

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.31

PART 3

Six issues per year

DUBNA 2000

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 31

ВЫПУСК 3

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 2000

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЪЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы Е.К.Аксенова, тел. (09621) 65-165

Э.В.Ивашкевич

© ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 2000

SEARCH FOR STANDARD HIGGS BOSON AT SUPERCOLLIDERS

N.V.Krasnikov, V.A.Matveev

INR RAS, Moscow 117312

We review the standard Higgs boson physics and the search for standard Higgs boson at LEP and LHC supercolliders.

Мы даем обзор вопросов, связанных с физикой стандартного бозона Хиггса и его поиском на суперколлайдерах LEP и LHC.

1. INTRODUCTION

This paper is devoted to the memory of our teacher Nikolai Nikolaevich Bogoliubov whose 90th anniversary of the birth is celebrated by the physical and mathematical community

The Standard Model which describes within an unprecedented scale of energies and distances the strong and electroweak interactions of elementary particles relies on a few basic principles — the renormalizability, the gauge invariance and the spontaneous breaking of the underlying gauge symmetry. The principle of the renormalizability which is considered often as something lying beyond the limits of experimental test is in fact one of the most important (if not the major) ingredients of the quantum field theory.

The requirement of renormalizability which content and deep meaning were uncovered in the fundamental textbook by N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov [1] plays the central role in the construction and classification of the field theoretic models. They split in general on two classes.

In the renormalizable models the ultraviolet divergences of the radiative corrections are under mathematically rigorous control due to the famous Bogoliubov–Parasiuk theorem [2]. These models which preserve their locality in all orders of the perturbation theory are characterised by a finite number of relevant dimensionless coupling constants whose dependence on an arbitrary dimensional normalization parameter is described by the renormalization group [1]. These so-called «running» coupling constants depending on the model may have either the asymptotic freedom behaviour at large momenta (as for non-Abelian gauge theories) or like in quantum electrodynamics with an Abelian gauge symmetry reveal the growth of the effective coupling constant in the ultraviolet region.

The second class of field theoretical models — the nonrenormalizable models have a very serious drawback which makes them useless for description of particle interactions at the present level of knowledge. First of all, the nonrenormalizable models have infinite number of divergent matrix elements which requires as a consequence an introduction of an infinite number of interaction vertices and dimensional coupling constants. What is more important the nonrenormalizable theories are nonlocal and depend on the infinite number of unknown functions [1,3]. This follows from the fact that the vertices of the nonrenormalizable models contain an arbitrary high derivatives of the field operators. Thus the predictive power of nonrenormalizable models is close to zero. An imaging world described by such a theory seems to be extremely complicated unlike what we learn from studying particle interactions and evolution of the Universe at least until the present*.

The Weinberg–Salam model [4] of the electroweak interactions belongs to the first class of the field theories. The major ingredient of this model which experimental test is the target of the world-wide search programme is the presence of the scalar multiplet with nontrivial vacuum condensate (the Higgs boson [5]). The nonzero vacuum condensate does not affect the small distance behaviour of particle interactions which allows one to solve the problem of mass generation for vector W and Z bosons without conflict with the renormalizability of the theory. The spontaneous breaking of the gauge symmetry in the Weinberg–Salam model is a consequence of the degeneration of the ground state in the presence of the boson condensate — in precise analogy with the theory of superfluidity [6].

In the Weinberg–Salam model a complex isodoublet scalar field is introduced through self-interactions; this acquires nonvanishing vacuum expectation value, breaking spontaneously the electroweak gauge group $SU(2)_L \otimes U(1)$ to the electromagnetic $U(1)_{EM}$ gauge group. The interactions of the gauge bosons and fermions with the background field generate the masses of these particles. One component of the scalar isodoublet Higgs field is not absorbed in the longitudinal components of the vector W and Z bosons, manifesting itself as the physical Higgs particle h^{**} . It should be stressed that the Higgs mechanism is the only way to construct the renormalizable theory of the electroweak interactions. Therefore the discovery of the single missing ingredient of the Weinberg–Salam model — the Higgs boson will be in some sense the experimental «proof» of the renormalizability of the electroweak interactions. There are no doubts that at present the main supergoal in high energy experimental physics is the search for the Higgs boson.

*However we should not ignore the fact that the distinction between renormalizable and non-renormalizable theories is evident only within perturbation theory.

**Note that very often standard Higgs boson is denoted by capital letter H.

In this paper we present an introduction to electroweak symmetry breaking and Higgs boson physics for the Weinberg–Salam model (the Standard Model*). The current experimental status of the Higgs boson searches and implications for future experiments at the Large Hadron Collider (LHC) are discussed. We don't review the Higgs boson physics at e^+e^- linear collider [7] and at muon collider [8] because at present it is too far from reality. It should be noted that at present common belief is that the Standard Model is not the whole story and at the TeV scale new physics beyond the Standard Model exists. Namely, the most popular scenario is the low energy broken supersymmetry with the $O(1)$ TeV sparticle masses [9]. In such scenario at least two Higgs boson doublets must exist, so in addition to the standard (light) Higgs boson h there must exist scalar charged Higgs boson $H^\pm$, second neutral scalar Higgs boson H and axial scalar Higgs boson A . For the most interesting case when the Higgs boson h is much lighter than the additional Higgs bosons $H, H^\pm, A$, we have the decoupling of the heavy Higgs bosons and the interactions of the lightest Higgs boson with vector bosons and fermions coincide up to power corrections with the Standard Model interactions. Therefore even if new physics beyond the Standard Model exists at TeV region with very big probability, the physics of the lightest Higgs boson is described by the Standard Model. Note that there are several books and reviews on the Higgs boson physics [10–18]. The peculiarity of this review is that we give both theoretical aspects of the Higgs boson physics and experimental aspects related to the search for the Higgs boson at LHC.

The organization of the paper is the following. In section 2 we describe the Lagrangian of the Standard Model. In section 3 we give the main formulae for the Higgs boson decay widths. In section 4 indirect bounds on the Higgs boson mass are discussed. LEP1 and LEP2 Higgs boson mass bounds are given in section 5. The Higgs boson production mechanisms and the main formulae for the cross sections are described in section 6. In section 7 we discuss the possibilities to discover Higgs boson at upgrated TEVATRON. In section 8 we give review of the two main general purpose detectors at LHC (CMS and ATLAS). The perspectives for the search for Higgs boson at LHC are described in section 9. Section 10 contains concluding remarks.

2. THE LAGRANGIAN OF THE STANDARD MODEL

The Standard Model (SM) is the renormalizable model of strong and electroweak interactions. It has the gauge group $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ and the

*By the Standard Model we understand the electroweak Weinberg–Salam model plus quantum chromodynamics.

minimal Higgs structure consisting of one complex doublet of scalar particles. The spontaneous electroweak symmetry breaking $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1) \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_{EM}$ due to nonzero vacuum expectation value of the Higgs doublet provides the simplest realization of the Higgs mechanism [5] which generates masses for gauge $W^\pm$, Z bosons and masses to quarks and leptons. In this approach, the Goldstone bosons are generated by dynamics of elementary scalar fields and precisely one neutral Higgs scalar (the Higgs boson) remains in the physical spectrum. The Lagrangian of the Standard Model consists of several pieces:

$$L_{WS} = L_{YM} + L_{HYM} + L_{SH} + L_f + L_{Yuk}. \quad (1)$$

Here L_{YM} is the Yang–Mills Lagrangian without matter fields

$$L_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i(W)F_i^{\mu\nu}(W) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(W^0)F_{\mu\nu}(W^0) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(G)F_a^{\mu\nu}(G), \quad (2)$$

where $F_{\mu\nu}^i(W)$, $F_{\mu\nu}^a(G)$, $F_{\mu\nu}(W^0)$ are given by

$$F_{\mu\nu}^i(W) = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_2 \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (3)$$

$$F_{\mu\nu}(W^0) = \partial_\mu W_\nu^0 - \partial_\nu W_\mu^0, \quad (4)$$

$$F_{\mu\nu}^a(G) = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (5)$$

where W_μ^i , W_μ^0 are the $SU(2)_L \otimes U(1)$ gauge fields, G_μ^a are the gluon fields and ϵ^{ijk} , f^{abc} are the structure constants of the $SU(2)_L$ and $SU(3)_c$ gauge groups. The Lagrangian L_{HYM} describes the Higgs doublet interaction with $SU(2)_L \otimes U(1)$ gauge fields

$$L_{HYM} = (D_{L\mu}H)^\dagger (D_{L\mu}H), \quad (6)$$

where covariant derivatives are given by

$$D_{L\mu} = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} W_\mu^0 - ig_2 \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i, \quad (7)$$

$$D_{R\mu} = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} W_\mu^0, \quad (8)$$

$$D_{L\mu}^q = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} W_\mu^0 - ig_2 \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i - ig_3 t^a G_\mu^a, \quad (9)$$

$$D_{R\mu}^q = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} W_\mu^0 - ig_3 t^a G_\mu^a. \quad (10)$$

Here g_1 is the $U(1)$ gauge coupling constant, g_2 and g_3 are the $SU(2)_L$ and $SU(3)_c$ gauge coupling constants, Y is the hypercharge determined by the relation $Q = \frac{\sigma_3}{2} + \frac{Y}{2}$, σ^i are the Pauli matrices, t^a are $SU(3)$ matrices in the fundamental representation, $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$ is the Higgs $SU(2)_L$ doublet with $Y = 1$. The Lagrangian L_{SH} describing Higgs doublet self-interaction has the form

$$L_{SH} = -V_0(H) = M^2 H^+ H - \frac{\lambda}{2} (H^+ H)^2, \quad (11)$$

where $H^+ H = \sum_i H_i^* H_i$ and λ is the Higgs self-coupling constant. The Lagrangian L_f describes the interaction of fermions with gauge fields. Fermions constitute only doublets and singlets in $SU(2)_L \otimes U(1)$

$$R_1 = e_R, \quad R_2 = \mu_R, \quad R_3 = \tau_R, \quad (12)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu' \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \nu'' \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (13)$$

$$R_{qIu} = (q_{Iu})_R, \quad (q_{1u} = u, \quad q_{2u} = c, \quad q_{3u} = t), \quad (14)$$

$$R_{qid} = (q_{id})_R, \quad (q_{1d} = d, \quad q_{2d} = s, \quad q_{3d} = b), \quad (15)$$

$$L_{qI} = \begin{pmatrix} q_{Iu} \\ V_{Ii} q_{id} \end{pmatrix}_L, \quad (16)$$

where L and R denote left- and right-handed components of the spinors respectively,

$$\psi_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi \quad (17)$$

and V_{Ii} is the Kobayashi–Maskawa matrix. The neutrinos are assumed to be left-handed and massless. The Lagrangian L_f describes the interaction of fermions with gauge fields and it has the form

$$L_f = \sum_{k=1}^3 [i \bar{L}_k \hat{D}_L L_k + i \bar{R}_k \hat{D}_R R_k + i \bar{L}_{qk} \hat{D}_L^q L_{qk} + i \bar{R}_{qku} \hat{D}_R^q R_{qku} + i \bar{R}_{qkd} \hat{D}_R^q R_{qkd}], \quad (18)$$

where $\hat{D}_L = \gamma^\mu D_{L\mu}$, $\hat{D}_R = \gamma^\mu D_{R\mu}$, $\hat{D}_L^q = \gamma^\mu D_{L\mu}^q$, $\hat{D}_R^q = \gamma^\mu D_{R\mu}^q$. The Lagrangian L_{Yuk} generates fermion mass terms. Supposing the neutrinos to be

massless, the Yukawa interaction of the fermions with Higgs doublet has the form

$$L_{Yuk} = - \sum_{k=1}^3 [h_{lk} \bar{L}_k H R_k + h_{dk} \bar{L}'_{qk} H R_{dk} + h_{uk} \bar{L}'_{qk} (i\sigma^2 H^*) R_{uk}] + h.c. , \quad (19)$$

$$L'_{qI} = \begin{pmatrix} q_{Iu} \\ q_{Id} \end{pmatrix}.$$

The potential term $V_0(H) = -M^2 H^+ H + \frac{\lambda}{2} (H^+ H)^2$ for $M^2 > 0$ gives rise to the spontaneous symmetry breaking. The doublet H acquires the nonzero vacuum expectation value

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

where $v = 246$ GeV. In the unitary gauge unphysical Goldstone massless fields are absent and the Higgs doublet scalar field depends on the single physical scalar field $h(x)$ (Higgs boson field):

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Due to spontaneous gauge symmetry breaking gauge fields except gluon and photon fields acquire masses. Diagonalization of mass matrix gives

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2), \quad M_W = \frac{1}{2} g_2 v, \quad (22)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 W_\mu^0), \quad M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_2^2 + g_1^2} v, \quad (23)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} (g_1 W_\mu^3 + g_2 W_\mu^0), \quad M_A = 0, \quad (24)$$

where $W_\mu^\pm$, Z_μ are charged and neutral electroweak boson fields, A_μ is photon field. It is convenient to introduce rotation angle θ_W between (W^3, W^0) and (Z, A) which is called Weinberg angle

$$\sin \theta_W \equiv \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (25)$$

Experimentally $\sin^2 \theta_W \approx 0.23$ [19]. The formula for the electric charge e has the form

$$e = \frac{g_2 g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}. \quad (26)$$

At the tree level the Higgs boson mass is determined by the formula

$$m_h = \sqrt{2}M = \sqrt{\lambda}v. \quad (27)$$

The Lagrangian L_{HYM} describes the interaction of the Higgs boson field with vector W - and Z -bosons. In the unitary gauge it reads

$$L_{HYM} = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + M_W^2 \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{2} M_Z^2 \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 Z^\mu Z_\mu. \quad (28)$$

The Lagrangian L_{Yuk} is responsible for the fermion masses generation. In the unitary gauge it can be written in the form

$$L_{Yuk} = - \sum_i m_{\psi_i} \left(1 + \frac{h}{v}\right) \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (29)$$

where ψ_i are the fermion (quark and lepton) fields.

3. INDIRECT HIGGS BOSON MASS BOUNDS

3.1. Tree-Level Unitarity. The Higgs boson has been introduced as a fundamental particle to render 2 - 2 scattering amplitudes (see Fig. 1) involving longitudinally polarized W bosons compatible with unitarity. In general particles must decouple from low energy spectrum if their mass grows indefinitely. Therefore the Higgs boson mass must be bounded to restore unitarity in the perturbation theory. The asymptotic tree-level formula for the elastic $W_L W_L$ S -wave-scattering amplitude reads [20, 21]

$$A^{J=0}(W_L W_L \rightarrow W_L W_L) \approx -\frac{G_F m_h^2}{4\sqrt{2}\pi}. \quad (30)$$

Partial wave unitarity implies that

$$|A^J|^2 \leq |Im(A^J)|, \quad (31)$$

$$(Re(A^J))^2 \leq |Im(A^J)(1 - |Im(A^J)|)|. \quad (32)$$

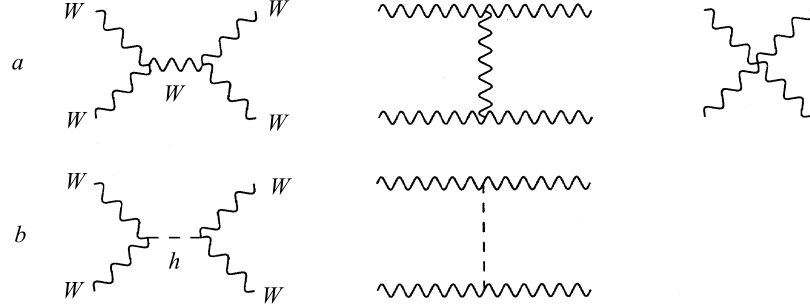


Fig. 1. Tree-level diagrams of elastic WW scattering: (a) pure gauge-boson dynamics, and (b) Higgs boson exchange

As a consequence we find that

$$|Re(A^J)| \leq \frac{1}{2}. \quad (33)$$

Hence [20, 21],

$$m_h^2 \leq \frac{2\pi\sqrt{2}}{G_F} \approx (850 \text{ GeV})^2. \quad (34)$$

The most stringent bound is obtained by performing a full coupled channel analysis for the scattering of longitudinal gauge bosons into $W_L^+ W_L^-$, $Z_L Z_L$, $Z_L h$ and hh . The largest eigenvalue of the amplitude matrix gives the most restrictive bound

$$m_h^2 \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{3G_F} \approx (700 \text{ GeV})^2. \quad (35)$$

However it should be noted that if $m_h \geq 700 \text{ GeV}$ it means simply that perturbation theory is no longer reliable and in principle an account of higher order corrections can restore unitarity. Lattice estimates give similar bound [22] $m_h \leq 700 \text{ GeV}$ on the Higgs boson mass.

3.2. Vacuum Stability Bound. It is possible also to derive bounds on the Higgs boson mass from the requirement of the absence of the Landau pole singularity for the effective Higgs self-coupling constant [23] and from the vacuum stability requirement [24].

The idea of the derivation of the bound resulting from the requirement of the absence of Landau pole singularities is the following [23]. Suppose the Standard Model is valid up to the scale Λ . We require that the effective Higgs self-coupling constant does not have Landau pole singularities up to the energies Λ .

From this requirement we find an upper bound on the low energy Higgs self-coupling constant $\bar{\lambda}(m_t)$ which determines the Higgs boson mass. Namely, the renormalization group equations for the effective coupling constants in neglect of all Yukawa coupling constants except top-quark Yukawa coupling constant in one-loop approximation read

$$\frac{d\bar{g}_3}{dt} = -7\bar{g}_3^3, \quad (36)$$

$$\frac{d\bar{g}_2}{dt} = -\left(\frac{19}{6}\right)\bar{g}_2^3, \quad (37)$$

$$\frac{d\bar{g}_1}{dt} = \left(\frac{41}{6}\right)\bar{g}_1^3, \quad (38)$$

$$\frac{d\bar{h}_t}{dt} = \left(\frac{9\bar{h}_t^2}{2} - 8\bar{g}_3^2 - \frac{9\bar{g}_2^2}{4} - \frac{17\bar{g}_1^2}{12}\right)\bar{h}_t, \quad (39)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = 12(\bar{\lambda}^2 + (\bar{h}_t^2 - \frac{\bar{g}_1^2}{4} - \frac{3\bar{g}_2^2}{4})\bar{\lambda} - \bar{h}_t^4 + \frac{\bar{g}_1^4}{16} + \frac{\bar{g}_1^2\bar{g}_2^2}{8} + \frac{3\bar{g}_2^4}{16}), \quad (40)$$

$$t = \left(\frac{1}{16\pi^2}\right) \ln(\mu/m_Z). \quad (41)$$

Here $\bar{g}_3$, $\bar{g}_2$ and $\bar{g}_1$ are the $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ and $U(1)$ effective gauge couplings, respectively, and $\bar{h}_t$ is the effective top-quark Yukawa coupling constant. In our concrete estimates we took $m_t^{\text{pole}} = 175$ GeV, $\bar{\alpha}_3(m_Z) = 0.118$, $\bar{\alpha}_{em}^{-1}(m_Z) = 127.9$, $\sin^2 \theta_W(m_Z) = 0.2337$, $\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi}$. From the requirement of the absence of Landau pole singularity for the Higgs self-coupling constant $\bar{\lambda}$ for the scales up to $\Lambda = (10^3; 10^4; 10^6; 10^8; 10^{10}; 10^{12}; 10^{14})$ GeV (to be precise we require that at the scale Λ the Higgs self-coupling constant is $\frac{\bar{\lambda}^2(\Lambda)}{4\pi} \leq 1$) we have found the upper bound on the Higgs boson mass $m_h \leq (400; 300; 240; 200; 180; 170; 160)$ GeV, respectively.

The vacuum stability bound [24] comes from the requirement that the electroweak minimum of the effective potential is the deepest one for $|H| \leq \Lambda$. Remember that Λ is the scale up to which the Standard Model is assumed to be valid. For $|H| \gg v$ the mass terms in the effective potential are negligible compared to the self-interaction term and the vacuum stability requirement means that the Higgs self-interaction coupling is nonnegative $\bar{\lambda}(\mu) \geq 0$ for the scales $\mu \leq \Lambda$. Suppose that at scales $M \geq M_s$ we have some supersymmetric extension of the Standard Model. It should be noted that the most popular at present

is the minimal supersymmetric standard model (MSSM) [9] which predicts that the effective Higgs self-coupling constant for the standard model at the scale of supersymmetry breaking $M_s \equiv \Lambda$ has to obey the inequality

$$0 \leq \bar{\lambda}(M_s) = (\bar{g}_1^2(M_s) + \bar{g}_2^2(M_s))(\cos(2\varphi))^2/4 \leq (\bar{g}_1^2(M_s) + \bar{g}_2^2(M_s))/4. \quad (42)$$

So the assumption that the standard Weinberg–Salam model originates from its supersymmetric extension with the supersymmetry broken at scale M_s allows us to obtain nontrivial information about the low energy effective Higgs self-coupling constant in the effective potential $V = -M^2 H^+ H + \frac{\lambda}{2} (H^+ H)^2$ and hence to obtain nontrivial information about the Higgs boson mass. It should be noted that in nonminimal supersymmetric electroweak models, say in the model with additional gauge singlet σ , we have due to the $k\sigma H_1 i\tau_2 H_2$ term in the superpotential an additional term $k^2 |H_1 i\tau_2 H_2|^2$ in the potential and as a consequence our boundary condition for the Higgs self-coupling constant has to be modified, namely

$$\bar{\lambda}(M_s) = \frac{1}{4}(\bar{g}_1^2(M_s) + \bar{g}_2^2(M_s)) \cos^2(2\varphi) + \frac{1}{2}\bar{k}^2(M_s) \sin^2(2\varphi) \geq 0. \quad (43)$$

The boundary condition (43) depends on unknown coupling constant $\bar{k}^2(M_s)$. However it is very important to stress that for all nonminimal supersymmetric models broken to standard Weinberg–Salam model at scale M_s the effective Higgs self-coupling constant $\bar{\lambda}(M_s)$ is nonnegative which is a direct consequence of the nonnegativity of the effective potential in supersymmetric models. Therefore the vacuum stability requirement results naturally [25] if supersymmetry is broken at some high scale M_s and at lower scales the Weinberg–Salam model is an effective theory. For the Weinberg–Salam model with boundary condition (42) for the Higgs self-coupling constant $\bar{\lambda}(M_s)$ we have integrated numerically renormalization group equations in two-loop approximation. Also we took into account the one-loop correction to the Higgs boson mass (running Higgs boson mass $\bar{m}_h(\mu) = \sqrt{\bar{\lambda}(\mu)}v$ does not coincide with pole Higgs boson mass). Our results [25] for the Higgs boson mass $m_h(k, M_s, m_t^{\text{pole}})$ for different values of M_s and m_t^{pole} are presented in the Table. Here $k = 0$ corresponds to the boundary condition $\bar{\lambda}(M_s) = 0$ (vacuum stability bound) and $k = 1$ corresponds to the boundary condition $\bar{\lambda}(M_s) = \frac{1}{4}(\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2)$. So from the requirement that at some high scale M_s the MSSM is softly broken to the SM we find [25] that the Higgs boson mass lies in the interval

$$m_h(k = 0, M_s, m_t^{\text{pole}}) \leq m_h \leq m_h(k = 1, M_s, m_t^{\text{pole}}).$$

Table. The dependence of the Higgs boson mass $m_h(k, M_s, m_t^{\text{pole}})$ on the values of M_s , m_t^{pole} and $k = 0, 1$. Everything except k is in GeV

m_t^{pole}	165 $k=0$	165 $k=1$	170 $k=0$	170 $k=1$	175 $k=0$	175 $k=1$	180 $k=0$	180 $k=1$	185 $k=0$	185 $k=1$
$M_s = 10^3$	69	111	74	114	78	117	83	120	88	123
$M_s = 10^{3.5}$	81	117	86	120	92	124	98	128	104	132
$M_s = 10^4$	89	121	95	125	101	130	108	134	114	139
$M_s = 10^6$	105	129	113	135	121	141	129	147	137	153
$M_s = 10^8$	112	132	120	138	129	147	138	152	146	159
$M_s = 10^{10}$	115	133	124	140	133	147	142	154	151	161
$M_s = 10^{12}$	117	134	126	141	136	147	145	154	154	161
$M_s = 10^{14}$	118	134	127	141	132	148	147	156	156	164
$M_s = 10^{16}$	118	134	128	141	138	148	148	156	158	164

The accuracy in the determination of $m_h(k, M_s, m_t^{\text{pole}})$ is related mainly to nonexact knowledge of $\alpha_3(M_Z)$ and it is estimated to be less than 3 GeV. For instance, for $m_t^{\text{pole}} = 175$ GeV and $M_s = 10^8$ GeV we find that

$$129 \text{ GeV} \leq m_h \leq 147 \text{ GeV}.$$

Note that in the MSSM the mass of the lightest Higgs boson is less than $m_h \leq M_Z$ at tree-level. Radiative corrections can increase the mass of the lightest Higgs boson [26] up to 120 GeV provided the sparticle masses are less than 1 TeV. As it has been demonstrated in Refs.27, in the Standard Model due to the vacuum stability condition the Higgs boson mass has to be heavier than ~ 120 GeV*. It means that by the measurement of the Higgs boson mass it would be possible to distinguish between SM and MSSM. In particular, the observation of the Higgs boson at LEP2 with a mass less than 110 GeV will be powerful nontrivial indication in favour of the existence of low energy broken supersymmetry.

3.3. Higgs Boson Mass Bound from Electroweak Precision Data. Indirect bound on the Higgs boson mass can be derived from the high-precision measurements of electroweak observables at LEP and elsewhere. The Standard Model is renormalizable only after including the top quark and the Higgs boson and as a consequence the electroweak observables are sensitive to the masses of these particles. The Fermi coupling can be rewritten as

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi\alpha}{\sin^2(2\theta_W)M_Z^2} [1 + \Delta r_a + \Delta r_t + \Delta r_h]. \quad (44)$$

*Concrete details and rigorous statements are contained in [27].

The Δ terms take into account the radiative corrections: Δr_a describes the shift in the effective electromagnetic coupling constant; Δr_t takes into account the top quark contribution. The Δr_h denotes the Higgs boson contribution. This term depends logarithmically [28] on the Higgs boson mass and at leading order it reads

$$\Delta r_h = \frac{11G_F M_W^2}{24\sqrt{2}\pi} \left[\log\left(\frac{m_h^2}{M_W^2}\right) - \frac{5}{6} \right], \quad (m_h^2 \gg M_W^2). \quad (45)$$

Although the sensitivity on the Higgs boson mass is only logarithmic, the increasing precision in the measurement of the electroweak observables allows one to derive constraints on the Higgs boson mass [29]

$$m_h = 71_{-42}^{+75} \pm 5 \text{ GeV}. \quad (46)$$

In other words it means that the Higgs boson should be relatively light with a mass less than $m_h < 220 \text{ GeV}$ at 95 % C.L. [29]. See, however, Ref.30 where it has been shown on the base of the scale factor fit that 95 percent confidence level upper limit increases to as much as 750 GeV.

4. HIGGS BOSON DECAYS

The tree-level Higgs boson couplings to gauge bosons and fermions can be deduced from the Lagrangian (28), (29). Of these, the hW^+W^- , hZZ and $h\bar{\psi}\psi$ are the most important for the phenomenology. The partial decay width into fermion-antifermion pair is [31]

$$\Gamma(h \rightarrow \psi\bar{\psi}) = \frac{G_F m_\psi^2 m_h N_c}{4\pi\sqrt{2}} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (47)$$

where N_c is the number of fermion colours. For $m_h \leq 2m_W$ Higgs boson decays mainly with (≈ 90 percent) probability into b quark-antiquark pair and with ≈ 5 percent probability into τ lepton-antilepton pair. An account of higher order QCD corrections can be effectively taken into account in formula (47) for the Higgs boson decay into b quark-antiquark pair by the replacement of pole b -quark mass in formula (47) by the effective b -quark mass $\bar{m}_b(m_h)$. An account of higher order corrections leads to the formula [32] (see Fig. 2)

$$\Gamma(h \rightarrow Q\bar{Q}) = \frac{3G_F^2 m_h}{4\sqrt{2}\pi} \bar{m}_Q^2(m_h) [\Delta_{QCD} + \Delta_t], \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{QCD} = & 1 + 5.67 \frac{\alpha_s(m_h)}{\pi} + (35.94 - 1.36N_F) \left(\frac{\alpha_s(m_h)}{\pi}\right)^2 + \\ & + 161.14 - 25.77N_F + 0.259N_F^2 \left(\frac{\alpha_s(m_h)}{\pi}\right)^3, \end{aligned} \quad (49)$$

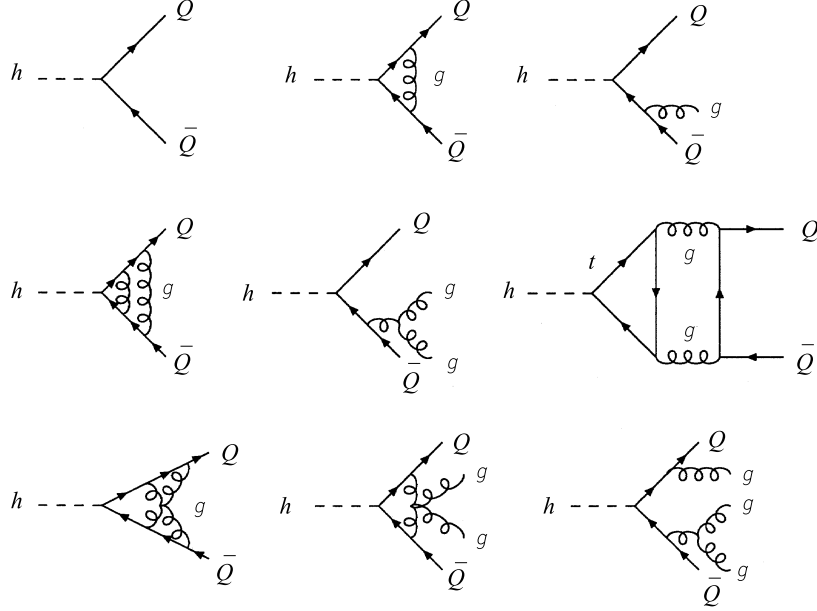


Fig. 2. Typical diagrams contributing to $h \rightarrow Q\bar{Q}$ at lowest order and one-, two- and three-loop QCD

$$\Delta_t = \left(\frac{\alpha_s(m_h)}{\pi}\right)^2 \left[1.57 - \frac{2}{3} \log \frac{m_h^2}{m_t^2} + \frac{1}{9} \log^2 \frac{\bar{m}_Q^2(m_h)}{m_h^2}\right] \quad (50)$$

for the Higgs boson decay width to $Q = b, c$ quarks in the $\overline{MS}$ renormalization scheme. The relation between the perturbative quark pole mass m_Q and the $\overline{MS}$ running quark mass $\bar{m}_Q(m_Q)$ has the form [33]

$$\bar{m}_Q(m_Q) = \frac{m_Q}{1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s(m_Q)}{\pi} + K_Q \left(\frac{\alpha_s(m_Q)}{\pi}\right)^2}, \quad (51)$$

where numerically $K_t \approx 10.9$, $K_b \approx 12.4$ and $K_c \approx 13.4$. Electroweak corrections to heavy quarks and lepton decays are rather small [34] (less than 2 percent).

Higgs boson with $m_h \geq 2M_W$ will decay into pairs of gauge bosons (see Fig. 3) with the partial widths

$$\Gamma(h \rightarrow W^+W^-) = \frac{G_F m_h^3}{32\pi\sqrt{2}} (4 - 4a_W + 3a_W^2)(1 - a_W)^{\frac{1}{2}}, \quad (52)$$

$$\Gamma(h \rightarrow Z^0Z^0) = \frac{G_F m_h^3}{64\pi\sqrt{2}} (4 - 4a_Z + 3a_Z^2)(1 - a_Z)^{\frac{1}{2}}, \quad (53)$$

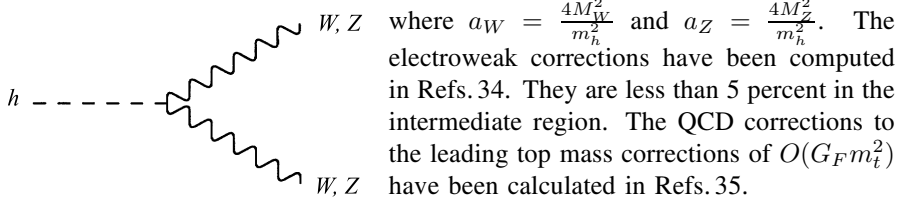


Fig. 3. Diagram contributing to $h \rightarrow \rightarrow VV$ [$V = W, Z$]

where $a_W = \frac{4M_W^2}{m_h^2}$ and $a_Z = \frac{4M_Z^2}{m_h^2}$. The electroweak corrections have been computed in Refs. 34. They are less than 5 percent in the intermediate region. The QCD corrections to the leading top mass corrections of $O(G_F m_t^2)$ have been calculated in Refs. 35.

In the heavy Higgs mass regime ($2m_Z \leq m_h \leq 800$ GeV), the Higgs boson decays dominantly into gauge bosons. For example, for $m_h \gg 2m_Z$ one can find that

$$\Gamma(h \rightarrow W^+W^-) \simeq 2\Gamma(h \rightarrow ZZ) \simeq \frac{G_F m_h^3}{8\pi\sqrt{2}}. \quad (54)$$

The m_h^3 behaviour is a consequence of the longitudinal polarisation states of the W and Z . As m_h gets large, so does the coupling of h to the Goldstone bosons which have been eaten by the W and Z . However, the Higgs boson decay width to a pair of heavy quarks growth only linearly in the Higgs boson mass. Thus, for the Higgs masses sufficiently above $2m_Z$, the total Higgs boson width is well approximated by ignoring the Higgs boson decay to $t\bar{t}$ and including only two gauge boson modes. For heavy Higgs boson mass one can find that

$$\Gamma_{total}(h) \simeq 0.48 \text{ TeV} \left(\frac{m_h}{1 \text{ TeV}} \right)^3. \quad (55)$$

For large Higgs boson mass higher order corrections due to the self-coupling of the Higgs boson are relevant, namely [36]

$$\Gamma(h \rightarrow VV) = \Gamma_{LO}(h \rightarrow VV)[1 + 2.8\kappa + 62.0\kappa^2], \quad (56)$$

where $\kappa = \frac{G_F m_h^2}{16\sqrt{2}\pi^2}$, $V = Z, W$.

Below threshold the decays into off-shell gauge particles are important. The decay width into single off-shell gauge boson has the form [37]

$$\Gamma(h \rightarrow VV^*) = \delta_V \frac{3G_F^2 M_V^4 m_h}{16\pi^3} R\left(\frac{M_V^2}{m_h^2}\right), \quad (57)$$

where $\delta_W = 1$, $\delta_Z = \frac{7}{12} - \frac{10}{9} \sin^2 \theta_W + \frac{40}{27} \sin^4 \theta_W$ and

$$R(x) = 3 \frac{1 - 8x + 20x^2}{\sqrt{4x - 1}} \arccos\left(\frac{3x - 1}{2x^{3/2}}\right) - \frac{1 - x}{2x} (2 - 13x + 47x^2) - \frac{3}{2} (1 - 6x + 4x^2) \log(x), \quad (58)$$

$x = \frac{M_V^2}{m_h^2}$. For Higgs boson mass slightly larger than the corresponding gauge boson mass the decay widths into pairs of off-shell gauge bosons play important role. The corresponding formulae can be found in Ref. 38.

It should be noted that there are a number of important Higgs boson couplings which are absent at tree-level but appear at one-loop level. Among them the couplings of the Higgs boson to two gluons and two photons are extremely important for the Higgs boson searches at supercolliders. One-loop induced Higgs coupling to two gluons is due to t -quark exchange in the loop (see Fig. 4) [39] and it leads to an effective Lagrangian

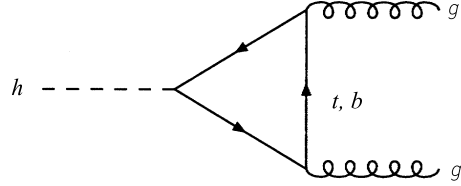


Fig. 4. Diagrams contributing to $h \rightarrow gg$ at lowest order

$$L_{hgg}^{eff} = \frac{g_2 \alpha_s N_g}{24\pi m_W} h G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (59)$$

for the interaction of the Higgs boson with gluons. At lowest order the partial decay width is given by [39]

$$\Gamma_{LO}(h \rightarrow gg) = \frac{G_F \alpha_s^2 m_h^3}{36\sqrt{2}\pi^3} \left| \sum_Q A_Q^h(\tau_Q) \right|^2, \quad (60)$$

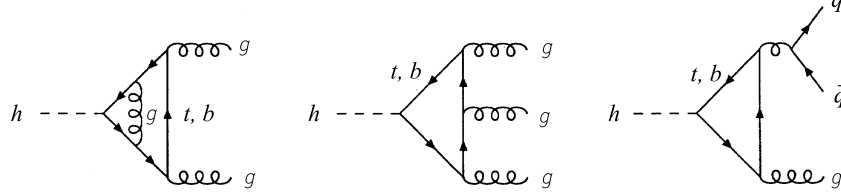
$$A_Q^h(\tau) = \frac{3}{2} \tau [1 + (1 - \tau)f(\tau)], \quad (61)$$

$$f(\tau) = \arcsin^2\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) \text{ if } \tau \geq 1, \quad (62)$$

$$f(\tau) = -\frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \tau}}{1 - \sqrt{1 - \tau}} \right) - i\pi \right]^2 \text{ if } \tau < 1. \quad (63)$$

The parameter $\tau_Q = \frac{4m_Q^2}{m_h^2}$ is defined by the pole mass m_Q of the heavy quark in the loop. For large quark mass $A_Q^h(\tau_Q) \rightarrow 1$. An account of the QCD radiative corrections (see Fig. 5) gives for $m_h^2 \ll 4m_Q^2$ [40]

$$\Gamma(h \rightarrow gg(q), q\bar{q}g) = \Gamma_{LO}[\alpha_s^{(N_F)}(m_h)] \left[1 + \left(\frac{95}{4} - \frac{7}{6} N_F \right) \frac{\alpha_s^{(N_F)}(m_h)}{\pi} \right] \quad (64)$$

Fig. 5. Typical diagrams contributing to the QCD corrections to $h \rightarrow gg$

with $N_F = 5$ light quark flavours. It appears that radiative corrections are very large: the decay width is shifted by about (60–70) percent upwards in the most interesting mass region $100 \text{ GeV} \leq m_h \leq 500 \text{ GeV}$. Three-loop QCD corrections have been calculated in the limit of a heavy top quark [41]. They are positive and increase the full next leading order expression by 10 percent. Using the low-energy theorems it is possible to calculate easily the electroweak $O(G_F M_t^2)$ corrections to the leading order Higgs boson decay width into two gluons [42]

$$\Gamma(h \rightarrow gg) = \Gamma_{LO}(h \rightarrow gg) \left[1 + \frac{G_F M_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \right]. \quad (65)$$

Numerically they are negligible.

Also very important is the one-loop induced Higgs boson coupling to two photons due to W and t -quark exchanges in the loop (see Fig. 6). The partial decay width can be written in the form

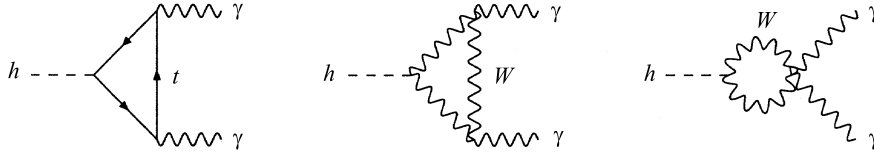
$$\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{G_F \alpha^2 m_h^3}{128\sqrt{2}\pi^3} \left| \sum_f N_{cf} e_f^2 A_f^h(\tau_f) + A_W^h(\tau_W) \right|^2, \quad (66)$$

where

$$A_f^h(\tau) = 2\tau[1 + (1 - \tau)f(\tau)], \quad (67)$$

$$A_W^h(\tau) = -[2 + 3\tau + 3\tau(2 - \tau)f(\tau)], \quad (68)$$

$\tau_i = \frac{4M_i^2}{m_h^2}$, $i = f, W$ and the function $f(\tau)$ is determined by the formulae (62), (63). The W loop gives the dominant contribution in the intermediate Higgs

Fig. 6. Diagrams contributing to $h \rightarrow \gamma\gamma$ at lowest order

boson mass range. Two-loop QCD corrections to the quark loops have been calculated in [42]. QCD corrections rescale the lowest order by a factor that depends on the ratio of the Higgs boson and quark masses

$$A_Q^h(\tau_Q) \rightarrow A_Q^h(\tau_Q) \times [1 + C_h(\tau_Q) \frac{\alpha_s}{\pi}] \quad (69)$$

with $C_h(\tau_Q) \rightarrow -1$ for $m_h^2 \ll 4m_Q^2$. QCD corrections to the two photon Higgs boson decay width numerically are not very big, of $O(10)$ %. Electroweak corrections are less than 1 % [43].

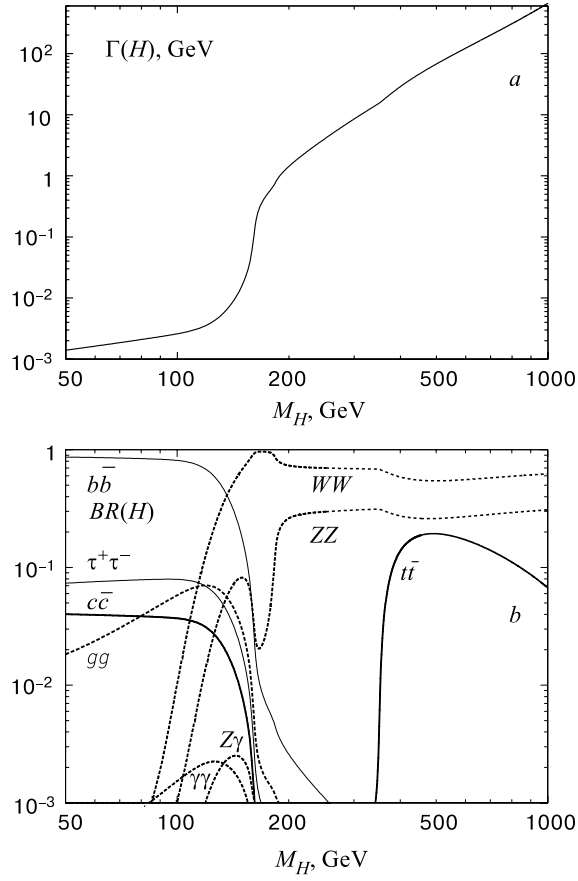


Fig. 7. (a) Total decay width (in GeV) of the SM Higgs boson as a function of its mass. (b) Branching ratios of the dominant decay modes of the SM Higgs particle. All relevant higher-order corrections are taken into account (Ref. 16) ($H \equiv h$)

5. HIGGS BOSON SEARCH AT LEP

The process that was used for the direct search for the Higgs boson at LEP1 was the Bjorken process [45]

$$e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow (Z^* \rightarrow f\bar{f})h. \quad (70)$$

The differential decay width for the $Z \rightarrow (Z^* \rightarrow f\bar{f})h$ reaction normalized to $Z \rightarrow f\bar{f}$ decay is given by [46]

$$\frac{\Gamma(Z \rightarrow (Z^* \rightarrow f\bar{f})h)}{\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f})} = \frac{\alpha}{4\pi \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \frac{(1 - x + \frac{x^2}{12} + \frac{2r^2}{3})(x^2 - 4r^2)^{1/2}}{(x - r^2)^2 + (\Gamma_Z/M_Z)^2}, \quad (71)$$

where $x = 2E_h/M_Z$ and $r = m_h/M_Z$, the kinematical limits being $2r \leq x \leq 1 - r^2$. The energy of the Higgs boson E_h is related to the invariant mass of the fermion pair $M_{f\bar{f}}$ (i.e., the invariant mass of the virtual Z^* boson)

$$E_h = \frac{(M_Z^2 + m_h^2 - M_{f\bar{f}}^2)}{2M_Z}. \quad (72)$$

The Bjorken process with the decay of the virtual Z boson to $\mu^+\mu^-$, e^+e^- , $\nu\bar{\nu}$ pairs is used for the Higgs boson search. The decay of the Z^* to quark-antiquark pair is not useful due to large QCD background. The Higgs decay mode determines the Higgs signature in the detectors. Higgs bosons with low mass decay into e^+e^- and $\mu^+\mu^-$ pairs, for intermediate mass they decay into light hadrons and $\tau^+\tau^-$ pairs, and for high mass they decay mainly into a $b\bar{b}$ quark-antiquark pair. The combined limit of the four LEP1 experiments (ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL) on the Higgs boson mass is [47]

$$m_h \geq 65.4 \text{ GeV, } 95\% \text{ C.L.} \quad (73)$$

At LEP2 with the total energy $\sqrt{s} = 130 - 200 \text{ GeV}$ the dominant Higgs production process * is $e^+e^- \rightarrow hZ$ («Higgs-strahlung» process). The corresponding cross section at tree-level is given by [48]

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow hZ) = \frac{\pi\alpha^2\lambda^{1/2}(\lambda + 12sM_Z^2)[1 + (1 - 4\sin^2 \theta_W)^2]}{192s^2 \sin^4 \theta_W \cos^4 \theta_W (s - M_Z^2)^2}, \quad (74)$$

where $\lambda \equiv (s - m_h^2 - M_Z^2)^2 - 4m_h^2 M_Z^2$. One can see that for a fixed value of m_h , the cross section is maximal for $\sqrt{s} \approx m_Z + \sqrt{2}m_h$.

*The $e^+e^- \rightarrow WW$ and $e^+e^- \rightarrow ZZ$ fusions are still negligible at LEP2 energies

There are important differences between the Higgs boson searches at LEP1 and LEP2. The signal-to-background ratio is much better at LEP2. The large background rate at LEP1 required a very detailed simulation of detector effects and rare background reactions. The dominant hadronic Higgs boson signature ($Z^*h \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}$) was useless at LEP1 due to large QCD background. While the expected Higgs boson production at LEP1 involved a real Z decaying into a Higgs boson and a virtual Z boson, at LEP2 the Higgs boson is produced in association with an on-shell Z boson. This additional information about the final-state Z boson gives rise to better Higgs boson mass reconstruction and greater sensitivity for a Higgs boson signal due to better background rejection.

Final state particles in the analysed Higgs boson channels at LEP2 are

$$e^+e^- \rightarrow (Z \rightarrow q\bar{q}, \nu\bar{\nu}, e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-)(h \rightarrow b\bar{b}, \tau^+\tau^-). \quad (75)$$

Thus the three typical signatures are:

- (a) two b -jets + a charged lepton pair ($Z \rightarrow \mu^+\mu^-(e^+e^-), h \rightarrow b\bar{b}$),
- (b) two b -jets plus missing transverse energy ($Z \rightarrow \nu\bar{\nu}, h \rightarrow b\bar{b}$),
- (c) four jets with at least two b -jets or two τ -jets ($Z \rightarrow q\bar{q}, h \rightarrow b\bar{b}$ or ($hZ \rightarrow q\bar{q}\tau^+\tau^-$)).

The Standard Model background to these signatures is well known and it is under control [48,49]. For example, the Higgs boson production cross section at $\sqrt{s} = 189$ GeV for $m_h = 95$ GeV is 0.18 pb, whereas the main background cross sections are 98 pb ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$), 16 pb ($e^+e^- \rightarrow WW$), 0.62 pb ($e^+e^- \rightarrow ZZ$).

1998 LEP2 run with full energy $\sqrt{s} = 189$ GeV and with $L \approx 170$ pb $^{-1}$ /exp allowed one to deduce the following 95 % C.L. lower Higgs boson mass bounds [50–54]

$$m_h > 90.2 \text{ GeV (ALEPH),}$$

$$m_h > 95.2 \text{ GeV (DELPHI),}$$

$$m_h > 95.3 \text{ GeV (L3),}$$

$$m_h > 91.0 \text{ GeV (OPAL).}$$

Note that an additional account of 1999 data with integrated luminosities 29 fb $^{-1}$ and 69.5 fb $^{-1}$ at $\sqrt{s} = 191.6$ GeV and $\sqrt{s} = 195.6$ GeV allowed the ALEPH Collaboration to deduce the Higgs boson mass bound $m_h > 98.8$ GeV [55]. Recent preliminary combined limit of 4 LEP2 experiments with $\sqrt{s} \leq 195.6$ GeV [56] gives $m_h > 102.6$ GeV at 95 % C.L.

LEP2 run with total energy $\sqrt{s} = 200$ GeV and with total luminosity $L_t = 200$ pb $^{-1}$ for each experiment will be able to discover standard Higgs boson with a mass up to 107 GeV [57].

6. HIGGS BOSON PRODUCTION AT HADRON SUPERCOLLIDERS

Typical processes that can be exploited to produce Higgs bosons in hadron supercolliders are:

- gluon fusion: $gg \rightarrow h$,
- WW, ZZ fusion: $W^+W^-, ZZ \rightarrow h$,
- «Higgs-strahlung» off W, Z : $q\bar{q}W, Z \rightarrow W, Z + h$,
- Higgs-bremsstrahlung off top: $q\bar{q}, gg \rightarrow t\bar{t} + h$.

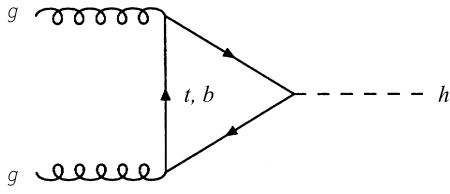


Fig. 8. Diagram contributing to the formation of Higgs bosons in gluon-gluon collisions at lowest order

Gluon fusion plays a dominant role at the LHC throughout the entire Higgs boson mass range of the SM whereas the WW/ZZ fusion process becomes increasingly important with Higgs boson rising. The last two reactions are important only for light Higgs boson masses.

The gluon-fusion mechanism [58] (see Fig. 8)

$$pp \rightarrow gg \rightarrow h \quad (76)$$

is the dominant production mechanism of the Higgs boson at the LHC for Higgs boson mass up to 1 TeV. The gluon coupling to the Higgs boson in the SM is mediated by triangular loops of top and bottom quarks. The corresponding form factor approaches a nonzero value for large loop-quark masses. At lowest order the partonic cross section can be expressed by the gluonic width of the Higgs boson

$$\hat{\sigma}_{LO}(gg \rightarrow h) = \sigma_0 m_h^2 \delta(\hat{s} - m_h^2), \quad (77)$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2}{8m_h^2} \Gamma_{LO}(h \rightarrow gg) = \frac{G_F \alpha_s^2}{288\sqrt{2}\pi} \left| \sum_Q A_Q^h(\tau_Q) \right|^2, \quad (78)$$

where $\tau_Q = \frac{4M_Q^2}{m_h^2}$, $\hat{s}$ denotes the partonic system of mass energy squared and the form factor A_Q^h is determined by the formulae (62), (63). In the narrow-width approximation hadronic cross section can be written in the form

$$\sigma_{LO}(pp \rightarrow h + \dots) = \sigma_0 \tau_h \frac{dL^{gg}}{d\tau_h}, \quad (79)$$

where $\frac{dL^{gg}}{d\tau_h}$ denotes gg luminosity of the pp collider with $\tau_h = \frac{m_h^2}{s}$. The QCD corrections to the gluon fusion process (see Fig. 9) are essential [59]. They

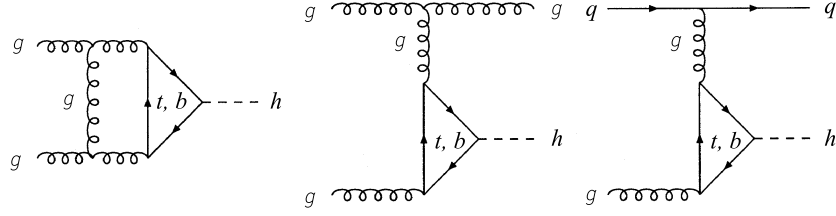


Fig. 9. Typical diagrams contributing to the virtual/real QCD corrections to $gg \rightarrow h$

stabilize the theoretical predictions for the cross section when the renormalization and factorisation scales are varied. Moreover, they are large and positive, thus increasing the production cross section for Higgs bosons. The QCD corrections consist of virtual corrections to the basic process $gg \rightarrow h$ and of real corrections due to reactions $gg \rightarrow hg$, $qq \rightarrow hq$ and $q\bar{q} \rightarrow hg$. The virtual corrections rescale the lowest-order fusion cross section with a coefficient that depends only on the ratios of the Higgs and quark masses. The next-to-leading order for the hadronic cross section can be represented in the form [59]

$$\sigma(pp \rightarrow h + \dots) = \sigma_0 \left[1 + C \frac{\alpha_s}{\pi} \right] \tau_h \frac{dL^{gg}}{d\tau_h} + \Delta\sigma_{gg} + \Delta\sigma_{qq} + \Delta\sigma_{q\bar{q}}. \quad (80)$$

The calculation has been performed [59] in the $\overline{MS}$ scheme. The mass M_Q is identified with the pole quark mass and the renormalization scale in α_s and the factorisation scale of the parton densities is fixed at the Higgs boson mass. The coefficient $C(\tau_Q)$ denotes the finite part of the virtual two-loop corrections. The finite parts of the hard contributions from gluon radiation in gg scattering, gq scattering and $q\bar{q}$ annihilation are presented in the form [59]

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{gg} = & \int_{\tau_h}^1 d\tau \frac{dL^{gg}}{d\tau} \times \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_0 [-z P_{gg}(z) \log z + d_{gg}(z, \tau_Q) + \\ & + 12 \left[\left(\frac{\log(1-z)}{(1-z)} - z[2 - z(1-z)] \log(1-z) \right) \right], \end{aligned} \quad (81)$$

$$\Delta\sigma_{gq} = \int_{\tau_h}^1 \sum_{q, \bar{q}} \frac{dL^{gq}}{d\tau} \times \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_0 \left[-\frac{z}{2} P_{gq}(z) \log \frac{z}{(1-z)^2} + d_{gq}(z, \tau_Q) \right], \quad (82)$$

$$\Delta\sigma_{q\bar{q}} = \int_{\tau_h}^1 d\tau \sum_q \frac{dL^{q\bar{q}}}{d\tau} \times \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_0 d_{q\bar{q}}(z, \tau_Q), \quad (83)$$

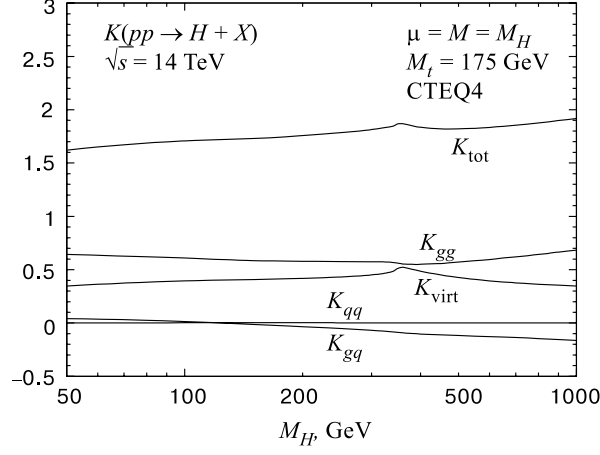


Fig. 10. K factors of the QCD-corrected gluon-fusion cross section $\sigma(pp \rightarrow h + X)$ at the LHC with c.m. energy $\sqrt{s} = 14$ TeV. The renormalization and factorisation scales have been identified with the Higgs mass, and CTEQ4 parton densities have been adopted (Ref. 16) ($H \equiv h$)

where $z = \tau_h/\tau = m_h^2/\hat{s}$, P_{gg} and P_{gq} are Altarelli–Parisi splitting functions. In the heavy quark limit one can find that [59]

$$C(\tau_Q) \rightarrow \pi^2 + 5.5, \quad (84)$$

$$d_{gg}(z, \tau_Q) \rightarrow -5.5(1-z)^3, \quad (85)$$

$$d_{gq}(z, \tau_Q) \rightarrow \frac{2}{3}z^2 - (1-z)^2, \quad (86)$$

$$d_{q\bar{q}}(z, \tau_Q) \rightarrow \frac{32}{27}(1-z)^3. \quad (87)$$

The size of the radiative corrections can be parametrised by defining the K factor as $K = \sigma_{NLO}/\sigma_{LO}$. The results of the calculations are presented in Fig. 10. The virtual and the real corrections for the gg collisions are the most important, they are large and positive. After including higher order QCD corrections the dependence of the cross section on the renormalization and factorisation scales is reduced from the level of $O(1)$ to a level of about $O(0.2)$.

The theoretical prediction for the Higgs boson production cross section is presented in Fig. 11 for the LHC as a function of the Higgs boson mass. The cross section decreases with increasing of the Higgs boson mass mainly due to the decrease of gg partonic luminosity for large invariant masses.

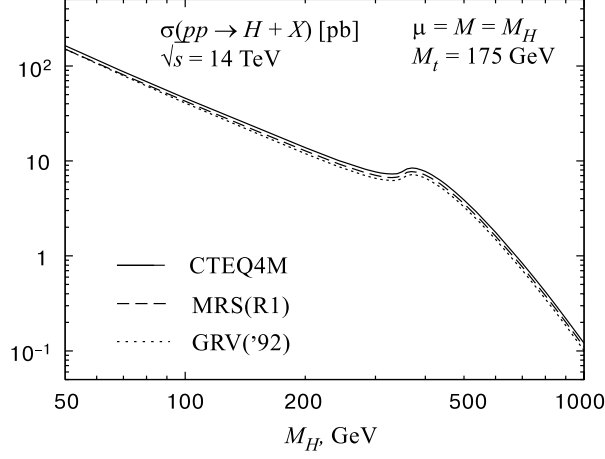


Fig. 11. The cross section for the production of Higgs bosons; three different sets of parton densities are shown (CTEQ4M, MRS(R1) and GRV('92)) (Ref. 16) ($H \equiv h$)

The second important process for the Higgs boson production at the LHC is vector-boson fusion (see Fig. 12), $W^+W^-(ZZ) \rightarrow h$ [60]. For large Higgs boson mass this mechanism becomes competitive to gluon fusion; for intermediate masses the cross section is smaller by about an order of magnitude. For large Higgs boson mass the W and Z bosons are predominantly longitudinally polarised. At high energies, the equivalent particle spectra of the longitudinal W , Z bosons in quark beam have the form [16]

$$f_L^W(x) = \frac{G_F M_W^2}{2\sqrt{2}\pi^2} \frac{1-x}{x}, \quad (88)$$

$$f_L^Z(x) = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi^2} [(I_3^q - 2e_q \sin^2 \theta_W)^2 + (I_3^q)^2] \frac{1-x}{x}, \quad (89)$$

where x is the fraction of energy transferred from the quark to the W , Z boson in the splitting process $q \rightarrow q + W/Z$. The WW and ZZ luminosities are presented in the form:

$$\frac{dL^{WW}}{d\tau_W} = \frac{G_F^2 M_W^4}{8\pi^4} \left[2 - \frac{2}{\tau_W} - \frac{1 + \tau_W}{\tau_W} \log \tau_W \right], \quad (90)$$

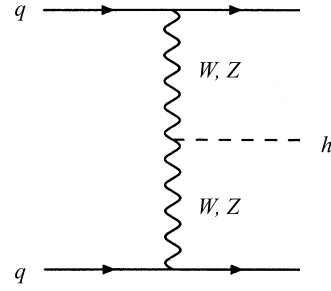


Fig. 12. Diagram contributing to $qq \rightarrow qqV^*V^* \rightarrow qqh$ at lowest order

$$\frac{dL^{ZZ}}{d\tau_Z} = \frac{G_F^2 M_Z^4}{8\pi^4} [(I_3^q - 2e_q \sin^2 \theta_W)^2 + (I_3^q)^2] [(I_3^{q'} - 2e_{q'} \sin^2 \theta_W)^2 + (I_3^{q'})^2] \cdot \left[2 - \frac{2}{\tau_Z} - \frac{1 + \tau_Z}{\tau_Z} \log \tau_Z \right], \quad (91)$$

where $\tau_V = \frac{M_V^2}{s}$. Denoting the parton cross section for $WW, ZZ \rightarrow h$ by $\hat{\sigma}_0$ with

$$\hat{\sigma}_0(VV \rightarrow h) = \sigma_0 \delta(1 - m_h^2/\hat{s}), \quad (92)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{2}\pi G_F, \quad (93)$$

the cross sections for the Higgs boson production in quark-quark and hadron-hadron collisions are presented in the form [16]

$$\hat{\sigma}(qq \rightarrow qqh) = \frac{dL^{VV}}{d\tau_V} \sigma_0, \quad (94)$$

$$\sigma(qq' \rightarrow VV \rightarrow h) = \int_{m_h^2/s}^1 d\tau \sum_{q,q'} \frac{dL^{qq'}}{d\tau} \hat{\sigma}(qq' \rightarrow qq'h; \hat{s} = \tau s). \quad (95)$$

«Higgs-strahlung» $q\bar{q} \rightarrow V^* \rightarrow Vh$ ($V = W, Z$) (see Fig. 13) is a very important process for the search of light Higgs boson at the TEVATRON and LHC. Though the cross section is smaller than for gluon fusion, leptonic decays of electroweak vector bosons are extremely useful to filter Higgs boson signal from a huge background. The corresponding formulae for the cross section are contained in [61].

The process $gg, q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}h$ (see Fig. 14) is relevant for small Higgs boson masses. The analytical expression for the parton cross section is quite involved [62]. Note that Higgs boson bremsstrahlung off top quarks is an interesting process for measurements of the fundamental $h\bar{t}t$ Yukawa coupling. The cross section $\sigma(pp \rightarrow t\bar{t}h)$ is directly proportional to the square of this coupling constant.

One can say that three classes of processes can be distinguished. The gluon fusion of Higgs boson is a universal process, dominant over the entire Higgs boson mass range. «Higgs-strahlung» of electroweak W, Z bosons or top quarks

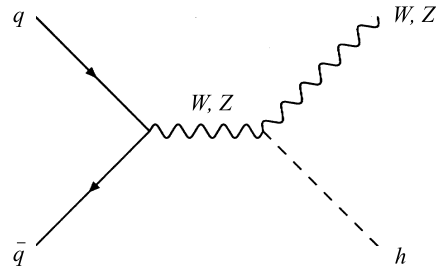
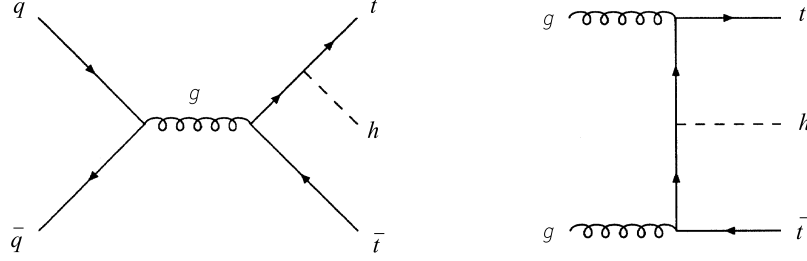
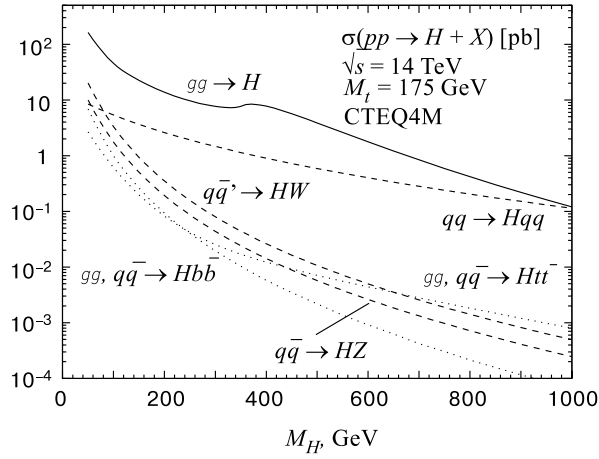


Fig. 13. Diagram contributing to $qq \rightarrow V^* \rightarrow Vh$ at lowest order


 Fig. 14. Typical diagrams contributing to $q\bar{q}/gg \rightarrow h t\bar{t}$ at lowest order

 Fig. 15. Higgs production cross sections at the LHC for various production mechanisms as a function of the Higgs mass. The full QCD-corrected results for the gluon fusion $gg \rightarrow h$, vector-boson fusion $qq \rightarrow VVqq \rightarrow hqq$, vector-boson bremsstrahlung $q\bar{q} \rightarrow V^* \rightarrow hV$ and associated production $gg, q\bar{q} \rightarrow ht\bar{t}, h\bar{b}\bar{b}$ are shown [16] ($H \equiv h$)

is important for light Higgs boson. The WW/ZZ fusion channel, by contrast, becomes rather important in the upper part of the Higgs boson mass. An overview of the production cross section for the Higgs boson at the LHC is presented in Fig. 15.

