{tr} \langle x | \frac{m}{DD^+ + m^2 + z^2} | x \rangle - \operatorname{tr} \langle x | \frac{m}{D^+D + m^2 + z^2} | x \rangle \right) \\ &= \int d\chi (\rho_{DD^+}(\chi) - \rho_{D^+D}(\chi)) \frac{m}{\chi + m^2 + z^2} \equiv mG(m^2 + z^2). \end{aligned} \quad (171)$$

We conclude that the odd spectral density, which contributes to (167), is given by

$$\sigma_H(\lambda) = m \operatorname{sgn}(\lambda) [\rho_{DD^+}(\lambda^2 - m^2) - \rho_{D^+D}(\lambda^2 - m^2)]. \quad (172)$$

Since the fermion number is essentially a Mellin transformation of the odd spectral density, we find the following spectral representation for the fermion number

$$\begin{aligned} N &= -m \int_0^{\infty} d\lambda [\rho_{DD^+}(\lambda^2 - m^2) - \rho_{D^+D}(\lambda^2 - m^2)] = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\chi [\rho_{DD^+}(\chi) - \rho_{D^+D}(\chi)] \frac{m}{\sqrt{\chi + m^2}} = \\ &= -\frac{m}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega G(m^2 + \omega^2), \end{aligned} \quad (173)$$

where $G(m^2 + \omega^2)$ is defined by (171). We shall now show how the axial anomaly is connected with fermion number. First notice that

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \langle x | \frac{m}{DD^+ + m^2 + \omega^2} | y \rangle - \operatorname{tr} \langle x | \frac{m}{D^+D + m^2 + \omega^2} | y \rangle &= \\ &= \operatorname{tr} \langle x | \Gamma^c \frac{m}{H^2 + \omega^2} | y \rangle. \end{aligned} \quad (174)$$

Further, we get

$$\operatorname{tr} \langle x | \Gamma^c \frac{m}{H^2 + \omega^2} | y \rangle = i \frac{m}{\sigma} \operatorname{tr} \langle x | \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | y \rangle, \quad (175)$$

where $\sigma = \sqrt{m^2 + \omega^2}$. Let's now consider

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr} \langle x | i\Gamma^i \partial_i \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} - \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} i\Gamma^i \partial_i | y \rangle = \\ &= 2i\sigma \operatorname{tr} \langle x | \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | y \rangle + \operatorname{tr} \left([K(y) - K(x)] \langle x | \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | y \rangle \right). \end{aligned} \quad (176)$$

Combining (175) and (176) we then obtain the following trace identity

$$i \frac{m}{\sigma} \text{tr} \langle x | \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | y \rangle = \frac{m}{2\sigma^2} [\partial_x + \partial_y] \text{tr} \langle x | i \Gamma^i \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | y \rangle + \frac{m}{2\sigma^2} \text{tr} \left([K(y) - K(x)] \langle x | \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | y \rangle \right). \quad (177)$$

Notice that (177) has the structure of the standard axial anomaly equation for the Dirac operator $H_0 + i\sigma$. Thus, when we take $x \rightarrow y$ limit we need to discuss two cases:

First, if the space dimension D is odd the second term on the right-hand side of (177) vanishes, since there are no axial anomaly in this case, and the only contribution to fermion number gives the first term (boundary term).

Second, if the space dimension D is even, the second term on the right-hand side of (177) gives the axial anomaly, and taking in mind (173) we get for fermion number

$$N = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{m}{m^2 + \omega^2} \left(2T_D + \int dS^i \text{tr} \langle x | i \Gamma^i \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | x \rangle \right), \quad (178)$$

here T_D is the Pontryagin index of the background gauge fields that arises from the space integral of anomaly term. There is also boundary term, which vanishes for a trivial gauge background.

Let us consider 2-dimensional case, for the Hamiltonian

$$H_0 = -i\sigma^2 \frac{d}{dx} + \sigma^1 \phi(x). \quad (179)$$

Since this Hamiltonian can be interpreted as a one-dimensional Dirac operator, and since there are no anomalies in one dimension, the fermion number is given by

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{m}{m^2 + \omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} \text{tr} \langle x | i \Gamma^1 \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sigma} | x \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{m}{m^2 + \omega^2} \left[\text{tr} \langle \infty | \sigma^1 \frac{1}{H_0 + i\sigma} | \infty \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \text{tr} \langle -\infty | \sigma^1 \frac{1}{H_0 + i\sigma} | -\infty \rangle \right], \quad (180) \end{aligned}$$

where we have used the representation $\Gamma^1 = \sigma^2$ and $\Gamma^c = \sigma^3$ of the Dirac algebra. We assume that the soliton field $\phi(x)$ has the asymptotes $\phi(\pm\infty) = \hat{\phi}_\pm$. Taking in mind that

$$\text{tr} \langle \pm\infty | \sigma^1 \frac{1}{H_0 + i\sigma} | \pm\infty \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \langle \pm \infty | \frac{1}{-\sigma^3 \partial - \phi(x) - i\sigma^2 \sigma^3 \sqrt{m^2 + \omega^2}} | \pm \infty \rangle = \\
&2 \text{tr} \langle \pm \infty | \frac{\phi(x)}{\partial^2 - \phi^2(x) - m^2 - \omega^2} | \pm \infty \rangle = \\
&= -2\hat{\phi}_{\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k^2 + \hat{\phi}_{\pm}^2 + m^2 + \omega^2}, \tag{181}
\end{aligned}$$

we find for fermion number

$$N = -\frac{1}{2\pi} \left[\arctan \left[\frac{\hat{\phi}_+}{m} \right] - \arctan \left[\frac{\hat{\phi}_-}{m} \right] \right]. \tag{182}$$

This result [4, 31] is obtained without the use of any specific soliton profile. However, at the presence of nonzero density (μ), fermion number depends not only on asymptotic properties of soliton profile, but also it depends on the local properties of the soliton profile such as the width of the soliton [32].

The result for fermion number at the presence of density and temperature can be found in [32]. There was studied the Hamiltonian [33]

$$H_0 = \sigma^2 \frac{d}{dx} + \sigma^1 \phi(x) + \sigma^3 \epsilon. \tag{183}$$

This Hamiltonian has the following positive- and negative-energy continuum solutions and a bound state solution (assuming a soliton profile which has only one bound state)

$$\begin{aligned}
\psi_{k\alpha} &= \begin{bmatrix} [(\alpha E + \epsilon)/2\alpha E]^{1/2} u_k \\ [2\alpha E(\alpha E + \epsilon)]^{1/2} (\partial_x + \phi) u_k \end{bmatrix}, \\
\psi_s &= N_0 \begin{bmatrix} \exp[-\int^x dx' \phi(x')] \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{184}
\end{aligned}$$

where N_0 is a normalization factor, $\alpha = \pm 1$ distinguishes positive and negative energy solutions. In the ground state the soliton charge is defined as

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum [\rho_i^s(x) - \rho_i^0(x)], \tag{185}$$

where $\rho_i^s(x)$ and $\rho_i^0(x)$ are the fermion number density at a point x in the presence and absence of the soliton, due to occupied state i .

The generalization of (185) to finite μ and T is straightforward since we have a noninteracting sea of fermions

$$Q(\mu, T) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum [\rho_i^s(x) - \rho_i^0(x)] n(\epsilon_i - \mu), \tag{186}$$

where $n(\epsilon - \mu) = [\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1]^{-1}$ is the Fermi distribution function. Thus, substitution of ρ yields

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{\alpha=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (|u_k^s|^2 - |u_k^0|^2) n(\alpha E - \mu) + \sum_{\alpha=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[\frac{(\partial_x |u_k^s|^2 + 2|u_k|^2 \phi)|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}{4\alpha E(\alpha E + \epsilon)} \right] n(\alpha E - \mu) + n(\epsilon - \mu). \quad (187)$$

The square bracket in the second term of the above expression can be simplified further using $(\partial_x |u_k^s|^2 + 2|u_k|^2 \phi)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 2$. For $T = 0$ and $\mu = 0$ the first term is easily evaluated using the completeness properties of u_k . But for finite μ we have to choose a soliton profile. So, we take $\phi(x) = \phi_0 \text{th}(\phi_0 x)$, for which the eigenfunctions $u_k^s(x)$ are known exactly [33] to be

$$u_k(x) = -\exp(ikx) \left[\frac{\text{th}\phi_0 x - (ik/\phi_0)}{1 + (ik/\phi_0)} \right]. \quad (188)$$

Substitution of the u_k in (187) yields

$$Q(\mu, T) = -2\phi_0 \sum_{\alpha=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{n(\alpha E - \mu)}{k^2 + \phi_0^2} + 2\phi_0 \sum_{\alpha=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{n(\alpha E - \mu)}{2\alpha E(\alpha E + \epsilon)} + n(\epsilon - \mu). \quad (189)$$

In particular, this integrals can be evaluated exactly for zero temperature and finite μ to get [32]

$$Q(\mu, 0) = -\text{sgn}(\mu)Q_0(\epsilon) - \theta(\mu)G(k_F, \epsilon) + \theta(-\mu)G(k_F, -\epsilon) \quad (190)$$

for $|\mu| > m$, where

$$Q_0(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\phi_0}{\epsilon} \right], \\ G(k_F, \epsilon) = \frac{w}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\phi_0 \tan[\frac{1}{2} \tan^{-1}(k_F/m)]}{m + \epsilon} \right], \\ k_F = (\mu^2 - m^2)^{1/2}, \quad m = (\phi_0^2 + \epsilon^2)^{1/2}.$$

As we have seen above, the boundary term is dependent on soliton profile at finite density. Thus, the generalization of the trace identities on finite density and temperature is hardly possible because of nontopological part of it.

At finite temperature and zero density trace identity still holds and one has for fermion number [2, 4]

$$\langle N \rangle_\beta = -\frac{1}{2\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{m^2 + \omega_n^2} \left(\int dx (\text{anomaly}) + \int dx \partial_i \text{tr} \langle x | i\Gamma_i \Gamma^c \frac{1}{H_0 + i\sqrt{m^2 + \omega_n^2}} \rangle \right). \quad (191)$$

Now we'll prove that chiral anomaly doesn't depend on temperature at any even dimension. The second term at left-hand side of (191) is a surface term, which doesn't contribute to topological part of the trace identity [2,4]. So, we won't consider nontopological part of the trace identity, i.e., nontopological part of fermion density and surface term. Thus for topological part trace identity takes the form

$$\langle N \rangle_\beta^{\text{topological}} = -\frac{1}{2\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{m^2 + \omega_n^2} \left(\int dx (\text{anomaly}) \right). \quad (192)$$

The result for left-hand side of Eq. (192) we know in arbitrary odd dimension. Really, from (106) we have

$$\langle N \rangle_\beta^{\text{CS}} = \langle N \rangle_\beta^{\text{topological}} = \frac{\delta I_{eff}^{\text{C,S}}}{g\delta A_0}. \quad (193)$$

By using the fact that

$$\frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\omega_n^2 + m^2} = \frac{1}{4} \frac{\text{sh}(\beta m)}{1 + \text{ch}(\beta m)}, \quad (194)$$

one can see that the only possibility to reconcile left and right sides of Eq. (192) is to put temperature independence of anomaly. Thus, we proof that axial anomaly doesn't depend on temperature in any even-dimensional theory.

Moreover, now we can generalize trace identity on arbitrary finite density. Really, taking in mind (106) and (193) one can see

$$\langle N \rangle_{\beta,\mu}^{\text{CS}} = -\frac{1}{4} \text{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \text{ch}(\beta\mu)/\text{ch}(\beta m)} \int dx (\text{anomaly}), \quad (195)$$

where $\langle N \rangle_{\beta,\mu}^{\text{CS}}$ — odd part of fermion number in D -dimensional theory at finite density and temperature, (anomaly) — axial anomaly in $(D-1)$ -dimensional theory. On the other hand, as we have seen above, the anomaly doesn't depend on μ in 2- and 4-dimensions and doesn't depend on T in any even-dimensional theory. Our comprehension of the problem allows us to generalize these on arbitrary even dimension. Indeed, anomaly is the result of ultraviolet regularization, while μ and T don't effect on ultraviolet behavior of a theory. Taking in mind

(195) and that at finite density

$$\frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\omega_n^2 + m^2} = \frac{1}{4} \text{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \text{ch}(\beta \mu) / \text{ch}(\beta m)} \quad (196)$$

we can identify $\langle N \rangle_{\beta, \mu}^{\text{topological}}$ and $\langle N \rangle_{\beta, \mu}^{\text{CS}}$. So, we get generalized on finite density trace identity

$$\langle N \rangle_{\beta, \mu}^{\text{CS}} = \langle N \rangle_{\beta, \mu}^{\text{topological}} = -\frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{m}{m^2 + \omega_n^2} \left(\int dx (\text{anomaly}) \right). \quad (197)$$

Let us take, for example, 3-dimensions. We know that chiral anomaly in 2-dimensions has the form

$$\int d^2x \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} F_{ij}, \quad (198)$$

substituting this in (197) we'll get for fermion number

$$\langle N \rangle_{\beta, \mu}^{\text{CS}} = \frac{e}{16\pi^2} \text{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \text{ch}(\beta \mu) / \text{ch}(\beta m)} \int d^2x \epsilon^{ij} F_{ij}. \quad (199)$$

Covariantizing fermion number we get for the Chern–Simons term in action

$$I_{eff}^{\text{CS}} = \text{th}(\beta m) \frac{1}{1 + \text{ch}(\beta \mu) / \text{ch}(\beta m)} \frac{g^2}{16\pi} \int_x e^{\mu\nu\alpha} \text{tr}(A_\mu F_{\nu\alpha}). \quad (200)$$

Really, we've seen that only zero modes contribute to P -odd part in contrast to P -even part which is contributed by all modes. Therefore, index theorem and trace identities hold only for parity odd part of fermion number. Thus, the main result of this section is Eq. (197) which connects the Chern–Simons term and chiral anomaly in arbitrary-dimensional theory at finite density and temperature.

10. CONCLUSIONS

Thus, there is obtained finite temperature and density influence on the Chern–Simons term generation in any odd-dimensional theory both for Abelian, and for non-Abelian case. It is very interesting that $\mu^2 = m^2$ is the crucial point for Chern–Simons at zero temperature. Indeed, it is clearly seen from (106) that when $\mu^2 < m^2$, μ influence disappears and we get the usual Chern–Simons term $I_{eff}^{\text{CS}} = \pi W[A]$. On the other hand, when $\mu^2 > m^2$, the Chern–Simons term disappears because of nonzero density of background fermions. The coefficient

at the Chern–Simons term is the same in any odd dimension. It must be stressed that at $m = 0$ even negligible density or temperature, which always take place in any physical processes, lead to vanishing of the parity anomaly.

It is shown that the chiral anomaly is not influenced by medium effects such as chemical potential and temperature in any even-dimensional theory. Moreover, even if we introduce conservation of chiral charge on quantum level, the chiral anomaly arises and isn't affected.

The appearance of the Chern–Simons number in even-dimensional theories is discussed under two types of constraints. So, it is shown both for conserved charge, i.e., finite density of the background fermions, and for conserved axial charge what corresponds to conservation of the left(right)-handed fermions asymmetry in the background.

The topological part of the trace identity is generalized on finite density. Thus, the connection between the Chern–Simons term and chiral anomaly at finite density and temperature is obtained in arbitrary dimensional theory.

In conclusion we would like to touch the problem, which has attracted recently a wide interest [34,35]. This is gauge invariance of the effective action under large gauge transformations. Really, the Chern–Simons term coefficient has to be "*topologically quantized*" for gauge invariance of the effective action under large gauge transformations. But as we have seen above (56), (57), (58), even in nonperturbative calculations of Chern–Simons in even dimensions (due to existence of the chiral anomaly), it gets chemical potential (temperature) as a coefficient, which is not an integer function. This fact is hardly understandable. One can treat these that density or temperature just break invariance under large gauge transformations, leaving action invariant under local ones. On the other hand, one can hope that the whole effective action will be gauge invariant [34,35]. But, for example, essentially nonperturbative and simple calculations in one dimension [34] do not give understandable contradiction between fermion number and effective action. That is the fermion number here is not a functional derivative of the effective action, what is very strange.

The amazing fact is that at zero temperature and finite density the Chern–Simons term coefficient does not break gauge invariance. Indeed, theta function gives us 0 or 1 as the coefficient, and we have two topological domains $\mu^2 > m^2$ and $\mu^2 < m^2$ connected by large gauge transformations.

Thus, this area is yet an open field for research.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 99–02–17727). The authors are very grateful to A.M.Baldin, V.G.Kadyshevsky, A.N.Tavkhelidze and all the participants of the seminar «Symmetries and Integrable Systems» for helpful discussions.

REFERENCES

1. **Фок В.А.** — Теория пространства времени и тяготения, М.: ГИФМЛ, 1961;
Baldin A.M. — JINR Rapid Comm., 1999, No. 1[93]-99, p.5.
2. **Niemi A.J.** — Nucl. Phys., 1985, v.B251[FS13], p.155.
3. **Niemi A.J., Semenoff G.W.** — Phys. Rev., 1984, v.D30, p.809.
4. **Niemi A.J., Semenoff G.W.** — Phys. Rep., 1986, v.135, No.3, p.99.
5. **Niemi A.J., Semenoff G.W.** — Phys. Rev. Lett., 1983, v.51, p.2077.
6. **Redlich A.N.** — Phys. Rev., 1984, v.D29, p.2366.
7. **Avarez-Gaume L., Witten E.** — Nucl. Phys., 1984, v.B234, p.269.
8. **Lykken J.D., Sonnenschen J., Weiss N.** — Phys. Rev., 1990, v.D42, p.2161; Int. J. Mod. Phys., 1991, v.A6, p.1335; Int. J. Mod. Phys., 1991, v.A6, p.5155;
Schakel A.M.J. — Phys. Rev., 1991, v.D43, p.1428;
Neagu A., Schakel A.M.J. — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.1785;
Zeitlin V.Y. — Mod. Phys. Lett., 1993, v.A8, p.1821; Phys. Lett., 1995, v.B352, p.422.
9. **Sissakian A.N., Shevchenko O.Yu., Solganik S.B.** — Phys. Lett., 1997, v.B403, p.75;
Sissakian A.N., Shevchenko O.Yu., Solganik S.B. — Nucl. Phys., 1998, v.B518, p.455.
10. **Per Elmfors** — Nucl. Phys., 1997, v.B487, p.207.
11. **Gomez Nicola A., Alvarez-Estrada A.F.** — Z. Phys., 1993, v.C60, p.711; Int. J. Mod. Phys., 1994, v.A9, p.1423;
Qian Z.-X., Su R.-K., Yu P.K.N. — Z. Phys., 1994, v.C63, p.651.
12. **Shuryak E.V.** — Phys. Rep., 1980, v.61, p.73.
13. **Chodos A., Everding K., Owen D.A.** — Phys. Rev., 1990, v.D42, p.2881.
14. **Nielsen H.B., Ninomiya M.** — Phys. Lett., 1983, v.130B, p.389.
15. **Fujikawa K.** — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.2848.
16. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1962, v.128, p.2425.
17. **Redlich A.N., Wijewardhana L.C.R.** — Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, p.970;
Tsokos K. — Phys. Lett., 1985, v.157B, p.413.
18. **Rubakov V.A., Tavkhelidze A.N.** — Theor. Mat. Fiz., 1985, v.65, p.250; Phys. Lett., 1985, v.165B, p.109;
Rubakov V.A. — Prog. Theor. Phys., 1986, v.75, p.366.
19. **Shifman M.A.** — Phys. Rept., 1991, v.209, p.341; Sov. Phys. Usp., 1989, v.32, p.289.
20. **Rutherford A.R.** — Phys. Lett., 1986, v.182B, p.187;
Borisenko O.B., Petrov V.K., Zinovijev G.M. — Nucl. Phys., 1995, v.B437, p.391.
21. **Johnson M.H., Lippmann B.A.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.828.
22. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, v.82, p.664.
23. **Brown L.S., Weisberger W.I.** — Nucl. Phys., 1979, v.B157, p.285.
24. **Jackiw R.** — In: Relativity, Groups and Topology II, Proceedings of the Les Houches Summer School XL, 1983, edited by B.S.De Witt and R.Stora, North-Holland, New York, 1984.
25. **Niu Y.L., Ni G.J.** — Phys. Rev., 1988, v.D38, p.3840.
26. **Neagu A., Schakel A.M.J.** — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.1785.
27. **Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.** — Nucl. Phys., 1990, v.B340, p.403.

28. **Fetter A.L., Walecka J.D.** — Quantum Theory of Many-Body Systems, Pergamon, Oxford, 1967.
29. **Schakel A.M.J.** — In: Proceedings of the Körber Symposium on Superfluid ^3He in Rotation, edited by M. M. Salomaa, Helsinki, 1991; Physica, 1992, v.B178, p.280.
30. **Jackiw R., Templeton S.** — Phys. Rev., 1981, v.D23, p.2291.
31. **Niemi A.J., Semenoff G.W.** — Phys. Lett., 1984, v.135, p.121.
32. **Soni V., Baskaran G.** — Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, p.523;
Fedyanin V., Osipov V. — Lectures for Young Scientists, JINR, P17-85-809, Dubna, 1985.
33. **Goldstone J., Wilczek F.** — Phys. Rev. Lett., 1981, v.47, p.986;
Jackiw R., Semenoff G.W. — Phys. Rev. Lett., 1983, v.50, p.439.
34. **Dunne G., Lee K., Lu C.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.3434;
35. **Deser S., Griguolo L., Seminara D.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.1976; hep-th/9712066; hep-th/9712132;
Fosco C.D., Rossini G.L., Schaposnik F.A. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.1980;
Fosco C.D., Rossini G.L., Schaposnik F.A. — Phys. Rev., 1997, v.D56, p.6547;
Gonzalez Felipe R. — Phys. Lett., 1998, v.B417, p.114;
Aitchison I.J.R., Fosco C.D. — Phys. Rev., 1998, v.D57, p.1171.

О ПРИНЦИПАХ И ФИЗИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЕ $\gamma\gamma$ -КОЛЛАЙДЕРОВ

Э.А.Кураев, М.В.Галынский*, М.И.Левчук*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлены некоторые аспекты физической программы для встречных фотон-фотонных коллайдеров. Среди них — процессы с образованием тяжелых векторных мезонов, бозона Хиггса, тяжелых кварков, интегральные соотношения между сечениями (правила сумм) для различных поляризационных состояний, процессы образования адронов, физика померона. Эти вопросы изложены конспективно. Особое внимание уделено нелинейным эффектам в обратном комптоновском рассеянии фотонов циркулярно поляризованной лазерной волны, сфокусированной на пучке ультрарелятивистских продольно поляризованных электронов. Рассмотрено также наиболее часто встречающееся в литературе линейное приближение в этом механизме конверсии. Достаточное внимание уделено описанию калибровочных процессов, предлагаемых для целей мониторинга — непрерывного контроля за светимостью $\gamma\gamma$ -коллайдеров и степенью поляризации фотонных пучков. Для этой цели рассмотрены процессы образования двух лептонных пар в кинематике узких струй, летящих вдоль оси пучков, и процесс образования пары заряженных лептонов или бозонов, летящих на большие углы. Представлены результаты численных анализов.

We present some aspects of the physical program of photon-photon colliders. Among them — the processes with creation of heavy vector mesons, Higgs boson, heavy quarks, the integral relations between the cross sections (sum rules) for different states of polarization, processes of hadron's production, the pomeron physics. These questions are considered in the conspective form. The main attention is paid to the nonlinear effects in the process of backward Compton scattering of the circularly polarized laser beam, focused on the bunch of ultrarelativistic longitudinally polarized electrons. We consider as well the most popular in the literature the linear approximation in this conversion mechanism. We consider the calibration processes, which supposed to be used for monitoring purposes — check the luminosity and to measure the degree of polarization of photon beams. For these aims we consider the processes of two lepton pair creation in the kinematics of jets, moving along the beams directions and the process of creation a pair of charged leptons or vector bosons, moving at large angles. We present the results of numerical analysis.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с конца 80-х годов и по настоящее время в разных странах ведутся работы по проектированию и разработке физических программ для γe - и $\gamma\gamma$ -коллайдеров. В настоящее время имеются проекты по их созданию в

*Институт физики НАНБ, Минск, Белоруссия

США, ФРГ, Японии. Физические программы для этих коллайдеров, созданные в результате многолетнего сотрудничества представителей многих научных центров по физике частиц и высоких энергий, наиболее полно изложены в «Conceptual Design Reports» [1–3]. В этих проектах фотон-фотонные и фотон-электронные пучки предполагается создавать на основе использования линейных ускорителей со встречными e^+e^- -пучками.

Исследование двухфотонных процессов $\gamma\gamma \rightarrow X$ представляет собой важный раздел современной физики высоких энергий [4]. Традиционно в эксперименте они изучаются на встречных e^+e^- -пучках при взаимодействии виртуальных фотонов, которые испускаются начальными частицами (т.е. в реакции $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma^*\gamma^* \rightarrow e^+e^-X$). При этом образуется система частиц X с инвариантной массой W , а сечение этого процесса в приближении эквивалентных фотонов имеет вид

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^-X}(s) = dn_1 dn_2 d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}(W^2), \quad (1)$$

где dn_i — спектры излучения эквивалентных фотонов:

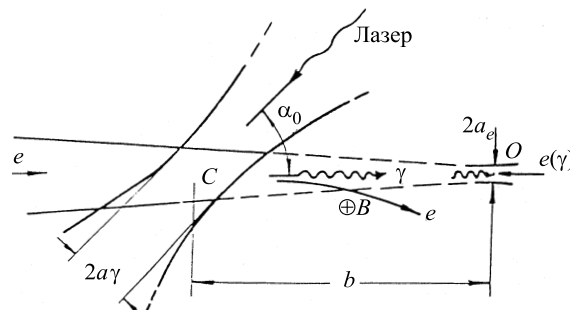
$$dn_i = \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\omega_i}{\omega_i} \frac{d(-q_i^2)}{(-q_i^2)} \left[1 - \frac{\omega_i}{\varepsilon} + \frac{\omega_i^2}{2\varepsilon^2} + \frac{m^2\omega_i^2}{q_i^2\varepsilon^2} \right]. \quad (2)$$

Здесь ε — энергия в системе центра масс (СЦМ) пучка электронов (позитронов), m — масса электрона, ω_i и q_i — энергия и 4-импульс виртуального фотона ($i = 1, 2$), $W = \sqrt{4\omega_1\omega_2}$.

К сожалению, возможности изучения двухфотонных процессов в e^+e^- -соударениях ограничены тем, что эффективные энергии и особенно светимости соударений виртуальных фотонов существенно ниже, чем в e^+e^- -соударениях. Поэтому представляется чрезвычайно важной задача получить прямые γe^- и $\gamma\gamma$ -пучки с высокими энергиями и светимостями. На таких установках можно было бы не только более детально исследовать те же вопросы, что и в соударениях виртуальных фотонов, но и изучать совершенно новые объекты, недоступные для изучения другими методами.

Одним из наилучших методов получения интенсивных фотонных пучков является использование обратного комптоновского рассеяния (ОКР) лазерного света на электронном пучке линейного ускорителя [5–9]. В кратких сообщениях [5] было впервые показано, что на базе линейных однопролетных ускорителей со встречными e^+e^- -пучками можно реализовать встречные γe^- и $\gamma\gamma$ -пучки примерно с теми же энергиями и светимостями, что и для исходных ускорителей. Необходимые для этого интенсивные пучки γ -квантов было предложено получать при рассеянии мощной лазерной вспышки на электронных пучках этих ускорителей.

Малые размеры пучков линейных коллайдеров делают возможным получение значения коэффициента конверсии (отношения числа высокоэнергетических фотонов к числу электронов) $k = N_\gamma/N_e \sim 1$ при энергиях лазерной

Рис. 1. Схема получения встречных γe - и $\gamma\gamma$ -пучков

вспышки в несколько джоулей, т.е. при разумном выборе параметров можно конвертировать большую часть электронов в фотоны высоких энергий.

Существенная монохроматизация фотонных пучков может быть достигнута за счет использования поляризованных пучков сталкивающихся частиц. Что касается поляризационных свойств самих фотонных пучков, то они определяются состоянием поляризации начальных частиц, могут быть практически полностью поляризованными по абсолютной величине, и, кроме того, их знак может регулироваться.

Детальное описание схемы конверсии электронного пучка в γ -пучок, основные характеристики встречных γe - и $\gamma\gamma$ -соударений, вопросы фона и калибровки светимости, а также нетривиальные поляризационные эффекты в таких γe - и $\gamma\gamma$ -соударениях были подробно рассмотрены в [6,7]. По сути дела, в работах [6,7] было дано изложение совершенно новой концепции по созданию фотонных линейных коллайдеров (ФЛК). Она оказалась привлекательной по многим причинам, продолжала обсуждаться и развиваться в многочисленных работах других авторов [10–21]. В [11] для реализации указанной в [5] схемы предлагалось использовать лазер на свободных электронах того же пучка.

Схема реализации фотонных коллайдеров (ФК) показана на рис. 1. Два сфокусированных электронных пучка движутся навстречу друг другу к точке взаимодействия O и на расстоянии примерно 1 см от нее сталкиваются с фокусированным лазерным пучком в точке C . В результате ОКР лазерные фотоны превращаются в пучок высокоэнергетических фотонов (имеющих энергию, сравнимую с энергией начального пучка электронов ε), распространяющихся с небольшим угловым разбросом (порядка m/ε) практически вдоль направления движения начальных электронов, т.е. фокусируются в точке встречи, где сталкиваются с идущим навстречу электронным или таким же γ -пучком. Электроны продолжают двигаться к точке встречи, имея

широкое энергетическое распределение $\varepsilon' = (1 \div 0,02)\varepsilon$ в результате многократного комптоновского рассеяния, либо отклоняются магнитным полем $B \sim 1$ Тл от точки встречи.

Размеры фотонного пучка в точке встречи могут практически совпадать с размерами электронного пучка, поэтому светимость γe^- и $\gamma\gamma$ -столкновений может иметь такой же порядок, как и «геометрическая» светимость исходных e^+e^- -пучков (при этом наличие позитронов вовсе не обязательно для ФК).

Метод получения γ -квантов высоких энергий с помощью ОКР хорошо известен [22], он использовался во многих лабораториях [23]. Однако коэффициент конверсии электронов в фотоны при этом был мал и имел порядок: $k \sim 10^{-7} - 10^{-5}$.

Фотонные (т.е. γe и $\gamma\gamma$) линейные коллайдеры обладают богатым физическим потенциалом и рядом преимуществ по сравнению с обычными e^+e^- -коллайдерами. Одно из них заключается в том, что ФК обладают высокой монохроматичностью. Типичное распределение светимости $\gamma\gamma$ -столкновений имеет острый пик вблизи максимально достижимых инвариантных масс $W_{\gamma\gamma}$ сталкивающихся фотонов с шириной $\delta W_{\gamma\gamma}/W_{\gamma\gamma} \cong 0,15$.

Вследствие наличия резкой границы в спектрах светимости $\gamma\gamma$ -столкновений в области максимальных инвариантных масс поиски различных мод распада хиггсовского бозона (ХБ) в виде узких одиночных резонансов, измерение его массы путем сканирования по энергии в СЦМ могут быть лучше проведены на ФЛК, чем с помощью $p\bar{p}$ - или e^+e^- -столкновений [21]. Измерение двухфотонной ширины распада ХБ $\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma)$ может оказаться полезным при поиске возможного четвертого поколения лептонов и кварков, поскольку благодаря петлевым диаграммам все массивные (даже ультратяжелые) заряженные частицы дают вклад в эту ширину распада, если их масса обусловлена механизмом Хиггса.

Светимость $\gamma\gamma$ -коллайдеров потенциально выше светимости e^+e^- -столкновений. Как показано в работе [16], для ФК существует принципиальная возможность получения предельных светимостей на уровне $10^{34} - 10^{35} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ при использовании области инвариантных масс вблизи пика светимости ($z = W_{\gamma\gamma}/2\varepsilon > 0,65$).

Сечения рождения заряженных пар частиц со спином 0 и 1/2 в $\gamma\gamma$ -столкновениях превышают соответствующие сечения в e^+e^- -столкновениях примерно в 5 раз (см. рис. 2); для рождения пар W -мезонов этот фактор даже больше, он равен примерно 10–20. Следовательно, статистика событий того же порядка, что и достижимая на e^+e^- -коллайдерах, может быть достигнута на $\gamma\gamma$ -коллайдерах при светимостях, как минимум, в пять раз меньших. Кроме того, эти сечения убывают с ростом энергии значительно медленнее, чем на e^+e^- -коллайдере (см. рис. 2). Как впервые показано в работе [21], аналогичная ситуация имеет место и при образовании бозона Хиггса в $\gamma\gamma$ -столкновениях.

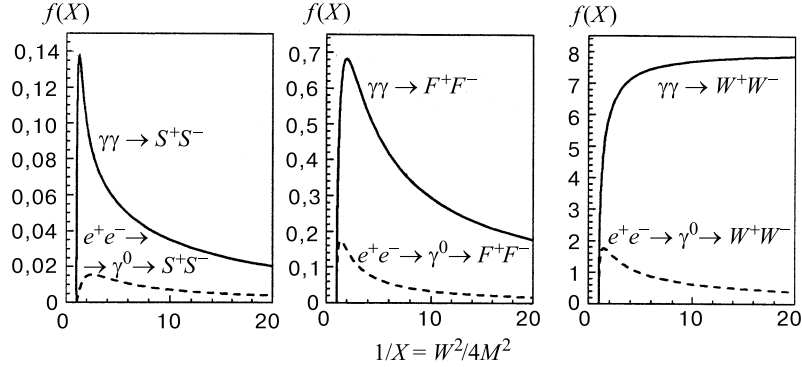


Рис. 2. Сравнение сечений образования заряженных пар частиц в e^+e^- - и $\gamma\gamma$ - столкновениях. Они имеют вид [14]: $\sigma = (\pi\alpha^2/M^2)f_p(X)$, где $p = S$ (скаляр), $p = F$ (фермион), $p = W$ (W -бозоны); M — масса частицы; $X = W_{p\bar{p}}^2/4M^2$

Фотонные коллайдеры предоставляют наилучшую возможность для изучения t -кварков. При энергиях, достаточно далеких от порога рождения $t\bar{t}$ -пар, $\gamma\gamma$ -коллайдеры позволят получать примерно 10^5 $t\bar{t}$ -пар в год [2]. Продукты их распада будут слабо перекрываться, и, таким образом, можно будет изучать некоторые редкие распады.

Этот далеко не полный список достоинств и преимуществ ФЛК является перечнем очень сильных аргументов в пользу создания γe^- - и $\gamma\gamma$ -коллайдеров. Отметим, что одной из самых главных целей проектируемых $\gamma\gamma$ -коллайдеров является решение ключевой проблемы стандартной модели (СМ) — открытие и изучение свойств бозона Хиггса.

В первом разделе обзора рассматривается схема конверсии лазерных фотонов. При этом изучается влияние нелинейных эффектов на спектры, поляризационные характеристики рассеянных фотонов и электронов, а также светимости $\gamma\gamma$ -столкновений.

Во втором разделе кратко рассматриваются основные аспекты физической программы фотон-фотонных коллайдеров.

В третьем разделе исследуются процессы, которые могут быть использованы для калибровки светимости $\gamma\gamma$ -коллайдеров, а также определения степени поляризации фотонных пучков. Это процесс образования двух лептонных пар двумя поляризованными фотонами и процесс образования одной пары тяжелых заряженных бозонов или же фермионов.

2. ОБРАТНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ФОТОНОВ (ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАИ)

2.1. Кинематика процесса $\gamma_0 e \rightarrow \gamma e$. Основные кинематические соотношения для процесса комптоновского рассеяния лазерного света на релятивистских электронах были получены в [22]:

$$\gamma(k_0) + e^-(p) \rightarrow \gamma(k) + e^-(p'). \quad (3)$$

Они составляют принципиальную основу метода генерации γ -квантов высоких энергий с помощью ОКР. Основные характеристики конечных электронов и фотонов, такие как энергетическое и угловое распределение, их поляризации, а также другие, с ними связанные, определяются дифференциальным сечением процесса (3). В настоящее время в связи с созданием ФЛК необходим полный расчет поляризационных состояний как конечных фотонов, так и электронов. Это, в свою очередь, требует знания дифференциального сечения процесса (3) с учетом поляризаций как начальных, так и конечных частиц. Впервые такой расчет был проведен в работе [24] (1954 г.) в случае, когда начальный электрон покоится (см. также [25, 26]). Более чем сорок лет назад эта задача представляла чисто академический интерес, но в настоящее время (удивительно, но факт!) он перерос в чрезвычайно важный практический. Отметим, что другим основным процессам квантовой электродинамики (КЭД) в этом смысле повезло не так сильно.

Процесс комптоновского рассеяния фотона на электроне в произвольной системе отсчета и с учетом поляризаций частиц рассматривался в большом количестве работ. Мы будем использовать наиболее удобные, на наш взгляд, хорошо известные формулы для комптоновского рассеяния, которые были получены в работах [6, 7]. При этом везде будет использоваться система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ равны единице: $\hbar = c = 1$.

В области конверсии происходит рассеяние фотонов с энергией $\omega_0 \sim 1$ эВ на электроне с энергией ε при небольшом угле встречи α_0 (см. рис. 1). Мы будем пренебрегать зависимостью от этого угла α_0 и считать столкновение лобовым. Энергия комптоновского фотона ω зависит от его угла рассеяния ϑ по отношению к направлению движения начального электрона следующим образом:

$$\omega = \frac{\omega_m}{1 + (\vartheta/\vartheta_0)^2}, \quad \omega_m = \frac{x}{x+1}\varepsilon, \quad \vartheta_0 = \frac{m}{\varepsilon}\sqrt{x+1}, \quad x = \frac{4\omega_0\varepsilon}{m^2}, \quad (4)$$

где ω_m — максимальная энергия фотона, m — масса электрона. При этом углы рассеяния электронов и фотонов являются уникальными функциями от энергии фотона:

$$\vartheta_\gamma(y) = \vartheta_0 \sqrt{\frac{y_m}{y} - 1}, \quad \vartheta_e(y) = \vartheta_\gamma(y) \frac{y}{1-y}, \quad y_m = \frac{\omega_m}{\varepsilon} = \frac{x}{1+x}, \quad (5)$$

где $y = \omega/\varepsilon$ — безразмерная энергетическая переменная, а y_m — ее максимальное значение. Например, для $\varepsilon = 250$ ГэВ и $\omega_0 = 117$ эВ (неодимовый лазер) имеем: $x = 45$ и $y_m \approx 0,818$. При этом около половины всех фотонов летит в интервал углов $\vartheta < \vartheta_0 \simeq 10^{-5}$ рад *, а их энергия $\omega > \omega_m/2$. С ростом x (то есть с ростом ω_0 либо ε) максимальная энергия комптоновского фотона ω_m также увеличивается. При этом в области конверсии становятся возможными другие процессы [6, 13]. Наиболее важным из них является процесс образования e^+e^- -пар при столкновении комптоновских фотонов с фотонами той же лазерной волны. Порог этой реакции: $\omega_m\omega_0 > m^2$, т.е. $x = 2(1 + \sqrt{2}) \approx 4,828$. Выше этого порога ($x \sim 8 \div 20$) сечение рождения пар в 1,5–2 раза превышает сечение комптоновского рассеяния [13, 14]. Вследствие этого максимум коэффициента конверсии при больших x ограничен значением 25–35%. По этой причине более предпочтительно работать при $x = 4,8$ ($y_m \approx 0,828$), хотя этот выбор не абсолютен. Отметим, что область более высоких x также представляет интерес для экспериментов, в которых требуется предельная монохроматизация $\gamma\gamma$ -столкновений. Ниже, для понимания тенденций, мы также будем рассматривать более широкую область x .

В области конверсии e^+e^- -пары могут образоваться также при столкновении электрона с лазерным фотоном в бете-гайтлеровском процессе $e + \gamma_0 \rightarrow e + e^+e^-$. Однако при $x < 20$ его сечение по крайней мере на два порядка меньше сечения комптоновского рассеяния [6].

2.2. Энергетические спектры фотонов. Энергетический спектр рассеянных фотонов $f(x, y)$ определяется дифференциальным сечением процесса [6, 7]:

$$f(x, y) \equiv \frac{1}{\sigma_c} \frac{d\sigma_c}{dy} = \frac{2\sigma_0}{x\sigma_c} \left[\frac{1}{1-y} + 1 - y - 4r(1-r) + \lambda_e \lambda r x (1-2r)(2-y) \right], \quad (6)$$

$$y \leq y_m = \frac{x}{x+1}; \quad r = \frac{y}{x(1-y)} \leq 1; \quad \sigma_0 = \pi \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 = 2,5 \cdot 10^{-25} \text{см}^2,$$

* Дифференциальное сечение процесса в случае неполяризованных частиц вблизи $\vartheta = 0$ (в направлении импульса начального электрона) имеет очень острый пик [6]:

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega_\gamma} = \frac{d\sigma_c(0)}{d\Omega_\gamma} \left(1 - \mathcal{D} \frac{\vartheta^2}{\vartheta_0^2} \right), \quad \mathcal{D} \approx x + 6,$$

то есть угловой размер области высокой плотности фотонов определяется углом [6] $\vartheta \sim \vartheta_0 / \sqrt{x+6}$.

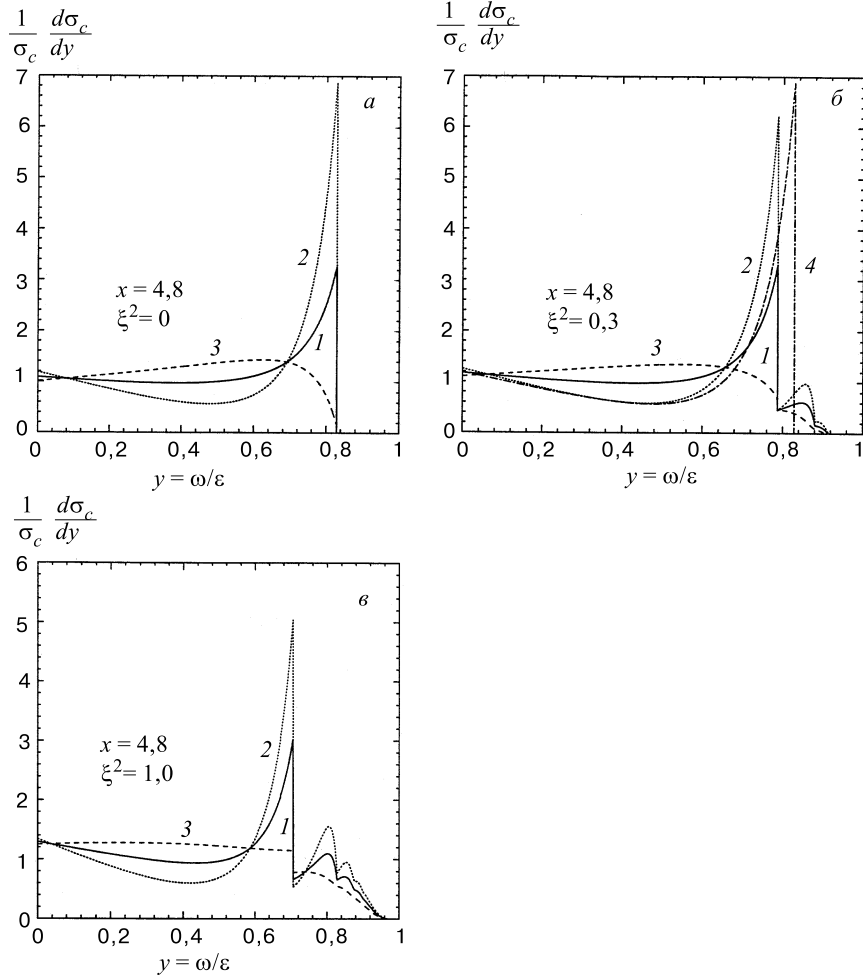


Рис. 3. Спектры ОКР, построенные для $x = 4,8$ и значений параметра интенсивности ξ^2 циркулярно поляризованной электромагнитной волны (17), равных: а) $\xi^2 = 0$; б) $\xi^2 = 0,3$; в) $\xi^2 = 1,0$, как функция от $y = \omega/\varepsilon$. Линии 1, 2, 3 соответствуют следующему выбору спиральностей начального электрона (λ_e) и фотона лазерной волны (λ): 1) $\lambda_e = 0, \lambda = 1$; 2) $\lambda_e = 1, \lambda = -1$; 3) $\lambda_e = 1, \lambda = 1$. Линия 4 на рис. 3,б отвечает обычному комптоновскому рассеянию в случае, когда спины сталкивающихся частиц параллельны

где λ_e и λ — удвоенная спиральность начального электрона и спиральность лазерного фотона ($\lambda_e = \pm 1, \lambda = \pm 1$). Полное сечение комптоновского процесса:

$$\sigma_c = \sigma_c^{np} + \lambda_e \lambda \sigma_1,$$

$$\sigma_c^{np} = \frac{2\sigma_0}{x} \left[\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(x+1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(x+1)^2} \right],$$

$$\sigma_1 = \frac{2\sigma_0}{x} \left[\left(1 + \frac{2}{x} \right) \ln(x+1) - \frac{5}{2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} \right],$$

где σ_c^{np} — сечение для неполяризованных пучков. В области $x = 1 \div 10$ отношение $|\sigma_1/\sigma_c| < 0,2$, а при $x \approx 2,5$ величина $\sigma_1 = 0$, т.е. полное сечение σ_c слабо зависит от поляризации ($\lambda\lambda_e$) и мало отличается от полного сечения для неполяризованных пучков.

В отличие от полного сечения, энергетический спектр весьма существенно зависит от значения $\lambda\lambda_e$. При $\lambda\lambda_e < 0$ число наиболее жестких фотонов ($y > x/(x+2)$) возрастает, а число мягких фотонов ($y < x/(x+2)$) уменьшается. Иными словами, с ростом величины $(-\lambda\lambda_e)$, так же, как и с ростом x , происходит эффективная «перекачка» мягких фотонов в жесткие. Особенности поведения энергетических спектров в зависимости от переменной $y = \omega/\varepsilon$ для $x = 4, 8$ в случае, когда

$$1) \rightarrow \lambda\lambda_e = 0, \quad 2) \rightarrow \lambda\lambda_e = -1, \quad 3) \rightarrow \lambda\lambda_e = 1, \quad (7)$$

представлены на рис. 3,а. Им отвечают линии 1, 2 и 3 соответственно. Когда $\lambda\lambda_e = -1$ (спины у сталкивающихся электронов и фотонов лазерной волны параллельны), число жестких фотонов почти удваивается по сравнению с неполяризованным случаем (ср. кривые 2 и 1 на рис. 3,а). Это приводит к существенному улучшению монохроматичности спектров и $\gamma\gamma$ -соударений. Наоборот, при антипараллельных спинах у электронов и лазерных фотонов ($\lambda\lambda_e = +1$) число жестких фотонов уменьшается (кривая 3 на рис. 3,а). Соответственно монохроматичность соударений ухудшается.

Отметим, что точке пересечения линий 1, 2, 3 на рис. 3,а соответствует значение $y = x/(x+2) = 0,706$ для $x = 4,8$. Кроме того, в рассматриваемом (линейном) приближении, когда интенсивностью лазерной волны можно пренебречь, спектры ОКР, как это видно из рис. 3,а, имеют резкую, четкую границу (при $y_m = 0,828$), что имеет очень важное значение для поиска ХБ в $\gamma\gamma$ -столкновениях [21].

2.3. Поляризация конечных фотонов. С помощью поляризованных начальных электронных и лазерных пучков могут быть получены высокоэнергетические фотоны различной поляризации. Общие формулы, используемые ниже для поляризаций рассеянных фотонов, просуммированные по поляризациям конечных электронов, даны в [7]. При этом степень циркулярной поляризации комптоновского фотона определяется выражением

$$\lambda_\gamma^f(y) = \frac{\lambda_e x r [1 + (1-y)(1-2r)^2] + \lambda(1-2r)((1-y)^{-1} + 1-y)}{(1-y)^{-1} + 1-y-4r(1-r) + \lambda\lambda_e r x(1-2r)(2-y)}. \quad (8)$$

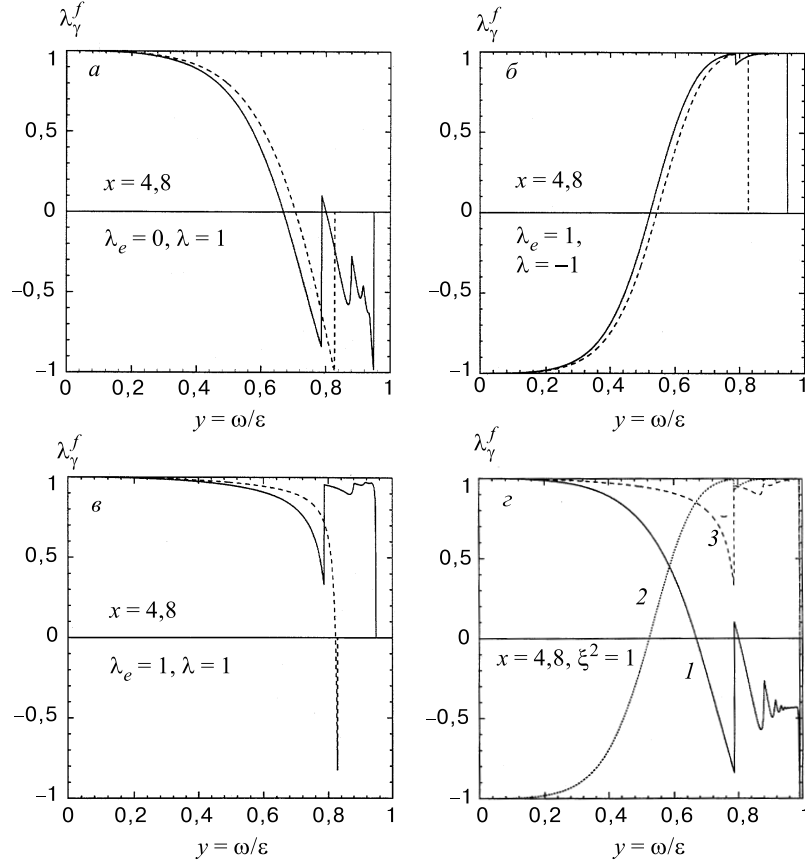


Рис. 4. Энергетические зависимости степени циркулярной поляризации ОКР-фотонов, вычисленные для $x = 4, 8$ при $\xi^2 = 0, 0, 3$ (а–в) и $\xi^2 = 1$ (г) для следующих поляризационных состояний сталкивающихся частиц: а) $\lambda_e = 0, \lambda = 1$; б) $\lambda_e = 1, \lambda = -1$; в) $\lambda_e = 1, \lambda = 1$. Штриховые линии на рис.а–в отвечают обычному комптоновскому рассеянию

Зависимость от энергии степени циркулярной поляризации λ_γ^f для $x = 4, 8$ показана на рис.4,а–г штриховыми линиями (соответствующими рассматриваемому случаю обычного комптоновского рассеяния). Отметим, что на границе спектра (при точном рассеянии назад), когда $y = y_m$, $\lambda_\gamma^f = -\lambda$. Это соотношение является естественным следствием требования сохранения спинальности в случае лобового столкновения частиц.

Если $\lambda\lambda_e = -1$ (случай с наилучшей монохроматичностью), то фотоны в области $y \sim y_m$ имеют высокую, почти 100% степень поляризации. Рассеянные фотоны имеют также высокую степень циркулярной поляризации в

широкой области энергий вблизи y_m даже в том случае, когда $\lambda_e = 0$. Отметим, что при низких y спиральность конечных фотонов λ_γ^f зависит от λ_e очень слабо.

Высокая степень циркулярной поляризации фотонов должна сыграть решающую роль в подавлении фоновых процессов при образовании хиггсовских частиц, поскольку сечение процесса образования ХБ в $\gamma\gamma$ -столкновениях, который распадается преимущественно на $b\bar{b}$ -пары, $\sigma(\gamma\gamma \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}) \propto 1 + \lambda_{\gamma 1}\lambda_{\gamma 2}$, в то время как сечение главного фонового процесса $\sigma(\gamma\gamma \rightarrow b\bar{b}) \propto 1 - \lambda_{\gamma 1}\lambda_{\gamma 2}$ [18].

Степень линейной поляризации комптоновских фотонов определяется выражением

$$p_{l_\gamma} = \frac{2r^2 p_l}{(1-y)^{-1} + 1 - y - 4r(1-r) + \lambda\lambda_e r x(1-2r)(2-y)}, \quad (9)$$

где p_l — степень линейной поляризации лазерных фотонов. (В случае полной поляризации p_l и спиральность λ связаны соотношением $p_l^2 + \lambda^2 = 1$.)

Интересно отметить [14], что можно получить большие значения p_{l_γ} , вплоть до $p_{l_\gamma} = 1$, в случае, когда $\lambda\lambda_e \approx +1$, что соответствует линии 3 на рис.3,а, когда число фотонов с энергией вблизи ω_m мало.

Линейная поляризация фотонных пучков может быть очень полезной при определении CP -четности хиггсовских частиц, поскольку сечение его образования двумя фотонами $\sigma(\gamma\gamma \rightarrow H) \propto 1 \pm p_{l_{\gamma 1}} p_{l_{\gamma 2}}$ для $CP = \pm 1$ соответственно.

Рассмотренные выше формулы для дифференциальных сечений, энергетических спектров, степени циркулярной поляризации ОКР-фотона справедливы только для однократного комптоновского рассеяния. Между тем при рассеянии лазерной волны с большой плотностью фотонов возрастает вероятность многократного комптоновского рассеяния, которая приводит к подъему энергетических спектров рассеянных фотонов в области низких и средних энергий [14]. Для полного моделирования многократного комптоновского рассеяния необходимо знать поляризацию электрона в конечном состоянии, что, однако, не было сделано в [14], поскольку не были известны формулы, описывающие изменение поляризации электрона в процессе ОКР. Эта проблема в случае, когда нелинейными эффектами в области конверсии можно пренебречь, была недавно рассмотрена в [27]. Мы также ее рассмотрим ниже, но не в линейном приближении, а с учетом влияния нелинейных эффектов в ОКР, где это описание представляется нам наиболее удобным и полным.

2.4. Светимость, монохроматизация $\gamma\gamma$ -столкновений. Светимость L является одной из основных характеристик ускорителя со встречными пучками.

В случае гауссовских e^+e^- -пучков она определяется следующим выражением:

$$L_{ee} = \frac{\nu N_{e^+} N_{e^-}}{4\pi\sigma_x\sigma_y}, \quad (10)$$

где N_{e^-} (N_{e^+}) — число электронов (позитронов) в пучке, ν — частота столкновений, а $4\pi\sigma_x\sigma_y$ есть площадь перекрытия пучков с поперечными размерами σ_x и σ_y . В литературе величину L_{ee} часто называют «геометрической светимостью» [2, 14]. Если известна светимость ускорителя L , то число событий в единицу времени $\dot{N}$ для процесса с известным сечением σ определяется следующим соотношением: $\dot{N} = L \sigma$.

Физические процессы и требования к светимости. С точки зрения требований к светимости и ее спектральному распределению в γe^- и $\gamma\gamma$ -соударениях можно выделить две группы процессов [6, 7].

а) Процессы, в которых конечные частицы вылетают на большие углы, так что по продуктам реакции можно восстановить инвариантную массу системы. Такие процессы обусловлены взаимодействиями на малых расстояниях. Их сечения невелики: $\sim (\alpha/E)^2$, $(\alpha/M_W)^2 \sim 10^{-36} \div 10^{-34}$ см² и имеют плавную зависимость от энергии (исключая пороговую область). Для их изучения требуется максимально доступная светимость, а монохроматизация необязательна.

б) Процессы, в которых полезно иметь хорошую монохроматичность соударений. Таковы, например, процессы, связанные с взаимодействиями на больших расстояниях, сечения которых большие, но быстро падают с ростом поперечных импульсов частиц. Полная регистрация продуктов реакции, летящих под малыми углами, является очень сложной задачей. Поэтому здесь необходимо иметь монохроматичные пучки, но вовсе не нужна высокая светимость. Другим примером являются процессы рождения новых частиц с ярко выраженным пороговым или резонансным поведением. Так, например, в реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ возрастание сечения до половины асимптотического значения происходит на интервале энергии около 10% от порога.

Как показано в [6, 7], требования (а) и (б), перечисленные выше, предъявляемые к спектральной светимости $\gamma\gamma$ -коллайдеров, могут быть реализованы в случаях, когда точки конверсии S и взаимодействия O (см. рис. 1) совпадают (а) и разнесены в пространстве (б) соответственно. При этом для более комплексного улучшения монохроматичности γ -пучков, естественно, должны быть использованы поляризованные пучки сталкивающихся лазерных фотонов и электронов.

В первом случае, когда жесткие γ -кванты сталкиваются друг с другом сразу же после комптоновской конверсии, спектральное распределение светимости $\gamma\gamma$ -столкновений $L_{\gamma\gamma}$ по инвариантной массе сталкивающихся фотонов $W_{\gamma\gamma} = \sqrt{4\omega_1\omega_2}$ вычисляется через энергетические спектры фотонов

$f(x, y)$ (6) следующим образом:

$$\frac{1}{L_{\gamma\gamma}} \frac{dL_{\gamma\gamma}}{dz} = 2z \int_{z^2/z_m}^{z_m} f(x, y) f(x, \frac{z^2}{y}) \frac{dy}{y}, \quad (11)$$

$$z \equiv W_{\gamma\gamma}/2\varepsilon, \quad 0 \leq z \leq z_m = y_m = x/(1+x),$$

либо

$$\frac{1}{L_{\gamma\gamma}} \frac{dL_{\gamma\gamma}}{dz} = 2z \int_{-\eta_m}^{+\eta_m} f(x, ze^{+\eta}) f(x, ze^{-\eta}) d\eta, \quad (12)$$

$$\eta \equiv \ln \sqrt{y_1/y_2}, \quad -\eta_m \leq \eta \leq +\eta_m, \quad \eta_m = \ln(y_m/z),$$

где $y_i = \omega_i/\varepsilon$ — доли энергий, уносимые фотонами, движущимися в противоположных направлениях 1 и 2; η — быстрота $\gamma\gamma$ -системы. Здесь z изменяется от 0 до $z_m = W_m/2\varepsilon = y_m$, где W_m — максимальное значение инвариантной массы $W_{\gamma\gamma}$, $W_m = 2\omega_m$, а η ограничена в области $|\eta| \leq \ln(y_m/z)$. Отметим, что формулы (12) и (11) эквивалентны между собой.

В случае, когда точки конверсии и взаимодействия C и O разнесены между собой в пространстве (т.е. расстояние $b \neq 0$, см. рис. 1), распределение светимости по инвариантной массе $\gamma\gamma$ -системы $W_{\gamma\gamma}$, справедливое для аксиально-симметричных, гауссовских пучков, принимает более сложный вид [6, 7, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{dL_{\gamma\gamma}}{dz} = & 2zk^2 L_{ee} \int_{z^2/y_m}^{y_m} f(x, y) f(x, z^2/y) I_0(v) \times \\ & \times \exp \left(- \left(\frac{y_m}{y} + \frac{y_m y}{z^2} - 2 \right) \frac{(x+1)\rho^2}{2} \right) \frac{dy}{y}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$v = \rho^2(x+1) \sqrt{\left(\frac{y_m}{y} - 1 \right) \left(\frac{y_m y}{z^2} - 1 \right)}, \quad z = \frac{W_{\gamma\gamma}}{2\varepsilon}, \quad \rho = \frac{b}{\gamma a_e}, \quad L_{ee} = \frac{\nu N_e^2}{2\pi a_e^2},$$

где $I_0(v)$ — модифицированная функция Бесселя от аргумента v , $\gamma = \varepsilon/m$ — лоренц-фактор, a_e — радиус электронного пучка в точке взаимодействий O , L_{ee} — геометрическая светимость базисных ee -столкновений, k — коэффициент конверсии. Таким образом, спектральная светимость $\gamma\gamma$ -столкновений зависит только от параметров $\rho, x, \lambda\lambda_e$ и не зависит от других параметров установки. Очевидно, что при $\rho \ll 1$ формула (13) переходит в (11), если учесть, что полная светимость $\gamma\gamma$ -столкновений связана с геометрической светимостью ee -столкновений следующим образом:

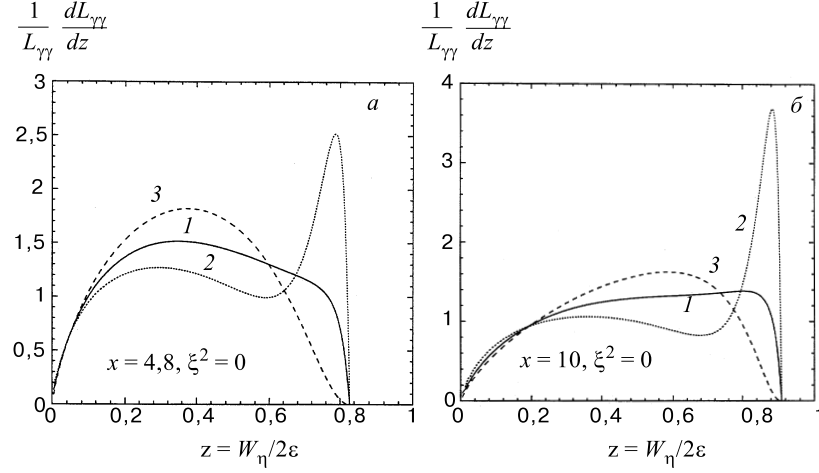


Рис. 5. Зависимость спектральной светимости $\gamma\gamma$ -столкновений от их инвариантной массы $W_{\gamma\gamma}$, $z = W_{\gamma\gamma}/2\epsilon$, построенная для $x = 4,8$ (а) и $x = 10$ (б). Кривые 1, 2, 3 соответствуют выбору поляризационных состояний частиц: 1) $\lambda_e = 0, \lambda = 1$; 2) $\lambda_e = 1, \lambda = -1$; 3) $\lambda_e = 1, \lambda = 1$

$$L_{\gamma\gamma} = k^2 L_{ee} . \quad (14)$$

Спектральные светимости $\gamma\gamma$ -соударений, рассчитанные по формуле (11), когда $x = 4,8$ и $x = 10$, представлены на рис. 5, а и б соответственно. При этом линиям 1, 2, 3 на каждом из этих рисунков отвечает одинаковый выбор поляризационных состояний (7) для обоих сталкивающихся пучков. Как и в случае энергетических спектров, линиям 1, 3 на рис. 5, а, б отвечают самые немонохроматичные распределения. Точечные линии на этих рисунках (с $\lambda\lambda_e = -1, \tilde{\lambda}\tilde{\lambda}_e = -1$) имеют характерный пик вблизи z_m . В случае $x = 4,8$ ($y_m = 0,828$) и $x = 10$ ($y_m = 0,909$) координаты пиков на рис. 5, а и б равны, соответственно, (0,786, 2,519) и (0,882, 3,689). Очевидно, что их высота, а вместе с ней и монохроматичность жестких $\gamma\gamma$ -столкновений, растет с x , а ширина пиков, соответственно, уменьшается. Отношение светимостей при $x = 10$ и $x = 4,8$ в силу (14) определяется отношением квадратов коэффициентов конверсии, максимальные значения которых ниже и выше порога рождения e^+e^- -пар равны, соответственно, $k = 0,63$ и $k = 0,35$ [13, 14], поэтому $L_{\gamma\gamma}(x = 10)/L_{\gamma\gamma}(x = 4,8) = (0,35/0,63)^2 = 0,3$. Однако, как показано в [14], монохроматичность спектра при $x = 10$ в 1,7 раза выше, чем при $x = 4,8$.

На рис. 6 показана спектральная светимость для неполяризованных ($\lambda\lambda_e = 0$) и поляризованных пучков (с $\lambda\lambda_e = -1$) при $x = 4,8$ для обоих

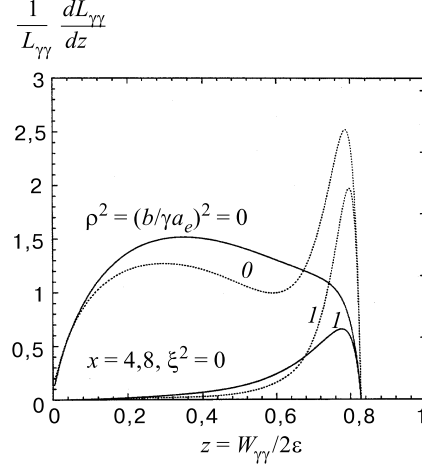


Рис. 6. Спектральная светимость $\gamma\gamma$ -столкновений как функция инвариантной массы $W_{\gamma\gamma}$, $z = W_{\gamma\gamma}/2\varepsilon$, для случая, когда параметр $\rho^2 = (b/\gamma a_e)^2$ равен 0 и 1 (точки конверсии C и взаимодействия O совпадают и разнесены в пространстве). Сплошные и точечные кривые соответствуют кривым 1 и 2 на рис. 3,а

пучков, когда параметр $\rho = 0$ и 1. Как видно из этого рисунка, при $\rho = 1$ спектральное распределение сильно подавлено в области малых и средних инвариантных масс, а полная ширина половины максимума составляет примерно 10% для поляризованного и 20% для неполяризованного пучка.

2.5. Нелинейные эффекты в ОКР. При достаточной мощности лазерной вспышки в области конверсии становятся существенными процессы, идущие за счет одновременного поглощения из волны нескольких лазерных фотонов [28]:

$$e^-(p) + n\gamma(k_0) \rightarrow e^-(p') + \gamma(k), \quad n \geq 1, \quad (15)$$

$$\gamma(k) + s\gamma(k_0) \rightarrow e^+(p_+) + e^-(p_-), \quad s \geq 1. \quad (16)$$

Процессы (15) и (16) представляют собой нелинейные по интенсивности поля процессы взаимодействия электронов и фотонов с полем электромагнитной волны (ЭМВ). Первый из этих нелинейных процессов приводит к расширению спектров высокоэнергетических фотонов, появлению дополнительных пиков в спектрах рассеянного излучения за счет поглощения из волны нескольких лазерных фотонов, а второй эффективно снижает порог рождения e^+e^- -пар [28]. Взаимодействие электронов и позитронов с полем ЭМВ при-

водит к эффективному увеличению их массы:

$$m^2 \rightarrow m_*^2 = m^2 (1 + \xi^2) ,$$

которое характеризуется параметром интенсивности лазерной волны ξ^2 :

$$\xi^2 = n_\gamma \left(\frac{4\pi\alpha}{m^2\omega_0} \right) = -\frac{e^2 a^2}{m^2} , \quad (17)$$

где n_γ — плотность фотонов в волне, ω_0 — их энергия, a — амплитуда классического 4-потенциала электромагнитной волны, e и m — заряд и масса электрона, α — постоянная тонкой структуры. Систематическое исследование нелинейных брейт-уилеровского и комптоновского процессов было проведено в работах [29, 30].

В настоящее время область нелинейных эффектов, определяемая условием $\xi^2 \geq 1$, является весьма актуальной и представляет большой интерес, поскольку в ней становятся существенными процессы излучения, идущие за счет одновременного поглощения из волны большого количества фотонов, а их вероятности являются существенно нелинейными функциями напряженности поля. В этой связи необходимо отметить, что недавно на ускорителе SLAC [31] закончилась серия экспериментов E-144 по проверке предсказаний нелинейной КЭД в области параметра $\xi \sim 1$, что стало возможным за счет использования сверхкоротких и жестко сфокусированных лазерных импульсов. Отметим, что при этом был впервые поставлен эксперимент, в котором процесс рождения e^+e^- -пар был осуществлен при участии только реальных (жесткого комптоновского и лазерных), а не виртуальных фотонов.

Поляризационные явления в процессе нелинейного комптоновского рассеяния были подробно изучены в работах [32, 33]. При этом в [32] рассматривались нелинейные эффекты в области значений параметра интенсивности волны не только $\xi^2 < 1$, но и $\xi^2 \geq 1$. Отметим, что численный расчет спектров излучения при больших интенсивностях ($\xi^2 \geq 1$) был впервые проведен в работе [28], при этом поляризации частиц не учитывались.

Основные формулы. Дифференциальное сечение процесса излучения фотона электроном в поле циркулярно поляризованной ЭМВ в случае, когда все частицы, участвующие в реакции, являются спирально поляризованными, имеет следующий вид [32–34]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_c}{du} = & \frac{\pi\alpha^2}{2xm^2\xi^2(u+1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} ((1 + \lambda_e\lambda'_e)F_{1n} + \lambda(\lambda_e + \lambda'_e)F_{2n} + \\ & + \lambda'(\lambda F_{3n} + \lambda_e F_{4n}) + \lambda_e\lambda'_e F_{5n}) , \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
F_{1n} &= -4 J_n^2 + \xi^2 \left(2 + \frac{u^2}{u+1} \right) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2), \\
F_{2n} &= \xi^2 \frac{(2+u)u}{u+1} \left(1 - 2 \frac{u}{u_n} \right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\
F_{3n} &= \xi^2 \left(2 + \frac{u^2}{u+1} \right) \left(1 - 2 \frac{u}{u_n} \right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\
F_{4n} &= \frac{u}{u+1} (-4 J_n^2 + \xi^2 (2+u) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2)), \\
F_{5n} &= -4 J_n^2 \frac{u^2}{1+u},
\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
u &= \frac{k_0 k}{k_0 p'}, \quad u_n = \frac{2n k_0 p}{m_*^2} = \frac{n x}{1 + \xi^2}, \quad x = \frac{2k_0 p}{m^2}, \\
z_n &= \frac{2n\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_n} \left(1 - \frac{u}{u_n} \right)},
\end{aligned} \tag{20}$$

J_n — функции Бесселя n -го порядка от аргумента z_n . При этом переменная u изменяется в пределах $0 \leq u \leq u_n$. Выражение, стоящее под знаком суммы в (18), определяет вероятность излучения n -й гармоники в поле циркулярно поляризованной ЭМВ в случае, когда поляризационные состояния начального и конечного электронов, а также испущенного фотона, являются спиральными, при этом $\lambda_e = \pm 1, \lambda'_e = \pm 1, \lambda = \pm 1, \lambda' = \pm 1$. Отметим, что термином n -й гармоники принято называть подпроцесс излучения фотона электроном, при котором из волны поглощается n лазерных фотонов.

Если поляризация конечного электрона не регистрируется, то, действуя по известным правилам, с помощью (18) получим выражение для степени циркулярной поляризации фотона в конечном состоянии λ_γ^f :

$$\lambda_\gamma^f = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda F_{3n} + \lambda_e F_{4n}) / \sum_{n=1}^{\infty} (F_{1n} + \lambda \lambda_e F_{2n}). \tag{21}$$

Аналогичным образом с помощью (18) нетрудно получить выражение для степени продольной поляризации электрона в конечном состоянии λ_e^f в случае, когда поляризация конечного фотона не регистрируется:

$$\lambda_e^f = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_e F_{1n} + \lambda_e F_{5n} + \lambda F_{2n}) / \sum_{n=1}^{\infty} (F_{1n} + \lambda \lambda_e F_{2n}). \tag{22}$$

В случае лобового столкновения ультрарелятивистских электронов с фотонами лазерной волны энергетическая зависимость дифференциального сечения $d\sigma_c/dy$ от переменной $y = \omega/\varepsilon$, ε — энергия электронов, получается из

выражения (18) с помощью замены: $u \rightarrow y/(1-y)$ [30]. При этом изменению переменной u в пределах $0 \leq u \leq u_n$ соответствуют пределы изменения переменной y : $0 \leq y \leq y_n$, где

$$y_n = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{nx}{nx+1+\xi^2}, \quad x = \frac{2k_0 p}{m^2} = \frac{4\omega_0 \varepsilon}{m^2}. \quad (23)$$

Влияние нелинейных эффектов приводит к тому, что максимально возможная энергия фотонов первой гармоники ($n = 1, \xi^2 \neq 0$) уменьшается по сравнению с максимальной энергией фотонов, образующихся в обычном комптоновском рассеянии ($n = 1, \xi^2 = 0$), поскольку для первой гармоники имеем $y_{1\max} \equiv y_1 = x/(1+x+\xi^2) < x/(1+x)$. Энергия же γ -квантов, испущенных при поглощении нескольких фотонов ($n > 1 + \xi^2$), превышает энергию, достижимую в обычном комптоновском рассеянии.

Производя замену: $u \rightarrow y/(1-y)$ в выражениях (18), (19), для дифференциального сечения процесса ОКР в поле циркулярно поляризованной лазерной волны получим распределение по энергии жестких γ -квантов $y = \omega/\varepsilon$ [32–34]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_c}{dy} = \frac{\pi\alpha^2}{2xm^2\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} & ((1+\lambda_e\lambda'_e)F_{1n} + \lambda(\lambda_e + \lambda'_e)F_{2n} + \\ & + \lambda'(\lambda F_{3n} + \lambda_e F_{4n}) + \lambda_e\lambda'_e F_{5n}), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} F_{1n} &= -4J_n^2 + \xi^2 \left(1 - y + \frac{1}{1-y}\right) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2), \\ F_{2n} &= \xi^2 \left(-1 + y + \frac{1}{1-y}\right) \left(1 - 2\frac{y}{y_n} \frac{(1-y_n)}{(1-y)}\right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\ F_{3n} &= \xi^2 \left(1 - y + \frac{1}{1-y}\right) \left(1 - 2\frac{y}{y_n} \frac{(1-y_n)}{(1-y)}\right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\ F_{4n} &= -4yJ_n^2 + \xi^2 \left(-1 + y + \frac{1}{1-y}\right) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2), \\ F_{5n} &= 4J_n^2 \left(1 + y - \frac{1}{1-y}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$z_n = \frac{2n\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \frac{y}{y_n} \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) \frac{(1-y_n)}{(1-y)^2}. \quad (26)$$

Отметим одну чрезвычайно важную особенность, которой обладают функции F_{in} (25), определяющие дифференциальное сечение процесса ОКР (24). При точном рассеянии назад, когда $y = y_n$, $z_n = 0$, все функции F_{in} при $n > 1$ обращаются в нуль. Это означает, что только фотоны первой гармоники могут излучаться в направлении движения начального пучка электронов. Фотонам более высоких гармоник такое поведение запрещено требованием сохранения спиральности системы частиц $e + n\gamma_0$ до взаимодействия и $e + \gamma$ после взаимодействия [32]. Вследствие этого угловое распределение фотонов высоких гармоник становится более широким и в конечном счете приводит к уменьшению светимости $\gamma\gamma$ -столкновений. Но об этом речь пойдет ниже.

При $\xi^2 \ll 1$ главный вклад в вероятность процесса (15) дают несколько первых гармоник. В работе [32] было проведено разложение дифференциального сечения (24) для первых трех гармоник по параметру малости $\Delta = \xi^2/(1 + \xi^2)$, при этом выполнялось разложение только для функций Бесселя, а для величин y_n (23) использовались точные формулы. Ниже мы будем использовать эти разложения для численных расчетов энергетических спектров ($1/\sigma_c$) $d\sigma_c/dy$ (где σ_c — полное сечение процесса: $\sigma_c = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sigma_c^n$), светимости $\gamma\gamma$ -столкновений, степени циркулярной λ_γ^f (21) и продольной поляризации λ_e^f (22) фотонов и электронов в конечном состоянии.

В то же время при $\xi^2 \geq 1$ будем использовать точные выражения (24), (25). Отметим, что в этом случае максимальное число фотонов $n_{\max}$, поглощаемое из волны, определяется из условий сходимости ряда (24).

Обсуждение нелинейных эффектов в процессе ОКР. Перейдем к более детальному анализу влияния нелинейных эффектов на энергетические спектры фотонов в ОКР, спектральную светимость $\gamma\gamma$ -столкновений, а также на поляризацию рассеянных фотонов и электронов. Все эти вопросы связаны между собой, имеют довольно тонкий характер, их нельзя не учитывать при создании $\gamma\gamma$ -коллайдеров.

1) Результаты численных расчетов энергетических спектров фотонов при $x = 4, 8$ представлены графиками на рис.3,б и 3,в, построенными, соответственно, для значений параметра интенсивности ξ^2 , равных 0,3 и 1. При этом поляризационные состояния у электрона и лазерного фотона выбраны такими же, как и в случае обычного комптоновского рассеяния:

$$1) \rightarrow \lambda_e = 0, \lambda = 1; 2) \rightarrow \lambda_e = 1, \lambda = -1; 3) \rightarrow \lambda_e = 1, \lambda = 1. \quad (27)$$

На рис.3,б и 3,в им отвечают линии 1, 2 и 3 соответственно. Кривая 4 на рис.3,б соответствует $\xi^2 = 0$, $\lambda\lambda_e = -1$. Она приведена для более удобного сравнения спектров в линейном и нелинейном случаях.

Как видно из этих рисунков, учет нелинейных эффектов ($\xi^2 \neq 0$) приводит к существенным изменениям спектров по сравнению со спектрами в обычном комптоновском рассеянии ($\xi^2 = 0$). Во-первых, одновременное

поглощение из волны нескольких фотонов приводит к расширению спектров жестких γ -квантов, появлению дополнительных пиков, соответствующих излучению гармоник более высокого порядка. Это уширение при одном и том же параметре x тем больше, чем больше интенсивность волны. При этом граница спектра $y_{\max} \equiv y_m$ определяется по формуле (23) для y_n при $n = n_{\max}$. Так, при $\xi^2 = 0,3$ спектр ограничен сверху максимальным значением $y_{\max} \approx 0,917$ ($n_{\max} = 3$), а при $\xi^2 = 1$ $y_{\max} \approx 0,991$. Уширение спектров приводит к уменьшению высоты пика первой гармоники по сравнению с пиком в обычном рассеянии. Это наглядно видно из сравнения двух соответствующих линий 2 и 4 на рис. 3,б.

Во-вторых, эффективное утяжеление электрона $m^2 \rightarrow m_*^2 = m^2(1 + \xi^2)$ приводит к сжатию спектров, т.е. к сдвигу первой гармоники в сторону меньших значений y (см. (23)). Этот сдвиг пиков на рис. 3,б для линий 2 и 4 составляет примерно 5%. С увеличением параметра x относительное сжатие первой гармоники уменьшается [32].

При сравнительно небольшой интенсивности лазерной волны ($\xi^2 = 0,3$) основной вклад в излучение дают фотоны первой гармоники, выход фотонов для гармоник с $n > 1$ незначителен. При значениях $\xi \sim 1$ уширение спектров за счет нелинейных эффектов сопровождается увеличением вероятности, выход жестких фотонов становится более существенным. И, наконец, при больших интенсивностях ($\xi^2 \gg 1$) излучение за счет нелинейных процессов многофотонных поглощений становится сравнимым с однофотонным и даже преобладающим, т.е. процесс ОКР становится существенно нелинейным [30,32].

Все сказанное выше о поведении энергетических спектров относилось сразу ко всем трем линиям 1, 2 и 3. Что касается их взаимного расположения, то, как видно из рис. 3,б и в, наиболее интенсивные спектры соответствуют случаю, когда спины у электрона и лазерного фотона параллельны ($\lambda\lambda_e = -1$), а наименее интенсивные отвечают антипараллельным спинам ($\lambda\lambda_e = 1$), как и в случае обычного комптоновского рассеяния.

Отметим также, что разница между спектрами, построенными для трех рассмотренных случаев поляризации электрона и лазерного фотона, столь существенная при малых значениях параметра интенсивности ($\xi^2 = 0,3$), становится незначительной при $\xi^2 \gg 1$ (т.е. с ростом интенсивности лазерной волны влияние поляризаций заметно уменьшается [32]).

2) Энергетическая зависимость степени круговой поляризации жесткого ОКР-фотона показана графиками на рис. 4,а–г, построенными для $x = 4, 8$. На рис. 4,а–в параметр интенсивности $\xi^2 = 0,3$, а на рис. 4,г $\xi^2 = 1$. Далее, выбор поляризаций на рис. 4,а–в соответствует случаям 1, 2, 3 в (27), при этом штриховые линии отвечают обычному рассеянию. На рис. 4,г кривые 1, 2, 3 также соответствуют поляризационным состояниям (27).

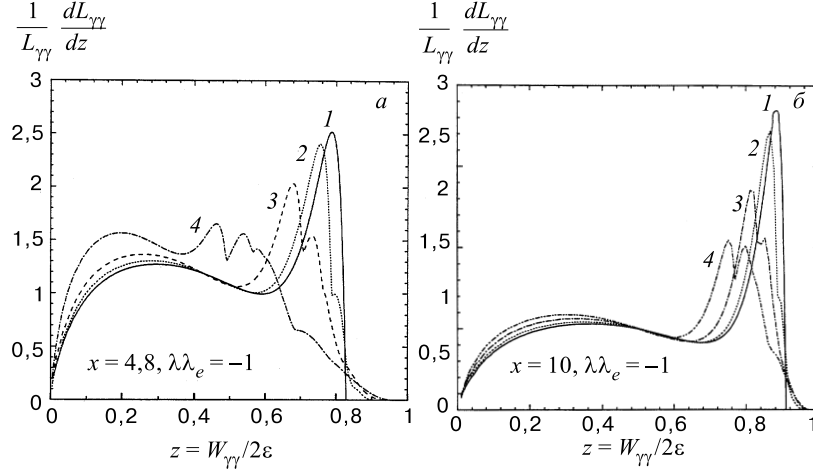


Рис. 7. Спектральная светимость $\gamma\gamma$ -столкновений как функция инвариантной массы $W_{\gamma\gamma}$, $z = W_{\gamma\gamma}/2\varepsilon$, построенная для $x = 4, 8$ (а) и $x = 10$ (б). Линии 1–4 соответствуют следующим значениям параметра интенсивности: 1) $\xi^2 = 0$, 2) $\xi^2 = 0, 3$, 3) $\xi^2 = 1$, 4) $\xi^2 = 2$. Поляризационные состояния каждого из сталкивающихся γ -пучков получены при столкновении электронов и фотонов с параллельными спинами: $\lambda\lambda_e = -1$, $\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}_e = -1$

Как видно из рис. 4, а–в, учет нелинейных эффектов ($\xi^2 \neq 0$) уменьшает степень круговой поляризации в первом пике. Вклад более высоких гармоник приводит к появлению дополнительных пиков, причем на границе спектра (при $y \rightarrow y_{\max}$), как и в случае обычного рассеяния, справедливо соотношение: $\lambda_\gamma^f = -\lambda$. Следует, однако, заметить, что выход таких фотонов незначителен, поскольку спектры практически обрываются при значениях $y < y_{\max}$ (при $\xi^2 = 1$ вероятность излучения фотонов с $y > 0,973$ практически равна нулю, хотя $y_{\max} \approx 0,991$). Наиболее благоприятной в этом отношении оказывается ситуация с $\lambda\lambda_e = -1$, когда велик интервал энергий жестких γ -квантов, в котором степень циркулярной поляризации $|\lambda_\gamma^f|$ практически не изменяется и наиболее близка к единице.