7. SEARCH FOR THE HIGGS BOSON AT TEVATRON

It is expected [63, 64] that upgraded Fermilab Tevatron (TEV22) will start in the 2000 year with the full energy $\sqrt{s} = 2$ TeV, and the full luminosity for each experiment during 3 years of exploitation will be $L_t = 2 \text{ fb}^{-1}$. There are

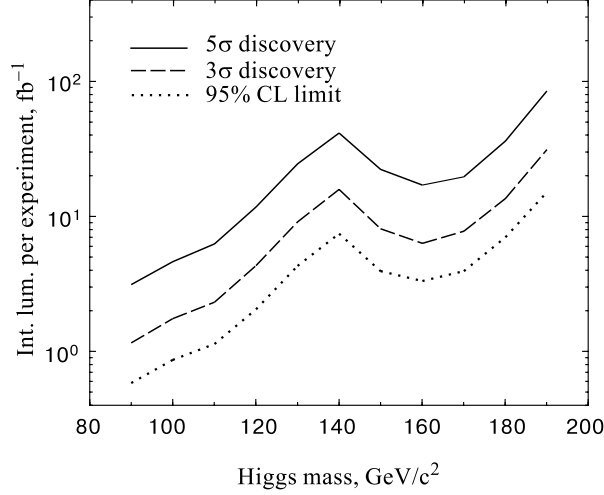


Fig. 16. Luminosity required as a function of Higgs mass to achieve different levels of sensitivity to the standard-model Higgs boson. The upper curve corresponds to a 5σ discovery, the middle to a 3σ signal and the lower to a 95% exclusion limit. These limits require two experiments, Bayesian statistics are used to combine the channels and include the improved sensitivity which would come from multivariate analysis techniques (Ref. 64)

also plans to increase luminosity to have $L_t = 30 \text{ fb}^{-1}$ (TEV33) by 2006. The most interesting process for the search for standard Higgs boson at the Tevatron is «Higgs-strahlung» off W , Z bosons $q\bar{q} \rightarrow W^*/Z^* \rightarrow W/Z + h$. For the Higgs boson mass $100 \text{ GeV} \leq m_h \leq 140 \text{ GeV}$ the cross section is between 0.5 pb and 0.1 pb. The QCD corrections for «Higgs-strahlung» coincide with those of the Drell–Yan process and increase tree-level cross section approximately by 30 percent. The most promising signatures are

$$p\bar{p} \rightarrow (h \rightarrow b\bar{b})(W \rightarrow l\nu, \text{jets}) + \text{anything}, \quad (96)$$

$$p\bar{p} \rightarrow (h \rightarrow b\bar{b})(Z \rightarrow l^+l^-, \nu\bar{\nu}) + \text{anything}. \quad (97)$$

The $b\bar{b}$ decay of the Higgs boson adds powerful background rejection based on b -tagging especially at low Higgs boson mass, below $\sim 130 \text{ GeV}$ where that decay dominates. Other very promising signature [65] is the use of $h \rightarrow W^*W^* \rightarrow l\bar{\nu}l\nu$ decay mode with the dominant gluon-gluon Higgs boson fusion production mechanism. The main conclusion of Ref. 65 is that for an integrated luminosity of 30 fb^{-1} the Higgs boson signal should be observable at a 3σ level or better for the mass range $145 \text{ GeV} \leq m_h \leq 180 \text{ GeV}$ and for 95% percent confidence level exclusion, the mass reach is $135 \text{ GeV} \leq m_h \leq 190 \text{ GeV}$. One can say that at TEV33 run with the full luminosity $L_t = 30 \text{ fb}^{-1}$ it would

be possible to discover the Higgs boson at $\geq 3\sigma$ level at least with a mass up to (180–190) GeV [63–65]. The Higgs boson discovery potential of Tevatron Collider is shown in Fig.16.

8. LHC DETECTORS

The LHC (Large Hadron Collider) [66–69] which will be the biggest particle accelerator complex ever built in the world will accelerate two proton beams with the total energy $\sqrt{s} = 14$ TeV. At low luminosity stage (first two-three years of operation) the luminosity is planned to be $L_{\text{low}} = 10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ with total luminosity $L_{\text{tot}} = 10^4 \text{ pb}^{-1}$ per year. At high luminosity stage the luminosity is planned to be $L_{\text{high}} = 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ with total luminosity $L_{\text{tot}} = 10^5 \text{ pb}^{-1}$ per year. The LHC will start to work in the 2005 year. There are planned to be two big general purpose detectors at LHC CMS (Compact Muon Solenoid) and ATLAS (A Toroidal LHC Apparatus).

The scientific program at the LHC consists in many goals [66–69]. One of the most important tasks for the LHC is the quest for the origin of the spontaneous symmetry-breaking mechanism in the electroweak sector of the SM. As it has been mentioned before, all the renormalizable models of electroweak interactions are based on the use of the gauge symmetry breaking. As a consequence of the electroweak symmetry breaking and the renormalizability of the theory there must be neutral scalar particle (Higgs boson) in the spectrum. So the discovery of the Higgs boson will be the check of the spontaneous symmetry breaking and the renormalizability of the theory and therefore there are no doubts that the Higgs boson discovery is the supergoal number 1 for the LHC. The Higgs boson search is therefore used as a first benchmark for the detector optimisation for both CMS and ATLAS. For the SM Higgs boson, the detector has to be sensitive to the following processes in order to cover the full mass range above the expected LEP2 discovery limit of (105 – 110) GeV:

- A. $h \rightarrow \gamma\gamma$ mass range $90 \text{ GeV} \leq m_h \leq 150 \text{ GeV}$,
- B. $h \rightarrow b\bar{b}$ from $Wh, Zh, t\bar{t}h$ using $l^\pm (l^\pm = e^\pm \text{ or } \mu^\pm)$ -tag and b-tagging in the mass range $80 \text{ GeV} \leq m_h \leq 100 \text{ GeV}$,
- C. $h \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l^\pm$ for the mass range $130 \text{ GeV} \leq m_h \leq 2m_Z$,
- D. $h \rightarrow ZZ \rightarrow 4l^\pm, 2l^\pm 2\nu$ for the mass range $m_h \geq 2m_Z$,
- E. $h \rightarrow WW, ZZ \rightarrow l^\pm \nu$ 2 jets, $2l^\pm$ 2 jets, using tagging of forward jets for m_h up to 1 TeV.

In minimal supersymmetric extension of the standard model (MSSM) there is a family of Higgs particles ($H^\pm, h, H$ and A). So in addition to the standard Higgs boson signatures the MSSM Higgs searches are based on the following processes:

- F. $A \rightarrow \tau^+ \tau^- \rightarrow e\mu$ plus $\nu's$, or $A \rightarrow \tau^+ \tau^- \rightarrow l^\pm$ plus hadrons plus $\nu's$,

G. $H^\pm \rightarrow \tau^\pm \nu$ from $t\bar{t} \rightarrow H^\pm W^\mp b\bar{b}$ and $H^\pm \rightarrow 2$ jets, using a $l^\pm$ -tag and b -tagging.

The observable cross sections for most of those processes are small (1–100) pb over a large part of the mass range. So it is necessary to work at high luminosity and to maximise the detectable rates above backgrounds by high-resolution measurements of electrons, muons and photons.

For the $H^\pm$ and A signatures in the case of the MSSM, high performance detector capabilities are required in addition for the measurements which are expected to be the best achieved at initial luminosities with a low level of overlapping events, namely secondary vertex detection for τ -leptons and b -quarks, and high resolution calorimetry for jets and missing transverse energy E_T^{miss} .

The second supergoal of the LHC project is the supersymmetry discovery, i.e., the detection of superparticles. Here the main signature are the missing transverse energy events which are the consequence of undetected lightest stable supersymmetric particles (LSP) predicted in supersymmetric models with R-parity conservation. Therefore it is necessary to set stringent requirements for the hermeticity and E_T^{miss} capability of the detector. Also the search for new physics different from supersymmetry (new gauge bosons W' and Z' , new Higgs bosons with big Yukawa couplings, etc.) at LHC requires high resolution lepton measurements and charge identification even in the p_T range of a few TeV. Other possible signature of new physics (compositeness) can be provided by very high p_T jet measurements. An important task of LHC is the study of b - and t -physics. Even at low luminosities the LHC will be a high rate beauty and top quark factory. The main emphasis in B -physics is the precise measurement of CP-violation in the B_d^0 system and the determination of the Kobayashi–Maskawa angles. Besides investigations of $B\bar{B}$ mixing in the B_S^0 system, rare B decays are also very important. Precise secondary vertex determination, full reconstruction of final states with relatively low- p_T particles, an example being $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_S^0$ followed by $J/\Psi \rightarrow l^+ l^-$ and $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, and low- p_T lepton first-level triggering capability are all necessary. In addition to running as a proton-proton collider, LHC will be used to collide heavy ions at a centre of mass energy 5.5 TeV per nucleon pair. The formation of quark-gluon plasma in the heavy ion collisions is predicted to be signalled by a strong suppression of Υ' and Υ'' production relative to Υ production when compared with pp collisions. The CMS and ATLAS detectors will be used to detect low momentum muons produced in heavy ion collisions and reconstruct Υ -, Υ' - and Υ'' -meson production. Therefore the basic design considerations for both ATLAS and CMS are the following:

1. very good electromagnetic calorimetry for electron and photon identification and measurements,
2. good hermetic jet and missing E_T -calorimetry,
3. efficient tracking at high luminosity for lepton momentum measurements,

for b -quark tagging, and for enhanced electron and photon identification, as well as tau and heavy-flavour vertexing and reconstruction capability of some B -decay final states at lower luminosity,

4. stand-alone, precision, muon-momentum measurement up to the highest luminosity, and very low- p_T trigger capability at lower luminosity,
5. large acceptance in η coverage.

8.1. Brief Description of CMS Subdetectors [67] . The CMS detector consists of inner detector (tracker), electromagnetic calorimeter, hadron calorimeter, muon spectrometer and trigger. A schematic view of the CMS detector is shown in Fig. 17.

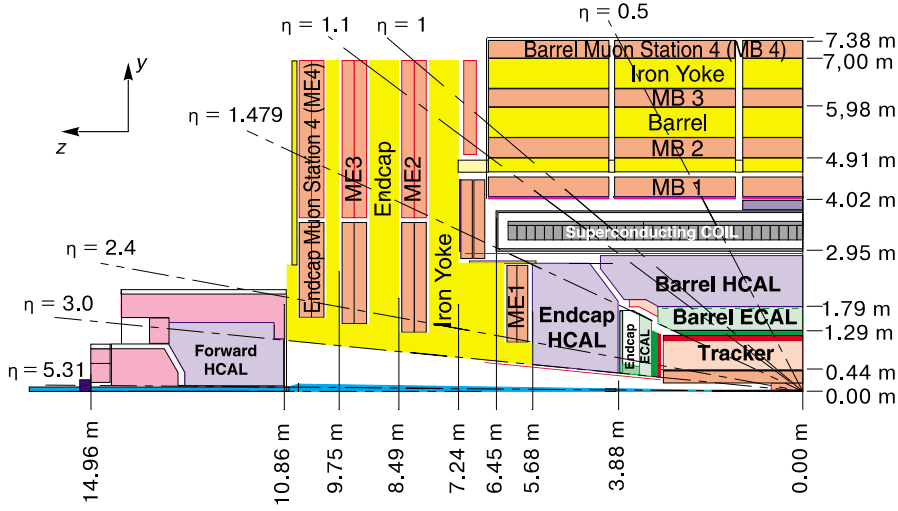


Fig. 17. Longitudinal view of the CMS detector

Tracker. The design goal of the central tracking system is to reconstruct isolated high- p_T tracks with an efficiency better than 95 percent, and high- p_T tracks within jets with an efficiency of better than 90 percent over the rapidity $|\eta| \leq 2.6$. The momentum resolution required for isolated charged leptons in the central rapidity region is $\frac{\delta p_T}{p_T} = 0.1 p_T$ (p_T in TeV). This will allow the measurement of the lepton charge up to $p_T = 2$ TeV. It is also very important for tracking system to perform efficient b - and τ -tagging. The tracker system consists of silicon pixels, silicon and gas microstrip detectors (MSGS) which provide precision momentum measurements and ensure efficient pattern of recognition even at the highest luminosity. A silicon pixel detectors consist of two barrel layers and three endcap layers and it is placed close to the beam pipe with the tasks of:

- a. assisting in pattern recognition by providing two or three true space points per track over the full rapidity range in the main tracker,
- b. improving the impact parameter resolution for b -tagging,
- c. allowing 3-dimensional vertex reconstruction by providing a much improved Z -resolution in the barrel part.

The silicon microstrip detector is required to have a powerful vertex finding capability in the transverse plane over a large momentum range for b -tagging and heavy quark physics and must be able to distinguish different interaction vertices at high luminosity. The CMS silicon microstrip detector is subdivided into barrel and forward parts, meeting at $|\eta| = 1.8 (\eta \equiv -\ln(\tan(\frac{\theta}{2})))$, provided at least 3 measuring points on each track for $|\eta| \leq 2.6$. The microstrip gas chambers provide a minimum of 7 hits for high- p_T tracks. The track finding efficiency in the tracker is 98 percent for $p_T \geq 5$ GeV. The charged particle momentum resolution depends on the η and p_T of charged particle and for $p_T = 100$ GeV and $|\eta| \leq 1.75$ it is around 2 percent. Impact parameter resolution also depends on p_T and η and for $10 \text{ GeV} \leq p_T \leq 100 \text{ GeV}$ and $|\eta| \leq 1.3$ in transverse plane it is around $100 \mu m$. The b -tagging efficiency from $t\bar{t}$ decays is supposed to be better than 30 percent. A significant impact parameter resolution can be used to tag τ -leptons. It could be useful in searches such as SUSY Higgs boson decays $A, H, h \rightarrow \tau\tau \rightarrow e + \mu + X$ (or $l + \text{hadrons}$). These leptons (hadrons) originate from secondary τ vertices while in the backgrounds from $t\bar{t} \rightarrow Wb + W\bar{b} \rightarrow e + \mu + X$ and $WW \rightarrow e + \mu + X$ they originate from the primary vertex. It is possible to have the efficiency for the signal ≈ 50 percent while for the background channels it is ≈ 3 percent.

ECAL. The barrel part of the electromagnetic calorimeter covers the rapidity intervals $|\eta| \leq 1.56$. The endcaps cover the intervals $1.65 \leq |\eta| \leq 2.61$. The gaps between the barrel and the endcaps are used to route the services of the tracker and preshower detectors. The barrel granularity is 432 fold in ϕ and 108×2 -fold in η . A very good intrinsic energy resolution given by

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{0.02}{\sqrt{E}} \oplus 0.005 \oplus \frac{0.2}{E} \quad (98)$$

is assumed to be for electrons and photons with a $PbWO_4$ crystal ECAL. The physics process that imposes the strictest performance requirements on the electromagnetic calorimeter is the intermediate mass Higgs boson decaying into two photons. The main goal here is to obtain very good diphoton mass resolution. The mass resolution has terms that depend on the resolution in energy (E_1, E_2) and the two-photon angular separation (θ) and it is given by

$$\frac{\sigma_M}{M} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{E_1}}{E_1} \oplus \frac{\sigma_{E_2}}{E_2} \oplus \frac{\sigma_\theta}{(\tan(\frac{\theta}{2}))} \right], \quad (99)$$

where $\oplus$ denotes a quadratic sum, E is in GeV and θ is in radians. For the Higgs two-photon decay at LHC the angular term in the mass resolution can become important, so it is necessary to measure the direction of the photons using the information from the calorimeter alone. In the barrel region $|\eta| \leq 1.56$ angular resolution is supposed to be $\sigma_\theta \leq \frac{50 \text{ mrad}}{\sqrt{E}}$. Estimates give the following diphoton mass resolution for $h \rightarrow \gamma\gamma$ channel ($m_h = 100$ GeV):

$$\begin{aligned}\delta m_{\gamma\gamma} &= 475 \text{ MeV (low luminosity } L = 10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}), \\ \delta m_{\gamma\gamma} &= 775 \text{ MeV (high luminosity } L = 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}).\end{aligned}$$

HCAL. The hadron calorimeter surrounds the electromagnetic calorimeter and acts in conjunction with it to measure the energies and directions of particle jets, and to provide hermetic coverage for measurement of the transverse energy. The pseudorapidity range ($|\eta| \leq 3$) is covered by the barrel and endcap hadron calorimeters which sit inside the 4T magnetic field of CMS solenoid. In the central region around $\eta = 0$ a hadron shower 'tail catcher' is installed outside the solenoid coil to ensure adequate sampling depth. The active elements of the barrel and endcap hadron calorimeter consist of plastic scintillator tiles with wave length-shifting fibre readout. The pseudorapidity range ($3.0 \leq \eta \leq 5.0$) is covered by a separate very forward calorimeter. The hadron calorimeter must have good hermeticity, good transverse granularity, moderate energy resolution and sufficient depth for hadron shower containment. The physics programme requires good hadron resolution and segmentation to detect narrow states decaying into pairs of jets. The dijet mass resolution includes contributions from physics effects such as fragmentation as well as detector effects such as angular and energy resolution. The energy resolution is assumed to be:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{0.6}{\sqrt{E}} \oplus 0.03 \quad (100)$$

for $|\eta| \leq 1.5$ and segmentation $\Delta\eta \times \Delta\Phi = 0.1 \times 0.1$.

The dijet mass resolution is approximately the following:

1. (10 – 15)% for $50 \text{ GeV} \leq p_T \leq 60 \text{ GeV}$ and $m_{ij} = m_Z$,
2. (5 – 10)% for $500 \text{ GeV} \leq p_T \leq 600 \text{ GeV}$ and $m_{ij} = m_Z$.

The expected energy resolution for jets in the very forward calorimeter is parametrised by:

$$\frac{\sigma_{E_{\text{jet}}}}{E_{\text{jet}}} = \frac{1.28 \pm 0.1}{\sqrt{E_{\text{jet}}}} \oplus (0.02 \pm 0.01). \quad (101)$$

The expected missing transverse energy resolution in the CMS detector with very forward $2.5 \leq \eta \leq 4.7$ coverage is

$$\frac{\sigma_t}{\sum E_t} = \frac{0.55}{\sqrt{\sum E_t}}, \quad (102)$$

(E_t in GeV). In the absence of the very forward calorimeter, the missing transverse energy resolution would be nearly three times worse.

Muon system. At the LHC the effective detection of muons from Higgs bosons, W , Z and $t\bar{t}$ decays requires coverage over a large rapidity interval. Muons from pp collisions are expected to provide clean signatures for a wide range of new physics processes. Many of these processes are expected to be rare and will require the highest luminosity. The goal of the muon detector is to identify these muons and to provide a precision measurement of their momenta from a few GeV to a few TeV. The barrel detector covers the region $|\eta| \leq 1.3$. The endcap detector covers the region $1.3 \leq |\eta| \leq 2.4$. The muon detector should fulfil three basic tasks: muon identification, trigger and momentum measurement. The muon detector is placed behind ECAL and the coil. It consists of four muon stations interleaved with the iron return yoke plates. The magnetic flux in the iron provides the possibility of an independent momentum measurement. The barrel muon detector is based on a system of 240 chambers of drift tubes arranged in four concentric stations. In the endcap regions, the muon detector comprises four muon stations. The muon detector has the following functionality and performance:

1. geometric coverage: pseudorapidity coverage up to $|\eta| = 2.4$ with the minimum possible acceptance losses due to gaps and dead areas,
2. transverse momentum resolution for the muon detector alone for $0 \leq |\eta| \leq 2$: $\frac{\Delta p_T}{p_T} = 0.06 - 0.1$ for $p_T = 10$ GeV, $0.07 - 0.2$ for $p_T = 100$ GeV and $0.15 - 0.35$ for $p_T = 1$ TeV,
3. transverse momentum resolution after matching with central detector for $0 \leq |\eta| \leq 2$: $\frac{\Delta p_T}{p_T} = 0.005 - 0.01$ for $p_T = 10$ GeV, $0.015 - 0.05$ for $p_T = 100$ GeV and $0.05 - 0.2$ for $p_T = 1$ TeV,
4. charge assignment: correct at 99 percent confidence level up to $p_T = 7$ TeV for the full η coverage,
5. muon trigger: precise muon chambers and fast dedicated detectors provide a trigger with p_T thresholds from a few GeV up to 100 GeV.

Trigger. For the nominal LHC design luminosity $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, an average of 20 inelastic events occur every 25 ns, the beam crossing time interval. The input rate of 10^9 interactions per second must be reduced by a factor of at least 10^7 to 100 Hz, which is the maximum rate that should be achieved for off-line analysis. CMS reduces this rate in two steps. The Level-1 trigger system operates on a subset of the data collected from each LHC crossing. The processing is dead timeless and the decision to collect the full set of data relating to a given crossing is taken after a fixed latency of $3 \mu\text{s}$. The maximum event rate which can be accepted by the Level-2 trigger, which again considers a subset of data, is 100 kHz. The Level-1 trigger system comprises the front-end electronics which generates trigger primitives at the detector and the Level-1 processing logic in the electronic barracks, interconnected electrically and optically. The Level-2 trigger

is provided by an online processor farm. After a Level-2 positive decision, the remainder of the full crossing data is requested for further processing by this farm for the final (Level-3) decision.

The benchmarks for the trigger selection correspond to the final states which are not interesting in their own right, but typical of final states expected in new physics processes. They correspond to inclusive triggers that must be highly efficient for new physics signatures. The benchmarks are:

- 1) electrons from inclusive W bosons,
- 2) muons from inclusive W bosons,
- 3) jets at high p_t ,
- 4) high- p_t photons,
- 5) missing E_T ,
- 6) low- p_T multi-leptons (for b -physics).

8.2. ATLAS Detector [68]. The design of the ATLAS detector is similar to the CMS detector. It also consists of inner detector (tracker), electromagnetic calorimeter, hadron calorimeter, muon spectrometer and trigger. Here we briefly describe the main parameters of the ATLAS subdetectors. A schematic view of the ATLAS detector is shown in Fig. 18.

Inner Detector. The main parameters of the ATLAS inner detector at high-luminosity running are:

1. tracking coverage over the pseudorapidity range $|\eta| \leq 2.5$,
2. momentum resolution of $\frac{\Delta p_T}{p_T} \leq 0.3$ at $p_T = 500$ GeV for $|\eta| \leq 2$ and no worse than 50 percent for $|\eta| = 2.5$,
3. polar-angle resolution of ≤ 2 mrad,
4. tracking efficiency of $\geq 95\%$ over the full coverage for isolated tracks with $p_T \geq 5$ GeV, with fake-track rates less than 1% of signal rates,
5. tracking efficiency of $\geq 90\%$ for all tracks with $p_T > 1$ GeV in a cone $\Delta R < 0.25$ around high- p_T isolated track candidates, with less than 10% of such tracks being fakes; here, ΔR is defined as the separation of the particles in pseudorapidity-azimuth space,
6. electron-finding efficiency (integrated over all p_T , and including the trigger efficiency) of $> 90\%$ for a second electron with $p_T > 0.5$ GeV near a high- p_T candidate, in order to suppress photon-conversion and Dalitz-decay backgrounds,
7. high- p_T electron identification efficiency above 90% both in the trigger and in the full reconstruction, including the effects of bremsstrahlung in the tracker material,
8. combined efficiency of the calorimeter and inner detector in excess of 85% for finding photons in the $p_T \sim 60$ GeV, with an electron rejection factor > 500 and with an isolated π^0 rejection factor > 3 ,

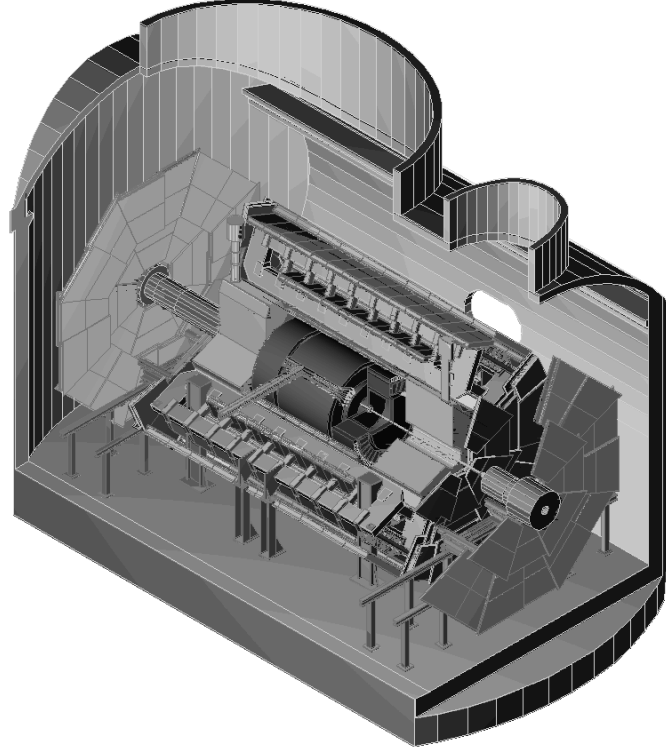


Fig. 18. Three-dimensional view of the ATLAS detector

9. tagging of b jets with an efficiency $\geq 30\%$ at the highest luminosity, with a rejection ≥ 10 against non b -hadronic jets,

10. measurement of the z coordinate of primary vertices with at least four charged tracks to better than 1 mm,

11. provision of LVL2 track trigger to select isolated tracks with $p_T > 20$ GeV with an efficiency $> 90\%$ and a fake track rate of $< 10\%$, in a cone of $\Delta R < 0.25$ around high- E_T e.m. calorimeter clusters.

For initial lower-luminosity running the additional important parameters are:

1. tagging of b jets with an efficiency above 30 %, with a rejection > 50 against non b -hadronic jets,

2. the ability to reconstruct secondary vertices from b and τ decays and charged tracks from primary vertices and from secondary decay vertices of short-lived particles with $\geq 95\%$ efficiency for $p_T \geq 0.5$ GeV over the full coverage,

3. reconstruction and identification of electrons with $p_T > 1$ GeV with an efficiency $> 70\%$.

ECAL. The energy resolution is of $\frac{\Delta E}{E} = \frac{0.1}{\sqrt{E}} \oplus 0.007$ for $|\eta| \leq 2.5$. Diphoton mass resolution is estimated to be 1.4 GeV for Higgs boson mass $m_h = 100$ GeV for $L = 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ (for CMS the diphoton mass resolution is 775 MeV).

HCAL. Jet energy resolution is of $\frac{\Delta E}{E} = \frac{0.5}{\sqrt{E}} \oplus 0.03$ for jets and a segmentation of $\Delta\eta \times \Delta\Phi = 0.1 \times 0.1$ for $|\eta| \leq 3$ and $\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\sqrt{E}} \oplus 0.1$ and a segmentation of $\Delta\eta \times \Delta\Phi = 0.1 \times 0.1$ for very forward calorimeter $3 \leq |\eta| \leq 5$.

Muon Spectrometer. The muon momentum resolution is of $\frac{\Delta p_T}{p_T} = 0.02(p_T = 20 \text{ GeV})$, $\frac{\Delta p_T}{p_T} = 0.02(p_T = 100 \text{ GeV})$, $\frac{\Delta p_T}{p_T} = 0.08(p_T = 1 \text{ TeV})$ for $|\eta| \leq 3$.

Trigger. The ATLAS trigger is organised in three trigger levels (LVL1, LVL2, LVL3). At LVL1, special-purpose processors act on reduced-granularity data from a subset of the detectors. The LVL2 trigger uses full-granularity, full-precision data from most of the detectors, but examines only regions of the detector identified by LVL1 as containing interesting information. At LVL3, the full event data are used to make the final selection of events to be recorded for off-line analysis. The LVL1 trigger accepts data at the full LHC bunch-crossing rate of 40 MHz (every 25 ns) and reduces them to 100 kHz. The LVL2 trigger reduces the rate from up to 100 kHz after LVL1 to about 1 kHz. After an event is accepted by the LVL2 trigger, the full data are sent to the LVL3 processors which must achieve a data-storage rate of 10 – 100 MB/s by reducing the event rate and/or the event size.

9. SEARCH FOR STANDARD HIGGS BOSON AT THE LHC

In this section we give mainly the results of the simulations on the search for Higgs boson at CMS detector [67, 70–86]. We don't give the review of the corresponding ATLAS simulations [68, 87–96] on the Higgs boson search because the results in terms of the significances coincide up to 30%. However sometimes we compare the CMS and ATLAS Higgs boson discovery potentials.

9.1. The Search for $h \rightarrow \gamma\gamma$. One of the most important reactions for the search for Higgs boson at LHC is

$$pp \rightarrow (h \rightarrow \gamma\gamma) + \dots, \quad (103)$$

which is the most promising one for the search for Higgs boson in the most interesting region $100 \text{ GeV} \leq m_h \leq 140 \text{ GeV}$.

The key features that enable CMS detector to obtain clear two-photon mass peaks, significantly above background throughout the intermediate mass range, are:

- i. an electromagnetic calorimeter with an excellent energy resolution (this requires calibration to high precision, which in turn requires a good inner tracking system),

ii. a large acceptance (the precision electromagnetic calorimetry extends to $|\eta| = 2.5$), adequate neutral pion rejection and (at high luminosity) a good measurement of photon direction. This requires fine lateral segmentation and a preshower detector,

iii. use of powerful inner tracking system for isolation cuts.

The cross section (including factor $K = 1.5$) times branching has been estimated to be $\sigma Br(h \rightarrow \gamma\gamma) = 76 \text{ fb}$ (68 fb) for $m_h = 110(130) \text{ GeV}$, the uncertainty in the cross section calculation is (10–30) percent. The imposition of cuts ($|\eta| \leq 2.5$, $p_T^{\gamma_1} \geq 40 \text{ GeV}$, $p_T^{\gamma_2} \geq 25 \text{ GeV}$) allows one to decrease the background in a reasonable magnitude. The jet background is reduced by imposing an isolation cut, which also reduces the bremsstrahlung background. Photon is defined to be isolated if there is no charged track or electromagnetic shower with a momentum greater than 2.5 GeV within a region $\Delta R \leq 0.3$ around it. The photons from the decay of π^0 of the relevant transverse momenta are separated in the calorimeter by a lateral distance of the order of 1 cm. An efficiency of 64% was assumed for reconstruction of each photon (i.e., 41% per event). The crystal calorimeter was assumed to have an energy resolution $\Delta E/E = 0.02/\sqrt{E} \oplus 0.005 \oplus 0.2/E$ in the barrel and $\Delta E/E = 0.05/\sqrt{E} \oplus 0.005 \oplus 0.2/E$ in the endcap, where there is a preshower detector. At high luminosity, a barrel preshower detector covers $|\eta| < 1.1$, resulting in a resolution $\Delta E/E = 0.05/\sqrt{E} \oplus 0.005 \oplus 0.2/E$ and an ability to measure the photon direction with resolution $\Delta\alpha = 40 \text{ mrad}/\sqrt{E}$ in this region.

The background to the $h \rightarrow \gamma\gamma$ may be divided into 3 categories:

1. Prompt diphoton production from quark annihilation and gluon fusion diagrams — irreducible background.
2. Prompt diphoton production from bremsstrahlung from the outgoing quark line in the QCD Compton diagram.
3. Background from jets, where an electromagnetic energy deposit originates from the decay of neutral hadrons in a jet from 1 jet + 1 prompt photon.

The signal significance $\sigma = \frac{N_S}{\sqrt{N_B}}$ is estimated to be $6.6\sigma(9\sigma)$ for $m_h = 110(130) \text{ GeV}$ and for low luminosity $L_{\text{low},t} = 3 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$ and $10\sigma(13\sigma)$ for $m_h = 110(130) \text{ GeV}$ and for high luminosity $L_{\text{high},t} = 10^5 \text{ pb}^{-1}$. The general conclusion is that at 5σ level it would be possible to discover Higgs boson*

*It should be noted that more correct definition of the significance in future experiments when we know only the average number of signal N_S and background N_B events is $S = \sqrt{N_S + N_B} - \sqrt{N_B}$ [97]. More appropriate characteristic for future experiments is the probability of the discovery, i.e. the probability that future experiment will measure the number of events N_{ev} such that the probability that standard physics reproduces N_{ev} is less than $5.7 \cdot 10^{-7}$ (5σ). For instance, for the standard Higgs boson search with $m_h = 110 \text{ GeV}$ and for $L = 3 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$ ($2 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$) the standard significance is 6.6(5.4). At the language of the probabilities it means [97] that the CMS will discover at $\geq 5\sigma$ the Higgs boson with the probability 96(73) percent.

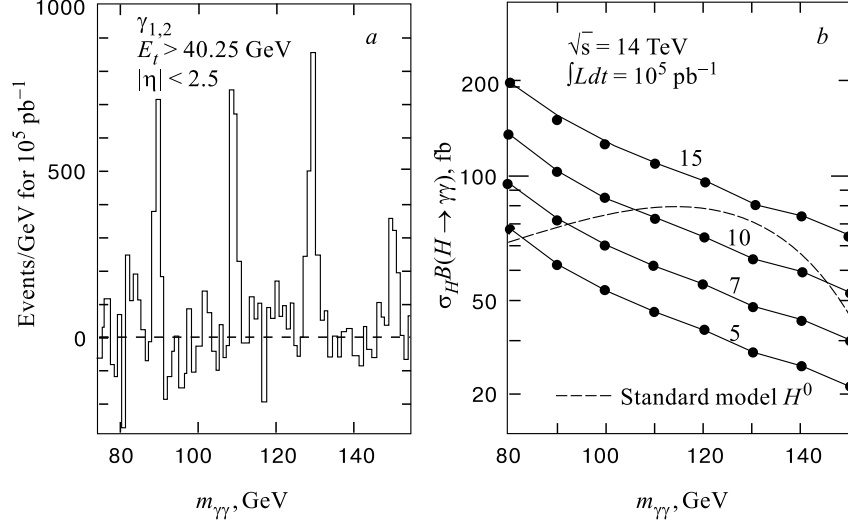


Fig. 19. (a) Background-subtracted 2γ mass plot for 10^5 pb^{-1} with signals at $m_h = 90, 110, 130$ and 150 GeV in PbWO_4 calorimeter (CMS). (b) Signal significance contours for 10^5 pb^{-1} taken at high luminosity (CMS) ($H \equiv h$)

for $95 \text{ GeV} \leq m_h \leq 145 \text{ GeV}$ at low luminosity and at high luminosity the corresponding Higgs boson mass discovery interval is $85 \text{ GeV} \leq m_h \leq 150 \text{ GeV}$ (see Fig. 19).

Comparison of the ATLAS and CMS discovery potential for the $h \rightarrow \gamma\gamma$ channel has been made in Ref. 89. The ratio between the CMS and ATLAS significances is determined by the formula

$$\frac{S_{\text{CMS}}}{S_{\text{ATLAS}}} \approx \sqrt{\frac{\Delta_m(\text{ATLAS})}{\Delta_m(\text{CMS})}} \times \frac{\epsilon_\gamma(\text{CMS})}{\epsilon_\gamma(\text{ATLAS})}, \quad (104)$$

where Δ_m , the diphoton mass resolution, and ϵ_γ , the total photon efficiency (trigger, identification, reconstruction), are detector dependent. In ATLAS and CMS the photon identification efficiencies are 80% [68] and 71% [67] correspondingly. However the diphoton mass resolution is better in CMS. According to the Technical Proposals for $m_h = 110 \text{ GeV}$ the diphoton mass resolutions are:

$$\Delta_m(\text{CMS}) = 0.54 \text{ GeV}, \Delta_m(\text{ATLAS}) = 1.25 \text{ GeV} \text{ (low luminosity)},$$

$$\Delta_m(\text{CMS}) = 0.87 \text{ GeV}, \Delta_m(\text{ATLAS}) = 1.43 \text{ GeV} \text{ (high luminosity)}.$$

The main conclusion of Ref. 89 is that the discovery potential of the CMS (in terms of σ) is 10 % and 30 % better than ATLAS at high- and low-luminosity stages correspondingly (for $m_h = 110 \text{ GeV}$).

9.2. Search for $h \rightarrow \gamma\gamma$ in Association with High- E_T Jets. The idea to look for Higgs boson signal associated with a high- p_t jet in the final state was considered in Ref. 82, where the matrix elements of signal subprocesses $gg \rightarrow g + h$, $gq \rightarrow q + h$ and $q\bar{q}g \rightarrow h$ have been calculated analytically in the leading order α_s^3 . One kind of reducible background comes from the reactions $qg \rightarrow \gamma + g + q$, $gg \rightarrow \gamma + q + \bar{q}$, $qq' \rightarrow \gamma + q(g) + q'(g)$ in the cases when the final gluon or quark produces an energetic photon without further jet generation. Other kind of reducible background comes from the subprocesses $qg \rightarrow \gamma + q$, $q\bar{q}\gamma + g$ when the second photon is produced during the quark or gluon fragmentation but this jet is still detected. Third kind of reducible background could come from the pure QCD subprocesses $2 \rightarrow 2$ type, when both particles in the final state are gluons and quarks. There is nonzero probability to get two separated and energetic photons from the fragmentating of quarks and gluons. There are possible contributions from the following subprocesses: $gg \rightarrow g(q) + g(\bar{q})$, $gq \rightarrow g + q$, $qq' \rightarrow q(g) + q'(g)$.

The typical set of cuts used to separate signal from background is [82]:

(C1) Two photons are required with $p_t^\gamma > 40$ GeV, and $|\eta|_\gamma < 2.5$ for each photon.

(C2) Photons are isolated from each other by $\Delta R(\gamma_1, \gamma_2) > 0.3$.

(C3) Jet has high transverse energy $E_t^{\text{jet}} > 40$ GeV and is centrally produced, $|\eta_{\text{jet}}| < 2.4$.

(C4) Jet is isolated from the photons by $\Delta R(\text{jet}, \gamma_1) > 0.3$ and $\Delta R(\text{jet}, \gamma_2) > 0.3$.

For the Higgs boson mass $100 \text{ GeV} \leq M_h \leq 150 \text{ GeV}$ and for an integrated luminosity 10 fb^{-1} this channel has dozens of signal events with a number of background events only by a factor of 2–3 higher [82]. The significance $N_S/\sqrt{N_B} \sim 4.0; 5.3$ and 4.1 for $M_h = 100, 120$ and 140 GeV respectively, indicating good prospects for discovery of the light Higgs boson at low LHC luminosity. These results also imply that at high luminosity phase with year luminosity of 10^5 pb^{-1} LHC will give hundred of events with high p_t associated with hard jet with the signal significance ~ 15 .

Note that recent study [92] of the signature $\gamma\gamma + \text{jets}$ for ATLAS detector confirms the main results of Ref. 82.

The possibility of searching for $h \rightarrow \gamma\gamma$ with ≥ 2 large- E_T jet also allows one to improve signal/background ratio. There are several sources of such Higgs + jet events. One is the next-to-leading order corrections to $gg \rightarrow h$ with hard gluons. Others are the associated production of $t\bar{t}h, Wh, Zh$ and the WW and Zh fusion mechanisms.

The cuts that provide optimal sensitivity are [73]:

i. Two isolated photons are required, with $p_t^{\gamma_1} \geq 40$ GeV and $p_t^{\gamma_2} \geq 60$ GeV, $|\eta| \leq 2.5$ and $p_t^{\gamma\gamma} \geq 50$ GeV.

- ii. Number of jets ≥ 2 , $E_t^{\text{jet}} \geq 40$ GeV for the central jets ($|\eta| \leq 2.4$) and $E_t^{\text{jet}} \geq 800$ GeV for the forward ones ($2.4 \leq |\eta| \leq 4.6$).
- iii. Photons are isolated with no charged or neutral particles with $p_t \geq 2$ GeV within a cone $\Delta R \leq 0.3$ around each photon's direction.
- iiii. γ -jet isolation $\Delta R(\gamma, \text{jet}) > 1.5$ (to suppress the bremsstrahlung contribution).

The calculations give encouraging results, namely for $L_{\text{high},t} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ pb}^{-1}$ it would be possible to discover the Higgs boson for $70 \text{ GeV} \leq m_h \leq 150 \text{ GeV}$ with $\geq 7\sigma$ signal significance. Note that the background is not only much smaller in magnitude than in the inclusive $h \rightarrow \gamma\gamma$ search, but it is also peaked at higher masses, away from the most difficult region $m(\gamma\gamma) \leq 90 \text{ GeV}$.

9.3. $h \rightarrow W^+W^- \rightarrow l^+\nu l^-\nu$ Signature. Recently it has been shown [83] that the previously ignored signature $pp \rightarrow h \rightarrow W^+W^- \rightarrow l^+\nu l^-\bar{\nu}'$ provides the Higgs boson discovery for the Higgs boson mass region between 155 GeV and 180 GeV at the LHC. The proposed signature does not require extraordinary detector performance and only requires a relatively low integrated luminosity of about 5 fb^{-1} .

The main background production reactions are

$$pp \rightarrow (W^+W^-, W^\pm Z^0, t\bar{t}, W^\pm t(b) + \dots). \quad (105)$$

The most important selection criteria for the enhancement of the signal over the background are the following [83]:

1. Events which contain two isolated high- p_t charged leptons, electrons or muons, which are inconsistent with Z decays are selected. Both leptons should have a pseudorapidity $|\eta|$ of less than 2.4 and their p_t should be larger than 25 GeV and 10 GeV respectively. The dilepton mass should be larger than 10 GeV and more than 5 GeV different from Z boson mass if the event consists of e^+e^- or $\mu^+\mu^-$ pairs.
2. Background from $t\bar{t} \rightarrow bW^+\bar{b}W^-$ and $gb \rightarrow Wtb \rightarrow WbW(b)$ is reduced by vetoing events which contain jets with p_t of more than 20 GeV and $|\eta| < 3$.
3. Signal events from gluon-gluon scattering are more central than the W^+W^- background from $q\bar{q}$ scattering. This criterium is essentially independent of the mass. Therefore it is required that the polar angle of the reconstructed dilepton momentum vector, with respect to the beam direction, is larger than 30 degrees and that the absolute value of the pseudorapidity difference of the leptons is smaller than 1.25. As a result both leptons are found essentially within the barrel region of the experiments with $|\eta| < 1.5$.
4. The W^+W^- spin correlations and the $V - A$ structure of the W decays result in a distinctive signature for W^+W^- pairs produced in Higgs boson decays. For Higgs boson mass close to $2 \times M_W$ the $W^\pm$ boost is small and the

opening angle between the two charged leptons in the plane transverse to the beam direction is small.

The results of the analysis [83] demonstrate that this signature provides not only the Higgs boson discovery channel for a mass range between (155 – 180) GeV with $S/B \geq 0.35$ but also helps to establish a LHC Higgs boson signal for masses between (120 – 500) GeV. Recent simulations study [84] based on PYTHIA to generate events and CMSCIM calorimeter simulation for the jet veto confirm qualitatively the results of Ref. 83. Numerically they give for $m_h = 130$ GeV 30 % lower efficiencies for the signal and DY background and about a factor 2 higher overall efficiency for $t\bar{t}$ background [84].

Note that in Ref. 98 the signature $h \rightarrow W^{(*)}W^{(*)} \rightarrow e^\pm \mu^\mp p_T^{\text{mis}}$ in weak boson fusion mechanism with forward jet tagging has been investigated*. The main conclusion of Ref. 98 is that the use of this signature allows one to detect Higgs boson in the (130 – 200) GeV range with a much better signal to background ratio than inclusive signature $h \rightarrow e^\pm \mu^\mp p_T^{\text{mis}}$.

9.4. $h \rightarrow ZZ^*(ZZ) \rightarrow 4$ Leptons. $m_h < 2m_Z$ Region. The channel $h \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ is the most promising one to observe Higgs boson in the mass range 130 GeV – 180 GeV. Below $2M_Z$ the event rate is small and the background reduction more difficult, as one of the Z is off-mass shell. In this mass region the width of the Higgs boson is small ($\Gamma_h < 1$ GeV), and the observed width is entirely determined by the instrumental mass resolution. The significance of the signal is proportional to the four-lepton mass resolution ($S = N_S/\sqrt{N_B}$) and $N_B \sim \sigma_{4l}$, so the lepton energy/momentum resolution is of decisive importance**.

In the $m_h < 2M_Z$ mass region, the main backgrounds are from $t\bar{t}$, $Zb\bar{b}$ and ZZ^* . The ZZ^* background is irreducible and peaks sharply near the ZZ threshold. The $Zb\bar{b}$ background cannot be reduced by a Z -mass cut, but it can be suppressed by lepton isolation. The $t\bar{t}$ background can be reduced by a Z -mass cut and by isolation cuts. The standard event cuts in CMS were chosen the following [67]: one electron with $p_t > 20$ GeV; one with $p_t > 15$ GeV, and the remaining two electrons with $p_t > 10$ GeV, all within $|\eta| < 2.5$. For muons, the corresponding p_t cuts are 20, 10 and 5 GeV in the rapidity range $|\eta| < 2.4$. For $m_h = 130$ GeV the overall (kinematic and geometrical) acceptance for the four-

*Other very interesting signature for the standard Higgs boson detection is $h \rightarrow \tau\tau$ in weak boson fusion. Results of recent paper [99] give some evidence that it would be possible to detect standard Higgs boson in the mass range 120 – 140 GeV using this signature.

**Typical Higgs boson mass resolutions in this mass range are: $\sigma_{4\mu} \approx 1$ GeV, $\sigma_{4e} \approx 1.5$ GeV (CMS) [67] and $\sigma_{4\mu} \approx 1.6$ GeV, $\sigma_{4e} \approx 1.6$ GeV (ATLAS) [68]. The comparison of the CMS and ATLAS discovery potentials with $h \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4$ leptons based on the analyses presented in the two Technical Proposals has been performed in [88]. The main conclusion of the Ref. 88 is that in terms of significances ATLAS and CMS discovery potentials coincide up to 30%.

electron channel is 22 % and for the four-muon channel 42 %. For $m_h = 170$ GeV these acceptances increase to 38 % and 48 % respectively. To select $h \rightarrow ZZ^*$ events and suppress the large $t\bar{t}$ background, one of the e^+e^- or $\mu^+\mu^-$ pairs was assumed to be within $\pm 2\sigma_Z$ of the Z mass. There is a fraction of events where both Z are off-shell. This effect results in a 24 % loss for $m_h = 130$ GeV, decreasing to 12 % for $m_h = 170$ GeV. The M_Z cut reduces $t\bar{t}$ background by a factor of 11 in the $Z \rightarrow \mu^+\mu^-$ channel and by a factor of 5 in the $Z \rightarrow e^+e^-$ channel. For two softer leptons, $M(l\bar{l}) > 12$ GeV is also required. One can say that for the region $130 \text{ GeV} \leq m_h \leq 180 \text{ GeV}$ and for $L_{\text{high},t} = 10^5 \text{ pb}^{-1}$ CMS will discover the Higgs boson with $\geq 5\sigma$ signal significance (see Fig. 20) except narrow mass region around 170 GeV where $\sigma \times Br$ has a minimum due to the opening of the $h \rightarrow WW$ channel and drop of the $h \rightarrow ZZ^*$ branching ratio just below the ZZ threshold. Note that the imposition of the additional cut on the mass of the second (lighter) lepton pair to $m_{34} < 76$ GeV leads to a considerable signal improvement in this critical region. At low luminosity $L = 2 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$ Higgs boson can be discovered at CMS in the mass range $m_h = (130-150) \text{ GeV}$.

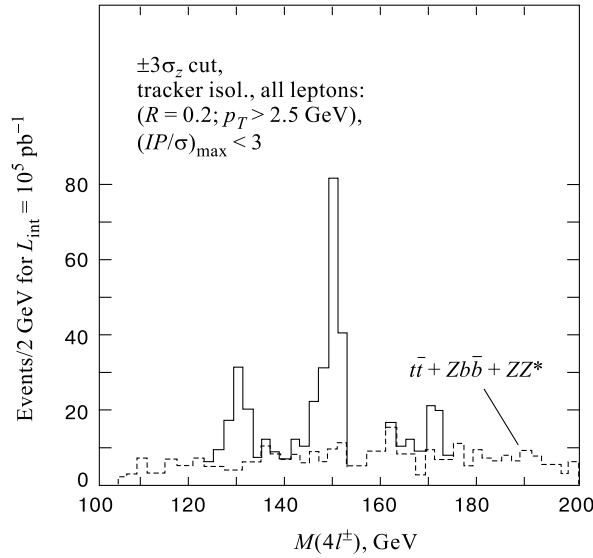


Fig. 20. The four-lepton mass distributions for $h \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l^\pm$ in CMS, superimposed on the total background, for $m_h = 130, 150$ and 170 GeV with 10^5 pb^{-1} ($H \equiv h$)

$h \rightarrow ZZ \rightarrow 4l$. For $180 \text{ GeV} \leq m_h \leq 800 \text{ GeV}$, this signature is considered to be the most reliable one for the Higgs boson discovery at LHC, since the expected signal rates are large and the background is small. The main background

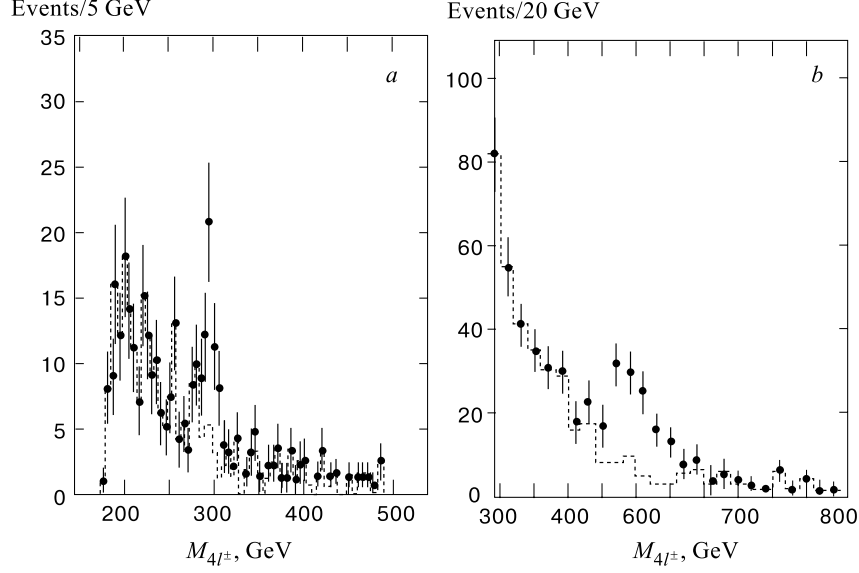


Fig. 21. The four-lepton mass distributions for $h \rightarrow ZZ \rightarrow 4l^\pm$ in CMS, superimposed on the ZZ continuum background, for $m_h = 300$ GeV with $2 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$ (a) and for $m_h = 500$ GeV with 10^5 pb^{-1} (b); $\sqrt{s} = 14$ TeV ($H \equiv h$)

to the $h \rightarrow ZZ \rightarrow 4l^\pm$ process is the irreducible ZZ production from $q\bar{q} \rightarrow ZZ$ and $gg \rightarrow ZZ$. The $t\bar{t}$ and $Zb\bar{b}$ backgrounds are small and reducible by a Z -mass cut. The typical cuts are the following [76, 77]:

1. One electron with $p_T > 20$ GeV, one with $p_T > 15$ GeV, and the remaining two electrons with $p_T > 10$ GeV, all within $|\eta| < 2.5$.
2. For muons the corresponding p_T cuts are 20, 10 and 5 GeV, and the rapidity coverage is $|\eta| < 2.4$.
3. To avoid any residual $t\bar{t}$ background a cut on the Z mass by $m_{l+l-} = m_Z \pm 4\sigma_Z$, with $\sigma_Z = 3$ GeV is used.

The use of the above determined cuts allows one to detect the Higgs boson at $\geq 5\sigma$ level up to ≈ 400 GeV at 10^4 pb^{-1} and up to $m_h \approx 650$ GeV at 10^5 pb^{-1} [77] (see Fig. 21). As it has been demonstrated in Ref. 77 the imposition of the additional cut $p_T^{Z_1} + p_T^{Z_2} > m_{ZZ}/1.4$ allows one to extend the CMS discovery potential up to 650 GeV ($3 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$), 750 GeV (10^5 pb^{-1}), 850 GeV ($3 \cdot 10^5 \text{ pb}^{-1}$).

Similar results have been obtained for ATLAS [91].

9.5. The Use of the Signature $pp \rightarrow \gamma\gamma + \text{Lepton}$. The $Wh \rightarrow l\gamma\gamma + X$ and $\bar{t}th \rightarrow l\gamma\gamma + X$ final states are other promising signature for the Higgs boson search. The production cross section is smaller than the inclusive $h \rightarrow \gamma\gamma$ by

a factor of ≈ 30 . However the isolated hard lepton from the W and t decays allows one to obtain a strong background reduction and to indicate the primary vertex at any luminosity.

Typical choice of cuts is the following [67, 72]:

1. $p_t^{\gamma_1} > 40$ GeV, $p_t^{\gamma_2} > 20$ GeV, transverse momentum cuts for photons,
2. $p_t^l > 20$ GeV, transverse momentum cuts for electron (or muon),
3. $|\eta_{\gamma_1, \gamma_2}| < 2.4$, $|\eta_l| < 2.4$, rapidity cuts for both photons and electron (or muon),
4. $\Delta R(\gamma_1, \gamma_2) > 0.3$, $\Delta R(\gamma, l) > 0.3$, isolation cuts for photon or photon-lepton pair.

Here $\Delta R = \sqrt{\delta\phi^2 + \delta y^2}$ is the separation between two particles in the ϕ - y plane. The main background comes from the reactions $pp \rightarrow \gamma\gamma + t\bar{t}$, $pp \rightarrow \gamma q(\bar{q} + e^\pm\nu)$, $pp \rightarrow \gamma g + e^\pm\nu$ with a gluon jet misidentified as a photon, $pp \rightarrow \gamma + e^+e^-$ with an electron misidentified as a photon, $pp \rightarrow \gamma\gamma b\bar{b}$ with a b quark misidentified as an electron.

The main conclusion is that for an integrated luminosity 165fb^{-1} in both channels $pp \rightarrow Wh$ and $pp \rightarrow t\bar{t}h$ in the two-photon invariant mass interval $M_h - 1 \text{ GeV} \leq M_{\gamma\gamma} \leq M_h + 1 \text{ GeV}$ there are ~ 100 signal events for $M_h = 120$ GeV and ~ 20 irreducible background events if the photon transverse momentum cuts are 20 GeV. If the photon transverse momentum cuts are taken to be 40 GeV there are ~ 50 signal events and 1 – 2 background events. Higgs peak can be observed practically free from the background. However in the low luminosity regime the reaction $pp \rightarrow \gamma\gamma + \text{lepton}$ is able to produce only 4 – 5 clean signal events. So only in the high luminosity phase it allows one to make an important cross-checking if the Higgs signal has shown up before in $pp \rightarrow h + \dots \rightarrow \gamma\gamma + \dots$ classical signature.

9.6. The Use of Channels $h \rightarrow WW \rightarrow ll\nu\nu$, $h \rightarrow WW \rightarrow l\nu jj$ and $h \rightarrow ZZ \rightarrow lljj$. The channel $h \rightarrow ll\nu\nu$ has a six times larger branching than $h \rightarrow 4l^\pm$. The main background comes from ZZ , ZW , $t\bar{t}$ and $Z + \text{jets}$. The chosen cuts are the following [67]:

1. $E_t^{\text{miss}} \geq 100$ GeV.
2. Two isolated leptons are required, with $p_t \geq 20$ GeV, $|\eta| \leq 1.8$ and $p_t^{ll} \geq 60$ GeV.
3. $|M_Z - M_{ll}| \leq 6$ GeV.
4. No other isolated leptons with $p_t \geq 6$ GeV.
5. No central jets with $E_t \geq 150$ GeV.
6. No jets back-to-back with leptons (cosine of the angle between the momentum of the lepton pair and sum of the momenta of the jets is ≥ -0.8).
7. E_t^{miss} vector back-to-back with the lepton pair (cosine of the angle in the transverse plane between the two-lepton momentum and the missing transverse momentum ≤ 0.8).

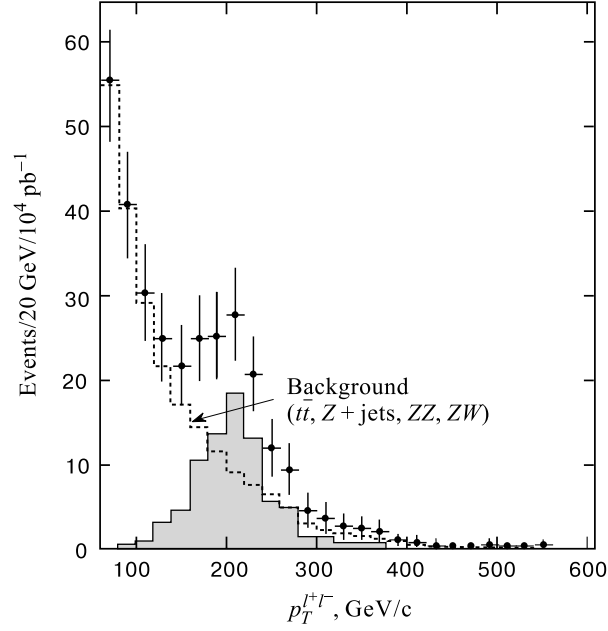


Fig. 22. $h \rightarrow l^+ l^- \nu \nu$ signal for $m_h = 500$ GeV with 10^4 pb^{-1} in CMS ($H \equiv h$)

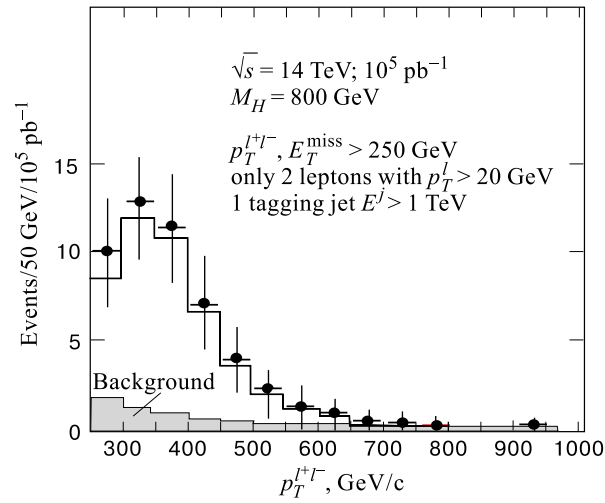


Fig. 23. $h \rightarrow l^+ l^- \nu \nu$ signal for $m_h = 800$ GeV with 10^5 pb^{-1} in CMS. One tagged jet with $E > 1$ TeV is assumed ($H \equiv h$)

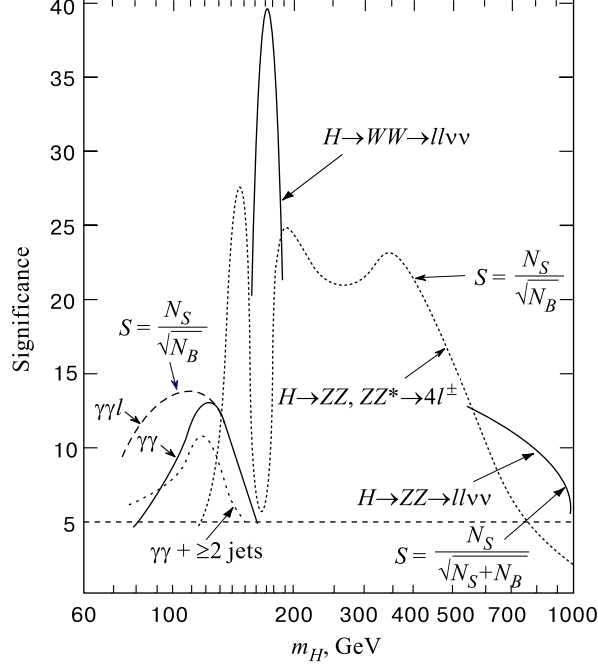


Fig. 24. Expected observability of the Standard Model Higgs as a function on m_H in CMS with 10^5 pb^{-1} (Ref. 79) ($H \equiv h$)

The conclusion [67, 86] is that using this mode it would be possible to discover Higgs boson in the interval $400 \text{ GeV} \leq m_h \leq (800 - 900) \text{ GeV}$ (see Figs. 22, 23).

The channels $h \rightarrow WW \rightarrow l\nu jj$ and $h \rightarrow ZZ \rightarrow lljj$ are important in the $m_h \approx 1 \text{ TeV}$ mass range, where the large $W, Z \rightarrow q\bar{q}$ branching ratios must be used. Also high lepton pairs with $m_{ll} \approx M_Z$ for $h \rightarrow ZZ$ or a high- p_t lepton pair plus large E_t^{miss} for $h \rightarrow WW$ must be used. In addition, two hard jets from the hadronic decays of Z/W with $m_{jj} \approx M_{Z/W}$ are required. The backgrounds are: $Z + \text{jets}$, ZW , WW , $t\bar{t}$, WW , WZ . For $m_h \approx 1 \text{ TeV}$ the Higgs boson is very broad ($\Gamma_h \approx 0.5 \text{ TeV}$ and WW/ZZ fusion mechanism represents about 50 percent of the total production cross section), therefore forward-region signature is essential. The appropriate cuts are the following:

- i. $E_t^{\text{miss}} \geq 150 \text{ GeV}$, $p_t^l \geq 150 \text{ GeV}$, $p_t^W \geq 300 \text{ GeV}$ for $h \rightarrow WW$, or $p_t^l \geq 50 \text{ GeV}$, $p_t^Z \geq 50 \text{ GeV}$, $p_t^Z \geq 150 \text{ GeV}$, $|m_Z - m_{ll}| \leq 10 \text{ GeV}$ for $h \rightarrow ZZ$.
- ii. $|m_{jj} - m_{W/Z}| \leq 15 \text{ GeV}$ for the central jet pair.
- iii. $E_t^{\text{jet}} \geq 10 \text{ GeV}$, $E^{\text{jet}} \geq 400 \text{ GeV}$, $|\eta| \geq 2.4$ for the two forward tagging jets.

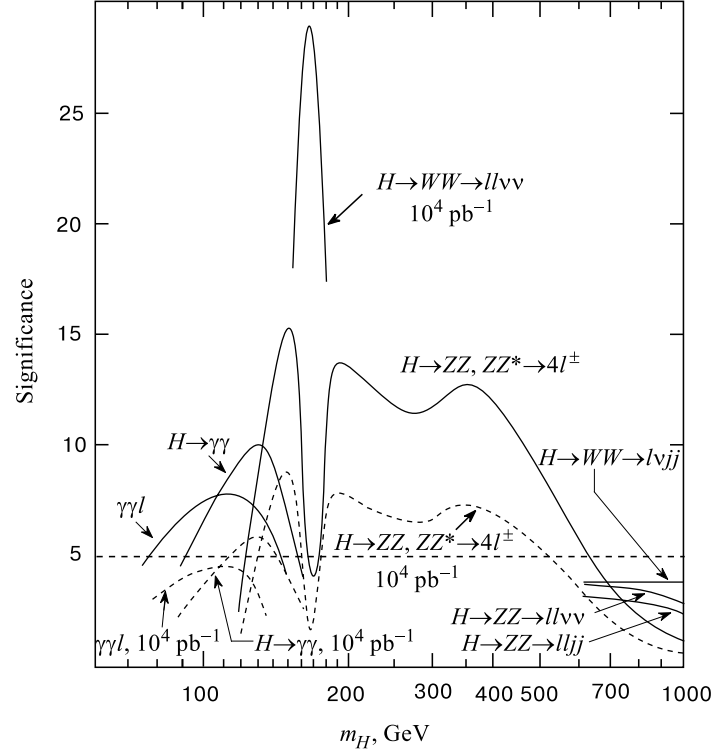


Fig. 25. Expected observability of the Standard Model Higgs as a function on m_H in CMS with $3 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$ and with 10^4 pb^{-1} (Ref. 79) ($H \equiv h$)

The main conclusion [67, 78] is that the use of the reactions $h \rightarrow WW \rightarrow l\nu jj$ and $h \rightarrow ZZ \rightarrow lljj$ allows one to discover the heavy Higgs boson with a mass up to 1 TeV for $L_{\text{high},t} = 10^5 \text{ pb}^{-1}$.

9.7. Summary. The most reliable signatures for the search for the Higgs boson at LHC are the following:

1. $h \rightarrow \gamma\gamma$ or $h \rightarrow \gamma\gamma + \text{jets}$.
2. $h \rightarrow ZZ^*, ZZ \rightarrow 4l^\pm$.
3. $h \rightarrow W^+W^- \rightarrow l^+\nu l^-\bar{\nu}$.
4. $h \rightarrow ZZ, WW \rightarrow ll\nu\nu, lljj, l\nu jj$.

Figures 24, 25 show the expected CMS discovery potential of the standard Higgs boson as a function of m_h for integrated luminosities of 10^5 pb^{-1} and $3 \cdot 10^4 \text{ pb}^{-1}$. For $L = 10^5 \text{ pb}^{-1}$ CMS is able to discover the Higgs boson at $\geq 5\sigma$ level for the entire mass region (95 GeV–1 TeV). For low luminosity stage with $L = 3 \cdot 10^5 \text{ pb}^{-1}$ CMS is able to discover Higgs boson with a mass up to $\sim 600 \text{ GeV}$.

10. CONCLUSION

There are no doubts that at present the supergoal number one of the experimental high energy physics is the search for the Higgs boson — the last nondiscovered cornerstone of the Standard Model. At present the LEP2 experimental bound on the Higgs boson mass is $m_h \geq 102.6$ GeV. In a year, LEP2 will be able to discover the Higgs boson or to increase a lower bound up to $(105 - 110)$ GeV. LHC is able to discover the Higgs boson with a mass up to 1 TeV and to check its basic properties. The experimental Higgs boson discovery will be triumph of the idea of the renormalizability (in some sense it will be the «experimental proof» of the renormalizability of the electroweak interactions) which mathematical cornerstone is the famous Bogoliubov–Parasiuk theorem. At any rate after LHC we will know the basic mechanism (Higgs boson or something more exotic?) of the electroweak symmetry breaking.

We thank our colleagues from INR theoretical department for useful discussions. We are indebted to S.I.Bityukov for his help in preparation of the manuscript. The research described in this publication has been supported by RFFI grants 99-02-16956 and 99-01-00091.

REFERENCES

1. **Bogoliubov N.N., Shirkov D.V.** — Introduction to the Theory of Quantized Fields (3rd ed.), John Wiley Inc., New York, 1980.
2. **Bogoliubov N.N., Parasyuk D.V.** — Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1956, v.100, p.429; Acta Mathem., 1957, v.97, p.227.
3. **Bogoliubov N.N. et al.** — General Principles of Quantum Field Theory, Nauka, Moscow, 1987.
4. **Glashow S.L.** — Nucl. Phys., 1961, v.22, p.579;
Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, p.1264;
Salam A. — Elementary Particle Theory (ed. N.Svartholm), Almquist and Wiksells, Stockholm, 1964.
5. **Higgs P.** — Phys. Lett., 1964, v.12, p.132;
Englert F., Brout R. — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.321.
6. **Bogoliubov N.N.** — J. Phys. USSR, 1947, v.11, p.23; Lectures on Quantum Statistics, Macdonald Technical and Scientific, London, 1970.
7. **Accomando E. et al.** — Phys. Rep., 1998, v.299, p.1.
8. **Barger V. et al.** — Phys. Rep., 1997, v.286, p.1.
9. Reviews and original references can be found in:
Barbieri R. — Riv. Nuovo Cim., 1988, v.11, p.1;
Lahanus A.B., Nanopoulos D.V. — Phys. Rep., 1987, v.145, p.1;
Haber H.E., Lane G.L. — Phys. Rep., 1985, v.117, p.75;
Nilles H.P. — Phys. Rep., 1984, v.110, p.1.
10. **Okun L.B.** — Leptons and Quarks, North Holland Pub. Comp., 1982.

11. **Ta-Pei Cheng, Ling-Fong-Li** — Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, Oxford, 1984.
12. **Pokorsky S.** — Gauge Field Theories, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
13. **Bailin D., Love A.** — Introduction to Gauge Field Theory, Adam Hilger, Bristol, 1986.
14. **Gunion J.F. et al.** — The Higgs Hunter's Guide, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, CA, 1990.
15. **Borodulin V.I., Rogalyov R.N., Slabospitsky S.R.** — Compendium of Relations, IHEP Preprint 95-50.
16. **Spira M., Zervas P.M.** — Electroweak Symmetry Breaking and Higgs Physics, CERN-TH/97-379 [hep-ph/9803257].
17. **Spira M.** — QCD Effects in Higgs Physics, CERN-TH/97-68 (hep-ph/9705337), Fortsch.Phys., 1998, v.43, p.203.
18. **Dittmar M.** — Searching for the Higgs and Other Exotic Objects, CMS CR 1999/009; ETHZ-IPP PR-98-10.
19. Review of Particle Physics, The European Physical Journal, 1998, v.C3.
20. **Lee B.W., Quigg C., Thacker C.B.** — Phys. Rev. Lett., 1977, v.38, p.883; Phys. Rev., 1974, v.D10, p.1145.
21. **Dawson S., Willenbrock S.** — Phys. Rev., 1989, v.D40, p.2880.
22. See for instance:
Jersak J. — In: Higgs Particles(s), Proceedings of the Eighth INFN Eloisatron Project Workshop, July 15-26, Erice, Italy, edited by A.Ali, Plenum Press, New York, 1990, p.39.
23. **Cabibbo N. et al.** — Nucl. Phys., 1979, v.B158, p.295;
Lindner M. — Z. Phys., 1986, v.C31, p.295.
24. **Krasnikov N.V.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1978, v.28, p.549;
Hung P.Q. — Phys. Rev. Lett., 1979, v.42, p.873;
Politzer H.D., Wolfram S. — Phys. Lett., 1979, v.B82, p.242;
Anselm A.A. — JETP Lett., 1979, v.29, p.590;
Lindner M., Sher M., Zaglauer M. — Phys. Lett., 1989, v.B228, p.139.
25. **Krasnikov N.V., Kreyerhoff G., Rodenberg R.** — Mod. Phys. Lett., 1994, v.A9, p.3663.
26. **Ellis J., Ridolfi G., Zwirner F.** — Phys. Lett., 1991, v.B257, p.83;
Haber H., Hempfling R. — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.1815;
Yamada A. — Phys. Lett., 1991, v.B263, p.233;
Barbieri R., Frigeni M., Caravaglis F. — Phys. Lett., 1991, v.B258, p.233;
Chanowski P.M., Pokorski S., Rosick J. — Phys. Lett., 1992, v.B275, p.191.
27. **Krasnikov N.V., Pokorski S.** — Phys. Lett., 1992, v.B288, p.184;
Diaz M.A., Ter Veldhuis T.A., Weiler T.J. — Phys. Rev. Lett., 1995, v.74, p.2876; Phys. Rev., 1996, v.D54, p.5855.
28. **Veltman M.** — Acta Phys. Polon., 1977, v.B8, p.475; See also:
Dittmaier S., Schildknecht D., Weiglein S. — Phys. Lett., 1996, v.B386, p.247.
29. A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model, the LEP Collaborations, LEPEWWG/98-01, 15 May 1998.
30. **Chanowitz M.S.** — Higgs Boson Mass Constraints from Precision Data and Direct Searches, LBNL-42103(1998)[hep-ph/9807452].
31. **Resnick L., Sundarsean M.K., Watson P.J.S.** — Phys. Rev., 1973, v.D8, p.172;
Ellis J., Gaillard M.K., Nanopoulos D.V. — Nucl. Phys., 1976, v.B106, p.292.

32. **Braaten E., Leveille J.P.** — Phys. Rev., 1980, v.D22, p.715;
Sakai N. — Phys. Rev., 1980, v.D22, p.2220;
Drees M., Hikasa K. — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.1547;
Kataev A.L., Kim V.T. — Mod. Phys. Lett., 1994, v.A9, p.1309;
Chetyrkin K.G. — Phys. Lett., 1997, v.B390, p.309.
33. **Cray N. et al.** — Z. Phys., 1990, v.C48, p.673.
34. **Fleischer J., Jegerleher F.** — Phys. Rev., 1981, v.D23, p.2001;
Bardin D.Yu., Vilenski B.M., Khristova P.Kh. — Sov. J. Nucl. Phys., 1991, v.53, p.152;
Dabelstein A., Holik W. — Z. Phys., 1992, v.C53, p.507;
Kniehl B.A. — Nucl. Phys., 1992, v.B376, p.3.
Ghinculov A. — Phys. Lett., 1994, v.B337, p.137; 1995, v.B346, p.426;
Durand L., Kniehl B.A., Riesselmann K. — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.5007.
35. **Kniehl B.A., Spira M.** — Z. Phys., 1995, v.C69, p.77;
Kniehl B.A., Spira M. — Nucl. Phys., 1995, v.B443, p.37.
36. **Ghinculov A.** — Nucl. Phys., 1995, v.B455, p.21;
Frink A. et al. — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.4548.
37. **Rizzo T.G.** — Phys. Rev., 1980, v.D22, p.389;
Keung W.-Y., Marciano W.J. — Phys. Rev., 1984, v.D30, p.248.
38. **Cahn R.N.** — Rep. Prog. Phys., 1989, v.52, p.389.
39. **Ellis J., Gaillard M.K., Nanopoulos D.V.** — Nucl. Phys., 1976, v.B106, p.292.
40. **Spira M. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.B453, p.17;
Inami T., Kubotta T., Okada Y. — Z. Phys., 1983, v.C18, p.69;
Djouadi A., Spira M., Zervas P.M. — Phys. Lett., 1991, v.B264, p.440.
41. **Chetyrkin K.G., Kniehl B.A., Steinhauser M.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.353.
42. **Djouadi A., Gambino P.** — Phys. Rev. Lett., 1994, v.D49, p.3499.
43. **Zheng H., Wu D.** — Phys. Rev., 1990, v.D42, p.3760;
Djouadi A. et al. — Phys. Lett., 1991, v.B257, p.187;
Dawson S., Kauffman R.P. — Phys. Rev., 1993, v.D47, p.1264.
44. **Korner J., Melnikov K., Yakovlev O.** — Phys. Rev., 1996, v.D53, p.3737;
Liao Y., Li X. — Phys. Lett., 1997, v.B396, p.225.
45. **Ioffe B.L., Khoze V.A.** — Sov. J. Part. Nucl., 1978, v.9, p.50;
Bjorken J.D. — Proc. Summer Institute on Particle Physics, Report SLAC-198 (1976).
46. See for example:
Altarelli G., Kleiss R., Verzegnassi C., editors. — Physics at LEP, vol.1: Standard Physics, CERN Yellow Report 86-02 (1986).
47. **Blondel A.** — Precision Electroweak Physics at LEP, CERN-PPE/94-133 (1994);
Janot P. — Searching for Higgs Bosons at LEP1 and LEP2, Perspectives on Higgs Physics, World Scientific Publishing Company, ed.K.G.Lane.
48. Report CERN 96-01, vol.1, «Physics at LEP2», edited by G.Altarelli, T.Sjostrand, F.Zwirner and references therein.
49. **Passarino G.** — Nucl. Phys., 1997, v.B488, p.3.
50. L3 Collaboration, Search for the Standard Model Higgs Boson in e^+e^- Interactions at $\sqrt{s} = 189$ GeV, CERN Preprint CERN-EP/99-080 (1999).
51. The Opal Collaboration, Search for Neutral Higgs Bosons in e^+e^- Collisions at $\sqrt{s} \approx 189$ GeV, CERN Preprint CERN-EP/99-096(1999) [hep-ex/9908002].

52. The ALEPH Collaboration, Search for the Neutral Higgs Bosons of the Standard Model and the MSSM in e^+e^- Collisions at $\sqrt{s} = 188.6$ GeV, ALEPH 99-053(CONF 99-029).
53. The DELPHI Collaboration, DELPHI 99-8(CONF 208).
54. **Felcini M.** — The Search for Higgs Particles at LEP, hep-ex/9907049 (1999).
55. The ALEPH Collaboration, Search for Neutral Higgs Bosons in e^+e^- Collisions at $\sqrt{s} \leq 196$ GeV, hep-ex/9908016 (1999).
56. **Mcnamara P.** — Talk given at LEP EXPERIMENTS COMMITTEE; CERN, 7 September 1999.
57. **Gross E. et al.** — Prospects for the Higgs Boson Search in Electron-Positron Collisions at LEP 200, CERN-EP/98-094.
58. **Georgi H. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1978, v.40, p.692.
59. **Djouadi A., Spira M., Zervas P.M.** — Phys. Lett., 1991, v.B264, p.440;
Spira M., Djouadi A., Graudenz D., Zervas P.M. — Nucl. Phys., 1995, v.B453, p.17.
60. **Cahn R.N., Dawson S.** — Phys. Lett., 1994, v.B136, p.196;
Hikasa K. — Phys. Lett., 1985, v.B164, p.341;
Altarelli G., Mele B., Pitolli F. — Nucl. Phys., 1987, v.B287, p.205;
Han T., Valensia G., Willenbrock S. — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.3274.
61. **Glashow S.L., Nanopoulos D.V., Yildiz A.** — Phys. Rev., 1978, v.D18, p.1724.
62. **Kunszt Z.** — Nucl. Phys., 1984, v.B247, p.339;
Gunion J.F. — Phys. Lett., 1991, v.B253, p.269;
Marciano W.J., Paige F.E. — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.2433.
63. **Quigg C.** — Physics Opportunities in Fermilab's Futures, FERMILAB-FN-676, March 1999.
64. **Montgomery H.E.** — Physics with the Main Injector, hep-ex/9904019.
65. **Tao Han, Turcot A.S., Ren-Jie Zhang** — Exploiting $h \rightarrow W^*W^*$ Decays at the Upgraded Fermilab Tevatron, FERMILAB, MADPH-08-1094 (1998), hep-ph/9812275 (1998).
66. The Large Hadron Collider, CERN/AC/95-05.
67. CMS, Technical Proposal, CERN/LHCC/94-38 LHCCP1, 15 December 1994.
68. ATLAS, Technical Proposal, CERN/LHCC/94-43 LHCCP2, 15 December 1994.
69. As a review of physics to be studied at LHC see, for example:
Krasnikov N.V., Matveev V.A. — Phys. Part. Nucl., 1997, v.28, p.441.
70. **Seez C.** — $H \rightarrow \gamma\gamma$; An Update, CMS TN/94-289 (1994).
71. **Lassila-Perrini K.** — The Reconstruction of Higgs $\rightarrow \gamma\gamma$ in CMS, CMS CR/97-006 (1997).
72. **Abdullin S., Starodumov A., Stepanov N.** — Study of the Associated Production Modes WH and $t\bar{t}H$ in CMS, CMS TN/93-86 (1993).
73. **Abdullin S. et al.** — Possibilities to Improve the Observability of SM Light Higgs in the $\gamma\gamma$ Channel, CMS TN/94-247 (1994).
74. **Iashvili I. et al.** — Study of the $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l^\pm$ Channel in CMS, CMS TN/95-059(1995).
75. **Charlot C., Nikitenko A., Puljak I., Soric I.** — Comparison of Fixed Window and Clusterization Algorithms for $Z \rightarrow e^+e^-$ and $H \rightarrow 4e^\pm$ in CMS PbWO₄ Crystal ECAL for Higgs Mass 170 and 130 GeV, CMS TN/95-101 (1995).
76. **Bomestar D. et al.** — Study of the $H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l^\pm$ with Full GEANT Simulation of CMS Detector, CMS TN/94-018 (1994).
77. **Dzelalija M., Antonovic Z., Kinnunen R.** — Study of the Heavy $H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l^\pm$ in CMS, CMS TN/95-076 (1995).

78. **Abdullin S., Stepanov N.** — Towards Self-Consistent Scenario of the Heavy Higgs Observability via the Channels νjj and $lljj$ at CMS, CMS TM/94-178 (1994).
79. **Kinnunen R., Denegri D.** — Expected SM/SUSY Higgs Observability in CMS, CMS Note 1997/057 (1997).
80. **Drollinger V., Muller T., Kinnunen R.** — Possibilities of $t\bar{t}H^0$ Event Reconstruction, CMS Note 1999/001 (1999).
81. **Spira M., Dittmar M.** — Standard Model Higgs Cross Sections (NLO) and PYTHIA, CMS Note 1997/080 (1997).
82. **Dubin M.N., Ilyin V.A., Savrin V.I.** — Light Higgs Boson Signal at LHC in the Reactions $pp \rightarrow \gamma\gamma + \text{jet}$ and $pp \rightarrow \gamma\gamma + \text{lepton}$, CMS Note 1997/101; **Abdullin S. et al.** — Phys. Lett., 1998, v.B431, p.410.
83. **Dittmar M., Dreiner H.** — Phys. Rev., 1997, v.D55, p.167 [hep-ph/9608317]; LHC Higgs Search with $l^+\nu l^-\bar{\nu}$ Final States, CMS Note 1997/083.
84. **Green D. et al.** — Search for the Standard Model Higgs Boson with $M_H \approx 170 \text{ GeV}/c^2$ in W^+W^- Decay Mode, CMS Note 1998/089.
85. **Iashvili I. et al.** — Study of the $H \rightarrow 4l^\pm$ Channel in CMS, CMS Note 1995/059.
86. **Stepanov N.** — Search for Heavy Higgs via the $H \rightarrow ll\nu\nu$ Channel, CMS TN/93-87 (1993); **Stepanov N., Starodumov A.** — Search for Higgs in the TEV Region, CMS-TN/92-49 (1992).
87. **Zmushko S., Frodevaux D., Poggioli L.** — $H \rightarrow WW \rightarrow \nu jj$ and $H \rightarrow ZZ \rightarrow lljj$. Particle Level Studies, ATLAS Internal Note PHYS-No-103 (1997).
88. **Poggioli L.** — $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4 \text{ Leptons}$. A Comparison of ATLAS and CMS Potentials, ATLAS Internal Note, PHYS-No-066 (1995).
89. **Froidevaux D., Gianotti F., Richter-Was E.** — Comparison of the ATLAS and CMS Discovery Potential for the $H \rightarrow \gamma\gamma$ Channel at the LHC, ATLAS Internal Note PHYS-No-64 (1995).
90. **Cavasinni V., Costanzo D., Lami S., Spano F.** — Search for $H \rightarrow WW \rightarrow \nu jj$ with the ATLAS Detector ($m_H = 300 - 600 \text{ GeV}$), ATLAS Internal Note, ATL-PHYS-98-127 (1998).
91. **Linossier O., Poggioli L.** — $H^0 \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ Channel, in ATLAS. Signal Reconstruction and Reducible Backgrounds Rejection, ATLAS Note PHYS-No-101 (1997).
92. **Zmushko S.** — $H \rightarrow \gamma\gamma$ in Association with Jets, ATLAS Internal Note ATL-PHYS-99-009(1999).
93. **Richter-Was E., Sapinski M.** — Search for the SM and MSSM Higgs Boson in the $t\bar{t}H$, $HH \rightarrow b\bar{b}$ Channel, ATL-PHYS-98-132 (1998).
94. **Savard P., Azuelos G.** — The Discovery Potential of a Heavy Higgs ($M_H = 800 \text{ GeV}$) Using Full GEANT Simulations of ATLAS, ATL-PHYS-98-128 (1998).
95. **Linossier O., Zitoun R.** — $H_0 \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ Channel, in ATLAS - A Complementary Study of the ZZ^* Background, ATL-PHYS-96-096 (1996).
96. **Tisserand V.** — The Higgs to Two-Photon Decay in the ATLAS Detector UPDATED, ATL-PHYS-96-091.
97. **Bitjukov S.I., Krasnikov N.V.** — Mod. Phys. Lett., 1998, v.A13, p.3235; **Bitjukov S.I., Krasnikov N.V.** — Observability and Probability of Discovery in Future Experiments, hep-ph/9908402 (1999), CMS IN Note 1999/027.
98. **Rainwater D., Zeppenfeld D.** — Observing $H \rightarrow W^{(*)}W^{(*)} \rightarrow e^\pm \mu^\mp p_T^{\text{mis}}$ in Weak Boson Fusion with Dual Forward Jet Tagging at the CERN LHC, hep-ph/9906218 (1999).
99. **Rainwater D., Hagiwara K., Zeppenfeld D.** — Searching for $H \rightarrow \tau\tau$ in Weak Boson Fusion, hep-ph/9808468 (1998).

RADIALLY EXCITED SCALAR, PSEUDOSCALAR, AND VECTOR MESON NONETS IN A CHIRAL QUARK MODEL

M.K. Volkov, V.L. Yudichev

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

A chiral Lagrangian containing, besides the usual meson fields, their first radial excitations is constructed. The Lagrangian is derived by bosonization of a Nambu–Jona-Lasinio (NJL) type quark model with separable nonlocal interactions. The nonlocality is described by form factors corresponding to 3-dimensional excited state wave functions. The spontaneous breaking of chiral symmetry is governed by the standard NJL gap equations. A simple $SU(2) \times SU(2)$ version of the model is used to demonstrate all low-energy theorems to hold valid in the chiral limit.

A more realistic $U(3) \times U(3)$ model with 't Hooft interaction is constructed to describe the mass spectrum of excited scalar, pseudoscalar, and vector mesons. On the basis of global chiral symmetry, we use the same form factors for the scalar and pseudoscalar mesons. Having fixed the form factor parameters by masses of pseudoscalar mesons, we predict the mass spectrum of scalar mesons. This allows us to interpret experimentally observed scalar, pseudoscalar, and vector meson states as members of quark-antiquark nonets. It is shown that the $a_0(1450)$, $K_0^*(1430)$, $f_0(1370)$, $f_J(1710)$ scalar meson states are the first radial excitations of the ground states: $a_0(980)$, $K_0^*(960)$, $f_0(400 - 1200)$, $f_0(980)$. The weak decay constants F_π , $F_{\pi'}$, F_K , $F_{K'}$ and the main strong decay widths of the scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets are calculated.

Построен киральной лагранжиан, содержащий кроме обычных мезонных полей их первые радиальные возбуждения. Лагранжиан получен бозонизацией кварковой модели типа Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) с сепарабельным нелокальным взаимодействием. Нелокальность описывается формфакторами, соответствующими трехмерным волновым функциям возбужденных мезонов. Спонтанное нарушение киральной симметрии определяется уравнением на щель. На простом примере $SU(2) \times SU(2)$ -версии этой модели продемонстрировано выполнение всех низкоэнергетических теорем в киральном пределе.

Для описания спектра масс возбужденных скалярных, псевдоскалярных и векторных мезонов построена более реалистичная $U(3) \times U(3)$ -модель с взаимодействием 'т Хофта. В силу глобальной киральной симметрии, мы используем одинаковые формфакторы для скалярных и псевдоскалярных мезонов. Фиксируя параметры формфакторов по массам псевдоскалярных мезонов, мы предсказываем спектр масс скалярных мезонов. Это позволяет нам интерпретировать экспериментально наблюдаемые скалярные, псевдоскалярные мезонные состояния как члены кварк-антикварковых нонетов. Показано, что скалярные мезонные состояния $a_0(1450)$, $K_0^*(1430)$, $f_0(1370)$, $f_J(1710)$ являются первыми радиальными возбуждениями основных состояний $a_0(980)$, $K_0^*(960)$, $f_0(400 - 1200)$, $f_0(980)$. Вычислены константы слабых распадов F_π , $F_{\pi'}$, F_K , $F_{K'}$ и ширины основных сильных распадов скалярных, псевдоскалярных и векторных нонетов мезонов.

1. INTRODUCTION

The investigation of radial excitations of the scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets is of great interest in the hadronic physics. So far, there are questions connected with the experimental and theoretical description of radial excitations of scalar and pseudoscalar mesons. For instance, the experimental data on the excited states of kaons [1] are rare and not reliable enough. There are also problems with interpretation of the experimental data on the scalar and η , η' mesons. Several years ago, attempts were undertaken to consider the state $\eta'(1440)$ as a glueball [2], however, the authors in [2] came to conclusion that this state is rather a radial excitation of $\eta'(958)$.

There is an analogous problem with interpretation of the scalar states $f_0(1500)$ and $f_0(1710)$. Moreover, the experimental status of the lightest scalar isoscalar singlet meson remains unclear. In some papers, the resonance $f_0(1370)$ was considered as a member of the ground nonet [3,4], and until 1998 the resonance $f_0(400 - 1200)$ was not included into the summary tables of PDG review* [1].

One will find a problem of the same sort in the case of K_0^* . The strange meson $K_0^*(1430)$ seems too heavy to be the ground state: 1 GeV is more characteristic of the ground meson states (see [5,6]).

Anticipating the results of our review we would like to note that some of these problems were solved in a number of our works which resulted in the present work. From our calculations, for example, we concluded that the states $\eta(1295)$ and $\eta(1440)$ can be considered as radial excitations of the ground states η and η' . The estimates of their strong decay widths also confirm our conclusion. Let us note that these meson states are essentially mixed. Our calculations also showed that we can interpret the scalar states $f_0(1370)$, $a_0(1450)$, $f_0(1710)$, and $K_0^*(1430)$ as the first radial excitations of $f_0(400 - 1200)$, $a_0(980)$, $f_0(980)$, and $K_0^*(960)$.

A theoretical description of radially excited pions poses some interesting challenges. The physics of the ground states of mesons (pions) is completely governed by the spontaneous breaking of chiral symmetry (SBCS). A convenient way to derive the properties of soft pions is the use of an effective Lagrangian based on a nonlinear or linear realization of chiral symmetry [7]. When attempting to introduce higher resonances to extend the effective Lagrangian description to higher energies, one must ensure that the introduction of new degrees of freedom does not spoil the low-energy theorems for pions which are universal consequences of chiral symmetry.

Attempts to describe heavier analogs of the pion, vector mesons, and η , η' mesons as the radial excitations of well-known ground meson states were made

*However, in earlier editions of PDG the light σ state could still be found; it was excluded later.

by authors in [2] within the framework of the nonlocal 3P_0 potential quark model. This approach was based on nonrelativistic and relativistic quantum mechanics where mesons are treated as bound $\bar{q}q$ systems.

A useful guideline in the construction of effective meson Lagrangians is the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model that describes SBCS at the quark level with a four-fermion interaction [8–11]. The bosonization of this model and the derivative expansion of the resulting fermion determinant reproduce the Lagrangian of the linear sigma model that embodies the physics of soft pions as well as higher-derivative terms. With appropriate couplings the model allows one to derive also a Lagrangian for vector and axial–vector mesons. This gives not only the correct structure of terms of the Lagrangian as required by chiral symmetry, but also quantitative predictions for the coefficients, such as F_π , F_K , g_π , g_ρ , etc.

One may, therefore, hope that a suitable generalization of the NJL model can provide means for deriving an effective Lagrangian including also the excited mesons.

When extending the NJL model to describe radial excitations of mesons, one has to introduce nonlocal (finite-range) four-fermion interactions. Many nonlocal generalizations of the NJL model were proposed, by using either covariant–Euclidean [12] or instantaneous (potential-type) [13, 14] effective quark interactions. These models generally require bilocal meson fields for bosonization, which makes it difficult to perform a consistent derivative expansion leading to an effective Lagrangian.

A simple alternative is to use separable quark interactions. There is a number of advantages of working with that scheme. First, separable interactions can be bosonized by introducing local meson fields, just as the usual NJL model. One can thus derive an effective meson Lagrangian directly in terms of local fields and their derivatives. Second, separable interactions allow one to introduce a limited number of excited states and only in a given channel.

An interesting method for describing excited meson states in this approximation was proposed in [15]. The authors suggested to consider SBCS in the vicinity of a polycritical point where either all or some of the coupling constants at four-fermion vertices exhibit critical behavior; the critical values of the coupling constants are given by solutions of a set of mass-gap equations. They selected a minimal type of separable four-quark interaction which is most important for the process of SBCS. In this model the form factors are chosen as orthogonal functions, so there is a freedom in their choice up to an arbitrary rotation. All calculations are made in the Euclidean space, by using the approximation of large N_c and $\log \Lambda$ where Λ is the ultra-violet cut-off in the model. An interesting result of this approach is that for an arbitrary choice of coupling constants in the vicinity of polycritical point there are multiple solutions with a different critical behavior. Therefore, a problem appears — which of the solutions is realized in nature.

Another advantage of the separable interaction is that it can be defined in Minkowski space in a 3-dimensional (yet covariant) way, with form factors depending only on a part of the quark–antiquark relative momentum transverse to the meson momentum [14, 16, 17]. This is essential for a correct description of excited states, since it ensures the absence of spurious relative–time excitations [18]. Finally, as we have shown [17], the form factors defining the separable interaction can be chosen so that the gap equation of the generalized NJL model coincides with the one of the usual NJL model, whose solution is a constant (momentum–independent) dynamic quark mass. Thus, in this approach it is possible to describe radially excited mesons above the usual NJL vacuum. Aside from the technical simplification, the latter means that the separable generalization contains all the successful quantitative results of the usual NJL model.

Our paper consists of five Sections. In the second Section, we illustrate our method on the basis of a simple $SU(2) \times SU(2)$ model. Here we prepare grounds for the choice of the form factors to be used in a more realistic model. It will be shown that we can choose these form factors such that the gap equation conserves its conventional form and has a solution corresponding to a constant constituent quark mass. The quark condensate also does not change after the inclusion of excited states into the model, because the tadpole associated with the excited scalar field is equal to zero (the quark loop with the one excited scalar vertex, vertex with a form factor).

In this Section, we derive an effective chiral Lagrangian describing π and π' mesons from a generalized NJL model with separable interactions. In Subsection 2.1, we introduce the effective quark interaction in the separable approximation and describe its bosonization. We discuss the choice of form factors necessary to describe excited states. In Subsection 2.2, we solve the gap equation defining the vacuum, derive the effective Lagrangian of the 0^- meson fields, and perform the diagonalization leading to the physical π and π' states. The effective Lagrangian describes the vanishing of the π mass (decoupling of the Goldstone boson) in the chiral limit, while π' remains massive. In Subsection 2.3, we derive the axial vector current of the effective Lagrangian using the Gell-Mann–Levy method and obtain a generalization of the PCAC formula which includes the contribution of π' to the axial current. The leptonic decay constants of the π and π' mesons, F_π and $F_{\pi'}$, are discussed in Subsection 2.4. It is shown that $F_{\pi'}$ vanishes in the chiral limit as expected. In Subsection 2.5, we fix the parameters of the model and evaluate the ratio $F_{\pi'}/F_\pi$ as a function of the π' mass.

In the third Section, we use the method demonstrated in Section 2 for a realistic description of radially excited states of the scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets where 't Hooft interaction is included in addition to conventional chirally symmetric four-quark vertices. This allows us to solve the so-called $U_A(1)$ problem and describe the masses of ground and excited states of the η and η' mesons.

We take account of the connections of the scalar and vector coupling constants which appeared in this model and an additional renormalization of the pseudoscalar fields connected with the pseudoscalar–axial–vector transitions. For simplicity, we suppose that the masses of u and d quarks are equal to each other and take into account only the mass difference between (u , d) and s quarks (m_u and m_s). Then, we have in this model six basic parameters: m_u , m_s , Λ_3 (3-dimensional cut-off parameter), G and G_V (four-quark coupling constants for the scalar–pseudoscalar coupling (G) and for the vector–axial–vector coupling (G_V)) and constant K characterizing the 't Hooft interaction. To define these parameters, we use the experimental values: the pion decay constant $F_\pi = 93$ MeV, the ρ -meson decay constant $g_\rho \approx 6.14$ ($g_\rho^2/(4\pi) \approx 3$), the pion mass $M_\pi \approx 140$ MeV, ρ -meson mass $M_\rho = 770$ MeV, the kaon mass $M_K \approx 495$ MeV, and the mass difference of the η and η' mesons. Using these six parameters, we can describe the masses of four ground meson nonets (pseudoscalar, vector, scalar, and axial–vector) and all the meson coupling constants of strong interactions of mesons with each other and with quarks.

For the investigation of excited states of the mesons it is necessary to consider nonlocal four-quark interactions. In Section 3, it is shown that for the description of excited states of the scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets we have to use seven different form factors in the effective four-quark interactions. Each form factor contains only one free (external) parameter. There are also slope (internal) parameters which are to be fixed by the condition of preserving gap equations in the standard form (see Section 2). We use the same form factors for the scalar and pseudoscalar mesons, which is required by chiral symmetry. This allows us to predict masses of the excited scalar mesons.

In Subsection 3.1, we introduce the effective quark interaction in the separable approximation with 't Hooft terms and describe its bosonization. We discuss the choice of the form factors necessary to describe excited states of the scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets. In Subsection 3.2, we derive the effective Lagrangian for the ground and excited states of the strange and isovector scalar and pseudoscalar mesons, and perform the diagonalization leading to the physical ground and excited meson states. In Subsection 3.3, we diagonalize the Lagrangian for the isoscalar, scalar and pseudoscalar (ground and excited) mesons and take into account singlet-octet mixing. In Subsection 3.4, we consider vector mesons. In Subsection 3.5, we fix the parameters of the model and evaluate the masses of the ground and excited meson states and the weak decay constants F_π , $F_{\pi'}$, F_K , and $F_{K'}$.

In Section 4, we calculate strong decay widths of excited states of the scalar, pseudoscalar, and vector mesons and compare them with experimental data. In Subsection 4.1, we consider decays of the first radial excitations of π , ρ , and ω meson states. Decays of strange mesons are calculated in Subsection 4.2. Then,

in Subsection 4.3, we calculate decay widths of the scalar mesons. Finally, the decay widths of excited η and η' mesons are estimated in Subsection 4.4.

In Section 5 (Conclusion), we briefly discuss our results, give interpretation of the members of meson nonets, and foresee ways of further developing our model.

In Appendix A, we collected some lengthy formulae defining the free part of the effective Lagrangian for isoscalar, scalar and pseudoscalar mesons. In Appendix B, we displayed in detail some instructive calculations of strong decay widths of mesons.

2. $SU(2) \times SU(2)$ MODEL

2.1. Nambu–Jona-Lasinio Model with Separable Interactions. In this Section, we construct an $SU(2) \times SU(2)$ NJL-like chiral quark model with quark interaction of the separable type to describe the ground and first radially excited states of pions and σ mesons. Although, a realistic description of the meson physics requires consideration of a $U(3) \times U(3)$ version (which we will do in the next Section), we find it instructive to show the basic principles of the model with this simple case. The content of the section corresponds to Ref. 17.

In the usual NJL model, SBCS is described by a local (current–current) effective quark interaction. The model is defined by the action

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\partial\!\!\!/ - m^0) \psi(x) + S_{\text{int}}, \quad (1)$$

$$S_{\text{int}} = \frac{G}{2} \int d^4x [j_{\sigma}(x)j_{\sigma}(x) + j_{\pi}^a(x)j_{\pi}^a(x)], \quad (2)$$

where $j_{\sigma,\pi}(x)$ denote, respectively, the scalar–isoscalar and pseudoscalar–isovector currents of the quark fields ($SU(2)$ flavor),

$$j_{\sigma}(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x), \quad j_{\pi}^a(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma_5\lambda^a\psi(x). \quad (3)$$

The model can be bosonized in a standard way by representing the 4-fermion interaction as a Gaussian functional integral over scalar and pseudoscalar meson fields [8–11]. Since the interaction, Eq. (2), represents a product of two local currents, the bosonization is achieved through local meson fields. The effective meson action obtained by integration over quark fields is thus expressed in terms of local meson fields. By expanding the quark determinant in derivatives of the local meson fields, one then derives the chiral meson Lagrangian.

The NJL interaction, Eq. (2), describes only ground–state mesons. To include excited states, one has to introduce effective quark interactions with a finite range. In general, such interactions require bilocal meson fields for bosonization [12, 14]. A possibility to avoid this complication is to use a separable interaction that is still

of current–current form, Eq. (2), but allows for nonlocal vertices (form factors) in the definition of quark currents, Eq. (3),

$$\tilde{S}_{\text{int}} = \frac{G}{2} \int d^4x \sum_{i=1}^N [j_{\sigma,i}(x)j_{\sigma,i}(x) + j_{\pi,i}^a(x)j_{\pi,i}^a(x)], \quad (4)$$

$$j_{\sigma,i}(x) = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2) \psi(x_2), \quad (5)$$

$$j_{\pi,i}^a(x) = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) F_{\pi,i}^a(x; x_1, x_2) \psi(x_2). \quad (6)$$

Here, $F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2)$, $F_{\pi,i}^a(x; x_1, x_2)$, $i = 1, \dots, N$, denote a set of nonlocal scalar and pseudoscalar fermion vertices (in general, momentum– and spin–dependent) to be specified below. Upon bosonization Eq. (4) leads to the action

$$\begin{aligned} S_{\text{bos}}[\bar{\psi}, \psi; \sigma_1, \pi_1, \dots, \sigma_N, \pi_N] = & \\ = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) & \left[(i\partial_{x_2} - m^0) \delta(x_1 - x_2) + \right. \\ + \int d^4x \sum_{i=1}^N (\sigma_i(x) F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2) & + \pi_i^a(x) F_{\pi,i}^a(x; x_1, x_2)) \left. \right] \psi(x_2) - \\ - \frac{1}{2G} \int d^4x \sum_{i=1}^N (\sigma_i^2(x) + \pi_i^{a2}(x)). & \end{aligned} \quad (7)$$

It describes a system of local meson fields, $\sigma_i(x)$, $\pi_i^a(x)$, $i = 1, \dots, N$, which interact with quarks through nonlocal vertices. We emphasize that these fields are not yet to be associated with physical particles ($\sigma, \sigma', \dots, \pi, \pi', \dots$); physical fields will be obtained after determining the vacuum and diagonalizing the meson effective action.

To define the vertices of Eqs. (5) and (6), we pass to the momentum representation. Because of the translational invariance, the vertices can be represented as

$$\begin{aligned} F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2) = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \times \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp i \left[\frac{1}{2}(P+k)(x-x_1) + \frac{1}{2}(P-k)(x-x_2) \right] F_{\sigma,i}(k|P), \end{aligned} \quad (8)$$

and similarly for $F_{\pi,i}^a(x; x_1, x_2)$. Here k and P denote, respectively, the relative and total momentum of a quark–antiquark pair. We take the vertices to

depend only on the component of the relative momentum transverse to the total momentum,

$$F_{\sigma,i}(k|P) \equiv F_{\sigma,i}(k_{\perp}|P), \quad \text{etc.}, \quad k_{\perp} \equiv k - \frac{P \cdot k}{P^2} P. \quad (9)$$

Here, P is assumed to be time-like, $P^2 > 0$. Equation (9) is a covariant generalization of the condition that the quark–meson interaction is instantaneous in the rest frame of the meson (i.e., the frame in which $\mathbf{P} = 0$). Equation (9) ensures the absence of spurious relative–time excitations and thus leads to a consistent description of excited states* [18]. In particular, this framework allows us to use 3-dimensional «excited state» wave functions to model the form factors for radially excited mesons.

The simplest chirally invariant interaction describing scalar and pseudoscalar mesons is defined by spin-independent vertices 1 and $i\gamma_5\lambda^a$, respectively. We want to include ground state mesons and their first radial excitation ($N = 2$), and therefore take

$$\left. \begin{array}{l} F_{\sigma,j}(k_{\perp}|P) \\ F_{\pi,j}^a(k_{\perp}|P) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ i\gamma_5\lambda^a \end{array} \right\} \times \Theta(\Lambda_3 - |k_{\perp}|) f_j(k_{\perp}), \quad (10)$$

$$f_1(k_{\perp}) \equiv 1, \quad f_2(k_{\perp}) = c(1 + d|k_{\perp}|^2), \quad |k_{\perp}| \equiv \sqrt{-k_{\perp}^2}. \quad (11)$$

The step function, $\Theta(\Lambda_3 - |k_{\perp}|)$, is nothing else than a covariant generalization of the usual 3-momentum cutoff of the NJL model in the meson rest frame [14]. The form factor $f(k_{\perp})$ has for $d < -\Lambda_3^{-2}$ the form of an excited state wave function, with a node in the interval $0 < |k_{\perp}| < \Lambda_3$. Equations (10) and (11) are the first two terms in a series of polynomials in $k_{\perp}^2$; inclusion of higher excited states would require polynomials of higher degree. Note that the normalization of the form factor $f(k_{\perp})$, the constant c , determines the overall strength of the coupling of the σ_2 and π_2 fields to quarks relative to the usual NJL coupling of π_1 and σ_1 .

We remark that the most general vertex could also include spin-dependent structures, $\not{P}$ and $\gamma_5\not{P}$, which in the terminology of the NJL model correspond to the induced vector and axial vector component of σ and π (σ – ρ and π – A_1 mixing), respectively. These structures should be considered if vector mesons are included. Furthermore, there could be structures $\not{k}_{\perp}$, $\not{P}\not{k}_{\perp}$ and $\gamma_5\not{k}_{\perp}$, $\gamma_5\not{P}\not{k}_{\perp}$,

*In bilocal field theory, this requirement is usually imposed in the form of the so-called Markov–Yukawa condition of covariant instantaneity of the bound state amplitude [14]. An interaction of the transverse form, Eq. (9), automatically leads to meson amplitudes satisfying the Markov–Yukawa condition.

respectively, which describe bound states with orbital angular momentum $L = 1$. We shall not consider these components here.

With the form factors defined by Eqs. (10) and (11), the bosonized action, Eq. (7), in the momentum representation takes the form

$$\begin{aligned}
 S_{\text{bos}}[\bar{\psi}, \psi; \sigma_1, \pi_1, \sigma_2, \pi_2] = & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(k) (\not{k} - m^0) \psi(k) + \\
 & + \sum_{j=1}^2 \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(k + \frac{1}{2}P) [\sigma_j(P) + i\gamma_5 \lambda^a \pi_j^a(P)] f_j(k_\perp) \psi(k - \frac{1}{2}P) - \\
 & - \frac{1}{2G} \sum_{j=1}^2 \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} (\sigma_j(-P) \sigma_j(P) + \pi_j^a(-P) \pi_j^a(P)). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Here it is understood that a cutoff in the 3-dimensional transverse momentum is applied to the k integral, as defined by the step function of Eq. (10).

2.2. Effective Lagrangian for π and π' Mesons. We now want to derive the effective Lagrangian describing physical π and π' mesons. Integrating over the fermion fields in Eq. (12), one obtains the effective action of the σ_1, π_1 and σ_2, π_2 fields,

$$\begin{aligned}
 W[\sigma_1, \pi_1, \sigma_2, \pi_2] = & -\frac{1}{2G} \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} (\sigma_1^2 + \pi_1^{a2} + \sigma_2^2 + \pi_2^{a2}) - \\
 & - iN_c \text{Tr} \log \left[i\not{\partial} - m^0 + \sum_{j=1}^2 (\sigma_j + i\gamma_5 \lambda^a \pi_j^a) f_j \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

This expression is understood as a shorthand notation for expanding in the meson fields. In particular, we want to derive the free part of the effective action for the π_1 and π_2 fields,

$$W = W^{(0)} + W^{(2)}, \quad (14)$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \sum_{i,j=1}^2 \pi_i^a(P) K_{ij}^{ab}(P) \pi_j^b(P), \quad (15)$$

where we restrict ourselves to timelike momenta, $P^2 > 0$. Before expanding in the π_1 and π_2 fields, we must determine the vacuum, i.e., the mean scalar field that arises in the dynamic breaking of chiral symmetry. The mean-field approximation corresponds to the leading order of the $1/N_c$ expansion. The

mean field is determined by the set of equations

$$\frac{\delta W}{\delta \sigma_1} = -iN_c \operatorname{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m^0 + \sigma_1 + \sigma_2 f(k_\perp)} - \frac{\sigma_1}{G} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \sigma_2} = -iN_c \operatorname{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k_\perp)}{\not{k} - m^0 + \sigma_1 + \sigma_2 f(k_\perp)} - \frac{\sigma_2}{G} = 0. \quad (17)$$

Due to the transverse definition of the interaction, Eq. (9), the mean field inside a meson depends in a trivial way on the direction of the meson 4-momentum, P . In the following we consider these equations in the rest frame where $\mathbf{P} = 0$, $k_\perp = (0, \mathbf{k})$ and Λ_3 is the usual 3-momentum cutoff.

In general, the solution of Eqs. (16) and (17) would have $\sigma_2 \neq 0$, in which case the dynamically generated quark mass, $-\sigma_1 - \sigma_2 f(\mathbf{k}) + m^0$, becomes momentum-dependent. However, if we choose the form factor, $f(\mathbf{k})$, such that

$$\begin{aligned} -4mI_1^f &\equiv -iN_c \operatorname{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(\mathbf{k})}{\not{k} - m} = \\ &= i4N_c m \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(\mathbf{k})}{m^2 - k^2} = 0, \\ m &\equiv -\sigma_1 + m^0, \end{aligned} \quad (18)$$

then Eqs. (16) and (17) admit a solution with $\sigma_2 = 0$ and thus with a constant quark mass, $m = -\sigma_1 + m^0$. In this case, Eq. (16) reduces to the usual gap equation of the NJL model,

$$-8mI_1 \equiv -miN_c \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{m^0 - m}{G}. \quad (19)$$

Obviously, the condition, Eq. (18), can be fulfilled by choosing an appropriate value of the parameter d defining the «excited state» form factor, Eq. (11), for given values of Λ_3 and m . Equation (18) expresses the invariance of the usual NJL vacuum, $\sigma_1 = \text{const.}$, with respect to variations in the direction of σ_2 . In the following, we shall consider the vacuum as defined by Eqs. (18) and (19), i.e., we work with the usual NJL vacuum. We emphasize that this choice is a matter of convenience, not of principle. The qualitative results below could equivalently be obtained with a different choice of form factors; however, in this case one should re-derive all vacuum and ground-state meson properties with the momentum-dependent quark mass. Preserving of the NJL vacuum makes formulas below much more transparent and allows us to take the parameters fixed in the old NJL model.

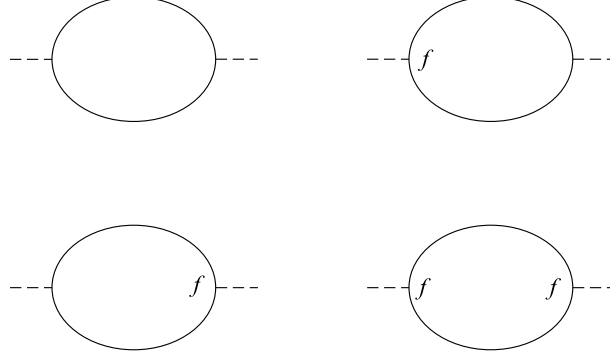


Fig. 1. The quark loop contribution to the quadratic form $K_{ij}(P)$, Eq. (94), of the effective action for π_1 and π_2 fields. Solid lines denote the NJL quark propagator. The π_1 field couples to quarks through a local vertex; the π_2 field, through the form factor, $f(k_\perp)$, marked by letter **f**

With the mean field determined by Eqs. (18) and (19), we now expand the action to quadratic order in the fields π_1 and π_2 . The quadratic form $K_{ij}^{ab}(P)$, Eq. (15), is obtained as

$$K_{ij}^{ab}(P) \equiv \delta^{ab} K_{ij}(P),$$

$$K_{ij}(P) = -iN_c \operatorname{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\not{k} + \frac{1}{2}\not{P} - m} i\gamma_5 f_i \frac{1}{\not{k} - \frac{1}{2}\not{P} - m} i\gamma_5 f_j \right] - \delta_{ij} \frac{1}{G}. \quad (20)$$

A graphical representation of the loop integrals in Eq. (20) is given in Fig. 1. The integral is evaluated by expanding in the meson field momentum, P . To order P^2 , one obtains

$$\begin{aligned} K_{11}(P) &= Z_1(P^2 - M_1^2), & K_{22}(P) &= Z_2(P^2 - M_2^2) \\ K_{12}(P) &= K_{21}(P) = \sqrt{Z_1 Z_2} \Gamma P^2, \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$Z_1 = 4I_2, \quad Z_2 = 4I_2^{ff}, \quad (22)$$

$$M_1^2 = Z_1^{-1}(-8I_1 + G^{-1}) = \frac{m^0}{Z_1 G m}, \quad (23)$$

$$M_2^2 = Z_2^{-1}(-8I_1^{ff} + G^{-1}), \quad (24)$$

$$\Gamma = \frac{4}{\sqrt{Z_1 Z_2}} I_2^f. \quad (25)$$

Here, I_n , I_n^f , and I_n^{ff} denote the usual loop integrals arising in the momentum expansion of the NJL quark determinant, but now with zero, one or two factors $f(k_\perp)$, Eq.(11), in the numerator. We may evaluate them in the rest frame, $k_\perp = (0, \mathbf{k})$,

$$I_n^{f..f} \equiv -iN_c \int_{\Lambda_3} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(\mathbf{k})..f(\mathbf{k})}{(m^2 - k^2)^n}. \quad (26)$$

The evaluation of these integrals with a 3-momentum cut-off is described, e.g., in Ref.19. The integral over k_0 is taken by contour integration, and the remaining 3-dimensional integral is regularized by the cut-off. Only the divergent parts are kept; all finite parts are dropped. We point out that the momentum expansion of the quark loop integrals, Eq.(20), is an essential part of this approach. The NJL model is understood here as a model only for the lowest coefficients of the momentum expansion of the quark loop, but not its full momentum dependence (singularities, etc.).

Note that a mixing between the π_1 and π_2 fields occurs only in the kinetic ($\mathcal{O}(P^2)$) terms of Eq. (21), but not in the mass terms. This is a direct consequence of the definition of vacuum by Eqs.(18) and (19), which ensures that the quark loop with one form factor has no P^2 -independent part. The «softness» of the π_1 - π_2 mixing causes the π_1 field to decouple as $P^2 \rightarrow 0$. This property is crucial for the appearance of a Goldstone boson in the chiral limit.

To determine the physical π - and π' -meson states, we have to diagonalize the quadratic part of the action, Eq. (15). If one knew the full momentum dependence of the quadratic form, Eq.(21), the masses of physical states would be given as zeros of the determinant of the quadratic form,

$$\det K_{ij}(P^2) = 0, \quad P^2 = M_\pi^2, M_{\pi'}^2. \quad (27)$$

This would be equivalent to the usual Bethe–Salpeter (on-shell) description of bound states: the matrix $K_{ij}(P^2)$ is diagonalized independently of the respective mass shells, $P^2 = M_\pi^2, M_{\pi'}^2$ [13,20,21]. In our approach, however, we know the quadratic form, Eq. (21), only as an expansion in P^2 at $P^2 = 0$. It is clear that the determination of the masses according to Eq.(27) would be incompatible with the momentum expansion, as the determinant involves $\mathcal{O}(P^4)$ terms neglected in Eq.(21). To be consistent with the P^2 expansion, we must diagonalize the kinetic term and the mass term in Eq. (15) simultaneously, with a P^2 -independent transformation of the fields. Let us write Eq. (21) in the matrix form

$$K_{ij}(P^2) = \begin{pmatrix} Z_1 & \sqrt{Z_1 Z_2} \Gamma \\ \sqrt{Z_1 Z_2} \Gamma & Z_2 \end{pmatrix} P^2 - \begin{pmatrix} Z_1 M_1^2 & 0 \\ 0 & Z_2 M_2^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

The transformation that diagonalizes both the matrices here separately is given by

$$\begin{aligned}\sqrt{Z_1}\pi_1^a &= \frac{\cos\phi}{\sqrt{Z_\pi}}\pi^a + \frac{M_2}{M_1}\frac{\sin\phi}{\sqrt{Z_{\pi'}}}\pi'^a, \\ \sqrt{Z_2}\pi_2^a &= \frac{M_1}{M_2}\frac{\sin\phi}{\sqrt{Z_\pi}}\pi^a - \frac{\cos\phi}{\sqrt{Z_{\pi'}}}\pi'^a,\end{aligned}\quad (29)$$

where

$$\tan 2\phi = 2\Gamma\frac{M_1}{M_2}\left(1 - \frac{M_1^2}{M_2^2}\right)^{-1}, \quad (30)$$

$$Z_\pi = \cos^2\phi + \frac{M_1^2}{M_2^2}\sin^2\phi + 2\Gamma\frac{M_1}{M_2}\cos\phi\sin\phi, \quad (31)$$

$$Z_{\pi'} = \cos^2\phi + \frac{M_2^2}{M_1^2}\sin^2\phi - 2\Gamma\frac{M_2}{M_1}\cos\phi\sin\phi. \quad (32)$$

In terms of the new fields, π, π' , the quadratic part of the action, Eq. (15), reads

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} [\pi^a(-P)(P^2 - M_\pi^2)\pi^a(P) + \pi'^a(-P)(P^2 - M_{\pi'}^2)\pi'^a(P)]. \quad (33)$$

Here,

$$M_\pi^2 = \frac{M_1^2}{Z_\pi}, \quad M_{\pi'}^2 = \frac{M_2^2}{Z_{\pi'}}. \quad (34)$$

The fields π and π' can thus be associated with physical particles.

Let us now consider the chiral limit, i.e., a vanishing current quark mass, $m^0 \rightarrow 0$. From Eqs.(22)–(25) we see that this is equivalent to letting $M_1^2 \rightarrow 0$. (Here and in the following, when discussing the dependence of quantities on the current quark mass, m^0 , we keep the constituent quark mass fixed and assume the coupling constant, G , to be changed in accordance with m^0 , such that the gap equation, Eq. (19), remains fulfilled exactly. In this way, the loop integrals and Eq.(18) remain unaffected by changes of the current quark mass.) Expanding Eqs.(34) in $M_1^2 \propto m^0$, one finds

$$M_\pi^2 = M_1^2 + \mathcal{O}(m_1^4), \quad (35)$$

$$M_{\pi'}^2 = \frac{M_2^2}{1 - \Gamma^2} \left[1 + \Gamma^2 \frac{M_1^2}{M_2^2} + \mathcal{O}(M_1^4) \right]. \quad (36)$$

Thus, in the chiral limit the effective Lagrangian, Eq.(33), indeed describes a massless Goldstone pion, π , and a massive particle, π' . Furthermore, in the chiral

limit the transformation of the fields, Eq. (29), becomes

$$\begin{aligned}\sqrt{Z_1}\pi_1^a &= \left(1 - \Gamma^2 \frac{M_1^2}{M_2^2}\right) \pi^a + \frac{\Gamma}{\sqrt{1 - \Gamma^2}} \left(1 + (1 - \Gamma^2) \frac{M_1^2}{M_2^2}\right) \pi'^a, \\ \sqrt{Z_2}\pi_2^a &= \Gamma \frac{M_1^2}{M_2^2} \pi^a - \frac{1}{\sqrt{1 - \Gamma^2}} \pi'^a.\end{aligned}\quad (37)$$

At $M_1^2 = 0$ one observes that π has only a component along π_1 . This is a consequence of the fact that the π_1 – π_2 coupling in the original Lagrangian, Eq. (21), is of order P^2 . We remark that, although we have chosen to work with the particular choice of excited-state form factor, Eq. (18), the occurrence of a Goldstone boson in the chiral limit in Eq. (13) is general and does not depend on this choice. This may easily be established by using the general gap equations, Eqs. (16) and (17), together with Eq. (20).

2.3. The Axial Current. To describe the leptonic decays of the π and π' mesons, we need the axial current operator. Since our effective action contains, besides the pion, a field describing an «excited state» with the same quantum numbers, it is clear that the axial current of our model is, in general, not carried exclusively by the π field, and is thus not given by the standard PCAC formula. Thus, we must determine the conserved axial current of our model, including the contribution of π' , from first principles.

In general, the construction of the conserved current in a theory with nonlocal (momentum-dependent) interactions is a difficult task. This problem has been studied extensively in the framework of the Bethe–Salpeter equation [22] and various 3-dimensional reductions of it such as the quasipotential and the on-shell reduction [23]. In these approaches, the derivation of the current is achieved by «gauging» all possible momentum dependences of the interaction through minimal substitution, a rather cumbersome procedure in practice. In contrast, in a Lagrangian field theory, a simple method exists to derive conserved currents, the so-called Gell-Mann and Levy method [24], based on the Noether theorem. In this approach, the current is obtained as the variation of the Lagrangian with respect to the derivative of a space-time dependent symmetry transformation of the fields. We now show that a suitable generalization of this technique can be employed to derive the conserved axial current of our model with quark–meson form factors depending on the transverse momentum.

To derive the axial current, we start at the quark level. The isovector axial current is the Noether current corresponding to infinitesimal chiral rotations of the quark fields,

$$\psi(x) \rightarrow \left(1 - i\varepsilon^a \frac{1}{2} \lambda^a \gamma_5\right) \psi(x). \quad (38)$$

Following the usual procedure, we consider the parameter of this transformation to be space–time dependent, $\varepsilon^a \equiv \varepsilon^a(x)$. However, this dependence should not be completely arbitrary. To describe the decays of π and π' mesons, it is sufficient to know the component of the axial current parallel to the meson 4-momentum, P . It is easy to see that this component is obtained from chiral rotations whose parameter depends only on the longitudinal part of the coordinate

$$\varepsilon^a(x) \rightarrow \varepsilon^a(x_{||}), \quad x_{||} \equiv \frac{x \cdot P}{\sqrt{P^2}}, \quad (39)$$

since $\partial_\mu \varepsilon^a(x_{||}) \propto P_\mu$. In other words, transformations of the form Eq.(39) describe a transfer of the longitudinal momentum to the meson, but not of the transverse momentum. This has an important consequence that the chiral transformation does not change the direction of transversality of the meson–quark interaction, cf. Eq.(9). When passing to the bosonized representation, Eq.(7), the transformation of the π_1, σ_1 and π_2, σ_2 fields induced by Eqs.(38) and (39) is therefore of the form

$$\begin{aligned} \pi_i^a(x) &\rightarrow \pi_i^a(x) + \varepsilon^a(x_{||}) \sigma_i(x), \\ \sigma_i(x) &\rightarrow \sigma_i(x) - \varepsilon^a(x_{||}) \pi_i^a(x). \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (40)$$

This follows from the fact that, for a fixed direction of P , the vertex, Eq.(9), describes an instantaneous interaction in $x_{||}$. Thus, the special chiral rotation, Eq.(39), does not mix the components of meson fields coupled to quarks with different form factors.

With the transformation of the chiral fields given by Eqs.(40), the construction of the axial current proceeds exactly as in the usual linear sigma model. We write the variation of the effective action, Eq.(13), in the momentum representation,

$$\delta W = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \varepsilon^a(Q) D^a(Q), \quad (41)$$

where $\varepsilon^a(Q) = \tilde{\varepsilon}^a(Q_{||}) \delta^{(3)}(Q_\perp)$ is the Fourier transform of the transformation, Eq.(39), and $D^a(Q)$ is a function of the fields $\sigma_i, \pi_i, i = 1, \dots, 2$, given in the form of a quark loop integral,

$$\begin{aligned} D^a(Q) = & -iN_c \operatorname{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\not{k} - m} \delta^{ab} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\not{k} - \frac{1}{2}\not{Q} - m} i\gamma_5 \lambda^a \frac{1}{\not{k} + \frac{1}{2}\not{Q} - m} i\gamma_5 \lambda^b \sigma_1 \right] \times \\ & \times (\pi_1^b(Q) + f(k_\perp) \pi_2^b(Q)). \end{aligned} \quad (42)$$

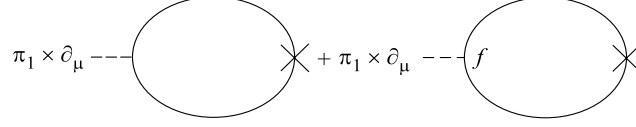


Fig. 2. The axial current of π_1 and π_2 fields, Eq.(44), as it follows from the Noether theorem. The cross denotes a local axial current of quark fields to which π_1 and π_2 fields couple through quark loops. The notation is the same as in Fig. 1

Here we have used that $\sigma_2 = 0$ in the vacuum, Eq.(18). Expanding now in the momentum Q , making use of Eq.(18) and the gap equation, Eq.(19), and setting $\sigma_1 = -m$ (it is sufficient to consider the symmetric limit, $m^0 = 0$), we get

$$\begin{aligned} D^a(Q) &= -Q^2 m \left[4I_2 \pi_1^a(Q) + 4I_2^f \pi_2^a(Q) \right] \\ &= -Q^2 m \left[Z_1 \pi_1^a(Q) + \sqrt{Z_1 Z_2} \Gamma \pi_2^a(Q) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

The fact that $D^a(Q^2)$ is proportional to Q^2 is a consequence of the chiral symmetry of the effective action, Eq.(13). Due to this property, $D^a(Q^2)$ can be regarded as the divergence of a conserved current,

$$A_\mu^a(Q) = Q_\mu m \left[Z_1 \pi_1^a(Q) + \sqrt{Z_1 Z_2} \Gamma \pi_2^a(Q) \right]. \quad (44)$$

Equation (44) is the conserved axial current of our model. It is of the usual «PCAC» form, but contains also a contribution of the π_2 field. The above derivation was rather formal. However, the result can be understood in simple terms, as is shown in Fig.2. Both the π_1 and π_2 fields couple to the local axial current of the quark field through quark loops; the π_2 field enters the loop with a form factor, $f(k_\perp)$. The necessity to pull out a factor of the meson field momentum (derivative) means that only the $\mathcal{O}(P^2)$ parts of the loop integrals, I_2 and I_2^f , survive, cf. Eq.(26). Chiral symmetry ensures that the corresponding diagrams for the divergence of the current have no P^2 -independent part.

The results of this Subsection are an example for the technical simplifications of working with separable quark interactions. The fact that they can be bosonized by local meson fields makes it possible to apply methods of local field theory, such as the Noether theorem, to the meson effective action. Furthermore, we note that the covariant (transverse) definition of the 3-dimensional quark interaction, Eq.(9), is crucial for obtaining a consistent axial current. In particular, with this formulation there is no ambiguity with different definitions of the pion decay constant like with noncovariant 3-dimensional interactions [13].

2.4. The Weak Decay Constants of π and π' Mesons. We now use the axial current derived in the previous Subsection to evaluate the weak decay constants

of physical π and π' mesons. They are defined by the matrix element of the divergence of the axial current between meson states and vacuum,

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a | \pi^b \rangle = M_\pi^2 F_\pi \delta^{ab}, \quad (45)$$

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a | \pi'^b \rangle = M_{\pi'}^2 F_{\pi'} \delta^{ab}. \quad (46)$$

In terms of the physical fields, π and π' , the axial current takes the form

$$A_\mu^a = P_\mu m \sqrt{Z_1} \left(\pi^a + \Gamma \sqrt{1 - \Gamma^2} \frac{M_1^2}{M_2^2} \pi'^a \right) + \mathcal{O}(M_1^4). \quad (47)$$

Here, we substituted the transformation of the fields, Eq. (37), into Eq. (44). The decay constants of the physical π and π' states are thus given by

$$F_\pi = \sqrt{Z_1} m + \mathcal{O}(M_1^4), \quad (48)$$

$$F_{\pi'} = \sqrt{Z_1} m \Gamma \sqrt{1 - \Gamma^2} \frac{M_1^2}{M_2^2} + \mathcal{O}(M_1^4). \quad (49)$$

The corrections to F_π for excited states are of order M_π^4 . Thus, within our accuracy, F_π is identical with the value obtained by the usual NJL model, $\sqrt{Z_1} m$, which follows from the Goldberger–Treiman relation at the quark level [8]. On the other hand, the π' -decay constant vanishes in the chiral limit $m^0 \sim M_1^2 \rightarrow 0$, as expected. We stress that for this property to hold, it is essential to consider the full axial current, Eq. (44), including the contribution of the π_2 component. As can be seen from Eqs. (37) and (44), the standard PCAC formula $A_\mu^a \propto \partial_\mu \pi_1^a$ would lead to a nonvanishing result for $F_{\pi'}$ in the chiral limit.

The ratio of the π' - to π -decay constants can directly be expressed in terms of the physical π and π' masses. From Eqs. (48) and (49) one obtains, using Eqs. (35) and (36),

$$\frac{F_{\pi'}}{F_\pi} = \Gamma \sqrt{1 - \Gamma^2} \frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{\Gamma}{\sqrt{1 - \Gamma^2}} \frac{M_\pi^2}{M_{\pi'}^2}. \quad (50)$$

This is precisely the dependence derived from current algebra considerations in the general «extended PCAC» framework [25]. We note that the same behavior of $F_{\pi'}$ in the chiral limit is found in models describing chiral symmetry breaking by nonlocal interactions [13, 20].

The effective Lagrangian in a compact way illustrates different consequences of axial current conservation for the pion and its excited state. Both matrix elements of $\partial_\mu A^\mu$, Eq. (45) and Eq. (46), must vanish for $m^0 \rightarrow 0$. The pion matrix element, Eq. (45), does so by $M_\pi^2 \rightarrow 0$, with F_π remaining finite, while for the excited pion matrix element the opposite takes place, $F_{\pi'} \rightarrow 0$ with $M_{\pi'}$ remaining finite.

2.5. Numerical Estimates and Conclusions. We can now numerically estimate the excited pion decay constant, $F_{\pi'}$, in this model. We take the value of the constituent quark mass $m = 300 \text{ MeV}$ and fix the 3-momentum cut-off at $\Lambda_3 = 671 \text{ MeV}$ by fitting the normal pion decay constant $F_\pi = 93 \text{ MeV}$ in the chiral limit, as in the usual NJL model without excited states, cf. [19]. With these parameters one obtains the standard value of the quark condensate, $\langle \bar{q}q \rangle = -(253 \text{ MeV})^3$, and $G = 0.82 m^{-2} = 9.1 \text{ GeV}^{-2}$, $m^0 = 5.1 \text{ MeV}$. With the constituent quark mass and cut-off fixed, we can determine the parameter d of the «excited-state» form factor, Eq. (11), from the condition Eq. (18). We find* $d = -1.83 \Lambda_3^{-2} = -4.06 \text{ GeV}^{-2}$, corresponding to a form factor $f(k_\perp)$ with a radial node in the range $0 \leq |k_\perp| \leq \Lambda_3$. With this value we determine the π_1 - π_2 mixing coefficient, Γ , Eq. (25), as

$$\Gamma = 0.41. \quad (51)$$

Note that Γ is independent of the normalization of the form factor $f(k_\perp)$, Eq. (11). In fact, the parameter c enters only into the mass of the π' meson, cf. Eqs. (24) and (36); we should not determine its value since the result can directly be expressed in terms of $M_{\pi'}$. Thus, Eq. (50) gives

$$\frac{F_{\pi'}}{F_\pi} = 0.45 \frac{M_\pi^2}{M_{\pi'}^2}. \quad (52)$$

For the standard value of the π' mass, $M_{\pi'} = 1300 \text{ MeV}$, this comes to $F_{\pi'} = 0.48 \text{ MeV}$. The excited pion leptonic decay constant is thus very small, which is a consequence of chiral symmetry. Note that, as opposed to the qualitative results discussed above, the numerical values here depend on the choice of form factor, (see Eq. (18)), and should thus be regarded as a rough estimate.

We remark that the numerical values of the ratio $F_{\pi'}/F_\pi$ obtained here are comparable to those found in chirally symmetric potential models [20]. However, models describing chiral symmetry breaking by a vector-type confining potential (linear or oscillator) usually underestimate the normal pion decay constant by an order of magnitude [13]. Such models should include a short-range interaction (NJL-type) which is mostly responsible for chiral symmetry breaking.

The small value of $F_{\pi'}$ does not imply a small width of the π' resonance, since it can decay hadronically, e.g., into 3π or $\rho\pi$. Such hadronic decays will be investigated in Section 4.

In conclusion, we outlined a simple framework for including radial excitations in an effective Lagrangian description of mesons. The Lagrangian obtained

*All parameters will be different when in Section 3 we consider a realistic version of this model. However, the ratio d/Λ_3 will be near 2 (its limit as $\Lambda \rightarrow \infty$) and change slightly.

by bosonization of an NJL model with separable interactions exhibits all qualitative properties expected on general grounds: a Goldstone pion with a finite decay constant, and a massive «excited state» with a vanishing decay constant in the chiral limit. Our model shows in a simple way how chiral symmetry protects the pion from modifications by excited states, which in turn influences the excited states' contribution to the axial current. These features are general and do not depend on a particular choice of the quark–meson form factor. Furthermore, they are preserved if the derivative expansion of the quark loop is carried to higher orders.

In the investigations described here we strictly kept to an effective Lagrangian approach, where the coupling constants and field transformations are defined at zero momentum. We have no way to check the quantitative reliability of this approximation for radially excited states in the region of ~ 1 GeV, i.e., to estimate the momentum dependence of the coupling constants, within the present model. (For a general discussion of the range of applicability of effective Lagrangians, see [26].) This question can be addressed to generalizations of the NJL model with quark confinement, which in principle allow both a zero–momentum and an on-shell description of bound states. Recently, first steps were undertaken to investigate the full momentum dependence of correlation functions in an approach of that kind [27].