3) Численные расчеты спектральной светимости $\gamma\gamma$ -столкновений по формуле (11) в случае, когда точка конверсии C и точка встречи O совпадают, были проведены с использованием дифференциального сечения для процесса ОКР в поле циркулярно поляризованной ЭМВ (24). Результаты расчетов представлены графиками на рис. 7, а и б, построенными для параметра $x = 4, 8$ и $x = 10$ соответственно. При этом мы рассматривали поляризационные состояния сталкивающихся γ -пучков, которые приготавливаются наиболее оптимальным образом (т.е. $\lambda\lambda_e = -1$, $\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}_e = -1$). Линии 1–4 как на рис. 7, а, так и на рис. 7, б построены для следующих значений параметра интенсивно-

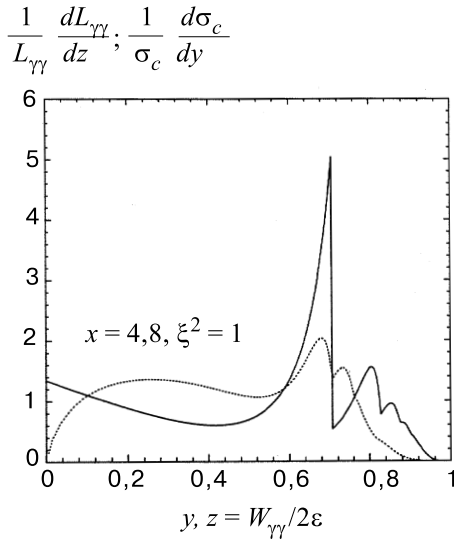


Рис. 8. Энергетический спектр (непрерывная линия) и спектральная светимость $\gamma\gamma$ -столкновений (точечная линия) взяты из рис. 3,в (кривая 2) и рис. 7,а (кривая 3) соответственно. Совпадение пика первой гармоники и провала в поведении спектральной светимости наглядно объясняет причину появления провалов в светимости

отрицательно сказывается на монохроматичности $\gamma\gamma$ -столкновений. С ростом интенсивности волны спектры светимости становятся все более широкими за счет подъема низкоэнергетической части и появления длинного хвоста в области больших инвариантных масс. Все эти отрицательные моменты сказываются значительно слабее с увеличением параметра x — это видно из сравнения рис. 7,а и б. Неожиданным является появление провалов на рис. 7,а и б, т.е. пиков, состоящих из двух горбов, особенно заметных при $\xi^2 = 1$ и $\xi^2 = 2$. Однако их происхождение весьма просто объясняется с помощью рис. 8. На нем одновременно построены энергетический спектр фотонов и спектральная светимость для случая, когда $x = 4,8$, $\xi^2 = 1$, $\lambda\lambda_e = -1$. Это оказалось возможным благодаря тому, что области изменения энергетических переменных $y = \omega/\varepsilon$ и $z = W_{\gamma\gamma}/2\varepsilon$ совпадают: $0 < y, z \leq y_{\max}$. Таким образом, совпадение провала на кривой спектральной светимости с пиком первой гармоники как раз и объясняет характер поведения светимости. Он обусловлен влиянием нелинейных эффектов.

сти лазерной волны: $1 \rightarrow \xi^2 = 0$; $2 \rightarrow \xi^2 = 0,3$; $3 \rightarrow \xi^2 = 1$; $4 \rightarrow \xi^2 = 2$. Графики на рис. 7,а и б свидетельствуют о том, что спектральным светимостям присущи те же закономерности, которыми обладали энергетические спектры фотонов: с ростом интенсивности высота пиков линий 2–4 соответственно убывает, перемещается в сторону все более низких инвариантных масс. Расширение спектров светимости по сравнению с линейным случаем, на первый взгляд, не имеет большого значения. Оно приводит к появлению небольшого по площади «треугольника» на рис. 7,а,б, расположенного внизу, правее границы спектра для $\xi^2 = 0$. Кроме того, существенно меняется наклон линий светимости по отношению к оси абсцисс. В результате этого исчезает резкая, четкая граница спектральной светимости, присущая обычному комптоновскому рассеянию, что отри-

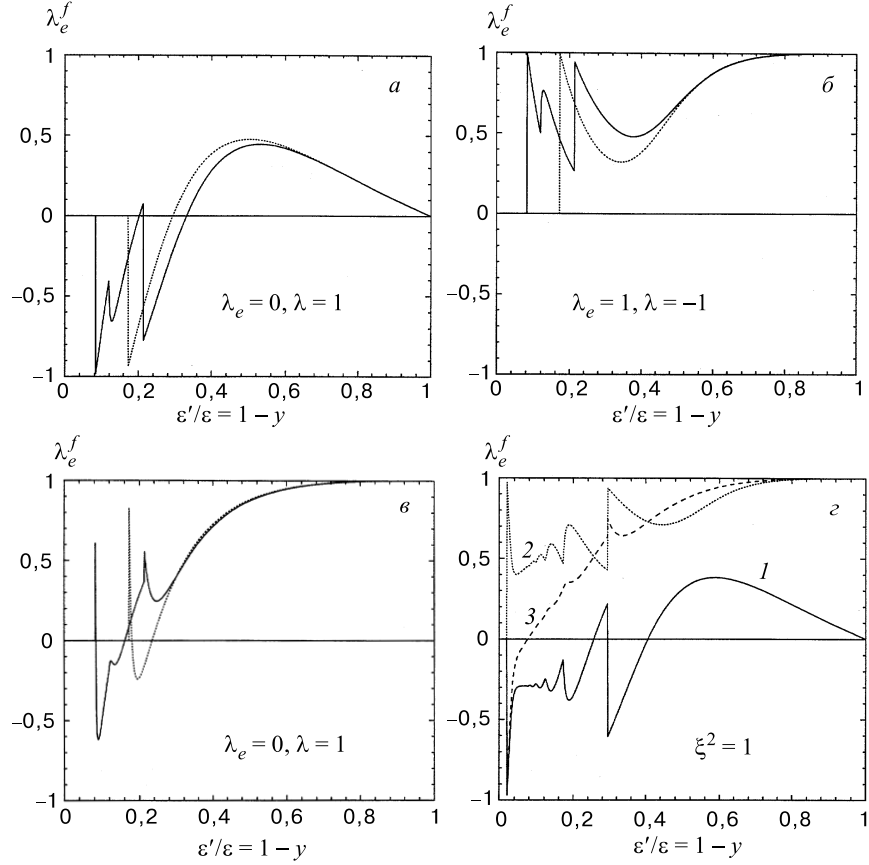


Рис. 9. Зависимость степени продольной поляризации рассеянного электрона в процессе ОКР как функция его энергии $\varepsilon'/\varepsilon = 1 - y$, построенная для $x = 4, 8$, когда параметр интенсивности $\xi^2 = 0, 0, 3$ (а-в) и $\xi^2 = 1$ (г). Рисункам а-в отвечает следующий выбор поляризационных состояний частиц: а) $\lambda_e = 0, \lambda = 1$; б) $\lambda_e = 1, \lambda = -1$; в) $\lambda_e = 1, \lambda = 1$. Сплошные линии на рис. а-в соответствуют $\xi^2 = 0, 3$, точечные — $\xi^2 = 0$ (обычному комптоновскому рассеянию). Кривым 1-3 на рис. г соответствуют поляризационные состояния частиц, такие же, как на рис. а-в

4) Результаты расчетов зависимости степени продольной поляризации рассеянного электрона (22) от его энергии $\varepsilon'/\varepsilon = 1 - y$ в случае, когда поляризация конечного фотона не регистрируется, представлены на рис. 9 для параметра $x = 4, 8$. Рисункам 9, а-в отвечает параметр интенсивности волны $\xi^2 = 0, 3$, рис. 9, г — $\xi^2 = 1$. Кроме того, рис. 9, а-в соответствует выбор поляризаций 1-3 в (27), точечные линии отвечают линейному слу-

чаю в ОКР. Обозначения кривых 1–3 на рис. 9,2 в точности повторяет выбор поляризационных состояний у сталкивающихся частиц в (27).

Прежде всего, следует отметить, что точечные кривые на рис. 9 в точности воспроизводят соответствующие линии из работы [27]. Следовательно, главный вывод этой работы, заключающийся в том, что неполяризованный электрон в результате рассеяния на полностью поляризованном лазерном фотоне может приобрести значительную степень продольной поляризации в области минимальных значений энергии ε' , полностью подтверждается. Что же нового привносят в эту картину нелинейные эффекты? Внимательному читателю ответ заранее очевиден: вместо одного пика на рис. 9,а–в появляются три, при этом высота первого пика, отвечающая излучению 1-й гармоники, уменьшается по абсолютной величине и сдвигается в область более высоких энергий рассеянного электрона. При больших интенсивностях волны (см. рис. 9,2) поведение линий 1–3 выглядит более сложным из-за многофотонности процесса излучения. При этом минимальные уносимые энергии стремятся к нулю, а в ближайшей окрестности этой области $|\lambda_e^f|$ близка к своему максимальному значению, равному единице.

Выводы. Процесс ОКР является основным источником получения фотонов высоких энергий при создании будущих γe - и $\gamma\gamma$ -коллайдеров. Как мы уже видели, нелинейные эффекты в нем способствуют увеличению энергии рассеянных фотонов. Однако с увеличением интенсивности лазерной волны происходит ухудшение монохроматичности $\gamma\gamma$ -столкновений из-за подъема спектральной светимости в области малых и средних инвариантных масс. В этой связи отметим, что в литературе существуют различные способы уменьшения нелинейных эффектов. Простейший способ уменьшения параметра ξ^2 при неизменном коэффициенте конверсии состоит в увеличении толщины лазерной мишени путем одновременного увеличения длительности лазерной вспышки и глубины фокуса (рэлеевской длины), однако при этом необходимо увеличивать энергию лазерной вспышки как $A \propto 1/\xi^2$ [13, 14]. Другой способ — это растягивание длины лазерной мишени при сохранении ее диаметра [17]. При этом ξ^2 будет уменьшаться при неизменной энергии лазерной вспышки. Это можно сделать за счет немонохроматичности лазерного излучения, а лазерная мишень фактически будет состоять из нескольких лазерных фокусов, расположенных рядом вдоль пути электронного пучка.

3. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА ФОТОННЫХ КОЛЛАЙДЕРОВ

Фотонные коллайдеры будут представлять собой комплексы, включающие, наряду с линейными e^+e^- -ускорителями, γe - и $\gamma\gamma$ -коллайдеры со следующими параметрами (ε и $\mathcal{L}_{ee}$ — энергия электронного пучка и светимость

базового ee -коллайдера *) [2,35]:

- Характерная энергия фотона $\omega \approx 0,8\varepsilon$.
- Годовая светимость $\mathcal{L}_{\gamma\gamma}(z/z_{\max} > 0,8) \sim 0,1 \mathcal{L}_{ee} \sim 10 \div 50 \text{ фб}^{-1}$ ($50 \div 500 \text{ фб}^{-1}$ в перспективе).
- Ширина пика светимости в области $z_{\max}$: $\Delta W_{\gamma\gamma}/W_{\gamma\gamma} \sim 0,15$.
- Средняя спиральность фотона $\langle \lambda_\gamma \rangle \approx 0,95$ с переменным знаком.
- Степень линейной поляризации фотона $\sim 35 \div 80 \%$ при $x = 4,5 \div 1$.

Таким образом, основной параметр — интегральная светимость $\mathcal{L}_{\gamma\gamma} = \int L dt$, планируемая на $\gamma\gamma$ -коллайдерах, есть величина порядка $100 \cdot 10^6 \text{ нб}^{-1}$ в год. Эта величина соответствует числу реакций образования адронов порядка десятка при каждом столкновении пучков. Другими параметрами являются энергия монохроматической части спектра $\omega = 0,8\varepsilon$, высокая степень монохроматичности и поляризации.

Одной из главных целей проектируемых $\gamma\gamma$ -коллайдеров является решение ключевой проблемы СМ — открытие и изучение свойств бозона Хиггса. ФК предоставляют также возможность, используя линейно поляризованные фотонные пучки, отличить распад ХБ от его аксиального партнера.

Изучение экспериментальных данных, полученных на LEP-1, показало, что СМ является теорией наблюдаемого мира, но ее проверка в других областях необходима; наиболее вероятное значение массы бозона Хиггса $M_H \sim 130 \text{ ГэВ}$. Аналогичное утверждение о том, что его масса не превышает удвоенную массу Z -бозона, следует из модели минимального суперсимметричного расширения СМ (MSSM). Из результатов недавно проведенных прямых экспериментов по поиску ХБ [36] следует, что с 95% вероятностью нижний предел массы бозонов Хиггса в СМ есть 89,8 ГэВ. Косвенное ограничение на верхний предел массы Хиггса было недавно уменьшено со 169 до 110 ГэВ [37] из анализа прецизионных данных по измерению влияния радиационных эффектов на ширину распада Z -бозона.

Фотонные коллайдеры могут быть использованы для измерения двухфотонной ширины ХБ в случае, если его масса M_H не превышает 500 ГэВ.

Резкий край спектральной светимости ФК в области максимально возможных инвариантных масс позволит изучать различные моды распада ХБ (узкий одиночный резонанс) путем сканирования по энергии фотонов в СЦМ [17,21,35].

*Примечание: за счет отсутствия на ФК некоторых эффектов взаимодействий (bremsstrahlung) электронные пучки для $\gamma\gamma$ -коллайдеров могут иметь горизонтальный размер, значительно меньший, чем в случае e^+e^- -столкновений. Если для $\gamma\gamma$ - и e^+e^- -пучков используется один и тот же инжектор, то $\mathcal{L}_{ee} \sim 2\mathcal{L}_{e^+e^-}$. В случае специального инжектора можно в принципе иметь $\mathcal{L}_{ee} > 10 \div 30 \mathcal{L}_{e^+e^-}$ [35].

Сечение образования ХБ в столкновениях фотонов имеет вид [18, 38]:

$$\sigma(\gamma\gamma \rightarrow H) = \frac{4\pi^2}{M_H} \Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) \frac{M_H \Gamma_t}{(s - M_H^2)^2 + M_H^2 \Gamma_t^2} (1 + \lambda_1 \lambda_2), \quad (28)$$

где $\lambda_{1,2} = \pm 1$ есть спиральности фотонов, s , M_H , Γ_t — квадрат инвариантной массы фотонов, масса и полная ширина ХБ соответственно; $\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma)$ — его двухфотонная ширина распада:

$$\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{G_F \alpha^2 M_H^3}{128 \sqrt{2} \pi^3} \left| \sum N_c^i e_i^2 F_i \right|^2, \quad (29)$$

определяемая формфакторами $F_i(4m_i^2/M_H^2)$, которые, в свою очередь, описываются петлевыми диаграммами Фейнмана со всеми заряженными частицами с массой m_i , зарядом e_i и числом цветных состояний N_c^i частиц в петле [39]. Легкие частицы не дают существенного вклада, поскольку константа связи пропорциональна их массе, тогда как вклад тяжелых и даже более тяжелых, чем ХБ, частиц существен. Таким образом, этот процесс может быть полезен при поиске возможного четвертого поколения тяжелых лептонов и кварков [40].

Главным фоном к сигналу о рождении ХБ по механизму с образованием b -кварков $\gamma\gamma \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$ является процесс их прямого образования: $\gamma\gamma \rightarrow b\bar{b}$. Этот фон, к счастью, подавлен в канале со спиральностью 0, в котором образуется ХБ при достаточно больших энергиях b -кварков [18]:

$$\frac{d\sigma(\gamma\gamma \rightarrow b\bar{b})}{d\cos\theta} = \frac{12\pi\alpha^2 e_b^2}{s} \frac{\beta(1 - \beta^4)}{(1 - \beta^2 \cos^2\theta)^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}}, \quad J_z = 0, \quad (30)$$

где θ — угол вылета b -кварка по отношению к оси фотонных пучков в СЦМ.

Имея в виду постепенное увеличение энергии в СЦМ пучков до величины порядка 2–3 ТэВ, связанное с поэтапным включением новых секций линейного коллайдера, мы обсудим возможные физические процессы на разных стадиях. Поиск новых частиц и новых типов взаимодействий будет главной задачей на всех этапах.

На первом этапе с энергиями лептонных пучков в области до 200 ГэВ (LC-200) главной задачей будет поиск ХБ, если его масса не превышает 80–150 ГэВ, а также изучение процессов с образованием тяжелых кварков ($b\bar{b}$), исследование зависимости сечений от поляризаций частиц, образование одиночных W -бозонов в процессе $e\gamma \rightarrow W\nu$, исследование некоторых CP -нарушающих взаимодействий.

Следующим этапом, основанным на e^+e^- -коллайдерах с энергией до 500 ГэВ (LC-500), по-видимому, будет установка для исследования t -кварков. В этом диапазоне энергий может быть реализована фабрика W -бозонов с

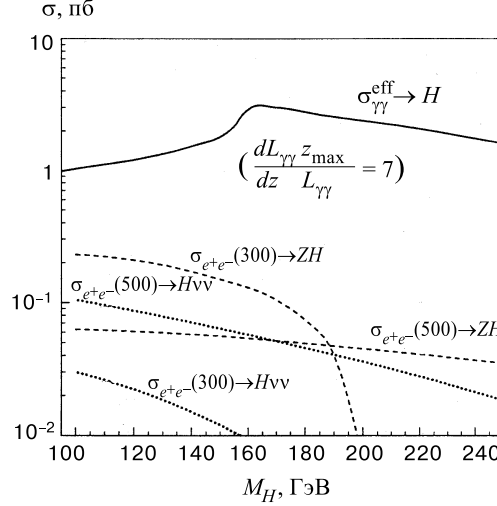


Рис. 10. Сечение процессов СМ с образованием ХБ в $\gamma\gamma$ - и e^+e^- -столкновениях [21] как функция массы ХБ

производительностью $\sim 10^7$ бозонов в год, где будет возможно детальное исследование взаимодействий и распадов W -бозонов. В этой стадии возможно изучение порогового поведения процесса образования пары $t\bar{t}$ -кварков и поиск ХБ в области масс до 400 ГэВ. При энергиях, превышающих 1 ТэВ, представляют интерес процессы с множественным образованием W - и Z -бозонов и проявления сильных взаимодействий в хиггсовском секторе.

Полная ширина ХБ при его массе до 400 ГэВ гораздо меньше характерной ширины пика спектральной светимости $\gamma\gamma$ -столкновений ($\Delta W_{\gamma\gamma}/W_{\gamma\gamma} \sim \sim 15\%$), поэтому скорость счета событий $\gamma\gamma \rightarrow H$ пропорциональна производной светимости по инвариантной массе [21]:

$$\dot{N}_{\gamma\gamma \rightarrow H} = \frac{dL_{\gamma\gamma}}{dW_{\gamma\gamma}} \frac{4\pi^2 \Gamma_{\gamma\gamma}}{M_H^2} \equiv \sigma^{\text{eff}} L_{\gamma\gamma}, \quad \sigma^{\text{eff}} \sim \frac{dL_{\gamma\gamma}}{dW_{\gamma\gamma}} \frac{M_H}{L_{\gamma\gamma}} \frac{4\pi^2 \Gamma_{\gamma\gamma}}{M_H^3}. \quad (31)$$

В работе [21] было впервые показано, что при использовании области пика спектральной светимости $z = W_{\gamma\gamma}/2\varepsilon > 0,65$ с параметром $x = 4,8$ и $(dL_{\gamma\gamma}/dW_{\gamma\gamma})(M_H/L_{\gamma\gamma}) = 7$, эффективное сечение процесса рождения ХБ в $\gamma\gamma$ -столкновениях для $M_H = 100 \div 250$ ГэВ превосходит соответствующее сечение в e^+e^- -столкновениях примерно в 5–30 раз (см. рис. 10). Кроме упомянутых выше проблем хиггсовского сектора, ниже мы перечислим некоторые аспекты физики калибровочных бозонов СМ и физики адронов, исследование которых на γe^- - и $\gamma\gamma$ -коллайдерах было бы актуальным.

1. Общая проблема проверки параметров СМ с высокой точностью.
2. Поиск отклонений от предсказаний СМ — проявлений аномальных взаимодействий бозонов, лежащий в их основе. Эти взаимодействия описываются эффективными лагранжианами и могут проявляться при рождении нескольких бозонов в $\gamma\gamma$ -столкновениях с энергией более 500 ГэВ.
3. Поиск проявлений правых токов, отсутствующих в СМ, и тесты право-лево-симметричных моделей. Для этой цели удобен процесс $\gamma e \rightarrow W\nu$ одиночного рождения W -бозона при фотон-электронных столкновениях.
4. Поиск более тяжелых партнеров W -бозонов, которые могли бы объяснить CP -нарушение, проявляющееся в неравенстве ширин распада положительно и отрицательно заряженных W -бозонов.
5. Прецизионное измерение элементов матрицы Кобаяши — Маскава, в том числе и для случая, когда W -бозон находится вне массовой поверхности.
6. Исследование проявлений сильного взаимодействия в хиггсовском секторе в процессе образования продольно поляризованных Z -бозонов в фотон-фотонных взаимодействиях.
7. Прецизионное измерение ширины и массы W -бозона в разных процессах.

3.1. Проблемы стандартной модели. Открытие бозона Хиггса и исследование его свойств — наиболее важная проблема в современной физике частиц.

На установках LEP-2 и адронном коллайдере LHC может быть просканирована область масс выше 80 ГэВ, где ХБ может быть открыт либо надежно исключен. В случае $M_H > 2M_Z$ он может быть найден в процессе $H \rightarrow ZZ$. В любом случае фотонные коллайдеры могут быть использованы для измерения двухфотонной ширины ХБ в случае, если его масса M_H не превышает 500 ГэВ.

В случае, если M_H порядка двух масс t -кварка, то измерение интерференции вкладов в амплитуду $\gamma\gamma \rightarrow t\bar{t}$ электромагнитного и резонансного происхождения через ХБ-промежуточное состояние может дать информацию о взаимодействии ХБ с t -кварком. При массе ХБ из СМ, превышающей 400 ГэВ, его изучение будет недоступно на ФК ввиду большого фона от процессов $\gamma\gamma \rightarrow WW, ZZ$ [41]. Тем не менее наблюдение его в этой области будет сигналом либо существования некоторых более тяжелых частиц, либо нестандартного взаимодействия ХБ. Среди таких процессов могли бы быть процессы с образованием двух ХБ*.

Другим кругом проблем является физика калибровочных бозонов. Структура трех- и четырехбозонного взаимодействия в лагранжиане СМ обеспечивает ограничение на рост сечений при высоких энергиях в соответствии

*А.Банин, частное сообщение.

с требованиями унитарности. Фабрики W -бозонов с производительностью $\sim 10^7$ бозонов в год могли бы быть лабораториями для изучения взаимодействия бозонов.

Среди проблем описания взаимодействия W -бозонов можно отметить неоднозначности в способе восстановления унитарности при введении ненулевой ширины бозона — здесь необходимо строить теорию нестабильных бозонов с самого начала*.

Особый интерес представляет программа проверки СМ в реакциях рождения калибровочных бозонов. Лагранжиан трехбозонных $WW\gamma$ - и WWZ -взаимодействий в самом общем случае может включать в себя связи, описываемые пятью операторами с размерностью 4 и двумя операторами с размерностью 6 [42]:

$$\begin{aligned} L_{WWV}/g_{WWV} = & -i \left[g_1^V (W_{\mu\nu}^\dagger W^\mu V^\nu - W_\mu^\dagger V_\nu W^{\mu\nu}) + \kappa_v W_\mu^\dagger W_\nu V^{\mu\nu} + \right. \\ & + \frac{i\lambda_V}{m_W^2} W_{\lambda\mu}^\dagger W^\mu{}_\nu V^{\nu\lambda} - g_4^V W_\mu^\dagger W_\nu (\partial^\mu V^\nu + \partial^\nu V^\mu) + \\ & + g_5^V \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (W_\mu^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\rho W_\nu) V_\sigma + i\tilde{\kappa}_v W_\mu^\dagger W_\nu \tilde{V}^{\mu\nu} + \\ & \left. + \frac{i\tilde{\lambda}_V}{m_W^2} W_{\lambda\mu}^\dagger W^\mu{}_\nu \tilde{V}^{\nu\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь V_μ — поле фотона либо Z -бозона (соответственно, $V = \gamma$ либо Z), W_μ — поле W^- -бозона, $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$, $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, $\tilde{V}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V^{\rho\sigma}$, $A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B = A(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)B$. Константы связи g_{WWV} фиксированы как

$$g_{WW\gamma} = e, \quad g_{WWZ} = e \cos \theta_W.$$

В случае $WW\gamma$ -взаимодействия первый член в (32) отвечает «минимальной» связи (при $g_1^\gamma = 1$). Коэффициенты второго и третьего («аномальных») членов лагранжиана (32) связаны с магнитным μ_W и электрическим квадрупольным Q_W моментами W -бозона соотношениями

$$\mu_W = \frac{e}{2m_W} (1 + \kappa_\gamma + \lambda_\gamma), \quad Q_W = \frac{e}{m_W^2} (\lambda_\gamma - \kappa_\gamma).$$

Первые три оператора в лагранжиане (32) сохраняют P - и C -симметрии по отдельности. Два последних оператора нарушают P -четность, но инвариантны относительно C -сопряжения. Их коэффициенты связаны с электрическим дипольным d_W и магнитным квадрупольным $\tilde{Q}_W$ моментами W -бозона:

$$d_W = \frac{e}{2m_W} (\tilde{\kappa}_\gamma + \tilde{\lambda}_\gamma), \quad \tilde{Q}_W = \frac{e}{m_W^2} (\tilde{\lambda}_\gamma - \tilde{\kappa}_\gamma).$$

*Ф.Ткачев, частное сообщение (см. hep-ph/9802307, 9710242).

Оба оператора с коэффициентами g_4^γ и g_5^γ нарушают C -четность. Однако при этом оператор с g_4^γ сохраняет P -четность, а оператор с g_5^γ нарушает P -симметрию таким образом, что комбинированная CP -четность в последнем случае сохраняется.

В рамках СМ вершины $WW\gamma$ - и WWZ -взаимодействий строго определяются $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочной инвариантностью. В древесном приближении могут возникать только C - и T -инвариантные связи, причем $\kappa_V = 1$, $\lambda_V = 0$. Слабые радиационные поправки, обусловленные петлевыми диаграммами с тяжелыми заряженными фермионами, могут давать ненулевые вклады как в константы κ_V и λ_V , так и в связи, нарушающие C - и T -симметрии. Детальное исследование парного рождения W -бозонов в реакциях $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ [43] и $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ [44] совместно с реакцией $e\gamma \rightarrow W\nu$ [42] на уровне эффектов слабых радиационных поправок представляет интерес с точки зрения проверки калибровочной структуры электрослабой теории и возможности наблюдения вклада новой физики вне рамок СМ. Перечисленные процессы впервые обсуждались в данном контексте в работах [45].

Благодаря унитарным сокращениям в СМ реакция $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ оказывается особенно чувствительной к отклонениям от СМ. Однако извлечение теоретических ограничений из этой реакции затруднено тем обстоятельством, что в нее дают вклад как $W\gamma$ -, так и WZ -связи. Альтернативные реакции $e\gamma \rightarrow W\nu$ и $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ обусловлены только $W\gamma$ -связями. В последний процесс на древесном уровне, наряду с $WW\gamma$ -вершинами, может давать вклад также вершина $WW\gamma\gamma$, связанная со специфическими четырехбозонными взаимодействиями [46], возникающими вследствие неабелевости $SU(2)_L \times U(1)_Y$ теории.

Вклад четырехбозонной вершины $WW\gamma\gamma$ делает процесс $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ особенно важным в измерениях электромагнитных взаимодействий W -бозона [47]. Если рассматривать только взаимодействия, сохраняющие P - и C -симметрии, то в этом случае лагранжиан четырехбозонного $WW\gamma\gamma$ -взаимодействия включает в себя два оператора с размерностью 6:

$$L_Q^{(6)} = -\frac{\pi\alpha}{4m_W^2} [a_0 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} (\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu) + a_c F_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu} (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu)], \quad (33)$$

где $F_{\alpha\beta}$ — тензор напряженности электромагнитного поля, $\mathbf{W}_\mu$ описывает W -триплет в $SU(2)$, a_0 и a_c — константы связи. В физическом базисе

$$(\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \rightarrow 2 \left(W_\mu^+ W_\nu^- + \frac{1}{2c_W^2} Z_\mu Z_\nu \right),$$

где $c_W \equiv \cos \theta_W$. Первый оператор в лагранжиане (33) параметризует обмен нейтральных скаляров. На однопетлевом уровне тяжелые заряженные фермионы индуцируют эффективные четырехбозонные связи, которые дают вклад

в оба члена лагранжиана (33), в то время как заряженные скаляры дают вклад только в первый член, соответствующий «нейтральному» оператору с константой связи a_0 .

Сечение процесса $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ растет асимптотически до постоянного значения

$$\sigma_{\text{asympt}}(\gamma\gamma \rightarrow WW) \approx \frac{8\pi\alpha^2}{m_W^2} \approx 93 \text{ пб},$$

которое соответствует рождению $\sim 10^6$ W^+W^- -пар на каждые 10 фб^{-1} интегральной светимости линейного $\gamma\gamma$ -коллайдера. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ падает с ростом энергии как s^{-1} . Уже при $\sqrt{s} = 500 \text{ ГэВ}$ сечение реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ достигает 77 пб и на порядок превышает сечение процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$.

Используя поляризованные фотонные пучки, можно изучать процесс $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ в зависимости как от спиральностей начальных γ -квантов, так и от спиральностей W -бозонов, определяемых по их распадам. Как показано в работе [44], реакция $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ обеспечивает наиболее точную проверку СМ. Оценка чувствительности реакций $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ проводилась в работе [44] для энергии $\sqrt{s} = 500 \text{ ГэВ}$ в предположении $\kappa_Z = 1$ и $\lambda_Z = \lambda_\gamma$. В качестве измеряемых величин (с соответствующими экспериментальными ошибками) рассматривались полное сечение, асимметрия вперед-назад χ_{FB} , отношение «in-out» R_{IO} и отношение сечений рождения продольно и поперечно поляризованных W -бозонов L/T . В случае реакции $e\gamma \rightarrow W\nu$ в качестве измеряемых величин рассматривались полное сечение, параметры χ_{FB} и R_{IO} и отношение $(1/3)$ между конфигурациями со значениями $|J_z| = 1/2$ и $|J_z| = 3/2$ для компоненты полного спина вдоль оси пучка. В случае реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ кроме полного сечения, асимметрии χ_{FB} и отношения L/T исследовалось также отношение для конфигураций с $|J_z| = 0$ и $|J_z| = 2$.

Аналогичный анализ реакций $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$, $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ и $e\gamma \rightarrow W\nu$ в работе [48] показывает, что на будущих линейных e^+e^- -коллайдерах с энергией 500 ГэВ достижимы ограничения $|1 - \kappa_\gamma| \leq 0,02$ и $-0,04 \leq \lambda_\gamma \leq 0,05$ при совместном рассмотрении всех трех указанных реакций (в предположении $1 - \kappa_Z = \lambda_Z = 0$).

Возможность выделения вкладов четырехбозонного «аномального» взаимодействия (33) из реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ детально изучалась в работе [47]. Прежде всего, следует отметить, что в то время как в СМ образовавшиеся W -бозоны вылетают в основном под малыми углами к оси пучка, «аномальные» W -бозоны дают максимум распределения при $\vartheta_{\gamma W} = 90^\circ$. Поэтому использование обрезания по углу рассеяния позволяет существенно подавить вклад процессов СМ в полное сечение реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ и тем самым улучшить условия для выделения сигнала четырехбозонного «аномального» взаимодействия (см. таблицу). Использование поляризованных фотонов и

Таблица. Влияние обрезания по углу $\vartheta_{\gamma W}$ на сечение реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ (в пб)

$\sqrt{s}$, ТэВ	σ_{tot}	$\cos \vartheta_{\gamma W} < 0,8$	$\cos \vartheta_{\gamma W} < 0,6$
0,5	77	9,7	3,1
1,0	88	2,9	0,86
2,0	91	0,78	0,22

измерение поляризации W -бозонов обеспечивает возможность не только дополнительного усиления сигнала четырехбозонного взаимодействия (33), но и разделения вкладов «аномальных» констант связи a_0 и a_c .

Из измерений полных сечений реакции $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ с точностью 3% (при обрезании $|\cos \vartheta_{\gamma W}| < 0,7$) можно достичь следующих ограничений на константы a_0 и a_c в случае неполяризованных пучков [47]:

$$-6,0 \cdot 10^{-2} \leq a_0 \leq 3,0 \cdot 10^{-2}, \quad -0,1 \leq a_c \leq 3,5 \cdot 10^{-2},$$

в то время как для различных конфигураций поляризованных пучков при той же точности измерений сечений можно получить ограничения*

$$\begin{aligned} -5,0 \cdot 10^{-2} \leq a_0 \leq 2,0 \cdot 10^{-2}, \quad -0,1 \leq a_c \leq 3,6 \cdot 10^{-2} \quad (J_z = 0), \\ -2,0 \cdot 10^{-2} \leq a_c \leq 2,0 \cdot 10^{-2} \quad (J_z = 2). \end{aligned}$$

Существенно лучшие ограничения на константы «аномальных» четырехбозонных связей (33) можно достичь, изучая процесс $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$, в котором отсутствуют вклады СМ на древесном уровне. В однопетлевом приближении СМ предсказывает для сечений $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ уровень почти на три порядка ниже по сравнению с $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$, но тем не менее достижимый на ФЛК при высоких энергиях. Впервые расчеты процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ с учетом не только фермионных, но и W -бозонных петель были проведены в [41], а затем результаты этих вычислений получили подтверждение в работах [49]. В [47] (без учета однопетлевого фона СМ) приводятся ограничения для «аномальных» констант a_0 и a_c из реакции $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ почти на порядок лучше, чем из $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$:

$$|a_0| \leq 4,0 \cdot 10^{-3}, \quad |a_c| \leq 7,0 \cdot 10^{-3}$$

*«Заряженный» оператор с константой связи a_c дает вклад в обе конфигурации $J_z = 0$ и $J_z = 2$, в то время как «нейтральный» оператор с константой связи a_0 дает вклад только в конфигурации $J_z = 0$.

для неполяризованных фотонных пучков и

$$\begin{aligned} |a_0| &\leq 3,0 \cdot 10^{-3}, & |a_c| &\leq 6,0 \cdot 10^{-3} & (J_z = 0), \\ & & |a_c| &\leq 1,0 \cdot 10^{-2}, & (J_z = 2) \end{aligned}$$

для поляризованных пучков. Эти оценки были получены в предположении, что при светимости 10 фб^{-1} и обрезании $|\cos \vartheta_{\gamma Z}| \leq 0,8^*$ регистрируются 10 событий с топологией, соответствующей адронному распаду одного Z -бозона и нейтринному распаду другого. Для получения более реалистических оценок чувствительности реакции $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ к сигналу от четырехбозонных «аномальных» констант связей a_0 и a_c необходимо также аккуратное рассмотрение однопетлевого фона СМ.

Следует отметить, что ограничения на константы a_0 и a_c из e^+e^- -мод трехбозонного рождения, $W^+W^-\gamma$, $ZZ\gamma$, $Z\gamma\gamma$, на новых линейных коллайдерах оказываются на два порядка хуже, чем из реакции $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [50]. В то же время в e^+e^- -взаимодействиях можно проводить прямые измерения констант четырехбозонных связей $W^+W^-W^+W^-$, W^+W^-ZZ , $ZZZZ$ (см. [50–52]), что недоступно в экспериментах на фотонных пучках. Соответствующие четырехбозонные аномальные взаимодействия описываются лагранжианом, содержащим два оператора с размерностью 4:

$$L_Q^{(a)} = \frac{1}{4} g_W^2 \left[g_0 (\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu)^2 + g_c (\mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\nu) (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \right].$$

Первый («нейтральный») оператор может параметризовать обмен очень тяжелым нейтральным скаляром, в то время как второй («заряженный») оператор может соответствовать триплету тяжелых скаляров. Случай, когда вершина $ZZZZ$ отсутствует, $g_0 = -g_c$, может быть обусловлен обменами тяжелыми векторными частицами. Ограничения на параметры g_0 и g_c из 3σ -отклонений при измерении полных сечений реакций $e^+e^- \rightarrow W^+W^-Z$ и $e^+e^- \rightarrow ZZZ$ обсуждались в работе [50].

В $e\gamma$ -модах двухбозонного рождения, W^+W^-e , $Z\gamma e$, ZZe , $W^-\gamma\nu$, $W^-Z\nu$, наряду с аномальными четырехбозонными вершинами $WW\gamma\gamma$ и $ZZ\gamma\gamma$, описываемыми лагранжианом (33), можно также изучать вклады аномальной вершины $WWZ\gamma$. Так, в работе [53] было рассмотрено взаимодействие

$$L_n^{(6)} = i \frac{\pi\alpha}{4m_V^2} a_n \mathbf{W}_\alpha \cdot (\mathbf{W}_\nu \cdot \mathbf{W}_\mu^\alpha) \mathbf{F}^{\mu\nu}, \quad (34)$$

*Это обрезание, в частности, позволяет устранить фон СМ, обусловленный процессом $e\gamma \rightarrow eZ$ в том случае, когда один из электронов не был полностью конвертирован лазерным пучком.

которое связано с оператором с размерностью 6, сохраняющим симметрии $U(1)_{EM}, C, P$ и $SU(2)_C$, но нарушающим симметрию $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Было показано, что реакции $e\gamma \rightarrow ZZe$ и $e\gamma \rightarrow W^+W^-e$ наиболее чувствительны к аномальным связям с константами a_0 и a_c . Ограничения на эти константы из 3σ -отклонений полных сечений указанных $e\gamma$ -мод оказываются почти на порядок лучше, чем из e^+e^- -мод [50], и на фактор 5 хуже, чем из $\gamma\gamma$ -мод [47]. Наиболее чувствительным к аномальной константе связи a_n является процесс $e\gamma \rightarrow W^-Z\nu$. Из 3σ -отклонений полных сечений этой реакции на линейных e^+e^- -коллайдерах с энергией 500 ГэВ при интегральной светимости 10 фб^{-1} можно достичь уровня ограничений $-1,2 < a_n < 0,74$. В работе [54] рассмотрено также $WWZ\gamma$ -взаимодействие, обусловленное оператором $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} W_\alpha^- W_\beta^+ Z_\mu A_\nu$ с размерностью 6, который сохраняет симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$ и CP , но нарушает симметрии C, P и $SU(2)_C$.

Связи $\gamma\gamma Z$ и $\gamma\gamma\gamma$ отсутствуют на древесном уровне СМ, в рамках которой переходы $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ возникают в однопетлевом приближении, включающем как фермионные, так и W -бозонные петли. В работах [55] показано, что, благодаря большому вкладу W -бозонных петель при высоких энергиях, как и в случае $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$, сечения процессов $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ достигают уровня, доступного экспериментам на ФК. В обоих рассматриваемых процессах вклады фермионных петель доминируют ниже W -порога, а затем быстро падают с ростом энергии в СЦМ. Вклады W -бозонных петель начинают доминировать при $\sqrt{s_{e^+e^-}} > 250 \text{ ГэВ}$ и с ростом энергии выходят почти на плато. В частности, уже при $\sqrt{s_{e^+e^-}} = 500 \text{ ГэВ}$ сечение процесса $\gamma\gamma \rightarrow Z\gamma$ достигает величины 50 фб, что соответствует выходу 500 событий этой реакции на 10 фб^{-1} интегральной светимости. При энергиях $\sqrt{s_{e^+e^-}} > 500 \text{ ГэВ}$ становится возможным выделение из процессов $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ вкладов W -бозонных петель, обусловленных трех- и четырехбозонными вершинами γWW , ZWW , $\gamma\gamma WW$ и γZWW . Таким образом, изучение переходов $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в экспериментах на будущих ФК имеет фундаментальное значение, поскольку оба процесса представляют собой чисто однопетлевые эффекты СМ как перенормируемой неабелевой калибровочной теории.

3.2. Адронная физика и предсказания КХД в $\gamma\gamma$ -пучках. Столкновения высокоэнергетичных фотонов являются лабораторией для проверки предсказаний квантовой хромодинамики, электрослабой теории и различных расширений СМ. Поскольку каждый из фотонов может превратиться в пару тяжелых W -бозонов, то предоставляется уникальная возможность изучать процессы столкновений и аннигиляции W -бозонов. При частичной конверсии $e^\pm e^-$ -коллайдеров имеется возможность создания фотон-электронных (позитронных) коллайдеров. Одна из основных задач по проверке предсказаний КХД для таких коллайдеров — изучение структурных функций фотона.