3. $U(3) \times U(3)$ MODEL

3.1. $U(3) \times U(3)$ Chiral Lagrangian with Excited Meson States and 't Hooft Interaction. This Section is devoted to a realistic $U(3) \times U(3)$ version of the NJL model with nonlocal four-quark interaction (see Refs. 28, 29, 30).

We use a nonlocal separable four-quark interaction of the current–current form which admits nonlocal vertices (form factors) in the quark currents and a pure local six-quark 't Hooft interaction [31, 32]:

$$\mathcal{L}(\bar{q}, q) = \int d^4x \bar{q}(x)(i\not{\partial} - m^0)q(x) + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)} + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(6)}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)} &= \frac{G}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^9 \sum_{i=1}^N [j_{S,i}^a(x) j_{S,i}^a(x) + j_{P,i}^a(x) j_{P,i}^a(x)] - \\ &- \frac{G_V}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^9 \sum_{i=1}^N [j_{V,i}^{a,\mu}(x) j_{V,i,\mu}^a(x) + j_{A,i}^{a,\mu}(x) j_{A,i,\mu}^a(x)], \end{aligned} \quad (54)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{(6)} = -K [\det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q] + \det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q]], \quad (55)$$

where $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}$ is the $U(3) \times U(3)$ chirally symmetric four-quark interaction Lagrangian and $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(6)}$ contains the symmetry breaking 't Hooft terms. Here, m^0 is

the current quark mass matrix $m^0 = \text{diag}(m_u^0, m_d^0, m_s^0)$ ($m_u^0 \approx m_d^0$) and $j_{U,i}^a$ with $U = (S, P, V, A)$ denotes the scalar, pseudoscalar, vector, and axial-vector quark currents

$$j_{S(P),i}^a(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{q}(x_1) F_{S(P),i}^a(x; x_1, x_2) q(x_2), \quad (56)$$

$$j_{V(A),i}^{a,\mu}(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{q}(x_1) F_{V(A),i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2) q(x_2), \quad (57)$$

where $F_{S(P),i}^a(x; x_1, x_2)$ are the scalar (pseudoscalar) and $F_{V(A),i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2)$ the vector and axial-vector nonlocal quark vertices. The index $a = 1, \dots, 9$ denotes the basis elements τ^a of $U(3)$ flavor group. Our choice is slightly different from the Gell-Mann λ matrices

$$\begin{aligned} \tau_i &= \lambda_i \quad (i = 1, \dots, 7), \quad \tau_8 = (\sqrt{2}\lambda_0 + \lambda_8)/\sqrt{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_9 &= (-\lambda_0 + \sqrt{2}\lambda_8)/\sqrt{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (58)$$

but this choice is more convenient when a singlet-octet mixing appears due to the 't Hooft terms.

In the original formulation of the NJL model with 't Hooft interaction, the 't Hooft terms are represented by six-fermion vertices. In this form the Lagrangian is not ready for the bosonization procedure we should proceed to. An appropriate way to circumvent this drawback is to come to an equivalent form of the quark Lagrangian that contains only four-quark vertices as it was done, e.g., in Refs. 4, 31. Therein, the effective four-quark interaction is deduced by integrating out a quark loop at each six-quark vertex. Thus, from $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(6)}$ the four-quark part $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}$ acquires an additional contribution which in the one-loop approximation looks as follows:

$$\begin{aligned} L_{\text{tH}}^{(4)} &= 4K \int d^4x \left\{ \sum_{a=1}^3 m_s I_1(m_s) [(\bar{q}(x) i\gamma_5 \tau^a q(x))^2 - (\bar{q}(x) \tau^a q(x))^2] \right. \\ &\quad + \sum_{a=4}^7 m_u I_1(m_u) [(\bar{q}(x) i\gamma_5 \tau^a q(x))^2 - (\bar{q}(x) \tau^a q(x))^2] \\ &\quad + m_s I_1(m_s) [(\bar{q}(x) \tau^8 q(x))^2 - (\bar{q}(x) i\gamma_5 \tau^8 q(x))^2] \\ &\quad - 2\sqrt{2} m_u I_1(m_u) [(\bar{q}(x) \tau^8 q(x))(\bar{q}(x) \tau^9 q(x)) \\ &\quad \left. - (\bar{q}(x) i\gamma_5 \tau^8 q(x))(\bar{q}(x) i\gamma_5 \tau^9 q(x))] \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

In our model the 't Hooft interaction is local with respect to its instantaneous origin. Finally, we have *:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{q}, q) = & \int d^4x \bar{q}(x)(i\partial - m^0)q(x) + \\
& + \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^9 \sum_{b=1}^9 [G_{ab}^{(-)} j_{S,1}^a(x) j_{S,1}^b(x) + G_{ab}^{(+)} j_{P,1}^a(x) j_{P,1}^b(x)] + \\
& + \frac{G}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^9 \sum_{i=2}^N [j_{S,i}^a(x) j_{S,i}^a(x) + j_{P,i}^a(x) j_{P,i}^a(x)] - \\
& - \frac{G_V}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^9 \sum_{i=1}^N [j_{V,i}^{a,\mu}(x) j_{V,i,\mu}^a(x) + j_{A,i}^{a,\mu}(x) j_{A,i,\mu}^a(x)], \quad (60)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
G_{11}^{(\pm)} = G_{22}^{(\pm)} = G_{33}^{(\pm)} &= G \pm 4K m_s I_1(m_s), \\
G_{44}^{(\pm)} = G_{55}^{(\pm)} = G_{66}^{(\pm)} = G_{77}^{(\pm)} &= G \pm 4K m_u I_1(m_u), \\
G_{88}^{(\pm)} = G \mp 4K m_s I_1(m_s), \quad G_{99}^{(\pm)} &= G, \\
G_{89}^{(\pm)} = G_{98}^{(\pm)} &= \pm 4\sqrt{2} K m_u I_1(m_u), \\
G_{ab} = 0 \quad (a \neq b, \quad a, b = 1, \dots, 7). & \quad (61)
\end{aligned}$$

The model thus formulated can be bosonized in a standard way by introducing auxiliary boson fields $\sigma_i^a(x)$, $\varphi_i^a(x)$, $V_i^\mu(x)$, $A_i^\mu(x)$ with quantum numbers of the quark currents $j_{S(P),i}^a(x)$ and $j_{V(A),i}^{a,\mu}$, and then integrating over the quark degrees of freedom. The result is a meson effective Lagrangian which, after all, is a functional of scalar, pseudoscalar, vector, and axial-vector meson fields. In the case of an ordinary (local) NJL model, this procedure would give us the well-known linear realization of the chiral Lagrangian. When original four-quark vertices of the separable type contain form factors, the bosonization gives rise to a meson effective Lagrangian for the ground state and a number (in general infinite) of radially excited meson fields. These fields have the same quantum numbers and therefore should be interpreted as «radial» excitations.

The effective four-quark representation of the Lagrangian with 't Hooft interaction requires careful treatment. It is not equivalent to the original form in

*It should be noted that SBCS is already taken into account in the effective four-fermion vertices. Therefore, the effective four-fermion Lagrangian is no longer chirally invariant. However, in its original form the chiral invariance is present if we exclude 't Hooft terms. This fact has some consequences which we use later, for instance, we choose the same form factors both for scalars and pseudoscalars.

all aspects. For example, the gap equations derived from the effective four-quark form of the Lagrangian do not reproduce those obtained from the original form (with six-quark vertices). A kind of double counting takes place here, which leads to wrong gap equations (for a correct derivation of gap equations, see [31]). But for the mass spectra and meson–meson coupling constants in the one-loop approximation, everything works well.

In the one-loop approximation, the bosonized Lagrangian has the following form:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{bos}}(\bar{q}, q; \sigma, \varphi, V, A) = & \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{q}(x_1) \left[(i\partial\!\!\!/_{x_2} - m^0) \delta(x_1 - x_2) + \right. \\
 & + \int d^4x \sum_{i=1}^N \sum_{a=1}^9 \left(\sigma_i^a(x) F_{\sigma,i}^a(x; x_1, x_2) + \varphi_i^a(x) F_{\varphi,i}^a(x; x_1, x_2) + \right. \\
 & + V_{i,\mu}^a(x) F_{V,i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2) + A_{i,\mu}^a(x) F_{A,i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2) \left. \right) \left. \right] q(x_2) - \\
 & - \sum_{a=1}^9 \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\left(G^{(-)} \right)_{ab}^{-1} \sigma_1^a(x) \sigma_1^b(x) + \left(G^{(+)} \right)_{ab}^{-1} \varphi_1^a(x) \varphi_1^b(x) \right) - \right. \\
 & - \frac{1}{2G_V} \left((V_1^{a,\mu}(x))^2 + (A_1^{a,\mu}(x))^2 \right) \left. \right] - \\
 & - \int d^4x \sum_{i=2}^N \left[\frac{1}{2G} \left((\sigma_i^a(x))^2 + (\varphi_i^a(x))^2 \right) - \right. \\
 & - \frac{1}{2G_V} \left((V_i^{a,\mu}(x))^2 + (A_i^{a,\mu}(x))^2 \right) \left. \right]. \tag{62}
 \end{aligned}$$

This Lagrangian describes a system of local meson fields, $\sigma_i^a(x)$, $\varphi_i^a(x)$, $V_i^{a,\mu}(x)$, $A_i^{a,\mu}(x)$, $i = 1, \dots, N$, which interact with quarks through nonlocal vertices. These fields are not yet to be associated with physical particles, to be obtained after determining the vacuum and diagonalizing the meson effective Lagrangian.

In general, the model admits as many excited states as one wishes. But for a realistic description of very heavy mesons (2 GeV and more) the model seems not reliable because it is constructed for low energies. So we intended here to consider a minimal version of the model, restricting ourselves to $N = 2$, which is necessary for the description of ground states and first radial excitations of mesons.

To describe the ground and first radially excited states of mesons, we take the form factors in the momentum representation as follows:

$$F_{S,j}^a(\mathbf{k}) = \tau^a f_{\sigma,j}^a, \quad F_{P,j}^a = i\gamma_5 \tau^a f_{\varphi,j}^a, \tag{63}$$

$$F_{V,j}^{a,\mu}(\mathbf{k}) = \gamma^\mu \tau^a f_{V,j}^a, \quad F_{A,j}^{a,\mu} = \gamma_5 \gamma^\mu \tau^a f_{A,j}^a, \quad (64)$$

$$f_{U,1}^a \equiv 1, \quad f_{U,2}^a \equiv f_a^U(\mathbf{k}) = c_a^U(1 + d_a \mathbf{k}^2), \quad (65)$$

where $U = (\sigma, \varphi, V, A)$. Here, we consider the form factors in the rest frame of mesons (see Section 2). After bosonization in the one-loop approximation, we get

$$\begin{aligned} L_{\text{bos}}(\sigma, \varphi, V, A) = & - \sum_{a,b=1}^9 \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\left(G^{(-)} \right)_{ab}^{-1} \bar{\sigma}_1^a(x) \bar{\sigma}_1^b(x) + \left(G^{(+)} \right)_{ab}^{-1} \varphi_1^a(x) \varphi_1^b(x) \right) - \right. \\ & - \frac{1}{2G_V} \left((V_1^{a,\mu}(x))^2 + (A_1^{a,\mu}(x))^2 \right) \Big] - \\ & - \sum_{a=1}^9 \int d^4x \left[\frac{1}{2G} \left((\sigma_2^a(x))^2 + (\varphi_2^a(x))^2 \right) - \right. \\ & - \frac{1}{2G_V} \left((V_2^{a,\mu}(x))^2 + (A_2^{a,\mu}(x))^2 \right) \Big] - \\ & - i \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{1}{i \not{\partial} - m} \sum_{j=1}^2 \sum_{a=1}^9 (\sigma_j^a + \varphi_j^a + V_j^{a,\mu} \gamma_\mu + A_j^{a,\mu} \gamma_5 \gamma_\mu) f_j^a \tau_a \right]. \quad (66) \end{aligned}$$

At the beginning of this Section, we have already mentioned that there is a danger of double counting when deriving gap equations. The double counting surely takes place if one tries to obtain the gap equations by naively varying the Lagrangian (66) over σ_1^a . However, correct equations for σ_2^a can be obtained in this way. It is due to the fact that the 't Hooft interaction is local.

The gap equations for σ_1^a can be deduced from the Dyson–Schwinger equation. We will not discuss the details of finding its solution but refer the reader, e.g., to paper [31]. Here we present just the result that is a slight modification of the equations obtained in Ref. 31.

$$m_u^0 = m_u [1 - 8G_{88}^{(-)}(I_1(m_u) + I_1^{f_{uu}}(m_u)f_2^8)], \quad (67)$$

$$m_s^0 = m_s [1 - 8G_{99}^{(-)}(I_1(m_s) + I_1^{f_{ss}}(m_s)f_2^9)]. \quad (68)$$

There m_a^0 and m_a ($a = u, d, s$) are the current and constituent quark masses, respectively. The difference between Eqs. (67), (68) and those given in Ref. 31 is the presence of $I_1^f(m_u)$, tadpoles with form factors absent in local NJL.

The constituent quark masses appear, as usual, due to nonzero vacuum expectations of σ^a , according to the equations

$$\langle \bar{\sigma}^8 \rangle_0 = m_u^0 - m_u, \quad \langle \bar{\sigma}^9 \rangle_0 = m_s^0 - m_s. \quad (69)$$

We use them in the gap equations for excited meson states. The fields $\bar{\sigma}^a$ require redefinition which consists in subtracting their vacuum expectation values:

$$\sigma^8 = \bar{\sigma}^8 - \langle \bar{\sigma}^8 \rangle_0, \quad \sigma^9 = \bar{\sigma}^9 - \langle \bar{\sigma}^9 \rangle_0. \quad (70)$$

Now we stop discussing the gap equations for the ground fields and turn our attention to those for radially excited meson states. As it was said above, the correct gap equations for radially excited meson states can be obtained by calculating the first derivative of Lagrangian (66) with respect to σ_2^a , which gives

$$\langle \frac{\delta L}{\delta \sigma_2^a} \rangle_0 = -iN_c \text{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^a(\mathbf{k})}{(\not{k} - m + \langle \sigma_2^a \rangle_0 \tau_a f^a(\mathbf{k}))} - \frac{\langle \sigma_2^a \rangle_0}{G} = 0. \quad (71)$$

This equation always admits the trivial solution $\langle \sigma_2^a \rangle = 0$. Despite the fact that nontrivial solutions are possible, we assume that the vacuum expectations for radially excited meson states are equal to zero and therefore do not change the quark condensate. Thus, we obtain the condition

$$-iN_c \text{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f^a(\mathbf{k})}{(\not{k} - m)} = 0. \quad (72)$$

Equation (72) is written in the matrix form. In the isotopic symmetry, Eq. (72) gives two conditions on the form factors $f^a(\mathbf{k})$ which can be written in our notation as follows:

$$I_1^{f_{uu}}(m_u) = 0, \quad (73)$$

$$I_1^{f_{ss}}(m_s) = 0. \quad (74)$$

These conditions essentially simplify the calculation of the meson mass spectra. In particular, they provide a diagonal form for the $(\sigma_i^a)^2$ and $(\varphi_i^a)^2$ mass terms of the meson Lagrangian, however, not for all contributions. To ensure that no terms like $\sigma_1^a \sigma_2^a$ or $\varphi_1^a \varphi_2^a$ for strange mesons come from the one-loop quark integrals, we must impose, in addition to Eqs. (73) and (74), another condition

$$I_1^{f_{us}}(m_u) + I_1^{f_{us}}(m_s) = 0. \quad (75)$$

Conditions (73), (74), and (75) provide orthogonality of the ground ($i = 1$) and excited ($i = 2$) meson states in the low energy limit $P^2 \rightarrow 0$ (see Section 2) when φ_1^a become Goldstone bosons.

Now let us remind how we fix the basic parameters in the usual NJL model without excited states of mesons [10].

To obtain correct coefficients of kinetic terms of mesons in the quark-one-loop approximation, we have to make the renormalization of the meson fields

$$\sigma_a = g_\sigma^a \sigma_a^r, \quad \varphi_a = g_\sigma^a \varphi_a^r, \quad V_a^\mu = \frac{g_V^a}{2} V_a^{\mu,r}, \quad A_a^\mu = \frac{g_V^a}{2} A_a^{\mu,r}, \quad (76)$$

where

$$g_{\sigma}^{a_i,j} = [4I_2(m_i, m_j)]^{-1/2},$$

$$I_2(m_i, m_j) = -iN_c \int_{\Lambda_3} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m_i^2 - k^2)(m_j^2 - k^2)}, \quad (77)$$

$$g_V^a = \sqrt{6}g_{\sigma}^a. \quad (78)$$

After taking account of the pseudoscalar–axial–vector transitions ($\varphi_a \rightarrow A_a$), the additional renormalization of the pseudoscalar fields

$$g_{\varphi}^a = Z_a^{-\frac{1}{2}} g_{\sigma}^a, \quad (79)$$

appears, where $Z_{\pi} = 1 - 6m_u^2/M_{a_1}^2 \approx 0.7$ for pions. ($M_{a_1} = 1.23$ GeV is the mass of the axial–vector a_1 meson, [1], $m_u = 280$ MeV (see below and [10]). We assume that $Z_a \approx Z_{\pi} \approx 0.7$ for any a .

After these renormalizations the part of the Lagrangian describing the ground states of mesons takes the form

$$L(\sigma, \varphi, V, A) = -\frac{1}{2}((G^{(-)})_{ab}^{-1} g_{\sigma}^a g_{\sigma}^b \sigma_a \sigma_b + (G^{(+)}_{ab})^{-1} g_{\varphi}^a g_{\varphi}^b \varphi_a \varphi_b) -$$

$$-\frac{g_V^{a2}}{2G_V}(V_a^2 + A_a^2) - iN_c \text{Tr} \ln [i\not{D} - m +$$

$$+ \sum_{a=1}^9 \left(g_{\sigma}^a \sigma_a + i\gamma_5 g_{\varphi}^a \varphi_a + \frac{g_V^a}{2} (\gamma_{\mu} V_a^{\mu} + \gamma_5 \gamma_{\mu} A_a^{\mu}) \right) \tau^a], \quad (80)$$

for simplicity we omitted the index r of meson fields.

Lagrangian (80) in the one-loop approximation results in the following expressions for the meson masses [10]

$$M_{\pi}^2 = g_{\pi}^2 \left[\frac{1}{G_{\pi}} - 8I_1(m_u) \right] = \frac{g_{\pi}^2 m_u^0}{G_{\pi} m_u}, \quad g_{\pi}^2 = \frac{1}{4ZI_2(m_u, m_u)}, \quad (81)$$

$$M_K^2 = g_K^2 \left[\frac{1}{G_K} - 4(I_1(m_u) + I_1(m_s)) \right] + Z^{-1}(m_s - m_u)^2,$$

$$g_K^2 = \frac{1}{4ZI_2(m_u, m_s)}, \quad (82)$$

$$G_{\pi} = G_{11}^{(+)}, \quad G_K = G_{44}^{(+)}, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} M_{88}^{(+)} &= g_{\eta_u}^2 \left((G^{(+)}_{88})^{-1} - 8I_1(m_u) \right), \\ M_{99}^{(+)} &= g_{\eta_s}^2 \left((G^{(+)}_{99})^{-1} - 8I_1(m_s) \right), \end{aligned} \quad (84)$$

$$M_{89}^{(+)} = g_{\eta_u} g_{\eta_s} \left((G^{(+)}_{89})^{-1} \right), \quad (85)$$

$$M_{(\eta, \eta')}^2 = \frac{1}{2} \left[M_{88}^{(+)} + M_{99}^{(+)} \mp \sqrt{(M_{88}^{(+)} - M_{99}^{(+)})^2 + 4(M_{89}^{(+)})^2} \right], \quad (86)$$

$$M_\rho^2 = \frac{g_\rho^2}{4G_V} = \frac{3}{8G_V I_2(m_u, m_u)}, \quad M_\varphi^2 = M_\rho^2 \frac{I_2(m_u, m_u)}{I_2(m_s, m_s)}, \quad (87)$$

$$M_{K^*}^2 = M_\rho^2 \frac{I_2(m_u, m_u)}{I_2(m_u, m_s)} + \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2. \quad (88)$$

Now let us fix our basic parameters. For that we use six experimental values [8, 10, 32]:

1) The pion decay constant $F_\pi = 93$ MeV.

2) The ρ -meson decay constant $g_\rho \approx 6.14$. Then from the Goldberger–Treiman identity we obtain

$$m_u = F_\pi g_\pi \quad (89)$$

and from Eqs. (78) and (79) we get

$$g_\pi = \frac{g_\rho}{\sqrt{6Z}}, \quad m_u = \frac{F_\pi g_\rho}{\sqrt{6Z}}, \quad m = 280 \text{ MeV}. \quad (90)$$

From Eqs. (77) and (78) we can obtain (see [19])

$$I_2(m_u, m_u) = \frac{3}{2g_\rho^2}, \quad \Lambda_3 = 1.03 \text{ GeV}. \quad (91)$$

3) $M_\pi = 135$ MeV, the Eq. (81) gives G_π .

4) $M_\rho = 770$ MeV, the Eq. (82) gives G_V .

5) $\left. \begin{array}{l} M_K \approx 495 \text{ MeV}, \\ M_{\eta'}^2 - M_\eta^2 \end{array} \right\} \text{ fix } K \text{ and } m_s.$

Then the masses of η , η' , K^* , φ , and scalar mesons can be calculated with a satisfactory accuracy (see [32]).

We can calculate the values of F_K and all the coupling constants of strong interactions of scalar, pseudoscalar, vector, and axial–vector mesons with each other and with quarks, and describe the main decays of these mesons (see [10, 32]).

Further, when the radial excitations are included, the parameters will be shifted because of changing the mass formulae. However, m_u and Λ_3 will be the same as they are now. Their numerical values will be calculated in Subsec. 3.5.

3.2. The Masses of Isovector and Strange Scalar and Pseudoscalar Mesons (Ground and Excited States). After bosonization, the part of Lagrangian (66) describing the isovector and strange scalar and pseudoscalar mesons takes the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a_{0,1}, K_{0,1}^*, \pi_1, K_1, a_{0,2}, K_{0,2}^*, \pi_2, K_2) = & -\frac{a_{0,1}^2}{2G_{a_0}} - \frac{K_{0,1}^{*2}}{G_{K_0^*}} - \frac{\pi_1^2}{2G_\pi} - \frac{K_1^2}{G_K} - \\ & \frac{1}{2G}(a_{0,2}^2 + 2(K_{0,2}^*)^2 + \pi_2^2 + 2K_2^2) - \\ & -iN_c \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{1}{i\cancel{\partial} - m} \sum_{a=1}^7 \sum_{j=1}^2 \tau_a [\sigma_j^a + i\gamma_5 \varphi_j^a] f_j^a \right], \end{aligned} \quad (92)$$

where σ_j^a and φ_j^a are the scalar and pseudoscalar fields:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^3 (\sigma_j^a)^2 & \equiv a_{0,j}^2 = (a_{0,j}^0)^2 + 2a_{0,j}^+ a_{0,j}^-, \\ \sum_{a=4}^7 (\sigma_j^a)^2 & \equiv 2K_{0,j}^{*2} = 2(\bar{K}_{0,j}^*)^0 (K_{0,j}^*)^0 + 2(K_{0,j}^*)^+ (K_{0,j}^*)^-, \\ \sum_{a=1}^3 (\varphi_j^a)^2 & \equiv \pi_j^2 = (\pi_j^0)^2 + 2\pi_j^+ \pi_j^-, \\ \sum_{a=4}^7 (\varphi_j^a)^2 & \equiv 2K_j^2 = 2\bar{K}_j^0 K_j^0 + 2\bar{K}_j^+ K_j^-. \end{aligned}$$

As to the coupling constants G_{aa} , they will be defined later (see Subsec. 5 and (61)).

The free part of Lagrangian (92) has the following form

$$\mathcal{L}^{(2)}(\sigma, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a=1}^7 (\sigma_i^a K_{\sigma,ij}^a(P) \sigma_j^a + \varphi_i^a K_{\varphi,ij}^a(P) \varphi_j^a), \quad (93)$$

where the coefficients $K_{\sigma(\varphi),ij}^a(P)$ are given by

$$\begin{aligned} K_{\sigma(\varphi),ij}^a(P) = & -\delta_{ij} \left[\frac{\delta_{i1}}{G_{aa}^{(\mp)}} + \frac{\delta_{i2}}{G} \right] - \\ & -iN_c \text{Tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} + \not{P}/2 - m_q^a} r^{\sigma(\varphi)} f_i^a \frac{1}{\not{k} - \not{P}/2 - m_{q'}^a} r^{\sigma(\varphi)} f_j^a, \end{aligned} \quad (94)$$

$$r^\sigma = 1, \quad r^\varphi = i\gamma_5, \quad (95)$$

$$m_q^a = m_u \quad (a = 1, \dots, 7); \quad m_{q'}^a = m_u \quad (a = 1, \dots, 3); \quad m_{q'}^a = m_s \quad (a = 4, \dots, 7), \quad (96)$$

with m_u and m_s being the constituent quark masses and f_j^a being defined in (65). Integral (94) is evaluated by expanding in the meson field momentum P . To order P^2 , one obtains

$$\begin{aligned} K_{\sigma(\varphi),11}^a(P) &= Z_{\sigma(\varphi),1}^a(P^2 - (m_q^a \pm m_{q'}^a)^2 - M_{\sigma^a(\varphi^a),1}^2), \\ K_{\sigma(\varphi),22}^a(P) &= Z_{\sigma(\varphi),2}^a(P^2 - (m_q^a \pm m_{q'}^a)^2 - M_{\sigma^a(\varphi^a),2}^2), \\ K_{\sigma(\varphi),12}^a(P) &= K_{\sigma(\varphi),21}^a(P) = \gamma_{\sigma(\varphi)}^a(P^2 - (m_q^a \pm m_{q'}^a)^2), \end{aligned} \quad (97)$$

where

$$Z_{\sigma,1}^a = 4I_2^a, \quad Z_{\sigma,2}^a = 4I_2^{ffa}, \quad \gamma_\sigma^a = 4I_2^{fa}, \quad (98)$$

$$Z_{\varphi,1}^a = Z Z_{\sigma,1}^a, \quad Z_{\varphi,2}^a = Z_{\sigma,2}^a, \quad \gamma_\varphi^a = Z^{1/2} \gamma_\sigma^a \quad (99)$$

and

$$M_{\sigma^a(\varphi^a),1}^2 = (Z_{\sigma(\varphi),1}^a)^{-1} \left[\frac{1}{G_{aa}^{(\mp)}} - 4(I_1(m_q^a) + I_1(m_{q'}^a)) \right], \quad (100)$$

$$M_{\sigma^a(\varphi^a),2}^2 = (Z_{\sigma(\varphi),2}^a)^{-1} \left[\frac{1}{G} - 4(I_1^{ffa}(m_q^a) + I_1^{ffa}(m_{q'}^a)) \right]. \quad (101)$$

The factor Z here appears due to $\pi - a_1$ transitions [8, 10, 28] (see Subsec. 3.1), and the integrals $I_2^{f..f}$ contain form factors:

$$I_2^{f..fa}(m_q^a, m_{q'}^a) = \frac{-iN_c}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda_3} d^4k \frac{f_a(\mathbf{k}) \cdot f_a(\mathbf{k})}{((m_q^a)^2 - k^2)((m_{q'}^a)^2 - k^2)}. \quad (102)$$

After the renormalization of the scalar fields

$$\sigma_i^{ar} = \sqrt{Z_{\sigma,i}^a} \sigma_i^a, \quad \varphi_i^{ar} = \sqrt{Z_{\varphi,i}^a} \varphi_i^a \quad (103)$$

the part of Lagrangian (93) that describes the scalar and pseudoscalar mesons takes the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a_0}^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - 4m_u^2 - M_{a_0,1}^2) a_{0,1}^2 + \Gamma_{a_0} (P^2 - 4m_u^2) a_{0,1} a_{0,2} \\ &+ \frac{1}{2} (P^2 - 4m_u^2 - M_{a_0,2}^2) a_{0,2}^2, \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K_0^*}^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - (m_u + m_s)^2 - M_{K_0^*,1}^2) K_{0,1}^{*2} + \\ &+ \Gamma_{K_0^*} (P^2 - (m_u + m_s)^2) K_{0,1}^* K_{0,2}^* + \\ &+ \frac{1}{2} (P^2 - (m_u + m_s)^2 - M_{K_0^*,2}^2) K_{0,2}^{*2}, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\mathcal{L}_\pi^{(2)} = \frac{1}{2} (P^2 - M_{\pi,1}^2) \pi_1^2 + \Gamma_\pi P^2 \pi_1 \pi_2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\pi,2}^2) \pi_2^2, \quad (106)$$

$$\mathcal{L}_K^{(2)} = \frac{1}{2} (P^2 - M_{K,1}^2) K_1^2 + \Gamma_K P^2 K_1 K_2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{K,2}^2) K_2^2, \quad (107)$$

where

$$\Gamma_{\sigma^a} = \frac{I_2^{f_a}}{\sqrt{I_2 I_2^{f_a}}}, \quad \Gamma_{\varphi^a} = Z^{-1/2} \Gamma_{\sigma^a}. \quad (108)$$

After the transformations of the meson fields

$$\begin{aligned} \sigma^a &= \cos(\theta_{\sigma,a} - \theta_{\sigma,a}^0) \sigma_1^{ar} - \cos(\theta_{\sigma,a} + \theta_{\sigma,a}^0) \sigma_2^{ar}, \\ \hat{\sigma}^a &= \sin(\theta_{\sigma,a} - \theta_{\sigma,a}^0) \sigma_1^{ar} - \sin(\theta_{\sigma,a} + \theta_{\sigma,a}^0) \sigma_2^{ar}, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \varphi^a &= \cos(\theta_{\varphi,a} - \theta_{\varphi,a}^0) \varphi_1^{ar} - \cos(\theta_{\varphi,a} + \theta_{\varphi,a}^0) \varphi_2^{ar}, \\ \hat{\varphi}^a &= \sin(\theta_{\varphi,a} - \theta_{\varphi,a}^0) \varphi_1^{ar} - \sin(\theta_{\varphi,a} + \theta_{\varphi,a}^0) \varphi_2^{ar}. \end{aligned} \quad (110)$$

Lagrangians (104), (105), (106), and (107) assume the diagonal form:

$$L_{a_0}^{(2)} = \frac{1}{2} (P^2 - M_{a_0}^2) a_0^2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{a}_0}^2) \hat{a}_0^2, \quad (111)$$

$$L_{K_0^*}^{(2)} = \frac{1}{2} (P^2 - M_{K_0^*}^2) K_0^{*2} + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{K}_0^*}^2) \hat{K}_0^{*2}. \quad (112)$$

$$L_\pi^{(2)} = \frac{1}{2} (P^2 - M_\pi^2) \pi^2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{\pi}}^2) \hat{\pi}^2, \quad (113)$$

$$L_K^{(2)} = \frac{1}{2} (P^2 - M_K^2) K^2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{K}}^2) \hat{K}^2. \quad (114)$$

Here we have

$$\begin{aligned} M_{(a_0, \hat{a}_0)}^2 &= \frac{1}{2(1 - \Gamma_{a_0}^2)} \left[M_{a_0,1}^2 + M_{a_0,2}^2 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(M_{a_0,1}^2 - M_{a_0,2}^2)^2 + (2M_{a_0,1} M_{a_0,2} \Gamma_{a_0})^2} \right] + 4m_u^2, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} M_{(K_0^*, \hat{K}_0^*)}^2 &= \frac{1}{2(1 - \Gamma_{K_0^*}^2)} \left[M_{K_0^*,1}^2 + M_{K_0^*,2}^2 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(M_{K_0^*,1}^2 - M_{K_0^*,2}^2)^2 + (2M_{K_0^*,1} M_{K_0^*,2} \Gamma_{K_0^*})^2} \right] + (m_u + m_s)^2, \end{aligned} \quad (116)$$

$$M_{(\pi, \hat{\pi})}^2 = \frac{1}{2(1 - \Gamma_\pi^2)} \left[M_{\pi,1}^2 + M_{\pi,2}^2 \pm \sqrt{(M_{\pi,1}^2 - M_{\pi,2}^2)^2 + (2M_{\pi,1}M_{\pi,2}\Gamma_\pi)^2} \right], \quad (117)$$

$$M_{(K, \hat{K})}^2 = \frac{1}{2(1 - \Gamma_K^2)} \left[M_{K,1}^2 + M_{K,2}^2 \pm \sqrt{(M_{K,1}^2 - M_{K,2}^2)^2 + (2M_{K,1}M_{K,2}\Gamma_K)^2} \right], \quad (118)$$

and

$$\tan 2\bar{\theta}_{\sigma(\varphi),a} = \sqrt{\frac{1}{\Gamma_{\sigma^a(\varphi^a)}^2} - 1} \left[\frac{M_{\sigma^a(\varphi^a),1}^2 - M_{\sigma^a(\varphi^a),2}^2}{M_{\sigma^a(\varphi^a),1}^2 + M_{\sigma^a(\varphi^a),2}^2} \right],$$

$$2\theta_{\sigma(\varphi),a} = 2\bar{\theta}_{\sigma(\varphi),a} + \pi, \quad (119)$$

$$\sin \theta_{\sigma(\varphi),a}^0 = \sqrt{\frac{1 + \Gamma_{\sigma^a(\varphi^a)}}{2}}. \quad (120)$$

The caret symbol stands for the first radial excitations of mesons. Transformations (109) and (110) express the «physical» fields σ , φ , $\hat{\sigma}$, and $\hat{\varphi}$ through the «bare» ones σ_i^{ar} , φ_i^{ar} and for calculations these equations must be inverted. For practical use, we collect the values of coefficients in the inverted equations for the scalar and pseudoscalar fields in Table 1.

For the weak decay constants of pions and kaons we obtain

$$F_\pi = 2m_u \sqrt{ZI_2(m_u)} \cos(\theta_\pi - \theta_\pi^0), \quad (121)$$

$$F_{\pi'} = 2m_u \sqrt{ZI_2(m_u)} \sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0), \quad (122)$$

$$F_K = (m_u + m_s) \sqrt{ZI_2(m_u, m_s)} \cos(\theta_K - \theta_K^0), \quad (123)$$

$$F_{K'} = (m_u + m_s) \sqrt{ZI_2(m_u, m_s)} \sin(\theta_K - \theta_K^0). \quad (124)$$

Table 1. The mixing coefficients for the ground and first radially excited states of scalar and pseudoscalar isovector and strange mesons. The caret symbol marks the excited states

	a_0	$\hat{a}_0$		K_0^*	$\hat{K}_0^*$
$a_{0,1}$	0.87	0.82	$K_{0,1}^*$	0.83	0.89
$a_{0,2}$	0.22	-1.17	$K_{0,2}^*$	0.28	-1.11

	π	$\hat{\pi}$		K	$\hat{K}$
π_1	1.00	0.54	K_1	0.96	0.56
π_2	0.01	-1.14	K_2	0.09	-1.11

In the chiral limit we have $\theta_a = \theta_a^0$ and

$$F_\pi = \frac{m_u}{g_\pi}, \quad F_K = \frac{m_u + m_s}{2g_K}, \quad (125)$$

$$F_{\pi'} = F_{K'} = 0, \quad g_\pi = (Z_1^\pi)^{-1/2}, \quad g_K = (Z_1^K)^{-1/2}. \quad (126)$$

As one can see from these formulae, in the chiral limit we obtain the Goldberger–Treiman identities for the coupling constants g_π and g_K . The matrix elements of divergences of the axial currents between meson states and vacuum (PCAC relations) are

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a | \varphi \rangle = M_\varphi^2 F_\varphi \delta^{ab}, \quad (127)$$

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a | \varphi' \rangle = M_{\varphi'}^2 F_{\varphi'} \delta^{ab}. \quad (128)$$

These axial currents are conserved in the chiral limit because their divergences equal zero, according to low-energy theorems.

3.3. The Masses of Isoscalar Mesons (the Ground and Excited States). The free part of the effective Lagrangian for isoscalar scalar and pseudoscalar mesons after bosonization is as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{isosc}}(\sigma, \varphi) = & -\frac{1}{2} \sum_{a,b=8}^9 \left[\sigma_1^a (G^{(-)})_{ab}^{-1} \sigma_1^b + \varphi_1^a (G^{(+)})_{ab}^{-1} \varphi_1^b \right] - \\ & -\frac{1}{2G} \sum_{a=8}^9 \left[(\sigma_2^a)^2 + (\varphi_2^a)^2 \right] - \\ & -i \operatorname{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{i\hat{\partial} - m} \sum_{a=8}^9 \sum_{j=1}^2 \tau^a [\sigma_j^a + i\gamma_5 \varphi_j^a] f_j^a \right\}, \end{aligned} \quad (129)$$

where $(G^{(\mp)})^{-1}$ is the inverse of $G^{(\mp)}$:

$$\begin{aligned} (G^{(\mp)})_{88}^{-1} &= G_{88}^{(\mp)} / D^{(\mp)}, & (G^{(\mp)})_{89}^{-1} &= (G^{(\mp)})_{98}^{-1} = -G_{89}^{(\mp)} / D^{(\mp)}, \\ (G^{(\mp)})_{99}^{-1} &= G_{99}^{(\mp)} / D^{(\mp)}, & D^{(\mp)} &= G_{88}^{(\mp)} G_{99}^{(\mp)} - (G_{89}^{(\mp)})^2. \end{aligned} \quad (130)$$

From (129), in the one-loop approximation, one obtains the free part of the effective Lagrangian

$$\mathcal{L}^{(2)}(\sigma, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=8}^9 \left(\sigma_i^a K_{\sigma,ij}^{[a,b]}(P) \sigma_j^b + \varphi_i^a K_{\varphi,ij}^{[a,b]}(P) \varphi_j^b \right). \quad (131)$$

The definition of $K_{\sigma(\varphi),i}^{[a,b]}$ is given in Appendix A.

Table 2. The mixing coefficients for isoscalar meson states

	η	$\hat{\eta}$	η'	$\hat{\eta}'$
φ_1^8	0.71	0.62	-0.32	0.56
φ_2^8	0.11	-0.87	-0.48	-0.54
φ_1^9	0.62	0.19	0.56	-0.67
φ_2^9	0.06	-0.66	0.30	0.82

	σ	$\hat{\sigma}$	f_0	$\hat{f}_0$
σ_1^8	-0.98	-0.66	0.10	0.17
σ_2^8	0.02	1.15	0.26	-0.17
σ_1^9	0.27	-0.09	0.82	0.71
σ_2^9	-0.03	-0.21	0.22	-1.08

After the renormalization of both the scalar and pseudoscalar fields, analogous to (103), we come to the Lagrangian that can be represented in the form slightly different from that of (131). It is convenient to introduce 4-vectors of «bare» fields

$$\Sigma = (\sigma_1^{8r}, \sigma_2^{8r}, \sigma_1^{9r}, \sigma_2^{9r}), \quad \Phi = (\varphi_1^{8r}, \varphi_2^{8r}, \varphi_1^{9r}, \varphi_2^{9r}). \quad (132)$$

Thus, we have

$$\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma, \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 (\Sigma_i \mathcal{K}_{\Sigma,ij}(P) \Sigma_j + \Phi_i \mathcal{K}_{\Phi,ij}(P) \Phi_j), \quad (133)$$

where we introduced new functions $\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),ij}(P)$ (see Appendix A). The index r marks renormalized fields.

Up to this moment we have four pseudoscalar and four scalar meson states which are the octet and nonet singlets. Mesons of the same parity have the same quantum numbers and, therefore, they are expected to be mixed. In our model the mixing is represented by 4×4 matrices $R^{\sigma(\varphi)}$ which transform the «bare» fields σ_i^{8r} , σ_i^{9r} , φ_i^{8r} , and φ_i^{9r} entering into the 4-vectors Σ and Φ into the «physical» ones σ , $\hat{\sigma}$, f_0 , $\hat{f}_0$, η , η' , $\hat{\eta}$, and $\hat{\eta}'$ represented as components of the vectors Σ_{ph} and Φ_{ph} :

$$\Sigma_{\text{ph}} = (\sigma, \hat{\sigma}, f_0, \hat{f}_0), \quad \Phi_{\text{ph}} = (\eta, \hat{\eta}, \eta', \hat{\eta}'). \quad (134)$$

The transformation $R^{\sigma(\varphi)}$ is linear and nonorthogonal:

$$\Sigma_{\text{ph}} = R^{\sigma} \Sigma, \quad \Phi_{\text{ph}} = R^{\varphi} \Phi. \quad (135)$$

In terms of «physical» fields the free part of the effective Lagrangian is of the conventional form and the coefficients of matrices $R^{\sigma(\varphi)}$ give the mixing of the $\bar{u}u$ and $\bar{s}s$ components, with and without form factors.

Because of complexity of the procedure of diagonalization for the matrices of dimensions greater than 2, there are no such simple formulae as, e.g., (109). Hence, we do not implement it analytically but use numerical methods to obtain matrix elements (see Table 2).

3.4. The Effective Lagrangian for the Ground and Excited States of Vector Mesons. The free part of the effective Lagrangian (66) describing the ground and excited states of vector mesons has the form

$$L^{(2)}(V) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a=1}^9 V_i^{a\mu}(P) R_{ij}^{a\mu\nu}(P) V_j^{a\nu}(P), \quad (136)$$

where

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^3 (V_i^{a\mu})^2 &= (\rho_i^{0\mu})^2 + 2\rho_i^{+\mu} \rho_i^{-\mu}, \quad (V_i^{4\mu})^2 + (V_i^{5\mu})^2 = 2K_i^{*+\mu} K_i^{*- \mu}, \\ (V_i^{6\mu})^2 + (V_i^{7\mu})^2 &= 2K_i^{*0\mu} K_i^{*0\mu}, \quad (V_i^{8\mu})^2 = (\omega_i^\mu)^2, \quad (V_i^{9\mu})^2 = (\varphi_i^\mu)^2 \end{aligned} \quad (137)$$

and

$$\begin{aligned} R_{ij}^{a\mu\nu}(P) &= -\frac{\delta_{ij}}{G_V} g^{\mu\nu} - \\ &- i N_c \operatorname{tr} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\not{k} + \frac{1}{2}\not{P} - m_q^a} \gamma^\mu f_i^{a,V} \frac{1}{\not{k} - \frac{1}{2}\not{P} - m_{q'}^a} \gamma^\nu f_j^{a,V} \right]. \end{aligned} \quad (138)$$

To order P^2 , one obtains

$$\begin{aligned} R_{11}^{a\mu\nu} &= W_1^a [P^2 g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} (\bar{M}_1^a)^2], \\ R_{22}^{a\mu\nu} &= W_2^a [P^2 g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} (\bar{M}_2^a)^2], \\ R_{12}^{a\mu\nu} &= R_{21}^{\mu\nu a} = \bar{\gamma}^a [P^2 g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu - \frac{3}{2} (m_q^a - m_{q'}^a)^2 g^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (139)$$

Here

$$W_1^a = \frac{8}{3} I_2^a, \quad W_2^a = \frac{8}{3} I_2^{ffa}, \quad \bar{\gamma}^a = \frac{8}{3} I_2^{fa}, \quad (140)$$

$$(\bar{M}_1^a)^2 = (W_1^a G_V)^{-1} + \frac{3}{2} (m_q^a - m_{q'}^a)^2, \quad (141)$$

$$(\bar{M}_2^a)^2 = (W_2^a G_V)^{-1} + \frac{3}{2} (m_q^a - m_{q'}^a)^2. \quad (142)$$

After renormalization of the meson fields

$$V_i^{ar\mu} = \sqrt{W_i^a} V_i^{a\mu} \quad (143)$$

we obtain the Lagrangians

$$\begin{aligned} L_\rho^{(2)} &= -\frac{1}{2} [(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\rho_1}^2) \rho_1^\mu \rho_1^\nu + \\ &+ 2\Gamma_\rho (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu) \rho_1^\mu \rho_2^\nu + (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\rho_2}^2) \rho_2^\mu \rho_2^\nu], \end{aligned} \quad (144)$$

$$L_{\varphi}^{(2)} = -\frac{1}{2} [(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\varphi_1}^2) \varphi_1^\mu \varphi_1^\nu + 2\Gamma_{\varphi} (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu) \varphi_1^\mu \varphi_2^\nu + (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\varphi_2}^2) \varphi_2^\mu \varphi_2^\nu], \quad (145)$$

$$L_{K^*}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left[(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \left(\frac{3}{2} (m_q^a - m_{q'}^a)^2 + M_{K_1^*}^2 \right)) K_1^{*\mu} K_1^{*\nu} + 2\Gamma_{K^*} \left(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \frac{3}{2} (m_q^a - m_{q'}^a)^2 \right) K_1^{*\mu} K_2^{*\nu} + \left(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \left(\frac{3}{2} (m_q^a - m_{q'}^a)^2 + M_{K_2^*}^2 \right) \right) K_2^{*\mu} K_2^{*\nu} \right]. \quad (146)$$

Here

$$\begin{aligned} M_{\rho_1}^2 &= \frac{3}{8G_V I_2(m_u, m_u)}, & M_{K^*1}^2 &= \frac{3}{8G_V I_2(m_u, m_s)}, \\ M_{\varphi_1}^2 &= \frac{3}{8G_V I_2(m_s, m_s)}, & M_{\rho_2}^2 &= \frac{3}{8G_V I_2^{ff}(m_u, m_u)}, \\ M_{K^*2}^2 &= \frac{3}{8G_V I_2^{ff}(m_u, m_s)}, & M_{\varphi_2}^2 &= \frac{3}{8G_V I_2^{ff}(m_s, m_s)}, \end{aligned} \quad (147)$$

$$\Gamma_{a_i, j} = \frac{I_2^{fa}(m_i, m_j)}{\sqrt{I_2^a(m_i, m_j) I_2^{fa}(m_i, m_j)}}. \quad (148)$$

After transformations of the vector meson fields, similar to Eqs.(110) for the pseudoscalar mesons, Lagrangians (144), (145), (146) take the diagonal form

$$L_{V^a, \bar{V}^a}^{(2)} = -\frac{1}{2} [(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_{V^a}^2) V^{a\mu} V^{a\nu} + (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_{\bar{V}^a}^2) \bar{V}^{a\mu} \bar{V}^{a\nu}], \quad (149)$$

where $V^{a\mu}$ and $\bar{V}^{a\mu}$ are physical ground and excited states of vector mesons

$$\begin{aligned} M_{\rho, \bar{\rho}}^2 &= \frac{1}{2(1 - \Gamma_\rho^2)} \left[M_{\rho_1}^2 + M_{\rho_2}^2 \mp \sqrt{(M_{\rho_1}^2 - M_{\rho_2}^2)^2 + (2M_{\rho_1} M_{\rho_2} \Gamma_\rho)^2} \right] \\ &= M_{\omega, \bar{\omega}}^2, \end{aligned} \quad (150)$$

$$M_{\varphi, \bar{\varphi}}^2 = \frac{1}{2(1 - \Gamma_\varphi^2)} \left[M_{\varphi_1}^2 + M_{\varphi_2}^2 \mp \sqrt{(M_{\varphi_1}^2 - M_{\varphi_2}^2)^2 + (2M_{\varphi_1} M_{\varphi_2} \Gamma_\varphi)^2} \right], \quad (151)$$

$$\begin{aligned} M_{K^*, \bar{K}^*}^2 &= \frac{1}{2(1 - \Gamma_{K^*}^2)} \left[M_{K_1^*}^2 + M_{K_2^*}^2 + 3\Delta^2(1 - \Gamma_{K^*}^2) \mp \sqrt{(M_{K_1^*}^2 - M_{K_2^*}^2)^2 + (2M_{K_1^*} M_{K_2^*} \Gamma_{K^*})^2} \right]. \end{aligned} \quad (152)$$

3.5. Numerical Estimates. In our model we have six basic parameters (see Subsection 3.1): the masses of the constituent $u(d)$ and s quarks, $m_u = m_d$ and m_s , the cut-off parameter Λ_3 , two four-quark coupling constants (one for the scalar and pseudoscalar channels, G , and the other for the vector and axial-vector channels, G_V) and the 't Hooft coupling constant K . We fixed these parameters with the help of input parameters: the pion decay constant $F_\pi = 93$ MeV, the ρ -meson decay constant $g_\rho = 6.14$ (decay $\rho \rightarrow 2\pi$)*, the masses of pion, kaon, ρ -meson, and the mass difference of η and η' mesons. Using mass formulae given in previous subsections of this Section, we obtain numerical estimates of these parameters:

$$\begin{aligned} m_u &= 280 \text{ MeV}, & m_s &= 405 \text{ MeV}, & \Lambda_3 &= 1.03 \text{ GeV}, \\ G &= 3.14 \text{ GeV}^{-2}, & G_V &= 12 \text{ GeV}^{-2}, & K &= 6.1 \text{ GeV}^{-5}. \end{aligned} \quad (153)$$

When excited meson states are introduced, a set of additional parameters related to the form factors appears in our model: the slope parameters d_{qq} and the external parameters c_{qq}^U . The slope parameters d_{qq} are fixed by special conditions (see Eqs. (73), (74), (75)) from which we obtain: $d_{uu} = -1.78 \text{ GeV}^{-2}$, $d_{us} = -1.76 \text{ GeV}^{-2}$, $d_{ss} = -1.73 \text{ GeV}^{-2}$. As it was mentioned earlier, we assume here that d_{uu} , d_{us} , and d_{ss} do not depend on parity and spin of mesons.

The parameters $c_{qq}^{\sigma^a(\varphi^a)}$ are fitted by masses of excited pseudoscalar and vector mesons, $c_{uu}^{\pi, a_0} = 1.44$, $c_{uu}^{\eta, \eta', \sigma, f_0} = 1.5$, $c_{us}^{K, K_0^*} = 1.59$, $c_{ss}^{\eta, \eta', \sigma, f_0} = 1.66$, $c_{uu}^\rho = 1.33$, $c_{us}^{K^*} = 1.6$, $c_{ss}^\varphi = 1.41$. These parameters characterize how stronger the quark currents with form factors attract each other than those without form factors. We use the same parameters for the scalar and pseudoscalar mesons (global chiral symmetry). This allows us to predict the masses of ground and excited states of scalar mesons. The result is represented in Table 3 together with experimental values.

We also calculate the angles θ_a and θ_a^0 :

$$\begin{aligned} \theta_\pi &= 59.48^\circ & \theta_\pi^0 &= 59.12^\circ, & \theta_K &= 60.2^\circ, \\ \theta_K^0 &= 57.13^\circ, & \theta_\rho &= 81.8^\circ, & \theta_\rho^0 &= 81.5^\circ, \\ \theta_{K^*} &= 84.7^\circ, & \theta_{K^*}^0 &= 59.14^\circ, & \theta_\varphi &= 68.4^\circ, \\ \theta_\varphi^0 &= 57.13^\circ, & \theta_{a_0} &= 72.0^\circ, & \theta_{a_0}^0 &= 61.5^\circ, \\ \theta_{K_0^*} &= 74.0^\circ & \theta_{K_0^*}^0 &= 60.0^\circ. \end{aligned} \quad (154)$$

We consider it expedient to give the values of angles because they will be used in the next Section when the calculation of strong decays of the ground and first radially excited states of the π and ρ meson will be treated in detail. However,

*Here, we used the relation $g_\rho = \sqrt{6}g_\sigma$ together with the Goldberger-Treiman relation $g_\pi = m/F_\pi = Z^{-1/2}g_\sigma$ to fix the parameters m_u and Λ_3 .

Table 3. The model masses of mesons, MeV

	GR	EXC	GR(Exp.) [1]	EXC(Exp.) [1]
M_σ	530	1330	400–1200	1200–1500
M_{f_0}	1070	1600	980 ± 10	1712 ± 5
M_{a_0}	830	1500	983.4 ± 0.9	1474 ± 19
$M_{K_0^*}$	960	1500	905 ± 50 [5]	1429 ± 12
M_π	140	1300	139.56995 ± 0.00035	1300 ± 100
M_K	490	1300	497.672 ± 0.031	1460(?)
M_η	520	1280	547.30 ± 0.12	1297.8 ± 2.8
$M_{\eta'}$	910	1470	957.78 ± 0.14	1440–1470
M_ρ	770	1470	770.0 ± 0.8	1465 ± 25
M_φ	1019	1682	1019.413 ± 0.008	1680 ± 20
M_{K^*}	887	1479	891.59 ± 0.24	1412 ± 12

the mixing coefficients for π , K , a_0 , and K_0^* defined by these angles have been displayed in Table 1. The mixing coefficients for η , η' , σ , and f_0 are given in Table 2.

Having fixed all parameters in our model, we can predict the masses of η , η' , K_0^* , and φ mesons and all masses of the ground and first radially excited scalar meson states. We also calculate the weak decay constants for the pion and kaon (both for the ground and excited states):

$$F_\pi = 93 \text{ MeV}, \quad F_{\pi'} = 0.57 \text{ MeV}, \quad (155)$$

$$F_K = 1.16, \quad F_\pi = 108 \text{ MeV}, \quad F_{K'} = 3.3 \text{ MeV}. \quad (156)$$

Moreover, now we are able to estimate all strong coupling constants for the mesons considered in this paper. In the next Section we calculate some of these constants that define the strong decay processes of ground states and first radial excitations of the scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets.

4. STRONG DECAYS OF MESONS

4.1. Decays $\rho \rightarrow 2\pi, \pi' \rightarrow \rho\pi, \pi' \rightarrow \sigma\pi, \rho' \rightarrow 2\pi, \rho' \rightarrow \omega\pi$ and $\omega' \rightarrow \rho\pi$.

In this section we calculate the widths of main decays of scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets (for Subsec. 4.1 see Refs. 33, for Subsec. 4.2 Ref. 34, for Subsecs. 4.3 and 4.4 see Ref. 30) through triangle quark diagrams. When calculating these diagrams, we keep the least possible dependence on external momenta: squared for the anomaly-type graphs and linear for other types. We omit the higher order momentum dependence.

We start with the decay $\rho \rightarrow 2\pi$. The amplitude describing this decay has the form

$$T_{\rho \rightarrow 2\pi} = i \frac{g_\rho}{2} \epsilon_{ijk} (p_j - p_k)^\nu \rho_\nu^i \pi^j \pi^k, \quad (157)$$

where $p_{j,k}$ are pion momenta and ϵ_{ijk} is antisymmetric tensor. Using the value $\alpha_\rho = g_\rho^2/(4\pi) \approx 3$ ($g_\rho \approx 6.1$) of Refs. 8, 9, 10, 11 we obtain for the decay width

$$\Gamma_{\rho \rightarrow 2\pi} = \frac{\alpha_\rho}{12 M_\rho^2} (M_\rho^2 - 4 M_\pi^2)^{3/2} \approx 151.5 \text{ MeV}. \quad (158)$$

The experimental value is [1]

$$\Gamma_{\rho \rightarrow 2\pi} = 150.7 \pm 1.2 \text{ MeV}. \quad (159)$$

Now let us calculate this amplitude in our model with the excited states of mesons. To this end, we rewrite the amplitude $T_{\rho \rightarrow 2\pi}$ in the form

$$T_{\rho \rightarrow 2\pi} = i c_{\rho \rightarrow 2\pi} \epsilon_{ijk} (p_j - p_k)^\nu \rho_\nu^i \pi^j \pi^k, \quad (160)$$

and calculate the factor $c_{\rho \rightarrow 2\pi}$ in the new model. Using Eqs. (103), (110) and (143) we can find the following expressions for meson fields π_i and ρ_i from the Lagrangian (66) expressed in terms of the physical states π, π' and ρ, ρ'

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0)\pi - \cos(\theta_\pi + \theta_\pi^0)\pi'}{\sqrt{Z_1} \sin 2\theta_\pi^0}, \\ \pi_2 &= \frac{\sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0)\pi - \cos(\theta_\pi - \theta_\pi^0)\pi'}{\sqrt{Z_2} \sin 2\theta_\pi^0}, \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0)\rho - \cos(\theta_\rho + \theta_\rho^0)\rho'}{\sin 2\theta_\rho^0 \sqrt{8/3} I_2}, \\ \rho_2 &= \frac{\sin(\theta_\rho - \theta_\rho^0)\rho - \cos(\theta_\rho - \theta_\rho^0)\rho'}{\sin 2\theta_\rho^0 \sqrt{8/3} I_{2,\rho}^{ff}}, \end{aligned} \quad (162)$$

or, using the values $I_2 = 0.04$, $I_{2,\rho}^{ff} = 0.0244$, and θ_π , θ_π^0 , θ_ρ and θ_ρ^0 from Eqs. (154), we obtain*

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{0.878\pi + 0.48\pi'}{0.88\sqrt{Z_1}}, \quad \pi_2 = \frac{0.0061\pi - \pi'}{0.88\sqrt{Z_2}}, \\ \rho_1 &= (0.744\rho + 0.931\rho') g_\rho/2, \quad \rho_2 = (0.48\rho - 1.445\rho') g_\rho/2. \end{aligned} \quad (163)$$

* Analogous formulae are obtained for the ω meson.

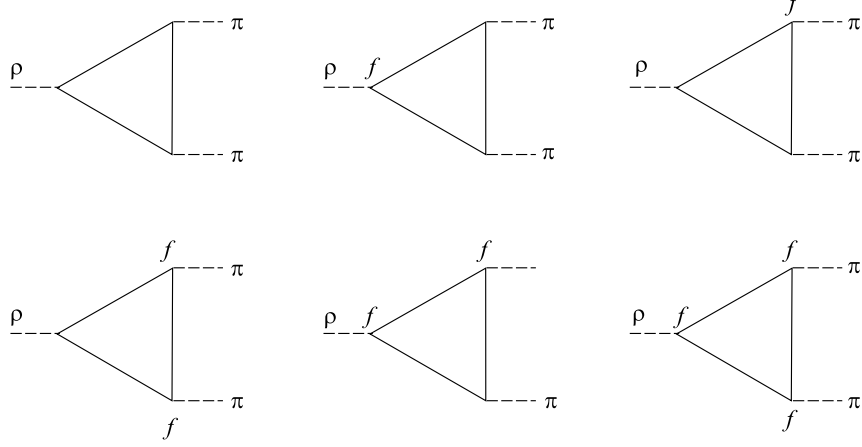


Fig. 3. Triangle diagrams describing decays of a ρ meson. Each letter in a diagram indicates the presence of a form factor at a vertex

The decay $\rho \rightarrow 2\pi$ is described by the quark triangle diagrams with the vertices $\rho_1(\pi_1^2 + 2\pi_1\pi_2 + \pi_2^2)$ and $\rho_2(\pi_1^2 + 2\pi_1\pi_2 + \pi_2^2)$ (see Fig. 3). Using Eqs. (161), (162) and (163), we arrive at the factor* $c_{\rho \rightarrow 2\pi}$

$$c_{\rho \rightarrow 2\pi} = c_{\rho_1 \rightarrow 2\pi} + c_{\rho_2 \rightarrow 2\pi} = 0.975 g_\rho/2, \quad (164)$$

$$\begin{aligned} c_{\rho_1 \rightarrow 2\pi} &= \frac{\sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0)}{\sin^2 2\theta_\pi^0 \sin 2\theta_\rho^0 \sqrt{8/3} I_2} \times \\ &\times [(\sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0))^2 + 2 \sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \Gamma_\pi + \\ &+ (\sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0))^2 = \sin^2 2\theta_\pi^0] = \frac{\sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0)}{\sin 2\theta_\rho^0 \sqrt{8/3} I_2} = 0.745 g_\rho/2, \\ c_{\rho_2 \rightarrow 2\pi} &= \frac{\sin(\theta_\rho - \theta_\rho^0)}{\sin^2 2\theta_\pi^0 \sin 2\theta_\rho^0 \sqrt{8/3} I_{2,\rho}^{ff}} \left[(\sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0))^2 \frac{I_2^f}{I_2} + \right. \\ &+ \\ &\left. 2 \sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \frac{I_2^{ff}}{\sqrt{I_2} I_2^{ff}} + (\sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0))^2 \frac{I_2^{fff}}{I_2^{ff}} \right] = 0.227 g_\rho/2. \end{aligned} \quad (165)$$

*Taking account of the $\pi \rightarrow a_1$ transitions on external pion lines, we obtain additional factors Z ($\bar{Z}$) in the numerators of our triangle diagrams which cancel corresponding factors in Z_i (see Eqs. (22), (161) and Ref. 10). Therefore, in future we shall ignore the factors Z ($\bar{Z}$) in Z_i .

Here we used the values $I_2^f = 0.0185$, $I_2^{ff} = 0.0289$, $I_2^{fff} = 0.0224$ and the equation $\Gamma_\pi = -\cos 2\theta_\pi^0$ (it can easily be derived from Eq. (120)). Then the decay width $\rho \rightarrow 2\pi$ is equal to

$$\Gamma_{\rho \rightarrow 2\pi} \approx 149 \text{ MeV}. \quad (166)$$

In the limit $f = 0$ ($\theta_\pi = \theta_\pi^0, \theta_\rho = \theta_\rho^0$) from Eqs. (165) one finds

$$c_{\rho \rightarrow 2\pi} = c_{\rho_1 \rightarrow 2\pi} = g_\rho/2, \quad c_{\rho_2 \rightarrow 2\pi} = 0. \quad (167)$$

Now let us consider the decay $\pi' \rightarrow \rho\pi$. The amplitude of this decay is of the form

$$T_{\pi' \rightarrow \rho\pi}^\nu = i c_{\pi' \rightarrow \rho\pi} \epsilon_{ijk} (p_j + p_k)^\nu \rho_\nu^i \pi^j \pi^k, \quad (168)$$

where

$$c_{\pi' \rightarrow \rho\pi} = c_{\pi' \rightarrow \rho_1\pi} + c_{\pi' \rightarrow \rho_2\pi}. \quad (169)$$

Then for $c_{\pi' \rightarrow \rho_1\pi}$ we obtain

$$\begin{aligned} c_{\pi' \rightarrow \rho_1\pi} &= \frac{2}{(\sin 2\theta_\pi^0)^2} [-\sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \cos(\theta_\pi + \theta_\pi^0) - \sin 2\theta_\pi \Gamma_\pi - \\ &- \sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \cos(\theta_\pi - \theta_\pi^0) = \\ &= -\sin 2\theta_\pi \cos 2\theta_\pi^0 + \sin 2\theta_\pi \cos 2\theta_\pi^0 = 0] \times \\ &\times \frac{\sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0)}{\sin 2\theta_\rho^0} g_\rho/2 = 0, \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} c_{\pi' \rightarrow \rho_2\pi} &= \frac{2}{(\sin 2\theta_\pi^0)^2} \left[-\sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \cos(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \frac{I_2^f}{I_2} - \sin 2\theta_\pi \frac{I_2^{ff}}{\sqrt{I_2 I_2^{ff}}} - \right. \\ &- \left. \sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \cos(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \frac{I_2^{fff}}{I_2^{ff}} \right] \frac{\sin(\theta_\rho - \theta_\rho^0)}{\sin 2\theta_\rho^0} \sqrt{\frac{I_2}{I_2^{ff}}} g_\rho/2 = -0.573 g_\rho/2. \end{aligned} \quad (171)$$

For the decay width $\pi' \rightarrow \rho\pi$ we get

$$\Gamma_{\pi' \rightarrow \rho\pi} = \frac{c_{\pi' \rightarrow \rho\pi}^2}{4\pi M_{\pi'}^3 M_\rho^2} \Phi(M_{\pi'}, M_\rho, M_\pi)^3 \approx 220 \text{ MeV}, \quad (172)$$

where

$$\Phi(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{M_1^4 + M_2^4 + M_3^4 - 2(M_1^2 M_2^2 + M_1^2 M_3^2 + M_2^2 M_3^2)}. \quad (173)$$

The decay $\pi' \rightarrow \sigma\pi$ is calculated in a similar way as $\hat{\eta} \rightarrow a_0\pi$ (see Subsec. 4.4). Here, we need the mixing coefficients for the scalar meson given in Table 2. We omit details and obtain

$$\Gamma_{\pi' \rightarrow \sigma\pi} \approx 80 \text{ MeV}, \quad (174)$$

therefore, the total width is estimated as

$$\Gamma_{\pi'}^{\text{tot}} \approx 300 \text{ MeV}. \quad (175)$$

This value is in agreement with the experimental data [1]

$$\Gamma_{\pi'}^{\text{tot}} = 200 - 600 \text{ MeV}. \quad (176)$$

For the decay $\rho' \rightarrow 2\pi$ we arrive in our model at the result

$$\Gamma_{\rho' \rightarrow 2\pi} \approx 22 \text{ MeV}. \quad (177)$$

Most of our results are in agreement with the results of the relativized potential quark model with the $3P_0$ mechanism of meson decays [2].

To conclude this Subsection, we calculate the decay widths of processes $\rho' \rightarrow \omega\pi$ and $\omega' \rightarrow \rho\pi$. These decays go through anomalous triangle quark loop diagrams. The amplitude of the decay $\rho' \rightarrow \omega\pi$ takes the form

$$T_{\rho' \rightarrow \omega\pi}^{\mu\nu} = \frac{3\alpha_\rho c_{\rho' \rightarrow \omega\pi}}{2\pi F_\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho p_\sigma, \quad (178)$$

where q and p are momenta of the ω and ρ' meson, respectively. The factor $c_{\rho' \rightarrow \omega\pi}$ is similar to the factors $c_{\rho \rightarrow 2\pi}$ and $c_{\pi' \rightarrow \rho\pi}$ in the previous equations and arises from the four triangle quark diagrams with vertices $\pi_1(\rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_1 + \rho_1\omega_2 + \rho_2\omega_2)$ *. Using the estimate

$$c_{\rho' \rightarrow \omega\pi} \approx -0.3, \quad (179)$$

we obtain for the decay width

$$\Gamma_{\rho' \rightarrow \omega\pi} = \frac{3}{2\pi M_{\rho'}^3} \left(\frac{\alpha_\rho c_{\rho' \rightarrow \omega\pi}}{8\pi F_\pi} \right)^2 \Phi(M_{\rho'}, M_\omega, M_\pi)^3 \approx 75 \text{ MeV}. \quad (180)$$

For the decay $\omega' \rightarrow \rho\pi$ we have the relation

$$\Gamma_{\omega' \rightarrow \rho\pi} \approx 3 \Gamma_{\rho' \rightarrow \omega\pi} \quad (181)$$

*We neglect the diagrams with vertices π_2 , because their contribution to the ground state of the pion is very small (see Eq. (163)).

leading to the estimate

$$\Gamma_{\omega' \rightarrow \rho\pi} \approx 225 \text{ MeV}. \quad (182)$$

The experimental values are [35]

$$\Gamma_{\rho' \rightarrow \omega\pi}^{\text{exp}} = 0.21 \quad \Gamma_{\rho'}^{\text{tot}} = 65.1 \pm 12.6 \text{ MeV} \quad (183)$$

and [1]

$$\Gamma_{\omega' \rightarrow \rho\pi}^{\text{exp}} = 174 \pm 60 \text{ MeV}. \quad (184)$$

Finally, let us quote the ratio of the decay widths $\rho' \rightarrow \omega\pi$ and $\rho' \rightarrow 2\pi$

$$\frac{\Gamma_{\rho' \rightarrow 2\pi}}{\Gamma_{\rho' \rightarrow \omega\pi}} \approx 0.3, \quad (185)$$

which is to be compared with the experimental value 0.32 (see [35]).

Thus, we can see that all our estimates are in satisfactory agreement with experimental data.

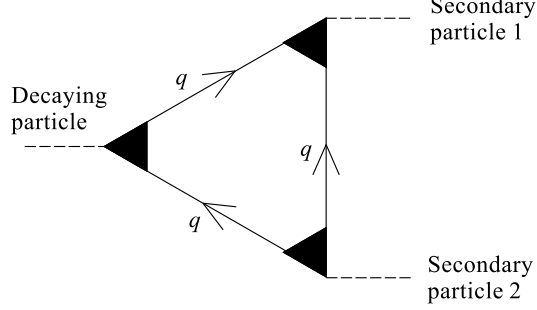
Our calculations have shown that the main decay of the ρ meson, $\rho \rightarrow 2\pi$, changes very little after including the excited meson states into the NJL model. The main part of this decay (75%) comes from the ρ vertex without the form factor, whereas the remaining 25% of the decay are due to the ρ vertex with the form factor. As a result, the new coupling constant g_ρ turns out to be very close to the former value.

For the decay $\pi' \rightarrow \rho\pi$ we meet an opposite situation. Here the channel connected with the ρ vertex without the form factor is closed because the states π and π' are orthogonal to each other, and the total decay width of $\pi' \rightarrow \rho\pi$ is defined by the channel going through the ρ vertex with the form factor. As a result, we obtain the quoted value that satisfies experimental data [1]. The decay $\pi' \rightarrow \sigma\pi$ gives a noticeable correction to the total decay width of π' . These results disagree with the results obtained in the relativized version of the $3P_0$ -potential model [2] in the subject of the $\pi' \rightarrow \sigma\pi$ decay mode.

For the decay $\rho' \rightarrow 2\pi$ we obtain strong compensation of the contributions from the two channels, related to ρ vertices with and without form factors, and the corresponding decay width is equal to 22 MeV. This value is very close to the result of Ref. 2.

It should be emphasized that the decays $\rho' \rightarrow \omega\pi$ and $\omega' \rightarrow \rho\pi$ belonging to a different class of quark loop diagrams («anomaly diagrams») are also satisfactorily described by our model.

4.2. The Decays of Strange Mesons (Vectors and Pseudoscalars). In the framework of our model, the decay modes of excited mesons are represented by triangle diagrams with form factors. A total set of diagrams similar to those in Fig. 3 can be represented as one graph: a triangle with shaded angles (see Fig. 4). Every vertex in such diagrams is momentum-dependent and includes


 Fig. 4. Diagrams describing meson decays of the $1 \rightarrow 2$ type

form factors defined in Subsection 3.1. For the strange vector and pseudoscalar mesons being decaying, each black shaded vertex with a pseudoscalar meson is implied to contain the following linear combination for the ground state:

$$\bar{f}_a = \frac{1}{\sin 2\theta_a^0} \left[\frac{\sin(\theta_a + \theta_a^0)}{\sqrt{Z_1^a}} + \frac{\sin(\theta_a - \theta_a^0)}{\sqrt{Z_2^a}} f_a \right], \quad (186)$$

and for an excited state,

$$\bar{f}'_a = \frac{-1}{\sin 2\theta_a^0} \left[\frac{\cos(\theta_a + \theta_a^0)}{\sqrt{Z_1^a}} + \frac{\cos(\theta_a - \theta_a^0)}{\sqrt{Z_2^a}} f_a \right], \quad (187)$$

where θ_a and θ_a^0 are the angles defined in Subsection 3.5 (see Eqs. (119), (120), and (154)) and f_a is one of the form factors defined in Subsection 3.1 (see Eq. (65)). For vector meson vertices, we have the same linear combinations except that Z_i^a are to be replaced by W_i^a (140), and the related angles and form factor parameters must be chosen.

Now we can calculate the decay widths of excited mesons. Let us start with the process $K^{*'} \rightarrow K^* \pi$. The corresponding amplitude, $T_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi}^{\mu\nu}$, has the form

$$T_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi}^{\mu\nu} = g_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta, \quad (188)$$

where p and q are momenta of the $K^{*'}$ and K^* mesons, respectively, and $g_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi}$ is the (dimensional) coupling constant that follows from the combination of one-loop integrals

$$g_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi} = \frac{8m_s}{m_u^2 - m_s^2} (\mathcal{J}_{2,0}[\bar{f}'_{K^*} \bar{f}_{K^*} \bar{f}_\pi] - \mathcal{J}_{1,1}[\bar{f}'_{K^*} \bar{f}_{K^*} \bar{f}_\pi]). \quad (189)$$

In Eq. (189) we introduced a functional defined on functions $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ in the momentum representation:

$$\mathcal{J}_{n,m}[\mathbf{f}] = -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda^3} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{k}) d^4 k}{(m_u - k^2)^n (m_s - k^2)^m}. \quad (190)$$

This is an alternative to integrals $I_2^{f \cdots f}$ which we thought better to introduce for a growing number of «physical» form factors.

We omit the intermediate calculation here. For the decay constant $g_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi}$ we find

$$g_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi} \approx 4 \text{ GeV}^{-1} \quad (191)$$

and the decay width is as follows:

$$\Gamma_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi} = \frac{g_{K^{*'} \rightarrow K^* \pi}^2}{32\pi M_{K^{*'}}^3} \Phi(M_{K^{*'}}, M_{K^*}, M_\pi)^3 \approx 90 \text{ MeV}. \quad (192)$$

The lower limit for this value coming from experiment is $\sim 91 \pm 9 \text{ MeV}$ [1].

A similar calculation has to be performed for the rest of the $K^{*'}$ decay modes under consideration. The coupling constant $g_{K^{*'} \rightarrow K \rho}$ is derived in the same way as in (189), with the only difference that $\bar{f}_\pi$ and $\bar{f}_{K^*}$ are to be replaced by $\bar{f}_\rho$ and $\bar{f}_K$. The corresponding amplitude, $T_{K^{*'} \rightarrow K \rho}^{\mu\nu}$, takes the form

$$T_{K^{*'} \rightarrow K \rho}^{\mu\nu} = g_{K^{*'} \rightarrow K \rho} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta, \quad (193)$$

where p and q are momenta of $K^{*'}$ and K mesons, respectively, and

$$g_{K^{*'} \rightarrow K \rho} = \frac{8m_s}{m_u^2 - m_s^2} (\mathcal{J}_{2,0}[\bar{f}'_{K^*} \bar{f}_K \bar{f}_\rho] - \mathcal{J}_{1,1}[\bar{f}'_{K^*} \bar{f}_K \bar{f}_\rho]). \quad (194)$$

The corresponding decay width is

$$\Gamma_{K^{*'} \rightarrow K \rho} = \frac{g_{K^{*'} \rightarrow K \rho}^2}{32\pi M_{K^{*'}}^3} \Phi(M_{K^{*'}}, M_K, M_\rho)^3. \quad (195)$$

For the parameters given in Subsection 3.5 one has

$$g_{K^{*'} \rightarrow K \rho} \approx 3 \text{ GeV}^{-1}, \quad \Gamma_{K^{*'} \rightarrow K \rho} \approx 20 \text{ MeV}. \quad (196)$$

From experiment, the upper limit for this process is $\Gamma_{K^{*'} \rightarrow K \rho}^{exp} < 16 \pm 1.5 \text{ MeV}$.

The process $K^{*'} \rightarrow K \pi$ is described by the amplitude

$$T_{K^{*'} \rightarrow K \pi}^\mu = i \frac{g_{K^{*'} \rightarrow K \pi}}{2} (q - p)^\mu, \quad (197)$$

where p and q are momenta of π and K . The coupling constant $g_{K^{*'} \rightarrow K\pi}$ is obtained by calculating the one-loop integral

$$g_{K^{*'} \rightarrow K\pi} = 4\mathcal{J}_{1,1}[\bar{f}'_K \bar{f}_K \bar{f}_\pi] \approx 2 \quad (198)$$

and the decay width is

$$\Gamma_{K^{*'} \rightarrow K\pi} = \frac{g_{K^{*'} \rightarrow K\pi}^2 \Phi(M_{K^{*'}}, M_K, M_\pi)^3}{64\pi M_{K^{*'}}^5} \approx 20 \text{ MeV}. \quad (199)$$

The experimental value is $15 \pm 5 \text{ MeV}$ [1].

The mesons with hidden strangeness (φ') are treated in the same way as $K^{*'}$. We consider two decay modes: $\varphi' \rightarrow KK^*$ and $\varphi' \rightarrow \bar{K}K$. Their amplitudes are

$$T_{\varphi' \rightarrow KK^*}^{\mu\nu} = g_{\varphi' \rightarrow KK^*} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta, \quad (200)$$

$$T_{\varphi' \rightarrow \bar{K}K}^\mu = ig_{\varphi' \rightarrow \bar{K}K} (p - q)^\mu. \quad (201)$$

Here, p and q are momenta of the K and K^* mesons. The related coupling constants are

$$g_{\varphi' \rightarrow KK^*} = \frac{8m_u}{m_s^2 - m_u^2} (\mathcal{J}_{0,2}[\bar{f}'_\varphi \bar{f}_{K^*} \bar{f}_K] - \mathcal{J}_{1,1}[\bar{f}'_\varphi \bar{f}_{K^*} \bar{f}_K]), \quad (202)$$

$$g_{\varphi' \rightarrow \bar{K}K} = 4\mathcal{J}_{0,2}[\bar{f}'_\varphi \bar{f}_K \bar{f}_K]. \quad (203)$$

Thus, the decay widths are estimated as

$$\Gamma_{\varphi' \rightarrow KK^*} \approx 90 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\varphi' \rightarrow \bar{K}K} \approx 10 \text{ MeV}. \quad (204)$$

Unfortunately, there are no reliable experimental data on the partial decay widths for $\varphi' \rightarrow KK^*$ and $\varphi' \rightarrow \bar{K}K$ except the total width of φ' being estimated as $150 \pm 50 \text{ MeV}$ [1]. However, the dominance of the process $\varphi' \rightarrow KK^*$ observed is in agreement with our result.

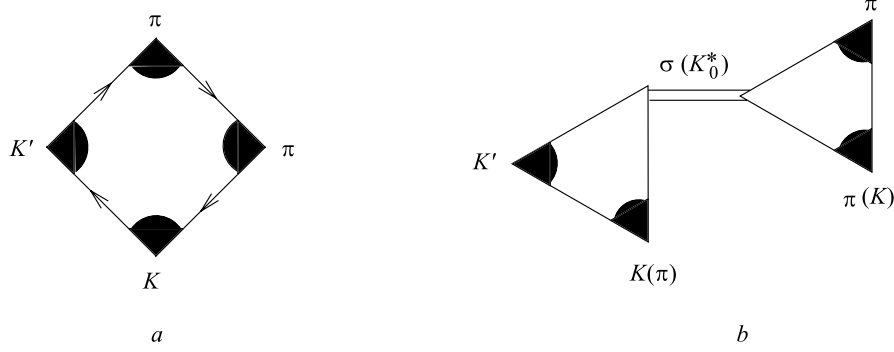
Following the scheme outlined in the previous calculations, we first estimate the $K' \rightarrow K^*\pi$ and $K' \rightarrow K\rho$ decay widths. Their amplitudes are

$$T_{K' \rightarrow K^*\pi}^\mu = ig_{K' \rightarrow K^*\pi} (p + q)^\mu, \quad (205)$$

$$T_{K' \rightarrow K\rho}^\mu = ig_{K' \rightarrow K\rho} (p + q)^\mu, \quad (206)$$

here p is the momentum of K' , q is the momentum of π (K). The coupling constants are

$$g_{K' \rightarrow K^*\pi} = 4\mathcal{J}_{1,1}[\bar{f}'_K \bar{f}_{K^*} \bar{f}_\pi], \quad g_{K' \rightarrow K\rho} = 4\mathcal{J}_{1,1}[\bar{f}'_K \bar{f}_K \bar{f}_\rho]. \quad (207)$$

Fig. 5. Diagrams describing the decay $K' \rightarrow K\pi\pi$.

By calculating the integrals in the above formulae we have $g_{K' \rightarrow K^*\pi} \approx -1.4$ and $g_{K' \rightarrow K\rho} \approx -1.2$. The decay widths thereby are

$$\Gamma_{K' \rightarrow K^*\pi} \approx 100 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{K' \rightarrow K\rho} \approx 50 \text{ MeV}. \quad (208)$$

These processes have been observed in experiment and the decay widths are * [1]

$$\Gamma_{K' \rightarrow K^*\pi}^{exp} \sim 109 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{K' \rightarrow K\rho}^{exp} \sim 34 \text{ MeV}. \quad (209)$$

The remaining decay $K' \rightarrow K\pi\pi$ into three particles requires more complicated calculations. In this case, one must consider a box diagram, Fig. 5,a, and two types of diagrams, Fig. 5,b, with intermediate σ and K_0^* resonances. The diagrams for resonance channels are approximated by the relativistic Breit–Wigner function. The integration over the kinematically relevant range in the phase space for final states gives

$$\Gamma_{K' \rightarrow K\pi\pi} \sim 1 \text{ MeV}. \quad (210)$$

4.3. Strong Decays of Scalar Mesons. The ground and excited states of scalar mesons f_0 , a_0 , and K_0^* decay mostly into pairs of pseudoscalar mesons.

They can easily be related to $Z_{\sigma(\varphi),i}^a$ introduced at the beginning of our paper.

All amplitudes that describe processes of the type $\sigma \rightarrow \varphi_1\varphi_2$ can be divided into two parts:

*The accuracy of measurements carried out for the decays of K' is not given in [1].

$$\begin{aligned}
 T_{\sigma \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} &= C \left(-\frac{iN_c}{(2\pi)^4} \right) \times \\
 &\times \int_{\Lambda_3} d^4k \frac{\text{Tr}[(m + \mathbf{k} + \mathbf{p}_1)\gamma_5(m + \mathbf{k})\gamma_5(m + \mathbf{k} - \mathbf{p}_2)]}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k + p_1)^2)(m^2 - (k - p_2)^2)} = \\
 &= 4mC \left(-\frac{iN_c}{(2\pi)^4} \right) \int_{\Lambda_3} d^4k \frac{\left[1 - \frac{p_1 \cdot p_2}{m^2 - k^2} \right]}{(m^2 - (k + p_1)^2)(m^2 - (k - p_2)^2)} = \\
 &= mC[I_2(m, p_1, p_2) - p_1 \cdot p_2 I_3(m, p_1, p_2)] = T^{(1)} + T^{(2)}. \quad (211)
 \end{aligned}$$

Here $C = 4g_\sigma g_{\varphi_1} g_{\varphi_2}$ and p_1, p_2 are momenta of pseudoscalar mesons. We rewrite the amplitude $T_{\sigma \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}$ in another form

$$T_{\sigma \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} \approx 4mZ^{-1/2}g_{\varphi_1} \left[1 - p_1 \cdot p_2 \frac{I_3(m)}{I_2(m)} \right], \quad (212)$$

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(M_\sigma^2 - M_{\varphi_1}^2 - M_{\varphi_2}^2). \quad (213)$$

We assumed here that the I_3/I_2 ratio slowly changes with the momentum in comparison with the factor $p_1 \cdot p_2$, therefore, we ignore their momentum dependence in (212). With this assumption we are going to obtain just a qualitative picture for decays of the excited scalar mesons.

In Eqs.(211) and (212), we omitted the contributions from the diagrams that include form factors at vertices. The whole set of diagrams consists of those containing zero, one, two, and three form factors. To obtain the complete amplitude, one must sum up all contributions.

After these general comments, let us consider the decays of $a_0(1450)$, $f_0(1370)$, $f_J(1710)$, and $K_0^*(1430)$. First, we estimate the decay width of the process $\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi$, taking the mixing coefficients from Tables 1 and 2 (see Appendix B for details). The result is

$$T_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi}^{(1)} \approx 0.2 \text{ GeV}, \quad T_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi}^{(2)} \approx 3.5 \text{ GeV}, \quad (214)$$

$$\Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi} \approx 160 \text{ MeV}. \quad (215)$$

From this calculation one can see that $T^{(1)} \ll T^{(2)}$ and the amplitude is dominated by its second part, $T^{(2)}$, that is momentum-dependent. The first part is small because the diagrams with different numbers of form factors cancel each other. As a consequence, in all processes where an excited scalar meson decays into a pair of ground pseudoscalar states, the second part of the amplitude determines the rate of the process.

For the decay $\hat{a}_0 \rightarrow \pi\eta'$ we obtain the amplitudes

$$T_{\hat{a}_0 \rightarrow \pi\eta'}^{(1)} \approx 0.8 \text{ GeV}, \quad T_{\hat{a}_0 \rightarrow \pi\eta'}^{(2)} \approx 3 \text{ GeV}, \quad (216)$$

and the decay width

$$\Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow \pi\eta'} \approx 36 \text{ MeV}. \quad (217)$$

The decay of $\hat{a}_0$ into kaons is described by the amplitudes $T_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+K^-}$ and $T_{\hat{a}_0 \rightarrow \bar{K}^0 K^0}$ which, in accordance with our scheme, can again be divided into two parts: $T^{(1)}$ and $T^{(2)}$ (see Appendix B for details):

$$T_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+K^-}^{(1)} \approx 0.2 \text{ GeV}, \quad T_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+K^-}^{(2)} \approx 2.1 \text{ GeV} \quad (218)$$

and the decay width is

$$\Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow KK} = \Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+K^-} + \Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow \bar{K}^0 K^0} \approx 100 \text{ MeV}. \quad (219)$$

Qualitatively, our results do not contradict the experimental data

$$\Gamma_{\hat{a}_0}^{\text{tot}} = 265 \pm 13 \text{ MeV}, \quad BR(\hat{a}_0 \rightarrow KK) : BR(\hat{a}_0 \rightarrow \pi\eta) = 0.88 \pm 0.23. \quad (220)$$

The decay widths of radial excitations of scalar isoscalar mesons are estimated in the same way as shown above:

$$\Gamma_{\hat{\sigma} \rightarrow \pi\pi} \approx \begin{cases} 550 \text{ MeV} (M_{\hat{\sigma}} = 1.3 \text{ GeV}) \\ 460 \text{ MeV} (M_{\hat{\sigma}} = 1.25 \text{ GeV}), \end{cases} \quad (221)$$

$$\Gamma_{\hat{\sigma} \rightarrow \eta\eta} \approx \begin{cases} 24 \text{ MeV} (M_{\hat{\sigma}} = 1.3 \text{ GeV}) \\ 15 \text{ MeV} (M_{\hat{\sigma}} = 1.25 \text{ GeV}), \end{cases} \quad (222)$$

$$\Gamma_{\hat{\sigma} \rightarrow \sigma\sigma} \approx \begin{cases} 6 \text{ MeV} (M_{\hat{\sigma}} = 1.3 \text{ GeV}) \\ 5 \text{ MeV} (M_{\hat{\sigma}} = 1.25 \text{ GeV}), \end{cases} \quad (223)$$

$$\Gamma_{\hat{\sigma} \rightarrow KK} \sim 5 \text{ MeV}, \quad (224)$$

$$\Gamma_{K_0^* \rightarrow K\pi} \approx 300 \text{ MeV}. \quad (225)$$

The heaviest scalar isoscalar meson in our model has the mass 1600 MeV (see Table 3) to be associated with an experimentally found meson state. From experimental data [1], we find two possible candidates for the role of a member of the radially excited meson nonet: $f_0(1500)$ and $f_0(1710)$. The extra meson state can be explained by possible mixing of members of the $\bar{q}q$ meson nonets with a gluon bound state, the glueball. Indeed, on the mass scale, both meson states lie in the region where the hypothetical glueball state is expected to exist. So far as we did not include the glueball into our model (however, we are going to do this in our further works), the picture is not complete. Nevertheless, we are free to

make a hypothesis concerning the contents of $f_0(1500)$ and $f_J(1710)$. We expect that one of these states is mostly a quarkonium with just a negligible admixture of the glueball state whereas the other is essentially mixed with the glueball. The mass splitting that always appears when two or more states mix with each other will either increase or decrease the mass of a quarkonium, depending on the mass of a «bare» (unmixed) glueball state either being smaller or greater than the mass of the quarkonium. After mixing we expect to find the $\bar{q}q$ bound state with the mass 1500 MeV or 1710 MeV.

To decide which of them is the quarkonium with a small content of a glueball state, associated with the radial excitation of $f_0(980)$, we estimate its decay widths for two cases: first for the mass 1710 MeV quarkonium

$$\begin{aligned} \Gamma_{f_0(1710) \rightarrow 2\pi} &\approx 3 \text{ MeV}, & \Gamma_{f_0(1710) \rightarrow 2\eta} &\approx 40 \text{ MeV}, \\ \Gamma_{f_0(1710) \rightarrow \eta\eta'} &\approx 42 \text{ MeV}, & \Gamma_{f_0(1710) \rightarrow KK} &\approx 24 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (226)$$

and then for the mass 1500 MeV quarkonium

$$\begin{aligned} \Gamma_{f_0(1500) \rightarrow 2\pi} &\approx 3 \text{ MeV}, & \Gamma_{f_0(1500) \rightarrow 2\eta} &\approx 20 \text{ MeV}, \\ \Gamma_{f_0(1500) \rightarrow \eta\eta'} &\approx 10 \text{ MeV}, & \Gamma_{f_0(1500) \rightarrow KK} &\approx 20 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (227)$$

The decays of $f_0(1500)$ and $f_0(1710)$ into $\sigma\sigma$ are negligible, so we disregard them. From the experimental data we have:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma}^{\text{tot}} &= 200 - 500 \text{ MeV}, & \Gamma_{f_0(1710)}^{\text{tot}} &= 133 \pm 14 \text{ MeV}, \\ \Gamma_{f_0(1500)}^{\text{tot}} &= 112 \pm 10 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (228)$$

Thus, we can see that in the case of $f_0(1500)$ being a $\bar{q}q$ state there is a deficit in the decay widths whereas for $f_J(1710)$ the result is close to experiment. From this we conclude that the meson $f_J(1710)$ better suits for the role of a member of the $\bar{q}q$ nonets as a radially excited partner for $f_0(980)$ and the meson state $f_0(1370)$ as the first radial excitation of $f_0(400 - 1200)$. As to $f_0(1500)$, the $\bar{q}q$ model works bad for it. This gives us the idea that $f_0(1500)$ is essentially mixed with the glueball state which significantly contributes to its decay width. Our interpretation of $f_0(1500)$ and $f_0(1710)$ is in agreement with other approaches where similar conclusions were made by the K -matrix method [36] and QCD sum rules [37].

The strong decay widths of ground states of scalar mesons were calculated in paper [32] in the framework of the standard NJL model with 't Hooft interaction where it was shown that a strange scalar meson state with a mass about 960 MeV decays into $K\pi$ with the rate

$$\Gamma_{K_0^*(960) \rightarrow K\pi} = \frac{3}{Z_\pi M_{K_0^*}^3} \left(\frac{m_u m_s}{2F_\pi} \right)^2 \Phi(M_{K_0^*}, M_K, M_\pi) \approx 360 \text{ MeV}. \quad (229)$$

Table 4. $\eta(1295)$ and $\eta(1440)$ decay modes

	$a_0\pi$	$\eta\sigma$	$\eta\pi\pi$	$K\bar{K}\pi$	KK^*	Γ^{tot}
$\eta(1295)$	3 MeV	30 MeV	4 MeV	5 MeV	—	48 MeV
$\eta(1440)$	10 MeV	3 MeV	6 MeV	26 MeV	70 keV	45 MeV

By comparing this result with the analysis of phase shifts given in [5] where an evidence for existence of a scalar strange meson with the mass equal to 905 ± 50 MeV and decay width 545 ± 170 MeV is shown, we identify the state $K_0^*(960)$ as a member of the ground scalar meson nonet. The state $K_0^*(1430)$ is thereby its first radial excitation.

4.4. Strong Decays of $\eta(1295)$ and $\eta(1440)$. The mesons $\eta(1295)$ and $\eta(1440)$ have common decay modes: $a_0\pi$, $\eta\pi\pi$, $\eta(\pi\pi)_{S\text{-wave}}$, $K\bar{K}\pi$, moreover, the heavier pseudoscalar $\eta(1440)$ decays also into KK^* . For the processes with two secondary particles, the calculations of decay widths are done in the same way as shown in the previous Subsection, by calculating the corresponding triangle diagrams.

Let us consider the decay $\eta \rightarrow a_0\pi$. The corresponding amplitude is of the same form as given in (211) for decays of the type $\sigma \rightarrow \varphi\varphi$. It can also be divided into two parts $T^{(1)}$ and $T^{(2)}$ which in our approximation are constant and momentum-dependent in the sense explained in the previous Subsection (see (212) and the text below):

$$T_{\hat{\eta} \rightarrow a_0\pi}^{(1)} \approx 0.3 \text{ GeV}, \quad T_{\hat{\eta} \rightarrow a_0\pi}^{(2)} \approx -1 \text{ GeV}. \quad (230)$$

Therefore, the decay width is

$$\Gamma_{\hat{\eta} \rightarrow a_0\pi} \approx 3 \text{ MeV}. \quad (231)$$

The decay $\hat{\eta} \rightarrow \eta(\pi\pi)_{S\text{-wave}}$ is nothing else than the decay $\hat{\eta} \rightarrow \eta\sigma \rightarrow \eta(\pi\pi)_{S\text{-wave}}$ where we have the σ meson in the final state decaying then into pions in the S wave. We simply calculate $\hat{\eta} \rightarrow \eta\sigma$, with σ as a decay product.

The calculation of decay widths for the rest of the decay modes with two particles in the final state is similar and the result is given in Table 4.

The decay $\hat{\eta}' \rightarrow KK^*$ differs from the other modes due to the strange vector meson among the decay products. In this case we have

$$\begin{aligned} T_{\hat{\eta}' \rightarrow KK^*}^\mu &= 4(p_1 + p_2)^\mu \left([g_u g_K g_{K^*} I_2(m_u, m_s) + \dots] - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{2} [g_s g_K g_{K^*} I_2(m_u, m_s) + \dots] \right), \end{aligned} \quad (232)$$

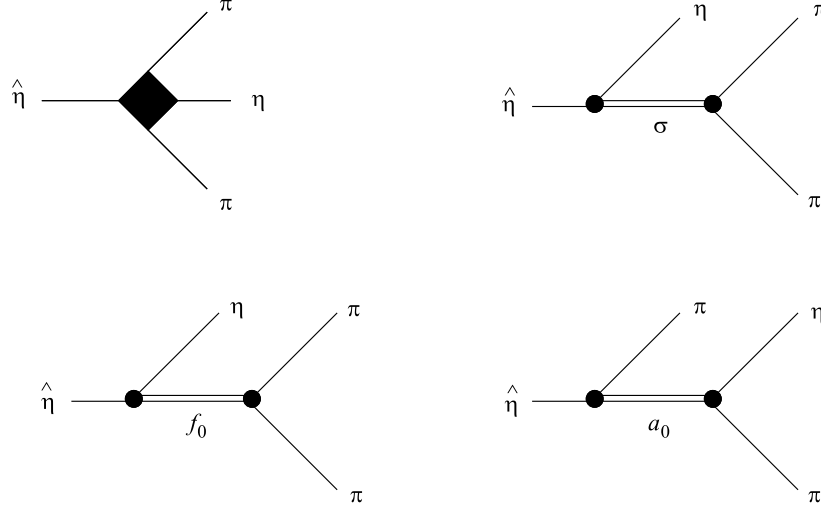


Fig. 6. Diagrams describing the decay $\hat{\eta} \rightarrow \eta\pi\pi$. The black box stands for the sum of «box» diagrams represented by one-loop quark graphs with four meson vertices. The rest of the diagrams is a set of pole graphs with σ , f_0 , and a_0 scalar resonances. The diagram with a_0 is to be taken into account for two channels (due to the exchange of pions momenta). There are analogous contributions from radially excited resonances

where p_1 is the momentum of $\hat{\eta}'$; p_2 , the momentum of K ; and dots stand for the terms with form factors (not displayed here). These two parts are of the same order of magnitude and differ in sign and therefore cancel each other, which reduces the decay width up to tens of keV:

$$\Gamma_{\hat{\eta}' \rightarrow K K^*} \approx 70 \text{ keV}. \quad (233)$$

When there are three particles in the final state, poles appear in amplitudes, related to intermediate scalar resonances. As is well known from $\pi\pi$ scattering, these diagrams can play a crucial role in the description of such processes. So, in addition to the «box» diagram we take account of the diagrams with poles provided by σ , f_0 , and a_0 resonances (see Fig. 6). Here we neglect the momentum dependence in the box diagram approximating it by a constant. The amplitude is thereby

$$\begin{aligned} T_{\hat{\eta} \rightarrow \eta\pi\pi} = & B + \frac{c_{\sigma\eta\hat{\eta}}c_{\sigma\pi\pi}}{M_{\sigma}^2 - s - iM_{\sigma}\Gamma_{\sigma}} + \frac{c_{f_0\eta\hat{\eta}}c_{f_0\pi\pi}}{M_{f_0}^2 - s - iM_{f_0}\Gamma_{f_0}} + \\ & + \frac{c_{a_0\hat{\eta}\pi}c_{a_0\eta\pi}}{M_{a_0}^2 - t - iM_{a_0}\Gamma_{a_0}} + \frac{c_{a_0\hat{\eta}\pi}c_{a_0\eta\pi}}{M_{a_0}^2 - u - iM_{a_0}\Gamma_{a_0}} + \text{excited}, \end{aligned} \quad (234)$$

where B is given by the «box » diagram:

$$B = 12 \left(\frac{m_u}{F_\pi} \right)^2 Z^{-1} [R_{11} R_{12} + \dots] \quad (235)$$

where dots stand for the contribution from diagrams with form factors, and R_{ij} are taken from Table 2 (for η and $\hat{\eta}$). The coefficients $c_{\sigma\varphi\varphi}$ represent the amplitudes describing decays of a scalar to a couple of pseudoscalars; the calculation of them was discussed in the previous Subsection. In general, they are momentum-dependent.

The kinematic invariants s , t , and u are Mandelstam variables: $s = (p_{\pi_1} + p_{\pi_2})^2$, $t = (p_\eta + p_{\pi_1})^2$, $u = (p_\eta + p_{\pi_2})^2$.

The «excited» terms are contributions from excited scalar resonances of a structure similar to that for the ground states. The decay widths of processes $\hat{\eta} \rightarrow \eta\pi\pi$ and $\hat{\eta}' \rightarrow \eta\pi\pi$ are thereby

$$\Gamma_{\hat{\eta} \rightarrow \eta\pi\pi} \approx 4 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\hat{\eta}' \rightarrow \eta\pi\pi} \approx 6 \text{ MeV}. \quad (236)$$

For the processes $\hat{\eta} \rightarrow K\bar{K}\pi$ and $\hat{\eta}' \rightarrow K\bar{K}\pi$ we approximate their decay widths by neglecting the pole-diagram contribution because it turns out that the box» is dominant here. The result is given in Table 4.

Unfortunately, the branching ratios for different decay modes of $\eta(1295)$ and $\eta(1440)$ are not well known from experiment; so one can only find their total decay widths

$$\Gamma_{\eta(1295)}^{\text{tot}} = 53 \pm 6 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\eta(1440)}^{\text{tot}} = 50 - 80 \text{ MeV}, \quad (237)$$

which is in satisfactory agreement with our results.

Strong and electromagnetic decays of the ground states of $\hat{\eta}$ and $\hat{\eta}'$ mesons were investigated within the framework of the standard NJL model in [9,10] and we do not consider them here.

5. CONCLUSION

Let us summarize and discuss main features of the nonlocal NJL model proposed here and basic results obtained in our work.

A simple generalization of the NJL model to a nonlocal four-quark interaction of the separable type was suggested to describe first radial excitations of the scalar, pseudoscalar, and vector mesons. The nonlocality was introduced into quark currents by means of simple form factors, while preserving the local form of the ground and excited meson states. On the one hand, form factors can be written in a relativistic invariant form. On the other hand, the form factor

parameters can be chosen so that the gap equations keep the conventional form, which leads to constant constituent quark masses and quark condensates. As a result, all low energy theorems are fulfilled in our model in the chiral limit (see Section 2). Therefore, the introduction of excited meson states does not destroy those attractive features which the NJL model is characteristic of.

The model contains six basic and seven additional form factor parameters. The basic ones are defined like in the standard (local) NJL model. They are the quark masses $m_u = m_d, m_s$, the cut-off parameter Λ_3 , and three quark coupling constants G, G_V, K . To determine them, we used six input quantities: $F_\pi, g_\rho, M_\pi, M_K, M_\rho$, and the mass difference $M_\eta^2 - M_{\eta'}^2$. Then, we predicted the masses of $\eta, \eta', K_0^*, \varphi$ mesons and also the masses of the scalar and axial-vector meson nonets. The weak decay constant F_K and all strong coupling meson constants are calculated.

Upon the excited meson states are included, a great number of form factors appears in the model. They are necessary to describe radial excitations of the three meson nonets: scalar, pseudoscalar and vector. Each form factor contains two parameters: the external parameter c_{qq}^U characterizing to what extent the interaction of excited states is stronger than that of the ground ones and the internal (slope) parameter d_{qq} determining the shape of the wave function of an excited meson state.

We give an unambiguous definition of the slope parameters for scalar mesons from the condition that the excited states do not contribute to quark condensates. Then, we assume the slope parameters to be the same for any sort of meson fields. Moreover, in favor of the global chiral symmetry, we put the scalar meson form factors equal to the pseudoscalar meson ones. As a result, only seven independent parameters are left: $c_{uu}^\pi, c_{us}^K, c_{uu}^{\eta, \eta'}, c_{ss}^{\eta, \eta'}, c_{uu}^{\rho, \omega}, c_{us}^{K_0^*}, c_{ss}^\varphi$. They are fixed by masses of radially excited pseudoscalar and vector mesons. When this procedure is completed, we are able to predict the masses of scalar mesons and identify them with experimentally observed meson states.

The major results obtained in our work are:

- 1) A nonlocal chiral quark model with a quark interaction of the separable type was developed to describe the ground and first radially excited states of mesons represented by local fields. In this model, the quark condensate and gap equations are conserved in the standard form, and all low-energy theorems are fulfilled.
- 2) In a realistic $U(3) \times U(3)$ version of the model, the $U_A(1)$ problem is solved by introducing the 't Hooft interaction. The mixing of pseudoscalar isoscalar meson states, the ground η, η' , and the radially excited $\hat{\eta}, \hat{\eta}'$, due to the 't Hooft interaction, was taken into account.
- 3) In the framework of the proposed model, a satisfactory description of the

masses of ground and first radially excited pseudoscalar and vector meson states was obtained.

- 4) The mass spectrum for scalar meson nonets (ground and first radially excited) is predicted on the basis of the proposed model and with the assumption on the form factors, based on the global chiral symmetry, that the form factors for scalar mesons are the same as for the pseudoscalars ones.
- 5) The members of quark–antiquark nonets, whose physics the proposed model is intended to describe, are identified with twenty seven physically observed scalar, pseudoscalar, and vector meson states.
- 6) The weak decay constants $F_{\pi'}$, F_K , and $F_{K'}$ are estimated.
- 7) The widths of main strong decays of radially excited scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets are estimated. The results are in satisfactory agreement with experimental data.

Let us make some comments on the identification of the meson nonets' members. While it seems clear how to identify the members of pseudoscalar and vector meson nonets, the scalar mesons require more words to say. From our calculations we come to the following interpretation of $f_0(1370)$, $f_J(1710)$, $a_0(1470)$, $K_0^*(1430)$ mesons: we consider them as the first radial excitations of the ground states $f_0(400 - 1200)$, $f_0(980)$, $a_0(980)$, and $K_0^*(960)$ *.

In this picture, however, no place is reserved for the $f_0(1500)$ meson. To include it, we need an additional meson state in our model that is not a bound $\bar{q}q$ system (there is no vacancy in the considered multiplets) but rather it is a bound colorless gluon state [38]. There are many reasons that the state $f_0(1500)$ is essentially mixed with a glueball [36,37]. However, in this paper we did not take the glueball into account. Therefore, we cannot say how much it can affect $\bar{q}q$ -meson states. However, we are going to tackle this problem in our further work. In the present paper, we obtain a bound quark–antiquark state with the mass about 1600 MeV, so we have to decide which of the observed meson states, $f_0(1500)$ or $f_J(1710)$, is to be associated with this member of the nonet of the radially excited scalar mesons in our model. We have chosen $f_J(1710)$. The reason for this choice is based both upon the results obtained in Refs. 36, 37 and on our estimates of the decay widths discussed in Section 4.

Concerning the ground state $a_0(980)$, in the framework of our quark–antiquark model, we have a mass deficit for this meson, 830 MeV instead of 980 MeV.

*The light strange scalar of a mass about 900 MeV is not included into the summary tables of PDG [1]. However, there are evidences from the phase shift analysis [5] that a state (known as $\kappa(900)$) with the mass 950 MeV does exist.

We suspect that the deficit is caused by four-quark component in this state which we did not take into account [39, 40].

In conclusion, we would like to outline further steps to improve our model. First of all, a glueball state can be included into the effective Lagrangian. This will allow us to correct the description of the scalar states $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_0(1710)$ and include $f_0(1500)$ (presumed to be essentially mixed with a glueball) into the whole picture. The mixing of all the states will play an important role in this case. By now, we took account only of the mixing among $f_0(400 - 1200)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_0(1710)$ and among η , η' , $\hat{\eta}$, $\hat{\eta}'$. Nevertheless, our investigation revealed that the meson states $\eta(1300)$, $\eta(1470)$, $f_0(1370)$, $a_0(1470)$, $f_0(1710)$, $K_0^*(1430)$ are the first radial excitations of $\eta(590)$, $\eta(950)$, $f_0(400 - 1200)$, $a_0(980)$, $f_0(980)$, $K_0^*(960)$.

Second, the absence of quark confinement is still a common flaw of NJL-like models with a local quark interaction. There are several approaches suggested to find a solution of this problem. Among them there are various potential models, models where the pole in the quark propagator is excluded [41], etc. We are going to continue to work with our own approach which was suggested in Ref. 42.

ACKNOWLEDGMENT

We would like to thank Dr. C. Weiss who made a large contribution to fundamentals of this model and also our collaborators Prof. D. Ebert and Dr. M. Nagy. We are grateful also to Prof. S.B. Gerasimov for fruitful discussions. This work has been supported by RFBR Grant 98-02-16185.

Appendix

A. COEFFICIENTS OF THE FREE PART OF THE EFFECTIVE LAGRANGIAN FOR SCALAR ISOSCALAR MESONS

The functions $K_{\sigma(\varphi),ij}^{[a,b]}$ introduced in Subsec. 3 of Sec. 4 (131) are defined as follows

$$\begin{aligned} K_{\sigma(\varphi),11}^{[a,a]}(P) &= Z_{\sigma(\varphi),1}^a(P^2 - (m_q^a \pm m_{q'}^a)^2 - M_{\sigma^a(\varphi^a),1}^2), \\ K_{\sigma(\varphi),22}^{[a,a]}(P) &= Z_{\sigma(\varphi),2}^a(P^2 - (m_q^a \pm m_{q'}^a)^2 - M_{\sigma^a(\varphi^a),2}^2), \\ K_{\sigma(\varphi),12}^{[a,a]}(P) &= K_{\sigma(\varphi),21}^{[a,a]}(P) = \gamma_{\sigma(\varphi)}^a(P^2 - (m_q^a \pm m_{q'}^a)^2), \quad (238) \\ K_{\sigma(\varphi),11}^{[8,9]}(P) &= K_{\sigma(\varphi),11}^{[9,8]}(P) = \left(G^{(\mp)}\right)_{89}^{-1}, \\ K_{\sigma(\varphi),12}^{[8,9]}(P) &= K_{\sigma(\varphi),12}^{[9,8]}(P) = K_{\sigma(\varphi),21}^{[8,9]}(P) = 0, \\ K_{\sigma(\varphi),21}^{[9,8]}(P) &= K_{\sigma(\varphi),22}^{[8,9]}(P) = K_{\sigma(\varphi),22}^{[9,8]}(P) = 0, \end{aligned}$$

where the «bare» meson masses are

$$\begin{aligned}
M_{\sigma^8(\varphi^8),1}^2 &= (Z_{\sigma(\varphi),1}^8)^{-1} \left((G^{(\mp)})_{88}^{-1} - 8I_1(m_u) \right), \\
M_{\sigma^9(\varphi^9),1}^2 &= (Z_{\sigma(\varphi),1}^9)^{-1} \left((G^{(\mp)})_{99}^{-1} - 8I_1(m_s) \right), \\
M_{\sigma^8(\varphi^8),2}^2 &= (Z_{\sigma(\varphi),2}^8)^{-1} \left(\frac{1}{G} - 8I_1^{ff}(m_u) \right), \\
M_{\sigma^9(\varphi^9),2}^2 &= (Z_{\sigma(\varphi),2}^9)^{-1} \left(\frac{1}{G} - 8I_1^{ff}(m_s) \right).
\end{aligned} \tag{239}$$

In the case of isoscalar mesons it is convenient to combine the scalar and pseudoscalar fields into 4-vectors

$$\Phi = (\varphi_1^{8r}, \varphi_2^{8r}, \varphi_1^{9r}, \varphi_2^{9r}), \quad \Sigma = (\sigma_1^{8r}, \sigma_2^{8r}, \sigma_1^{9r}, \sigma_2^{9r}), \tag{240}$$

and introduce 4×4 matrix functions $\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),ij}$, instead of old $K_{\sigma(\varphi),ij}^{[a,b]}$, where indices i, j run from 1 through 4. This allows us to rewrite the free part of the effective Lagrangian which then, with the meson fields renormalized, looks as follows

$$\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma, \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 (\Sigma_i \mathcal{K}_{\Sigma,ij}(P) \Sigma_j + \Phi_i \mathcal{K}_{\Phi,ij}(P) \Phi_j) \tag{241}$$

and the functions $\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),ij}$ are

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),11}(P) &= P^2 - (m_u \pm m_u)^2 - M_{\sigma^8(\varphi^8),1}^2, \\
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),22}(P) &= P^2 - (m_u \pm m_u)^2 - M_{\sigma^8(\varphi^8),2}^2, \\
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),33}(P) &= P^2 - (m_s \pm m_s)^2 - M_{\sigma^9(\varphi^9),1}^2, \\
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),44}(P) &= P^2 - (m_s \pm m_s)^2 - M_{\sigma^9(\varphi^9),2}^2, \\
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),12}(P) &= \mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),21}(P) = \Gamma_{\sigma_u(\eta_u)}(P^2 - (m_u \pm m_u)^2), \\
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),34}(P) &= \mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),43}(P) = \Gamma_{\sigma_s(\eta_s)}(P^2 - (m_s \pm m_s)^2), \\
\mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),13}(P) &= \mathcal{K}_{\Sigma(\Phi),31}(P) = (Z_{\sigma(\varphi),1}^8 Z_{\sigma(\varphi),2}^9)^{-1/2} (G^{(\mp)})_{89}^{-1}.
\end{aligned} \tag{242}$$

Now, to transform (241) to the conventional form, one should just diagonalize a 4-dimensional matrix, which is better to do numerically.

B. THE CALCULATION OF THE AMPLITUDES FOR DECAYS OF THE EXCITED SCALAR MESON $\hat{a}_0$

Here we collect some instructive formulae that display a part of the details of calculations made in this work. Let us demonstrate how the amplitude of the

decay $\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi$ is obtained. The mixing coefficients are taken from Table 1. Moreover, the diagrams where pion vertices contain form factors are neglected because, as one can see from Table 1, their contribution is significantly reduced:

$$\begin{aligned}
 T_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi}^{(1)} &= 4 \frac{m_u^2}{F_\pi} \left\{ 0.82 \cdot 0.71 Z^{-1/2} \frac{I_2(m_u)}{I_2(m_u)} - \right. \\
 &\quad - \left(1.17 \cdot 0.71 Z^{-1/2} - 0.82 \cdot 0.11 \right) \frac{I_2^f(m_u)}{\sqrt{I_2(m_u) I_2^{ff}(m_u)}} - \\
 &\quad \left. - 1.17 \cdot 0.11 \frac{I_2^{ff}(m_u)}{I_2^{ff}(m_u)} \right\} \approx 0.2 \text{ GeV}, \quad (243)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi}^{(2)} &= 2 \frac{m_u^2}{F_\pi} (M_{\hat{a}_0}^2 - M_\eta^2 - M_\pi^2) \left\{ 0.82 \cdot 0.71 Z^{-1/2} \frac{I_3(m_u)}{I_2(m_u)} - \right. \\
 &\quad - \left(1.17 \cdot 0.71 Z^{-1/2} - 0.82 \cdot 0.11 \right) \frac{I_3^f(m_u)}{\sqrt{I_2(m_u) I_2^{ff}(m_u)}} - \\
 &\quad \left. - 1.17 \cdot 0.11 \frac{I_3^{ff}(m_u)}{I_2^{ff}(m_u)} \right\} \approx 3.5 \text{ GeV}. \quad (244)
 \end{aligned}$$

The decay width thereby is

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi} &= \frac{|T_{\hat{a}_0 \rightarrow \eta\pi}|^2}{16\pi M_{\hat{a}_0}^3} \times \\
 &\times \sqrt{M_{\hat{a}_0}^4 + M_\eta^4 + M_\pi^4 - 2(M_{\hat{a}_0}^2 M_\eta^2 + M_{\hat{a}_0}^2 M_\pi^2 + M_\eta^2 M_\pi^2)} \approx 160 \text{ MeV}. \quad (245)
 \end{aligned}$$

Here $I_2(m_u) = 0.04$, $I_2^f(m_u) = 0.014c$, $I_2^{ff}(m_u) = 0.015c^2$, $I_3(m_u) = 0.11 \text{ GeV}^{-2}$, $I_3^f(m_u) = 0.07c \text{ GeV}^{-2}$, $I_3^{ff}(m_u) = 0.06c^2 \text{ GeV}^{-2}$ and c is the external form factor parameter factored out and cancelled in the ratios of integrals.

For the decay into strange mesons we obtain (see Fig. 1)

$$\begin{aligned}
 T_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+ K^-} &= C_K \left(-\frac{iN_c}{16\pi^2} \right) \times \\
 &\times \int d^4k \frac{\text{tr}[(m_u + \mathbf{k} + \mathbf{p}_1)\gamma_5(m_s + \mathbf{k})\gamma_5(m_u + \mathbf{k} - \mathbf{p}_2)]}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - (k - p_1)^2)(m_u^2 - (k - p_2)^2)} \approx \\
 &\approx 2C_K \{ (m_s + m_u)I_2(m_u) - \Delta I_2(m_u, m_s) - \\
 &\quad - [m_s(M_{\hat{a}_0}^2 - 2M_K^2) - 2\Delta^3]I_3(m_u, m_s) \}, \quad (246)
 \end{aligned}$$

where $\Delta = m_s - m_u$ and

$$I_3(m_u, m_s) = -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda_3} \frac{d^4 k}{(m_u^2 - k^2)^2 (m_s^2 - k^2)}. \quad (247)$$

The coefficient C_K absorbs the Yukawa coupling constants and some structure coefficients. The integral $I_2(m_u, m_s)$ is defined by (102). This is only the part of the amplitude without form factors. The complete amplitude of this process is a sum of contributions which contain also the integrals $I_2^{f..f}$ and $I_3^{f..f}$ with form factors. Thus, the amplitude is

$$T_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+ K^-} = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (248)$$

$$T^{(1)} = \frac{m_u + m_s}{2F_K} \{ (m_s + m_u) \cdot 0.13 - \Delta \cdot 0.21 \} \approx 0.2 \text{ GeV}, \quad (249)$$

$$T^{(2)} = \frac{m_u + m_s}{2F_K} \{ [m_s(M_{a_0}^2 - 2M_K^2) - 2\Delta^3] \cdot 1 \text{ GeV}^{-2} \} \approx 2.3 \text{ GeV}, \quad (250)$$

$$F_K = 1.2F_\pi.$$

The decay width therefore is evaluated to be

$$\Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow K^+ K^-} = \Gamma_{\hat{a}_0 \rightarrow \bar{K}^0 K^0} \approx 50 \text{ MeV}. \quad (251)$$

REFERENCES

1. **Review of Particle Physics** — Eur. Phys. J. C, 1998, v. 3, p. 1.
2. **Gerasimov S. B., Govorkov A. B.** — Z. Phys. C, 1985, v. 29, p. 61;
Gerasimov S. B., Govorkov A. B. — Z. Phys. C, 1986, v. 32, p. 405;
Gerasimov S. B., Govorkov A. B. — Z. Phys. C, 1987, v. 36, p. 435.
3. **Törnqvist N.** — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, p. 624;
Lanik J. — Phys. Lett. B, 1993, v. 306, p. 139.
4. **Dmitrašinović V.** — Phys. Rev. C, 1996, v. 53, p. 1383.
5. **Ishida S., Ishida M., Ishida T., Takamatsu K., Tsuru T.** — Prog. Theor. Phys., 1997, v. 98, p. 621;
Ishida M. Y., Ishida S. — In: HADRON'97, 4th Int. Conf. on Hadr. Spectr., 1997; hep-ph/9712231.
6. **Scadron M.D.** — Phys. Rev. D, 1982, v. 26, p. 239.
7. **Callan C. G., Coleman S., Wess J., Zumino B.** — Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2247.
8. **Volkov M. K., Ebert D.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1982, v. 36, p. 736;
Ibid. — Z. Phys. C, 1983, v. 16, p. 205.
9. **Volkov M. K.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1984, v. 157, p. 282.
10. **Volkov M. K.** — Sov. J. Part. Nucl., 1986, v. 17, p. 186.
11. **Ebert D., Reinhardt H.** — Nucl. Phys. B, 1986, v. 271, p. 188.
12. **Roberts C. D., Cahill R. T., Praschifka J.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1988, v. 188, p. 20.

13. **Le Yaouanc A., Oliver L., Pène O., Raynal J.-C.** — Phys. Rev. D, 1984, v. 29, p. 1233;
Le Yaouanc A. et al. — Phys. Rev. D, 1985, v. 31, p. 137.
14. **Pervushin V. N. et al.** — Fortschr. Phys., 1990, v. 38, p. 333;
Kalinovsky Yu. L. et al. — Few-Body Systems, 1991, v. 10, p. 87.
15. **Andrianov A. A., Andrianov V. A.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1993, v. 8, p. 1981;
Andrianov A. A., Andrianov V. A. — Nucl. Phys. Proc. Suppl. BC, 1995, v. 39, p. 257;
Andrianov A. A., Andrianov V. A., Yudichev V. L. — Theor. Math. Phys., 1996, v. 108, p. 1069.
16. **Kalinovsky Yu. L., Kaschluhn L., Pervushin V. N.** — Phys. Lett. B, 1989, v. 231, p. 288.
17. **Volkov M. K., Weiss C.** — Phys. Rev. D, 1997, v. 56, p. 221.
18. **Feynman R. P., Kislinger M., Ravndal F.** — Phys. Rev. D, 1971, v. 3, p. 2706.
19. **Ebert D., Kalinovsky Yu. L., Münchow L., Volkov M. K.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1993, v. 8, p. 1295.
20. **Kalinovsky Yu. L., Weiss C.** — Z. Phys. C, 1994, v. 63, p. 275.
21. **Ito H., Buck W. W., Gross F.** — Phys. Rev. C, 1992, v. 45, p. 1918.
22. **Gross F., Riska D. O.** — Phys. Rev. C, 1987, v. 36, p. 1928.
23. **Ito H., Buck W. W., Gross F.** — Phys. Rev. C, 1991, v. 43, p. 2483.
24. **Gell-Mann M., Levy M.** — Nuovo Cim., 1960, v. 16, p. 53.
25. See, *e.g.*, **Dominguez C. A.** — Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 2313, and references therein.
26. **Jaffe R. L., Mende P. F.** — Nucl. Phys. B, 1992, v. 369, p. 189.
27. **Celenza L. S. et al.** — Phys. Rev. D, 1995, v. 51, p. 3638;
Celenza, L. S. Huang B., Wang H., Shakin C. M. — Preprint Brooklyn College, City Univ., New York, BCCNT:99/011/277;
Huang B., Li X.-D., Shakin C. M. — Phys. Rev. C, 1998, v. 58, p. 3648;
Celenza L. S., Huang B., Shakin C. M. — Phys. Rev. C, 1999, v. 59, p. 1041;
Celenza L. S., Li X.-D., Shakin C. M. — Phys. Rev. C, 1997, v. 56, p. 3326.
28. **Volkov M. K.** — Phys. At. Nucl., 1997, v. 60, p. 1920.
29. **Volkov M. K., Yudichev V. L.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1999, v.14, p.4621.
30. **Volkov M. K., Yudichev V.L.** — hep-ph/9905368; Phys. At. Nucl., 2000, v.63, No.8, in press.
31. **Vogl H., Weise W.** — Progr. Part. Nucl. Phys., 1991, v. 27, p. 195;
Klevansky S. P. — Rev. Mod. Phys., 1992, v. 64, p. 649.
32. **Volkov M. K., Nagy M., Yudichev V. L.** — Nuovo Cim. A, 1999, v. 112, p.225; hep-ph/9804347.
33. **Volkov M. K., Ebert D., Nagy M.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1998, v. 13, p. 5443.
34. **Volkov M. K., Ebert D., Yudichev V. L.** — JINR Rapid Comm., 1998,6[92]-98, p. 5; hep-ph/9810470;
Volkov M. K., Yudichev V. L. — Phys. At. Nucl., 2000, v. 63, No. 2, in press.
35. **Clegg A. B., Donnachie A.** — Z. Phys. C, 1994, v. 62, p. 455.
36. **Anisovich V. V., Bugg D. V., Sarantsev A. V.** — Phys. Rev. D, 1998, v. 58, p. 111503.
37. **Narison S.** — Nucl. Phys. B, 1998, v. 509, p. 312.
38. **Kusaka K., Volkov M. K., Weise W.** — Phys. Lett. B, 1993, v. 302, p. 145;
Jaminon M., Van den Bossche B. — Nucl. Phys. A, 1997, v. 619, p. 285.
39. **Jaffe R.L.** — Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 267.
40. **Achasov N.N., Devyanin S.A., Shestakov G.N.** — Usp. Fiz. Nauk., 1984, v. 142, p. 361.
41. **Ebert D., Feldmann T., Reinhardt H.** — Phys. Lett. B, 1996, v. 388, p. 154.
42. **Blaschke D., Bureau G., Volkov M. K., Yudichev V. L.** — Preprint Rostock Univ. MPG-VT-UR 178/98; hep-ph/9812503;
Volkov M. K., Yudichev V. L. — Phys. At. Nucl., 2000, v. 63, No. 2, in press.

СИГНАЛ, ДАННЫЕ И ИНФОРМАЦИЯ В ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

С.Г.Басиладзе

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

В обзоре рассматриваются вопросы получения информации о физических явлениях. Большое внимание уделено анализу процесса отображения — как воздействию и восприятию сигналов, так и их последующей дискретизации. Исходя из информационных пороговых и предельных соотношений обсуждается возможная форма и параметры сигналов в процессах взаимодействия в микромире.

Поскольку воспринимаемый сигнал принципиально неточно определен, показано, как получить основные соотношения о количестве данных и содержащейся в них информации на основе «анализа целых чисел», не прибегая к классическим математическим понятиям бесконечно малых и бесконечных процедур. Кратко рассмотрены основные практические приемы кодирования информации.

The problems of information getting about the physical phenomena are described. The analysis of a signal affecting from a source side and signal sensing from receiver side is the first point analysed in detail, the second one is the signal discretization rules. The «micro»-signal parameters and their possible shape in the microcosm are discussed as it follows from the so-called «threshold» and «up-limit» boundary informatics relations.

It is shown how to get the main equations for the amount of data and information they contain basing on the analysis of «integer variables» (without using formal mathematics infinitesimal values and infinite procedures).

The main practical methods of data conversion (coding) to the information are described shortly.

ВВЕДЕНИЕ

Понятия энтропии, сигнала и информации достаточно давно известны, подробно исследованы и описаны в большом числе публикаций [1–35]. Попробуем, однако, провести небольшой эксперимент и предложить читателю ответить на следующие простые вопросы:

1) Информация, как известно, измеряется в «кусочках» — битах: 1,2,3,...; может ли количество информации, получаемое при одном измерении, быть много меньше 1 бита?

2) Может ли в совокупности равномерно распределенных (равновероятных) отсчетов содержаться пренебрежимо малое количество информации?

3) Можно ли в реальном времени передать по линии связи сигнал с полосой частот существенно большей, чем полоса пропускания линии?

4) Увеличится ли количество информации, если в тексте сообщения случайным образом переставить буквы местами, т.е. превратить его в шум?

Значительная доля ошибочных ответов «нет», дающихся обычно на эти вопросы, заставляет задуматься, почему возникают подобные неточности и ошибки (а список тестовых вопросов легко продолжить), когда речь заходит об информации. Можно указать на следующие причины:

а) разбросанность сведений, касающихся информационных категорий, по различным естественным дисциплинам (теория связи, статистическая физика, квантовая механика и т.д.), в результате чего у заинтересованного, но профессионально узко ориентированного читателя не вырабатывается набора понятий, обладающего необходимой начальной полнотой;

б) сложный, с громоздкой математикой язык описания (чем особенно грешат отечественные издания), призванный создать иллюзию строгости изложения, по существу, частных вопросов (например, только стационарного поведения моделей), ограниченно адекватных процессам реального мира;

в) неправомерный перенос частных суждений на более общие положения, возникающий как следствие первых двух причин.

Целью настоящей работы было желание обобщить материал, содержащийся в литературе, и дать по возможности полное, простое и последовательное изложение теоретических закономерностей получения измерительной информации в ядерной физике. Несмотря на большую историю, далеко не все в этой области нашло свое разрешение. Например, до сих пор неясно, что представляет из себя сигнал в микромире. Здесь сделана попытка хотя бы частично осветить подобные вопросы и привлечь внимание к их решению.

Анализ литературных источников имел также цель — показать основные информационные положения и связи между ними с тех сторон, которые обычно остаются в тени; вследствие этого принятый способ изложения и, частично, терминология не всегда совпадают с традиционными.

Отличительные черты и понятия информатики. Имеется определенное сходство между математикой и информатикой. Если остальные естественные науки имеют предметно определенные области исследований (физика, химия, астрономия), то математика и информатика выражают общие численные и логические закономерности в явлениях природы и деятельности человека. Разница между ними, однако, в том, что если математические модели в значительной мере умозрительны (они не обязаны реально существовать), то информационные модели строятся «по правилам» реального мира. Так, аппарат классического математического анализа базируется на понятии бесконечно малой величины и процедуре «предельного перехода», когда то или иное определение (например, иррационального числа) вводится как устанавливающее значение определяющей функции на бесконечном числе (бесконечно малых) шагов. В этом «умении обращаться с бесконечностями» и состоит, по словам Пуанкаре, могущество математики.

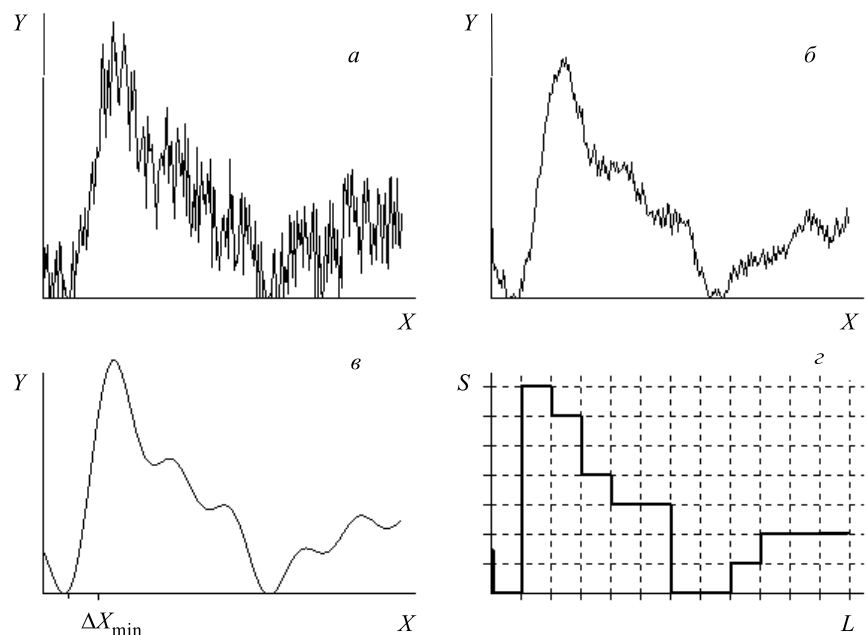


Рис. 1. Сигнал как отображение реально происходящих процессов или явлений: а) сигнал при наличии шумов; б) фильтрация шума в сигнале медленным регистратором (интегрируются 20 предыдущих значений); в) исходная математическая функция $y(x)$; г) дискретизованная логическая функция $S(L)$

Информатика же изначально имеет дело лишь с ограниченными и принципиально неточно определенными величинами. Приведем простой пример: всегда имеющиеся (но, конечно, допустимые по величине) погрешности вычислений на компьютере не влияют на сущность полученного результата.

Аналоговое отображение того или иного процесса или явления в реальном масштабе времени можно назвать сигналом или функцией отображения. Понятие сигнала подразумевает определенную процедуру воздействия со стороны источника и процедуру восприятия со стороны приемника информации. Воспринимаемый сигнал (см.рис.1) никогда точно не соответствует сигналу источника в силу ряда причин:

1) несоответствие характеристик приемника и источника (например, сигнал источника может нести гораздо больше информации, чем способен воспринять приемник);

2) даже при оптимальном согласовании характеристик часть сигнала «расходуется на обеспечение» процесса восприятия;

3) процесс воздействия сигнала часто бывает не изолированным от других случайных по отношению к нему процессов (т.е. шумов);

4) сам источник, особенно в микромире, может привносить внутреннюю неопределенность (внутренний шум), которая «размывает» воспринимаемый сигнал.

Принципиальная допустимость разброса сигналов делает (см. рис.1,2) возможной процедуру дискретизации, т.е. введения фиксированных, базовых состояний функции отображения, отстоящих друг от друга на интервалы, сопоставимые с величиной разброса. Поскольку указанные интервалы имеют определенные размеры, число состояний аргумента функции и самой функции отображения оказывается конечным. Ограниченность числа состояний позволяет ввести указатель на каждое из них, т.е. код состояния. Наиболее экономичная система указателей на весь набор состояний строится по древовидному, иерархическому принципу последовательного деления на группы, подгруппы и т.д., в результате чего длина указателя есть логарифм общего числа состояний. Полученное дискретное отображение выглядит как набор знаков, чаще всего цифровых, которые принято называть данными (измерения, эксперимента).

Коды состояний, повторяющихся чаще других, занимают основной объем в данных. Принцип минимума усилий — «клади ближе то, что нужно чаще» — подсказывает, что для сокращения общего объема данных надо:

а) использовать начальное знание или знание, приобретенное в процессе восприятия, для выделения интенсивно повторяющихся состояний;

б) использовать коды переменной длины — меньшей для более интенсивно повторяющихся состояний или вводить макросы — группы повторяющихся сочетаний состояний.

Достижимый в пределе код минимально возможного объема и является информацией.

Количество информации практически совпадает с количеством данных (максимально) в двух случаях:

1) при короткой передаче и полном отсутствии начального знания о распределении состояний по темпу их повторения;

2) при полностью случайном и равномерном распределении состояний, т.е. в шуме (ответ на четвертый вопрос в начале введения).

Если распределение состояний равномерное, но не случайное, то количество информации может быть малым (ответ на второй вопрос), поскольку информация является мерой неожиданности состояний. Как видим, понятие информации (рис.2) является сложным и охватывает целую цепочку промежуточных понятий. Как показано на рис.2, оно применимо как средство отображения поведения различных природных объектов. Этим же закономерностям подчинены и процессы наблюдения, регистрации, поскольку в них целенаправленно используются свойства природных взаимодействий. Наконец, информацион-



Рис. 2. Структура представлений, входящих в понятие информации

ные закономерности используются в создаваемых человеком системах передачи и хранения сведений и знаний.

После приведенного выше краткого перечня информационных понятий рассмотрим каждое из них и связи между ними более подробно.

1. СИГНАЛ, ЕГО ПОРОГОВАЯ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОСТОЯННЫЕ

Обсуждаемые ниже положения базируются на следующих общих информационных принципах:

1) объекты нашего мира воспринимаемы (регистрируемы) для наблюдателя и друг для друга, поэтому их взаимодействие можно представить, как процесс обмена сигналами;

2) процесс взаимодействия всегда происходит с обменом конечного количества информации.