В таких опытах может быть исследовано как глубоконеупругое электрон-фотонное рассеяние $e\gamma \rightarrow eX$, так и процесс с участием заряженных токов $e\gamma \rightarrow \nu X$. Дифференциальное сечение процесса $e\gamma \rightarrow eX$ имеет вид

$$\frac{d\sigma_{e\gamma \rightarrow eX}}{dE'd\cos\theta} = \frac{4\pi\alpha^2 E'}{Q^4 y} [(1 + (1 - y)^2)F_2^\gamma(x, Q^2) - y^2 F_2^\gamma(x, Q^2)], \quad (35)$$

$$Q^2 = -q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta), \quad w^2 = (q + p)^2,$$

$$x = \frac{q^2}{Q^2 + w^2}, \quad y = 1 - \frac{E'}{E} \cos^2(\theta/2) = \frac{qp}{kp}.$$

Так же, как и в случае e^+e^- -коллайдеров, структурная функция F_L^γ трудно достижима для измерения, поскольку надежное отделение от фонов (скажем, рассеяние e^- -пучка на остаточном газе) ограничивает область изменения y малыми величинами. Структурная функция F_2^γ более доступна для измерений. Напомним, что F_2^γ в рамках *наивной* кварковой модели

$$F_2^\lambda(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 \cdot 2x\mathcal{D}_\gamma^q(x, Q^2), \quad \mathcal{D}_\gamma^q(x) = \frac{\alpha}{2\pi} e_q^2 \ln \frac{Q^2}{m^2} (x^2 + (1-x)^2) \quad (36)$$

обнаруживает нарушение скейлинга уже в низшем порядке теории возмущений [56]. Учет высших порядков теории возмущений КХД сохраняет качественно такое поведение структурной функции:

$$x\mathcal{D}_\gamma^q(x, Q^2) = \frac{(\alpha/2\pi)}{\alpha_s(Q^2)} e_q^2 \cdot f(x), \quad \alpha_s(Q^2) \sim \frac{1}{\ln Q^2/\Lambda^2}. \quad (37)$$

Интерес представляет экспериментальное определение функции $f(x)$, так же, как и вопросы учета эволюции нарушения скейлинга в высших порядках теории возмущений [38, 57]. Заметим, что, измеряя на опыте дифференциальное сечение, и, в частности, азимутальные корреляции, можно получить дополнительную, по сравнению с измерением полных сечений, информацию:

$$4\pi \frac{d\sigma_{e\gamma \rightarrow e\alpha X}}{dx dy d\Omega_\alpha} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^2} \frac{1 + (1 - y^2)}{xy} [2x\tilde{F}_T + \xi(y)\tilde{F}_L - \rho(y)\tilde{F}_A \cos\varphi_\alpha + \\ + 1/2\xi(y)\tilde{F}_B \cos 2\varphi_\alpha], \quad (38)$$

где $\xi(y) = 2(1 - y)/[1 + (1 - y)^2]$ — степень продольной поляризации виртуального фотона, Ω_α представляет направление адрона α в системе покоя $\gamma\gamma^*$ -частиц, φ_α — азимутальный угол вокруг $\gamma\gamma^*$ -оси относительно плоскости, содержащей рассеянный электрон. Функции $\rho(y)$ и $\xi(y)$ близки к

единице при малых y . Стандартные функции F_2 , F_L появятся после интегрирования по Ω_a . В частности, измерение $\langle \cos 2\varphi_a \rangle$ даст ту же информацию, что и F_L^γ . Экспериментально достижимая область в переменных $\ln(1/x - 1)$, $\ln Q^2$ (ГэВ)² представляет собой параллелограмм с $Q_{\max}^2 \ll s_{e\gamma}$ и $Q_{\min}^2$, определяемым пределами применимости КХД ($Q_{\min}^2 \geq 5 \div 6$ ГэВ²). Минимальное значение $\sqrt{w^2}$ — инвариантной массы рожденных адронов, в принципе, равно удвоенной массе пионов, но, фактически, определяется набором статистики экспериментальных данных и применимостью КХД. Типичные значения $Q_{\max}^2$ и $x_{\min}$ для установок LC-200 есть 10^3 ГэВ² и 10^{-3} , а для линейных e^+e^- -коллайдеров (так же, как и для $e\gamma$ -коллайдеров) LC-500 10^5 ГэВ² и 10^{-5} .

Как мы уже упоминали, в результате асимптотической свободы функция $F_2^\gamma(x, Q^2)$ увеличивается с ростом $\ln Q^2$ и при $x \rightarrow 1$. Рост амплитуды $\gamma^*\gamma \rightarrow \bar{q}q$ при $x \rightarrow 1$ подавляется за счет излучения глюонов (по-видимому, как $1/\ln(4/(1-x))$), в то же время при малых x следует ожидать роста F_2^γ за счет образования кварк-антикварковых пар [58]. Эти результаты, полученные в рамках КХД с учетом нелидирующих вкладов, подлежат экспериментальной проверке. Ожидаемое (по теории) значение F_2/α для значений $\langle Q^2 \rangle = 200$ ГэВ², $0,2 < x < 0,8$ есть величина порядка 0,5, причем теоретические ошибки (за счет неопределенности в выборе Λ) не превышают статистических при планируемой интегральной светимости LC-200, равной 500 пб^{-1} . Анализ уравнений эволюции для F_2^γ показывает асимптотическое уменьшение адронной компоненты, тогда как вклад компоненты, отвечающей точечному характеру перехода фотона в $\bar{q}q$ -пару, растет $\sim \ln Q^2$, что согласуется с имеющимися данными с $Q^2 < 10^3$ ГэВ² [59]. Начинаящееся расхождение в области $Q^2 < 10^3$ ГэВ² может быть детально проверено на γe -коллайдерах.

В опытах с детектированием s -кварка (или t -кварка) можно проверить, соответствует ли действительности расчет их вклада в F_2^γ , основанный на борновской амплитуде и низших (однопетлевых) поправках к ней во всей области $x < x_{\max} = Q^2/(Q^2 + 4m_q^2)$. Для $Q^2 = 5,9$ ГэВ² сравнение показывает разумное согласие опыта [60] с ведущим логарифмическим вкладом КХД, при этом вклад событий с s -кварком оказывается малым. Относительный вклад адронной компоненты в F_2^γ уменьшается асимптотически:

$$F_2^\gamma(Q^2) = [F_2^\gamma(Q_0^2) - F_{2pt}^\gamma(Q_0^2)] \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right)^{d_{NS}} + F_{2pt}^\gamma(Q^2), \quad d_{NS} > 0,$$

$$F_{2pt}^\gamma(Q^2) = \frac{4}{9} \frac{d_B}{1 + d_{NS}} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}, \quad (39)$$

для $Q_0^2 \sim 1$ ГэВ² он может быть описан на основе векторной доминантности. Тогда, даже принимая во внимание $\sim 50\%$ неопределенность в ней, для

$Q^2 = 100 \text{ ГэВ}^2$ уже можно определить параметр Λ с точностью $\pm 120 \text{ МэВ}$ [38]. При достаточно больших $Q_0^2 \sim 10,3 \text{ ГэВ}^2$ надо принимать во внимание обмен Z -бозоном, а также W -бозоном в промежуточном состоянии. В последнем случае мы имеем дело с процессом, идущим за счет заряженных токов: $e^\pm + \gamma \rightarrow \nu + X$. Для $e\gamma$ -коллайдеров сечения соответствующих процессов малы: несколько десятков фемтобарн, тогда как для LC-500 оно уже будет порядка пикобарн, и, таким образом, можно рассчитывать на несколько тысяч событий в год в случае применения лазерной конверсии. Что касается использования в качестве фотонного пучка «эквивалентных» фотонов другого пучка, то в силу протяженности и несингулярного характера спектров этих фотонов анализ y -зависимости будет трудным.

3.3. Физика периферических взаимодействий. Тот факт, что в основном процессе превращения фотона в кварк-антикварковую пару поперечный импульс не ограничен, ведет к интересным следствиям (одно из них уже упоминалось выше: $F_2^{\gamma} \sim \ln Q^2$) для физики периферических взаимодействий. В этой области переменная Бьеркена x очень мала, а Q^2 — умеренно велика (до нескольких десятков ГэВ^2). В этой области уже не работает жесткое упорядочение по поперечным компонентам струй, характерное для глубоконеупругих процессов. Напротив, здесь следует ожидать их постепенного увеличения от величин порядка $\sqrt{Q^2}$ для струй, оси которых близки к направлению движения электрона. Рост продолжается вплоть до значений быстроты, отвечающих центру плато, и затем происходит уменьшение характерных поперечных импульсов струй до величин порядка 1 ГэВ [61]. Здесь возникает интересная экспериментальная задача исследования корреляции между энергией струи и ее поперечным импульсом.

В событиях с большими поперечными импульсами кварк-антикварковых пар может быть исследовано явление экранирования глюонов на малых расстояниях, связанное с физикой конфайнмента кварков [62]. При очень больших энергиях адронная компонента фотона представляет собой когерентную сумму векторных мезонов. Действительно [56], время когерентности фотона, определяемое из условия малости аргумента плоской волны e^{iqx} , $qx \sim 1$, оказывается достаточно большим $\sim (1/M)(s/q^2)$ для формирования состояний векторных мезонов. Большая длина когерентности между фотоном и промежуточными состояниями векторных мезонов может быть использована как основа описания адронного взаимодействия фотонов при малых поперечных импульсах.

В частности, этот факт позволяет применить теорему факторизации, основанную на гипотезе обмена полюсом Померанчука в процессах с участием фотона $\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma p}^2 / \sigma_{pp} \approx 240 \text{ нб}$. Таким образом, можно проследить медленный рост $\sigma_{\gamma\gamma}$ с энергией вследствие роста сечений фотон-протонного и протон-протонного рассеяний (благодаря обмену помероном).

Интересным является круг физических задач в $\gamma\gamma$ -столкновениях, связанных с двойной дифракцией, т.е. переходом каждого из фотонов в один из векторных мезонов $\gamma\gamma \rightarrow v_1 v_2$, $v = \rho, \omega, \phi, J/\Psi$, а также процессы с образованием одиночных мезонов $\gamma\gamma \rightarrow vX$. В области достаточно больших переданных импульсов $\sqrt{-t} \gg \Lambda$ можно воспользоваться вычислением в рамках теории возмущений в КХД для описания процесса образования двух кварк-антикварковых пар $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}$ и затем использовать амплитуды их перехода в состояния с векторными мезонами.

В работах [63,64] показано, что в реджевском режиме доминирует обмен двумя глюонами в канале рассеяния, причем справедлив вид сечений

$$\frac{d\sigma}{dt}(\gamma\gamma \rightarrow VV) \sim \alpha_s^4(t)/t^6. \quad (40)$$

В так называемой полужесткой кинематике для процесса образования двух мезонов $M = \pi^0, \eta, \eta^1, J/\Psi, A_2, \rho_0, \gamma\gamma \rightarrow MM$, $w^2 = (p_{1\gamma} + p_{2\gamma})^2 \gg \gg \mathbf{p}_\perp^2 = |t| = (p_{\gamma_1} - p_M)^2 \gg \mu^2$, где $\mu = 0,3 \text{ ГэВ}$, могут быть одновременно использованы подход пертурбативной квантовой хромодинамики [61] и феноменология образования связанных состояний. Если в низшем порядке теории возмущений сечения этих процессов падают как w^{-4} , то вклад диаграмм с обменом глюонами не падает с ростом энергии w . При этом возникают ряды вида $1 + \sum_1^\infty c_n z^n$, $z = (3\alpha_s/2\pi) \ln w^2/w_0^2$ для характерных в опыте значений: $0,25 < z < 0,5$. Сечение для случая образования двух псевдоскалярных мезонов имеет вид [65]:

$$\frac{d\sigma}{dt} f(w, t) \left(\frac{w^2}{\omega_0^2} \right)^{2\omega_0}, \quad 2\omega_0 = \frac{12\alpha_s(t)}{\pi} 4 \ln 2, \quad (41)$$

где $1 + \omega_0$ есть интерсепт померона БФКЛ [61], а функция $f(w, t)$ слабо зависит от w . Для случая образования двух J/Ψ -мезонов имеем, в частности [66],

$$\frac{d\sigma(J/\Psi, J/\Psi)}{dp_\perp^2} = 16\pi^2 \alpha^2 (\alpha_s C_F)^4 \frac{\pi^3 \exp(16z \ln 2)}{4 (7\pi\xi(3)z)^3} \left(\frac{c_\psi f_\psi}{M_\psi^2} \right)^4 \ln^4 \left(\frac{M_\psi^2}{p_\perp^2} \right), \quad (42)$$

$$c_\psi = \frac{3}{4}; \quad f_{J/\Psi} = 0,38 \text{ ГэВ}.$$

Так, для $\gamma\gamma$ -коллайдеров с годовой светимостью 500 пб^{-1} для характерных условий регистрации $w_0 \sim 15 \text{ ГэВ}$, $|t|_{\min} = 4 \text{ ГэВ}^2$, $\theta_{\min} = 100 \text{ мрад}$ следует ожидать порядка 600 событий образования двух J/Ψ -мезонов. Вклад трехглюонного состояния в канале рассеяния (вклад оддерона) может быть отождествлен в процессах образования псевдоскалярных и тензорных частиц [64].

Предложенная в конце 70-х годов возможность изучать физику БФКЛ померона в $\gamma\gamma$ -столкновениях в последнее время привлекает большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. Мы отсылаем читателя к литературе, приведенной в [61].

3.4. Образование пар тяжелых кварков в $\gamma\gamma$ -столкновениях. Сечение прямого канала $\gamma\gamma \rightarrow \bar{q}q$, $\sigma_{\bar{q}q} \sim \pi(\alpha^2/M_\alpha^2)$ составляет ~ 130 нб и $\sim 0,13$ для случая рождения $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$ соответственно; $\sigma_{t\bar{t}} \approx \pi/(\alpha^2/m_t^2)/6 \approx 0,02$. Для рождения $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$ в процессах на e^+e^- -коллайдерах в области энергий в СЦМ $200 < \sqrt{s_{ee}} < 500$ ГэВ в приближении эквивалентных фотонов сечения имеют порядок нескольких пикобарн [67].

Другие механизмы рождения тяжелой пары, с участием одного или двух глюонов, зависят от деталей предполагаемого распределения глюонов в фотоне. Согласно оценкам, полученным в [67], глюон-фотонные вклады сравниваются с вкладом механизма Ландау — Лифшица (двухфотонный механизм) лишь при $\sqrt{s} > 200$ ГэВ, тогда как вклад двухглюонного механизма на порядок меньше.

Отношение сечений образования двух t -кварков в e^+e^- - и соответствующих $\gamma\gamma$ -коллайдерах (при использовании лазера с энергией фотонов 1,26 эВ) есть величина порядка $0,4 \div 0,6$ для $\sqrt{s} \sim 450$ ГэВ. Предсказываются значительные пороговые явления, но образование топония не происходит ввиду малого времени жизни t -кварка [68].

3.5. Поляризационные эффекты в γe - и $\gamma\gamma$ -коллайдерах. Фотоны, образованные при γe -конверсии лазерного пучка, могут находиться в различных состояниях поляризации, тогда как эквивалентные фотоны всегда линейно поляризованы в плоскости образования. В последнем случае возникают только малоинтересные азимутальные корреляции.

1. Рассмотрим возможность проверки классических правил сумм фотоабсорбции Герасимова — Дрелла — Хирна (ГДХ) [69] в опытах по столкновению поляризованных фотонного и электронного пучков. Правило сумм ГДХ выведено в предположении безвычитательных дисперсионных соотношений для зависящей от спина части амплитуды комптоновского рассеяния в сочетании с низкоэнергетическими теоремами для нее и имеет вид

$$M_a^2 = \frac{4\pi^2 s \alpha}{m^2} (g - 2)^2 = \int_0^\infty \frac{dw}{w} \Delta\sigma(w), \quad \Delta\sigma(w) = \sigma_P(w) - \sigma_A(w), \quad (43)$$

где s, m , — спин и масса мишени, $\sigma_{P,A}(w)$ — полное сечение комптоновского рассеяния фотона с частотой w на мишени для случая, когда спины фотона и мишени параллельны или антипараллельны; M_a — аномальный магнитный момент мишени. В работах [70–72] исследованы применения этого правила сумм к любым процессам вида $\gamma a \rightarrow cd$; $a, c, d = \gamma, e, w, z, H, \nu$ и т.д. Здесь мы отметим вероятную связь правила сумм ГДХ с правилом сумм

для структурной функции фотона $\int dx g^\gamma(x) = 0$; интересные соотношения для сечений $\gamma e \rightarrow W\nu$, $\gamma e \rightarrow \gamma e$, $\gamma\gamma \rightarrow WW$, $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в борновском приближении, в частности, правила сумм

$$\int_0^\infty \frac{dw}{w} \Delta\sigma_{\gamma w}(w) \approx 0(\alpha^3), \quad (44)$$

отвечающие случаю $g-2 = 0(\alpha)$, которые можно рассматривать как тестовые соотношения для СМ. Впечатляет их выполнение как в рамках КЭД, так и в низших порядках теории возмущений СМ. Что же касается модификаций СМ, в частности теорий, предсказывающих не соответствующие СМ значения квадрупольного момента W -бозона $Q = -e(k-\lambda)/m_W^2$, $\mu = ge/2m_W = e(1+k+\lambda)/2m_W$, $e^2 = 4\pi\alpha$ (СМ отвечает $k=1$, $\lambda=0$), то соответствующие им правила сумм ГДХ не выполняются:

$$\Delta\sigma_{\gamma W}(w) \sim \frac{\alpha^2\pi}{2M^2}\lambda^4 \left(\frac{w}{M_W}\right)^3; -\frac{\alpha^2}{8M_W^2}(k-1)^4 \left(\frac{w}{M_W}\right), \quad w \rightarrow \infty. \quad (45)$$

В опытах с циркулярно поляризованными фотонными пучками могут быть, таким образом, проанализированы отклонения от предсказаний СМ для трех- и четырехточечных функций Грина векторных мезонов, параметризуемых λ и $k-1$ [70].

2. В случае γe -рассеяния с линейно поляризованными фотонами возникают азимутальные асимметрии относительно его вектора поляризации и плоскости рассеяния (определяющей направление линейной поляризации эквивалентных фотонов). Они имеют скейлинговый характер $d\sigma/d\phi \sim \xi(y) \times \frac{\alpha}{\pi} x^3 \sum_q e_q^4$, где $\xi(y)$ — степень линейной поляризации эквивалентного фотона, $y = \omega/\varepsilon$ — его доля энергии, x — параметр Бьеркена, e_q — заряд кварка в процессе $\gamma e \rightarrow q\bar{q}e$ [73].

3. Так же, как и в случае поляризованного ep -рассеяния, можно ввести структурную функцию $g_1^\gamma(x, Q^2)$ фотона, которую можно определить, измеряя асимметрию лево(право)поляризованного электрона на циркулярно поляризованном фотоне. Эта функция, на языке картины Фейнмана, измеряющая разность числа лево- и правополяризованных кварков в фотоне, чувствительна к массе фотона мишени $\sqrt{|p^2|}$ [74]. Именно для ее малых значений (правило сумм ГДХ) имеем $\int_0^1 dx g_1^\gamma(x) = 0$, тогда как для больших значений масс правило сумм ГДХ неприменимо, и значение интеграла определяется треугольной аномалией $\int dx g_1^\gamma(x) = N_c(\alpha/\pi) \sum e_q^4$.

4. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Один из главных параметров ускорителя со встречными пучками — светимость L — определяется соотношением $\dot{N} = L\sigma$, где $\dot{N}$ — число событий

в единицу времени для процесса с сечением σ . Если известен с достаточной точностью рассчитываемый процесс, имеющий не слишком малое сечение σ , экспериментально хорошо отделимый от других процессов и удобный для регистрации, то его измерение позволит независимым образом определить светимость установки L . Такие процессы мы будем называть калибровочными. При этом отпадает необходимость в детальных сведениях о трудноизмеримом распределении плотности пучков в области встречи, используемом при традиционном определении светимости. В качестве калибровочных процессов для электрон-позитронных соударений используется упругое e^+e^- -рассеяние на малые (или большие) углы, однократное или двукратное излучение при e^+e^- -рассеянии.

Для встречных $\gamma\gamma$ -пучков, построенных на основе линейных e^+e^- -коллайдеров, в качестве калибровочных можно использовать процессы образования двух пар заряженных частиц $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-$, $e^+e^-\mu^+\mu^-$ и т.д. Эти процессы достаточно хорошо изучены в литературе [75–79]. Характерной чертой их является независимость полных сечений от полной энергии в СЦМ фотонов $\sqrt{s}$ при достаточно больших значениях $\sqrt{s} \gg 2m_\mu$. Сечения эти достаточно велики. Так, сечение образования двух e^+e^- -пар составляет 6,4 мкб, а сечение образования мюонной и электронной пары 5,67 нб*. Процессы с образованием мюонов (сечение образования двух мюонных пар составляет 0,16 нб), по-видимому, являются более удобными из-за относительной простоты регистрации мюонов в эксперименте. Этот процесс мы и рассмотрим детально ниже. При светимости фотонных пучков $L_{\gamma\gamma} \approx 10^{31} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ образуется порядка 200 пар мюонов и электронов в час (и, соответственно, 10 событий в час образования пары τ -лептонов и электронной пары и два события в час образования пары τ -лептонов и пары μ -мезонов). Для целей калибровки представляют, однако, интерес не полные сечения и спектральные распределения, а инклюзивные сечения в области больших (по сравнению с массой) поперечных импульсов лептонов. Далее мы предполагаем фотонные пучки поляризованными. Ниже мы приведем энергетические распределения, инклюзивные по μ^- и $\mu^+\mu^-$, и другие распределения, которые могут быть полезны для опыта. Сечение процесса

$$\gamma(k_1) + \gamma(k_2) \rightarrow \mu^+(p_1) + \mu^-(p_2) + e^+(p_3) + e^-(p_4) \quad (46)$$

*Утверждение о независимости сечений от s справедливо в далекой асимптотике. Чтобы оценить соответствующие значения s , мы рассмотрим относительную величину поправочных слагаемых: $\Delta\sigma/\sigma = (\sigma(s) - \sigma_{\text{asympt}})/\sigma_{\text{asympt}} = (m_\mu^2/36s) \ln^5(s/m_\mu^2)$. Эта величина становится малой ($\leq 1\%$) для энергий ≥ 70 ГэВ.

в пределе больших энергий в СЦМ фотонов $\sqrt{s} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2} \gg m_\mu^2$ (см. сноску на с.195) можно представить в виде суммы

$$d\sigma = d\sigma_b + d\sigma_a; \quad d\sigma_b = d\sigma_a(p_1, p_2, m_\mu \rightarrow p_3, p_4, m_e), \quad (47)$$

отвечающей кинематическим ситуациям, когда мюонная пара летит в направлении одного из фотонных пучков (электронная пара при этом летит в противоположном направлении):

$$d\sigma_a = \frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} \frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} \cdot \frac{d^2 q_\perp}{4\pi^4}, \quad (48)$$

где $d\sigma_1$ — соответствуют сечению образования пары мюонов реальным фотоном с импульсом k_1 и вектором поляризации e_1 и виртуальным (которым обмениваются рожденные пары) с поперечной к направлению пучков компонентой импульса $q_\perp$ и вектором поляризации (линейной) $\mathbf{q}_\perp / |\mathbf{q}_\perp|$; $\sqrt{s_1} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ — инвариантная масса пары мюонов. Величина $(d\sigma_1 ds_1)/s_1$ может быть выражена через доли энергий $x_i = 2p_{oi}/\sqrt{s}$ и поперечные компоненты импульсов $p_{i\perp}$ мюонов и параметры Стокса ξ_3, ξ_1 , характеризующие поляризацию начального фотона:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} &= 2\alpha^2(1 - 2x_1 x_2 G) \frac{d^2 \mathbf{p}_{1\perp} d^2 \mathbf{p}_{2\perp} dx_1 dx_2}{(\mathbf{p}_{1\perp}^2 + \mu^2)(\mathbf{p}_{2\perp}^2 + \mu^2)} \times \\ &\times \delta^{(2)}(\mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{2\perp} - \mathbf{q}_\perp) \delta(x_1 + x_2 - 1); \end{aligned} \quad (49)$$

$$G = \frac{1}{\mathbf{q}_\perp^2} \left[\mathbf{Q}^2 + (Q_x^2 - Q_y^2)\xi_3 + 2Q_x Q_y \xi_1 \right] (\mathbf{p}_{1\perp}^2 + \mu^2)(\mathbf{p}_{2\perp}^2 + \mu^2),$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{p}_{1\perp}}{\mathbf{p}_{1\perp}^2 + \mu^2} + \frac{\mathbf{p}_{2\perp}}{\mathbf{p}_{2\perp}^2 + \mu^2}.$$

Величина $(d\sigma_2 ds_2)/s_2$ получится из приведенной (49) заменой:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} &= \frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} \times \\ &\times \left(\mathbf{p}_{1,2\perp} \rightarrow \mathbf{p}_{3,4\perp}, \mathbf{q}_\perp \rightarrow -\mathbf{q}_\perp, m_\mu \rightarrow m_e, x_{1,2} \rightarrow y_{1,2}, \xi_3 \rightarrow \tilde{\xi}_3, \xi_1 \rightarrow -\tilde{\xi}_1 \right), \end{aligned} \quad (50)$$

где $y_1 = 2p_{30}/\sqrt{s}$, $y_2 = 2p_{40}/\sqrt{s}$, $\mathbf{p}_{3,4\perp}$ — доли энергий и поперечные к оси пучков компоненты 3-импульсов электронов, $\tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_1$, — параметры Стокса второго фотона.

Приведенная формула определяет полностью дифференциальное сечение процесса (46). Обратим внимание на то, что дифференциальное сечение не зависит от круговой поляризации фотонов. Основываясь на ней, можно получить различные инклюзивные распределения [75].

Проводя интегрирование по переданному импульсу и фазовому пространству электронной пары, получим инклюзивное по обоим мюонам сечение:

$$d\sigma_a = \frac{2\alpha^4}{3\pi^3} (1 - 2x_1x_2G) \frac{\delta(x_1 + x_2 - 1) d^2\mathbf{p}_1^\perp d^2\mathbf{p}_2^\perp dx_1 dx_2}{(\mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{2\perp})^2 (\mathbf{p}_1^2 + \mu^2) (\mathbf{p}_2^2 + \mu^2)} \times \quad (51)$$

$$\times \left(G\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2 - (2\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2)(\tilde{\xi}_3 \cos(2\varphi_q) - \tilde{\xi}_1 \sin(2\varphi_q)) \right),$$

где φ_q — азимутальный угол между вектором линейной поляризации второго фотона и вектором $\mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{2\perp} = \mathbf{q}_\perp$;

$$\tilde{F}_i = F_i \left(\frac{|\mathbf{q}_\perp|}{2m_e} \right), \quad F_1(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad (52)$$

$$F_2(z) = \frac{2z^2 + 1}{z\sqrt{z^2 + 1}} \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) - 1.$$

Далее можно получить инклюзивное по μ^- -мезону распределение

$$d\sigma_a = \frac{2\alpha^4}{3\pi^3} J \frac{d^2\mathbf{p}_{1\perp} dx}{m_\mu^4}; \quad J = F_0 + F_3\Sigma_3 + F_-\Sigma_- + F_+\Sigma_+ + \tilde{F}_3\tilde{\Sigma}_3, \quad (53)$$

где величина J в старшем логарифмическом приближении имеет вид

$$J = \frac{L^2 + 4L\ell + 3\ell^2}{(1 + \rho)^2} \left[1 - \frac{2x_1(1 - x_1)}{(1 + \rho)^2} (1 + \rho^2 - 2\rho\Sigma_3) \right], \quad \rho = \frac{\mathbf{p}_{1\perp}^2}{m_\mu^2} \gg 1, \quad (54)$$

$$L = \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2}, \quad \ell = \ln(1 + \rho), \quad \Sigma_3 = l_1 \cos 2\gamma_1, \quad \tilde{\Sigma}_3 = l_2 \cos 2\gamma_2,$$

$$\Sigma_\pm = l_1 l_2 \cos 2(\gamma_1 \pm \gamma_2), \quad l_i^2 = (\xi_3^i)^2 + (\xi_1^i)^2.$$

Здесь $\gamma_i = \widehat{(\mathbf{p}_{1\perp}, \ell_i)}$ — азимутальный угол между направлением максимальной линейной поляризации фотона i и поперечной компонентой импульса μ^- . Точное выражение для J приведено в [75]. Отметим, что зависимость инклюзивного сечения от параметров Стокса «чужого» фотона является слабой ($F_\pm/F_0 \approx \tilde{F}_3/F_0 \leq 3 \cdot 10^{-2}$), тогда как зависимость от поляризации «своего» фотона вполне заметна, и при $\rho = 1, 2$ и $x_1 = 1/2$ величина зависящих

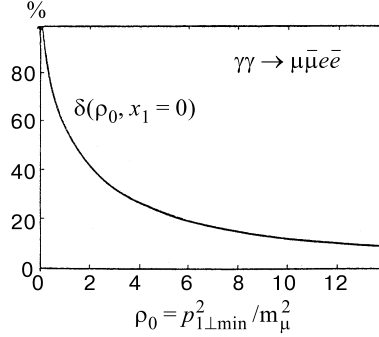


Рис. 11. Доля мюонов с $p_{1\perp} > p_{1\perp \min}$ в зависимости от $p_{1\perp \min}^2 / m_\mu^2$ при $x_1 = 0$ [75]

от спина слагаемых в J достигает 20 %. Специальный интерес может представлять доля δ таких событий, когда μ^- вылетает с поперечным импульсом, большим некоторого минимального. График этой функции $\delta(\rho_0, x_1) = N/\mathcal{D}$ для $\rho \gg 1$, где

$$N = \frac{1}{\rho} \left\{ [1 - 2x_1(1 - x_1)](L^2 + L(4\ell + 5) + 3\ell^2 + 8\ell + 6) + \right. \\ \left. + 2x_1(1 - x_1)(2L + 2\ell + 3) \right\}, \quad (55)$$

$$\mathcal{D} = 175 - 239x_1(1 - x_1), \quad (56)$$

приведен на рис. 11. На рис. 12 приведены зависимости неполяризованной части сечения F_0 и отношения F_3/F_0 от $\rho = p_{1\perp}^2 / m_\mu^2$. Отметим, что сечение процесса образования двух e^+e^- -пар для реалистических значений $\rho \gg 1$ приблизительно вдвое больше сечения образования мюонной и электронной пары [75].

Степень круговой поляризации фотона ξ_2 может быть измерена в азимутальных корреляциях перпендикулярных оси пучков ($\vec{k}_1$) компонент импульсов пары лептонов, и, как было показано в [80], происходит от интерференции амплитуд борновского и однопетлевого приближений. Для отношения вкладов в сечение имеем

$$\frac{d\sigma_{pol}}{d\sigma_0} = \alpha(\xi_2^{(1)} A^{(1)} \sin(\phi_1) + \xi_2^{(2)} A^{(2)} \sin(\phi_2)), \quad (57)$$

где величины с индексами 1 и 2 отвечают парам, рожденным, соответственно, фотонами 1 и 2, ϕ_1 — азимутальный угол между перпендикулярными к оси

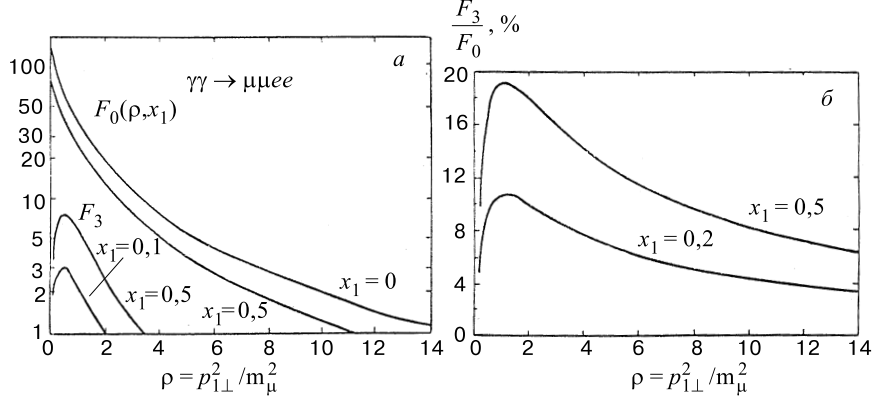


Рис. 12. а) Зависимость F_0 , F_3 (53) от поперечного импульса μ^- -мезона [75]. б) Зависимость асимметрии $F_3/F_0 = (d\sigma_a^\parallel - d\sigma_a^\perp)/(d\sigma_a^\parallel + d\sigma_a^\perp)$ инклюзивного сечения реакции $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ от поперечного импульса μ^- -мезона [75]; $d\sigma_a^\parallel$ ($d\sigma_a^\perp$) отвечают случаю, когда направление максимальной поляризации первого фотона лежит в плоскости $\mathbf{p}_{\mu^-}$, $\mathbf{k}_1$ (перпендикулярно к ней)

пучков компонентами 3-импульсов пар, $0 < \phi_1 < \pi$, $x = q_{10}/\omega_1$, $y = 1 - x = q_{20}/\omega_1$ — доли энергии компонент пары, $z = |q_{1\perp}|/|q_{2\perp}|$;

$$A = \frac{z}{2(x^2 + y^2)} \left(\frac{2x}{z^2} (y - \frac{xc}{z}) \ln \frac{x}{d} - 2y(x - cyz) \ln \frac{z^2 y}{d} + \frac{xyz}{(x + yz^2)^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{x^2}{z^3} - y^2 z^3 + zy^2 - \frac{x^2}{z} + (\frac{1}{z} + 2c + z)(z^2 y^2 - \frac{x^2}{z^2}) \right) \right), \quad (58)$$

$$c = \cos \phi, d = x^2 + y^2 z^2 - 2xyzc.$$

Для значений $(z; x) = (0, 1; 0, 9)$, $(10; 0, 1)$ величина αA достигает $\pm 3\%$.

Специфика рассмотренных выше процессов в чрезвычайно малых углах ($\leq 10^{-3}$ для $\omega_1 = \omega_2 \geq 100$ ГэВ) между импульсами компонент образовавшихся пар и осью пучков требует специального устройства детекторов мюонов, расположенных вдали от точки столкновения и, по-видимому, использования магнитных полей.

Другой системой калибровочных процессов являются процессы образования пары заряженных бозонов или лептонов, летящих в СЦМ на большие углы [81]. Сечения этих процессов убывают с энергией и имеют порядок величины $\sigma \sim 10^{-32} \text{см}^2/\text{s}$ (ГэВ²).

Предположим, что экспериментально достижимо детектирование частиц с углом вылета частиц по отношению к оси пучка ϑ таким, что $|\cos \vartheta| \leq a$ (в СЦМ фотонных пучков). Сечение образования лептонной пары в этих условиях зависит от поляризации фотонных пучков. Для случая состояний фотонов с одинаковыми спиральностями ($\pm\pm$) сечение образования лептонов мало ($\sim \alpha^2 m^2/s^2$), и мы им пренебрегаем. Сечение образования W^+W^- -пары имеет вид

$$\sigma_a^{\pm\pm}(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{s}(3+b^2)(1+3b^2) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+ab}{1-ab} + \frac{ab}{1-(ab)^2} \right), \quad (59)$$

где b — скорость W -бозона, индекс a означает $|\cos \vartheta| \leq a$. Для сечения образования W^+W^- фотонами разной спиральности имеем

$$\begin{aligned} \sigma_a^{\pm\mp}(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-) &= \frac{2\pi\alpha^2}{s} \times \\ &\times \left(6ab + (5-b^2)(7-3b^2) \frac{ab}{1-a^2b^2} - \frac{9+10b^2-3b^4}{2} \ln \frac{1+ab}{1-ab} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Для сечения образования лептонов фотонами разной спиральности имеем

$$\sigma_a^{\pm\mp}(\gamma\gamma \rightarrow l^+l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{5-b^4}{2} \ln \frac{1+ab}{1-ab} - ab \left(2 + \frac{(1-b^2)(3-b^2)}{1-a^2b^2} \right) \right), \quad (61)$$

где b — скорость лептона.

Напомним, что эти сечения надо усреднить по спектральным светимостям, которые, в свою очередь, зависят от механизма конверсии. Численно для энергии $500 < \sqrt{s}$ (ГэВ) < 1500 и $a = 0,9$ сечения образования W^+W^- -пар фотонами одинаковой спиральности имеют порядок $100 \text{ пб} = 10^{-34} \text{ см}^2$, тогда как для случая разных спиральностей эта величина изменяется от 70 до 10 пб. Эти сечения представлены на рис. 13. Отметим, что сечение образования пары $t\bar{t}$ -кварков в этих условиях меняется от 1 до 0,01 пб.

Отношение сечений этих процессов $R_{l/W}$ в случае частично поляризованных пучков:

$$R_{l/W} = \frac{\sigma_a(\gamma\gamma \rightarrow l^+l^-)}{\sigma_a(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-)} = \frac{\frac{1-P_1P_2}{2} \sigma_a^{\pm\mp}(\gamma\gamma \rightarrow l^+l^-)}{\frac{1+P_1P_2}{2} \sigma_a^{\pm\pm}(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-) + \frac{1-P_1P_2}{2} \sigma_a^{\pm\mp}(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-)},$$

где P_1, P_2 — степени циркулярной поляризации фотонов, может быть использовано для определения P_1, P_2 . Для определения светимости можно использовать скорость счета лептонных пар и соответствующее сечение (числитель выражения $R_{l/W}$) или же скорость счета заряженных бозонов и сечение,

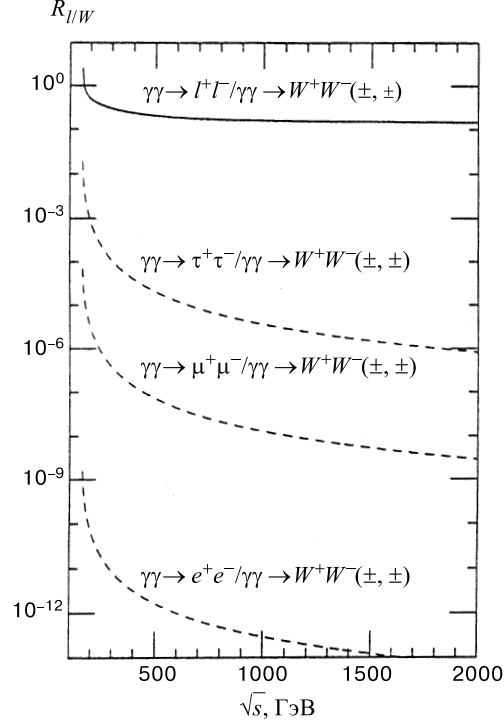


Рис. 13. Энергетическая зависимость (в СЦМ) отношения сечений рождения пары лептонов и W -бозонов в $\gamma\gamma$ -столкновениях [81]. Штриховая (сплошная) линия отвечает одинаковому (противоположному) знаку спиральности фотона. Масса бозона выбрана равной $W = 80$ ГэВ. Угол обрезания $|\cos \vartheta| < 0,9$

приведенное в знаменателе выражения для $R_{l/W}$. Причем соответствующие величины должны быть равны.

Авторы благодарны А. Белькову, И. Иванову и М. Юркову за стимулирующее влияние и участие в начальной стадии написания настоящего обзора, а также В. Тельнову, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний, В. Сербо и И. Гинзбургу за дискуссии, Б. Шайхатденову за помощь в оформлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zeroth-Order Design Report for the Next Linear Collider. LBNL-PUB-5424 — SLAC Report 474, May 1996;
Kuhlman S. et al. — Physics and Technology of the Next Linear Collider — SLAC-Report 485, hep-ex/9605011.

2. Conceptual Design of a 500 GeV Electron Positron Linear Collider with Integrated X-Ray Laser Facility. — DESY 79-048, ECFA-97-182;
Brinkmann R. et al. — hep-ex/9707017;
Brinkmann R. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1998, v.A406, p.13.
3. JLC Design Study — KEK-REPORT-97-1, April 1997;
Watanabe I. et al. — KEK-Report 97-17; JLC-I green book, KEK Report 92-16, 1992.
4. **Budnev V.M., Ginzburg I.F., Meledin G.V., Serbo V.G.** — Phys. Rep., 1975, v.C15, p.181;
Исаев П.С. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, с.82;
Morgan D. et al. — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 1994, v.20, p.1.
5. **Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Тельнов В.И.** — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.514; Препринт 81-50 ИЯФ, Новосибирск 1981, 9 с.
6. **Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Тельнов В.И.** — Препринт 81-102 ИЯФ, Новосибирск 1981; Препринт 81-92 ИЯФ, Новосибирск 1981; ЯФ, 1983, т.38, с.372; Nucl. Instr. Meth. 1983, v.205, p.47.
7. **Ginzburg I., Kotkin G., Panfil S., Serbo V., Telnov V.** — Nucl. Instr. Meth., 1984, v.219, p.5; Препринт 82-160 ИЯФ, Новосибирск 1982.
8. **Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Панфил С.Л., Сербо В.Г.** — ЯФ, 1983, т.38, с.1021.
9. **Akerlof C.** — Preprint UMHT 81-59, Univ. of Michigan, 1981.
10. **Скринский А.Н.** — УФН, 1982, т.138, с.3;
Балакин В., Скринский А.Н. — Препринт 81-129 ИЯФ, Новосибирск, 1981.
11. **Кондратенко А.М., Пахтусова Е.В., Салдин Е.Л.** — Препринт ИЯФ 81-130, 1981, Новосибирск; ДАН СССР, 1982, т.264, с.849.
12. **Chen P., Telnov V.** — Phys. Rev. Letters, 1989, v.63, p.1796.
13. **Telnov V.I.** — Nucl. Instr. Meth., 1990, v.A294, p.72.
14. **Telnov V.I.** — Nucl. Instr. Meth., 1995, v.A355, p.3.
15. **Telnov V.I.** — Proc. of Int. Vavilov's Conference on Nonlinear Optics, Novosibirsk, June 24-26, 1997; Budker INP 97-71, eprint hep-physics/9710014.
16. **Telnov V.I.** — Proc. of ITP Symp. on Future High Energy Colliders, Santa Barbara, USA, Oct. 21-25, 1996; AIP Conf. Proc. No 397, ed. Z.Parza, (AIP. New York 1997), p.259-273; Budker INP 97-47, eprint: hep-physics/9706003
17. **Telnov V.I.** — SLAC-PUB 7337, Budker INP 96-78, hep-ex/9610008; Phys. Rev. Lett. 1997, v.78, p.4757; erratum ibid. 1998, v.80, p.2747.
18. **Borden D.L., Bauer D.A., Caldwell D.O.** — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.4018.
19. Proc. of Workshop on $\gamma\gamma$ -Colliders, Berkeley CA, USA, 1994. Nucl. Instr. Meth., 1995, v.A355, p.1.
20. **Loew G. et al.** — Int. Linear Collider Tech. Rev. Com. Rep., SLAC-Rep-471, 1996.
21. **Telnov V.I.** — Proc. of 2-nd Int. Workshop on e^+e^- Inter. at TeV Energies. Santa Cruz, USA, Sept. 22-24, 1997; Int. J. Mod. Phys. 1998, v.A13, p.2399; Preprint hep-ex/9802003.
22. **Арутюнян Ф.Р., Туманян В.А.** — ЖЭТФ, 1963, т.44, с.2100; Phys. Lett., 1963, v.4, p.176;
Milburn R. H. — Phys. Rev. Lett., 1963, v.10, p.75.
23. **Kulikov O.F. et al.** — Phys. Lett., 1964, v.13, p.344;
Bemporad C. et al. — Phys. Rev. 1965, v.B138, p.1546;
Ballam J. et al. — Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.498;
Federici L. et al. — Nuovo Cim., 1980, v.B59, p.247;
Babusci D. et al. — Phys. Lett., 1995, v.B355, p.1.