Условия конечности информации в сигнале. Указанные принципы подразумевают наличие у каждого природного явления определенных пороговых и предельных ограничений [36]. Так, когда мы узнаем в результате опыта (отсчета), что интересующая нас точка на «большом» интервале ΔY лежит

в пределах небольшого интервала Δy , то приобретаемое нами количество информации [20]

$$I \leq \log (\Delta Y / \Delta y). \quad (1)$$

Конечность количества информации (1) требует, чтобы ΔY не была больше некоторого предела, а Δy не была меньше некоторого порога, задаваемого конкретными условиями измерения.

Исходя из (1) нетрудно понять, что произвольная функция $y(x)$ может нести «трижды бесконечное» количество информации, поскольку

- 1) любая ее точка может принимать бесконечное значение ($\Delta Y \rightarrow \infty$);
- 2) каждая точка не имеет размера ($\Delta y \rightarrow 0$);
- 3) на любом конечном интервале Δx содержится бесконечное количество точек.

Зададимся вопросом: какие ограничения необходимо наложить на математическую функцию $y(x)$, если мы хотим представить ее как реальный сигнал? Для того чтобы отображать реальный сигнал, функция $y(x)$ должна иметь предельное ограничение по амплитуде (вытекает из первого пункта):

$$\Delta Y \leq \sqrt{R_S} \quad (2)$$

и удовлетворять пороговому ограничению (вытекающему из второго и третьего пунктов):

$$\Delta x \Delta y \geq \sqrt{Q_S}, \quad (3)$$

здесь R_S и Q_S — предельная и пороговая информационные постоянные сигнала.

Еще одно ограничение следует из самой природы сигнала — переменные x и y могут иметь самую различную размерность и физический смысл, но обязательно выполнение следующего условия: квадрат функции, умноженный на приращение аргумента, должен быть равен изменению энергии сигнала:

$$dE = y^2 dx. \quad (4)$$

Смысл формально введенных в (2), (3) квадратных корней и состоит в том, что информационные постоянные R и Q связаны с величинами энергии (с y^2).

Из (2), (3) следует, что полный перепад значений функции ΔY занимает минимальный и конечный интервал значений аргумента:

$$\Delta x_{\min} \geq \sqrt{Q_S / R_S}. \quad (5)$$

Это условие задает информационно обоснованную единицу длины, означающую, что на интервалах, меньших $\Delta x_{\min}$, детали поведения функции не являются определяемыми и не несут поэтому никакой информации.

Ввиду распространенности сигнала по оси абсцисс (5) мы будем пользоваться понятием его спектра, вводя следующие обозначения: χ — переменная, обратная x по размерности ($[\chi] = [1/x]$); $G(\chi)$ — спектральная плотность амплитуды сигнала. Тогда условие (5) означает ограниченность ширины спектра сигнала (по χ).

Функциональная схема регистрирующего прибора. Каждый реальный физический прибор обладает свойством ограниченности быстрогодействия, т.е. не может реагировать на сколь угодно короткий сигнал. Очевидно также, что для регистрации сигнала объект должен получить от него определенную энергию. Поэтому суть процесса можно отобразить [37,38] с помощью обобщенной функциональной схемы, показанной на рис. 3 и включающей два принципиальных узла:

- 1) фильтр (пропускатель) нижних гармоник сигнала, отражающий инерционность прибора;
- 2) узел «функционального преобразования», требующий поступления определенной энергии на его вход (в простейшем случае, показанном на рис. 3, это дискриминатор наличия или отсутствия сигнала).

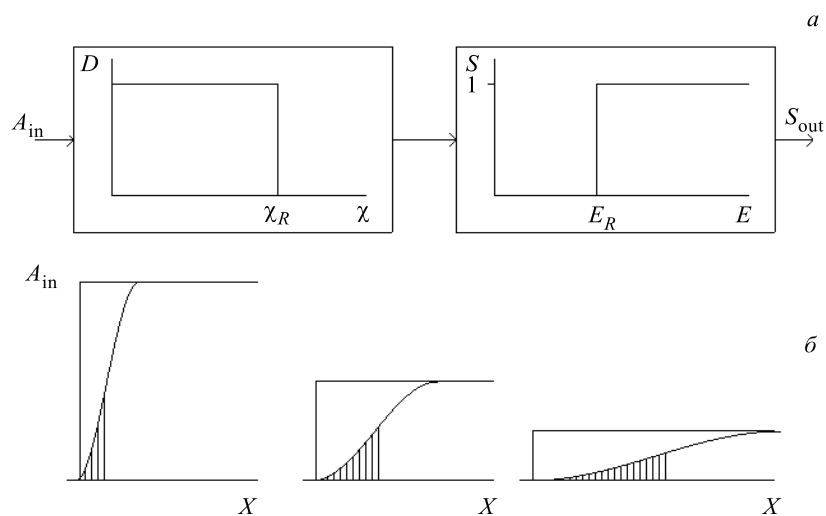


Рис. 3. Действие регистратора: а) функциональная схема, состоящая из фильтра нижних гармоник $\chi < \chi_R$ и элемента преобразования энергии сигнала в выходную величину (дискриминатора); б) механизм задержки срабатывания — фильтр регистратора интегрирует входной (ступенчатый) сигнал, область энергии, требующейся функциональному преобразователю, заштрихована, конец заштрихованной зоны есть момент срабатывания регистратора

Отношение необходимой входной энергии E_R к полосе пропускания фильтра χ_R :

$$Q_R = E_R / \chi_R \quad (6)$$

есть информационная пороговая постоянная прибора. В [37] показано, что для того, чтобы сигнал с пороговым параметром $Q_S = E_S x_S$ (3) воспринимался, необходимо, помимо очевидного $E_S \geq E_R$, выполнение обязательного условия

$$Q_S \geq Q_R. \quad (7)$$

Постоянная Q_R определяет не только минимальный порог регистрации, но и приращение энергии сигнала, которое может быть зарегистрировано. Другими словами, пороговое условие (6) определяет разрешение измерительного прибора.

Соотношение вида (6) было получено Гейзенбергом [24] при анализе проблемы достижимого разрешения прибора (микроскоп Гейзенберга); им было показано, что минимальной природной величиной для Q_R в случае электромагнитных сигналов является постоянная Планка.

Достигнутый в настоящее время массовый технологический уровень производства, например, электронных компонентов можно охарактеризовать как «один вольт — один миллиампер — одна наносекунда», что на ~ 13 десятичных порядков выше постоянной Планка. Можно указать [39] на некоторые технические следствия существования информационного порога:

1) эффект «гуляния» по времени выходного импульса регистратора при изменении амплитуды ступенчатого входного сигнала (см. рис. 3,б);

2) обязательность существования некоторого конечного перекрытия сигналов для начала выделения их совпадения.

Пороговое соотношение неопределенности (6), хотя оно и получено для измерительного прибора, имеет гораздо более широкий смысл как обобщенное условие восприятия. Поэтому далее мы будем называть регистратором любой объект, обладающий способностью восприятия.

Представление простого сигнала функцией отсчетов. Схема, приведенная на рис. 3, дает возможность сделать заключение об оптимальной форме сигнала: он должен иметь плоский спектр гармоник (совпадающий по ширине с χ_r). Кроме того, сигнал должен иметь минимальную энтропию, т.е. максимальную упорядоченность, для чего все его гармоники должны совпадать (сходиться) «горбами» синусоид в одной точке. Функция вида $\sin(x)/x$, удовлетворяющая этим условиям, называется в информатике функцией отсчетов [23], она имеет колоколообразный вид и показана на рис. 4,б. В дальнейшем мы будем называть сигнал подобной формы простым, имея в виду, что возможны сигналы с более сложным спектром.

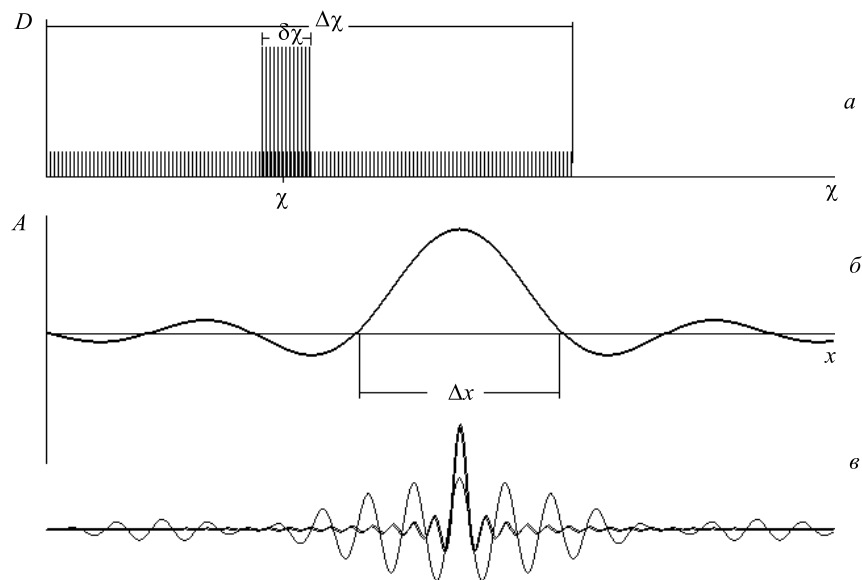


Рис. 4. Спектры частот: а) широкополосного и узкополосного синусоидальных пакетов (ширина спектра узкополосного пакета в 5 раз меньше несущей частоты, его спектральная плотность для наглядности увеличена в 5 раз); б) широкополосный пакет — функция отсчетов $\sin(2\pi x)/2\pi x$; в) широкополосный и узкополосный пакеты в уменьшенном в 10 раз масштабе времени

Некоторые свойства функции отсчетов. Функция отсчетов является широкополосным (спектр начинается с нулевой гармоники — рис. 4,а) пакетом косинусоид (или сфазированных синусоид). Она может быть представлена в следующем виде:

$$\phi(x) = A[\sin(2\pi\Delta\chi x)/(2\pi\Delta\chi x)], \quad (8)$$

где A — амплитуда функции отсчетов (высота ее центрального пика). Далее χ понимается как центральная (несущая) гармоника спектра, имеющего ширину $\Delta\chi$: $\chi = \Delta\chi/2$, см. рис. 4,а,б.

Характеристическая ширина центрального пика (рис. 4,б) связана с шириной спектра функции отсчетов:

$$\Delta x = 1/\Delta\chi; \quad (9)$$

а его амплитуда связана со спектральной плотностью амплитуды G :

$$A = 2G\Delta\chi. \quad (10)$$

Энергия пакета синусоид может быть представлена двумя способами:

$$E = A^2 \Delta x / 2 = R \Delta x / 2, \quad (11)$$

$$E = 2G^2 \Delta \chi = 2Q \Delta \chi; \quad (12)$$

это означает, что для функции отсчетов

$$E = AG. \quad (13)$$

Как видим, пороговая и предельная постоянные простого сигнала имеют следующий смысл: R — показатель содержания энергии в «единице размера» (11); Q — показатель содержания энергии в «единице спектра» (12).

Приравняв (11) и (12) с учетом (9), нетрудно получить [37] связь между пороговым и предельным параметрами в функции отсчетов:

$$R = Q / (\Delta x / 2)^2, \quad (14)$$

переходящую в (5) для $\Delta x_{\min} = \Delta x / 2$. Из (11) прямо следует, что обобщенное предельное соотношение при описании сигнала функцией отсчетов принимает следующий вид:

$$E \Delta \chi = R_{\max} / 2. \quad (15)$$

Обобщенное пороговое соотношение из (9) и (12) выражается следующим образом:

$$E \Delta x = 2Q_{\min}. \quad (16)$$

Разложение сложных сигналов на простые. Из соображений конечности энергии спектральная плотность произвольного сигнала в области нижних гармоник должна быть ограничена некоторой величиной — G_m . В области высших гармоник спектр одиночного произвольного сигнала является бесконечным [23], но из тех же соображений конечности энергии он должен быть ограничен гиперболой. Тогда:

$$G(\chi) \leq G_m \cdot \Delta \chi_m / \chi, \quad (17)$$

где $\Delta \chi_m$ — ширина спектра сигнала с плотностью амплитуды $\sim G_m$.

Площадь сигнала, т.е. его интеграл (усреднение с учетом знака), всегда равна G_0 — спектральной плотности амплитуды его нулевой гармоники [23]. Квадрат спектральной плотности Q_S можно назвать действием простого сигнала (если сигнал является функцией времени, то квадрат спектральной плотности амплитуды имеет размерность величины, называемой в механике «действием»). Следует обратить особое внимание на то, что пороговая информационная постоянная Q_R есть порог действия сигнала (6).

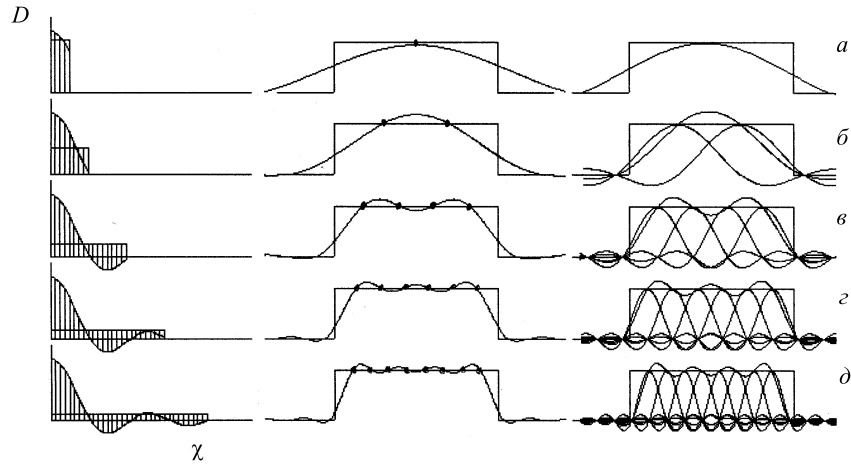


Рис. 5. Представление постоянной функции (прямоугольного сигнала) с помощью интеграла Фурье и функций отсчетов Котельникова; левая колонка — спектр частот прямоугольной функции (имеет вид $\sin(\chi)/\chi$ в расширяемом по закону $1/2, 1, 2, 3, 4, \dots$ спектральном диапазоне, показан также плоский спектр функции отсчетов ($Q \rightarrow 0$ при возрастании ее номера); средняя колонка — представление Фурье; правая колонка — представление Котельникова; разница между исходным (прямоугольным) и «воспринятым» (аппроксимирующим) сигналами показывает диапазон возможных подпороговых отклонений функции отображения

Пороговое ограничение по G^2 (12) дает условие обрезания спектра произвольного сигнала (5) и меру погрешности при выражении последнего суммой простых сигналов. Воспринятый сигнал (с заведомо ограниченным спектром) разлагается на простые математически точно согласно теореме Котельникова [23]. Для примера на рис. 5 показана серия разложений прямоугольного импульса на функции отсчетов с последовательно расширяющейся шириной спектра и уменьшающейся пороговой постоянной. Чем меньше Q , тем точнее совокупность простых сигналов описывает функцию $y(x)$. В пределе при $Q \rightarrow 0$ ($\Delta\chi \rightarrow \infty$) информационное описание совпадает с математическим. Последнее имеет явную аналогию с утверждением, впервые высказанным Планком [40], что при $h \rightarrow 0$ квантово-механическое описание приводит к формулам классической физики.

Дельта-функция отсчетов. Дельта-функция Дирака [41] может быть представлена как функция отсчетов (8) с неограниченно растущей шириной спектра. Особенность дельта-функции Дирака, как известно, в том, что ее площадь приравняется единице. Из условия нормировки в формуле для $\delta_d(x)$

появляется обратная спектральная плотность амплитуды:

$$\delta_d(x) = \phi(x)/G, \text{ при } \Delta\chi \rightarrow \infty, \quad (18)$$

тогда

$$E_d = A/G, \quad A \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Дельта-функции $\delta(x)$, не нормированные на единицу, могут быть подразделены по величине действия на подпороговые и надпороговые для конкретного регистратора. Хотя одиночная подпороговая дельта-функция и имеет бесконечную энергию (13), она не воспринимается регистратором. Надпороговая дельта-функция «теряет» в фильтре регистратора (рис. 3) все верхние гармоники (и связанную с ними энергию) и воздействует на регистратор как сигнал конечной энергии (12) протяженностью $\Delta x_R = 1/\Delta\chi_R$.

Шум, его действие и интенсивность. Функция отображения, принимающая случайные значения, с точки зрения теории сигналов является шумом. Математически «белый» — спектрально неограниченный шум — может быть представлен как совокупность дельта-функций, случайно распределенных по оси X [23]. Тогда параметрами шума являются действие образующих его дельта-функций и средняя интенсивность их появления на интервале Δx_R .

Если дельта-функции появляются достаточно редко, то регистратор срабатывает на каждую из них в отдельности (дробовой шум [1]), либо не срабатывает вовсе, когда дельта-функции подпороговые. Примером надпорогового дробного шума является выходной шум ФЭУ.

Если же шум интенсивный (средний интервал между дельта-функциями много меньше Δx_R), то для регистратора он представляет собой непрерывную кривую, являющуюся суммой огибающих фильтрованных дельта-функций. Мгновенное значение амплитуды непрерывного шума распределено по закону Гаусса [17]. Тепловой шум в электронных компонентах [2] является интенсивным шумом. Он надпороговый, поскольку постоянная восприятия электронного регистратора может быть сделана достаточно малой (на уровне $10^6 h$ и ниже). Напротив, непрерывный тепловой шум движения молекул воздуха является для человеческого уха подпороговым (порог восприятия $\sim 10^{11} h$).

Если действие шума не намного ниже порога, то имеется значительная вероятность регистрации его пиков как дробового шума [18]. Эти пики образуются при случайных наложениях нескольких фильтрованных дельта-функций друг на друга, и их суммарное действие может стать выше порога восприятия. Таким шумом является тепловое движение молекул газа или жидкости для броуновских частиц.

И, наконец, если шум имеет весьма высокую интенсивность, то даже при подпороговом действии для регистратора он является сигналом практически постоянной величины, т.к. в силу весьма высокой множественности

наложений фильтрованных дельта-функций гауссовский разброс суммарной амплитуды становится весьма малым. Примером тому является постоянный электрический ток. Эффект сглаживания шума (см. рис. 1, а, б) проявляется тем сильнее, чем уже спектр пропускания регистратора $\Delta\chi_R$. Если образующие высокоинтенсивный шум дельта-функции двуполярны (его интегральное воздействие равно нулю), то медленный регистратор практически не воспринимает такой шум.

Сигнал в микромире. В классическом макромире можно получить практически бесконечное количество сигналов об объекте или от объекта, не изменяя видимым образом его сущности. Это связано с тем, что информационная пороговая постоянная предполагается бесконечно (пренебрежимо) малой.

В микромире, как известно, нельзя получить сведений о частице, не изменив существенно ее состояния. С позиций информатики истинно элементарной можно назвать частицу, если она является носителем порогового сигнала о самой себе и для восприятия (регистрации) необходима, в частности, вся ее энергия. Ясно, что кандидатами в эту категорию являются прежде всего частицы — переносчики полей, например фотоны.

Необычность порогового микросигнала состоит в том, что его форма не может быть прямо подтверждена экспериментом, ибо для измерения амплитуд его (последовательных) частей требуются инструменты с недостижимой подпороговой чувствительностью.

Какие физические величины являются Q - и R -постоянными. Физически величиной y является (4) корень квадратный из плотности энергии E , а величиной x могут быть координата r или время t .

Координате обратна волновое число k ; в этой паре (с энергией) R -постоянную предельной координатной плотности энергии мы будем обозначать через D (d в микромире), а пороговую Q -постоянную, имеющую размерность $[E \cdot r]$, мы будем обозначать через B (b в микромире).

Времени обратна частота ω ; здесь R -постоянная имеет размерность мощности P , а Q -постоянной является действие H (h в микромире). Заметим, что k и ω в отличие от χ являются круговыми спектральными переменными ($k, \omega \rightarrow 2\pi\chi$).

Постоянные B и D связаны только с пространственной координатой; это означает, что пороговое условие (16) и предельное (15) должны существовать для статических физических явлений.

В движении координата и время приобретают взаимную связь через скорость: $U = r/t$, соответственно, появляется взаимосвязь между упомянутыми парами граничных постоянных: $H = B/U$ и $P = DU$, тогда

$$B/H = P/D = U. \quad (20)$$

Другими словами, стационарный B, D -пакет синусоид (8) в (равномерном) движении приобретает H - и P -постоянные. С другой стороны, волновой пакет изначально обладает всеми четырьмя граничными постоянными.

Из четырех величин D, B, P, H в качестве известных предельных или пороговых констант уверенно можно указать только последнюю — это постоянная Планка h . Предельная физическая величина — скорость света c не входит прямо в число граничных информационных постоянных; однако формула (20) показывает, что при заданных h и d она определяет максимально возможные величины b и P :

$$b = hc, \quad (21)$$

$$P = dc. \quad (22)$$

Постоянные центрально-симметричного поля. Для иллюстрации приведенных выше положений рассмотрим [37], как могут выглядеть пороговые и предельные постоянные в законах Ньютона и Кулона, т.е. в центрально-симметричном поле вида

$$F = q_m^2/r^2, \quad (23)$$

здесь q_m — обобщенный заряд, которому соответствуют полевая масса m (т.е. энергия $E_m = mc^2$) и классический радиус $r_m = q_m^2/E_m$. Предельная концентрация энергии поля и, соответственно, предельная информационная постоянная:

$$d_m = E_m/r_m = E_m^2/q_m^2. \quad (24)$$

Формально D имеет размерность силы, поскольку $[E/r] = [\Delta E/\Delta r]$, поэтому предельная постоянная (24) численно совпадает с классическими величинами предельной силы, например, гравитационного или электрического полей. Так, для электрона $d_e = 4,6$ Дж/м [37].

В свою очередь, из (14) имеем для спектральной плотности энергии:

$$b_m = E_m r_m = q_m^2. \quad (25)$$

Сравнивая (25) и (21), нетрудно заметить, что величина b есть квадрат максимально возможного значения обобщенного заряда.

Отношение b_m/c , имеющее размерность действия (21), для электрона, например, получается равным αh , где $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры [41]. Как известно, при движении на первой орбите атома водорода скорость электрона наибольшая и равна αc ; это означает (20), что действие его электрической массы равно постоянной Планка, т.е. пороговой постоянной в микромире.

Микросигнал как усреднение распределенности частицы. Как это ни странно, но физика микромира, оперируя понятием сигнала, до сих пор не выработала средств для его описания. В результате явления микромира описываются обычно лишь в терминах «до» и «после», исключая сам процесс взаимодействия элементарных частиц.

Принципиальной трудностью является выражение через сигнал своеобразности «поведения» микрочастицы — являясь локализованным «точечным» объектом, она явно не находится в одной точке пространства [41]. Во-первых, она движется не по одному, а по некой совокупности путей в окрестности классической траектории. Во-вторых, парадоксальность в классическом понимании движения проявляется в том, что частица как бы одновременно проходит по каждому из этих путей, т.е. в масштабе времени наблюдаемых микропроцессов она «мгновенно» распределена по ним. В-третьих, эта мгновенная пространственная распределенность неоднородна — огибающая распределения уменьшается по амплитуде по мере удаления от точки классического положения частицы. Математически пространственную распределенность микрочастицы можно считать статистическим процессом и отобразить ее с помощью ψ -функции плотностью распределения вероятности [41]. Эта плотность вероятности не измеряется непосредственно, в том числе из-за интенсивностного характера распределения: в течение реального времени измерения микрочастица «успевает побывать» в каждом из положений по многу раз. Весьма высокая множественность формальной статистики должна приводить к высокой точности задания огибающей распределения каждой частицы в отдельности (действительно, ψ -функция задает величины вероятностей с математической точностью).

В работе [37] высказано предположение, что локальная (в характеристическом смысле) и интенсивностная распределенность микрочастицы может восприниматься как единое интегрированное целое, т.е. как сигнал о наличии частицы, носителем которого служит она сама. В этом случае:

- 1) средняя энергия движения микрочастицы должна иметь определенное распределение в пространстве-времени (чем, собственно, и является сигнал);
- 2) информационной пороговой постоянной (как в статике, так и в динамике) должна являться спектральная плотность энергии (12), для микросигнала это означает, что пороговой величиной является его действие;
- 3) информационной предельной постоянной должно являться ограничение на амплитуду сигнала (11), т.е. предел линейной плотности энергии микрочастицы.

Неизмеримость формы порогового микросигнала не означает, что последняя может быть произвольной, т.к. с изменением формы (при сохранении энергии) меняются как пороговые, так и предельные постоянные. Форма сигнала должна соответствовать возможному максимуму действия и в простейшем случае может описываться функцией отсчетов.

Шум в микромире. Как известно [41], характеристики микрочастицы (в частности, ее энергия) не являются стабильными величинами, а подвержены случайным флуктуациям, т.е. шуму. Вакуум, как пространство для распространения сигналов, имеет некоторую, хотя и далекую, аналогию с газом, в котором распространяются звуковые колебания, несущие информацию. Газ обладает определенной шумовой энергией (теплового движения молекул), вакуум — некоторой «нулевой» энергией [41], которая флуктуирует. Акустический шум не является белым (его спектр и энергия конечны), поскольку образующие его дельта-функции имеют конечное характеристическое время, связанное с размерами молекул, и конечный средний период появления (средний период столкновения молекул). Вследствие последнего газ обладает конечной полосой частот пропускания сигналов, выражающейся, в частности, в дисперсии «высокочастотных» ультразвуковых волн.

В настоящее время «шум вакуума» принято считать белым (что с позиций информатики маловероятно), а его «нулевую энергию» бесконечной [41]. В обсуждаемых терминах шум (электромагнитного) вакуума, видимо, является подпороговым и среднеинтенсивным, в пользу чего говорит следующее: 1) порождаемые им виртуальные частицы не являются регистрируемыми, 2) непосредственно наблюдаемые вакуумные эффекты [41,42], такие, как «дрожание» электрона (аналог броуновского движения), являются достаточно слабыми и редкими.

Постоянная сглаживания шумов в микромире. Хотя шум может быть представлен случайной комбинацией сигналов, в дальнейшем термин «сигнал», как это обычно принято, мы будем использовать для функции отображения упорядоченных процессов и явлений. Мы уже говорили, что сглаживание шума регистратором будет тем сильнее, чем больше времени он расходует на акт измерения, соответственно, тем меньше будет погрешность измерения. Математически это записывается следующим образом:

$$\Delta E_R \Delta t_R = Q_R. \quad (26)$$

Соотношение (26), когда $Q_R = h$, есть не что иное, как соотношение неопределенности Гейзенберга [24,40–42]. Совпадение порога неопределенности (26) и порога регистрации (6) означает, что извлечение упорядоченных сведений становится возможным, как только сигналы начинают выделяться на фоне шумов. На пороговом уровне микросигнал является довольно «зашумленным», вследствие чего однократные измерения не приводят к определенному результату. Однако множественные измерения позволяют выделить сигнал из шумов, поэтому можно говорить достаточно определенно об усредненных параметрах микросигнала, в том числе и о его форме.

Пороговые динамические постоянные сигнала. В случае свободного движения параметры порогового волнового пакета (8) должны соответство-

вать импульсу p и кинетической энергии E_K элементарной частицы. Запишем указанные соответствия [37] как через несущую частоту, так и через ширину спектра $\varphi(x)$ (9) для физических пространственных и временных переменных. Тогда

$$p = \hbar k \equiv \hbar \Delta k / 2 = \Delta p, \quad (27)$$

поскольку $\hbar c = b$ (21), то, вводя $E_P = pc$, эту пару тождественных уравнений можно записать в виде

$$E_P = \hbar k \equiv \hbar \Delta k / 2 = \Delta E_P; \quad (28)$$

кроме того,

$$E_K = \hbar \omega \equiv \hbar \Delta \omega / 2 = \Delta E_K. \quad (29)$$

Здесь пороговые постоянные b и $\hbar$ — «круговые» (поделенные на 2π). Энергия и импульс в (27)–(29) являются пороговыми величинами, поэтому их приращение равно самой величине, что и определило их форму записи.

Как видим, справа от знака тождества в (27) и (29) оказываются соотношения Гейзенберга, а слева имеем соотношения де Бройля и Планка [40,41]. И те, и другие здесь выражают пороговое условие, записанное в одном случае через несущую частоту, а во втором — через ширину спектра. Наличие двух уравнений связано с тем, что у волнового пакета (8) должно быть две пороговых постоянных вида (12) — пространственная (28) и временная (29).

Поскольку соотношения Планка—де Бройля прямо связаны с длиной и частотой ψ -волны, то получается, что последняя соответствует несущей гармонике в спектре энергии микрочастицы. Другими словами, энергия (движения) микрочастицы сосредоточена в основном на интервале, равном длине ψ -волны. Если это так, то пороговые и предельные ограничения микро сигнала должны в той или иной форме входить в волновое уравнение для ψ -волны [37].

Пороговая форма уравнения для ψ -функции. Очевидно, что при перемещении микро сигнала в пространстве-времени движение несущей гармоник его спектра, а соответственно, и ψ -волны, должно описываться обычным волновым уравнением:

$$r_S^2 (\partial^2 \psi / \partial r^2) - t_S^2 (\partial^2 \psi / \partial t^2) = 0, \quad (30)$$

где r_S, t_S — характеристические (круговые) параметры микро сигнала, а именно: ширина центрального пика функции отсчетов по пространственной и временной координатам, а также длина и период ψ -волны (поделенные на 2π).

Общее решение уравнения (30) для ψ -волны имеет вид

$$\psi(r, t) = \exp[i\{(r/r_S) - (t/t_S)\}]. \quad (31)$$

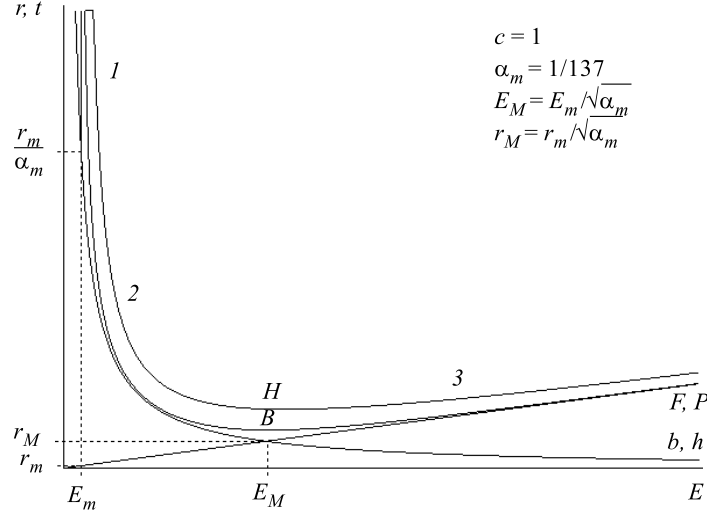


Рис. 6. Зависимость характеристических размеров волнового пакета энергии движения r_S и t_S (B - и H -линии соответственно) от полной энергии микрочастицы

Величины r_S и t_S должны подчиняться описанным выше пороговым и предельным ограничениям, поскольку количество информации в сигнале должно быть конечным.

При пороговых ограничениях величины r_S и t_S могут быть взяты в соответствии с (28) и (29):

$$r_S = 1/k = b/E_P, \quad (32)$$

$$t_S = 1/\omega = h/E_T, \quad (33)$$

где E_T в общем случае [42] есть сумма кинетической и потенциальной энергий частицы.

В работе [37] показано, что по крайней мере для замкнутой системы ($E = \text{const}$) уравнение (30) с параметрами (32), (33) переходит в уравнение Шредингера в нерелятивистской области.

Уравнение (30) допускает разделение переменных: $\psi(r, t) = \varphi(r)f(t)$. В [37] показано также, что стационарная форма (30), имеющая вид

$$r_S^2(\partial^2 \varphi / \partial r^2) + \varphi = 0, \quad (34)$$

для r_S , определяемого из порогового соотношения (32), совпадает со стационарной формой уравнения Клейна—Гордона [42], т.е. дает, например, необходимые релятивистские поправки для квантованных величин энергии и

импульса. Следовательно, уравнение (30) может служить обобщением уравнений Шредингера и Клейна—Гордона.

Асимптоты для зависимостей $r_S, t_S(E)$. На рис. 6 показан вид зависимостей r_S и t_S от E (графики совмещены; считается, что $c = 1$; далее совмещенные величины пишутся через запятую). Видно, что в обсуждаемой пороговой области (слева) кривые $r_S, t_S(E)$ имеют две асимптоты: 1) вертикальную прямую при $E = E_m$, где $r_S, t_S \rightarrow \infty$; 2) пороговую гиперболу $r, t = (b, h)/E$, к которой стремятся обе кривые при $E \gg E_m$. Второе означает, что пороговые ограничения (на спектральную плотность энергии) r_S и t_S обратно пропорциональны полной энергии: $r_S, t_S \geq \text{const}/E$.

Предельные ограничения есть ограничения на линейную плотность энергии: $E/(r_S, t_S) \leq \text{const}$. Это означает, что зависимости $r_S, t_S(E)$ должны становиться прямо пропорциональными энергии, т.е. предельная асимптота есть прямая, выходящая из начала координат. Как видно из рис. 6 (справа), при входе в область предельных ограничений следует ожидать уширения зоны распределения энергии микросигнала и, соответственно, длины и периода ψ -волны. Более подробные сведения об этом можно найти в [37].

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВИДЫ ПОВТОРОВ В ФУНКЦИИ ОТОБРАЖЕНИЯ

Из (5) следует, что регистратор «обрезает» высшие гармоники спектра (т.е. приводит спектр в соответствие с условиями теоремы Котельникова, рис. 5) и выделяет конечное количество информации, даже если сигнал «математический». Можно сказать, что регистратор вместо бесконечного множества виртуальных математических функций, которые могут существовать в коридоре $\Delta x \# \Delta y$, отличаясь неразличимыми прибором деталями, воспринимает некую обобщенную, базовую логическую функцию.

Подчеркнем, что информационная дискретизация осуществляется не за счет нелинейности (по входу), а вследствие энерго-спектральных ограничений (входное устройство регистратора на рис. 3 линейно и имеет нулевой порог по амплитуде).

Получение данных. Рассмотрим, как происходит выделение базовых состояний логической функции отображения и каким образом им ставится в соответствие формальный набор «опознавательных знаков» — кодов.

Дискретизация состояний. Понятие количества информации основано на замене (отображении) непрерывной математической функции $y(x)$ (рис. 1, а) дискретной (логической) функцией $s(l)$ (рис. 1, б) с диапазоном значений

$$\begin{aligned} L &= \Delta X / \Delta x, \\ S &= (\Delta Y / \Delta y)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь ΔX , ΔY — пределы изменения аргумента и функции, Δx , Δy — пороговые величины и шаг приращения аргумента и функции, определяемые из условия (5).

В технике часто используют линейную шкалу не по энергии, а по амплитуде, тогда

$$S = \Delta Y / \Delta y. \quad (36)$$

Значение Δx может определяться шириной спектра сигнала источника, а Δy — уровнем шума на входе приемника.

В биологических системах функция отображения, как правило, логарифмическая (закон Фехнера—Вебера [32]):

$$S = \ln(\Delta Y / \Delta y), \quad (37)$$

что связано с необходимостью иметь большой динамический диапазон отображения при сравнительно невысоком разрешении (этой же цели подчинено введение чисел с «плавающей» запятой в компьютерах). Логарифмическая зависимость (37) достигается либо введением в регистратор нелинейного узла (взаимодействие «молоточка» и «наковальни» в ухе), либо за счет отрицательной обратной связи (сокращение диаметра зрачка глаза при росте суммарной освещенности).

В любом случае (см. рис. 1,2) переменные l и s образуют логическое (дискретное) поле безразмерных величин. Значение пороговой постоянной на логическом поле равно единичному квадрату; величина предельной постоянной равна S . Для каждого значения l логическая функция может принять любое из S состояний, поэтому общее количество возможных логических функций (вариантов поведения) на логическом поле составляет S^L . Это означает, что если выстроить все возможные логические функции друг за другом вдоль оси L , то со следующего поля варианты поведения неминуемо начнут повторяться.

Кодирование состояний. Каждому из S состояний можно поставить в соответствие знаковый указатель, имеющий то же число состояний. Знаковый указатель, в отличие от символьного указателя, абсолютно не связан с содержанием и природой каждого состояния (понятие семантической информации [33] не обсуждается в данной работе).

Можно составить указатель из S знаков, прямо (линейно) сопоставив знаки и состояния друг другу. Тогда для указания одного или нескольких состояний (и неуказания остальных) достаточно всего двух вариантов знаков. Полученный код (метки на линии из S ячеек) можно назвать линейным, он позволяет кодировать многозначные функции (т.е. энтропию, которая не обсуждается в настоящей работе). В качестве другого предельного случая можно взять указатель, включающий всего один знак, но тогда последний

сам должен иметь S вариантов, что при большом S делает их распознавание затруднительным (китайская письменность).

При числе знаков в указателе g и небольшом числе их вариантов v общее количество комбинаций знаков (указателей) должно быть равно числу состояний: $v^g = S$. Следовательно, длина кода (а это число знаков в указателе) ограничена величиной $\log_v(S)$. К появлению логарифма в (1) можно прийти и по-другому. Можно разбить кодируемые состояния на группы из v состояний, в каждой группе кодирование выполняется однотипно по принципу линейного соответствия состояния варианту знака; затем каждые v групп объединяются в надгруппы, процедура кодирования групп в надгруппе та же. Процесс продолжается до тех пор, пока не останется одна супергруппа. Иерархическая древовидная структура, строящаяся в таком процессе над состояниями, показана на рис. 7,а (для $v = 2$, $S = 64$). Как нетрудно понять, процесс требует $\log_v(S)$ шагов для построения дерева указателей на все состояния.

Кодирование функции отображения. Вернемся теперь к числу вариантов реализации логических функций $s(l)$, которое равно S^L . Взяв логарифм S^L , получим максимальное количество информации в однозначной функции на логическом поле:

$$I_{\max}(S, L) = L \log_v(S); \quad (38)$$

формально оно зависит от основания системы счисления (основания логарифма). Если $v = 10$, то количество информации измеряется в дитах; если $v = 2$ — то в битах; а если $v = 2, 718... = e$ — то в натах. В последнем случае иерархическая дискретная структура знаков в указателе является скрытой, поскольку в основании логарифма v произведен формальный математический переход от целых чисел к иррациональным. Такой переход допустим для функций отображений с чрезвычайно большим числом состояний (состояния молекул в газе, атомов твердого тела и т.д.). Как это сделано в (1), так и далее мы не будем указывать основание логарифма там, где это несущественно.

Отметим, что формула (38) прямо следует из (1), поскольку $\log(S)$ есть количество информации на каждом шаге по L .

Интегрирование цепочки отсчетов. Хотя S и является дискретизованной переменной, ничто не запрещает считать дискретные интервалы Δs делимыми, т.е. обладающими понятием длины. Каждый из первичных интервалов $\Delta s_1 = \Delta S/S$ можно разбить еще на S частей: $\Delta s_2 = \Delta S/S^2$, т.е. подсостояний. Имея два уровня разбиения ΔS , мы можем одновременно указать два последовательных отсчета. Математически процессу дробления ΔS и объединения отсчетов нет предела, и формула (38) может быть записана в виде

$$I_{\max}(S, L) = (L/C) \log_v(S^C), \quad (39)$$

где C — количество интегрированных отсчетов в цепочке ($C \leq L$). Формула (39) наглядно показывает, что состояния (или амплитуда) и отсчеты

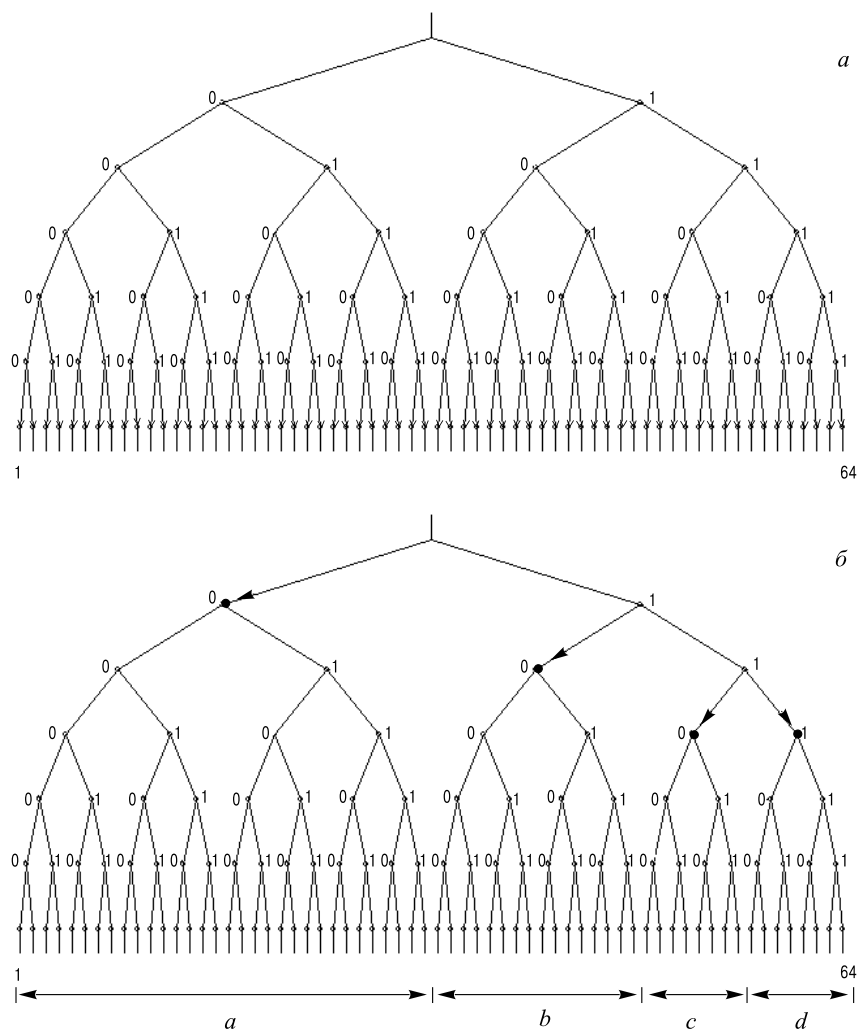


Рис. 7. Кодировочные деревья, показывающие структуру указателей: *a*) логические состояния (данные) — дерево кодов равной длины; *б*) количество зарегистрированных состояний (информация) — «косое» дерево (вершины частных деревьев состояний помечены кружками)

(или длина) неэквивалентны для представления информации: если вторые меняются пропорционально, то первые — экспоненциально при изменении ее количества.

Технически предел интегрированию отсчетов достигается довольно быстро из-за экспоненциального роста числа разбиений и ограниченности разрешения шумами, однако это не означает, что C всегда должно равняться единице. Например, если в телевизионном черно-белом сигнале достаточно 8 градаций яркости, то это означает, что его полоса частот может быть сужена в $C = 3$ раза, если аппаратура способна передавать $8^3 = 512$ градаций сигнала (ответ на третий вопрос введения).

Выделение информации. Как видим, полная длина кода (32) связана с целочисленной длиной интервала повторения функций (по оси отсчетов). Второй множитель в формуле (38) отражает среднюю длину интервала повторения состояний в функциях $s(l)$ при $L \gg S$. Однако распределение интенсивностей появления состояний в каждой конкретной функции $s(l)$ из S^L возможных — индивидуально, в крайних случаях оно может быть как равномерным, так и вырожденным (все состояния одинаковы). Разобранный нами механизм кодирования данных никак не учитывает различия в интенсивностях состояний. Даже для полного интегрирования отсчетов ($C = L$) в (39) достаточно знать только S и L , чтобы еще до начала измерений провести разбиение ΔS на S^L равных частей.

Кодирование интервалов повторения состояний. Для учета интенсивности появления состояний процесс кодирования информации должен быть дополнен процедурой запоминания количеств уже зарегистрированных состояний.

Если перед началом измерений мы не обладаем предварительным знанием о поведении исходной функции $y(x)$, то тогда следует предположить (см. рис. 7,а), что все возможные состояния функции отображения $s(l)$ равновероятны. Это будет соответствовать первичному разбиению кодового интервала ΔS на S равных частей. Тогда количество информации, априори содержащейся в функции $s(l)$, есть

$$I_S(0) = \log(S), \quad (40)$$

оно отражает наше начальное знание о числе состояний S .

Получив отсчет, разобьем Δs_1 на втором шаге [25] на $(S + 1)$ частей, на третьем разобьем Δs_2 на $(S + 2)$ частей и т.д., причем каждое полученное в результате измерения состояние будем объединять с одноименными. В итоге мы будем получать всегда те же S отрезков на каждом этапе, но разной длины, пропорциональной количеству появлений каждого состояния плюс 1. Этот процесс (для $S = 4$) иллюстрируется рис. 8.

Если какое-либо из S состояний впервые появляется на определенном шаге по L , то согласно указанной модели (1) оно будет нести следующее количество информации:

$$I_S(1) = \log[(S + L_1)/1], \quad (41)$$

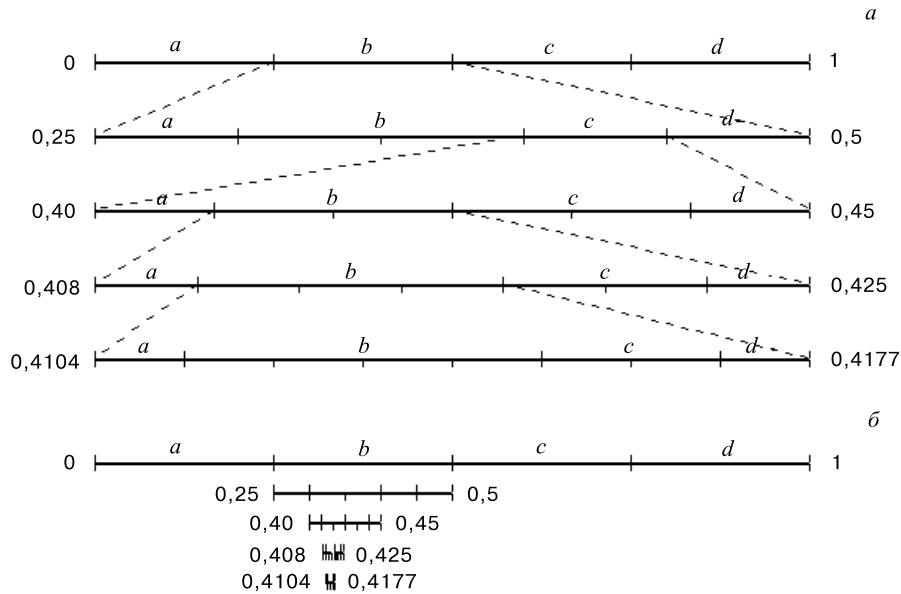


Рис. 8. Арифметическая модель последовательного разбиения единичного кодового отрезка математической числовой оси на интервалы, отвечающие всем возможным последовательностям появления состояний: а) частный кодовый интервал каждого следующего состояния масштабирован к отрезку единичной длины (реальные положения краев интервала указаны числами слева и справа); б) реальные длины и положения кодовых интервалов на математической оси для последовательности $b-c-b-b$

где L_1 — номер шага, на котором впервые появилось данное состояние. Как видно из (41), чем позже на оси L появляется в первый раз какое-либо состояние, тем большее количество информации оно несет (см. кривые $I_S(1)$ на рис. 9).

Когда это же состояние появляется вторично, то общее количество кодовых отрезков равно $(S + L_2)$, ширина суммарного отрезка для этого состояния двойная (отношение чисел есть $(S + L_2)/2$), и обе составляющие равноправны по количеству информации, поэтому

$$I_S(2) = 2 \log [(S + L_2)/2]. \quad (42)$$

Рассуждая далее по аналогии, получим, что для всего интервала L количество информации, содержащееся в одном из S состояний:

$$I_S(N) = N_S \log [(S + L)/N_S], \quad N_S \geq 1, \quad (43)$$

где N_S — количество повторений данного состояния на интервале L . Формула (43) при $L \gg S$ совпадает с классической формулой Шеннона

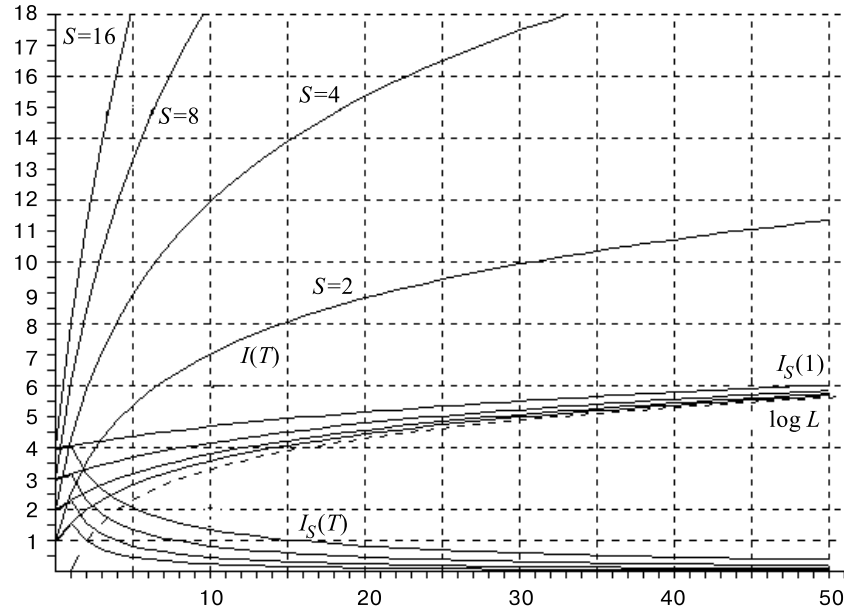


Рис. 9. Количество информации при сплошных повторах одного состояния в логической функции отображения; $I_S(T)$ — количество информации на один шаг по L , $I(T)$ — суммарное количество информации, при числе состояний от 2 до 16; $I_S(1)$ — количество информации при первом появлении состояния на определенном шаге по L

(в которой отсутствует S), но, в отличие от последней, учитывает процесс установления распределения состояний $N(S)$.

Рассмотрим, как выглядит описанный выше процесс учета предыдущих состояний на иерархическом дереве — см. рис. 7,б. Будем считать, что так же, как на рис. 8, имеется 4 состояния и получено 64 отсчета, причем $N_a = 32$, $N_b = 16$, $N_c = N_d = 8$ (см. разграничения на рис. 7,б). Над группами состояний a, b, c, d можно построить частные иерархические деревья, высота их будет тем больше, чем более интенсивно то или иное состояние. Тогда длина указателя на состояние будет равна количеству ступеней от вершины полного дерева до вершины частного, т.е. тем короче, чем интенсивнее данное состояние; это и отражает формула (43).

Для того чтобы найти полное количество информации, содержащейся в $s(l)$, необходимо просуммировать (43) по всем состояниям:

$$I = \sum_S (L/L_S) \log [\{(S/L) + 1\} L_S], \quad (44)$$

где $L_S = L/N_S$ — средняя длина интервала повторения конкретного состояния в конкретной функции $s(l)$.

При $L \gg S$ появление одного из S состояний содержит в среднем количество информации, равное $\log(L_S)$. Если установившееся распределение состояний равномерно ($L_S = S$), то количество информации максимально и равно (38).

Полученную формулу нетрудно обобщить на случай, когда распределение состояний известно априори; для этого надо включить априорные значения или оценки L и N_S как слагаемые в числитель и знаменатель дроби в (43), в результате получим

$$I = \sum_S (L/L_S) \log [(L_0 + L) / \{(L_0/L_{S0}) + (L/L_S)\}], \quad (45)$$

где L_0 — суммарное количество отсчетов до данной серии измерений, L_{S0} — средний интервал повторения состояния в этих сериях. Очевидно, что априорно каждое состояние несет количество информации, равное $\log(L_{S0})$. Отношение L_0/L можно считать доверительным весом предварительного знания и мерой того, насколько распределение $N(S)$ может измениться в процессе измерений. Отметим, что формулы (40)–(45) основаны на «анализе целых чисел», а не на анализе «бесконечно малых» и не требуют введения математического понятия вероятности появления состояний $P_S \approx 1/L_S$, определенного [34] при $L \rightarrow \infty$ лишь для стационарных распределений.

Непрерывный повтор состояний. Проиллюстрируем разницу между (43) и классической формулой Шеннона [4] на примере [38], когда на некотором участке (по L) повторяется одно и то же значение функции $S = \text{const}$, тогда как до этого шага все S значений функции были равновероятными (если повторения идут с самого начала L , то это (40) предполагается).

Если в функции отображения повторяется одно и то же состояние, это означает, что на частном кодовом интервале Δs_i суммарный отрезок, соответствующий этому состоянию, постепенно начнет «вытеснять» все остальные (см. рис. 8), приближаясь по информативности к нулю. Из (43) нетрудно получить формулу для количества информации при повторении одного из S состояний:

$$I_S(T) = T \log [(S + T)/T], \quad T \geq 1, \quad (46)$$

где T — количество сплошных повторов.

График функции $I_S(T)$ показан на рис. 9 для разных S . В пределе (установившийся процесс) количество информации на каждом шаге равно нулю, как это и следует из формулы Шеннона, но общее количество информации из-за начального переходного процесса явно ненулевое (см. интегральные кривые $I(T)$ на рис. 9).

Макро- и микросостояния. Если анализировать поведение функций $s(l)$, входящих в полное множество реализаций S^L , то во многих из них обнаружится повторение сочетаний состояний. Повторяемость сочетаний состояний очевидным образом связана с повторяемостью состояний, которые в нее входят. Однако в силу упорядоченности (предсказуемости) последовательности состояний внутри каждого следующего сочетания данного вида количество информации понижается сильнее, чем это следует из (43). Действительно, для описания повторяющегося сочетания состояний достаточно описать его в первый раз, а затем указывать лишь факт его появления:

$$I_C = I(S, C) + N_C \log [(S + 1 + L)/(N_C C)], \quad (47)$$

здесь C — длина сочетания состояний, а N_C — количество его появлений.

Повторяемая цепочка состояний может рассматриваться как дополнительное макросостояние и может быть добавлено к начально известному набору состояний S (см. $(S + 1)$ в формуле (47)). Каждое макросостояние вносит не один, а C отрезков в кодовый интервал, в соответствии со своей длиной (знаменатель при логарифме в (47)), т.е. в C раз активнее «вытесняет» одиночные состояния на частном кодовом интервале.

Макрос как объединитель повторяющейся цепочки состояний эквивалентен понятию подпрограммы (объединение повторяющейся цепочки действий) в алгоритмическом языке программирования. Повторяющиеся макросостояния, как и подпрограммы, могут, в свою очередь, объединяться в макросы более высокого уровня иерархии (см. рис. 2).

На кодовом дереве, показанном на рис. 7, макросы образуются на его нижних ветвях — это группы состояний, объединенные посредством частных деревьев. Зная строение частного дерева, достаточно указывать лишь на его вершину, сокращая полный указатель на высоту частного дерева.

Наглядным примером использования макросов является передача текста. Можно передавать текст, каждый раз разбивая передачу буквы на точки, расположение которых отображает ее начертание. Ясно, что в такой передаче «разбиения» будут часто повторяться. Существенно выгоднее определить макросы начертаний букв (вариант шрифта) в виде набора точек заранее (предварительное знание) или в начале передачи (обучаемость), а затем указывать лишь на вариант макроса буквы.

Каждое состояние, полученное при дискретизации (35), может оказаться макросом. Если понизить порог восприятия Q , то, скорее всего, обнаружится, что каждое состояние разделится на ряд микросостояний, скрытых на предыдущем уровне восприятия.

Информация как мера хаотичности поведения. На рис. 10 и рис. 11 представлены два примера функций из набора S^L , имеющих равномерное распределение состояний или макросостояний на интервале L . Казалось

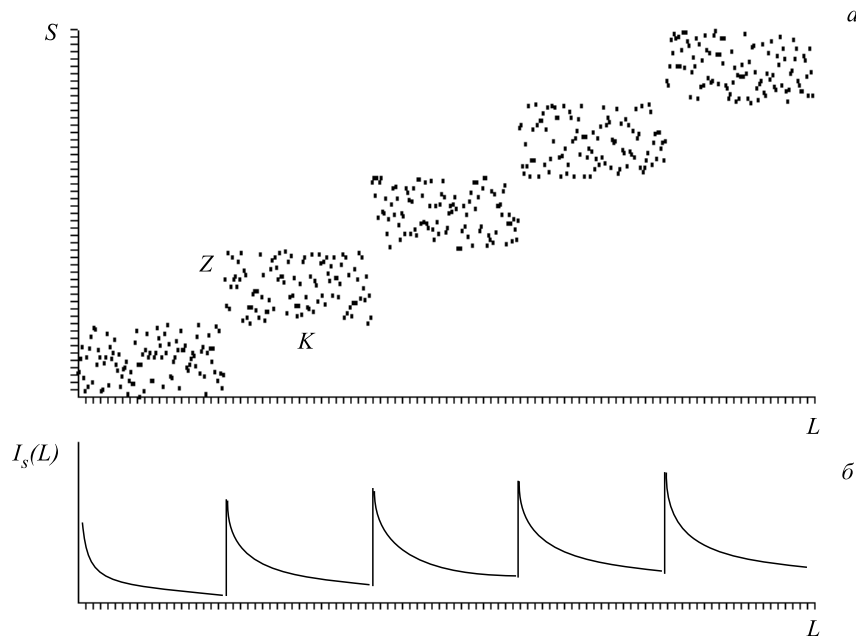


Рис. 10. Локализация состояний логической функции: а) пример локализации в зонах $Z \times K$ при общем равномерном распределении состояний; б) количество информации на шаг по L при подобном распределении

бы, что для них должна быть применима формула (39) или, по крайней мере, (43). Нетрудно заметить, однако, что эти функции не удовлетворяют в полной мере требованию непредсказуемости (случайности) поведения: первая — по оси состояний S , вторая — по оси отсчетов L .

Локализация состояний. В реальных исходных функциях $y(x)$ в силу спадающего характера их спектра резкие небольшие изменения состояний происходят гораздо чаще, чем изменения в полном диапазоне (происходящие плавно). Это означает, что значения функций $s(l)$, как правило, локализуются на достаточно протяженных участках K в сравнительно малых областях значений функции Z (см. рис. 10,а в качестве примера).

Собственно, мы уже второй раз говорим о локализации. Сначала из общей средней, равномерной по S картины поведения всех возможных логических функций отображения мы выделили каждую функцию по ее индивидуальному поведению (44). Сейчас мы хотим выделить в каждой функции участки «индивидуального» стационарного поведения в некоторой зоне $Z < S$.

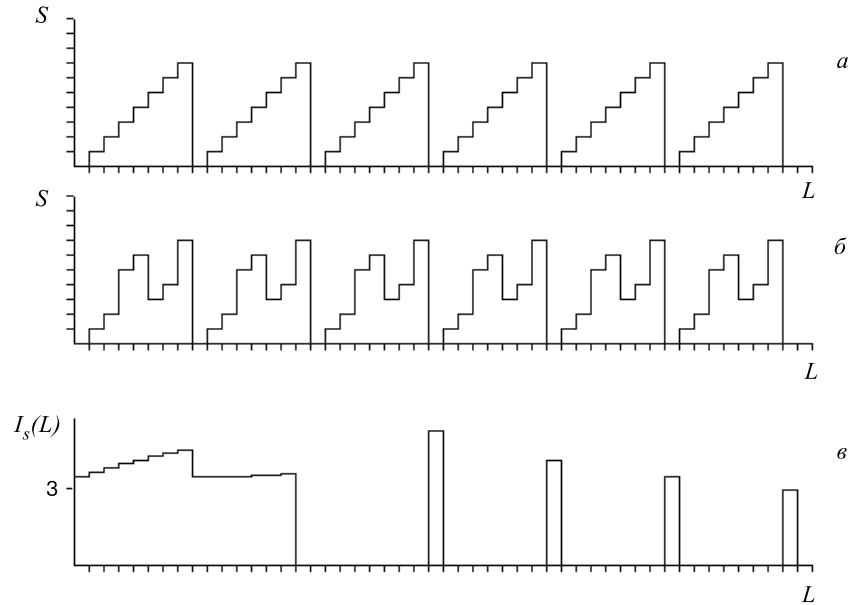


Рис. 11. Примеры циклических повторов (а,б), при которых состояния равномерно распределены; в) количество информации (в битах) на шаг по L

Формулу (43) можно распространить на случай локально выделенной интенсивности в зоне состояний. В этом случае «вытесняющими» остальных будут Z равных кодовых отрезков, тогда для всей зоны:

$$I(Z, K) = \sum_Z N_Z \log [(S + K)/N_Z], \quad N_Z \geq 1. \quad (48)$$

Средняя величина количества информации на каждом шаге $I(Z, K)/K = \log(Z)$ при равномерном распределении $N_K(Z) = K/Z$ ($K \gg Z$). Сопоставив (48) с (43), нетрудно видеть, что нет разницы в правилах определения среднего установившегося количества информации для полного диапазона значений функции S или для его части Z , за исключением того, что существует определенный переходный процесс от S к Z состояниям при входе в «зону» (под знаком логарифма в (48) стоит S , а не Z).

Кодирование локализованных величин можно рассматривать как переход от их абсолютного значения к относительным. Подразумевается, что сдвиг точки отсчета приводит к существенно меньшим значениям отклонений функции отображения, т.е. устраняет повторяемость знаков в старших разрядах указателя. Это дает ключ к распознаванию зон локализации: если

указание сдвига точки отсчета и разрядности локального указателя, а также последующее указание отсчетов в анализируемой серии требует существенно меньшего числа знаков, чем при сохранении глобального указателя, то перед нами явный «локал».

Вообще говоря, если зона локализации достаточно продолжительна, то повышение интенсивности ограниченной группы состояний постепенно проявится и в формуле (44), но на преодоление «накопленного распределения» предыдущих отсчетов (45) потребуется достаточно большое число шагов.

Циклическое повторение состояний. При циклическом повторении состояний их распределение равномерно: $L_S = S$, но каждый цикл образует макросостояние, повторяющееся непрерывно.

На рис.11,а,б приведены примеры непрерывного повтора макросостояний, занимающих весь диапазон состояний ($Z = S = 8$), т.е. начинающегося циклического процесса ($L = N_C K$). Количество информации для описания первого «колебания» равно $8 \cdot 3 = 24$ бит (левое слагаемое (48)). Количество информации на установление повторяющегося процесса составляет ~ 12 бит (см. кривую $I(T)$ для $S = 2$ на рис.9). В установившемся режиме (при любом виде колебаний) количество информации на каждом шаге по L равно нулю, хотя из формулы (43), так же, как из формулы Шеннона, имеем 3 бит/шаг для рис. 11 (формально состояния равномерно распределены).

Именно в силу свойства локализации мы избегали в данной работе определения количества информации через математическое понятие вероятности состояний, поскольку оно безразлично усредняет локально выделенные и циклические повторы состояний.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Гистограмма и количество информации. Среди множества регистрируемых событий лишь небольшая их часть представляет интерес для экспериментатора. Одним из способов выделения искомым событий является построение гистограмм, т.е. распределения интенсивностей появления тех или иных состояний измеряемых параметров.

В гистограмме число колонок равно S , высота каждой колонки N_S , а сумма всех высот — L для данного параметра. Поэтому каждая колонка гистограммы сопряжена с определенным количеством информации для определенного состояния, вытекающим из уравнения (43).

Ранжированная гистограмма. Несмотря на многообразие форм гистограмм их можно сгруппировать по типам с одинаковым общим «количеством информации», если располагать состояния в порядке убывания их интенсивности. Примеры таких ранжированных гистограмм приведены на рис. 12.

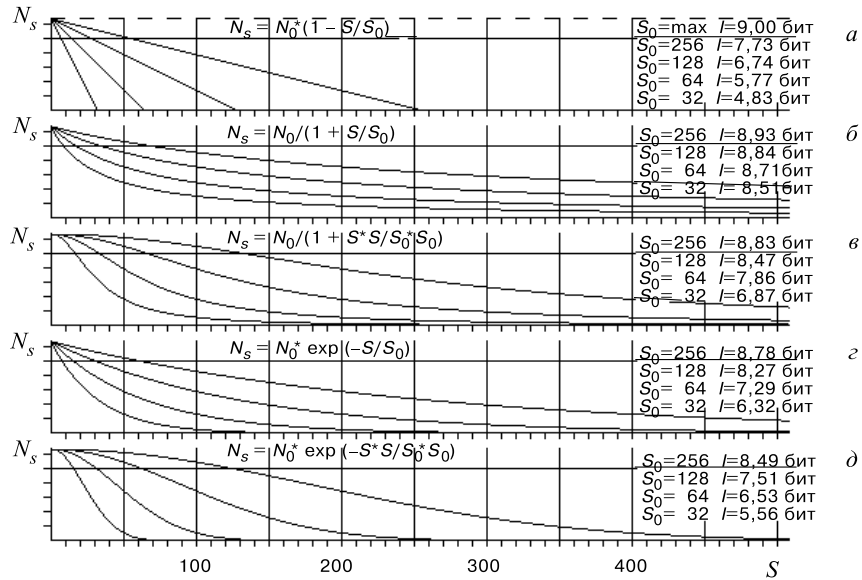


Рис. 12. Количество информации при разных видах распределения состояний — в ранжированных гистограммах: а) линейное распределение интенсивностей; б) распределение по гиперболе; в) квадратичная гипербола; г) распределение по экспоненте; д) гауссово распределение. На графиках указаны характеристическая постоянная (математическая единица длины) и количество информации

Типичными амплитудными распределениями в ядерной физике являются экспоненциальное (рис.12,г):

$$N_S(S) = 1/\exp(S/S_0) \quad (49)$$

и гауссовское (рис.12,д):

$$N_S(S) = 1/\exp[(S/S_0)^2]. \quad (50)$$

На рис. 12 представлены результаты численного моделирования количества информации на одно измерение при различных распределениях амплитуд (формах ранжированных гистограмм). Видно, что количество информации слабо зависит от вида распределения и понижается примерно вдвое при $(S/S_0) \cong 20$. Максимальное количество информации (38) «содержит» плоская гистограмма (показана пунктиром на рис.12,а). Поскольку искомые события выделяются обычно как пик на гистограмме, у них меньше информативность, чем у фона, а общее количество информации всегда ниже количества данных, на основе которых построена гистограмма.