24. **Lipps F.W., Tolhoek H.A.** — *Physica*, 1954, v.20, p.395.
25. **McMaster W.H.** — *Rev. Mod. Phys.*, 1961, v.33, p.8.
26. **Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.** — *Квантовая электродинамика*. М.: Наука, 1969.
27. **Коткин Г.Л., Политыко С.И., Сербо В.Г.** — *ЯФ*, 1996, т.59, с.2229; *Nucl. Instr. Meth.*, 1998, v.A 405, p.30.
28. **Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Политыко С.И.** — *ЯФ*, 1983, т.37, с.368; *ЯФ*, 1984, т.40, с.1495.
29. **Никишов А.И., Ритус В.И.** — *ЖЭТФ*, 1964, т.46, с.776; *ЖЭТФ*, 1964, т.46, с.1768; *ЖЭТФ*, 1964, т.47, с.1130; *ЖЭТФ*, 1967, т.52, с.1707;
Нарожный Н.Б., Никишов А.И., Ритус В.И. — *ЖЭТФ*, 1964, т.47, с.931.
30. **Никишов А.И., Ритус В.И.** — *Труды ФИАН*, 1979, т.111.
31. **Bula C., McDonald K.T. et al. (E-144 Collaboration)** — *SLAC-PUB-7220*; *SLAC-PUB-7221*, 1996; *SLAC-PUB-7564*, 1997; *Phys. Rev. Lett.*, 1996, v.76, p.3116.
32. **Галынский М.В., Сикач С.М.** — *ЖЭТФ*, 1992, т.101, с.828; *ЭЧАЯ*, 1998, т.29, с.1133.
33. **Tsai Yu.S.** — *Phys. Rev.*, 1993, v.D48, p.96.
34. **Yokoza K.** — *CAIN2b*, Code simulation for JLC, Users Manual.
35. **Telnov V.** — *Proc. XII Int. Conf. on High Energy Accel.*, Sept. 7–12, 1998, Dubna, Russia; KEK Preprint 98-163, hep-ex/9810019.
36. **ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaborations** — *CERN-EP/98-046*.
37. **Field J.H.** — *UGVA-DPNC 1988/10-180* October 1998; hep-ph/9810288.
38. **Brodsky S., Zerwas P.** — *Nucl. Instr. Meth. in Phys. Research*, 1995, v.A355, p.19;
Kushnirenko E., Likhoded A., Sery A. — *Nucl. Instr. Meth. in Phys. Research*, 1995, v.A355, p.111.
39. **Ellis J. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1976, v.B106, p.292;
Djonadi A. et al. — *Phys. Lett.*, 1991, v.B257, p.187;
Melnikov K. et al. — *Phys. Lett.*, 1993, v.B312, p.179.
40. **Gunion J., Haber H.** — *Phys. Rev.*, 1993, v.D48, p.5109.
41. **Jikija G.** — *Phys. Lett.*, 1993, v.B298, p.224; *Nucl. Phys.*, 1993, v.B405, p.24;
Berger M. — *Phys. Rev.*, 1993, v.D48, p.5121.
42. **Yehudai E.** — *Phys. Rev.*, 1990, v.D41, p.33;
Tikhonin F.F. — *Yad. Fiz.*, 1986, v.44, p.452;
Borisov G.B., Larin V.N., Tikhonin F.F. — *Yad. Fiz.*, 1989, v.49, p.1211.
43. **Hagiwara K., Peccei R.D. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1987, v.B282, p.253.
44. **Yehudai E.** — *Phys. Rev.*, 1991, v.D44, p.3434.
45. **Tupper G., Samuel M.A.** — *Phys. Rev.*, 1981, v.D23, p.1933;
Ginzburg I.F. — *Nucl. Phys.*, 1983, v.B228, p.285.
46. **Boudjema F.** — In: *Proc. "e⁺e⁻ Collisions at 500 GeV, the Physics Potential"*, ed. P.Zerwas, DESY 93-123C, p.177;
Belanger G., Boudjema F. — *ibid*, p.207.
47. **Belanger G., Boudjema F.** — *Phys. Lett.*, 1992, v.B288, p.210.
48. **Choi S.Y., Schrempp F.** — *Phys. Lett.*, 1991, v.B272, p.149;
Dawson S., Likhoded A. et al. — hep-ph/9610299.

49. **Bajc B.** — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.1903;
Dicus A., Kao C. — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.1265.
50. **Belanger G., Boudjema F.** — Phys. Lett., 1992, vol.B288, p.201.
51. **Barger V., Han T., Phillips R.J.N.** — Phys. Rev., 1989, v.D39, p.146.
52. **Grosse-Knetter C., Schidknecht D.** — Phys. Lett., 1993, v.B302, p.309.
53. **Eboli O.J.P., Gonzaler-Garcia H.C., Novaes S.F.** — Nucl. Phys., 1994, v.B411, p.381.
54. **Cheung R. et al.** — Preprint UCD-94-6, 1994.
55. **Jikia G., Tkabladze A.** — Phys. Lett., 1994, v.B332, p.441; 1994, v.B323, p.453.
56. **Иоффе Б.Л., Липатов Л.Н., Хозе В.А.** — Глубоконеупругие процессы, М.: Энергоатомиздат, 1983;
Walsh T.F., Zerwas P.M. — Phys. Lett., 1973, v.B44, p.196.
57. **Kessler P.** — "Photon 95", Sheffield, U.K., April 1995.
58. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1977, v.B120, p.189;
Fontannaz M., Pilon E. — Phys. Rev., 1992, v.D45, p.382;
Gück M. et al. — Phys. Rev., 1992, v.D45, p.3986.
59. **Sasaki T. et al.** — Phys. Lett., 1990, v.B252, p.491.
60. **Laenen E. et al.** — Fermilab-pub-93-240-T.
61. **Kuraev E.A., Lipatov L.N., Fadin V.S.** — Sov. Phys. JETP, 1977, v.45, p.199;
Balitsky Yu.Yu., Lipatov L.N. — Sov. J. Nucl. Phys., 1978, v.28, p.822; JETP Lett., 1979, v.30, p.355;
Bartels J. et al. — Phys. Lett., 1996, v.B389, p.742;
Brodsky S.J. et al. — Phys. Rev., 1997, v.D56, p.6957.
62. **Ginzburg I.F., Ivanov D.Yu.** — Nucl. Phys., 1992, v.B388, p.376.
63. **Chernyak V.L., Zhitnitsky I.R.** — Phys. Rep., 1984, v.112, p.1783.
64. **Ginzburg I.F.** — Proc. 2nd Int. Workshop, Waikoloa, Hawaii, 1993.
65. **Gauron P., Lipatov L.N., Nicolescu B.** — Phys. Lett., 1991, v.B260, p.407; Perturbative QCD, ed. A.Mueller, Singapore, 1989.
66. **Foreshow J.R., Ryskin M.G.** — Z. Phys., 1995, v.C68, p.137;
Brodsky S. et al. — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.3134;
Kopeliovich B. et al. — Phys. Lett., 1993, v.B309, p.179.
67. **Dress M. et al.** — DESY 92-169, 1992.
68. **Bigi I.L. et al.** — SLAC-PUB 5951, 1992.
69. **Drell S.D., Hearn A.C.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.16, p.908;
Герасимов С. — ЯФ, 1965, т.2, с.598.
70. **Kim K., Tsai Y.S.** — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.3710;
Tsai Y.S. et al. — Phys. Rev., 1975, v.D11, p.3537.
71. **Brodsky S., Schmidt I.** — Phys. Lett., 1955, v.B351, p.344.
72. **Schwinger J.** — Proc. Nath. Acad. Sci. USA, 1975, v.72, p.1.
73. **Peterson C. et al.** — Nucl. Phys., 1980, v.B174, p.424.
74. **Efremov A.V., Teryaev O.V.** — Phys. Lett., 1990, v.B240, p.200;
Shore G.M., Veneziano G. — Mod. Phys. Lett., 1993, v.A8, p.373.
75. **Kuraev E.A., Serbo V.G., Schiller A.** — Nucl. Phys., 1985, v.B256, p.189; Препринт 82-107 ИЯФ, Новосибирск, 1982.

- 76. Зима В.Г., Меренков Н.П. — ЯФ, 1976, т.24, с.998.
- 77. Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A., Kuraev E.A. — Phys. Rep., 1981, v.78, p.293.
- 78. Cheng H., Wu T.T. — Phys. Rev., 1970, v.D1, p.3414;
Lipatov L.N., Frolov G.V. — Sov. J. Nucl. Phys., 1971, v.13, p.333.
- 79. Cheng H., Wu T.T. — Phys. Rev., 1970, v.D2, p.2103.
- 80. Арбузов А., Кураев Э.А. и др. — ЯФ, 1996, т.59, с.878.
- 81. Yasui Y. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1993, v.A335, p.385.

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ СВЕТОВОДОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ И В УСКОРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Н.М.Никитюк, Ю.И.Романов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрено современное состояние волоконно-оптических методов передачи информации в экспериментах по физике высоких энергий и в ускорительной технике. Описаны параметры таких элементов оптоэлектроники, как оптическое волокно, передатчики и приемники оптического излучения. Приведены данные, характеризующие изменения параметров оптоэлектроники в условиях жесткой радиации.

Рассмотрены примеры успешного применения волоконно-оптических систем передачи цифровой и аналоговой информации для контроля и управления ионными источниками линейных ускорителей на ускорительном комплексе ЛВЭ ОИЯИ.

Modern state of technology of the optical fibers for transmission of information in high-energy physics experiments and in accelerator technique are considered. Characteristics of the optoelectronic components such as fibers, transmitters and receivers are given. The data, which describe the change of characteristics of the optoelectronic components depending on irradiation typical for the experiments at LHC are given.

Examples of successful use of digital and analog fiber transmission for data control in ion sources of the linear accelerator of the Laboratory of High Energy Physics are considered.

*К 40-летию ускорения протонов
на синхрофазотроне ОИЯИ*

ВВЕДЕНИЕ

Крупные успехи в разработке оптоэлектронных и чисто оптических логических элементов и средств связи создали предпосылки для построения оптических процессоров, детекторов нового типа и оптоэлектронных устройств регистрации и обработки физической информации. Использование в физических экспериментах оптических приборов и линий передачи дает много преимуществ, в частности, отпадает необходимость в цепях развязки, не требуется земляная шина, резко уменьшаются размеры, вес и стоимость кана-

лов передачи. Кроме того, появляется возможность регистрировать непосредственно «образы» событий и существенно повышается точность регистрации событий.

В настоящее время сложилось несколько направлений в экспериментах по физике высоких энергий, в которых используются волоконные оптические световоды (ВОС) и их модификации. Применение сцинтилляционных ВОС в детекторах элементарных частиц рассмотрено в обзорах [1,2]. Данный обзор посвящен вопросам применения ВОС для передачи данных в экспериментах по физике высоких энергий и в ускорительной технике. Для построения волоконно-оптической линии связи (ВОЛС) помимо ВОС необходимы также приемопередающие и другие оптоэлементы, характеристики которых рассмотрены в данном обзоре.

Волоконно-оптические линии связи представляют собой одно из наиболее перспективных направлений в современной оптоэлектронике. Обычные кварцевые ВОС применяются для передачи световых сигналов от сцинтилляторов к ФЭУ, которые располагаются в таком месте, чтобы не сказывалось влияние магнитного поля на их характеристики. Длина таких связей может находиться в широких пределах. В спектрометре [3], который был разработан еще в конце 70-х гг., сцинтилляционный годоскоп находится на расстоянии 1–1,5 м от ФЭУ. Другим важным направлением в использовании ВОЛС является ускорительная техника. В 1966 г. была теоретически обоснована возможность реализации ВОЛС [4], и в 1970 г. впервые получено необходимое кварцевое волокно [5]. Опытные образцы связи, работающие на длине волны 0,85 мкм, были созданы в 1975 г. [6].

Обзор состоит из введения, девяти разделов и заключения. В первом разделе приведены основные характеристики ВОС. Второй раздел обзора посвящен таким оптическим элементам, как светодиоды, лазерные диоды и фотодетекторы. В третьем разделе обзора даны характеристики компонентов, определяющих надежность ВОЛС. В четвертом разделе описаны конструкции и способы изготовления постоянных и разъемных соединений. Применению микролинз в системах ВОЛС посвящен пятый раздел обзора. Массовое применение ВОЛС в будущих экспериментах на ЛНС описано в шестом разделе обзора. В седьмом разделе приведены стандарты, разработанные для ВОЛС. В последних двух разделах рассматриваются вопросы разработки и использования ВОЛС на ускорительном комплексе ЛВЭ ОИЯИ.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОС

В [7] отмечаются следующие положительные качества ВОС:

- широкая полоса пропускания, что является следствием высокой частоты передачи;

- малые размеры;
- слабое затухание сигналов;
- отсутствие необходимости в использовании земляной шины;
- практическое отсутствие влияния электромагнитного поля и взаимного влияния отдельных ВОС друг на друга;
- диэлектрические связи между передатчиками и приемниками;
- возможность работы в мультимодовом режиме и др.

К недостаткам можно отнести:

- необходимость в точном согласовании разъемов и ВОС;
- хрупкость ВОС и сложность ремонта магистральных связей;
- трудности с передачами аналоговых сигналов с высокой точностью из-за нелинейности характеристик ВОС и электрооптических приемопередатчиков.

Типичный канал передачи данных состоит из электрооптического преобразователя (ЭОП), ВОЛС и обратного преобразователя световых сигналов в электрические.

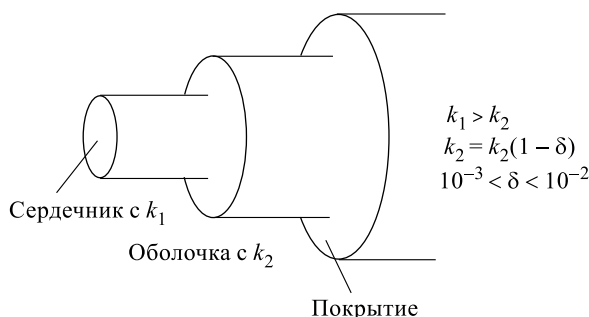


Рис. 1. Структура кремниевого ВОС с пошаговым индексом

На рис. 1 приведена схема стеклянного ВОС с пошаговым индексом [7]. Сердечник выполнен из кремниевого стекла с коэффициентом отражения k_1 , который окружен стеклянной оболочкой с меньшим коэффициентом отражения k_2 . Эти два наполнения окружены внешней оболочкой. Процесс распространения светового сигнала вдоль ВОС иллюстрируется с помощью рис. 2. Угол полного отражения ϕ определяется из выражения

$$\sin \phi_{\max} = k_1 \cos \phi_c = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = n_1(2\delta)^{1/2},$$

где δ — константа.

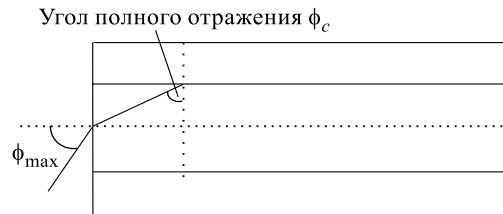


Рис. 2. Распространение светового луча в кремниевом ВОС

Полное внутреннее отражение имеет место на границе с внешней оболочкой, и поэтому световой сигнал распространяется вдоль центрального волокна. Величина $\sin \phi_{\max}$ является важным параметром ВОС. При большом значении угла ϕ легче вводить световой сигнал в торец волокна. Кроме того, имеет место соотношение, позволяющее вычислять «нормализованную частоту» f_H :

$$f_H = 2\pi(a/\lambda)(k_1^2 - k_2^2). \quad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что «нормализованная частота» f_H определяет поведение мод. Так, при $0 \leq f_H \leq 2,405$ возможна только одна мода передачи. При больших значениях f_H имеет место мультимодовая система передачи. Для одномодовых ВОС с пошаговым индексом $f_H < 2,405$, $2a = 10$ мкм и $\delta = 0,001 \div 0,01$. При $f > 2,405$ вдоль ВОС можно передавать несколько мод. Такие волокна называются мультимодовыми ВОС с пошаговым индексом. Количество передаваемых мод m определяется формулой

$$m = f^2/2.$$

Так, для ВОС при $a = 25$ мкм, $\delta = 0,01$, используемого при $\lambda = 840$ нм, $f = 39$ и $m = 760$ [7].

Важным параметром волоконного световода является широкополосность (Ш), которая определяется как произведение полосы пропускания на его длину. Она однозначно связана с дисперсией (расплыванием, расширением) оптического сигнала. В многомодовых световодах моды ($N = (2 \div 6)10^3$) распространяются с различными групповыми скоростями, зависящими от угла возбуждения, и достигают фотоприемника в разные моменты времени. Это и есть межмодовая дисперсия. Внутримодовая дисперсия характерна для одномодовых ВОС. В многомодовых световодах межмодовая дисперсия значительно превышает внутримодовую. В них существенно ослаблена зависимость дисперсии от ширины спектра оптического сигнала [8]. Для кварцевого многомодового ВОС ($k_2 = 1,46$; числовая апертура $NA = 0,2 \div 0,3$):

$$Ш = 17,0 \div 38,0 \text{ МГц} \cdot \text{км}.$$

Для передачи аналоговых сигналов могут использоваться высокоапертурные градиентные ВОС [9] из поликомпонентного стекла, у которых полная дисперсия равна 2,5 нс/км и затухание составляет 6 дБ/км на длине волны 0,85 мкм. Такие световоды по сравнению со ступенчатыми обладают существенно меньшими прямыми потерями и потерями в микроизгибах. Они эффективны в технике физического эксперимента для управления установками сбора и передачи данных и в локальных сетях.

Как известно, чем больше апертура и диаметр световодной жилы, при сопоставимых потерях, тем ниже требования к точности и конструкции элементов сопряжения световода с источником и приемником излучения. В этой связи представляет интерес сообщение [10] о разработке ВОС с высокой числовой апертурой ($0,5 \div 0,56$) типа «поликомпонентное стекло-полимер» с потерями 50 дБ/км на длине волны 0,85 мкм. Следует отметить, что различные добавки в кварцевый материал сердцевины, как правило, ухудшают радиационную стойкость, а полимерные оболочки снижают температурно-фазовую стабильность и морозостойкость световодов. Минимальный температурный коэффициент (параметр, связанный с длиной ВОС и показателем преломления сердцевины, изменяющийся при изменении окружающей температуры и других факторов) имеют кварц-кварцевые световоды, свободно уложенные в полимерную трубку с помощью упрочняющих нитей, сформированных в кабельную основу. В кварц-полимерных ВОС кварцевая сердцевина находится в сжатом состоянии, что приводит к ослаблению морозостойкости.

Мультимодовые ВОС с градиентным индексом. Данный тип ВОС позволяет передавать световые сигналы с полосой на три порядка большей, нежели ВОС с пошаговым индексом. Однако такое качество достигается путем усложнения технологии изготовления оптического волокна. Суть данной технологии заключается в том, что коэффициент полного отражения ВОС является переменной величиной в направлении радиуса, и основная проблема состоит в точности изготовления (более детально см. [7]).

Третьим существенным параметром ВОС является величина затухания, которая измеряется в дБ/км:

$$P = 10 \log_{10}(P_i/P_0),$$

где P_i — входная мощность и P_0 — выходная мощность на одном километре ВОС. Промышленностью освоены и изготавливаются многомодовые ВОС для ближнего инфракрасного диапазона $0,8 \div 1,6$ мкм со ступенчатым и градиентным профилями показателя преломления по сечению, а также одномодовые ВОС без сохранения поляризации. На основе кварцевых стекол серийно производятся ВОС, которые имеют минимальные потери $0,2 \div 0,5$ дБ/км на длине волны $1,2 \div 1,6$ мкм и до $1,0 \div 5,0$ дБ/км на длине волны $0,8 \div 0,9$ мкм, а также максимальную механическую прочность до 500 кг/мкм [12].

На рис. 3 приведены наиболее известные коды, которые применяются для передачи цифровых сигналов. Наиболее надежным является манчестерский код, хотя он имеет вдвое меньшую скорость передачи по сравнению с другими кодами.

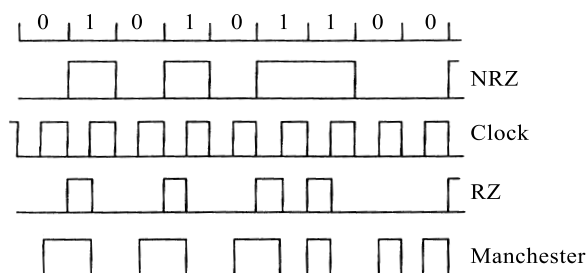


Рис. 3. Коды, применяемые в ВОЛС. «Clock» — тактовые сигналы

Радиационная стойкость оптических элементов. Для экспериментов по физике высоких энергий требуется создание радиационно стойких электронных и оптических элементов и систем. Эти требования касаются прежде всего тех экспериментальных установок, которые будут использоваться на ЛНС. Как оптоэлектронная, так и обычная регистрирующая электроника будут располагаться непосредственно на детекторах вблизи ионопровода, где плотность адронов и нейтронов может составлять 10^{14} адронов и столько же нейтронов на 1 см^2 при дозе 10^5 Гр в течение 10 лет. В ряде работ показано, что имеет место ухудшение характеристик оптоэлектронных элементов под воздействием больших доз радиации. Под воздействием радиации ВОС темнеют, и, как следствие этого, повышается величина затухания. Особенно тщательно исследуются светодиоды, используемые в качестве передатчиков света. Поэтому в экспериментах по физике высоких энергий возникает проблема создания радиационно стойких оптических волокон и ЭОП (см. ниже). Для измерения радиационных и других повреждений используются специальные приборы — рефлектометры [11].

2. ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ДЕТЕКТОРЫ

Широкое применение в системах ВОЛС получили полупроводниковые источники света на гетероструктурах [13]. По принципу действия и конструкторскому исполнению они делятся на три группы: излучатели светодиодные поверхностные и торцевые; излучатели суперлюминесцентные (по ГОСТ [14,15]) — сверхлюминесцентные) торцевые; излучатели лазерные.

Светодиоды [14, 16] широко применяются в системах ВОЛС. Они привлекательны малыми шумами, высокой линейностью ватт-амперной характеристики, малой деградацией свойств, слабой температурной нестабильностью, простотой изготовления и использования, большим сроком службы. Однако из-за широкой диаграммы направленности у них крайне мала эффективность ввода излучения в световод [17], а с учетом соотношения размеров площадки излучения и торца световода она еще меньше [18]. Для ее повышения используют согласующие элементы [18–20], например, полусферические микролинзы, выполненные интегрально с волокном путем разогрева световода в плазме электрического разряда [21, 22].

В торцевых светодиодах полосок (активный слой) выполняется очень тонким (0,05 мкм), а торцы покрываются просветляющим покрытием. При высоких плотностях тока в тонком полоске спонтанное излучение (характерное для поверхностных излучателей) усиливается, вследствие чего возникает так называемая суперлюминесценция, которая сопровождается значительно более узкой диаграммой направленности в дальней зоне и, следовательно, большей эффективностью ввода в световод.

Лазерные диоды имеют ряд преимуществ перед светодиодами: вводится больше света, что позволяет создавать линии передачи с меньшим числом промежуточных усилителей; они имеют гораздо меньшую спектральную ширину и более высокое быстродействие. Для большинства лазерных диодов характерно излучение мощности порядка нескольких милливатт с поляризацией параллельно активному слою (ТЕ-мода) и диаграммой направленности ($20 \times 40^\circ$), соответственно, в горизонтальной и вертикальной плоскостях. КПД диодов на длине волны 1,3 мкм может превышать 40% [20]. Эффективность ввода лазерного излучения можно повысить с помощью согласующих линз до 70%. К недостаткам лазерных диодов относятся: высокая стоимость; более сложный модулятор и т.д. Кроме того, лазерные диоды имеют наименьший срок службы среди полупроводниковых излучателей.

Нелинейные эффекты в активной области инжекционных лазеров [23–25] проявляются в виде нелинейности и гистерезиса ватт-амперной характеристики, изменения угловой диаграммы направленности и ближнего поля излучения при изменении прямого тока. В результате этих явлений эффективность ввода излучения в световод сильно зависит от режима работы лазера. Основными причинами такой зависимости, сдерживающей их широкое внедрение в физический эксперимент, являются изменение параметров волновода в плоскости *p-n*-перехода из-за неравномерного разогрева активной области и, как следствие, изменение модового состава излучения, избыточный шум [24], скачки и динамическое расширение спектра [25], рост релаксационных колебаний. Очевидно, что такие нестабильности могут сильно влиять на характеристики полупроводникового лазера и эффективность ввода излучения в многомодовый и, особенно, одномодовый световоды. Применительно к ана-

логовым системам передачи [26–29] названные выше трудности вынуждают разработчиков отдавать предпочтение лазерам с широким спектром генерации или светодиодам. Для большинства лазерных диодов характерно излучение мощности порядка нескольких милливатт с поляризацией параллельно активному слою.

Фотодетекторы. Фотодетекторы, используемые для световодных систем, имеют определенные особенности: высокую чувствительность S при малой инерционности τ . Этим альтернативным требованиям в диапазоне $\lambda = 0,8 \div 0,9$ мкм удовлетворяют обычные $p-n$ ($S = 0,2 \div 0,3$ А/Вт при $\tau > 10^{-5} \div 10^{-6}$ с), $p-i-n$ ($S = 0,35 \div 0,6$ А/Вт при $\tau < 10^{-8} \div 10^{-9}$ с) и лавинные (до 0,6 А/Вт при $\tau > 10^{-9} \div 10^{-10}$ с) кремниевые фотодиоды. Квантовый выход $p-i-n$ -фотодиодов составляет 85% при скорости передачи информации до 1 Гбит/с [17, 30]. Лавинные кремниевые фотодиоды работают при обратных напряжениях $V = 20 \div 400$ В (оптимальное значение соответствует максимальной чувствительности с учетом коэффициента лавинного умножения при минимальном шуме [31–33]). В спектральном диапазоне $1,06 \div 1,6$ мкм применяют германиевые лавинные фотодиоды. Так, освоенные промышленностью ЛФД-2 имеют $S = 0,7$ А/Вт на длине волны $\lambda = 1,3$ мкм, при $\tau =$ до 10^{-10} и внутреннем усилении $10 \div 30$ при $16 \div 25$ В.

Дальнейшее совершенствование фотоприемников для систем ВОЛС связано с созданием гибридных схем (включая усилитель), позволяющих резко поднять чувствительность и быстродействие фотоприемного устройства за счет оптимизации его по шумовым характеристикам, темновому току, паразитным емкостям. Сравнительный анализ различных вариантов схем включения фотоприемников в электронный тракт приведен в работах [34, 35].

Промышленностью освоены и изготавливаются многомодовые световоды для ближнего инфракрасного диапазона $0,8 \div 0,6$ мкм со ступенчатым градиентным профилем показателя преломления по сечению, а также одномодовые светодиоды без сохранения поляризации.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОНЕНТОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НАДЕЖНОСТЬ ВОЛС

Малые диаметры ВОС порождают проблемы прецизионной стыковки ВОС между собой и другими элементами. Для этой цели применяются специальные приборы и приспособления. В основном используются два метода стыковки: сварка и склеивание с помощью эпоксидной смолы.

Вопросы надежности. На надежность работы ВОЛС [36] оказывают влияние параметры и характеристики излучателей, оптических соединителей, оптического волокна и фотоприемника. Для получения оптимального согласования излучателя с оптическим волокном необходимо, чтобы излучатель

отвечал ряду требований. Это прежде всего малая излучающая площадка, соизмеримая с диаметром волокна, что обеспечивает высокую энергетическую яркость источника; длина волны излучателя, соответствующая минимальному поглощению света при его прохождении по волокну; возможность простой стыковки излучателя с волокном; сохранение излучающих характеристик в заданном диапазоне температур и сохраняемость изделия при воздействии различных механических факторов. Основным параметром при стыковке ввода излучения является

$$\mu = \mu_S \mu_\phi,$$

где $\mu_S = S_B/S_n$ — коэффициент ввода излучения по площади;

$\mu_\phi = \int_0^{\alpha_{кр}} Q_v(\alpha) \sin \alpha d\alpha / \int_0^{\pi/2} Q_v(\alpha) \sin \alpha d\alpha$ — коэффициент ввода излучения по углу; S_B — площадь поперечного сечения волокна; S_n — площадь излучающей площадки диода; $Q_v(\alpha)$ — световая энергия; α — угол.

Мощность излучения, введенного в волокно, сильно зависит от числовой апертуры волокна:

$$P_c = F_y \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{S_{сц}}{S_{ист}} (NA)^2 P_{ист},$$

где P_c — мощность излучения, вводимая в световод; $P_{ист}$ — мощность, излучаемая источником; F_y — коэффициент заполнения; $S_{сц}$ — площадь сердцевины волоконного световода; $S_{ист}$ — активная площадь источника; n — показатель диаграммы излучения; $NA = n \sin \alpha = (n_2^2 - n_1^2)^{1/2}$ — числовая апертура; n_1 — коэффициент преломления оболочки волокна; n_2 — коэффициент преломления сердцевины волокна. Значения NA обычно лежат в пределах $0,15 \div 0,50$. С увеличением NA растёт дисперсия для световодов, что ограничивает практически достижимые значения эффективности ввода излучения при использовании максимально возможных значений n .

Показатель n для светодиодов равен единице, а для лазеров и СИД со встроенными линзами n может принимать значение $2 \div 4$, поскольку инжекционные лазеры имеют суженные диаграммы направленности. Повысить коэффициент ввода излучения СИД можно также путем изменения геометрии излучателя. Выходная мощность излучателя сосредоточена в пучке с угловыми размерами $120^\circ \times 40^\circ$ (для диодов с активной краевой поверхностью) или соответствует ламбертовской диаграмме направленности (для диодов с активной плоской поверхностью). Потери на ввод излучения в оптическое волокно достигают значительной величины, например, для оптического волокна с числовой апертурой 0,14 потери составляют около 14 дБ для излучателей с вводом излучения вдоль p - n -перехода (для краевых излучателей) и 19 дБ для поверхностных излучателей. Краевые излучатели позволяют получать более

высокую эффективность сопряжения с волокном, чем диоды с активной плоской поверхностью, однако меньшая эффективность сопряжения с волокном с избытком компенсируется их более высокой мощностью излучения. На потери в ВОЛС существенное влияние оказывают оптические соединители [37]. Эти потери обусловлены допусками на изготовление оптического кабеля (диаметр, апертура, степень однородности материала), точностью выравнивания сердцевины кабеля, подготовкой стыковочного конца кабеля. Потери, обусловленные отражением от границы между волокном и воздухом, обычно не превышают 0,3 дБ. Потери в оптическом волокне существенно зависят от условий эксплуатации. При прокладке оптического кабеля необходимо учитывать его механическую прочность на разрыв и критический радиус изгиба кабеля.

4. РАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Постоянные (неразъемные) оптические соединения. В волоконно-оптических линиях связи важную роль играют соединительные элементы, обеспечивающие быстрое и надежное сращивание отрезков ВОЛС с малыми потерями. Соединение толстых жгутов (диаметром около 0,5 мкм и более) производится встык с применением юстировочных втулок. Эта процедура не представляет значительной трудности, так как необходимая величина механического допуска (0,1 мкм) легко обеспечивается стандартной аппаратурой для механической обработки. При сочленении концы в оптических соединителях не должны соприкасаться друг с другом, иначе при повторных соединениях, вибрациях или ударах будут возникать сколы и царапины, снижающие эффективность связи. Однако зазор между торцами не должен быть слишком большим, чтобы связь не уменьшалась из-за дифракционной расходимости. Так, для обеспечения дифракционных потерь не выше 0,2 дБ расстояние между торцами не должно превышать 10% диаметра сердцевины жгута или моноволокна, что для волокна диаметром 1 мкм составляет 100 мкм, а для моноволокна с диаметром сердцевины 75 мкм — не менее 7 мкм. Потери при соединении жгутов, как правило, составляют $(2,5 \div 3,5)$ дБ и зависят от числа и диаметра волокон в жгуте, коэффициента заполнения (отношение общей площади сердцевины к площади сечения всего жгута) и от числовой апертуры волокон. Процесс сращивания жгутов весьма прост и состоит обычно в склейке их торцов в юстировочной втулке.

Сращивание моноволокна значительно сложнее [37, 38]. Чтобы подготовить концы волокна к соединению, необходимо удалить буферную и защитную оболочки, а также произвести насечку и скалывание волокна под нагрузкой, что обеспечивает высокое качество торцевой поверхности. Наиболее критичным параметром при соединении моноволокон является поперечная

юстировка. Небольшое поперечное смещение торцов резко увеличивает переходные потери. При сращивании моноволокон требования к допускам еще более ужесточаются. Для надежного соединения отдельных кусков кабеля применяется сварочное устройство, позволяющее сваривать оптические волокна с помощью электрической дуги. Причем свойства сварных соединений, в отличие от клеевых, не ухудшаются со временем. Кроме того, при сварке происходит самоюстировка волокон, обусловленная силами поверхностного натяжения в расплаве. Для повышения механической прочности сварного соединения выполняются следующие операции [39, 40]:

- работа проводится в перчатках и при минимальном времени разогрева волокон;
- концы волокон зачищаются не механически, а химически, путем травления покрытия в горячей серной кислоте с промывкой в ацетоне;
- захват волокон при бандаже после выполнения сварного соединения осуществляется только за покрытие.

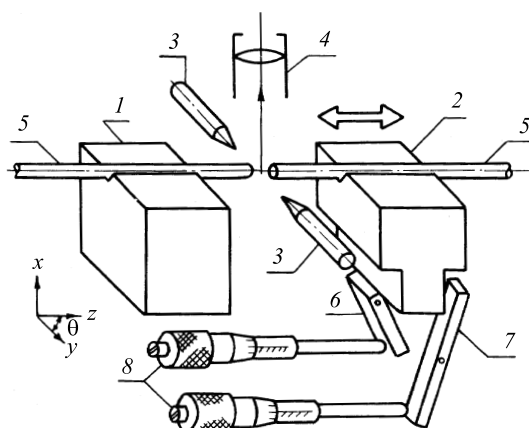


Рис. 4. Конструкция аппарата для электродуговой сварки оптических волокон: 1, 2 — фиксаторы оптического волокна; 3 — вольфрамовые электроды; 4 — микроскоп; 5 — оптическое волокно; 6 — привод вертикального перемещения электродов; 7 — привод горизонтального фиксатора оптического волокна; 8 — ручка управления приводами

Для сварки волоконно-оптического кабеля использовалась промышленная установка СВ-1 с монокулярным микроскопом «МИР-3», с механизмом фиксации и юстировки волокна. Подготовленные к сварке оптические волокна закрепляются в V-образных канавках (рис. 4) устройства фиксации световодов, причем расположение торцов волоконных световодов контролируется под микроскопом. Механизмом юстировки оптические волокна устанавливаются

вливаются соосно с точностью 1 мкм. Затем торцы сближаются на расстояние 20 мкм. Для получения чистого соединения и улучшения юстировки между торцами волоконных световодов (рис. 5) вводится капля оптически прозрачной смеси, состоящей из 50% глицерина и 50% этилового спирта. Введение капли смеси позволяет добиться оптимальной юстировки волоконных световодов по максимуму сигнала от гелий-неонового лазера. После юстировки волоконные световоды сближаются на расстояние 10 мкм, и, одновременно с испарением смеси, оплавляются торцы волокон дуговым разрядом, возникающим между вольфрамовыми электродами. Ток разряда при испарении смеси равен 8 – 10 мА, время оплавления находится в пределах $0,2 \div 0,3$ с. Эта операция позволяет избежать образования пузырьков в срезке волоконных световодов и уменьшить влияние возникающих дефектов при сколе ВОС на качество сварки. После оплавления торцы ВОС перемещаются в продольном направлении до взаимного соприкосновения и свариваются. При проведении сварки зона разогрева ВОС составляет 2 – 2,5 диаметра вдоль каждого из свариваемых волокон. Такая ширина зоны дуги получается при расстоянии между электродами $1,5 \div 1,8$ мм, угле заточки электрода 30° и токе дуги 20 мА. Время горения дуги оказывает основное влияние на прочность сварного шва. Установлено, что при длительности менее 1 с прочность соединения волокон резко снижается. Оптимальной следует считать длительность горения дуги порядка 3 с.

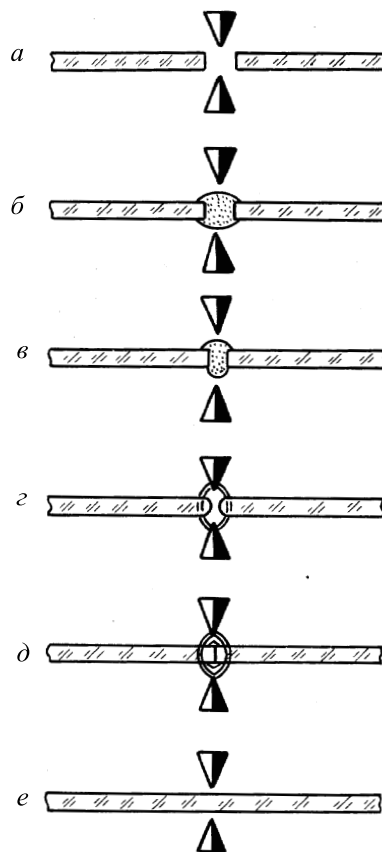


Рис. 5. Технологический процесс сварки световодов: *a* — начальное состояние; *б* — введение смеси; *в* — сближение; *г* — оплавление торцов; *д* — сближение и сварка; *е* — окончание сварки

Для увеличения механической прочности сварного соединения его усиливают. Упрочняющий элемент изготавливается из тонкой металлической пластины, из которой формируется V-образный бандажный профиль, куда укладывается сварное соединение. С помощью специального инструмента концы

упрочняющего элемента с уложенным внутри сварным соединением формируются таким образом, чтобы обеспечить надежную фиксацию с покрытием волокна. Затем это сборно-сварное соединение укладывается в полость защитной металлической муфты [39]. Последняя своими резьбовыми частями надежно фиксирует защитную оболочку кабеля, образуя, таким образом, механически прочное неразъемное соединение. Экспериментальные исследования нескольких десятков таких соединений показали, что потери в них весьма малы и составляют $0,3 \div 1,1$ дБ.

Разъемные оптические соединения. Разъемные оптические соединения (ОС) являются неотъемлемой частью любой волоконно-оптической системы передачи информации. Назначение разъемных ОС — обеспечить многократные соединения волоконно-оптических кабелей (ВОК) друг с другом и с оптоэлектронными и оптическими устройствами. В [37] описаны следующие типы ОС, используемые в системах передачи данных на ускорительном комплексе Лаборатории высоких энергий: одноволоконные и многоволоконные; «кабель — кабель» и «кабель — прибор».

Исходными данными для разработки конструкции ОС являются оптические и конструктивные характеристики моноволоконного кабеля: диаметр сердцевины и оболочек оптического волокна; угловая апертура волокна; диаграмма излучателя оптического волокна; допустимое отклонение формы сердцевины и оболочек оптического волокна от окружности; количество материала и размеры защитных оболочек оптического кабеля. Кроме того, необходимо знать характеристики источника и детектора излучения, форму, размер излучающей поверхности и размеры светочувствительной площадки и диаграммы излучения и приема. Основным элементом, определяющим качество световодной линии связи, является оптическое волокно. Передача излучения по оптическому кабелю от передатчика к приемнику сопровождается потерями. Источники потерь в соединениях могут быть разделены на две группы: потери из-за свойств волокон (собственные потери) и потери из-за дефектов во внешнем соединяющем механизме (несобственные потери). Собственные потери зависят от сечения кабеля, материала волокна, показателя преломления и изменения диаметра по длине кабеля. Допустимые изменения этих потерь определяются на стадии изготовления. Несобственные потери в основном зависят от неточного совмещения оптических осей, от расстояния и угла между стыкуемыми торцами оптического волокна и френелевских потерь на отражение от торцов световодов. Френелевские потери, которые зависят от чистоты обработки торцов световодов, сравнительно малы и колеблются в пределах $0,1 \div 0,4$ дБ.

Незначительное смещение торцов двух оптических моноволокон вызывает резкое увеличение потерь [37]. Для достижения коэффициента связи, равного 90%, угол между двумя осями оптических волокон должен быть меньше 2° , а расстояние между торцами не должно превышать 4 мкм [32].