Компрессия данных. Повторим, что данные измерения получаются в результате процедуры дискретизации сигнала и кодирования состояний по формулам (38), (39) без учета интенсивности их появления в текущей серии отсчетов. Получение экспериментальной информации соответствует кодированию по формуле (44). Информация может быть выделена уже после получения данных, этот процесс получил название компрессии данных [30]. Три основных способа компрессии данных кратко обсуждаются ниже.

Коды Хаффмана. Каждое состояние в данных кодируется индивидуально кодом постоянной длины (полным деревом — рис.7,а). Если кодировать информацию для каждого состояния, то код, в соответствии с формулой (43), должен иметь переменную длину (используется «косое» дерево с переменной длиной ветвей — см. кружки на рис.7,б). Семейство кодов переменной длины называется кодами Хаффмана [5]. Выбор длин кодов происходит в результате анализа ранжированной гистограммы состояний.

Проблемой при использовании кодов переменной длины является последующее распознавание кода конкретного отсчета в общей полученной серии знаков. Эта проблема может быть решена несколькими способами:

- 1) введением знака «пробел» при $v > 2$ так же, как в обычном тексте;
- 2) каждый конкретный код может содержать внутренний указатель на свою длину [38];
- 3) структура косого дерева может быть заранее известна.

Поскольку каждое состояние кодируется индивидуально и длина каждого кода дискретна, то информация «по Хаффману» всегда кратна целому числу (бит, дит,...). Это и порождает заблуждение, что дискретно и количество информации (см. первый вопрос введения). Проведенный выше анализ ясно показывает, что информация является аналоговой (непрерывной) величиной, а принципиально дискретными являются лишь состояния.

Когда среднее количество информации (на шаг по L) существенно больше единицы, то подобное округление до целого не играет существенной роли на практике. Однако при малом числе состояний или когда одно из них доминирует в $S(L)$, «ошибка округления» может стать значительной. Если, например, какое-то состояние повторяется в 10 раз чаще остальных, то количество информации при появлении этого состояния есть (44): $\log_2(11/10) = 0,14$ бит. Тогда ошибка от использования индивидуальных кодов для каждого состояния (даже если они переменной длины, и самый короткий код — это один знак) будет, как минимум, 7-кратной.

Коды с интегрированием состояний. Если мы хотим кодировать информацию более точно, необходимо использовать интегрирование состояний, т.е. увеличивать цепочку состояний, описываемую кодом фиксированной длины.

Коды LZW. Самым простым является кодирование повторяющихся сочетаний состояний, т.е. макросов, что реализуется в LZW-кодах [14]. Длина кода LZW обычно ~ 12 бит, что дает возможность иметь словарь емкостью

~ 4000 макросов. Это, как правило, достаточно для кодирования информации предметно ориентированного сообщения. Если предметная область известна заранее, то и «словарь сокращений» может быть составлен заранее; если нет, то выделение макросостояний идет прямо в процессе адаптивного кодирования.

Длина анализируемых цепочек состояний в LZW-кодах обычно не более четырех (при большей длине резко возрастает объем словаря). Поэтому сплошные повторы состояний кодируются (сжимаются) не очень эффективно. Даже если сделать длину LZW-кода переменной (как в методе Хаффмана), то сплошной повтор будет давать не менее 0,25 бит/шаг.

Арифметическое кодирование. Идея этого способа кодирования состоит в том, чтобы подсчитывать количество информации в каждом состоянии индивидуально, но представлять их интегрированным кодом большой разрядности (16–32 бита). Метод подсчета количества информации был описан при выводе формулы (44), см. рис.8.

Как видно из рис.8,б, каждый раз при появлении нового состояния интервал Δs_i перемещается на новое место на полном кодовом отрезке и сокращается по длине, поэтому для его указания требуется число со все большей точностью, т.е. со все большим количеством знаков. Когда количество знаков в числе достигает 16–32, интегрирование состояний завершается и начинается новый цикл кодирования.

Особенность арифметического кодирования [25] в том, что при «вытеснении» каким-либо (чаще повторяющимся) состоянием остальных на частном кодовом интервале автоматически возрастает относительная длина Δs_i . Таким образом в «единице информации» может быть интегрировано достаточно большое число интенсивных состояний.

Несмотря на различие в алгоритмах выделения информации, все описанные способы дают сходные результаты компрессии — теоретически доказана их эквивалентность [30] для невырожденного набора состояний. Это нетрудно понять: из-за ограниченности диапазона функции отображения выделенность интенсивности тех или иных состояний неизбежно приводит к выделенности интенсивности корреляций между этими же состояниями.

Компактизация данных. Код данного, хотя он и длиннее кода информации — «инфокода», обладает одним несомненным достоинством: он отражает амплитуду сигнала в текущем отсчете и поэтому пригоден для проведения вычислений при обработке результатов. Инфокод отражает лишь интенсивность появления состояния и его каждый раз необходимо преобразовывать в амплитуду при обработке. Имеется, однако, промежуточная возможность сделать данные более компактными, сохранив если не абсолютное, то относительное численное соответствие их амплитуде сигнала. Метод компактизации данных [38] основан на свойстве локализации состояний, обсуждавшемся выше.

Язык описания данных. К S состояниям данных можно добавить небольшое число (скажем 16) состояний управления, с помощью которых можно указывать на сдвиг точки отсчета, изменение разрядности данных и т.д. Для каждой подобной процедуры потребуется от одного до трех кодов управления.

Разрядность (...). Если ввести управление разрядностью, то ее начальная величина может быть относительно небольшой, например, 8 бит. Символом смены разрядности может являться первый из 16 кодов управления. Введем для удобства описания в тексте его мнемоническое обозначение, т.е. будем называть его «открывающаяся круглая скобка». Перед скобкой должно находиться число-идентификатор, показывающее новую разрядность данных (см. заголовок). После закрывающейся скобки (второй код управления) восстанавливается прежнее значение разрядности.

Управление разрядностью фактически определяет «локал» — в начале текущей шкалы отсчета (левая произвольная часть дерева указателей на рис.7,а). Оно также задает размер этого локала по S , который равен 2^n , где n — величина разрядности.

Локал {...}. Данные, находящиеся в фигурных скобках (мнемокоды следующей пары кодов управления), принадлежат одному уровню иерархии знаков, т.е. имеют общие старшие разряды. Логическим идентификатором локала служит цепочка указателей, начиная с вершины кодового дерева; чем больше в ней знаков, тем меньше зона локала. Например, запись

$$100\{000\ 010\ 101\ 111\} \quad (51)$$

эквивалентна прямому указанию следующих состояний:

$$100000\ 100010\ 100101\ 100111, \quad (52)$$

выигрыш легко различим по длине кодов. Отметим, что выбор и сдвиг локала всегда осуществляются «с точностью» до ширины зоны. Высота дерева определяется текущим указателем разрядности n .

Как и при любых скобках, допустима вложенность локалов, т.е. стековая или иерархическая структура.

Макросостояние \$...;. Символы с мнемокодами «\$» и «;» означают начало и конец определения макросостояния. Перед управляющим символом «\$», должен записываться идентификатор макросостояния.

Макрос @. Символ «@» показывает, что данные на некотором интервале L заменяются уже известным макросом; идентификатор последнего должен находиться перед «@».

Цикл < ... >. Число перед открывающейся угловой скобкой показывает количество повторений данных, локалов или макросов, помещенных между угловыми скобками.

Список команд управления нетрудно продолжить указанием повторяющихся приращений амплитуды, общего слагаемого (сдвига) и т.д. Восстановление полного значения амплитуды всегда происходит за одну операцию суммирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принципиальным отличием «информационного анализа» от классического математического анализа бесконечно малых/больших величин является исходное наложение ограничений «снизу» — Δx , Δy и «сверху» — ΔX , ΔY на описываемые величины. Верхние — предельные ограничения свидетельствуют о конечности ресурсов «наращиваемости», нижние — пороговые ограничения говорят о конечной «дробимости» величин.

Пороговые ограничения тесно связаны с закономерностями отображения, т.е. воздействия и восприятия аналоговых величин — сигналов. Сущность отображения устойчиво передается при некоторых отклонениях амплитуды сигнала, благодаря чему можно ввести дискретные базовые состояния, отстоящие друг от друга на пороговый «интервал различимости». Интервал различимости существует и по координатной оси (протяженности сигнала), он является информационно обоснованной единицей длины.

Принципиальная ограниченность величин приводит к ограниченности вариантов поведения, т.е. видов функциональных зависимостей $y(x)$ потому, что «пространство поведения» функции отображения оказывается дискретным и конечным: $(\Delta X/\Delta x) \times (\Delta Y/\Delta y)$.

Данные, как набор указателей на дискретные состояния, определяются не в пространстве поведения, а в «пространстве комбинаций» состояний: $(\Delta X/\Delta x) \times \log(\Delta Y/\Delta y)$. В силу этого аргумент и сама функция отображения не эквивалентны с точки зрения передачи данных. Общее количество данных ограничивается глобальной повторяемостью функций отображения.

Информация есть мера локальной распространенности данных. Традиционно локализуется (выделяется из общего) поведение отдельной функции отображения. Как было показано, при больших ΔX поведение функции отображения локализуется и в определенных зонах, существенно меньших, чем ΔX .

Зоны локализации сами могут содержать локальные образования или являться частью локализованных структур более высокого уровня иерархии.

Сообразно с понятием данных и информации существуют два основных вида кодирования:

- кодирование состояний, или S -кодирование;
- кодирование интенсивности повторений, или L -кодирование.

При первом способе кодирования длина кода связана только с количеством (логарифмом) состояний. При L -кодировании средняя длина кода может слабо зависеть от общего числа состояний, поскольку она определяется только количеством интенсивных состояний; длина L -кода в силу этого меньше. Практической ценностью S -кодов является их связь с амплитудой отображаемого сигнала, что делает их пригодными для проведения вычислений.

В целом существует достаточно большое число как типовых, так и частных приемов, понижающих количество данных с сохранением их содержания. Количество информации есть некий предельный минимум, достижимый, видимо, лишь в идеале (как абсолютный нуль температуры).

Основы представлений о дискретности — идея атомарности как ограниченности делимости; утверждение о том, что «миром правят (целые) числа», было заложено еще в древности. Как показано выше, обсуждавшиеся пороговые информационные ограничения де-факто учитываются в уравнениях физики микромира. Однако второе, более простое исходное информационное положение — ограниченность ресурсов и замкнутость реальных явлений (связь ограниченности Δy с ограниченностью ΔY), хотя и осознается, но, насколько известно, еще не нашло своего выражения в количественных соотношениях. Теория информации, конечно, не может подсказать конкретные величины физических предельных постоянных, но в состоянии указать на возможный характер ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schotky W. — Ann. Phys., 1918, b.57, s.541.
2. Nyquist H. — Phys. Rev., 1928, v.32, No.1, p.110.
3. Понтягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. — ЖЭТФ, 1933, т.3, вып.3. с.165.
4. Shannon C.E. — Bell Syst. Tech. Journal, 1948, v.27, p.379;
Шеннон К. — В сб.: Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
5. Huffman D.A. — In: Proc. of the Institute of Electrical and Radio Engineers, 1952, v.40, p.1098;
Хаффман Д. — Метод построения кодов с минимальной избыточностью. Кибернетический сб. М.: ИЛ, 1961, вып.3, с.10.
6. Линдли Д.В. — О мере информации, даваемой экспериментом. Математика: Сб. пер. М.: ИЛ, 1959, № 3.
7. Колмогоров А.Н. — Проблемы передачи информации. 1965, т.1, № 1.
8. Биллингслей П. — Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.
9. Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. — Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1969.
10. Акчурин И.А. — В сб.: Философские проблемы элементарных частиц. М.: Издательство АН СССР, 1963.
11. Френкс Л. — Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.

12. Хармут Х.Ф. — Передача информации ортогональными функциями. М.: Связь, 1975.
13. Бриллюэн Л. — Наука и теория информации. М.: Сов. Радио, 1975.
14. Lempel A. — J. Ziv, IEEE Trans. Inf. Theory IT-22, No.1, Jan., 1976, p.75.
15. Варакин Л.Е. — Теория систем сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
16. Пейн Г. — Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979.
17. Потапов А.В., Чернявский А.Ф. — Статистические методы измерений в экспериментальной ядерной физике. М.: Атомиздат, 1980.
18. Фомин Я.А. — Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980.
19. Натурный эксперимент. Информационное обеспечение экспериментальных исследований. Под ред. Н.И.Баклашева. М.: Радио и Связь, 1982.
20. Винер Н. — Кибернетика. М.: Наука, 1983.
21. Feinman R. — Quantum Mechanical Computers, Plenary Talk presented to IQEC-CLEO Meeting, Anaheim, June 16, 1984.
22. Чисар П., Кернер Я. — Теория информации, теоремы кодирования. М., 1985.
23. Гоноровский И.С. — Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
24. Де Бройль Л. — Соотношения неопределенности Гейзенберга. М.: Мир, 1986.
25. Witten I.H., Neal R.M., Cleary J.G. — Communications of the ACM, 1987, v.30, No.6, June, p.520.
26. Денисов А.А. — Введение в информационный анализ систем. Л.: Изд. ЛПИ, 1988.
27. Хармут Х. — Применение методов теории информации в физике. М.: Мир, 1989.
28. Кричевский Р.Е. — Сжатие и поиск информации. М.: Радио и связь, 1989.
29. Кравцов Ю.А. — УФН, 1989, т.158, вып.1, с.93.
30. Bell T., Witten I.H., Cleary J.G. — ACM Comp. Surv., 1989, v.21, No.4, Dec., p.557.
31. Воронцов Ю.И. — Теория и методы макроскопических измерений. М.: Наука, 1989.
32. Бауэр Ф.Л., Гооз Г. — Информатика. М.: Мир, 1990.
33. Чечкин А.В. — Математическая информатика. М.: Наука, 1991.
34. Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А. — УФН, 1992, т.162, вып.7, с.149.
35. Кадомцев Б.Б. — УФН, 1994, т.164, вып.5, с.449.
36. Басиладзе С.Г. — В сб.: Методы вариантной оптимизации структуры систем передачи и обработки информации. М.: Изд. МГУ, 1995.
37. Басиладзе С.Г. — Препринт НИИЯФ МГУ 95-44/408, 1995.
38. Басиладзе С.Г. — Препринт НИИЯФ МГУ 96-25/432, 1996.
39. Басиладзе С.Г. — Быстродействующая ядерная электроника. М.: Энергоиздат, 1982.
40. Джеммер М. — Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985.
41. Физика микромира. Под ред. Д.В.Ширкова. М.: Советская энциклопедия, 1980.
42. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. — Квантовая механика. М.: Наука, 1979.

THERMODYNAMICS OF A CHIRAL EFFECTIVE MODEL WITH AXIAL AND TRACE ANOMALIES

B. Van den Bossche

Université de Liège, Institut de Physique B5, Sart Tilman, B-4000 Liège 1, Belgium

The Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model with scale and axial $U_A(1)$ anomalies is introduced at finite temperature and density in the case of three flavors (u, d, s). It is then used to evaluate condensates and thermodynamical functions (pressure, energy and entropy densities). We mainly focus on analytical results.

Вводится модель Намбу–Иона-Лазиньо (НИЛ) с масштабной и аксиальной $U_A(1)$ аномалиями при конечной температуре и плотности в случае трех ароматов (u, d, s). Затем она используется для вычисления конденсатов и термодинамических функций (давления, плотности энергии и энтропии). В основном представлены аналитические результаты.

1. INTRODUCTION

Quantum chromodynamics, the fundamental theory of strong interaction, is defined through the Lagrangian [1]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + g\bar{q}\gamma^\mu A_\mu q, \quad (1)$$

where q is the quark field in flavor and color spaces (in the fundamental representation) and g is the coupling constant. The quantity A_μ is a shortened notation for the eight gluon fields ($A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$) in the adjoint representation. They come into the Yang–Mills Lagrangian in the combination

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2)$$

which gives rise to an interaction term between gluons (three- and four-gluon couplings), due to the non-Abelian structure of the theory. (The totally antisymmetrical coefficients f^{abc} are the structure constants of $SU(3)$.) This interaction, with the fact that the coupling constant is high at low energy, prevents making a perturbative analysis to describe hadronic matter. The understanding of this physics requires putting QCD on a lattice or making use of effective model, the latter being supposed to mimic the true theory in a given range of energy–momentum. In the low energy regime, chiral symmetry is believed to play the

key role. In the following, we shall use a model which implement this symmetry: the Nambu–Jona-Lasinio or NJL model. This model was introduced some time ago in the nucleon language [2, 3]. With quark degrees of freedom, it has regain new interest after the work of Volkov [4]. For three flavors in the scalar and pseudoscalar sectors, it is described by the Lagrangian

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)q + G_S \sum_{i=0}^8 [(\bar{q} \frac{(\lambda^i)_F}{2} q)^2 + (\bar{q} i\gamma_5 \frac{(\lambda^i)_F}{2} q)^2]. \quad (3)$$

Although having short-comings such as the lack of renormalizability and of confinement, the model has the attractive features of being relativistically invariant and respecting some of the symmetries of QCD (among them chiral symmetry, in the case of vanishing quark masses) while being mathematically tractable due to the locality property of the 4-quark interaction.

The NJL model has already been extensively studied by several groups. We can only mention a few, our purpose being here to describe the scaled version of the model*. A recent work has been done by Ripka** [6] in a book which contains an in-depth analysis of regularization procedures and symmetry conserving approximations; Klevansky [7] and Hatsuda and Kunihiro [8] give a general introduction to NJL, both in the vacuum and at finite temperature and density; Alkofer, Reinhardt and Weigel [9] mainly applied the model to discuss baryons as chiral solitons, as also done by Goeke and collaborators [10]; Bijnens [11] discusses chiral perturbation theory within NJL; Alkofer, Ebert, Reinhardt and Volkov [12, 13] hadronize the NJL model (both mesons and baryons); Vogl and Weise [14] and Weise [15] review several of the above-mentioned topics: bosonization and hadronization, finite density and temperature effects. Finally, a scaled NJL model in the same spirit as the one introduced here has been investigated in [16–18].

In the following, we shall study a modification of the Lagrangian (3) which takes into account the scale and axial anomalies of QCD. The motivation to proceed in this way is the following: the NJL model is taken into account because it is believed that its (global) symmetries, that it shares with QCD, are a key concept to understand the underlying strong theory. Being based on argument symmetry, it seems then natural to supply the model with other symmetry related physics: the anomaly one. Anomalies are symmetries of the classical action which are no more symmetries of the quantum world. Replacing the QCD Lagrangian by the NJL one, we have thrown away the scale and (strong) axial anomalies. Since the NJL model is intended to be used mainly at the mean field level, these

*For more references (but still a nonexhaustive list), see [5].

**This book is not restricted to the NJL model.

anomalies are introduced by hand by adding effective terms. In this way, quantum effects can be taken into account at the level of a tree effective theory.

Following [19], we give first a resume of the symmetries relevant to QCD and NJL, for three flavors of quark u, d, s .

A. Symmetries. In the following, we take the convention to denote by m the current quark mass matrix $\text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, and by q the vector representing quarks in the flavor space $q = \text{diag}(q_u, q_d, q_s)$. The indicated transformations leave the action invariant under certain circumstances that we specify.

- **Global gauge symmetry:** NJL is globally color invariant: color enters only through the number N_c of each quark flavor.

- **Scale symmetry:**

$$\begin{cases} x_\mu \rightarrow \lambda^{-1} x_\mu, \\ A_\mu^a \rightarrow \lambda A_\mu^a, \\ q \rightarrow \lambda^{3/2} q, \end{cases}$$

is exact, at the level of the classical action, in the limit of vanishing current quark mass $m = 0$. However, this symmetry is broken by quantum effects.

- **Vector $U(1)_V$ symmetry or Baryonic number conservation:** $q \rightarrow \exp(i\alpha)q$.

- **Quark number conservation:** $q_i \rightarrow \exp(i\alpha_i)q_i$ ($i = u, d, s$): each flavor has its own conserved number.

- **Axial $U(1)_A$ symmetry:** $q \rightarrow \exp(i\gamma_5\alpha)q$ is exact, at the level of the classical Lagrangian, in the limit of vanishing current quark mass $m = 0$. This symmetry is broken by quantum effects, which explains why it is not seen in the spectrum of physical states.

- **Isospin symmetry:**

$$q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\tau^a\alpha_a)q, \quad a = 1, \dots, 3.$$

Isospin symmetry is exact in the limit where light quark masses are equal $m_u = m_d$ (τ_a are the Pauli matrices).

- **Vector $SU(3)_V$ symmetry:**

$$q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\frac{\lambda_a}{2}\alpha_V^a)q, \quad a = 1, \dots, 8.$$

Isospin symmetry can be generalized to the three-flavor case and explains why the hadrons are approximately ordered into multiplets.

- **Axial $SU(2)_A$ and $SU(3)_A$ symmetries:**

$$q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}\alpha_A^a)q, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (SU(2)_A : \lambda_a \rightarrow \tau_a).$$

This symmetry is exact as long as $m_u = m_d = m_s = 0$. It is however not seen in the spectrum. Since axial transformations alter the parity that is associated with a state, a manifestation of $SU(2, 3)_A$ in nature would require that each isospin (or $SU(3)_V$) multiplet be accompanied by a mirror multiplet of opposite parity. In the same way, since we do not observe opposite parity partners to all hadrons, the $U(1)_A$ symmetry cannot be realized directly by QCD. While the axial $SU(3)_A$ symmetry is realized in the Goldstone mode through the dynamical breaking of chiral symmetry, $U(1)_A$ is never realized, being completely broken by quantum effects (the anomaly).

• **Chiral symmetry:** vector and axial $SU(3)$ symmetries can be combined to realize transformations on the left and right parts of the quarks ($q_R \equiv \frac{1 \mp \gamma_5}{2} q$):

$$SU(3)_V \otimes SU(3)_A \leftrightarrow SU(3)_L \otimes SU(3)_R,$$

where

$$SU(3)_L \Rightarrow q_L \rightarrow \exp(i \frac{\lambda_a}{2} \alpha_L^a) q_L, \quad SU(3)_R \Rightarrow q_R \rightarrow \exp(i \frac{\lambda_a}{2} \alpha_R^a) q_R.$$

Under chiral symmetry, left-handed and right-handed quarks transform independently. This symmetry is broken by the quark mass matrix m . Apart from this explicit breaking, chiral symmetry is also spontaneously broken down to $SU(3)_V$.

As mentioned above, a symmetry can be manifested in several ways.

- It may remain exact.
- It may be explicitly broken (this is the case of isospin symmetry in the limit $m_u \neq m_d$).
- It may be hidden. It is an invariance of the action but not of the ground state: the symmetry is not seen in the spectrum of physical states. Two types of mechanisms [19] are possible: the symmetry can be spontaneously broken (such as the $SU(2)_L$ symmetry in electroweak interactions), or dynamically broken (due to self interactions of the considered fields) as for chiral $SU(2, 3)_L \otimes SU(2, 3)_R$ symmetry in QCD. In the latter case, there exists a composite order parameter which, in the case of dynamical chiral symmetry breaking, is often chosen as the quark condensate, although other order parameters are possible.

In the following, we shall use the term «spontaneous symmetry breaking» to describe both cases of hidden symmetry, making the distinction when appropriate.

The Goldstone theorem is intimately related to the notion of hidden symmetry and states that if a theory has a continuous symmetry of the Lagrangian which is not a symmetry of the vacuum, there must exist one or more massless (Goldstone) bosons. Goldstone theorem and the dynamical breaking of chiral symmetry explain the small pseudoscalar nonet mass ($\pi_0, \pi_{\pm}, K_0, \bar{K}_0, \eta, \eta'$), but for the η' which is too heavy.

The breaking of chiral symmetry can be summarized by

$$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \Rightarrow SU(3)_V.$$

• The symmetry may have an anomaly, as for the axial $U(1)_A$ and scale symmetries of QCD. Even if the quark masses are vanishing, the divergence of the corresponding current is nonvanishing. For the axial $U(1)$ symmetry, we get ($\tilde{F}$ is the dual of F , β_{QCD} is the Callan–Symanzik β -function of QCD and γ_m is the mass anomalous dimension)

$$\partial^\mu (\bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^0}{2} q) = 2i \bar{q} \gamma_5 m^0 \frac{\lambda^0}{2} q + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu}, \quad (4)$$

while the scale anomaly leads to

$$\partial_\mu J^\mu = \theta_\mu^\mu = (1 + \gamma_m) \sum_{i=1}^{N_F} \bar{q}_i m_i q_i + \frac{\beta_{\text{QCD}}}{2g} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (5)$$

The strong axial anomaly (4) is believed to give its high mass to the η' particle compared to the other members of the pseudoscalar nonet.

B. Effective Action. The Lagrangian (3) is used at tree level. If we want this order to implement the full quantum aspects of QCD, it is necessary to supplement it with a term which, while still invariant under the true symmetries of QCD, has to break the axial $U(1)_A$ and scale invariances. Axial $U(1)_A$ anomaly can be related to the formation of instantons [20–22] and yields anomalous contributions to the η and η' masses. A 't Hooft determinant is often taken to mimic the anomaly, although other forms can be chosen (see [20, 21, 23–26]). We shall use here the simplest approach, consisting in just adding a mass term $a^2 \xi \eta_0^2$ (see Eq. (11)) for the pseudoscalar singlet η_0 particle, with ξ the parameter modelizing the anomaly.

Figure 1 shows the modification of the η and η' mass when the ξ parameter is varied. It is clear that, removing it, the η has the same mass as the pion, while the η' is similar, but with the strange quark instead of the up.

As for the axial anomaly, the effect of the trace anomaly has to be added by hand.

Several steps are necessary in order to construct the modified NJL model in the perspective of the symmetries and anomalies as described above. In view of the way of treating the axial anomaly (mass term for the η_0), it is better to work on the bosonized version of the model* which leads to the partition function

$$\mathcal{Z}_{NJL} = \int \mathcal{D}\varphi^a \exp(-I_{\text{eff}}), \quad (6)$$

*Hadronization techniques are reviewed in [27, 28] and [12, 13].

with* [29–31]

$$I_{\text{eff}} = -\text{Tr} \ln(-i\not{\partial} + m^0 - \not{W} + \varphi^a \Gamma^a) + \int d^4x \frac{a^2}{2} (\varphi^a)^2, \quad (7)$$

$$\varphi_a = (\sigma_a, \pi_a), \quad a = 0, \dots, 8 \quad (\pi_0 \equiv \eta_0, \pi_8 \equiv \eta_8), \quad (8)$$

$$\Gamma_a = (\lambda_a, i\gamma_5 \lambda_5), \quad a = 0, \dots, 8, \quad (9)$$

$$\text{Tr} O = \text{tr} \int d^4x \langle x | O | x \rangle, \quad \int d^4x = \int_0^\beta d\tau \int_\Omega d^3x, \quad (10)$$

where tr is the trace w.r.t. internal d.o.f. (Dirac, color, flavor), $\beta = 1/T$ is the inverse temperature, $W_\nu = (-i \text{diag}(\mu_u, \mu_d, \mu_s), 0, 0, 0)$ and Ω is the volume of the system.

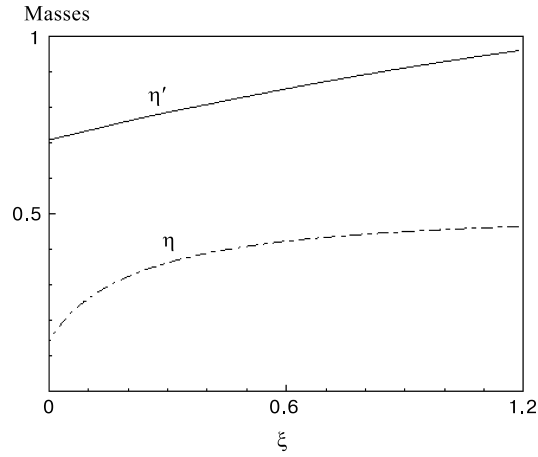


Fig. 1. η , η' mass variation as a function of the ξ axial anomaly parameter

As mentioned above, the axial anomaly is introduced through a mass term for the η_0 particle. The scale invariance and anomaly, on the other hand, can be included in the effective action in a similar way, through the introduction of a dilaton field χ of scale dimension 1 (see for example [32,33]). For details and more references, the reader is referred to [5,34]. Although it is questionable [35] to use the dilaton field as an order parameter associated with gluon confinement,

*The Euclidean space is used from now on.

we shall adopt this point of view as in the works [36,37]. Finally, the effective action defining the scaled NJL model is

$$I_{\text{eff}} = -\text{Tr}_{\Lambda\chi} \ln(-i\cancel{\partial} + m^0 + \varphi_a \Gamma_a - \cancel{W}) + \int d^4x \frac{a^2}{2} \chi^2 \varphi_a^2 + \int d^4x \left\{ \frac{a^2}{2} \xi \chi^2 \pi_0^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{b^2}{16} \left(\chi^4 \ln\left(\frac{\chi^4}{\chi_G^4}\right) - (\chi^4 - \chi_G^4) \right) \right\}, \quad (11)$$

which takes into account axial and scale anomalies, and where a cut-off Λ has been included in the functional trace in order to take into account the lack of renormalizability*.

The main contribution to the partition function comes from the point which minimizes the effective action. Mathematically, this corresponds to finding the saddle point approximation to the path integral while, physically, it corresponds to a maximization of the pressure. In the present model, such an extremality condition leads to gap equations (or Dyson–Schwinger equations) for the constituent quark masses similar to that of the usual NJL model, but for a χ dependence:

$$a^2 \chi_s^2 (M_u - m_u) = 8N_c M_u g_{M_u, \beta, \mu_u}, \quad (12)$$

$$a^2 \chi_s^2 (M_s - m_s) = 8N_c M_s g_{M_s, \beta, \mu_s}, \quad (13)$$

with

$$g_{M_i, \beta, \mu_i} = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_k \frac{1}{k_i^{*2} + M_i^2}, \quad i = u, s,$$

and $k_i^* = (k_0 - i\mu_i, \vec{k})$, $k_0 = (2n+1)\pi\beta$, the odd Matsubara frequencies being related to the anti-commutating nature of the fermions.

Moreover, there is a new equation, corresponding to the extremality condition for the dilaton field (this latter equation also contains the constituent quark masses):

*The cut-off breaks scale invariance. Supplementing it with a dilaton field, as described in [38], allows to restore it.

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ -\frac{a^2}{2\chi_0^2} \left[M_u^{02} \left(1 - \frac{m_u}{M_u^0} \right)^2 + \frac{M_s^{02}}{2} \left(1 - \frac{m_s}{M_s^0} \right)^2 \right] \right\} \\
& \times \frac{[(\Lambda\chi_0)^2 + M_u^{02}]^{\frac{2N_c\Lambda^4}{8\pi^2}}}{\chi_0^{b^2/2}} [(\Lambda\chi_0)^2 + M_s^{02}]^{\frac{N_c\Lambda^4}{8\pi^2}} \\
& = \exp \left\{ -\frac{a^2}{2\chi_s^2} \left[M_u^2 \left(1 - \frac{m_u}{M_u} \right)^2 + \frac{M_s^2}{2} \left(1 - \frac{m_s}{M_s} \right)^2 \right] \right\} \\
& \times \frac{[(\Lambda\chi_s)^2 + M_u^2]^{\frac{2N_c\Lambda^4}{8\pi^2}}}{\chi_s^{b^2/2}} [(\Lambda\chi_s)^2 + M_s^2]^{\frac{N_c\Lambda^4}{8\pi^2}}. \tag{14}
\end{aligned}$$

In the 2-degenerate flavor case, we then have two coupled equations: one is the gap Equation (12), while the other is (14) without the strange content. Since they are nonlinear, we can expect different results compared to a pure NJL model. And indeed, we have different results: according to the set of parameters, we can have a second or first order phase transition (restoration of chiral symmetry) w.r.t. the temperature, at zero density. The usual NJL model only allows a second order phase transition. When a third quark with a different mass is added, such as the strange quark, we have one more gap equation and the behaviour can be even more complicated: noncoincident second order phase transition for both quarks, or coincident first order, or noncoincident first order, or a first transition for one species while the other feels a second order phase transition. It is clear that in such a complicated situation, working with the gap equations, coming from a derivative condition, can be a very hard task and it is useful to turn to a global condition, looking directly at the great potential (or the pressure).

2. THERMODYNAMICS

In the previous section, we have described the scaled NJL model. This section gathers results at finite temperature. We shall focus on analytical results for the thermodynamics. We shall then show our numerical results concerning the condensates and the thermodynamics in Section 3. We shall take parameters not necessarily in agreement with experiment but usefull to illustrate the meaning of some proposition. From this point of view, the NJL model is a very interesting toy model.

QCD has two phase transitions: a deconfinement transition corresponding to going from a hadronic gas to a quark-gluon plasma, and a transition leading to a phase where the chiral symmetry is restored. Lattice calculations [39, 40]

suggest that these two transitions coincide. In a purely gluonic theory, the (lattice) transition is of first order (for $N_c = 3$). However, when quarks are introduced, the order of the transition depends on the number of light flavors. With $N_f = 3$ massless flavors, QCD has a first order chiral transition, not connected to the pure gluonic one. When the mass of the quarks is varied, the two first order transitions are separated by a region in which there is a crossover. According to the type of calculations — Wilson fermions [41] or staggered (Kogut–Susskind) fermions [42] — QCD ($m_u \approx m_d \approx 10$ MeV, $m_s \approx 200$ MeV) appears to be in the first order region, or in the crossover region, respectively. It is then presently unclear which case occurs and we have the freedom to play with the parameters in such a way as to allow for both types of transitions*.

The deconfining transition is hard to study in existing models, although such models have been designed, *e.g.*, [48]. However, chiral symmetry breaking and its restoration can be studied in effective models. Both deconfinement and chiral symmetry restoration transitions are seen to be coincident on the lattice. In the following, we shall take the point of view that the study of the chiral phase transition can shed light on the deconfining transition. We shall also take the point of view that gluon confinement is linked to the gluon condensate χ_s , although this hypothesis is questionable [35,49].

There is a constraint between the quark and gluon condensates, which shows up into the form of three coupled equations for the three condensates, see Eqs. (12)–(14). We can then get, according to the strength of this constraint, a first order transition (discontinuous passage from one phase to the other, see Fig. 2) or a second order transition (continuous transition from one phase to the other, see Fig. 3). (The pictures are shown in Section 3.) The analytical results given in this section have been discussed in [34,50]. As already stated we work at the mean field level. The groups of Rostock [51,52], Heidelberg [53–55] and Nikolov et al. [56] go beyond this approximation, studying the first $1/N_c$ corrections and showing that they are not negligible at low temperature and density (because pions are almost massless).

A. Pressure, Energy Density, Entropy Density, Bag Constant. In this section we want to understand the equilibrium properties of a strongly interacting matter, *i.e.*, determine the relations associated to the thermodynamics of a hot and dense system. The system is modeled by an effective action of the NJL type (free massive constituent quarks) with a dilaton field included**, Eq. (11). In a grand-canonical system, the partition function is given by

*Note that the distinction between pure gauge deconfinement and light quark chiral phase transition is of prime importance: the energy scales are different. Pure gauge transitions occur at a temperature of about 260 MeV while, with two light flavors, the critical temperature is around 150 MeV [39,40,43–45], or even as low as 140 MeV according to [46,47].

**For the thermodynamics of a scaled linear sigma model, see [57] and references therein

$$\mathcal{Z} = \exp(-\beta\Omega), \quad (15)$$

where Ω is the thermodynamical potential (or grand potential). We exclusively consider a system in equilibrium: all the descriptions (micro-canonical, canonical, grand-canonical) are equivalent. However the grand-canonical description is the easiest. In the canonical formalism, the basic quantity is the Helmholtz free energy and the independent variables are the temperature, the pressure and the densities (one for each chemical potential). Since phase transitions occur at a constant chemical potential, and not at a constant density, it has always to be checked if a lower energy solution, obtained by separating the system into subsystems, exists [58]. Working in the grand-canonical formalism, where the independent variables are the temperature, the pressure and the chemical potentials, there is a direct access to the solutions corresponding to the minimum of the thermodynamical potential. Equation (15) leads to the identification

$$I_{\text{eff}} = \beta\Omega. \quad (16)$$

Since [58,59]

$$d\Omega = -SdT - Pd\Omega - \rho_i d\mu_i \quad (i = u, d, s), \quad (17)$$

we get

$$P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \right)_{T, \mu_i}. \quad (18)$$

This implies

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(\mathcal{Z})}{\partial \Omega} \Bigg|_{T, \mu_i}. \quad (19)$$

Physically, the pressure is not an absolute quantity. We have to consider it with respect to a reference system which is chosen to be the (nonperturbative) vacuum, of pressure P_0 . Defining $P - P_0 = P'$ and replacing P' by P , we then have

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(\mathcal{Z}/\mathcal{Z}_0)}{\partial \Omega} \Bigg|_{T, \mu_i}. \quad (20)$$

Subtracting the vacuum, the lowest order of the action is

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}}^s(\varphi_a^s, \chi_s) &\equiv I_{\text{eff}}^s(M_u, M_s, \chi_s) = \\ &I_{(\mu, \beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s) + I_{(0, \infty)}^s(M_u, M_s, \chi_s) - I_{(0, \infty)}^s(M_u^0, M_s^0, \chi_0). \end{aligned} \quad (21)$$

The first term is the Fermi part, which does not need being regularized,

$$I_{(\mu,\beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s) = -\beta\Omega \frac{2N_c}{2\pi^2\beta} \sum_{i=u,s} a_i \int_0^\infty k^2 dk \times \left\{ \ln \left(1 + \exp[-\beta(E_i + \mu_i)] \right) + \ln \left(1 + \exp[-\beta(E_i - \mu_i)] \right) \right\}, \quad (22)$$

where* $E_i = \sqrt{k^2 + M_i^2}$, and $a_u = 2, a_s = 1$, while the Dirac part ($T = \mu = 0$) has to be regularized and is given by

$$\begin{aligned} I_{(0,\infty)}^s(M_u, M_s, \chi_s) - I_{(0,\infty)}^s(M_u^0, M_s^0, \chi_0) = & -\beta\Omega \left\{ \frac{2N_c}{32\pi^2} \sum_{i=u,s} a_i \right. \\ & \times \left[(\Lambda\chi_s)^4 \ln \frac{(\Lambda\chi_s)^2 + M_i^2}{(\Lambda\chi_0)^2 + M_i^{02}} - M_i^4 \ln \frac{(\Lambda\chi_s)^2 + M_i^2}{M_i^2} \right. \\ & + M_i^{04} \ln \frac{(\Lambda\chi_0)^2 + M_i^{02}}{M_i^{02}} \\ & - \left(\frac{1}{2}(\Lambda\chi_s)^4 - \frac{1}{2}(\Lambda\chi_0)^4 \right) + \left((M_i\Lambda\chi_s)^2 - (M_i^0\Lambda\chi_0)^2 \right) \Big] \\ & + \left[(\chi_s^4 - \chi_0^4) \left(\frac{b^2}{16} + \frac{a^2}{4\chi_0^2} (\sigma_0^2 + \sigma_8^2) \right) \right. \\ & - \sum_{i=u,s} a_i \left(\frac{a^2\chi_s^2}{4} M_i^2 \left(1 - \frac{m_i}{M_i} \right)^2 - \frac{a^2\chi_0^2}{4} M_i^{02} \left(1 - \frac{m_i}{M_i^0} \right)^2 \right) \\ & \left. \left. - \frac{b^2}{16} \chi_s^4 \ln \left(\frac{\chi_s}{\chi_0} \right)^4 \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

With the action (21), Eq. (20) gives

$$P = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial I_{\text{eff}}^s(M_u, M_s, \chi_s)}{\partial \Omega}, \quad (24)$$

which leads to

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{\beta\Omega} \left[I_{(\mu,\beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s) + \right. \\ & \left. + I_{(0,\infty)}^s(M_u, M_s, \chi_s) - I_{(0,\infty)}^s(M_u^0, M_s^0, \chi_0) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

*When no confusion is possible between the 4-momentum k and the 3-momentum $\vec{k}$, we use the notation k for $|\vec{k}|$.

The physical meaning of this equation is that the grand potential is an extensive quantity:

$$\Omega = -P\Omega. \quad (26)$$

Mathematically, the mean field approximation corresponds to finding the minimum of the action. Equation (26) shows the physics attached to this condition: the system chooses the phase where the pressure is a maximum.

Quark densities can be evaluated from (17) and are given by

$$\rho_i = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} \right)_{T, \Omega} = - \frac{1}{\beta \Omega} \left(\frac{\partial I_{\text{eff}}^s}{\partial \mu_i} \right) = - \frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 (n_{i+} - n_{i-}) dk, \quad (27)$$

where

$$n_{i\pm} = \frac{1}{1 + \exp[\beta(E_i \pm \mu_i)]}. \quad (28)$$

If we work in the isospin limit ($m_u = m_d$) for a symmetric matter ($\mu_u = \mu_d$), it is clear that $\rho_u = \rho_d$.

The entropy density can also be evaluated from (17) and is given by

$$s \equiv \frac{S}{\Omega} = - \frac{1}{\Omega} \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) I_{(\mu, \beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s). \quad (29)$$

Only the Fermi part appears in this formula since this is the only one which depends upon temperature. When $T \rightarrow 0$ the entropy density s goes to zero, in agreement with the third principle of thermodynamics.

Finally, the internal energy is given by [58, 59]

$$\begin{aligned} E \equiv \Omega + TS + \mu_i \rho_i &= \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \mu_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} \right) \Omega = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta} \mu_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} \right) I_{\text{eff}}^s(M_u, M_s, \chi_s). \end{aligned} \quad (30)$$

This gives the energy density

$$\begin{aligned} \epsilon \equiv \frac{E}{\Omega} &= \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta} \mu_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} \right) I_{(\mu, \beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s) \\ &+ \frac{1}{\beta \Omega} \left[I_{(0, \infty)}^s(M_u, M_s, \chi_s) - I_{(0, \infty)}^s(M_u^0, M_s^0, \chi_0) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Like the pressure, the energy density is a relative quantity: (31) gives the density of the system w.r.t. the vacuum energy.

B. Bag Constant B . Following [47, 60], we write

$$P = P_{\text{ideal gas}} - B(\beta, \mu_u, \mu_s), \quad (32)$$

$$\epsilon = \epsilon_{\text{ideal gas}} + B(\beta, \mu_u, \mu_s), \quad (33)$$

$$Ts = P_{\text{ideal gas}} + \epsilon_{\text{ideal gas}} - \mu_i \rho_i, \quad (34)$$

with

$$\begin{aligned} P_{\text{ideal gas}} &= -\frac{I_{(\mu, \beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s)}{\beta\Omega} = \\ &= \frac{N_c}{3\pi^2} \sum_{i=u,s} a_i \int_0^\infty \frac{k^4}{E_i} (n_{i+} + n_{i-}) dk, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ideal gas}} &= \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta} \mu_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} \right) I_{(\mu, \beta)}^s(M_u, M_s, \chi_s) \\ &= \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{i=u,s} a_i \int_0^\infty k^2 E_i (n_{i+} + n_{i-}) dk, \end{aligned} \quad (36)$$

being quantities relative to a massive free quark system. The interaction measure, which is an indication of nonperturbative effects, is

$$\epsilon - 3P = 4B + \frac{N_c}{\pi^2} \sum_{i=u,s} a_i M_i^2 \int_0^\infty \frac{k_i^2}{E_i} (n_{i+} + n_{i-}) dk. \quad (37)$$

In Eqs. (32) and (33), we have defined a temperature and density dependent (through M_u, M_s, χ_s) bag constant* B . It depends on the Dirac contribution (23) to the pressure:

$$B(\beta, \mu_u, \mu_s) = \frac{1}{\beta\Omega} \left\{ I_{(0, \infty)}^s(M_u, M_s, \chi_s) - I_{(0, \infty)}^s(M_u^0, M_s^0, \chi_0) \right\}. \quad (38)$$

The definition (38) is different from [30, 37, 54, 61] because two new effects are implemented: *i*) we take into account the explicit breaking of chiral symmetry (even if $m_u = 0$, we have $m_s \neq 0$: the strange quark contribution can be nonnegligible); *ii*) as already stated, Eq. (38) takes into account the effects of the gluons. Moreover, (38) conceptually differs from the definition [54] where the bag constant is zero in the chirally restored phase. Finally, it is different from the bag constant B' introduced in [29, 31, 38]. In these references, it is only obtained

*In [47, 60], there is no glueball: the bag constant is purely chiral. Our bag constant is then a generalization of these references.

at zero temperature and density, through the definition of B' , being identical to the energy difference between the perturbative vacuum and the true vacuum*.

In the perturbative vacuum, the chiral symmetry is restored and the gluon condensate vanishes. Then, according to [29],

$$B' = \frac{1}{\beta\Omega} \left\{ I_{(0,\infty)}^s(0,0,0) - I_{(0,\infty)}^c(M_u^0, M_s^0, \chi_0) \right\} = \frac{1}{16} m_{GL}^2 \chi_0^2, \quad (39)$$

with $m_{GL}^2 = b^2 \chi_0^2$. In $SU(3)$, implementing $m_s = 0$ in the definition of the perturbative vacuum makes no sense. However, we shall see that the value of $B'^{1/4}$ is not so far from that of $B^{1/4}$ (38) (for $T \gg$) so that the use of (39) in [29,31,38] is verified *a posteriori*. This remark also applies for the effect of χ_s which does not go down to zero.

Note that in [61], the authors study both the chiral symmetry restoration and the effects of the gluon condensate. They however define two bag constants, one associated to the restoration of scale symmetry, the other to the restoration of chiral symmetry.

C. High Temperature Zero Density Limit ($T > T_c$). In a phase where chiral symmetry is restored — in this section, we mean the phase where the constituent quark mass goes to the current quark mass ($M_i = m_i$, $i = u, s$) even if we are not in the chiral limit — we have $m_s/T \lesssim 1$: a high temperature expansion in m_s/T is possible [50,62,63]. Calculations are lengthy and left to Appendix A. We work at zero density. Our results are a generalization of the latter references where only a limited number of terms in the m_s/T expansion have been retained while we are able to give here the full expansion, involving only elementary functions. Note that to describe the results in Section 3, the first four terms will be enough ($T > T_c$, with T_c the critical temperature) so that we only keep them in the following. For the pressure, we get

$$P_{\text{ideal gas}} \approx T^4 \left(\frac{7}{60} N_c \pi^2 - \frac{N_c}{12} \frac{m_s^2}{T^2} - \frac{N_c}{8\pi^2} \frac{m_s^4}{T^4} \ln \frac{m_s}{\pi T} + \right. \\ \left. + \frac{N_c}{16\pi^2} \left(\frac{3}{2} - 2\gamma \right) \frac{m_s^4}{T^4} + \dots \right), \quad (40)$$

where γ is the Euler constant**.

*One can also take the equivalent definition of considering it only through the glueball Lagrangian (decoupling between the glueball and the other fields). We have $B = \frac{1}{4} < \theta_{\mu\mu} > = \frac{b^2}{16} \chi^4 = \frac{1}{16} m_{GL}^2 \chi^2$.

**In [54], the massless free quark limit is unreachable, by construction: the d^3k regularization introduces a cut-off Λ for each Fermi or ideal gas quantity. These quantities, for example $P_{\text{ideal gas}}$, behave then at high temperature as Λ/T , decreasing to zero. This drawback is not present in this work, where we have chosen a d^4k regularization for the vacuum while the Fermi part is not regularized.

Note that the case of finite chemical potentials is much more complex and, to our knowledge, has never been treated to all orders in the fermionic case. (In the bosonic case, the constraint $\mu_i < M_i$ (not present in the fermionic case) allows a high temperature expansion (m_i/T and $\mu_i/T \lesssim 1$) to all orders [64–66].)

Above T_c , the bag constant B is temperature independent and writes

$$B = \frac{1}{\beta\Omega} \left\{ I_{(0,\infty)}^s(0, m_s, \chi_c) - I_{(0,\infty)}^s(M_u^0, M_s^0, \chi_0) \right\}, \quad (41)$$

where χ_c is the gluon condensate above T_c . Note that, for any set of parameters (M_u^0, χ_0) , we could not get $\chi_c = 0$. In our model there is never a complete gluon deconfinement. This is related to the fact that gluons are only poorly incorporated in our formalism (we have no explicit temperature dependence of the gluon condensate since the modeling of the gluon anomaly is through a temperature independent potential (see last term of Eq. (11)); we also do not have the right number of gluonic d.o.f.).

The energy density is given by (31), so that

$$\varepsilon_{\text{ideal gas}} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial I_{(\mu,\beta)}^s}{\partial \beta}, \quad (42)$$

i.e., using (16) and (26),

$$\varepsilon_{\text{ideal gas}} = -\frac{\partial}{\partial \beta}(\beta P_{\text{ideal gas}}). \quad (43)$$

With (40), the high temperature, zero density, expansion gives (Appendix A)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{ideal gas}} \approx T^4 & \left(\frac{7}{20} N_c \pi^2 - \frac{N_c}{12} \frac{m_s^2}{T^2} + \right. \\ & \left. + \frac{N_c}{8\pi^2} \frac{m_s^4}{T^4} \ln \frac{m_s}{\pi T} + \frac{N_c}{16\pi^2} \left(2\gamma + \frac{1}{2} \right) \frac{m_s^4}{T^4} + \dots \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Finally, (16) and (26) applied to (29) lead to

$$s = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \beta P_{\text{ideal gas}}, \quad (45)$$

or, equivalently, to

$$s = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} P_{\text{ideal gas}} = \frac{\partial}{\partial T} P_{\text{ideal gas}}. \quad (46)$$

The high temperature, zero density, expansion of the entropy density is then (Appendix A)

$$Ts \approx T^4 \left(\frac{7}{15} N_c \pi^2 - \frac{N_c}{6} \frac{m_s^2}{T^2} + \frac{N_c}{8\pi^2} \frac{m_s^4}{T^4} + \dots \right). \quad (47)$$

The results (40), (44) and (47) are used in Section 3.

D. Low Temperature Zero Density Limit. To simplify the discussion, we limit ourselves to the zero density case. If M_u^0 is of the order of 400 MeV, the low temperature expansion (see Appendix A) is valid up to $T \approx 100$ MeV. Indeed, masses and condensates are not varying within this range of temperatures, see Section 3, and the expansion parameters βM_u and βM_s are then large enough — we have at worst $\beta M_u \approx 4$ — to allow a stationary phase expansion of (35):

$$P_{\text{ideal gas}} \approx \frac{4N_c \beta^{-5/2}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i=u,s} a_i M_i^{3/2} e^{-\beta M_i} + \text{corrections}, \quad (48)$$

where $a_u = 2, a_s = 1$. To get the corrections*, it is better to work with (35) written in terms of K_2 , of which the asymptotic behavior is well known. The method is explained in Appendix A which also contains the low temperature zero density expansion of the energy and entropy densities.

The results relative to this section are given in Section 3B. They necessitate the knowledge of the behavior of the condensates as a function of temperature, given in Section 3A.

3. RESULTS

We show the variation as a function of temperature of the quark and gluon condensates in Section 3A. We then discuss the results relative to the thermodynamics in Section 3B.

A. Condensates. The quark and gluon condensates are given by

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}u \rangle &\equiv \frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial I_{\text{eff}}^c}{\partial m_u}(M_u, M_s, \chi_s) = \\ &= -\frac{1}{2} a^2 \chi_s^2 (M_u - m_u) = -4N_c M_u g_{M_u, \beta, \mu_u}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{s}s \rangle &\equiv \frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial I_{\text{eff}}^c}{\partial m_s}(M_u, M_s, \chi_s) = \\ &= -\frac{1}{2} a^2 \chi_s^2 (M_s - m_s) = -4N_c M_s g_{M_s, \beta, \mu_s}, \end{aligned} \quad (50)$$

and by Eq. (14). The constituent quark masses M_u and M_s used in these equations come from the gap equations (12), (13). When $m_u = 0$, $M_u = 0$ is always a solution of (12), so that it has to be checked if it corresponds to a greater pressure.

*Corrections to (48) are negligible only if $\beta M_i \gtrsim 40$. However their number is limited for βM_i as low as 4. In Appendix A, we quantitatively discuss the importance of these corrections with respect to the value of βM_i .

We define a second order transition to be a transition for which the slope of the pressure as a function of the external parameters T, μ is continuous (this includes both true second order transitions and crossovers); otherwise it is said to be of the first order. Different behaviors show up according to the chosen set of (model) parameters and to the external (temperature and density) parameters: we can have two first order transitions, coincident or not, or two second order transitions. We can also have a second order transition for one species of quark while the other experiences a first order transition.

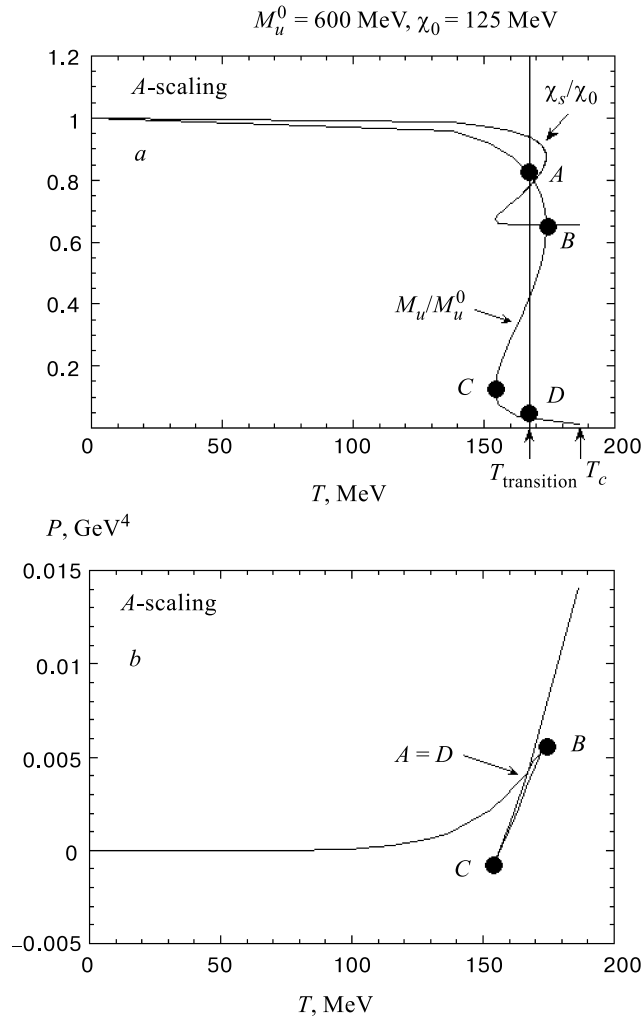


Fig. 2. Up constituent quark mass transition (with $m_u \neq 0$)

A discontinuous slope for the pressure means a discontinuous condensate: there is a mass gap. This is illustrated in Fig. 2.

Since the pressure at point A is identical to the pressure at point D, the transition takes place between these two points. Only the region from B to C is unstable: there is metastability between A and B and between C and D.

Note that looking graphically at the pressure to find the transition point is manageable only in the two degenerate flavor model at zero density or temperature. In that case, the strategy is the following. Given M_u , the corresponding χ_s can be extracted from Eq. (14) with the strange quark contribution removed (two-flavor case). We can then use this couple (M_u, χ_s) to extract the corresponding temperature from the gap equation, Eq. (12). There is only one solution. (Should we have fixed the temperature, we should have to solve two coupled equations (12),(14) with the problem that, for a first order transition, several solutions are possible.) We then get the ABCD curve of Fig. 2(a). To get the transition point it is then enough to look at the pressure, Fig. 2(b).

Of course, as soon as more variables (μ_u, μ_s, M_s) are introduced, this strategy is not anymore of interest. We have to solve the full set of coupled equations (12)–(14) as a function of chemical potentials and temperature. Because of possible first order transitions, several local extrema of the pressure show up so that it is necessary to use a numerical algorithm searching for global extrema. In our work [50], we used the simulated annealing algorithm that we adapted from [67].

In order to save place, we restrict ourselves to two sets of parameters:

$$(i) \quad M_u^0 = 300 \text{ MeV}, \quad \chi_0 = 80 \text{ MeV}, \quad (51)$$

$$(ii) \quad M_u^0 = 600 \text{ MeV}, \quad \chi_0 = 125 \text{ MeV}. \quad (52)$$

Figure 3 is for the set (51) and corresponds to a second order phase transition w.r.t. the temperature for vanishing chemical potentials. It is similar to results obtained in the two-flavor case [29, 31]. The choice $M_u = 350 \text{ MeV}$, $\chi_0 = 450 \text{ MeV}$ would almost corresponds to a pure NJL model with a critical temperature of $T_c \approx 193 \text{ MeV}$. The gluon condensate is almost flat, so that the quark and gluon condensates are almost uncoupled. In contrast, the choice (51) leads to a greater coupling between condensates and the critical temperature is lowered ($T_c \approx 150 \text{ MeV}$ in the chiral limit*, see Fig. 4). Such a low temperature is in agreement with lattice results [40, 45–47].

Working in the three-flavor version of the model, these two pictures show also the strange quark condensate, for which we can make two remarks:

- $\langle \bar{s}s \rangle$ decreases slower than $\langle \bar{u}u \rangle$, in agreement with [68]. This can be traced back to the greater constituent strange quark mass compared to the up

*The two-flavor case leads to a critical temperature of 140 MeV.

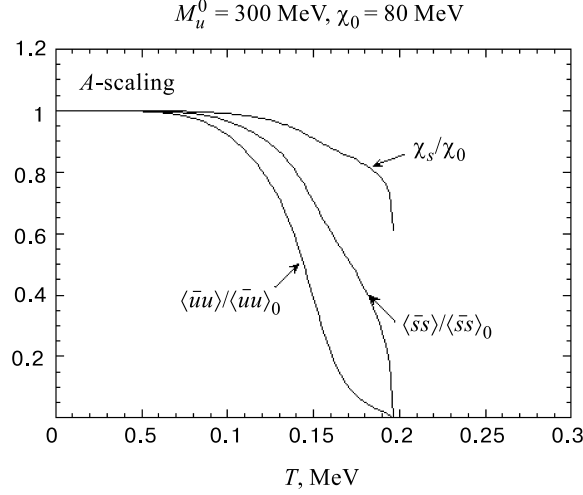


Fig. 3. Quark and gluon condensates as a function of temperature for the parameters $M_u^0 = 300$ MeV, $\chi_0 = 80$ MeV*

quark which, in turn, is a consequence of a greater current strange quark mass compared to the up one**. Note however that our results show a faster decrease of $\langle \bar{s}s \rangle$ with temperature than in [69];

- Because of the coupling between the condensates, the gluon condensate at the transition, χ_c , is smaller than in the two-flavor case. For the set (51), we have $\chi_c(SU(2)) \approx 0.8$ while Fig.3 shows $\chi_c(SU(3)) \approx 0.6$.

Figure 5 is the analogue of Fig.3 for the set of parameters (52). This set allows one to get a first order phase transition [29,38]. The coupling between quark and gluon condensates is so strong that all the condensates undergo the transition together. At zero density, the above analysis shows that:

- We can reproduce both first and second order phase transitions. A first order transition is typically an effect due to the gluon condensate which then does not show up in pure NJL models;
- A low critical temperature, as low as 140 MeV, can be reproduced. This is clearly related to the coupling between quark and gluon condensates. Pure

*Pictures 3,5–8 are reprinted from

- Nuclear Physics A582, M.Jaminon, B. Van den Bossche, « $SU(3)$ Scaled Effective Lagrangians for a Hot and Strange System», p.517–567, Copyright 1995.

- Nuclear Physics A582, M.Jaminon, B. Van den Bossche, «Phase Transition and Thermodynamics of a Hot and Dense System in a Scaled NJL Model», p.515–538, Copyright 1996 with permission from Elsevier Science.

**Note that, in the two-flavor limit, where $M_s, m_s \rightarrow \infty$, we have $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{s}s \rangle_0 = 1$.

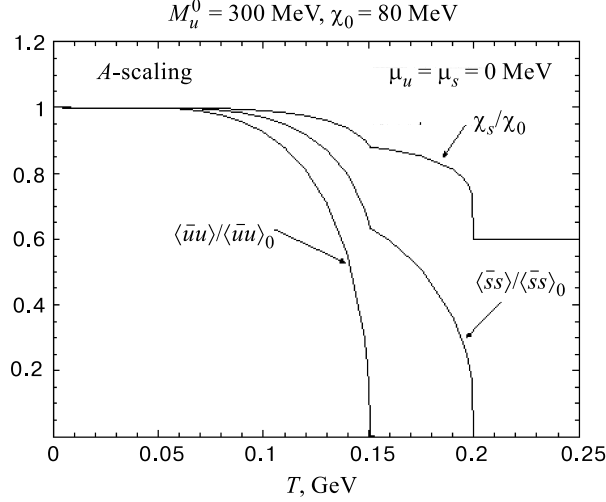


Fig. 4. Quark and gluon condensates as a function of temperature for the parameters $M_u^0 = 300$ MeV, $\chi_0 = 80$ MeV in the light quark chiral limit $m_u = m_d = 0$ MeV

NJL models are then unable to reproduce such a low temperature: they cannot go below $T_c \approx 190$ MeV. In fact, it can be shown from the gap Equation (12) that the critical temperature is given by (for a second order phase transition in the two-flavor case)

$$T_c = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Lambda \chi_c}{\pi} \left(1 - \frac{8\pi^2 a^2}{4N_c \Lambda^2} \right)^{1/2}. \quad (53)$$

According to this equation, scaled models allow (for second order transitions) a reduction of the critical temperature in the ratio χ_c/χ_0 compared to a pure NJL model;

- The coupling between quark and gluon condensates is mainly driven by the value of the vacuum gluon condensate χ_0 . With large χ_0 , the coupling is weak while the coupling becomes more and more important as we decrease χ_0 . The quark or gluon condensate can then be considered as the order parameter for the phase transition.

It should however not be forgotten that all the above analysis is performed without vector mesons. Without them, our results show that high values of the gluon condensate are needed to get a transition above the normal nuclear matter density ρ_0 , see Fig. 5 of [31].

Although the scaled models are not able to reproduce a transition above the normal nuclear density for a small value of the gluon condensate (which leads to a low critical temperature), it does not mean that they are inefficient. Indeed, it

is well known that vector mesons make the vacuum stiffer against the restoration of chiral symmetry [71,72]. Including these mesons will then correct what seems to be, at first sight, a drawback of the model.

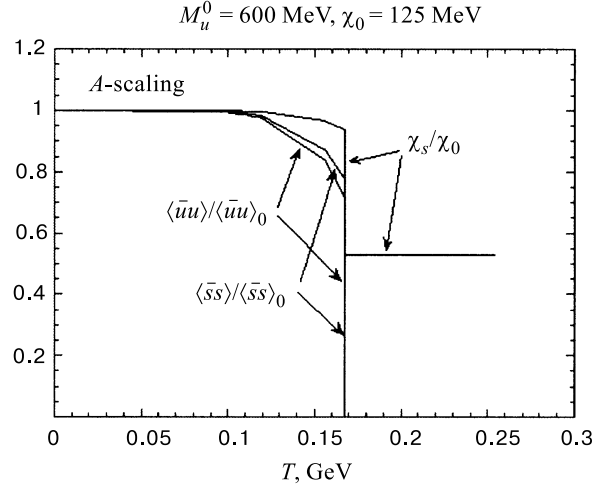


Fig. 5. Quark and gluon condensates as a function of temperature for the parameters $M_u^0 = 600 \text{ MeV}$, $\chi_0 = 125 \text{ MeV}$

B. Thermodynamics. In this section, we present results relative to the pressure (equation of state), the energy density and the entropy density that we have adapted from [34,50]. Because we would like to emphasize some points relative to fits, we first take the somehow unusual way to present these quantities as a function of T^4 (pressure, energy density) or T^3 (entropy density). This allows us to separate curves corresponding to different parameters. Once these results will have been presented, we shall redraw some of our results in the usual way (pressure or energy density or T times the entropy density, over T^4 , as a function of T), allowing us to make a more direct comparison with the general shape of these quantities as obtained in lattice calculations. Pressure, energy and entropy densities are obtained from (25), (31), and (29), respectively. The general behavior of these quantities can be understood (at vanishing density) from Eqs. (32)–(34) with asymptotic behaviors given in Appendix A and summarized in Sections 2C and 2D.

Pressure. The behavior of the pressure is shown in Fig. 6(a) for a vanishing density. As the strange quark mass m_s is different from zero, the behavior of the pressure above T_c is not the usual T^4 law: in addition to the bag constant (41) which is taken into account through the decomposition (32), the massive free gas part has the temperature expansion (40).