Осевое смещение, равное половине диаметра ВОС, вызывает потери более 4 дБ. Такой же зазор между торцами ВОС дает ослабление 6 дБ. В то же время важно, чтобы подготовленные торцы оптических волокон не касались друг друга, так как в противном случае их многократное соприкосновение в результате вибрации и ударов может привести к раскалыванию и возникновению царапин на поверхности торцов ВОС и снижению эффективности оптической связи [41, 42].

Важной характеристикой ОС является угловое распределение выходящего из него светового потока — апертура, которая определяет светосообщающую и светопропускающую способность — светосилу. Особое значение эта характеристика имеет при стыковке ВОС с приемниками и источниками излучения. Диаметр соединяемых световодов определяет как размеры, так и конструкцию ОС. Способ ввода и вывода излучения также определяет многие конструктивно-технологические параметры ОС. Особенно сложным является ввод максимального количества световой энергии в оптическую линию. Некогерентность излучения и широкий угол пучка света современных световодов позволяют вводить в ВОС всего 1–2% общей мощности. Кроме того, диаметр площади излучения световодов намного больше диаметра сечения оптического волокна, что дополнительно увеличивает потери в области стыковки.

Соединение ВОС — детектор излучения, напротив, оказывается простым, так как размеры чувствительной площадки фотодиодов либо равны, либо значительно превышают диаметр сердцевины волокна, а диаграмма приема фотодиодов шире, чем диаграмма излучения ВОС. При соединении компонентов любым методом большое значение имеют качество торцевых поверхностей оптического волокна. Подготовка их к монтажу составляет еще одну серьезную проблему.

Основной показатель оптического соединителя — это вносимые потери. На долю ОС в ВОЛС приходятся основные потери при ее сопряжении. Уменьшенное затухание в ОС позволяет увеличивать строительную длину волоконно-оптического кабеля. Для обеспечения низкого уровня потерь в ВОС погрешность изготовления элементов точной юстировки волокон не должна превышать 5 мкм, что конструктивно и технологически трудно выполнить. Кроме того, ОС для ВОЛС должны обладать стойкостью к механическим воздействиям, выдерживать множество циклов сочленений — расчленений без значительных усилий со стороны оператора и без заметного ухудшения свойств, иметь дешевую и надежную конструкцию, не превосходить по размерам и массе соответствующие электрические разъемы.

Разработанные оптические соединители состоят из следующих основных узлов: кабельная часть, содержащая прецизионный наконечник, в котором размещены соединяемые оптические волокна; соединительная муфта, содержащая прецизионные элементы ориентирования и фиксации соединяемых

волокон и согласующих элементов оптоэлектронных приборов; приборная часть, содержащая прецизионный наконечник, в котором размещены согласующие элементы.

Кабельная и приборная части и соединительная муфта ОС имеют комплект арматурных деталей, обеспечивающих закрепление оболочек волоконно-оптических кабелей, а также корпусов оптоэлектронных приборов и защиту прецизионных узлов от воздействия внешних факторов при эксплуатации. В соединителях типа «кабель — прибор» соединительную муфту иногда удобнее конструктивно объединить с приборной частью разъема.

Прецизионные наконечники и элементы их ориентирования и фиксации являются наиболее сложными узлами ОС, обеспечивающими достижение заданных выходных параметров соединения: потерь оптического сигнала, переходного затухания. Для заделки волоконно-оптического кабеля использовались наконечники цилиндрической формы двух типоразмеров с диаметром 2,5 и 3,6 мм. Форма направляющего канала для наконечника с диаметром 2,5 мм приведена на рис. 6. Изгибы в канале при обработке округляются, делаются плавными, в них не должно быть выступов во избежание повреждения оптического волокна при монтаже. Наконечники выполняются из износостойких коррозионноустойчивых материалов (в основном из хромосодержащих нержавеющей сталей). Технологические процессы, применяемые при резке кабеля и

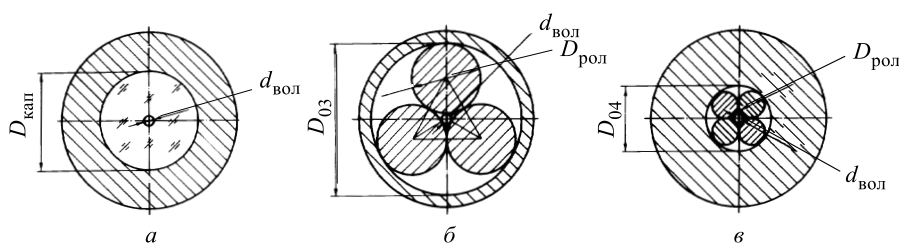


Рис. 6. Элементы ориентирования оптического волокна в наконечниках с диаметром 3,6 мм

удалении оболочек, в основном совпадают с аналогичными процессами для электрических кабелей, однако хрупкость ВОС требует создания специальных приспособлений и необходимого оборудования. Наибольшие сложности возникают при удалении защитной оболочки с ВОС в прецизионных соединителях.

Самой трудоемкой операцией является сборка кабельной части наконечника. Оптический кабель закрепляется в направляющем канале наконечника с помощью клея на эпоксидной основе. Время полимеризации такого клея, необходимое для достижения требуемых физико-механических свойств, при-

мерно сутки. Затем производится спецобработка (шлифовка, полировка и мытье в бензине и мыльной воде) торцевой поверхности наконечника. Прецизионные детали наиболее трудоемки в изготовлении, поэтому конструкция и технологический процесс изготовления ОС должны разрабатываться таким образом, чтобы количество прецизионных деталей было наименьшим. Требования к точности соединения определяются, в основном, величиной допустимых потерь сигнала и диаметром сердцевин соединяемых ВОС. В настоящее время наиболее часто используются ВОС с диаметром сердцевины 50 мкм (КК125/50). Для большинства систем передачи информации допустимые потери в ОС не должны превышать 1,2–2,0 дБ/км, что соответствует допустимому эксцентриситету сердцевин соединяемых ВОС не более 5–10 мкм.

Существенное снижение требований к точности изготовления деталей и упрощению конструкции ОС возможно при использовании ВОС с полимерной оболочкой, имеющих сердцевину из кварца диаметром 200 и 400 мкм. Однако применение оптических кабелей КП200 и КП400 для построения широкополосных ВОЛС весьма ограничено из-за большого затухания в этих кабелях 20 ÷ 40 дБ/км и более низкой надежности ВОК в системах на электрофизических установках.

Другой путь — усложнение конструкции ОС и наличие контроля оптического сигнала в процессе регулировки. Соосность соединяемых волокон здесь достигается не за счет точности изготовления деталей ОС, а за счет введения в него дополнительных достаточно точных деталей, образующих механизм для регулировки взаимного положения осей волокон (юстируемый оптический соединитель). Использование центрирующих направляющих втулок для ОС с круглыми наконечниками позволяет снизить требования к точности получения наружного диаметра наконечников и внутреннего диаметра втулок. Применением дополнительных деталей для закрепления волокна в наконечнике удалось увеличить диаметр направляющих каналов до величины, не требующей изготовления специального инструмента. Использование стеклянных микрокапилляров значительно улучшает условия шлифовки и полировки торцов наконечников после сборки и упрощает процесс сборки кабельной части ОС. Таким образом, прецизионные стеклянные микрокапилляры являются важным микрооптическим компонентом элементов ВОЛС. В ряде случаев можно имитировать прецизионное отверстие необходимого диаметра (рис. 6). При этом соотношение диаметров роликов и оптического волокна следующее: для трех роликов $D_{\text{рол}} = 6,47\alpha_{\text{вол}}$; для четырех роликов $D_{\text{рол}} = 2,4\alpha_{\text{вол}}$. Оба варианта использованы в наконечниках диаметром 3,6 мм, причем габариты соединителя с четырьмя роликами будут значительно меньше.

Однако при выборе конструкции ОС необходимо учитывать реальность изготовления роликов нужного диаметра. Эти и другие приемы позволяют существенно снизить требования к точности изготовления прецизионных деталей, однако сама конструкция ОС при этом усложняется. Ниже приведены

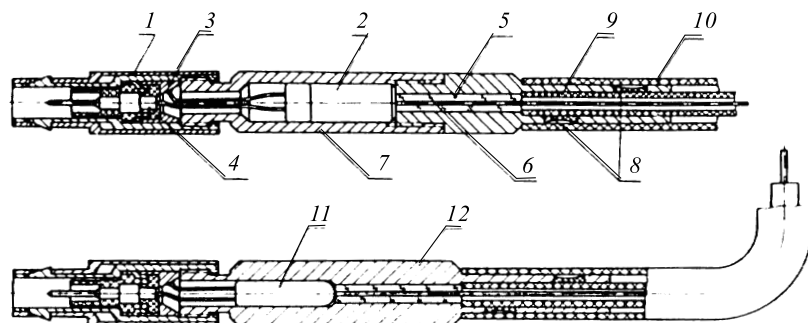


Рис. 7. Активный разъёмный соединитель с использованием электрического разъема «ЛЕМО»: 1 — корпус; 2 — фотодиод; 3, 4 — точки электрических вводов; 5 — капилляр; 6 — 12 — наконечники; 7 — корпус приборной части; 8 — отверстия в хвостовике для нанесения клея; 9 — волоконно-оптический кабель; 10 — защитный кембрик; 11 — светодиод

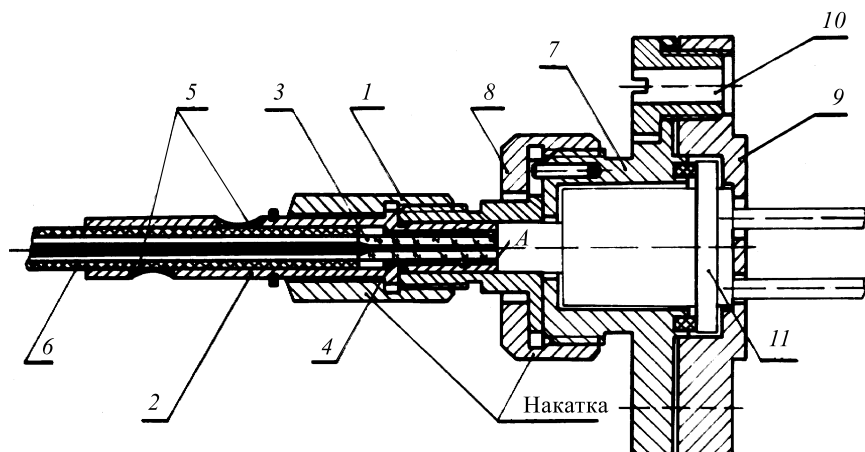


Рис. 8. Универсальный юстируемый разъёмный соединитель: 1 — вилка; 2 — хвостовик; 3 — стеклянный капилляр; 4, 5 — полость; 6 — оболочка волоконно-оптического световода; 7 — розетка; 8 — гайка (фиксатор); 9 — основание; 10 — отверстие для крепления; 11 — компоненты ВОЛС: суперлюминесцентный светодиод или фотодиод

основные конструктивно-технологические решения нестандартных ОС, в которых ВОС согласуются механически. На рис. 7 показан активный разъёмный соединитель с постоянным оптическим контактом [37, 43], выполненный на базе субминиатюрного электрического коаксиального разъема типа «ЛЕМО».

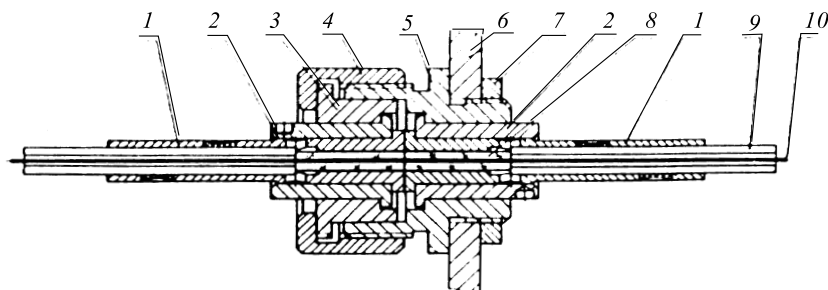


Рис. 9. Юстируемый оптический соединитель «кабель — кабель»: 1 — хвостовик; 2 — втулка эксцентриковая; 3 — втулка фиксирующая; 4 — накидная гайка; 5 — корпус гильзы; 6 — панель прибора; 7 — гайка крепежная; 8 — капилляр; 9 — оболочка волоконно-оптического кабеля; 10 — световод

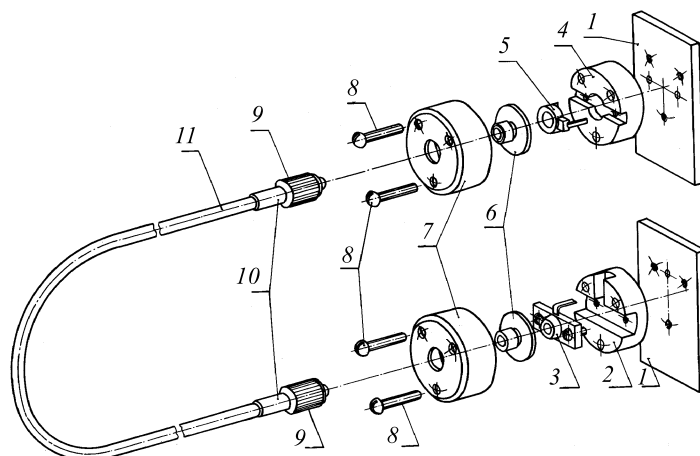


Рис. 10. Использование юстируемых оптических соединителей в высокоскоростной линии связи ($F = 100$ МГц): 1 — панель КАМАК 2М; 2, 4 — корпус ОС; 3 — лазерный диод; 5 — фотоприемник; 6 — юстируемая втулка; 7 — крышка-фиксатор ОС; 8 — элементы крепления; 9 — накидная гайка; 10 — хвостовик; 11 — ВОС

Стыкуемые с ВОС компоненты юстируются в процессе монтажа ВОЛС по минимуму потерь в линии и затем фиксируются. При этом потери, вносимые оптическим контактом, не превышают 2 дБ, разъемное соединение с электронным обрамлением ВОЛС обеспечивается электрическими выводами разъема.

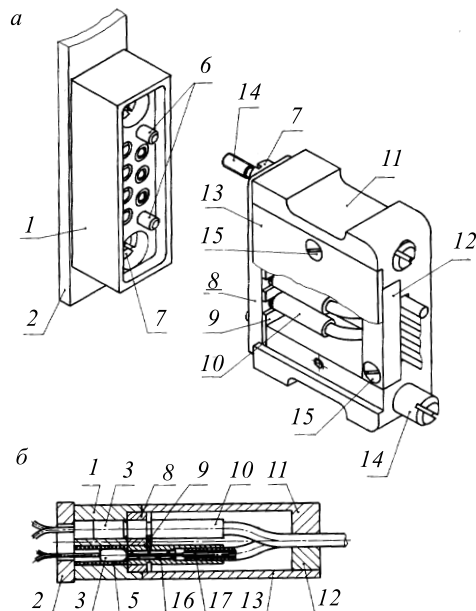


Рис. 11. Многоконтактный оптический соединитель: *а* — разъем; *б* — разъем в разрезе; 1 — корпус (приборная часть); 2 — передняя панель модуля КАМАК; 3, 4 — оптические элементы; 5 — изолирующая втулка; 6 — направляющие штифты; 7 — узел крепления; 8 — юстировочная пластина; 9 — гребенка; 10 — наконечник; 11 — корпус (кабельная часть ОС); 12 — фиксатор ВОС; 13 — крышка; 14 — винт-фиксатор; 15 — элемент крепления; 16 — капилляр; 17 — оптическое волокно

Аналогично выполнен многоконтактный активный соединитель с постоянными оптическими контактами, изготовленный на базе электрического разъема РП-15-15, с механическим фиксатором активной части соединителя [37, 44]. Универсальный юстируемый соединитель «кабель — прибор» показан на рис. 8. Стыкующиеся части соединителя юстируются в процессе монтажа ВОЛС по минимуму потерь в линии связи. При этом методе стыковки потери, вносимые соединителем, могут быть уменьшены до уровня менее 1 дБ. Подобное техническое решение использовано и в юстируемом соединителе «кабель — кабель» (рис. 9). Эксцентриситет эксцентриков составил 0,1 мм, что обеспечило точность их установки не хуже 1 мкм/град. Потери в таком соединителе не превышают 1,8 дБ на стык. На рис. 10 в качестве примера показано применение юстируемых ОС в высокоскоростной световодной линии связи с использованием полупроводникового лазера ИЛПН-102 и лавинного фотодиода ЛФД-2. На рис. 11 показан многоконтактный ОС «ка-

бель — прибор», изготовленный по принципу матриц. Механическая основа прибора состоит из двух матриц — пластин с точно выполненными отверстиями для оптоволокон и оптических компонентов. Отверстия имеют точно выдержанный шаг (изготовлены в едином технологическом цикле), оптические компоненты совмещаются с помощью штифтов и специальных гребенок. Оптические потери в таком соединителе не превышают $0,8 \div 1,8$ дБ на контакт. Используя прецизионные наконечники и элементы ориентирования и фиксации ВОС, можно существенно упростить соединители «кабель — кабель» (рис. 9), объединяя их в одном корпусе с помощью соединительной муфты [39, 44]. Потери не превышают $3,0 \div 5,0$ дБ. В некоторых случаях поворотом наконечников друг относительно друга удастся уменьшить потери в линии связи до $2,0 \div 2,5$ дБ.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОЛИНЗ

Для повышения эффективности ввода оптического излучения от полупроводникового лазера в многомодовый волоконно-оптический световод используются микролинзы. Несмотря на простоту конструкции последних, технология изготовления этих элементов достаточно сложна и требует специального оборудования для разогрева световода в плазме электрического разряда [40]. Однако локальный разогрев световода до температуры плавления материала на участке разогрева стекла приводит к возникновению сильных напряжений, снижающих эксплуатационные характеристики согласующих элементов, изготовленных таким способом.

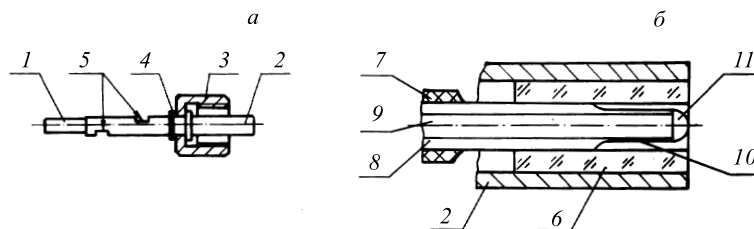


Рис. 12. Конструкция вилочной части юстируемого оптического соединителя для моноволоконного кабеля с клеевой микролинзой: 1 — хвостовик; 2 — наконечник; 3 — накидная гайка; 4 — фиксатор; 5 — паз для клея; 6 — капилляр стеклянный; 7 — полимерное покрытие; 8 — кварцевая оболочка; 9 — сердцевина; 10 — стравленный участок; 11 — клеевая микролинза

При создании световодного канала передачи видеосигналов исследована и использована более простая технология изготовления согласующих элементов на торцах волоконного световода КК125/50 с улучшенными характеристиками. На рис. 12 приведена конструкция согласующего элемента, смонтиро-

ванного в корпусе штекера (вилочная часть) юстируемого ОС. Основу согласующего элемента составляет клеевая микролинза, сформированная на торце участка световода с уменьшенным диаметром оболочки. Диаметр микролинзы совпадает с диаметром указанного участка световода. Для придания элементу механической прочности, необходимой для его дальнейшей эксплуатации, согласующий элемент вклеивается в стеклянный капилляр, смонтированный в вилочной части ОС.

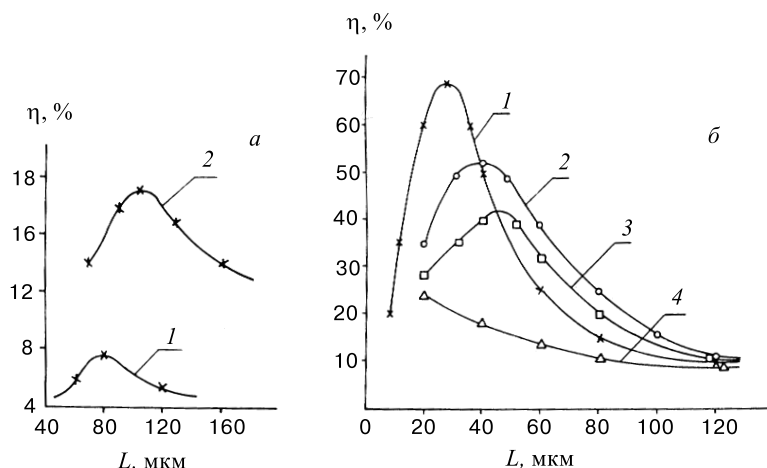


Рис. 13. Зависимости эффективности ввода излучения светодиода (а) и лазерного диода (б) от диаметра микролинзы и осевого смещения светодиода: а — светодиод: 1 — 150 мкм; 2 — 40 мкм; б — лазерный диод: 1 — 55 мкм; 2 — 75 мкм; 3 — 100 мкм, 4 — 150 мкм (торец световода без микролинзы)

Процесс изготовления согласующего элемента включает в себя следующие технологические операции [45]: химическое травление для получения выбранного значения диаметра оболочки, скол и формирование клеевой микролинзы. Затем конструкция с согласующим элементом монтируется в вилочную часть юстируемого оптического соединителя с использованием клея на эпоксидной основе.

При исследовании эффективности ввода излучения в световод КК125/50 от полупроводникового лазера было отмечено, что максимум эффективности ввода достигается при смещении излучателя из фокальной плоскости в сторону микролинзы (рис. 13). Максимум эффективности при попадании основной доли светового потока в сердцевину световода достигается путем юстирования вилочной части [40]. Изготовленный согласующий элемент с улучшенными характеристиками позволил существенно увеличить эффективность ввода излучения световода: до 70% мощности излучения от полупро-

водникового лазера и до 20% при использовании некогерентных излучателей, например, световодов ИК-диапазона (типа АЛ107, АЛ115) по сравнению с вводом излучения в плоский торец световода.

6. ОСОБЕННОСТИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В современных и особенно в будущих экспериментах на ЛНС, где число каналов регистрации составляет несколько сотен тысяч, ВОЛС являются основными средствами передачи данных как в аналоговой, так и в цифровой форме. Здесь требуется широкая полоса пропускания канала, поскольку данные емкостью 10 Мбайт/событие, зарегистрированные в детекторах, поступают с частотой 40 МГц и малой потребляемой мощностью. В табл. 1 приведены данные об оптических системах связи, которые будут использоваться в установках ATLAS и CMS. В основном предпочтение отдается аналоговому способу передачи данных, поскольку такие сигналы требуется передавать от регистрирующей электроники к триггерным системам, которые расположены на расстоянии не более 100 метров.

Таблица 1. Характеристики оптических линий связи для экспериментов на ЛНС

Детектор	Количество каналов	Мультиплексор	Скорость передачи, Мбит/с	Динамич. диапазон	Количество связей	А/Ц
П.Д.	$3 \cdot 10^6$	512	20-40	$10 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	Ц
АТLAS Трек. Д.	$16 \cdot 10^6$	256	40 МГц	200	$60 \cdot 10^3$	А
СМС Д.П.И	$0,5 \cdot 10^6$	512	1 Гбит/с		10^3	Ц
АТLAS Ж.А.К.	$30 \cdot 10^3$		50 МГц	5000	$30 \cdot 10^3$	А
Д.К.Д. СМС	$50 \cdot 10^6$	5000	10		$15 \cdot 10^3$	А/Ц

Примечание: П.Д. — полупроводниковые трековые детекторы; Трек. Д. — трековые детекторы; Д.П.И. — детектор переходного излучения; Ж.А.К. — жидкоаргонная камера; Д.К.Д. — двухкоординатные (пиксель) детекторы

ВОЛС работают в магнитном поле 4 Тл, и поэтому оптоэлементы не должны содержать металлических компонентов. В среднем для большинства детекторов линейность меньше 2%, и динамический диапазон $7 \div 8$ бит считается вполне удовлетворительным. Однако для обработки данных, регистрируемых в калориметрах, требуется более высокая линейность и динамический диапазон. Кроме того, учитывая большое число каналов передачи, необходимо предъявить высокие требования к стоимости ВОЛС и соответствующих

интерфейсов. Рассматриваются две базовые схемы оптической связи, которые будут использоваться в экспериментах на ЛНС. Первая и более простая схема базируется на прямой модуляции светового или лазерного диода и светоприемника. Во второй схеме, предназначенной для передачи данных на большие расстояния, оптопередатчик состоит из оптоэлектронного модулятора-рефлектора, а на приемной стороне расположен электрооптический усилитель, состоящий из приемопередатчика и двух лазерных диодов.

Интенсивные разработки в использовании ВОС для передачи данных от ФЭУ начались еще в 1993 г. Основная проблема, которая решалась с помощью ВОС, — это существенное уменьшение помех в экспериментальной аппаратуре, состоящей из двух электростатических анализаторов, включенных на совпадение [46]. Сигналы передавались на расстояние 5 м с помощью ВОС, имеющего диаметр 50/125 мкм и работающего в многомодовом режиме. В [47] описана аналогичная система передачи, но расстояние между объектами составляет 2 км. Существенное увеличение длины передачи достигнуто за счет использования светодиода с эмиссией на волне 1300 нм. Сигналы поступают от ливневого детектора и усиливаются с помощью ФЭУ. В табл. 2 [47] приведены сравнительные характеристики типичного коаксиального кабеля и ВОС, используемого в данном эксперименте.

Таблица 2. Типичные характеристики коаксиального кабеля и многомодового ВОС

Тип кабеля	Коаксиальный кабель RG 58 C/U	Мультимодовый ВОС $\lambda = 1300$ нм; 62,5/125 мкм
Затухание	174 дБ/км; $f = 100$ МГц	10 дБ/км; $f = 500$ МГц
Вес	36 кг/км	1,8 кг/км
Диаметр	4,95 мм	0,25 мм
Взаимные помехи	Возможны	Нет

Вопросы влияния взаимных нелинейных помех между продольными модами многомодовых импульсов лазерного источника в многоканальных системах связи рассматриваются в работе [48]. Суть дела в том, что эта нелинейность существенно влияет на скоростные характеристики оптических систем передачи. При этом важно знать, сколько дополнительных мод передачи можно использовать, применяя мультиплексный режим. Кроме того, такие исследования позволяют более детально понять нелинейные оптические процессы, протекающие в ВОС.

Применение ВОС для передачи данных в многоканальных детекторах.

Ряд исследований посвящен использованию ВОС в многоканальных детекторах установок CMS [49–51] и ATLAS [52], где необходимо обеспечить двустороннюю передачу данных и малое потребление мощности. Центральный детектор состоит из полупроводниковых и микрополосковых газонапол-

ненных детекторов, которые расположены внутри соленоида с магнитным полем 4 Тл. Общее число каналов регистрации составляет $11 \cdot 10^6$ для микрополосковых газонаполненных детекторов и $3 \cdot 10^6$ для полупроводниковых детекторов. Та часть электронных систем регистрации, которая расположена в экспериментальном павильоне, находится на расстоянии 100 м от субдетекторов. Сигнал от каждой микрополоски полупроводниковых детекторов усиливается с помощью зарядочувствительного усилителя с постоянной времени 50 нс, стробируется с частотой 40 МГц и сдвигается с помощью 128-разрядного аналогового регистра. На стороне приемника имеется $256 \rightarrow 1$ мультиплексор, выход которого подключен к входу АЦП. Поскольку аналоговая величина соответствует $6 \div 8$ битам, то эффективная частота передачи составляет 300 Мбит/с.

Использование пассивного рефлективного модулятора позволяет существенно уменьшить рассеиваемую мощность в области субдетекторов. Передающее устройство состоит из лазерного источника, который облучает несколько модуляторов, световода, сплиттера и светодиода. Применение мультимодового ВОС позволяет использовать менее точные и дешевые оптические разъемы. Более детально электрооптический модулятор описан в [50]. Разработчики ставили целью создание многоканального, радиационно стойкого, с малой потребляемой мощностью канала передачи аналоговых сигналов. В отличие от светодиодов или лазерных диодов, разработанный модулятор является пассивным элементом. На рис. 14 приведена блок-схема приемопередающего устройства. Вообще, как это отмечается в [54], интерфейсы (опто-разъемы) составляют от 60 до 90 % стоимости оптической связи. Данная работа посвящена разработке многоканальных интерфейсов в интегральном исполнении.

В работе [53] описана оптическая связь, предназначенная для передачи аналоговых сигналов от жидкоаргонного калориметра установки ATLAS. Получен динамический диапазон 12 бит. В дальнейшем возможна версия оптической связи с диапазоном вплоть до 16 бит. Разработанный прототип имеет 64 канала.

Вопросы радиационной стойкости. В экспериментах по физике высоких энергий необходимо использовать радиационно стойкие ВОС и элементы оптической связи. Расположенные внутри детектора ЭОП и частично ВОС будут находиться под воздействием радиации по крайней мере 20 мрад и нейтронов с энергией порядка МэВ, что эквивалентно потоку нейтронов 10^{14} см^{-2} . Поэтому в настоящее время для использования в качестве передатчиков тщательно исследуются радиационно стойкие светодиоды и лазерные диоды, которые будут работать в таких экстремальных условиях в течение 10 лет. Вообще говоря, уменьшение светотдачи с течением времени наблюдается и в обычных условиях, однако это время слишком велико и составляет $10^6 - 10^7$ часов. Причиной деградации светодиодов под воздействием сильной радиации

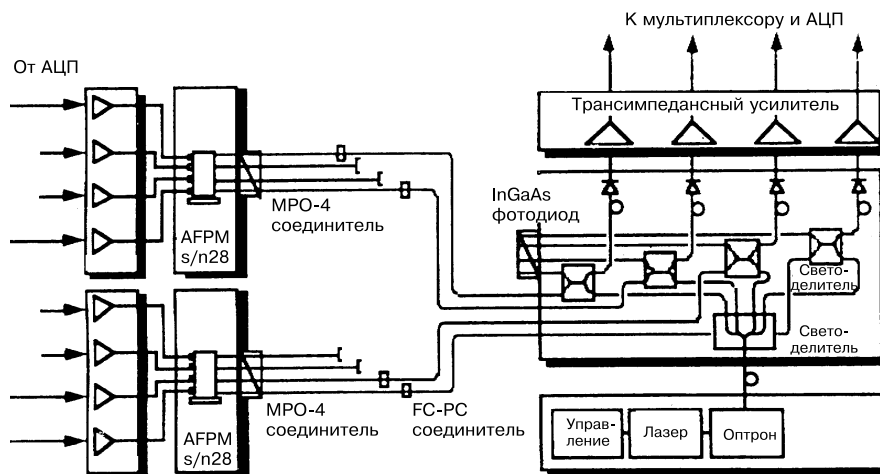


Рис. 14. Четырехканальная система передачи на основе пассивного модулятора

является неравномерное развитие дефектов в кристаллах, которые действуют как центры для рекомбинации. При большом увеличении они выглядят как темные полосы и поэтому называются дефектами прямых линий. Вообще говоря, первоначальные дефекты связаны прежде всего с вредными примесями в исходном веществе. Поскольку реальный эксперимент по измерению времени продолжительности светодиодов не может продолжаться слишком долго, то вводится ускоряющий фактор: повышается температура, в которой находится светодиод, и увеличивается величина прямого тока [55]. В табл. 3 приведены характеристики радиационно стойкого светодиода «ААВ Наfo», который использовался для измерения времени жизни в экстремальных условиях. С целью автоматизации измерений большого количества светодиодов

Таблица 3. Характеристики радиационно стойких светодиодов серии «ААВ Наfo»

Тип светодиода	P/N GCA-90-0174
Выходной ток из ВОС	10 мА, 10–30 мкВт
Пиковая частота	820 нм
Фронт сигнала	4 нс при 10 мА
Корпус	Металлический цилиндр $L = 7,5$; $f = 2,5$ мм

(до 448 шт.) разработан сканирующий автомат [57]. Причем наряду со светодиодами исследовались лазерные светодиоды типа «Vertical Cavity Surface Emitting Laser Diodes» (VCSEL) (далее — лазерные диоды). На рис. 15 приведена группа светодиодов, смонтированных на керамической подложке.

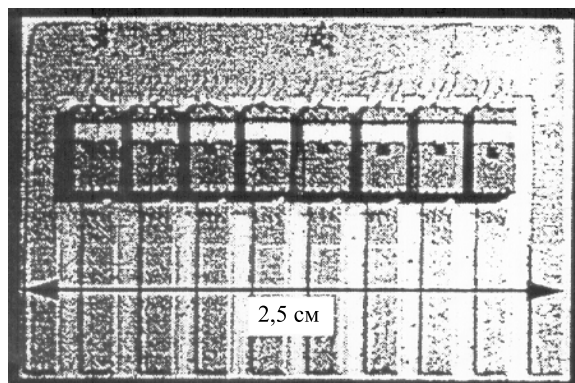


Рис. 15. Фотография группы светодиодов, смонтированных на керамической подложке

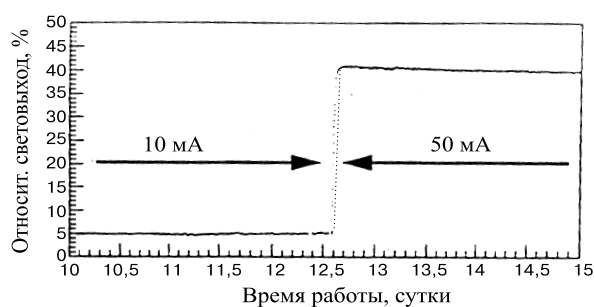


Рис. 16. Относительный световыход светодиода после облучения потоком протонов $1,6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ как функция времени в режиме постоянного тока

Здесь видны также вмонтированные световоды (черные точки). Типичная кривая, характеризующая относительный световыход после дозы облучения $1,6 \cdot 10^{14} \text{ p/см}^2$ светодиода, в зависимости от величины прямого тока приведена на рис. 16. Измерения показали, что после облучения световыход уменьшился всего на несколько процентов при токе смещения 10 мА. Однако с увеличением тока до 50 мА наблюдается быстрое нагревание, и в течение нескольких часов световыход уменьшился до 40%. На рис. 17 приведена кривая для другого светодиода, который облучался потоком нейтронов $3,2 \cdot 10^{14}$. В этом случае прожигание имеет место при токе 10 мА, и величина световыхода возрастает до $10 \div 60\%$. Однако с увеличением тока от 10 до 30 мА через шесть дней наблюдается обратный процесс, который уменьшает световыход

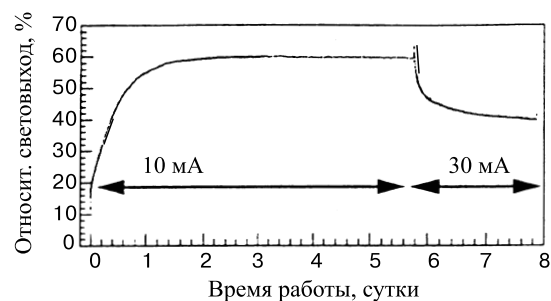


Рис. 17. Относительный световыход после облучения потоком нейтронов $3,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$

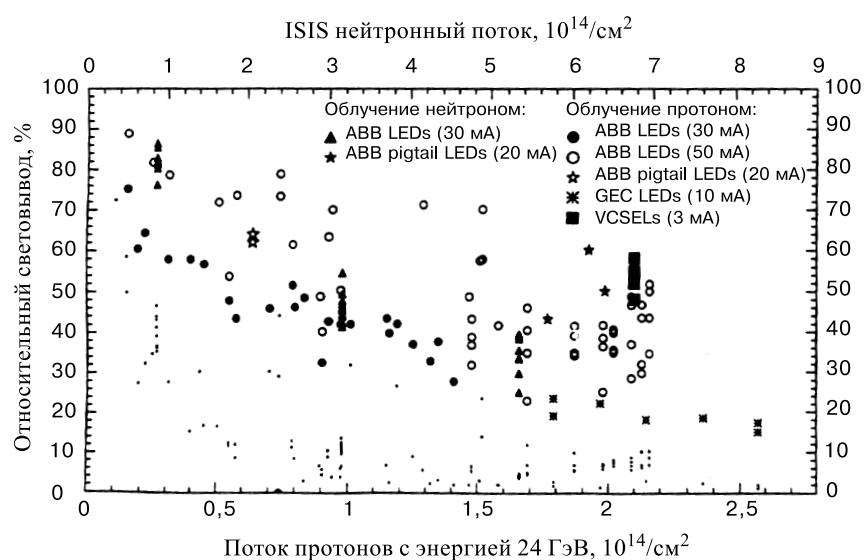


Рис. 18. Зависимость световыхода для светодиодов и лазерных диодов от энергии облучения протонов

на 40%. Зависимость световыхода для светодиодов и лазерных диодов в зависимости от потока частиц приведена на рис. 18. Здесь маленькие точки обозначают первые измерения после облучения. Большие символы показывают относительный выход света после того, как исчезает эффект прожигания. В [56] исследована возможность использования лазерных светодиодов с прямой модуляцией для передачи данных в установке CMS. С этой целью были выбраны 100 диодов с различными частотами эмиссии. Были отобраны 16 образцов, которые облучались большим потоком нейтронов $1,1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ при энергии 6 МэВ. Получены удовлетворительные результаты.

7. СТАНДАРТЫ ДЛЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Пассивные оптические магистрали. Оптические системы передачи хорошо адаптируются для передачи данных от станции к станции (point-to-point links). Известные свойства ВОС позволяют относительно просто размножать сигналы от мощного источника света или объединять их для передачи по одному волокну. Некоторые примеры различных типов *T*-соединителей приведены на рис. 19. Если использовать фильтры, то можно передавать данные по одному волокну от нескольких каналов передачи, работающих на различных частотах.

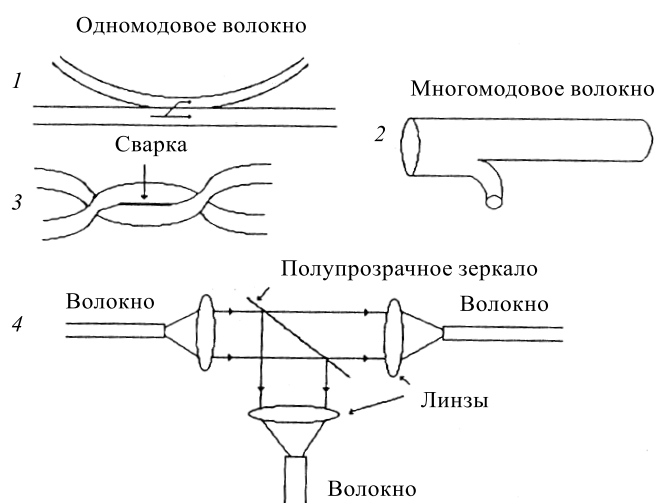


Рис. 19. Различные способы объединения световых сигналов: 1 — стыковка; 2 — ответвление; 3 — сварка; 4 — использование линз

Оптический канал (Fiber Channel). Протокол оптического канала разработан с целью получения высокоскоростной дуплексной связи для передачи данных блоками между процессорами и внешними устройствами. В дальнейшем этот протокол был усовершенствован с целью передачи данных пакетами [58, 59]. При этом определены пять уровней протоколов (слоев) *FC0* — *FC4*. Рассмотрим назначение каждого из слоев.

Слой *FC0* определяет физическую среду, типы соединений и скорость передачи импульсов по обоим волокнам (один для прямой передачи и другой — для обратной). Стандартными скоростями являются 132,8; 265,6; 531,25; и 1062,5 Мбит/с. Причем в качестве передающей среды можно использовать экранированные скрученные пары проводов, коаксиальные кабели, одномодовые и многомодовые ВОС.

Слой *FC1* задает тактовую частоту, способ декодирования и детектирования ошибок в процессе передачи данных. В слое *FC2* определен механизм передачи данных между узлами сети. При этом импульсы могут передаваться как с помощью коммутаторов, так и последовательно, от узла к узлу. При этом возможны три моды обслуживания. Первая мода обеспечивает передачу информации большими блоками с наибольшей скоростью. Моды 2 и 3 предназначены для пакетного способа связи.

Распределенный оптический интерфейс [59] (FDDI). Распределенный оптический интерфейс (РОИ) предназначен для высокоскоростной передачи данных по оптическому каналу со скоростью $45 \div 150$ Мбит/с. Данные могут передаваться как в локальных сетях, так и между объектами, расположенными на больших площадях. Базовая архитектура стандарта весьма проста. Она представляет собой сдвоенное кольцо, в определенных точках которого располагаются узлы сети. Причем в случае повреждения одного кольца все данные могут передаваться по другому кольцу. Сигналы, проходящие сквозь узлы сети, регенерируются с помощью электрооптических усилителей. Поэтому поток данных может или передаваться по кольцу, или коммутироваться к приемнику данного узла.

Используя оба кольца для передачи данных в одном направлении, можно достигнуть скорости передачи 200 Мбит/с. Известна также модификация интерфейса FDDI — FDDI-II, с помощью которой передаются речь и видеoinформация со скоростью 6,144 Мбит/с.

Распределенная сдвоенная магистраль (IEEE 802,6). Распределенная сдвоенная магистраль, имеющая скорость передачи 150 Мбит (для одного канала), состоит из направленных в противоположные стороны оптических магистралей, между которыми располагаются узлы сети. Данные от узла к узлу сети передаются с помощью временных окон, которые задаются с помощью глобального алгоритма, определяющего очередность связи. Вообще говоря, с помощью разъемов распределенную сдвоенную магистраль можно превратить в кольцевую.

Повышение скорости передачи. Прямой путь увеличения скорости передачи — использование более быстрых компонентов — приводит к увеличению стоимости сети. Как показано в [59], повысить скорость передачи в обеих сетях можно путем соответствующих соединений исходных сетей, т.е. путем трансформации их в многоканальные кольцевые сети. В данной работе описывается несколько топологий таких сетей. На рис. 20 в качестве примера приведена топология типа «Shuffle», состоящая из 24 интерфейсов и 6 ВОЛС.

Для контроля оптических магистралей используются специальные тестовые системы [61].

Применение распределенного оптического интерфейса. Поскольку оптические сети содержат 2×2 -коммутаторы, то они используются в качестве быстросрабатывающих построителей событий в экспериментах по физике вы-

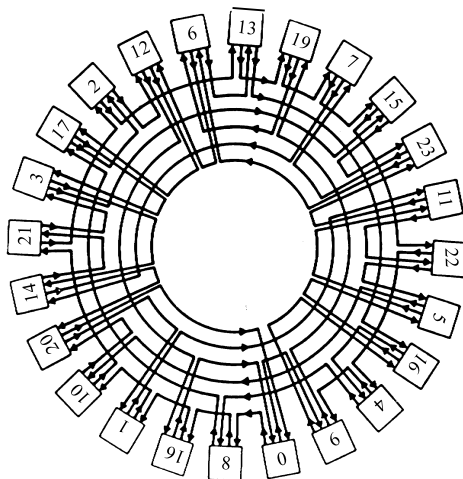


Рис. 20. Многосвязное кольцо, состоящее из 24 узлов сети

соких энергий. В [60] приведены результаты моделирования однокаскадного и двухкаскадного построителей событий, имеющих по 256 входов/выходов. Независимо от числа каскадов модель имеет n входов, на каждый из которых поступают k -разрядные фрагменты событий от триггерной системы первого уровня. Задача построителя событий состоит в том, чтобы фрагменты одноименных событий поступали к одному из приемников данных. Причем связи между передатчиками и приемниками данных могут динамически меняться в каждом такте. После установления связи время передачи фрагментов можно полагать пропорциональным величине сообщения. Показано, что при значении 1000 кбайт на событие пропускная способность однокаскадного построителя событий равна 1200 соб./с. Однако вопрос об использовании стандартных сетей в качестве построителей событий остается открытым в связи с тем, что протоколы стандартных сетей отличаются от протоколов, необходимых для передачи данных в триггерных системах.

Читателю, интересующемуся синхронной системой оптической связи, рекомендуем ознакомиться с работами [58, 59].

8. ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛС В УСКОРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Высокие уровни импульсного электромагнитного и радиационного излучений, высокая разность потенциалов источников относительно «земли» (порядка 750 кВ) делают световодные системы единственно возможным каналом передачи информации «источник — пульт управления» и обратно. В дан-

ном разделе будут описаны разработанные и внедренные системы волоконно-оптических линий связи на ускорительном комплексе ЛВЭ ОИЯИ. Создание автоматизированных систем управления и контроля ионных источников линейных ускорителей с использованием волоконно-оптических линий связи позволило улучшить пространственные и временные характеристики ионных пучков, существенно сократить время настройки источников и упростить их эксплуатацию. Изготовленная многоканальная аппаратура позволяет передавать массивы информации по ВОЛС, имеющих как параллельную, так и последовательную структуры. Параллельная организация световодных каналов используется для создания монтажных, последовательная — для внутри-объектных и межобъектных ВОЛС с применением каналаобразующих систем «уплотнение — разуплотнение» передаваемой информации.

Общие вопросы разработки и создания короткометражных (монтажных) ВОЛС среднего быстродействия для электрофизических установок (ЭФУ). В системах управления ЭФУ используется, как правило, до десятка и более одноканальных ВОЛС среднего быстродействия (0,1–10 МГц). Такая многолинейная структура оптоэлектронных каналов создается путем прокладки волоконно-оптического кабеля поверх ограждения ЭФУ для обеспечения связи между блоками аппаратуры, расположенными на высоковольтном терминале инжектора, и пультом управления. Каналы ВОЛС малой протяженности $5 \div 10$ м целесообразно изготавливать оптически неразъемными. Исключение составляют отдельные случаи, когда введение в линейный тракт дорогостоящих оптических соединителей диктуется условиями применения (например, при прохождении труб, стен, всевозможных перегородок и т.д.). Оценка эффективности применения короткометражных ВОЛС на ЭФУ показывает, что отказ от использования ОС в несколько раз снижает стоимость канала ВОЛС и вместе с тем повышает его надежность. Стремление сохранить в составе оптоэлектронных каналов разъемность конструкции привело к созданию более дешевых и простых «активных» соединителей.

При изготовлении монтажных ВОЛС использовалось характерное для «фотонных» линий связи сочетание GaAs-светодиода, *p-n*-фотодиода и многомодового оптического кабеля, что обеспечивает низкую стоимость, высокую долговечность и надежность этих устройств. С точки зрения увеличения помехозащищенности оптических каналов передачи информации на ЭФУ перспективен метод построения фотоприемников с гальваническими связями, с использованием операционных усилителей. Для повышения разрешающей способности фотоприемника необходимо, чтобы сигнальный ток фотодатчика превышал значение входного тока операционного усилителя. Этому и другим требованиям, в основном, отвечают высокоскоростные операционные усилители с полевыми транзисторами на входе, включенные по схеме с отрицательной обратной связью. Фотоприемник, построенный по схеме «ток — напряжение», имеет преимущества перед высокоимпедансной схемой включе-

ния, так как фотодиод нагружается на малый входной импеданс усилителя, что обеспечивает оптимальный, относительно быстродействия, режим фотодиода и расширяет информационную полосу принимаемых сигналов.

Существенным успехом в развитии монтажных ВОЛС стала разработка нового изделия электронной техники — «волстро́на», содержащего в качестве канала передачи информации отрезок волоконно-оптического кабеля, который оптически и механически неразъемно соединен с оконечными устройствами, одно из которых выполняет функцию преобразования электрического сигнала в оптический, а другое — преобразования электрического сигнала в оптический. Другими словами, волстрон — механически неразъемное устройство, все элементы которого, как оптические, так и электронного обрамления, интегрированы в процессе его изготовления. Это отличие носит принципиальный характер, так как волстрон, в отличие от ВОЛС, оснащенной разъемными соединителями, представляет собой не набор элементов, а единый прибор (рис. 21).

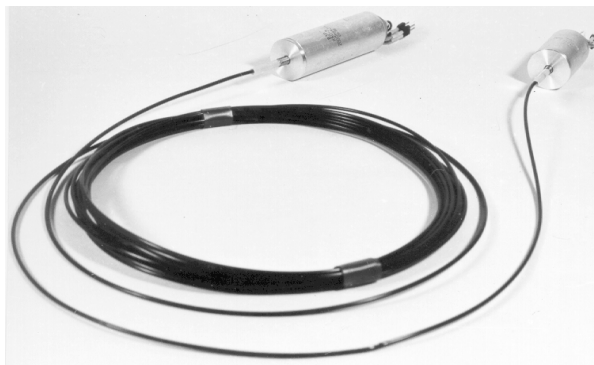


Рис. 21. Внешний вид кабельного волстро́на

По сравнению с ВОЛС, в которой используются оптические соединители, волстрон обеспечивает выигрыш в энергетике светоотдачи вследствие лучших условий ввода излучения в волокно и отсутствия потерь на разъемных соединителях. Этот выигрыш может достигать $4 \div 6$ дБ, что позволяет снизить ток возбуждения излучателя и повысить надежность работы передающего оптического модуля. Практика использования волстро́нов на ЭФУ в системе управления инжектором ускорителя [43, 61] подтвердила высокие эксплуатационные характеристики разработанных приборов.

Аппаратура многоканальных цифровых ВОЛС для системы управления и контроля ионных источников. Анализ задач, решаемых в процессе автоматизации ЭФУ, показывает, что световодные системы целесообразно строить по модульному принципу, выделяя в их составе аппаратуру передачи

импульсов синхронизации [43, 62–65], собственно программно-аппаратную систему сбора данных [35, 65–69], вспомогательную и служебную аппаратуру [70, 71], расширяющую возможности многоканальных ВОЛС. Это позволяет для каждого из применений использовать оптимальный по составу и конфигурации набор модулей из их функционально полного набора.

Разработанные в ЛВЭ ОИЯИ первые модульные системы сбора данных ионных источников [35, 66] позволяют контролировать и отображать с помощью цифровых индикаторов четыре одновременно изменяющихся параметра, а также наблюдать форму импульсов с помощью осциллографа: ионного тока и электронного тока. Передача этих параметров идет попеременно, с частотой синхроимпульсов запуска источника. В телеметрических системах применяется временное разделение каналов. Кодирование аналоговой информации, поступающей от датчиков источника, производится способом АИМ (амплитудно-импульсная модуляция) — ВИМ (время-импульсная модуляция) с последующим преобразованием ее в двоично-десятичный код в приемном устройстве. В качестве коммуникационной среды передачи данных используется трехметровый жгутовый световодный кабель [35], а в более ранних работах [66] — канал СВЧ.

Для синхронизации режимов технологических систем ионных источников разработан многоканальный программно-управляемый таймер [64]. Прибор использовался в составе системы синхронизации криогенного электронно-лучевого ионизатора «КРИОН-1» в сеансах ускорения ядер углерода и неона. Система чтения информации с выводом на дисплей осуществляла визуальный контроль временных установок пусковых сигналов, передаваемых по 10-канальной ВОЛС.

Интеграция короткометражных ВОЛС на первом этапе внедрения на высоковольтных ЭФУ характеризуется наращиванием числа световодных каналов в параллель. Параллельная организация каналов ВОЛС экономически оправдана с точки зрения повышения скорости передачи цифровой информации на малые и средние расстояния. Особенно наглядно этот принцип организации световодных каналов был зафиксирован при построении систем дистанционного управления и контроля (ДУК) источников «ПОЛЯРИС» [43] и «Дуоплазматрон» установки СПИН [69]. Система ДУК установки СПИН размещена в двух крейтах КАМАК. Один из них расположен на пульте управления источника, другой — на высоковольтном терминале. Связь между крейтами осуществляется по восьми 10-метровым параллельным каналам ВОЛС, служащим для передачи цифровой и аналоговой информации. На рис. 22 приведена блок-схема системы телеметрии, которая состоит из двух subsystems: управляемого аналогового коммутатора, генератора управляемого напряжения и датчиков, расположенных на высоковольтном терминале, генератора адреса канала и цифрового частотомера — на пульте управления установкой.

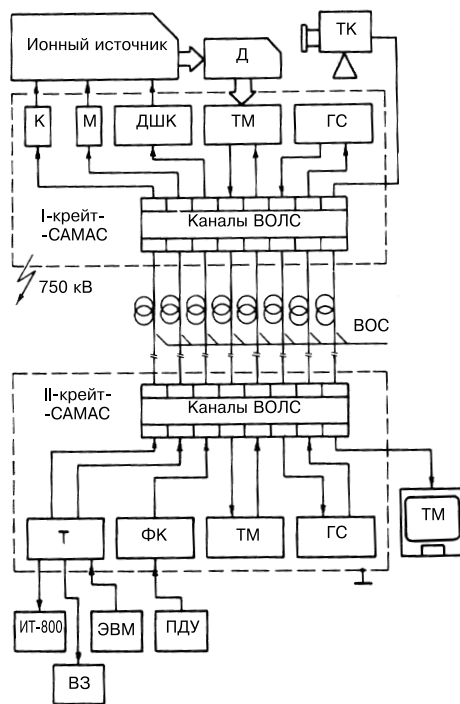


Рис. 22. Структурная схема системы дистанционного управления. Пульт управления: Т — таймер; ФК — формирователь команд управления режимами работ ионного источника с пультом дистанционного управления (ПДУ); ТМ — блоки телеметрии; ГС — устройство дуплексной громкой связи; ТМ — устройство приема видеосигнала на телемонитор. Высоковольтный терминал: К — блок привода клапана натекателя; М — блок запуска модулятора дуги; ДШК — дешифратор команд управления электроприводами; ТМ — блоки телеметрии; ГС — устройство дуплексной громкой связи; ТК — устройство передачи видеосигналов от телевизионной камеры

Оператор с пульта управления дистанционно устанавливает адрес информационного канала на высоковольтном терминале и получает его текущее значение на цифровом табло частотомера. В устройстве использована двухпроводная приемопередающая ВОЛС. Положительным качеством такой телеметрии являются простота и надежность, недостатком — выборочный контроль информационного канала, создающий определенные неудобства при использовании на ЭФУ большого количества датчиков. Более совершенная световодная система дистанционного измерения параметров ионного источника с выводом информации на дисплей построена на основе блоков КАМАК

[68]. Она состоит из двух частей (рис. 23): измерительной, находящейся на высоковольтном терминале, и управляющей, расположенной под потенциалом «земля» на пульте управления ЛУ-20. Измерительная часть, расположенная на высоковольтном терминале и работающая в экстремальных условиях (сильные электромагнитные помехи широкого спектра частот, генерируемые действующим оборудованием ускорителя и высоким напряжением (750 кВ), перепады температур, сложная радиационная обстановка, маломощный источник питания и т.д.), максимально упрощена. Она содержит необходимые аналоговые блоки, преобразующие аналоговые сигналы в импульсные, что позволяет улучшить помехоустойчивость системы и упростить передачу сигналов по линии ВОЛС на потенциал «земля». С целью уменьшения количества параллельных каналов, образованных линиями ВОЛС, выбран последовательный способ опроса и передачи информации с датчиков. Это способ нуждается в использовании аналогового мультиплексора, но зато необходим только один быстродействующий преобразователь управляемого напряжения. Количество параллельных каналов сокращается с 16 до 2 (один для данных и один для синхронизации).

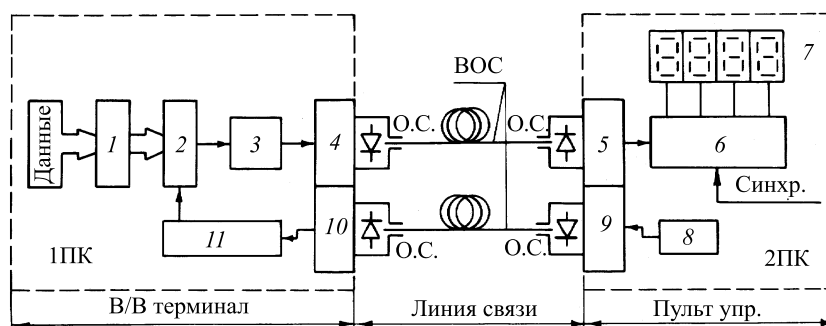


Рис. 23. Структурная схема телеметрической системы. Высоковольтный терминал: 1 — нормирующие усилители; 2 — аналоговый мультиплексор; 3 — преобразователь напряжение — частота; 4 — модулятор светодиода; 10 — оптический приемник; 11 — счетчик; ОС — оптический соединитель. Пульт управления ионным источником: 5 — приемный оптический модуль; 6 — электронный частотомер; 7 — цифровой индикатор; 8 — устройство выбора датчика; 9 — оптический передатчик

Помехозащищенные цифровые системы для работы в экстремальных условиях. Световодная система со строительной длиной 50 м. В результате выполнения цикла работ по совершенствованию и созданию каналов ВОЛС для работы в экстремальных условиях были созданы помехозащищенные системы, характеризующие качественно иной подход к решению поставленной задачи, что достигается путем использования радиационно стойкого опти-

ческого волокна типа кварц — полимер с диаметром 200 мкм, числовой апертурой $N > 0,2$ и применением число-импульсного кода с защитой и повторением. Экспериментально установлено [72], что для устойчивой работы системы синхронизации (отношение сигнал/шум > 10), минимальная величина сигнала в цепи фотодиода должна быть не менее 5 мкА. Для получения такого тока, протекающего через фотодиод-приемник (ФП), мощность излучения, падающего на светочувствительную площадку ФП, должна быть больше 15 мкВт. Однако с учетом температурной зависимости излучателя и необходимости обеспечения нормального функционирования системы в диапазоне 263–323 К мощность излучения необходимо повысить в 1,5–2 раза.

Из доступных излучателей светодиод АЛ107Б является недорогим комплектующим изделием и, благодаря своей конструкции, удобным для установки в оптический соединитель [68]. При токе накачки 100 мА он позволяет получать оптическую мощность до 10 мВт. При использовании ВОС типа «кварц — кварц» диаметром 125/50 мкм и светодиода АЛ107Б потери при их стыковке составляют 30 дБ. С учетом этих потерь введенная в ВОС оптическая мощность составляет 10 мкВт, что явно недостаточно для надежной работы системы. Для получения повышенной мощности излучения режим работы светодиода необходимо форсировать. На рис. 24 показана зависимость $P(I)$ для светодиода типа АЛ107Б [14, 16] при длительности импульсов 1 мкс. Выходной каскад, собранный по схеме генератора тока, обеспечивает световод импульсным током питания с амплитудой ~ 16 А. При этом допустимая нагрузка определяется максимальной температурой $p-n$ -перехода светоизлучающего диода (СИД) и нагрузочной способностью контактных выводов. Минимальный интервал между импульсами во время отработки макета был принят равным 100 мкс. Измерения показали, что структура перехода световода не претерпевала необратимых изменений, а нагрев токовыводов не сказывался на работе прибора. Таким образом, подбирая необходимую скважность, можно обеспечить достаточно высокую мощность, на один-два порядка превышающую номинальную мощность СИД. Однако длительность световых импульсов ограничена быстродействием фотоприемника. Если фототок успевает установиться за $3 - 4 \tau_{\text{ф}}$, то $\tau_{\text{и}} > 3 - 4 \tau_{\text{ф}}$, где $\tau_{\text{ф}}$ — постоянная времени фотоприемника. После макетирования был выбран режим работы СИД с током

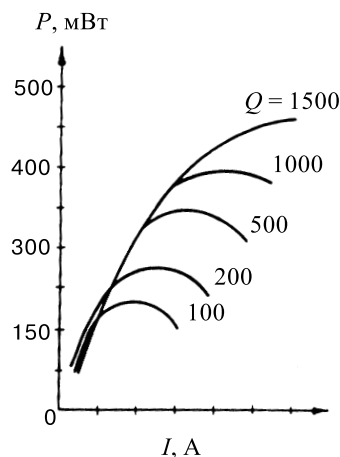


Рис. 24. Зависимость $P(I_{\text{и}})$ для светодиода АЛ107Б при длительности импульсов 1 мкс

накачки 4 А при длительности импульса 3 мкс. Частота следования импульсов синхронизации ЭФУ находится в диапазоне $1 \div 0,1$ Гц, что соответствует нормальным условиям эксплуатации аппаратуры ВОЛС.

При настройке режимов работы ионного источника для линейного ускорителя ЛУ-20 характерно использование следующих регулировок: ток магнита источника; напряжение на катодe; напряжение экстракции ионов; напряжение заряда линии; скорость натекания газа; напряжение на фокусирующем электроде. Регулирующими элементами являются узлы «мотор — лабораторный трансформатор» с потенциометрическими датчиками положения. Для управления шестью «интегрированными» таким способом узлами, установленными на высоковольтной платформе, используется волоконно-оптическая линия связи с последовательной передачей команд [39]. Световодный канал управления включает в себя задающую и исполнительную части.

Задающая часть состоит из устройства автоматического выбора канала управления (АВКУ), кодирующего устройства (кодера) и передающего оптического модуля (ПОМ) с оптическим соединителем (ОС). Коммуникационной средой световодного канала служит ВОС КП200. АВКУ предназначено для последовательного подключения каналов ($1 \div 14$) и управления ими. Кодирование команды управления производится кодером, причем выходной число-импульсный код сопоставляется в узле сравнения с кодом предыдущей посылки, записанной в регистр памяти устройства. Если эти коды идентичны, то после окончания последнего импульса в пачке устройство дает разрешение на выдачу команды на выход.

Исполнительная часть состоит из приемного оптического модуля (ПРОМ) с оптическим соединителем для подключения ВОС и декодирующего устройства. Последнее работает таким образом, что командный сигнал поступает на привод реле только в том случае, если число импульсов в принятой командной посылке такое же, как и в предыдущей. Измеренная эффективность ввода излучения в волокно составила $(1 \pm 0,1)\%$, что близко к расчетной. При мощности излучения световода ПОМ, равной 8 мВт, мощность излучения на выходе кварц-полимерного ВОС длиной 50 м составила 65 мкВт, что вполне достаточно для надежной работы ВОЛС.

Многоканальная цифровая помехозащищенная световодная система со строительной длиной 630 м [73]. В [60] описана 19-канальная система связи с большими строительными длинами: $100 \div 1000$ м. С этой целью разработан синхронный волоконно-оптический мультиплексор (ВОМ) с циклическим опросом. Работа системы основана на временном уплотнении цифровых сигналов с применением манчестерского кода M , содержащего информационную последовательность и синхросигналы.

Необходимость в применении манчестерского кода возникает из-за большого числа нулей или единиц в передаваемой информации, что может привести к неоправданному расходу ресурса оптического передатчика. Электри-

ческие сигналы, предназначенные для передачи, преобразуются в манчестерский код с помощью параллельно-последовательного регистра и шифратора. В оптическом передатчике эти сигналы формируют световые импульсы, вводимые в ВОС для переноса информации на приемную часть схемы. В оптическом приемнике световые импульсы преобразуются в последовательность электрических сигналов в манчестерском коде. Дешифратор выделяет тактовые импульсы и биты информации для записи их в сдвиговый регистр. Полученный кадр записывается в выходной буфер в момент прихода синхроимпульса, который вырабатывается дешифратором в конце информационной последовательности.

Таким образом, можно выделить две основные особенности протяженных ВОЛС. Первая заключается в необходимости использования блока для преобразования параллельного входного кода в последовательный, а также жесткой привязки фронтов синхроимпульсов и информационных кадров на входе демультиплексора. Вторая особенность относится к схемам электронного обрамления и состоит в том, что в отсутствие информационных слов на модулятор оптического передатчика подается последовательность импульсов с частотой тактового генератора. Это позволяет держать передающий и приемный модули ВОЛС в рабочем состоянии и не пропустить информационный разряд. В предложенной системе ВОМ с целью повышения помехоустойчивости реализован метод повторной передачи информации, который компенсирует как возможные сбои в работе электронных блоков системы, так и помехи, наводимые в ВОС в импульсных, радиационных и электромагнитных полях.

Все процессы синхронизации при приеме цифровой информации выполняются на уровне разрядов, а также на уровне кадров. При этом сохраняется основной принцип синхронного метода уплотнения: в отсутствие информационных слов на передающий оптический модуль поступает последовательность импульсов тактового генератора (информационный нуль), а каждое слово начинается с синхروпаузы. Максимальную частоту следования информационных слов для данной структуры мультиплексора (с повторной передачей информации) можно определить из выражения [73]:

$$F = f_T / 2K(M + 1) + m,$$

где M — общее количество разрядов слова, f_T — тактовая частота генератора, m — длительность синхروпаузы (равная числу периодов тактовой частоты), $K = (1, 1 \div 1, 4)$ — коэффициент запаса.

Световой последовательный асинхронный канал связи [74]. Эксплуатация световодных линий на ЭФУ предполагает работу аппаратуры ВОЛС с различными источниками цифровой информации. Для большинства среднескоростных систем, создаваемых для управления и контроля ЭФУ, весьма

перспективно использование асинхронной передачи данных [74], при которой информация в канал связи передается по одному символу, содержащему стартовый бит, данные, контрольный разряд по четности и стоповые биты. При использовании этого способа передачи данных максимальная длина передаваемого слова по каналу ВОЛС составляет $19 \div 20$ бит. Синхронизация передающей и приемной части системы осуществляется от двух независимых генераторов синхроимпульсов, стабилизированных кварцем. Выбирая частоту этих генераторов значительно выше скорости передачи данных, можно легко синхронизовать ее по каналу каждого символа. Передача символа начинается сигналом «Старт» и заканчивается сигналом «Стоп».

Для организации связи «удаленный объект — ЭВМ», а также «ЭВМ — ЭВМ» были изготовлены блоки двухволоконной световодной линии связи, осуществляющие прием и передачу цифровых данных между двумя приемопередающими устройствами ВОЛС. Обмен производится 16-разрядными словами, преобразуемыми из параллельного кода в последовательный, и наоборот (в зависимости от направления обмена). Оптоэлектронные модули и электронное оборудование системы выполнены в стандарте КАМАК.

В [70, 71, 75, 76] описана разработка и использование автоматизированной модульной системы управления и контроля ионного источника «Крион-С». Система создана на базе персонального компьютера IBM PC и двух крейтов КАМАК — «активного» и «пассивного», расположенных на пульте управления линейного ускорителя ЛУ-20 и на высоковольтном термине инжектора ускорителя, находящегося под потенциалом 700 кВ. Программное обеспечение компьютера, взаимодействующего с «активным крейтом» на ЛУ-20, написано на языке ПАСКАЛЬ. Особенность функционирования системы контроля ионизатора состоит в том, что опрос датчиков, расположенных под высоковольтным потенциалом, выполняется регистрирующей аппаратурой КАМАК, работающей по жестко заданному алгоритму и без участия компьютера.

Ввиду некритичности системы контроля к быстродействию и в целях упрощения функционирования введен программный режим работы с аппаратурой КАМАК. В качестве коммуникационной среды для создания каналов передачи информации «терминал» — пульт ЛУ-20 использован ВОС со строительной длиной 50 м. Управление исполнительными устройствами ионного источника осуществляется с помощью многоканального таймера, в крейте КАМАК под потенциалом «земля». Структура таймера предусматривает работу источника в двух режимах: в режиме наладки (с запуском от имитатора) и в режиме синхронизации с циклом ускорителя. Задержанные импульсы передаются на «потенциал» с помощью многоканального волоконно-оптического мультиплексора. Одним из задержанных импульсов инициируется цикл опроса 15 гальванически развязанных датчиков [69] систем контроля ионизатора. Цикл измерения включает в себя оцифровку каж-

дого из параметров и передачу их по световодному асинхронному каналу связи на пульт управления ЛУ-20. С помощью персональной ЭВМ данные приводятся к физическим размерностям и отображаются на экране цветного дисплея. Кроме отображения информации выполняется контроль и предупреждение дежурного персонала о выходе параметров ионного источника за установленные пределы. Нижние и верхние пределы для всех измерений величин устанавливаются оператором в диалоговом режиме при запуске программы либо считываются из файла. Возможен также полный или частичный отказ от контроля значений измеряемых величин. Система контролирует и отображает следующие величины: магнитное поле соленоида (с точностью до 5%); вакуум (индикаторный режим); криогенные температуры (с точностью до 0,2%); электронный ток, потенциал катода, распределение потенциалов на секциях дрейфовых структур источника (с точностью до 0,1%).

9. ТЕЛЕВИЗИОННАЯ ТЕЛЕМЕТРИЯ НА ВЫСОКОВОЛЬТНОМ УСКОРИТЕЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛОГОВЫХ ВОЛС

Световодные системы связи для передачи телевизионной информации на высоковольтных ЭФУ используются для дистанционного наблюдения на экране телевизионного монитора черно-белого или цветного изображения при проведении научно-технических экспериментов и неконтактных измерений телевизионными методами. Перспективность применения ВОЛС на ЭФУ в основном определяется успешным сочетанием достоинств волоконных световодов и цифровых методов передачи информации, что обусловлено серьезными преимуществами цифровых систем связи перед аналоговыми: высокой помехоустойчивостью к воздействию внешних помех и аппаратурных искажений. Однако при наличии источника аналоговой информации использование цифровых методов приводит к существенному расширению частотного спектра передаваемого сигнала. Это особенно проявляется при кодировании широкополосных сигналов с большим динамическим диапазоном. Так, для передачи телевизионного видеосигнала с использованием цифровой ИКМ-системы ВОЛС необходимая полоса пропускания должна быть в $8 \div 20$ раз шире [3].

Ускорить разработку световодного канала связи для передачи видеосигналов можно, если пойти по пути создания аналоговой ВОЛС с использованием модуляции по интенсивности. Такие системы дешевле, чем цифровые, проще сопрягаются с обычными трактами передачи аналоговых сигналов, так как не требуют включения в канал связи АЦП и ЦАП. Особенности аналоговой передачи по сравнению с цифровой является необходимость получения большого отношения сигнал/шум на выходе приемника и высокой линейности характеристик излучателя по всему тракту. При этом сниже-

ние искажений может быть получено как путем установки излучателей с лучшими ватт-амперными характеристиками, так и соответствующими схемотехническими методами. Предпосылками для создания аналоговых ВОЛС являются сокращение полосы пропускания и необходимость использования в канале связи: многомодовых многожильных (жгутовых волоконных) световодов с большим диаметром световедущего жгута без применения согласующих элементов [44]; многомодовых одножильных световодов с малым диаметром световедущей жилы и согласующими элементами на торцах [71].

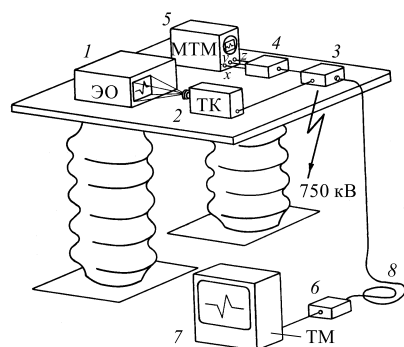


Рис. 25. Структурная схема размещения элементов телевизионной телеметрии на высоковольтном термине ионного источника (обозначения в тексте)

настройки системы в условиях низкой освещенности и жестко лимитированного пространства. Впервые было создано устройство формирования телевизионного изображения (УФТИ), позволяющее использовать любой осциллограф, имеющий вход «Z» для телевизионного изображения. Структурная схема размещения основных элементов устройства приведена на рис. 25. Аппаратура, размещенная на высоковольтной платформе, включает в себя: 1 — осциллограф; 2 — телекамеру; 3 — передатчик ВОЛС; 4 — УФТИ; 5 — микротелемонитор. На пульте управления ионным источником расположены: 6 — приемник ВОЛС; 7 — телемонитор ВК50В60. В канале передачи информации используется 30 м жгутовой ВОС связи (8).

Система работает следующим образом. Аналоговый сигнал измеряется с помощью осциллографа С8-17 с «памятью». Телевизионная камера типа КТП-39 [43], установленная на расстоянии 0,5 м от экрана последнего, выполняет считывание информации. Видеосигнал от телекамеры поступает на входы: передатчика ВОЛС, где он преобразуется в световой поток, модулированный по интенсивности; блока УФТИ, подключенного к малогабаритному

В [50] описана система телевизионной телеметрии, изготовленная на базе применения промышленной телевизионной установки [43] и блоков ВОЛС, выполняющих передачу видеосигналов в аналоговом виде от высоковольтного терминала на пульт управления синхрофазотроном. Информация, воспроизводимая на экране телемонитора, позволяет дежурному оператору дистанционно контролировать рабочие параметры подсистем ионного источника. Одним из важных вопросов, требующих своего решения при разработке телевизионной телеметрии на ЛУ-20, является создание малогабаритного телемонитора для работы на высоковольтном термине ионного источника в период на-

осциллографу, который используется в качестве микротелемонитора и служит для контроля качества передаваемого изображения в условиях низкой освещенности и жестко лимитированного пространства [50]; фотоприемного устройства ВОЛС, расположенного на пульте управления линейного ускорителя.

На рис. 26 приведена фотография с экрана телемонитора, установленного на пульте управления, при регистрации двух импульсных сигналов: импульса контрольного напряжения модулятора и импульса тока дуги источника.

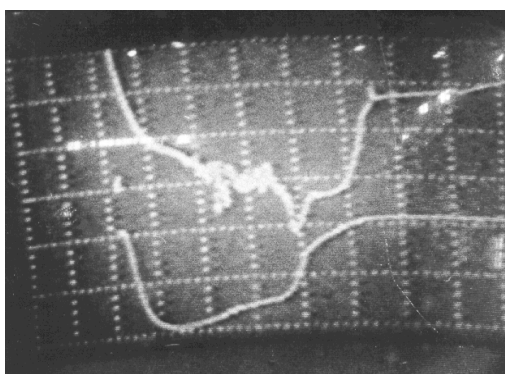


Рис. 26. Импульсные сигналы на экране телемонитора

Использование телевизионной телеметрии для регистрации импульсных процессов, происходящих в подсистемах ионного источника на высоковольтном терминале, имеет ряд преимуществ: использование ВОЛС в качестве канала связи в условиях высокого уровня электромагнитных и импульсных радиационных полей снимает значительную часть этих проблем и обеспечивает гальваническую развязку; реализуется передача сигналов в широком частотном диапазоне, т.к. используемый осциллограф имеет полосу пропускания от 0 до 5 МГц; повышается точность измерения, поскольку на телемониторе оператор измерения производится по видимой масштабной сетке осциллографа; повышается помехоустойчивость канала связи, т.к. съем информации, благодаря использованию осциллографа с «с памятью», происходит в паузе между мощными рабочими импульсами ионного источника; обеспечивается необходимая аппаратная гибкость. Простая замена осциллографа С8-17 на интерфейс стрелочных приборов, подключенных к соответствующим датчикам, позволяет осуществить телевизионный контроль основных медленно изменяющихся параметров ионного источника.

Эксперименты по неконтактным измерениям телевизионными методами впервые проводились в ЛВЭ ОИЯИ в 1985 г. Они были связаны с дистанци-

онным контролем рабочих параметров высоковольтного ускорителя [54, 56]. С получением нового оборудования и развитием элементной базы ВОЛС эти работы были продолжены. В [71] описана 50 м аналоговая ВОЛС для передачи видеосигналов с высоковольтного терминала ионного источника линейного ускорителя с использованием полупроводникового лазера и оптического волокна с диаметром сердцевины 50 мкм. Для эффективного ввода излучения в световод КК125/50 от лазерного диода использовались согласующие микролинзы. Недостатки, свойственные аналоговым ВОЛС, обусловлены нестабильностями потерь в световодах и оптических соединителях, а также возможным изменением уровня излучаемой мощности передатчика. Эти и другие трудности, связанные с разработкой и конструированием данной световодной системы, можно решить, в основном, путем рационального выбора компонентов.

Система для неконтактных измерений телевизионными методами включает в себя: передающий оптический модуль с лазерным диодом ИЛПН-102 [17], приемный оптический модуль с гетерофототранзистором, волоконно-оптическую линию связи с согласующими микролинзами, телекамеру КТП-79 на ПЗС-матрице и телемонитор. Существенным моментом, который необходимо учитывать при проектировании систем телевизионной телеметрии с использованием твердотельных приемников изображения, является их сравнительно низкая радиационная стойкость. Доза радиации, вызывающая заметные повреждения в коммерческих ПЗС с поверхностным каналом, оценивается в 10^3 рад, а сильная деградация происходит при 10^4 рад. Следовательно, состояние ПЗС-матрицы может служить индикатором верхнего предела дозы облучения.

Работая в данном составе аппаратуры, прикладная телевизионная установка КТП-79 «Матрица» [43] проходила проверку на радиационную стойкость. Отличительная особенность этой камеры — использование в ней в качестве преобразователя «свет—сигнал» матрицы приборов с зарядовой связью с числом элементов 288×256 . В камере реализуется принцип самосканируемой развертки и осуществляется пространственная дискретизация потенциального рельефа (зарядового изображения) как по вертикали, так и по горизонтали. Поэтому камера обеспечивает жесткий растр с фиксированной геометрией. Нелинейные искажения в камере отсутствуют, а геометрические — определяются только объективом. Результаты испытаний телекамеры в радиационных условиях показали, что заметной деградации, связанной с накоплением заряда в слое диэлектрика ПЗС-структуры в течение 100 часов наработки на ЛУ-20 при ускорении протонов, не обнаружено. Разрешающая способность системы показана на рис. 27. По тестовой таблице она соответствует 120—130 телевизионным линиям по горизонтали и вертикали при освещенности 4 лк.

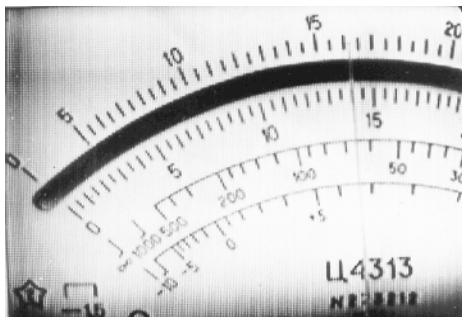


Рис. 27. Разрешающая способность телевизионной системы с использованием ВОЛС

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Волоконно-оптические системы связи широко используются в экспериментах по физике высоких энергий и в ускорительной технике. Они также незаменимы в будущих экспериментах на ЛНС. Описанные в данном обзоре разработки оптических систем связи, которые успешно используются на ускорительном комплексе ЛВЭ, могут быть применены и в других физических экспериментах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов Ю.К. — ПТЭ, 1994, No.6, с.6.
2. Акимов Ю.К. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, вып.2, с.496.
3. Bobou M., Buneton C., Bystricky J. et al. — Nucl. Instrum. and Methods, 1979, v.160, p.1.
4. Основы волоконной оптической связи. Пер. с англ. под ред. Дианова Е.М., М.: Сов. Радио, 1980.
5. Козанне А., Флере Ж., Мэтр Г. и др. — Оптика и связь: Оптическая передача и обработка информации. Под ред. Соколова В.К., М.: Мир, 1984.
6. Носов Ю.Р. — Зарубежная радиоэлектроника, 1975, No.11, с.54.
7. Alves A.P. — In: 1987 CERN School of Computing, CERN 88-03, Geneva, 1988, p.49.
8. Миллер С.Е., Маркатили Е.А., Тинг Ли — ТИИЭР, 1972, т.61, No.12, с.12.
9. Григорьянц В.В., Замятин А.А., Иванов Г.А. и др. — Квантовая электроника, 1992, т.9, No.7, с.1474.
10. Александров И.В., Бухтиярова Т.В., Дьяченко А.А. и др. — Квантовая электроника, 1980, т.7, No.1, с.186.
11. Peng K.C., Sahu S.K., Nuang H.C. et al. — KEK Preprint, 96-02, Ibaraki-ken, 1996.
12. Прохоров Ф.М. — Радиотехника, 1982, т.37, No.2, с.5.
13. Стельмах М.Ф. — Радиотехника, 1982, т.37, No.2, с.57.

14. **Коган Л.М.** — Полупроводниковые светоизлучающие диоды. М.: Энергоатомиздат, 1983.
15. ГОСТ 17490-77. Лазеры и излучатели инжекционные, диоды лазерные. Основные параметры и присоединительные размеры. М.: Из-во стандартов, 1986.
16. **Мухитдинов М.** — Светоизлучающие диоды и их применение. М.: Радио и связь, 1988.
17. **Ботев Д., Херскович Д.Д.** — ТИИР, 1980, т.68, No.6, с.57.
18. **Ватутин В.М., Конторов М.Д.** — Автоматизация обработки информации и управления физическими установками. М.: Радиотехнический институт АН СССР, 1980, No.40, с.123.
19. ГОСТ 21934. Приемники излучения полупроводниковые. Фотоэлектрические и фотоприемные устройства. Термины и определения. М.: Из-во стандартов, 1985.
20. ГОСТ 24354-80. Излучатели полупроводниковые. Основные параметры. М.: Из-во стандартов, 1980.
21. **Kayoun P., Puech C., Papuchon M. et al.** — Electron. Letters, 1981, v.17, p.400.
22. **Tamaki Y., Kayama K., Furukawa H. et al.** — J. Light Wave Technology, 1986, v.LT-4, No.8, p.1248.
23. **Campos M.D., Hwang C.I., Bossi R.I. et al.** — IEEE I. Quant. Electron, 1977, v.QE-13, p.687.
24. **Paoly T.L.** — IEEE I. Quant. Electron, 1975, v.QE-11, p.276.
25. **Arai S., Svemaizu Y., Itaya Y.** — IEEE I. Quant. Electron, 1980, v.QE-16, No.2, p.197.
26. ГОСТ 26599. Компоненты волоконно-оптических систем связи, термины и определения. М.: Из-во стандартов, 1985.
27. **Шаталов Ф.А.** — Промышленные ускорители и радиационная технология. М.: Радиотехнический институт АН СССР, 1983, с.44.
28. ГОСТ 2.761-84. Обозначения условные графические в схемах. Компоненты световодных систем. М.: Госкомитет по стандартам, 1988.
29. **Семенов Н.А.** — Оптические кабели связи. М.: Радио и связь, 1981.
30. Оптическая связь. Под ред. Теунина И.И. М.: Радио и связь, 1984.
31. **Унгер Г.Г.** — Оптическая связь. М.: Связь, 1979.
32. Волоконная оптика и приборостроение. Под общей ред. М.М. Бутусова. Л.: Машиностроение, 1987.
33. **Kazovsky L.G.** — IEEE Trans. on Electron Devices, 1985, v.ED32, No.12, 2530.
34. **Aiki M.** — IEEE Trans. on Electron Devices, 1985, v.ED-32, No.12, p.2693.
35. **Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 10-81-295, Дубна, 1981.
36. **Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 13-88-723, Дубна, 1988.
37. **Гусаков Ю.В., Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 313-91-148, Дубна, 1991.
38. **Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 13-85-599, Дубна, 1985.
39. **Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 13-90-63, Дубна, 1990.
40. **Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 13-91-317, Дубна, 1991.
41. **Мурадян А.Г., Гинзбург С.А.** — Системы передачи информации по оптическому кабелю. М.: Связь, 1980.
42. **Элиот Г., Элиот Х.** — Волоконная оптика в системах связи. М.: Мир, 1981.
43. **Костыков Ю.В.** — Прикладное телевидение. М.: Энергия, 1980.
44. **Романов Ю.И.** — ОИЯИ, 13-86-513, Дубна, 1986.

45. Романов Ю.И. — ОИЯИ, P13-92-366, Дубна, 1992.
46. Leone M., Trascatti L., Giovanni S. et al. — Preprint Laboratori Nazionali di Frascati. LNF-92/079 (P). Frascati, 1992.
47. Karle A., Mikolajski T., Cichos S. — DESY 96-186, Zeuten, 1996.
48. Hi Hong, Lin Yan, Carney S. et al. — Am. J. Phys, 1995, v.63. p.1033.
49. Hall G. — Preprint Imperial College of Science, Technology and Medicine, IC/HEP/96-6, London, 1996
50. Vasey F. — EOP. In: Proc. Second Workshop on Electronics for LHC Experiments. CERN/LHCC/96-39, Geneva, 1996, p.373.
51. Bilei G.M., Checcui B. — Ibid, p.397.
52. Cervelli G., Grabit R., Jarron P. et al. — Ibid, p.392.
53. Dinkespiler B., Jeavaud M. — Ibid, p.397.
54. Hunziker W. — Ibid, p.365.
55. Beringer J., Borer K., Brooks C.B. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1996, v.A373, p.320. .
56. Gill K., Grabit R., Persello M. et al. — Ibid, p.387.
57. Beringer J., Borer K., Mommsen R. et al. — Ibid, p.382.
58. Letheren M. — In: 1995 CERN School of Computing. CERN 95-05, Geneva, 1995.
59. Ahmed H., Bregi P., Haag J.-P. et al. — Electrical Communication, 1990, v.64, No.2/3, p.194.
60. Greiman W., Mapelly L. — Preprint RD13-TN132, p.1.
61. Rubin G., Denes E., Ero J. et al. — In: Proc. First Workshop on Electronics for LHC Experiments. CERN/LHCC/95-56, p.352.
62. Мальцев И.Г. — ИФВЭ, 71-82, Серпухов, 1971.
63. Anichenko N.G., Romanov Yu.I., Zinoveiv L.P. — In: High Energy Spin Physics, 1982, Brookhaven National Lab., p.445.
64. Романов Ю.И. — ОИЯИ, 13-83-478, Дубна, 1983.
65. Романов Ю.И. — В сб.: Труды восьмого всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1985. т.1, с.352.
66. Бычков Ю.А., Романов Ю.И., Сейфуллин Ш.З. — ОИЯИ, 93484, Дубна, 1967.
67. Герасимов В.П., Колесов С.Я. — В кн.: Электрофизическая аппаратура. М.: Атомиздат, 1964, вып.2, с.131.
68. Романов Ю.И., Турзо И. — ОИЯИ, 13-86-513, Дубна, 1986.
69. Романов Ю.И. В сб.: Труды десятого всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т.1, ОИЯИ, 13-86-533, Дубна, 1986. с.71.
70. Kovalenko A.D., Romanov Yu.I., Tsarenkov A.P. — JINR Rapid Communications, 1993, No.2(59), p.53.
71. Овсянников В.П., Романов Ю.И., Царенков А.П. и др. — ОИЯИ, P13-93-219, Дубна, 1993.
72. Романов Ю.И. — ОИЯИ, 13-89-847, Дубна, 1989.
73. Романов Ю.И. — ОИЯИ, 13-88-636, Дубна, 1988.
74. Романов Ю.И. — ОИЯИ, P13-90-536, Дубна, 1990.
75. Романов Ю.И. — ОИЯИ, P13-93-105, Дубна, 1993.
76. Романов Ю.И. — ОИЯИ, P13-93-128, Дубна, 1993.

ON SYMMETRY IN MODERN PHYSICS (Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Academician V.A.Fock)

A.M.Baldin

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

The development of the gauge symmetry has resulted in a complete determination of the Lagrangians for electromagnetic, weak, strong and gravitational interactions and has created illusions about the construction of «the theory of everything». However, in just the same way as in classical physics, it became clear that the deductive obtaining of solutions (laws of Nature) is based not only on the principles of the Lagrangian symmetry. To find unambiguously solutions some *additional conditions* are needed without which the solutions of the Lagrange equations are ambiguous. The additional conditions such as hypotheses about the integral symmetries of solutions, the boundary and initial conditions, the constants entering Lagrangians, and so on are essential so that in a number of cases it is possible to construct models (solutions, laws of Nature) without the recourse to the Lagrange method. An example of using such an approach in one of the rapidly developing domains of modern physics, namely relativistic nuclear physics, is given. An exact mathematical language of the gauge symmetry is the differential geometry and that of the additional conditions is the topology, the parameter space properties as a whole. In the present paper the fundamental contribution of V.A.Fock to the development of the concept of space, the primary concept of physics, is given.

Разработка калибровочной симметрии привела к полному определению лагранжианов взаимодействия для электромагнитных, слабых, сильных и гравитационных взаимодействий и создала иллюзии о построении «теории всего». Однако, так же, как и в классической физике, стало ясно, что в основе дедуктивного получения решений (законов природы) лежат не только принципы симметрии лагранжианов. Для однозначного определения решения необходимы *дополнительные условия*, без которых решения уравнений Лагранжа неоднозначны. Дополнительные условия: предположения о константах, входящих в лагранжианы, интегральные симметрии решений, краевые и начальные условия и т.п., столь существенны, что в ряде случаев можно конструировать модели (решения, законы природы), не опираясь на лагранжев метод. В качестве примера приводится использование такого подхода в одном из наиболее бурно развивающихся разделов современной физики — релятивистской ядерной физике. Точный математический язык калибровочной симметрии — дифференциальная геометрия, а точный язык для дополнительных условий — топология, свойства пространства параметров в целом. В настоящей статье отмечается фундаментальный вклад В.А.Фока в разработку понятия пространства — первичного понятия физики.

At the beginning of the '50s, at an all-union conference, Vladimir Alexandrovich Fock presented a large talk on the theory of gravitation. During the discussion, a very competent physicist said that Fock in his talk gave the well-known Einstein equations (by implying the absence of novelty). Then Fock

replied: «I have known your philosophy for a long time: if the equations are the same, then the theory is also the same». As we presently know, at that time V.A.Fock was working on a fundamental monograph «The Theory of Space, Time and Gravitation» [1]. In the preface to the first edition of the book he writes: «The results of these investigations have led us to the conviction that, at least for the most important class of physical problems, it is possible to obtain unambiguous solutions for the gravitation equations by imposing additional conditions compatible with them. This idea has underlain a new point of view on the whole of the theory of gravitation. Therefore, there arises the necessity of formulating the whole of the theory of space, time and gravitation from this newly elaborated point of view, which has just been done in this book».

Fock's point of view on the theory of relativity and the theory of gravitation was after all generally recognized. Fock stressed that the theory of gravitation and, generally speaking, any theory cannot be formulated by confining oneself to the local consideration. It is necessary to consider the «space as a whole», its global structure, and its topology. Otherwise, it is impossible to formulate the problem unambiguously. The equations of any field are the equations in partial derivatives the solutions of which are unambiguous only in the presence of initial, boundary and limiting conditions.

The laws of Nature are relations between invariants, as far as they should not be dependent on symmetry transformations. The hypothesis about the symmetry possessed by a system are axioms determining the state of the system and its behaviour. Starting from symmetry principles it is possible to derive new laws of Nature deductively, and not only by observing physical objects or solving equations. Weyl wrote that as far as he could judge, all *a priori* ideas in physics have a symmetry origin. The symmetry of the «space as a whole» essentially supplements the symmetry and invariance defining the Lagrangian density, and, in many cases, enables us to construct models (solutions, laws of Nature) starting from the first principles, not using the Lagrange method.

For a long time, mathematicians have paid attention to the integral invariants in topology and to the connection between differential geometry and the theory of surfaces. This trend was initiated by the famous Gauss-Bonnet theorem which says that the integral of the Gaussian curvature over an entire surface is a topological invariant and is integer multiple of 2π . For a sphere, no matter how distorted, the integral curvature is 4π , for a torus it is zero, while for the «double-holed torus» it is 4π , and so on. The Gaussian curvature is a local parameter. It can be measured by measuring the angles and the sides of small triangles. For example, to show the Earth to be round it is not necessary to circumnavigate the globe and to take photographs from outer space. Eratosphenes did it by comparing shadows in Alexandria and Syene.

Auxiliary spaces are useful in studying ordinary surfaces and their higher-dimensional analogs. One example is the space consisting of the tangent planes to

a surface. Such spaces are called «fiber bundles». The «fibers» are the auxiliary spaces — the tangent planes. The fiber bundles are an appropriate framework for gauge theories, developed to deal in a unified way with electromagnetic, weak and strong interactions.

Noting V.A.Fock's contribution to contemporary physics it is necessary to stress (this was also emphasized by Chen Ning Yang, one of the principal architects of the gauge theory) that the gauge theory is a generalization of «the gauge symmetry in electromagnetism known from the papers by Fock and Weyl».

In the 1930s and 1940s L.S.Pontrjagin and other mathematicians have found, without undergoing the influence of physical models, interesting topological invariants playing an ever-growing role in modern physics. The integral geometry makes it possible to study classical solutions for gauge fields. The merging of the newest areas of mathematics and theoretical physics enables us to hope that along this way one will succeed in finding methods for obtaining nonperturbative solutions of the Lagrange equations for gauge fields. The nonperturbative methods in the *Standard Model* take one of the central places in modern theoretical physics. Among them of special interest are multiboson processes in electroweak physics. These phenomena are associated with the violation of the sum of the baryon (B) and the lepton (L) numbers in the *Standard Model* [3]. Therefore such processes determine the evolution of $(B + L)$ at high temperature in the early universe, that is, the origin of the baryons — baryosynthesis. Also specific calculations show [5] that the processes with $(B + L)$ violation and production of many electroweak bosons might be *in principle* observable in collisions at energies higher than 18 TeV. The initial and the final states containing many bosons (many $\rightarrow$ many scattering) are described by quasi-classical methods with the use of nontrivial classical solutions of the field theory periodic — instantons. The $(B + L)$ violation is caused by tunnel transitions between the states with different topological charges q for the electroweak gauge fields and is described by the formula:

$$\Delta(B + L) = 6q.$$

The peaks of these potential barriers — sphalerons — (the energy E is ordinarily plotted against q) are, in the order of magnitude, equal to $m_w/\alpha_w \sim 10$ TeV, where m_w is the mass of an intermediate boson, and α_w is the electroweak interaction constant. The treatment of the auxiliary conditions describing the initial states of multiple interactions with the use of the topological properties of gauge fields has resulted in fundamental conclusions for elementary particle physics, cosmology [4] and even for designing a new generation of accelerators at superhigh energies [6].

In 1931, when solving the one-dimensional Heisenberg model of a ferromagnet, Bethe [7] formulated a hypothesis about a wave function of the model. In 1967 Ch.N.Yang has generalized [8] this hypothesis by imposing on matri-

ces $A(u)$ and $B(v)$, which occurred in the development of the hypothesis, the following conditions:

$$A(u) \cdot B(u+v) \cdot A(v) = B(v) \cdot A(u+v) \cdot B(u). \quad (1)$$

Many one-dimensional quantum mechanical problems, in which the Bethe hypothesis is valid, are known. In each case, the consistency condition is Eq. (1), where the operators $A(u)$ and $B(v)$ and the one-dimensional coordinates u and v take different forms in different problems. During the past ten or fifteen years, a large number of developments in physics and mathematics have led to the conclusion that Eq. (1) is a fundamental mathematical structure. Equation (1) has the generally accepted name — the Yang–Baxter equation.

Ch.N.Yang shows [9] how Eq. (1) affected modern physics and mathematics:

«Physics:

- One-dimensional quantum mechanical problems
- Two-dimensional classical statistical mechanical problems
- Conformal field theory

Mathematics:

- Knot theory, braid theory
- Operator theory
- Kopp algebra
- «Quantum groups»
- Topology of 3-manifold
- Monodromy of differential equations

There is an explosion of literature on these subjects. In order to find these, one could consult the three recent review volumes and reprint collections listed in the footnote*.

Why does the Yang–Baxter equation enter into so many different areas of mathematics and physics? I believe the answer is that the equation is a kind of generalization of the structure of the permutation group».

*120 Braid Group, Knot Theory and Statistical mechanics, eds. C.N.Yang and M.L.Ge (World Scientific, Singapore, 1989); Yang–Baxter Equation in Integrable Systems, ed. M.Jimbo (World Scientific, Singapore, 1990); Yang–Baxter Equations, Conformal Invariance and Integrability in Statistical Mechanics and Field Theory, eds. B.Barber and P.Pearce (World Scientific, Singapore, 1990).

A particular role of the one-dimensional problem is due to the possibility of establishing a definite order in the particle disposition in a one-dimensional space.

As a hypothesis about the properties of the solutions of statistical physics N.N. Bogolubov has formulated the correlation depletion principle [10]. The principle is based on the intuitive idea that the correlation between spatially separated groups of particles of a macroscopic system practically vanishes. The correlation depletion principle was successfully applied to the development of the theory of ferromagnetism, superfluidity and superconductivity. Also it is possible to formulate the notion of quasi-averages and the properties of the solutions that afterwards were given the name of spontaneous symmetry breaking.

It is interesting that the well-known attempt of Dirac to formulate a relativistic theory of dynamical systems [11] led him to the realization that it was possible to state only the necessary but not the sufficient conditions for this theory to exist. At the end of his remarkable article, Dirac writes, «Some further condition is needed to ensure that the interaction between two physical objects becomes small when the objects become far apart. It is not clear how this condition can be formulated mathematically». The correlation depletion principle of Bogolubov is formulated as an asymptotic form of the Green functions as universal (independent of the specific features of the system) linear forms from averages of the product of field functions. This principle gives mathematical formulation for the additional condition of the relativistic theory (Poisson's brackets) developed by Dirac.

In Refs. 12, 13 the correlation depletion principle is formulated both in relative 4-velocity space and the Lobachevsky space. The application of this principle to quantum chromodynamics of large distances (or, more precisely, of small relative velocities), to the description of multiple production processes, and, particularly, to relativistic nuclear physics was found to be especially productive. In these areas, the perturbative approach does not work, thus hypotheses of a fundamental character, i.e., auxiliary conditions, are needed. A collision of relativistic nuclei results in the production of many particles, and the interaction picture is very complicated. Both nucleon and quark-gluon degrees of freedom participate in the same collision. The number of the parameters of the problem is extremely large, and it is particularly important to discover the invariants [13]. Relativistic nuclear physics that was born at the beginning of the '70s in Dubna became one of the most intensively developed areas of high energy physics in many laboratories of the world.

The discovery of the laws of relativistic nuclear physics is a part of the general search for the laws describing relativistic multiparticle systems, including macroscopic systems. These problems were studied by outstanding scientists of the 20th century. The first studies were devoted to the transport equations which allowed the formulation of the thermodynamical properties of dilute relativistic multiple systems. The great success of quantum field theory in describing multiparticle systems on the basis of the Hamiltonian method has not resulted

however in great progress in the development of the problems of relativistic nuclear physics. In Refs. 12,13, it is shown that the approach to relativistic nuclear physics based on the geometry of velocity space and hypotheses about the asymptotic nature of the laws in this space allows us to put in order an enormous amount of experimental data and make quantitative predictions. Some of these predictions make many experiments on huge accelerators unnecessary and even condemned to failure. The methods of symmetry of the solutions utilized in these papers are analogous to the methods of the mechanics of continuous media and consist of the following:

1. The parameters describing the problem — the space defining parameters — are selected.
2. The symmetry of this space is seen or guessed, and the corresponding invariants are determined.
3. The laws of Nature are treated as relations between invariants. The mathematical language of symmetry — group theory — is especially effective here.
4. Additional principles — the correlation depletion principles, the intermediate asymptotics, the hypothesis of the analyticity of physical laws are used.

In the case of relativistic nuclear physics, the defining parameters are the cross sections, quantities derived from them, and the invariant dimensionless intervals in relative 4-velocity space $\mathbf{u}_i = \mathbf{p}_i/m_i$; $u_i^0 = E_i/m_i$:

$$b_{ik} = -(u_i - u_k)^2 = 2[(u_i \cdot u_k) - 1] = 2 \left[\frac{E_i \cdot E_k - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k}{m_i \cdot m_k} - 1 \right].$$

As far as the energies E_i and the momenta $\mathbf{p}_i$ are linked by the known relation $E_i^2 - \mathbf{p}_i^2 = m_i^2$, then $(u_i)^2 = (u_0)^2 - (\mathbf{u}_i)^2 = 1$. Instead of 4-dimensional space it is possible to introduce 3-dimensional one, with the 4th coordinate expressed in terms of the other three:

$$u_i^0 = \pm \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (2)$$

This equation is a two-sheeted hyperboloid. The geometry on the surface of the hyperboloid is the geometry of 3-dimensional Lobachevsky space, analogous to the geometry on the surface of a sphere. The interval between points on the surface of a sphere is given by the cosine of the angle of the great circle, and the interval on the surface of the hyperboloid is given by the hyperbolic cosine of the rapidity

$$\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{E + |\mathbf{p}|}{E - |\mathbf{p}|}.$$

The relation between the intervals b_{ik} and ρ_{ik} is of the form:

$$b_{ik} = 2[(u_i \cdot u_k) - 1] = 2[ch\rho_{ik} - 1].$$

The number of the parameters of b_{ik} is $n(n-1)/2$. The most complete description of the final states of nuclear collisions is connected with the use of triangulation and the construction of polyhedra in velocity space.

The introduction of the variable N_I and N_{II} characterizing the effective numbers of nucleons participating in the collisions of nuclei I and II has proved very productive. In a wide interval of relative velocities the additional variables N_I and N_{II} turned out to be continuous and smooth. The invariant that is employed to express a large number of the laws of relativistic nuclear physics has the meaning of the minimal mass

$$\min[m_0^2(u_I N_I + u_{II} N_{II})^2]^{1/2} = 2m_0\Pi$$

under the condition of conservation of the 4-momentum:

$$m_0 u_I N_I + m_0 u_{II} N_{II} = \sum_i p_i.$$

Here U_I and U_{II} are the 4-velocities of the nucleus as a whole, m_0 is the mass of one nucleon. The introduction of the single self-similarity parameter (invariant)

$$\Pi = \frac{1}{2} \sqrt{(u_I N_I + u_{II} N_{II})^2}$$

allowed a quantitative description of the cumulative effect, deep-subthreshold, near-threshold phenomena, and antimatter production in nucleus-nucleus collisions [14].

The equation

$$E \frac{d^3\sigma}{d\mathbf{p}} = C_1 A_I^{\alpha(N_I)} \cdot A_{II}^{\alpha(N_{II})} \cdot f(\Pi), \quad (3)$$

where A_I and A_{II} are the atomic weights of colliding nuclei, C_1 is the constant, describes a variety of nuclear reactions as the cross section changes by eight orders of magnitude. However, to find the limits of the parameter space, where the description of physical processes on the basis of this model becomes invalid, some auxiliary work is needed. Of special interest is the prediction [15] on this basis of the results of projected experiments on presently designed nuclear colliders. For collider energies the interval between the points I and II is:

$$(u_I \cdot u_{II}) = ch\rho_{I II} \gg 1.$$

The relation between the sides of the Lobachevsky triangle is of the form:

$$\begin{aligned}(u_I \cdot u_k) &= u_I^0 \cdot u_k^0 - \vec{u}_I \cdot \vec{u}_k = ch\rho_{Ik} = \\ &= ch\rho_{I\Pi} \cdot ch\rho_{\Pi k} - sh\rho_{I\Pi} \cdot sh\rho_{\Pi k} \cdot \rho_{\Pi k} \cdot \cos\theta_{Ik} \approx \\ &\approx ch\rho_{I\Pi}(ch\rho_{\Pi k} - sh\rho_{\Pi k} \cdot \cos\theta_{Ik}) = ch\rho_{I\Pi} \cdot x_k.\end{aligned}$$

Here x_k is a known light cone variable. At large relative velocities Eq. (2) turns into the light cone equation which is used in constructing models of high energy physics in velocity space.

After discovering non-Euclidean geometry Lobachevsky posed the problem of using it to describe real physical phenomena. The hypothesis that at large distances the relations between the sides and angles of triangles might satisfy a new geometry was not confirmed by his analysis of astronomical data.

V.A.Fock demonstrated the validity of the Lobachevsky geometry in relative velocity space by considering the phenomenon of astronomical aberration [1]. The phenomenon is that in two moving relatively each other frames of reference the directions to the same star do not coincide, but differ by the magnitude of aberration. To find this value it is necessary to construct a Lobachevsky triangle with vertices in the points $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}C$, where $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ are the velocities of the bodies to which both the frames are related. Here $\mathbf{a}$ is a unit vector in the direction of the light wave going from the star. In astronomical observations visible positions of a star are compared for different directions of motion of the globe along the orbit (annual aberration).

By analyzing the concept of physical space, Fock stresses that this primary concept is obtained by means of appropriate abstractions of space-time relations between material processes. The relations are established on the basis of the hypothesis about applicability of the Euclidean geometry to a real physical space as well as on the suppositions about the existence of solid bodies and rectilinear propagation of light.

Thus, the properties of the light and those of solid bodies (distance measurements) play the fundamental part in establishing the geometry of a real physical space. Another feasible way of determining the location of objects in space, which in principle differs from triangulation, is radiolocation or radiogeodesy. However, in any case, the definition of the concept of physical space depends on precision of measuring procedures. The correspondence of it to the mathematical concept of space requires some reservations. Fock also notes that the terms «the space as a whole», «conditions at infinity», and so on, are employed by him in the mathematical sense admitted in field theory. The space as a whole implies an area which is large enough for the field induced by a body system to be negligible on its boundaries. Depending on the character of the problem the dimensions of the area are very different. A micron compared with the atom may be thought of as an infinitely large quantity, the light year for the Sun system and billions of light

years for galaxy accumulation are infinitely large quantities. When formulating a theory, new generalizations are introduced, as a result of which the law may become approximate, but this does not diminish its fundamental importance.

Complicated real physical situations require simplified descriptions by means of symbolic, and even verbal, models based on experimentally testable hypotheses. However the correspondence of the physical space to the mathematical one appears not only as a result of generalization of experience and measuring procedures. The correspondence of the velocity space to the Lobachevsky space is a result of a deduction. More striking example is the introduction by Einstein of the Riemann space in the theory of gravitation which is of a particularly deductive nature. As Fock notices, this requires that the properties of the «space as a whole» should be considered. Otherwise, it is impossible to formulate the problem in an unambiguous manner. V.A.Fock analyses various suppositions and gives much attention to the theory of a space homogeneous at infinity. He attaches great importance to the possibility of introducing in this case a privileged frame of reference determined with an accuracy up to the Lorentz transformation (harmonic coordinates). All concrete problems of the theory of gravitation are solved in Ref. 1 in harmonic coordinates.

Special attention should be paid to Fock's formulation of the Hilbert space in quantum theory of radiations. In Ref. 16 Fock notices that the mathematical apparatus of quantum theory of emission and absorption of photons created by Dirac does not correspond to the physics of this phenomenon and suggests a mathematical basis of the theory. In his book «The Principles of Quantum Mechanics» Dirac called it «Fock's representation». Finally «Fock's space» suggested for mathematical description of the systems with an interaction Lagrangian changing the particle number became the generally recognized concept of quantum field theory. It is of far reaching importance in present-day applications of quantum chromodynamics, in particular, in quark-parton model.

REFERENCES

1. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Государственное изд-во физ.-мат. литературы 1961.
2. **Коноплева Н.П., Попов В.Н.** — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
3. **Voloshin M.B.** — In: Proc. of XXVII Int. Conf. on High Energy Physics, Session P1-7, Glasgow, 1994, p.121.
4. **Kuzmin V.A., Rubakov V.A., Shaposhnikov M.E.** — Phys. Lett., 1985, v.B155, p.36.
5. **Espinosa D.** — Nucl. Phys., 1990, v.B343, p.310;
Zakharov V.I. — Nucl. Phys., 1992, v.B371, p.637;
Porrati M. — Nucl. Phys., 1990, v.B347, p.371.
6. **Baldin A.M., Kovalenko A.D.** — JINR Rapid Communications, 1996, No.3[77]-96, p.5.
7. **Bethe H.A.** — Z. Phys., 1931, v.71, p.205.

8. **Yang C.N.** — Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, p.1312; Phys. Rev., 1968, v.168, p.1920.
9. **Yang C.N.** — The Oskar Klein Memorial Lectures, World Scientific, Singapore, 1991, p.35.
10. **Bogoliubov N.N.** — JINR Communications, D-781, Dubna, 1958.
11. **Dirac P.A.M.** — Rev. Mod. Phys., 1949, v.21, No.3, p.392.
12. **Baldin A.M.** — Nucl. Phys., 1985, v.A447, p.203.
13. **Baldin A.M., Baldin A.A.** — Phys. Particles and Nuclei, 1998, v.29, No.3, p.232-253.
14. **Baldin A.A.** — Yad. Fiz., 1993, v.56, p.174; JINR Rapid Communications, 1996, No.4[78]-96, p.61.
15. **Baldin A.M., Malakhov A.I.** — JINR Rapid Communications, 1998, No.1[87]-98, p.5.
16. **Fock V.A.** — Z. Phys., 1928, v. 49, p.339.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

Владимир Александрович Фок (к столетию со дня рождения). *Новожилов Ю.В., Новожилов В.Ю.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.5.

Дан краткий обзор научной деятельности Владимира Александровича Фока и ее значения для современной физики. Более подробно обсуждается вклад В.А.Фока в развитие квантовой теории поля и теории тяготения.

Библиогр.: 124.

УДК 539.12.01

В.А.Фок — судьба некоторых открытий. *Прохоров Л.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.47.

В обзоре обсуждаются работы В.А. Фока, первостепенная важность которых выяснилась лишь в последние десятилетия. Отмечено, что наличие тождественного соотношения между произведениями четырех спиноров («тождество Фирца») было впервые установлено Фоком (1929), что он (вместе с П. Йорданом) открыл квантование магнитного потока (1930) и независимо от Калуцы и Клейна предложил объединение гравитационного и электромагнитного полей в рамках 5-мерного пространства-времени (1926). Отмечено далее, что он впервые дал корректную формулировку калибровочного преобразования (1926) и обратил внимание на возможность обобщения понятия физического пространства (1971, простейший пример некоммутативной геометрии). Показана связь метода 5-го параметра Фока с современной теорией струн и мембран.

Табл.1. Библиогр.: 91.

УДК 539.12.01

Инерциальные системы и общий принцип относительности в теории тяготения. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.71.

Настоящий обзор посвящен памяти выдающегося ученого нашего века — академика В.А. Фока, внесшего огромный вклад в теоретическую и математическую физику. В статье обсуждаются работы В.А. Фока по теории тяготения, причем основное внимание уделяется анализу наиболее принципиальных проблем и выводов, которые раскрыли физическую сущность теории тяготения. В результате этих исследований В.А. Фоку пришлось выйти за рамки ОТО Эйнштейна. Так, он в теории тяготения для задач островного типа вводит инерциальные системы отсчета (привилегированные системы). В теории тяготения В.А. Фока ускорение является абсолютным, а не относительным, как в ОТО. В.А. Фок справедливо отрицает существование какой-либо общей относительности, кроме той, которая выражается в преобразованиях Лоренца.

Отмечается, что идеи В.А. Фока о существовании инерциальных систем координат, об абсолютности ускорения, о необходимости построения полной системы уравнений теории тяготения и форминвариантности этих уравнений относительно преобразований Лоренца точно реализованы в РТГ.

Библиогр.: 6.

УДК 539.12.01

Теория Фока атома водорода и квантовое пространство. Мир-Касимов Р.М. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.91.

В первой части работы дан краткий обзор теории квантового пространства Снай-дера. В этой теории квантовое пространство канонически сопряжено искривленному импульсному пространству. Показано, что квантование пространства имеет динамическое происхождение, источником его служит некоторое взаимодействие, модифицирующее группу изометрий пространства импульсов.

Вторая часть посвящена установлению связи между теорией Фока динамической симметрии атома водорода и квантовым пространством. Это позволяет прояснить физический смысл концепции квантования пространства. Поскольку теория Фока связана с неевклидовой геометрией импульсного пространства, то кулоновское поле может рассматриваться как источник квантования конфигурационного пространства (снйдеровского типа) в нерелятивистской теории. Волновые функции кулоновской проблемы в данном контексте отвечают свободному движению в квантовом пространстве.

Библиогр.: 23.

УДК 539.12.01

Топологические эффекты в среде. Сисакян А.Н., Шевченко О.Ю., Солганик С.Б. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.109.

Исследуются два тесно связанных топологических объекта, киральная аномалия и черн-саймоновский член при конечной плотности и температуре. Киральная аномалия не зависит ни от температуры, ни от плотности. Рассмотрена генерация черн-саймоновского члена в четных размерностях при условии сохранения кирального или обычного зарядов. В нечетных размерностях с использованием различных методов показано, что $\mu^2 = m^2$ является критической точкой для генерации Черна—Саймонса при нулевой температуре. Так, при $\mu^2 < m^2$ μ -зависимость исчезает, и мы получаем обычный черн-саймоновский член. С другой стороны, при $\mu^2 > m^2$ черн-саймоновский член исчезает из-за ненулевой плотности фоновых фермионов. Установлена связь между аномалией четности в нечетных размерностях и киральной аномалией в четных размерностях при произвольных плотностях и температуре. Эти результаты справедливы в любой размерности как в абелевом, так и в неабелевом случаях.

Ил.3. Библиогр.: 35.

УДК 539.12;539.123.17

О принципах и физической программе $\gamma\gamma$ -коллайдеров. Кураев Э.А., Галынский М.В., Левчук М.И. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.155.

Представлены некоторые аспекты физической программы для встречных фотонных коллайдеров. Среди них – процессы с образованием тяжелых векторных мезонов, бозона Хиггса, тяжелых кварков, интегральные соотношения между сечениями (правила сумм) для различных поляризационных состояний, процессы образования адронов, физика померона. Эти вопросы изложены конспективно.

Особое внимание уделено нелинейным эффектам в обратном комптоновском рассеянии фотонов циркулярно поляризованной лазерной волны, сфокусированной на

пучке ультрарелятивистских продольно поляризованных электронов. Рассмотрено также наиболее часто встречающееся в литературе линейное приближение в этом механизме конверсии. Достаточное внимание уделено описанию калибровочных процессов, предлагаемых для целей мониторинга — непрерывного контроля за светимостью $\gamma\gamma$ -коллайдеров и степенью поляризации фотонных пучков. Для этой цели рассмотрены процессы образования двух лептонных пар в кинематике узких струй, летящих вдоль оси пучков, и процесс образования пары заряженных лептонов или бозонов, летящих на большие углы. Представлены результаты численных анализов.

Табл.1. Ил.13. Библиогр.: 81.

УДК 621.3.038;612

Применение волоконно-оптических световодов в экспериментах по физике высоких энергий и в ускорительной технике. Никитюк Н.М., Романов Ю.И. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.206.

Рассмотрено современное состояние техники волоконно-оптических методов передачи информации в экспериментах по физике высоких энергий и в ускорительной технике. Описаны параметры таких элементов оптоэлектроники, как оптическое волокно, передатчики и приемники оптического излучения. Приведены данные, иллюстрирующие изменения параметров оптоэлектроники в условиях жесткой радиации, характерной для будущих экспериментов на ЛНС.

Рассмотрены примеры успешного применения волоконно-оптических систем передачи цифровой и аналоговой информации для контроля и управления ионных источников линейных ускорителей на ускорительном комплексе ЛВЭ ОИЯИ.

Табл.3. Ил.27. Библиогр.: 76.

УДК 539.71.1

О симметрии в современной физике (к столетию со дня рождения академика В.А.Фока). Балдин А.М. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.1, с.252.

Разработка калибровочной симметрии привела к полному определению лагранжианов взаимодействия для электромагнитных, слабых, сильных и гравитационных взаимодействий и создала иллюзии о построении «теории всего». Однако, так же, как и в классической физике, стало ясно, что в основе дедуктивного получения решений (законов природы) лежат не только принципы симметрии лагранжианов. Для однозначного определения решения необходимы дополнительные условия, без которых решения уравнений Лагранжа неоднозначны. Дополнительные условия: предположения о константах, входящих в лагранжианы, интегральные симметрии решений, краевые и начальные условия и т.п., столь существенны, что в ряде случаев можно конструировать модели (решения, законы природы), не опираясь на лагранжев метод. В качестве примера приводится использование такого подхода в одном из наиболее бурно развивающихся разделов современной физики — релятивистской ядерной физике. Точный математический язык калибровочной симметрии — дифференциальная геометрия, а точный язык для дополнительных условий — топология, свойства пространства параметров в целом. В настоящей статье отмечается фундаментальный вклад В.А.Фока в разработку понятия пространства — первичного понятия физики.

Библиогр.: 16.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Новожилов Ю.В., Новожилов В.Ю.</i> Владимир Александрович Фок (к столетию со дня рождения).....	5
<i>Прохоров Л.В.</i> В.А.Фок — судьба некоторых открытий	47
<i>Логунов А.А., Мествиришвили М.А.</i> Инерциальные системы и общий принцип относительности в теории тяготения	71
<i>Мир-Касимов Р.М.</i> Теория Фока атома водорода и квантовое пространство.....	91
<i>Сисакян А.Н., Шевченко О.Ю., Солганик С.Б.</i> Топологические эффекты в среде	109
<i>Кураев Э.А., Галынский М.В., Левчук М.И.</i> О принципах и физической программе $\gamma\gamma$-коллайдеров.....	155
<i>Никитюк Н.М., Романов Ю.И.</i> Применение волоконно-оптических световодов в экспериментах по физике высоких энергий и в ускорительной технике	206
<i>Балдин А.М.</i> О симметрии в современной физике (к столетию со дня рождения академика В.А.Фока)	252

CONTENTS

<i>Novozhilov Yu.V., Novozhilov V.Yu.</i> Vladimir A.Fock (Dedicated to the 100th anniversary of the birth).....	5
<i>Prokhorov L.V.</i> V.A.Fock — the Fate of Some Discoveries	47
<i>Logunov A.A., Mestvirishvili M.A.</i> Inertial Reference Frames and the General Relativity Principle in Gravitation Theory.....	71
<i>Mir-Kasimov R.M.</i> Fock's Theory of Hydrogen Atom and Quantum Space.....	91
<i>Sissakian A.N., Shevchenko O.Yu., Solganik S.B.</i> Topological Effects in Medium	109
<i>Kuraev E.A., Galynski M.V., Levchuk M.I.</i> About Principles and the Physical Program of Photon-Photon Colliders	155
<i>Nikityuk N.M., Romanov Yu.I.</i> Use of Optical Fibers in High Energy Physic Experiments and Accelerators	206
<i>Baldin A.M.</i> On Symmetry in Modern Physics (Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Academician V.A.Fock).....	252

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с одной стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркиваются двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, векторы — синим, либо знаком снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например, ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами: не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год

издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbine A.V.** — Comm. Math. Phys., 1988, v.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич, Е.Ю.Шаталова.**

Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**

Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 19.08.99. Подписано в печать 15.10.99. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 16,7. Уч.-изд.л. 20,15.

Тираж 400. Заказ 51703. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
2000. Том 31. Вып.1. 1—268.

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФОК

(К столетию со дня рождения)

Ю.В.Новожилов, В.Ю.Новожилов

Санкт-Петербургский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ	5
КРАТКИЙ ОБЗОР НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В.А.ФОКА	5
Роль математического аппарата в современной физике	5
В.А.Фок и современная физика	8
Уравнение Клейна—Фока и фазовое преобразование волновой функции [8,9]	10
Представление Фока	10
Уравнение Дирака в поле тяготения и параллельный перенос как способ задания калибровочного взаимодействия	10
Метод Хартри—Фока	11
Многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского	11
Пространство Фока	12
Симметрия атома водорода и динамическая симметрия	12
Метод собственного времени Фока	12
Метод функционалов Фока [49,50]	13
Уравнения движения масс в общей теории относительности	13
Дифракция	13
Прикладные задачи	13
Книги «Теория пространства, времени и тяготения» [66, 67] и «Начала квантовой механики» [68, 69]	14
Защита науки	14
Даты жизни Владимира Александровича ФОКА	15
РАБОТЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ	20
Обобщение уравнения Шредингера и уравнение Клейна—Фока	20
Теория излучения Дирака и представление Фока	22
Квантовая электродинамика и многовременной формализм Дирака—Фока—Подольского	24

Метод функционалов Фока	26
Уравнение Дирака в гравитационном поле	27
Пространство Фока [37]	29
Собственное время в классической и квантовой механике [42]. Калибровка Фока	31
Симметрия атома водорода и динамические группы	33
Проблемы истолкования квантовой теории	35
РАБОТЫ В.А.ФОКА ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	37
Движение конечных масс в общей теории относительности	37
Книга «Теория пространства, времени и тяготения»	40
Принцип относительности Птолемея—Коперника и принцип относительности Галилея	42
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	43

В.А.ФОК — СУДЬБА НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТИЙ

Л.В. Прохоров

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

ТОЖДЕСТВА ФОКА—ФИРЦА	47
КВАНТ МАГНИТНОГО ПОТОКА ЙОРДАНА—ФОКА	49
УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА—КЛЕЙНА—ФОКА—ГОРДОНА—...	50
ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА—ФОКА. КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП	52
МЕТОД ПЯТОГО ПАРАМЕТРА ФОКА (МЕТОД «СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ»)	54
Релятивистская частица	55
Струна	55
p -браны	56
Обобщение	56
КАЛИБРОВКА ФОКА	58
Лемма Пуанкаре	58
Связь с другими калибровками	58
ОДНА ИЗ ПОСЛЕДНИХ ПУБЛИКАЦИЙ В.А.ФОКА	61
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ	63
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	67

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 1

УДК 539.12.01

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили

Институт физики высоких энергий, 142284, г. Протвино Московской обл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

90

FOCK'S THEORY OF HYDROGEN ATOM AND QUANTUM SPACE*

R.M.Mir-Kasimov **

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia
and
Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey

INTRODUCTON	91
SNYDER APPROACH	93
FOCK'S THEORY OF HYDROGEN ATOM	94
WAVE FUNCTIONS AND DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SCHRÖDINGER EQUATION IN QUANTUM SPACE	95
CONTRACTION	99
NONCOMMUTATIVE DIFFERENTIAL CALCULUS AND FINITE- DIFFERENCE DERIVATIVES	100
NONCOMMUTATIVE DIFFERENTIAL CALCULUS AND SCHRÖDINGER EQUATION IN QUANTUM SPACE	104
LINEAR OSCILLATOR = q -OSCILLATOR IN QUANTUM SPACE	106
REFERENCES	107

*This work is partly supported by INTAS grant 93-127

**e-mail: < mirkr@thsun1.jinr.dubna.su >

TOPOLOGICAL EFFECTS IN MEDIUM

A.N.Sissakian, O.Yu.Shevchenko, S.B.Solganik***

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

INTRODUCTION	109
CHEMICAL POTENTIAL	112
CHIRAL ANOMALY. QUALITATIVE CONSIDERATION	113
CHIRAL ANOMALY AT FINITE TEMPERATURE AND DENSITY	116
Two Dimensions.	116
Four Dimensions.	118
CHERN–SIMONS IN EVEN DIMENSIONAL THEORY	120
CHERN–SIMONS IN THREE-DIMENSIONAL THEORY	126
Constant Magnetic Field.	126
Arbitrary External Field.	132
CHERN–SIMONS TERM IN ARBITRARY ODD DIMENSION	134
NONRELATIVISTIC CONSIDERATION	136
Mixed Chern–Simons Term.	141
TRACE IDENTITY	143
CONCLUSIONS	151
ACKNOWLEDGEMENTS	152
REFERENCES	153

*E-mail: shevch@nusun.jinr.ru

**E-mail: solganik@thsun1.jinr.ru

О ПРИНЦИПАХ И ФИЗИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЕ $\gamma\gamma$ -КОЛЛАЙДЕРОВ

Э.А.Кураев, М.В.Галынский*, М.И.Левчук*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	155
ОБРАТНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ФОТОНОВ (ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАИ)	160
Кинематика процесса $\gamma_0 e \rightarrow \gamma e$	160
Энергетические спектры фотонов	161
Поляризация конечных фотонов	163
Светимость, монохроматизация $\gamma\gamma$ -столкновений	165
Нелинейные эффекты в ОКР	168
ФИЗИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА ФОТОННЫХ КОЛЛАЙДЕРОВ	178
Проблемы стандартной модели	182
Адронная физика и предсказания КХД в $\gamma\gamma$ -пучках	188
Физика периферических взаимодействий	191
Образование пар тяжелых кварков в $\gamma\gamma$ -столкновениях	193
Поляризационные эффекты в γe - и $\gamma\gamma$ -коллайдерах	193
КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ	195
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	201

*Институт физики НАНБ, Минск, Белоруссия

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ
СВЕТОВОДОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ
ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ И В УСКОРИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКЕ

Н.М.Никитюк, Ю.И.Романов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	206
ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОС	207
ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ДЕТЕКТОРЫ	211
ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОНЕНТОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НАДЕЖНОСТЬ ВОЛС	213
РАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ	215
ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОЛИНЗ	225
ОСОБЕННОСТИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ	227
СТАНДАРТЫ ДЛЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ	233
ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛС В УСКОРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ	235
ТЕЛЕВИЗИОННАЯ ТЕЛЕМЕТРИЯ НА ВЫСОКОВОЛЬТНОМ УСКОРИТЕЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛОГОВЫХ ВОЛС	245
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	249
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	249

ON SYMMETRY IN MODERN PHYSICS
(Dedicated to the 100th anniversary of the birth
of Academician V.A.Fock)

A.M.Baldin

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

REFERENCES

260