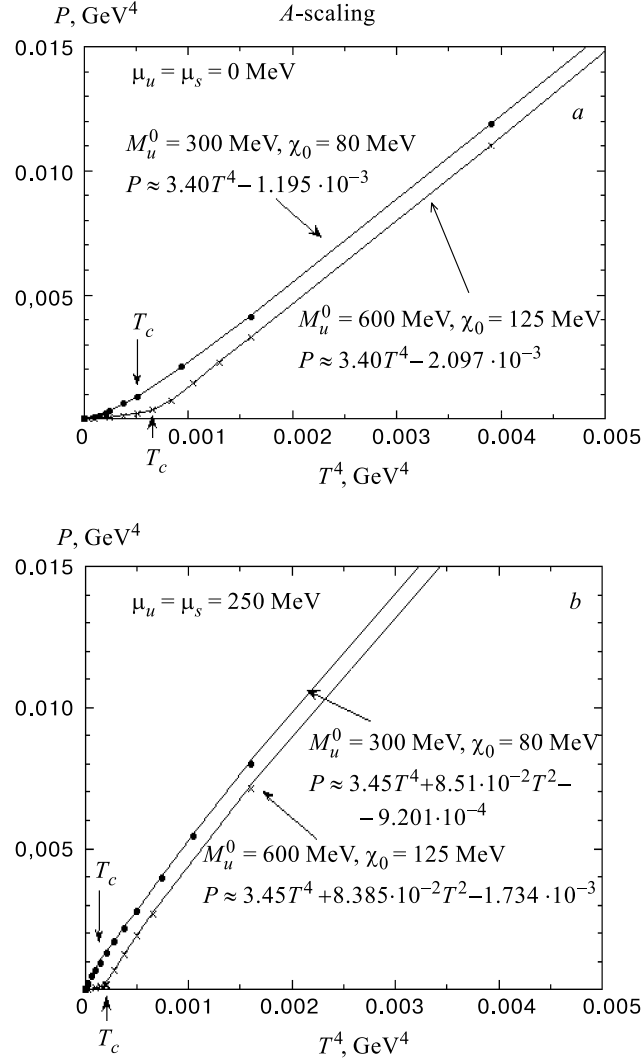


Fig. 6. Pressure as a function of T^4 for the set of parameters (51,52) for $\mu_u = \mu_d = \mu_s = 0 \text{ MeV}$ (a); for $\mu_u = \mu_d = \mu_s = 250 \text{ MeV}$ (b)

Figure 6(a) shows also the linear fit in T^4 which is valid in the phase where the chiral symmetry is restored:

$$P \approx 3.40 T^4 - 1.195 \cdot 10^{-3} \quad (54)$$

for the set (51), and

$$P \approx 3.40 T^4 - 2.097 \cdot 10^{-3} \quad (55)$$

for the set (52). Note that the coefficient of T^4 is not equal to the coefficient $7N_c\pi^2/60$ (≈ 3.454) of the term T^4 in the expansion (40). Because of the limited range of temperatures investigated in Fig. 6, the corrective terms to the factor T^4 in the expansion (40) change the apparent slope, and the constant term in (54) cannot be identified with the bag constant B . When a fit is realized with all the terms* of the expansion (40), plus a constant C to adjust, this one equals $C^{1/4} \approx 179$ MeV for the set (51) and $C^{1/4} \approx 207$ MeV for the set (52). These values are close to $B^{1/4} \approx 183$ MeV (set (51)) and $B^{1/4} \approx 209$ MeV (set (52)) obtained from a direct calculation of the exact bag constant (41). This shows the consistency of our numerical results and the fast convergence of the expansion (40), even if the expanding parameter m_s/T is not so small! Note also that the numerical values of $B^{1/4}$ extracted from the exact bag constant (41) or extracted from the fits are not so far from $B'^{1/4}$ given by the approximate Equation (39). The latter is valid if we ignore the coupling between the quark and gluon condensates, and gives $B'^{1/4} = 161$ MeV (set (51)) and $B'^{1/4} = 201$ MeV (set (52)). This justifies *a posteriori* the introduction of the approximate bag constant (39) in the references [29,30,38]**.

This discussion shows that it could be quite dangerous to extract numerical values from fits: one could be tempted to identify the bag constant from the constant term in (54) and (55). The above analysis shows clearly that it would be wrong.

Beyond the transition, the behavior of the pressure versus temperature depends on the order of the transition. For the set (52), βM_i ($i = u, s$) remains quite large, so that the T behavior is described in a first approximation by (48). However, a careful analysis shows that this expansion is not well suited for $\beta M_s \leq 20$, or even for $\beta M_s \leq 40$, and that the expansion (A35) should be used instead. The exponential behavior $e^{-\beta M_s}$ is however still correct. For the set (51), the phase transition is of second order so that M_u is progressively decreasing. This implies that the expansion (A35) cannot be used over the whole range $T < T_c$ and, even more, that it is too crude to describe this behavior. We have however found that the expansion (A34), with the sum limited to $n = 1$ and $n = 2$, is well suited for temperatures below 100 MeV.

*By all the terms we mean the terms which are included in (40). Indeed the precision is sufficient and we do not have to take into account more terms defined in (A32).

**It should however be stressed that it is better to work with the exact expression since an error in $B^{1/4}$ is amplified when going to B .

Note that for an analysis based on the $1/N_c$ expansion [51, 53–55, 74], it has been shown that the pions give the largest contribution to the thermodynamical quantities at low temperature*. In the chiral limit where the pions are massless, their behavior is in T^4 , which effectively shows they have a bigger contribution than (48) based on the high constituent quark mass. This is an example where the $1/N_c$ approach to the lowest order is not valid (see [6]).

The above analysis shows that an important ingredient is not included: indeed, the T^4 obtained for $P_{\text{ideal gas}}$ does not contain the gluonic d.o.f., as indicated previously. In the chiral limit, we should have

$$P_{\text{ideal gas}} = \frac{\pi^2}{90} \left\{ 2N_g + \frac{7}{8} N_c N_f 4 \right\} T^4 \approx 5.2 T^4, \quad (56)$$

with $N_g = 8$ if $N_c = 3$.

Although the gluon condensate is in part due to these gluonic d.o.f., gluons do not contribute to the thermodynamics. To take into account the thermodynamics of a purely gluonic system, we should add to the Lagrangian (11) a temperature dependent potential $V_\chi(T)$. This has for example been noticed in [37, 77, 78]. The choice of this potential should be such that it leads to the behavior (56).

Figure 6(b) is the analogue of figure 6(a) for the choice $\mu_u = \mu_s = 250$ MeV. These values correspond to a strong coupling between the condensates $\langle \bar{u}u \rangle$ and $\langle \bar{s}s \rangle$ for the set (52), and to a weak coupling for the set (51). With a chemical potential, there is no possible T^4 linear fit. This can be seen considering the chiral limit ($m_u = m_d = m_s = 0$) of (32) with (35). This leads to

$$P = \frac{7}{60} N_c \pi^2 T^4 + \frac{N_c}{2} \mu^2 T^2 + \frac{N_c \mu^4}{4\pi^2} - B. \quad (57)$$

Because $m_s \neq 0$, Eq.(57) has to be modified. Figure 6(b) shows that the T^4 part is not modified compared to (57), while the T^2 part is slightly smaller. Once again, this shows that one has to be very careful when making fits. The coefficient of the T^4 term is not identical to the one of (54): the supplementary terms in (40), and terms coming from the chemical potential, have a repercussion upon all the terms of the fit.

Energy. The behavior of the energy density versus temperature, as given by (33) and (36), is represented in Fig. 7. At high temperature and for vanishing density, the whole expansion (A37) can be restricted to the first four terms (44), which perfectly describe the curves above the chiral transition. For the sets (51) and (52), we get the linear T^4 fits

$$\varepsilon \approx 10.271 T^4 + 0.877 \cdot 10^{-3} \quad (58)$$

*This is in agreement with the results [75] based on chiral perturbation theory [76].

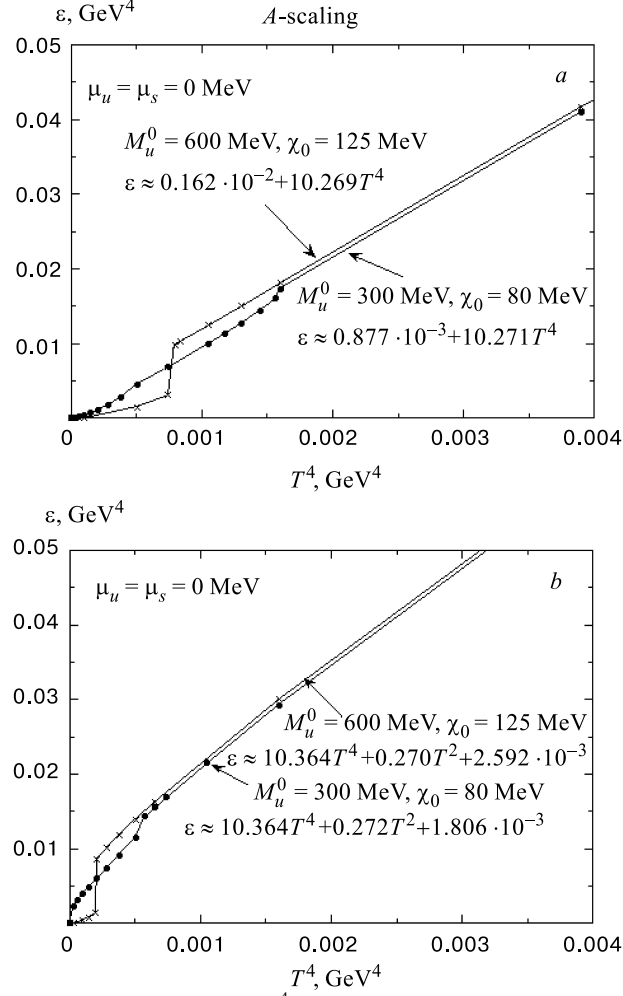


Fig. 7. Energy density as a function of T^4 for the set of parameters (51,52) for $\mu_u = \mu_d = \mu_s = 0$ MeV (a); for $\mu_u = \mu_d = \mu_s = 250$ MeV (b)

and

$$\varepsilon \approx 10.269 T^4 + 1.620 \cdot 10^{-3}, \quad (59)$$

respectively.

It is useful to stress once more the difficulties one encounters to extract meaningful information from fits such as (58) and (59), since the constant terms in (58) and (59) are not the opposite of (54) and (55), while the exact Eqs. (32) and (33) show clearly that they should. In fact, all the terms from the expansion

(44) contribute to the determination of the coefficients of the fits in the restricted range of temperatures investigated.

The expansion (44) is perfectly adequate since a fit from its different terms plus a constant C to be adjusted gives $C^{1/4} \approx 182$ MeV for the set (51) and $C^{1/4} \approx 208$ MeV for the set (52), in excellent agreement with the results obtained from the behavior of the pressure. Figure 7 shows that the order of the transition and the nature of the coupling (strong or weak) between the quark condensates are very well visualized with the help of the energy density curves: there is a jump at T_c if the transition is of first order, while there is a change of slope quite visible if it is a true* second order transition.

This is the case for the set (51), see Fig. 4: the transition is of second order for the up quarks while the strange quarks feel a first order transition. There is then a change of the slope of $\varepsilon(T)$ at T_{uc} and an energy jump at T_{sc} , see Fig. 7(a).

The behavior below the transition can be understood from Eq. (A39), with the same restrictions as in the case of the pressure, for the corresponding set of parameters.

Figure 7(b) is the analogue of Figure 7(a) for $\mu_u = \mu_s = 250$ MeV. Chemical potentials introduce a T^2 dependence in the simpler case of chiral limit. We have, with $\mu \equiv \mu_u = \mu_s$,

$$\varepsilon = \frac{7}{20} N_c \pi^2 T^4 + \frac{3}{2} N_c \mu^2 T^2 + \frac{3}{4} N_c \frac{\mu^4}{\pi^2} + B. \quad (60)$$

This equation comes from (36) or, more directly, from (31) together with (16) and (26). Figure 7(b) shows also that having m_s different from zero does not affect too much the second term of (60), and introduces a constant supplementary term. All the remarks concerning the fits are also valid here.

Entropy. For a massless free quark gas, the entropy density behaves like T^3 . Since the strange current quark mass does not vanish, the high temperature expansion has correcting terms. Equations (34), (40) and (44) give the first three terms of Ts (temperature times the entropy density) in powers of T^2 , leading to Eq. (47). The complete expansion is given by (A43).

Figure 8(a) shows that Eq. (47) can be approached by a linear expression in T^3 in the given range of temperatures:

$$s \approx 13.839 T^3 - 0.912 \cdot 10^{-2}, \quad (61)$$

and

$$s \approx 13.868 T^3 - 0.136 \cdot 10^{-1}, \quad (62)$$

for the set of parameters (51) and (52), respectively.

*We mean a transition which is not a crossover, *i.e.*, we are in the chiral limit.

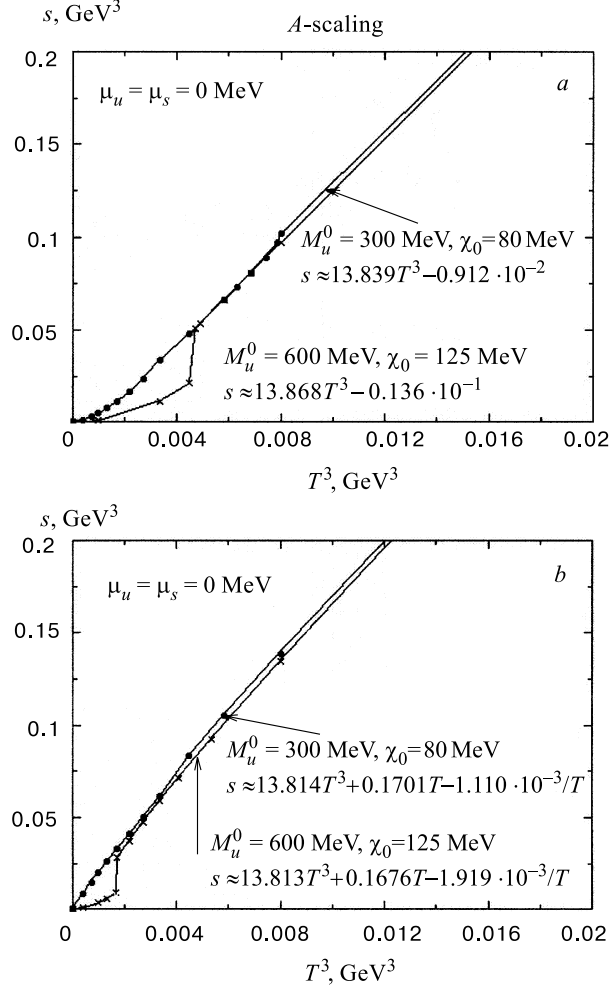


Fig. 8. Entropy density as a function of T^3 for a set of parameters (51,52) for $\mu_u = \mu_d = \mu_s = 0 \text{ MeV}$ (a); for $\mu_u = \mu_d = \mu_s = 250 \text{ MeV}$ (b)

Although the numerical results seem to fit exactly the relation (29), the T^3 coefficients of (61) and (62) do not correspond to the combination of Eqs. (54), (55), (58), (59). This remark confirms once more what we claimed in the pressure and energy density case: it is dangerous to extract information from fits if we do not take care of possible corrections. In our case, fits in T^4 (for pressure and energy) and in T^3 (for entropy) do not help to get the bag constant or the number of excited d.o.f. The more complete forms (40), (44), and (47) have to be considered.

The behavior of the entropy below the chiral transition can be understood using (A45) with the same warning as in the pressure case, for the corresponding set of parameters.

Figure 8(b) shows the entropy behavior for nonvanishing chemical potentials. Using Eqs. (34), (57), and (60), and the density (27) in the limit where all masses are vanishing

$$\rho \equiv \sum_i \rho_i = \frac{N_c \mu^3}{\pi^2} + N_c \mu T^2, \quad (63)$$

we get

$$Ts = \frac{7}{15} N_c \pi^2 T^4 + N_c \mu^2 T^2, \quad (64)$$

which has to be modified in order to take into account the finite value of m_s . It is worth noticing that m_s only slightly affects the T^2 term of (64).

As a conclusion to these results, we can mention that, above the chiral transition, all the d.o.f. of the model are excited. However the vanishing mass limit of QCD is not reached for two reasons [70]:

- The gluon d.o.f. are not included at high temperature. A temperature and density dependent potential $V_\chi(T, \mu)$ should be taken into account;
- The strange quark mass is not negligible. We need going to very high temperatures in order that the lowest term in T^4 subsists in the expansion m_s/T .

We should also notice that the $1/N_c$ corrections in references [51, 53–55, 74] show that the low temperature thermodynamics is driven by pion motion, pions being much lighter than the constituent quark mass. Since the quark loop contribution takes into account thermal excitations of quarks with mass $M \gtrsim 300$ MeV (whose probability is reduced by the Boltzmann factors $\exp(-\beta M)$), the low temperature thermal excitations are completely dominated by the almost massless pions. To obtain the effects of pions in our results, we should integrate over the meson fields in the path integral formalism, which is however beyond the scope of this paper.

Even with the above-mentioned limitations, the scaled NJL models have important new features: some gluonic effects are included through the gluon condensate χ which couples the up and strange quark condensates. Thanks to this coupling, our model allows simultaneous transitions for the up and strange sectors (strong coupling), even though they tend to remain uncoupled for high chemical potentials. The coupling then allows first order transitions as a function of temperature while, within a pure NJL, they are always of the second order* (e.g. [8, 79]).

*The pure NJL model does, however, allow first order transitions w.r.t. density, e.g. [7].

C. Comparison with Lattice QCD. To make a comparison with lattice QCD*, it can be advantageous to normalize P , ε , Ts and the interaction measure $(\varepsilon - 3P)$ to T^4 . The interaction measure gives the nonperturbative contribution to the thermodynamics: it vanishes in the Stefan–Boltzmann limit. It is also interesting to plot $3P$ and ε in the same picture to see how sharp is the increase of the corresponding thermodynamical function. The origin of the coefficient 3 in front of P compared to ε comes from the coincidence of their respective asymptotic T^4 behavior (see the comparison between Eq. (40) and Eq. (44)). In the same spirit, one can normalize the entropy density by a factor $3/4$ (see Eq. (47)). In this way, $3P$, ε and $3sT/4$ have the same asymptotic value $7N_c\pi^2/20$, which is a direct consequence of the number of d.o.f. which enters the model. Note that the quantities we examine are relative to the quarks. In our simplified model, the glueball only enters through the bag constant.

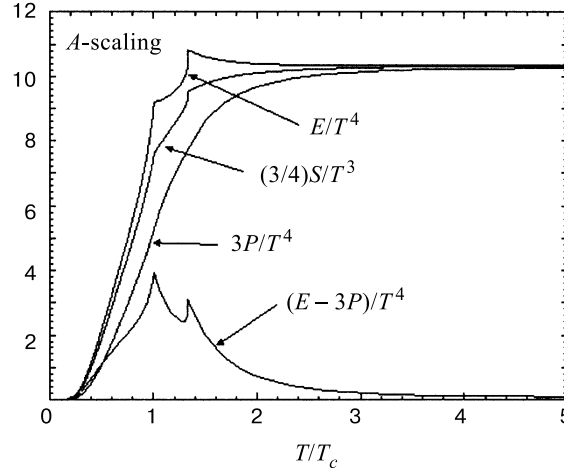


Fig. 9. Pressure, energy density, entropy density and interaction measure for a set of parameters (51,52) $M_u^0 = 300$ MeV (a); for $\chi_0 = 80$ MeV

In Fig. 9 we show both the pressure and the energy and entropy densities of the A-scaling NJL model versus T/T_c ($T_c = 150$ MeV) for the set of parameters (51) ($M_u^0 = 300$ MeV, $\chi_0 = 80$ MeV), with $m_u = 0$. Here, we have taken the critical temperature corresponding to the chiral symmetry restoration connected to the up quarks.

*Because lattice QCD has only turned recently towards finite density, see *e.g.* [80], we restrict ourselves to $\mu_u = \mu_s = 0$.

Several interesting points have to be mentioned. One expects from lattice studies, *e.g.*, [39,40,45], that the thermodynamical quantities are almost vanishing below T_c , then increasing. This increase is very sharp for ε and Ts , while the pressure approaches the Stefan–Boltzmann limit very slowly. Lattice calculations show also that ε/T^4 has a peak* just above T_c , then approaching its asymptotic value from above. Finally, they also show that $\varepsilon - 3P \neq 0$ above T_c . Our results, summarized in Fig. 9, show that the model is in qualitative agreement with lattice results. The quantitative difference can be understood in the following way: lattice calculations show a rapid variation of the entropy density in a narrow region of T (≈ 10 MeV), which is traced back to the liberation of quarks and gluons. It seems then quite trivial to relate this fast increase to the confinement-deconfinement properties, which are not included in our model. This is clearly seen in the entropy density calculated with our model where the entropy is already increasing (although not as fast as near T_c) for T as low as $0.2T_c$. Once this entropy curve is understood, the general behavior of P and ε can also be deduced, see, *e.g.*, [81]. It is explicitly shown in that reference that, starting with a sharp entropy density, the energy density has a peak, and that the pressure increase above T_c is low. In fact, would the entropy be approximated by a step, we should have the exact result

$$\frac{P(T)}{P_{SB}(T)} \sim 1 - \left(\frac{T_c}{T}\right)^4, \quad (65)$$

which gives $P/P_{SB} = 50\%$ (90%) for $T/T_c = 1.2$ (1.8), independently of the details of the model. Since we are far from a step for the entropy, P/T^4 has an even weaker T dependence. This is shown in the general model for the entropy [81] and is confirmed by our particular model. On the same ground, it can also be shown that the interaction measure $(\varepsilon - 3P)/T^4$, given in Eq. (37), has a peak above T_c .

We have seen that the general behavior can be understood from the analysis of [81] which, together with the lack of confinement of our model, explains the quantitative disagreement between lattice gauge calculations and scaled NJL ones. However, our figure shows nice features not discussed extensively in the literature. If we concentrate on the energy density, it is clear that the peak has its slope broken in two places. These broken slope points coincide with the temperature where the chiral symmetry is restored. Since the current up quark mass is zero, the transition corresponding to the up quarks has no tail (see Fig. 4), leading to the first slope discontinuity while, because the transition of the strange quarks is of first order, there is in fact a jump in the energy density. Since this jump is small, it looks like a discontinuous slope. To get a nice peak, one then has to

*This is not the case for a pure gauge theory.

consider only crossovers (second order transition with nonvanishing current quark masses). Note also that a gap in energy only transforms into a change of slope for the pressure, while a change of slope in the energy plot is almost invisible in the pressure. It is evident that the energy density is the adequate quantity to be investigated in order to have insights on the order of the transition, and for extracting the critical temperature*.

Figure 10 illustrates that the broken peak of Figure 9 is due to the combined effect of a second order phase transition for the up quarks (in the chiral limit $m_u = 0$) and a weak first order transition for the strange quarks. We have taken the set of parameters ($M_u^0 = M_s^0 = 400$ MeV, $\chi_0 = 350$ MeV). In that case, there is only one critical temperature, and the transition is of second order, with the critical temperature given precisely by Eq. (53).

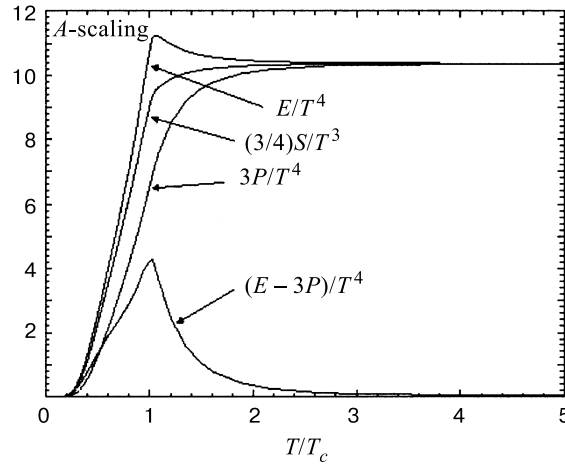


Fig. 10. Pressure, energy density, entropy density and interaction measure for a set of parameters (51,52) $M_u^0 = M_s^0 = 400$ MeV (a); for $\chi_0 = 350$ MeV

All we have said for the energy density remains valid for the interaction measure (two peaks in Fig. 9 which, with $m_u \neq 0$ and a second order transition for the strange quarks, would lead to a single peak). This gives, in the limit of three degenerate flavors, the interaction measure of Fig. 10. Note that, in the chiral limit, the interaction measure just gives $4B/T^4$ (for $T \geq T_c$), B being the bag constant, see Eq. (37).

*This information can of course be obtained from the reconstruction of the quark condensates.

4. CONCLUSIONS

In this contribution, we have introduced a modified version of the Nambu–Jona-Lasinio model which takes into account the axial and scale anomalies of QCD. The model is not renormalizable, nor has it the confinement property. However, it has the dynamical breaking of chiral symmetry included and we have worked with the hypothesis that its restoration at high temperature and density is equivalent to studying the confinement-deconfinement phase transition.

We have mainly focused on analytical results for thermodynamical functions and have shown that working with different flavors introduce typical behavior for these functions.

ACKNOWLEDGMENTS

I wish to thank J. Cugnon, M. Jaminon, and Yu. L. Kalinovsky for friendly and critical discussions concerning parts of the material included here.

I wish also to thank the organizers and participants of the «Deconfinement at Finite Temperature and Density» Workshop, Dubna (Russia), October 1997 for the nice working atmosphere during the whole duration of the workshop. Most of all, I am indebted to L. Kalinovskaya for having made it running smoothly, and the Heisenberg–Landau program of the BMBF for having made it possible.

I am very grateful to V. Makoveeva and V. Makoveev for logistic support in Dubna. This work has been completed with the support of the Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires de Belgique.

Appendix A HIGH AND LOW TEMPERATURE EXPANSION OF THERMODYNAMICAL FUNCTIONS

1. Pressure. For a vanishing chemical potential, Eq. (35) reads

$$P_{\text{ideal gas}} = 2 \frac{N_c}{3\pi^2} \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{k^4}{E_u} \frac{1}{1 + e^{\beta E_u}} dk + \int_0^\infty \frac{k^4}{E_s} \frac{1}{1 + e^{\beta E_s}} dk \right\}. \quad (\text{A1})$$

Only one of these terms has to be analyzed. We define

$$P_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{2N_c}{3\pi^2} M_s^4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \frac{(y^2 - 1)^{3/2}}{1 + e^\varepsilon e^{M_s \beta y}} dy, \quad (\text{A2})$$

where the infinitesimal quantity ε will allow one to regularize the summation that will be encountered in the following. Expanding, we get

$$P_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{2N_c}{3\pi^2} M_s^4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} \int_1^{\infty} (y^2 - 1)^{3/2} e^{-nM_s\beta y} dy, \quad (\text{A3})$$

which can be expressed in terms of the modified Bessel function of order two [82]

$$P_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} \frac{K_2(nM_s\beta)}{n^2 M_s^2 \beta^2}. \quad (\text{A4})$$

This series has also been investigated in [29]. Because of the fast decrease due to the $1/n^2$ factor and because of the asymptotic behavior of K_2 , it can be numerically more advantageous to use (A4) than (A3).

a. High Temperature Zero Density Expansion. The converging factor ε in (A3) and (A4) is necessary to obtain nondiverging quantities in the high temperature expansion. In such an expansion, only the first two terms are finite. Following [82],

$$K_2(z) = 2z^{-2} \left(1 - \frac{z^2}{4}\right) + \frac{1}{8} z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+3)}{k!(2+k)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k - \ln \frac{z}{2} I_2(z), \quad (\text{A5})$$

where ψ is the Digamma function (defined as $d \ln \Gamma(z)/dz$ with $\Gamma(z)$ the Euler Gamma function) [82],

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \text{with } \psi(1) = -\gamma, \quad (\text{A6})$$

and where $I_2(z)$ is the other modified Bessel function of order two [82]

$$I_2(z) = \frac{z^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k. \quad (\text{A7})$$

In (A6), γ is the Euler constant.

The logarithm $\ln(z)$ in $K_2(z)$ implies a singularity at the origin. There is no Taylor expansion around it. This problem, and the way to circumvent it through the converging factor, has been established in [62] for a fermionic gas (only the first few terms of the expansion are given) and in [64–66] for a bosonic case where a full expansion, valid also at nonzero density, has been given.

Combining (A5) and (A7), we obtain

$$\left(\frac{2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) + \left(\frac{z^2}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k \times \\ \times \left[\frac{1}{2} (\psi(k+1) + \psi(k+3)) - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right]. \quad (\text{A8})$$

This leads to

$$P_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(nM_s\beta)^2} \left(\frac{2}{(nM_s\beta)^2} - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{(nM_s\beta)^2}{4} \right)^k \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2} (\psi(k+1) + \psi(k+3)) - \ln\left(\frac{(nM_s\beta)}{2}\right) \right] \right\}. \quad (\text{A9})$$

The first two terms are easy to determine and coincide with the two nondiverging terms from the Taylor expansion around $M_s = 0$. They give

$$\frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \left\{ \frac{2}{M_s^4 \beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2M_s^4 \beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (\text{A10})$$

They are tabulated in [82] and can be expressed through the use of the Riemann zeta function*

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (\text{A11})$$

$$\zeta(-2m) = 0, \quad m=1,2,\dots, \quad (\text{A12})$$

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1} \pi^{2m} |B_{2m}|}{(2m!)}, \quad \text{with } m=1,2,\dots \text{ and } B \text{ the Bernoulli numbers}, \quad (\text{A13})$$

*For $\text{Re}(z) \leq 0$ which we shall need in the following, a converging factor $e^{-n\varepsilon}$ is needed.

which leads to

$$\frac{7}{180}N_c\pi^2T^4 - \frac{N_c}{12}M_s^2T^2. \quad (\text{A14})$$

The contribution of the term $k = 0$ is rewritten in the form

$$\begin{aligned} \frac{2N_c}{4\pi^2}M_s^4 \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} \left(\frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(3)) - \ln\left(\frac{M_s\beta}{2}\right) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} \ln n \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

Using

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} n^z = (1 - 2^{1+z})\zeta(-z), \quad (\text{A16})$$

we have

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} n^z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} n^z \ln n \equiv \frac{d}{dz} \left((1 - 2^{1+z})\zeta(-z) \right), \quad (\text{A17})$$

which leads to

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} n^z \ln n = -(\ln 2)2^{1+z}\zeta(-z) - (1 - 2^{1+z})\zeta'(-z), \quad (\text{A18})$$

where $\zeta'(-z) \equiv \frac{d}{dz}\zeta(z)\}_{-z}$.

$\zeta(0)$ is obtained from

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} = -\frac{e^{-n\varepsilon}}{1 + e^{-n\varepsilon}} = -\frac{1}{2} \text{ when } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\text{A19})$$

while $\zeta'(0)$ is given in [82]

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi. \quad (\text{A20})$$

With (A19) and (A20), (A15) gives

$$\frac{2N_c}{4\pi^2}M_s^4 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln\left(\frac{M_s\beta}{2}\right) \right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) \right\}. \quad (\text{A21})$$

We still need the $k > 0$ terms of the expansion. With (A16) and (A18), they are

$$\frac{2N_c}{4\pi^2} M_s^4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_s \beta)^{2k}}{k!(k+2)!4^k} \left[\frac{1}{2} \left(\psi(k+1) + \psi(k+3) - 2 \ln \left(\frac{M_s \beta}{2} \right) \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - 2^{1+2k}) \zeta(-2k) + (\ln 2) 2^{1+2k} \zeta(-2k) + (1 - 2^{1+2k}) \zeta'(-2k) \right] \right\}. \quad (\text{A22})$$

Equation (A6) implies

$$\begin{aligned} \psi(1) &= -\gamma, \\ \psi(3) &= -\gamma + \frac{3}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

so that (A12), (A14), (A21), (A22) lead to

$$\begin{aligned} P_{\text{ideal gas}}(s) &= \frac{7}{180} N_c \pi^2 T^4 - \frac{N_c}{12} M_s^2 T^2 + \\ &+ \frac{N_c}{16\pi^2} M_s^4 \left(-2\gamma + \frac{3}{2} \right) - \frac{N_c}{8\pi^2} M_s^4 \ln \left(\frac{M_s \beta}{\pi} \right) + \\ &+ \frac{N_c}{2\pi^2} M_s^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_s \beta)^{2k}}{k!(k+2)!4^k} (1 - 2^{1+2k}) \zeta'(-2k). \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

It is clear that the converging factor has regularized the summation* of the expansion. Note from (A24) that the separation into a logarithmic term and a constant one is arbitrary: one can always write $\ln(a M_s \beta) = \ln(M_s \beta) + \ln a$ (a being a dimensionless constant) and put $\ln a$ into the constant term. This has some importance for the interpretation of the high temperature results.

To write (A24) into a form involving only elementary functions, we still need to know $\zeta'(-2k)$ ($k \geq 1$), *i.e.*,

$$-\frac{1}{(1 - 2^{1+2k})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\varepsilon} n^{2k} \ln n, \quad (\text{A25})$$

because of (A18) and (A12). Using [82]

$$2^{1-z} \Gamma(z) \zeta(z) \cos \left(\frac{\pi z}{2} \right) = \pi^z \zeta(1-z) \quad (\text{A26})$$

*Summations of this kind are called Euler sums [83].

and

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (\text{A27})$$

we have

$$2^{1-z} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \zeta(z) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \pi^z \Gamma(1-z) \zeta(1-z), \quad (\text{A28})$$

so that

$$\lim_{z \rightarrow -2k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \zeta(z) = (-1)^k 2^{-2k-1} \pi^{-2k} \Gamma(1+2k) \zeta(1+2k). \quad (\text{A29})$$

With

$$\lim_{z \rightarrow -2k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \zeta(z) = \frac{0}{0} = \frac{\pi \zeta'(-2k)}{\pi \cos(-2\pi k)} = \zeta'(-2k), \quad (\text{A30})$$

we finally obtain

$$\zeta'(-2k) = \frac{1}{2} (-1)^k (2\pi)^{-2k} \Gamma(1+2k) \zeta(1+2k). \quad (\text{A31})$$

Equation (A24) is then rewritten into the form

$$\begin{aligned} P_{\text{ideal gas}}(s) &= \frac{7}{180} N_c \pi^2 T^4 - \frac{N_c}{12} M_s^2 T^2 + \\ &+ \frac{N_c}{16\pi^2} M_s^4 \left(-2\gamma + \frac{3}{2} \right) - \frac{N_c}{8\pi^2} M_s^4 \ln\left(\frac{M_s \beta}{\pi}\right) + \\ &+ \frac{N_c}{2\pi^2} M_s^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_s \beta)^{2k}}{k!(k+2)!4^k} (1 - 2^{1+2k}) \frac{1}{2} (-1)^k (2\pi)^{-2k} \Gamma(1+2k) \zeta(1+2k), \end{aligned} \quad (\text{A32})$$

which only necessitates the evaluation of known functions.

b. Low Temperature Zero Density Expansion. We can search for a low temperature expansion, $\beta \rightarrow \infty$, starting from (A1) or (A4). The last one is better suited because of the well known asymptotic expansion of K_2 [84]

$$\begin{aligned} K_i(z) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4i^2 - 1}{8z} + \frac{(4i^2 - 1)(4i^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(4i^2 - 1)(4i^2 - 9)(4i^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

Combining (A4) and (A33), we have

$$P_{\text{ideal gas}}(s) \approx \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 M_s^2 \beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{2n M_s \beta}} e^{-n M_s \beta} \\ \times \left\{ 1 + \frac{15}{8n M_s \beta} + \frac{15 \cdot 7}{2!(8n M_s \beta)^2} + \frac{15 \cdot 7 \cdot (-9)}{3!(8n M_s \beta)^3} + \dots \right\}. \quad (\text{A34})$$

When β is large, we are in the chirally broken phase where the quark masses are the constituent masses. Since the expanding parameter is βM_i , $i = u, s$, the approximation (A34) becomes better as βM_i is increased. In Section 3, it is shown that the mass variation is low for $T \lesssim 100$ MeV. For a constituent quark mass of about 400 MeV (at $T = 0$) βM_i is, at least, 4. The expansion (A34) is then perfectly justified. In that case, the first term $n = 1$ is enough and the pressure is

$$P_{\text{ideal gas}}(s) \approx \frac{4N_c \beta^{-5/2}}{(2\pi)^{3/2}} M_s^{3/2} e^{-M_s \beta} \\ \times \left\{ 1 + \frac{15}{8M_s \beta} + \frac{15 \cdot 7}{2!(8M_s \beta)^2} + \frac{15 \cdot 7 \cdot (-9)}{3!(8M_s \beta)^3} + \dots \right\}. \quad (\text{A35})$$

We have checked that for the set of parameters ($M_u^0 = 300, \chi_0 = 80$) MeV (see Section 3) this expansion is not well suited. In that case, the second term $n = 2$ in (A34), as well as the three corrections to «1» for both $n = 1$ and $n = 2$, are necessary to reproduce results valid up to 100 MeV.

c. Finite Density, Zero Temperature. For finite density at vanishing temperature, Eq. (35) can be exactly integrated. We have $n_{i+} = 0$, $n_{i-} = \theta(\mu_i - E_i)$ and $\mu_i = \sqrt{k_{F_i}^2 + M_i^2}$, where k_{F_i} is the Fermi momentum of the i th flavor, so that

$$P_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{N_c}{3\pi^2} \int_0^{k_{F_s}} dk \frac{k^4}{E_s}, = \\ = \frac{N_c}{3\pi^2} \left\{ k_{F_s}^3 \mu_s - 3 \left[\frac{k_{F_s}^3}{4} \mu_s^3 - \frac{M_s^2}{8} k_{F_s} \mu_s - \frac{M_s^4}{8} \ln \left(\frac{k_{F_s} + \mu_s}{M_s} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A36})$$

2. Energy Density. *a. High Temperature Zero Density Expansion.* The combining of Eqs. (43), (A32) immediately gives

$$\varepsilon_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{7}{60} N_c \pi^2 T^4 - \frac{N_c}{12} M_s^2 T^2 + \\ + \frac{N_c}{16\pi^2} M_s^4 \left(2\gamma + \frac{1}{2} \right) + \frac{N_c}{8\pi^2} M_s^4 \ln \left(\frac{M_s \beta}{\pi} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{N_c}{2\pi^2} M_s^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_s \beta)^{2k}}{k!(k+2)!4^k} (2k+1)(1-2^{1+2k}) \times \\
& \times \frac{1}{2} (-1)^k (2\pi)^{-2k} \Gamma(1+2k) \zeta(1+2k). \quad (\text{A37})
\end{aligned}$$

b. Low Temperature Zero Density Expansion. Equation (43) is not well-suited because it would imply taking the derivative of a truncated series (see Eq. (A34)). It is better to search for the expansion of the exact solution in terms of the modified Bessel function obtained in [50]

$$\varepsilon_{\text{ideal gas}}(s) = 3P_{\text{ideal gas}}(s) + \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{K_1(nM_s \beta)}{nM_s \beta}. \quad (\text{A38})$$

Its low temperature asymptotic expansion is obtained from Eq. (A34) for the first term and from Eq. (A33) with $i = 1$ [84] for the second one. We then have

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{ideal gas}}(s) & \approx 3 \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 M_s^2 \beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{2nM_s \beta}} e^{-nM_s \beta} \\
& \times \left\{ 1 + \frac{15}{8nM_s \beta} + \frac{15 \cdot 7}{2!(8nM_s \beta)^2} + \frac{15 \cdot 7 \cdot (-9)}{3!(8nM_s \beta)^3} + \dots \right\} \\
& + \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{nM_s \beta} \sqrt{\frac{\pi}{2nM_s \beta}} e^{-nM_s \beta} \\
& \times \left\{ 1 + \frac{3}{8nM_s \beta} + \frac{3 \cdot (-5)}{2!(8nM_s \beta)^2} + \frac{3 \cdot (-5) \cdot (-21)}{3!(8nM_s \beta)^3} + \dots \right\}. \quad (\text{A39})
\end{aligned}$$

Once again we can limit ourselves to $n = 1$ or $n = 1, 2$, depending upon the chosen set of parameters (M_u^0, χ_0) . However the first two or three corrections to «1» are necessary.

c. Finite Density, Zero Temperature. As for the pressure, Eq. (36) can be exactly integrated. It is however more judicious to use the vanishing nature of the entropy at $T = 0$ in order to get (Eq. (34)),

$$\varepsilon_{\text{ideal gas}} = -P_{\text{ideal gas}} + \mu_i \rho_i, \quad (\text{A40})$$

where ρ_i is given by Eq. (27), *i.e.*,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \rho_i = \frac{N_c}{3\pi^2} k_{F_i}^3. \quad (\text{A41})$$

Using (A36), (A40) and (A41), we obtain

$$\varepsilon_{\text{ideal gas}}(s) = \frac{N_c}{\pi^2} \left[\frac{k_{F_s}}{4} \mu_s^3 - \frac{M_s^2}{8} k_{F_s} \mu_s - \frac{M_s^4}{8} \ln \left(\frac{k_{F_s} + \mu_s}{M_s} \right) \right]. \quad (\text{A42})$$

3. Entropy Density. *a. High Temperature Zero Density Expansion.* The use of Eqs. (46), (A32) gives

$$\begin{aligned}
 s(s) = & \frac{7}{45} N_c \pi^2 T^3 - \frac{N_c}{6} M_s^2 T + \frac{N_c}{8\pi^2} M_s^4 \beta - \\
 & - \frac{N_c}{2\pi^2} M_s^4 \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_s \beta)^{2k}}{k!(k+2)!4^k} 2k(1 - 2^{1+2k}) \times \\
 & \times \frac{1}{2} (-1)^k (2\pi)^{-2k} \Gamma(1+2k) \zeta(1+2k). \quad (\text{A43})
 \end{aligned}$$

b. Low Temperature Zero Density Expansion. We can obtain this expansion starting from Eq. (34) with $\mu_i = 0$:

$$s(s) = \beta(P_{\text{ideal gas}}(s) + \varepsilon_{\text{ideal gas}}(s)), \quad (\text{A44})$$

so that, using Eqs. (A34), (A39), we have

$$\begin{aligned}
 s(s) \approx & 4\beta \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 M_s^2 \beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{2nM_s \beta}} e^{-nM_s \beta} \times \\
 & \times \left\{ 1 + \frac{15}{8nM_s \beta} + \frac{15 \cdot 7}{2!(8nM_s \beta)^2} + \frac{15 \cdot 7 \cdot (-9)}{3!(8nM_s \beta)^3} + \dots \right\} + \\
 & + \frac{2N_c}{\pi^2} M_s^4 \beta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{nM_s \beta} \sqrt{\frac{\pi}{2nM_s \beta}} e^{-nM_s \beta} \times \\
 & \times \left\{ 1 + \frac{3}{8nM_s \beta} + \frac{3 \cdot (-5)}{2!(8nM_s \beta)^2} + \frac{3 \cdot (-5) \cdot (-21)}{3!(8nM_s \beta)^3} + \dots \right\}. \quad (\text{A45})
 \end{aligned}$$

Once again we can limit ourselves to $n = 1$ or $n = 1, 2$, depending upon the chosen set of parameters (M_u^0, χ_0) . However the first two or three corrections to «1» are necessary.

c. Finite Density, Zero Temperature. It is clear that

$$s(s) = 0, \quad (\text{A46})$$

in agreement with the third principle of thermodynamics.

REFERENCES

1. **Cheng T.P., Li L.F.** — Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Clarendon Press, Oxford, 1984.
2. **Nambu Y., Jona-Lasinio G.** — Phys. Rev., 1961, v.122, p.345.
3. **Nambu Y., Jona-Lasinio G.** — Phys. Rev., 1961, v.124, p.246.
4. **Volkov M.K.** — Ann. Phys., 1984, v.157, p.282.
5. **Van den Bossche B.** — A Chiral Quark Model with Three Flavors and Anomalies, In preparation, a preliminary version can be found on nucl-th/9807010, 1998.
6. **Ripka G.** — Quarks Bound by Chiral Fields: the Quark Structure of the Vacuum and of Light Mesons and Baryons, Oxford Studies in Nuclear Physics, Oxford University Press, 1997.
7. **Klevansky S.P.** — Rev. Mod. Phys., 1992, v.64, p.649.
8. **Hatsuda T., Kunihiro T.** — Phys. Rep., 1994, v.247, p.221.
9. **Alkofer R., Reinhardt H., Weigel H.** — Phys. Rep., 1996, v.265, p.139.
10. **Meissner Th. et al.** — Baryons in Effective Chiral Quark Models with Polarized Dirac Sea, Bochum Preprint RUB-TPH-42/93 – hep-ph/9401216, 1994.
11. **Bijnens J.** — Phys. Rep., 1996, v.265, p.369.
12. **Alkofer R., Reinhardt H.** — Chiral Quark Dynamics, Lecture Notes in Physics, New Series m: Monographs, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
13. **Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K.** — In: Progress in Particle and Nuclear Physics, A. Fäbller, ed., v.33, p.1. Pergamon Press, Oxford, 1994.
14. **Vogl U., Weise W.** — In: Progress in Particle and Nuclear Physics, A. Fäbller, ed., v.27, p.195. Pergamon Press, Oxford, 1991.
15. **Weise W.** — Hadrons in the NJL Model. In: Lecture presented at the Center for Theoretical Physics, Seoul National University, Seoul, Korea, Sept. 1992.
16. **Ebert D., Kalinovsky Y.L., Volkov M. K.** — Phys. Lett., 1993, v.B301, p.231.
17. **Kusaka K., Volkov M.K., Weise W.** — Phys. Lett., 1993, v.B302, p.145.
18. **Kalinovsky Y.L., Volkov M. K.** — Mod. Phys. Lett., 1994, v.A9, p.993.
19. **Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R.** — Dynamics of the Standard Model, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Cambridge University Press, 1992.
20. **Veneziano G.** — Nucl. Phys., 1979, v.B159, p.213.
21. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1979, v.B156, p.269.
22. **'t Hooft, G.** — Phys. Rep., 1986, v.142, p.357.
23. **Witten E.** — Ann. Phys., 1980, v.128, p.363.
24. **Di Vecchia P., Veneziano G.** — Nucl. Phys., 1980, v.B171, p.253.
25. **Rosenzweig C., Schechter J., Trahern C.G.** — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.3388.
26. **Schechter J.** — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.3393.
27. **Kleinert H.** — In: Understanding the Fundamental Constituents of Matter, A.Zichichi, ed., p.289, Plenum Press, New York, International School of Subnuclear Physics, Erice, Italy, 1976.
28. **Kleinert H.** — Fortschr. Phys., 1978, v.6, p.565.
29. **Jaminon M., Van den Bossche B.** — Nucl. Phys., 1994, v.A567, p.865.

30. **Jaminon M., Van den Bossche B.** — Nucl. Phys., 1995, v.A582, p.517.
31. **Jaminon M., Van den Bossche B.** — Z. Phys., 1994, v.C64, p.339.
32. **Gomm H. et al.** — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.801.
33. **Jain P., Johnson R., Schechter J.** — Phys. Rev., 1988, v.D38, p.1571.
34. **Van den Bossche B.** — Ph.D. thesis, Université de Liège, 1996.
35. **Roberts C.D., Williams A.G., Krein G.** — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.5607.
36. **Campbell B.A., Ellis J., Olive K.A.** — Phys. Lett., 1990, v.B235, p.325.
37. **Campbell B.A., Ellis J., Olive K.A.** — Nucl. Phys., 1990, v.B345, p.57.
38. **Jaminon M., Ripka G.** — Ann. Phys., 1992, v.218, p.51.
39. **Laermann E.** — Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.1.
40. **Karsch F.** — Nucl. Phys., 1995, v.A590, p.367c.
41. **Iwasaki Y. et al.** — Z. Phys., 1996, v.C71, p.343.
42. **Brown F.R. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.2491.
43. **Schäfer T.** — Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.13.
44. **DeTar C.** — Quark Gluon Plasma in Numerical Simulations of Lattice QCD, hep-ph/9504325, 1995.
45. LATTICE 96, XIV International Symposium on Lattice Field Theory, Nucl. Phys., v.B53 (Proc. Suppl.), 1997.
46. **Kogut J.B., Sinclair D.K., Wang K.C.** — Phys. Lett., 1991, v.B263, p.101.
47. **Koch V., Brown G.E.** — Nucl. Phys., 1993, v.A560, p.345.
48. **Bender A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.3724.
49. **Brown G.E. et al.** — Nucl. Phys., 1993, v.A560, p.1035.
50. **Cugnon J., Jaminon M., Van den Bossche B.** — Nucl. Phys., 1996, v.A598, p.515.
51. **Schmidt S.** — Ph.D. thesis, Universität Rostock, 1995.
52. **Blaschke D. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.A586, p.711.
53. **Hüfner J. et al.** — Ann. Phys., 1994, v.234, p.225.
54. **Zhuang P., Hüfner J., Klevansky S.P.** — Nucl. Phys., 1994, v.A576, p.525.
55. **Zhuang P.** — Phys. Rev., 1995, v.C50, p.2256.
56. **Nikolov E.N. et al.** — Nucl. Phys., 1996, v.A608, p.411.
57. **Carter G.W., Ellis P.J., Rudaz S.** — Nucl. Phys., 1998, v.A628, p.325.
58. **Diu B. et al.** — Éléments de physique statistique, Enseignement des sciences, Hermann, 1989.
59. **Fetter A.L., Walecka J.D.** — Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw-Hill, 1971.
60. **Asakawa M., Yazaki K.** — Nucl. Phys., 1989, v.A504, p.668.
61. **Adami C., Brown G.E.** — Phys. Rep., 1993, v.234, p.1.
62. **Dolan L., Jackiw R.** — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.3320.
63. **Kapusta J.I.** — Finite-Temperature Field Theory, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press, 1989.
64. **Haber H.E., Weldon H.A.** — Phys. Rev. Lett., 1981, v.23, p.1497.
65. **Haber H.E., Weldon H.A.** — Phys. Rev., 1982, v.D25, p.502.

-
66. **Haber H.E., Weldon H.A.** — J. Math. Phys., 1992, v.23, p.1852.
 67. **Goffe W.L., Ferrier G.D., Rogers J.** — J. of Econometrics, 1994, v.60, p.65.
 68. **Blaizot J.-P., Méndez-Galain R.** — Phys. Lett., 1991, v.B271, p.32.
 69. **Rehberg P., Klevansky S.P., Hüfner J.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.410.
 70. **Lutz M., Klimt S., Weise W.** — Nucl. Phys., 1992, v.A542, p.521.
 71. **Méndez-Galain R. et al.** — Europhys. Lett., 1991, v.14, p.7.
 72. **Jaminon M. et al.** — Nucl. Phys., 1992, v.A537, p.418.
 73. **Jaminon M., Ripka G.** — Nucl. Phys., 1993, v.A564, p.505.
 74. **Blaschke D. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.2394.
 75. **Gasser J., Leutwyler H.** — Phys. Lett., 1987, v.B184, p.83.
 76. **Gasser J., Leutwyler H.** — Ann. Phys., 1984, v.158, p.142.
 77. **Kusaka K., Weise W.** — Nucl. Phys., 1994, v.A580, p.383.
 78. **Kusaka K., Weise W.** — Phys. Lett., 1992, v.B288, p.6.
 79. **Klimt S., Lutz M., Weise W.** — Phys. Lett., 1990, v.B249, p.386.
 80. **Barbour I.M., Kogut J.B., Morrison S.E.** — Nucl. Phys., 1997, v.B53 (Proc. Suppl.), p.456.
 81. **Asakawa M., Hatsuda T.** — Nucl. Phys., 1996, v.A610, p.470.
 82. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** — Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, 1965.
 83. **Bender C.M., Orszag S.A.** — Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill Book Company, 1978.
 84. **Abramowitz M., Stegun I.A.** — Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., 1970.

ТЕХНИКА ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МИШЕНЕЙ

Ю.Ф.Киселев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Сделан обзор развития техники твердых мишеней с поляризованными ядрами в последние годы. В обзоре рассмотрены основные особенности поляризации ядер методом динамического охлаждения, техника измерения поляризации ядер со спинами $I = 1/2$ и $I = 1$, ядерное магнитное сверхизлучение и эффект частотной модуляции, усиливающий поляризацию мишеней. Обсуждаются новые перспективы в создании тонких мишеней и их возможное применение для поляризации радиоактивных ядер.

The development of the polarized target technique during the last years is reviewed: the main features of nuclear polarization by the dynamic cooling method, the polarization measurement of nuclei with spins $I = 1$ and $I = 1/2$, the nuclear magnetic superradiance, the effect of frequency modulating microwave that considerably improves nuclear polarization. New prospects of designing thin targets and their possible application for radioactive nuclei polarization are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Поляризованные мишени появились в 60-х годах как инструмент для исследования спиновых взаимодействий в экспериментах по рассеянию частиц на выведенных пучках ускорителей [1]. По мере развития ускорительной техники и повышения энергии пучков использование мишеней позволило приступить к исследованию спиновой структуры нуклонов в процессах глубоконеупругого рассеяния поляризованных лептонов [2, 3]. Широкое применение они получили в нейтронной физике [4–6] и физике твердого тела при изучении ядерного магнитного упорядочения и «псевдомагнетизма» [7]. Центральную роль в разработке механизмов поляризации сыграли классические работы А.Оверхаузера [8], А.Абрагама, К.Джеффриса, Б.Н.Провоторова, М.А.Кожушнера, Л.Л.Буишвили, М.Боргини, В.А.Ацаркина и др., цитируемые по мере изложения в данном обзоре. Первые поляризованные протонные мишени, рабочим веществом которых служили кристаллогидраты, например лантан-магниевого нитрата (LMN), были внедрены в технику физического эксперимента практически одновременно в нескольких институтах (см. [9]). Механизм поляризации ядер в LMN, названный солид-эффектом, обусловлен наличием парных электрон-ядерных спин-спиновых взаимодействий. Этот механизм оказывается весьма эффективным в кристаллах, позволяя в поле порядка 2 Тл и при гелиевых температурах достигать поляризации протонов

$\pm 70\%$. Вместе с тем низкая концентрация протонов и наличие посторонних ядер в LMN усложнило фоновые условия в экспериментах по рассеянию частиц, что обусловило разработку более эффективных спиртовых мишеней. Мощное развитие техника поляризованных мишеней получила после предложения Лондоном, Кларком и Медозой [10] нового метода получения сверхнизких температур, который впервые был реализован в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне Б.С.Негановым, Н.С.Борисовым и М.Ю.Либургом [11]. В 70-х годах интенсивный поиск новых полимерных материалов мишеней привел к созданию первых прототипов, а затем и рабочих вариантов поляризованных мишеней нового, замороженного типа [12–16]. При сверхнизких температурах порядка 0,2 К удалось достигнуть почти 100% поляризации протонов обоих знаков в пропандиоле, этиленгликоле, бутаноле. Экспериментальные и теоретические исследования динамической поляризации позволили установить, что в спиртовых матрицах «работает» более мощный, чем солид-эффект, механизм поляризации, названный динамическим охлаждением [17–20]. Динамическое охлаждение обусловлено коллективным взаимодействием электронной спин-спиновой системы с ядрами; эта модель рассмотрена в данном обзоре. В техническом плане, по мере повышения требований к параметрам мишеней в эксперименте, удалось сформировать оптимальный подход к измерению ядерной поляризации, основу которого составляет ливерпульский Q-метр с хорошо апробированной техникой расчета корректирующих поправок. Эксперименты с новыми материалами позволили обнаружить и приступить к исследованию новых твердотельных эффектов (ядерное магнитное сверхизлучение, частотная модуляция), которые необходимо понимать при работе с мишенями. Были проведены успешные опыты в направлении создания тонких мишеней для экспериментов с низкоэнергетическими пучками, и наметилось новое направление в создании поляризованных сцинтилляторов [21]. При создании мишеней многие технические результаты, методы расчета и опыт работы публиковались в препринтах или внутренних отчетах институтов и не были обобщены с единой точки зрения. Очевидно, что достижения последних лет нуждаются в обзоре, полезном как для студентов, так и для экспериментаторов, работающих в области поляризованных мишеней. Структура большинства работ по мишеням в основном сводится к описанию криогенного оборудования, на создание которого, как правило, приходится большой объем работ. В недавно опубликованном обзоре [22] и работе SMC-коллаборации CERN [30] затронут более широкий круг вопросов, частично восполняющий недостаток литературы в этом направлении. Здесь мы попытались более конкретно рассмотреть технические проблемы, не относящиеся к криогенике, которые, на наш взгляд, окажутся полезными для практической работы с мишенями.

1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЯДЕР МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

В диэлектриках при сверхнизких температурах времена релаксации ядерных спинов достигают сотен и более часов. Ядерные спины оказываются практически изолированными от решетки, поэтому их спиновая температура (T_z) может быть существенно изменена по сравнению с температурой решетки (T_0). Методы поляризации, при которых $T_z \neq T_0$, называются динамическими, а их суть в конечном итоге сводится к передаче высокой поляризации электронных спинов парамагнитной примеси ядерным магнитным моментам [7, 9]. Напомним кратко содержание метода поляризации ядер, названного «динамическим охлаждением» (ДО) [17, 18, 23, 24], который оказался наиболее эффективным в спиртовых поляризованных мишенях [15, 16]. Для его реализации в материал мишени, путем растворения, диффузии или облучения, вводят парамагнитную примесь (крамерсовские центры [7]) с концентрацией порядка $N_s \approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$. Молекулы примеси содержат неспаренные электроны ($S = 1/2$), которые в постоянном магнитном поле H_0 и при температуре T_0 поляризуются до величины [9]

$$P_s = 100\% \cdot \text{th} \left(\frac{\hbar \gamma_s H_0}{2kT_0} \right), \quad (1)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, γ_s — гиромагнитное отношение электронов, k — постоянная Больцмана. При $H_0 = 2,5 \text{ Тл}$ и $T_0 = 0,3 \text{ К}$ поляризация $P_s = 99,997\%$. При тех же условиях в соответствии с формулой (1) спины протонов (индекс p) поляризуются только до величины $P_p = 0,85\%$, поскольку $\gamma_s/\gamma_p = 656$. Энергия электронных спинов складывается из их зеемановского взаимодействия с полем $H_0 \parallel z$, где z — ось квантования, и спин-спинового взаимодействия [19]:

$$\hat{H} = \hat{H}_z + \hat{H}_{ss}^0 + \hat{H}_{ss}', \quad (2)$$

где $\hat{H}_z = \hbar \gamma_s H_0 \hat{S}_z$ — оператор зеемановской энергии спинов, $\hat{H}_{ss}^0$ — секулярная часть спин-спиновых взаимодействий, которая коммутирует с зеемановским вкладом, и $\hat{H}_{ss}'$ — член, ответственный за взаимодействие между $\hat{H}_z$ и $\hat{H}_{ss}^0$. Важной особенностью веществ, которые используются для получения высокой поляризации, является примерное равенство локальных частот электронных спинов и ядерной зеемановской частоты, т.е. $\gamma_s H_{\text{loc}} \cong \omega_I = \gamma_I H_0$ [24], где спектр локальных частот простирается от 0 до $\sim 300 \text{ МГц}$. Вследствие этого существует сильная связь между резервуаром спин-спиновых взаимодействий и ядерной спиновой системой. Последнее означает, что спин-спиновый резервуар и ядерная зеемановская подсистема «резонируют» друг с другом, то есть находятся в тесном тепловом контакте и, в конечном итоге,

приобретают одну и ту же температуру $T_{ss} = T_I$ независимо от сорта ядерных спинов. Под динамическим охлаждением понимают метод поляризации ядер путем их взаимодействия с резервуаром спин-спиновых взаимодействий [17, 24]. В дальнейшем для простоты мы будем полагать $T_{ss} \equiv T_I$, что позволит не рассматривать тонкие эффекты в электронной спиновой системе, связанные с наличием ядер, и сконцентрироваться на главных принципах ДО.

В сильном магнитном поле, когда зеемановская энергия электронных спинов значительно превосходит энергию спин-спиновых взаимодействий, обе электронные подсистемы являются квазинезависимыми, поэтому для их описания необходимо введение двух, в общем случае разных температур T_{z0} и T_{ss} , и матрица плотности имеет вид [23]:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{\Sigma} \exp \left[- \left(\frac{\hbar \omega_0 \hat{S}_z}{k T_{z0}} \right) - \left(\frac{\hat{H}_{ss}^0}{k T_{ss}} \right) \right], \quad (3)$$

где Σ — нормировочная константа, $\omega_0 = \gamma_s H_0$ — ларморовская частота электронных спинов. Характерный временной масштаб установления внутреннего равновесия в спин-спиновой системе значительно короче ($\approx 10^{-5}$ с), чем в зеемановской подсистеме ($\approx 10^{-1}$ с), он связан с взаимными «флип-флоп»-переходами между соседними спинами, которые не изменяют энергии системы. Если ω_{ss} — частота прецессии спинов в локальном поле H_{loc} , обусловленном спин-спиновыми взаимодействиями, то условие $\omega_0 \gg \omega_{ss}$ делает невозможным резонансный обмен энергией между $\hat{H}_z$ и $\hat{H}_{ss}^0$. В действительности несекулярный член $\hat{H}'_{ss}$ в (2), опущенный в формуле (3), выравнивает спиновые температуры подсистем, так что за время электронной спин-решеточной релаксации в обеих подсистемах устанавливается одинаковая температура $T_{z0} = T_{ss} = T_0$, равная температуре решетки. В этом состоянии $\hat{H}_{ss}^0$ в (3) не играет никакой роли и этим членом можно пренебречь, поскольку $\omega_0 \gg \omega_{ss}$; т.е. спиновая система определена заданием одной температуры.

Для поляризации ядер необходимо охладить резервуар спин-спиновых взаимодействий. Охлаждение достигается облучением электронных спинов на микроволновой частоте ω_p вблизи ларморовской частоты ω_0 . Каждый акт поглощения спиновой системой кванта внешнего поля $\hbar \omega$ можно рассматривать как поступление в зеемановскую подсистему кванта $\hbar \omega_0$ с одновременной передачей «остатка» $\hbar(\omega_p - \omega_0)$ в спин-спиновый резервуар; при $(\omega_p - \omega_0) < 0$ квант энергии $\hbar(\omega_0 - \omega_p)$ извлекается из спин-спинового резервуара [24]. С формальной точки зрения для выделения интегралов движения в (2) при наличии переменного поля необходимо добавить взаимодействие $2\hbar\gamma_s H_1 \hat{S}_x \cos(\omega_p t)$ и исключить временную зависимость в гамильтониане путем применения стандартной процедуры перехода во вращающуюся с частотой ω_p вокруг оси z систему координат. Эта процедура совершенно ана-

логична введению круговых диаграмм при рассмотрении переменных токов и напряжений в электротехнике, с той лишь разницей, что здесь это преобразование применяется к матричным величинам. Если амплитуда микроволнового поля $H_1 \ll H_{\text{loc}}$, как это практически и есть в технике ДПЯ, то новое состояние спиновой системы будет приближенно описываться матрицей плотности [23, 24]:

$$\hat{\rho}_{\text{rot}}(t) \cong \frac{1}{\Sigma} \exp \left[-\frac{\hbar(\omega_0 - \omega_p)\hat{S}_z}{kT_z} - \frac{\hat{H}_{ss}^0}{kT_{ss}} \right], \quad (4)$$

но уже с другой температурой (T_z), определенной во вращающейся системе координат. Отметим, что при переходе во вращающуюся вокруг оси z систему координат член $\hat{H}_{ss}^0$ в матрице плотности остается без изменения, так как он коммутирует с оператором поворота системы координат. Нетрудно видеть, что в новой системе координат характерная частота $|\omega_0 - \omega_p| \cong \gamma_s H_{\text{loc}}$ зеемановского взаимодействия сдвигается в область локальных частот электронных спинов, то есть появляется возможность резонансного обмена между зеемановской и спин-спиновой подсистемами с тенденцией $|T_{ss}| \rightarrow |T_z|$. Теперь в тепловом равновесии $T_{ss} = T_z$, причем новую величину T_{ss} нетрудно оценить, если учесть, что при нестрогом резонансном насыщении электронных спинов их поляризация не должна существенно меняться. Поэтому, сравнивая (3) и (4), имеем [23]:

$$\frac{\hbar\omega_0}{2kT_{z0}} \cong \frac{\hbar(\omega_0 - \omega_p)}{2kT_z}, \quad (5)$$

откуда $T_z = T_0(\omega_0 - \omega_p)/\omega_0$, так как $T_{z0} \cong T_0$. В зависимости от соотношения частот ω_0 и ω_p , знак T_z может быть положительным или отрицательным. Способность «перераспределять» поглощенный квант $\hbar\omega_p$ между двумя спиновыми подсистемами зависит от расстройки $\hbar(\omega_p - \omega_0)$ частоты поля по отношению к ларморовской частоте, концентрации спинов, величины их магнитных моментов и т. д., то есть от того, как сконструирована, как облучается и насколько сильно электронная спиновая система связана с решеткой. Видно, что зеемановская система под действием микроволнового поля становится «холодильником» или «нагревателем» (в зависимости от знака частотной расстройки) резервуара спин-спиновых взаимодействий, который теперь способен поляризовать ядерные спины. Чтобы оценить значение оптимальной расстройки $|\omega_0 - \omega_p|$, обеспечивающей максимальное охлаждение спиновой системы, необходимо учесть взаимодействие спиновой системы с решеткой. Кинетические уравнения, описывающие поведение спиновой системы в приближении достаточно высоких температур решетки ($T_0 > 3$ К, в поле 2,5 Тл), были впервые получены Провоторовым [25, 26] и носят его имя. Следуя работе [17], имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{T_{z0}} = -W \left(\frac{1}{T_{z0}} + \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{1}{T_{ss}} \right) - \frac{1}{\tau_{sl}} \left(\frac{1}{T_{z0}} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{T_{ss}} = -W \frac{\Delta^2}{\omega_{ss}^2} \left(\frac{1}{T_{ss}} + \frac{\omega_0}{\Delta} \frac{1}{T_{z0}} \right) - \frac{1}{\tau_{dl}} \left(\frac{1}{T_{ss}} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (7)$$

где $\Delta = (\omega_p - \omega_0)$, $W(\Delta) = \pi \gamma_s^2 H_1^2 g(\Delta)$, $g(\Delta)$ — функция формы равновесной линии поглощения, τ_{sl} , τ_{dl} — времена спин-решеточной релаксации зеемановской и спин-спиновой подсистем. Система (6), (7) имеет вид уравнений теплообмена между спиновыми резервуарами с той лишь разницей, что роль обычных температур играют инверсные спиновые температуры. Действительно, первые члены в (6), (7) описывают процесс охлаждения спин-спинового резервуара, вторые — спин-решеточную релаксацию с тенденцией $T_{z0}, T_{ss} \rightarrow T_0$. Стационарное решение получено в [24]:

$$(T_{ss}^{-1})_{st} = -T_0^{-1} \frac{\omega_0}{\Delta} \frac{W \tau_{dl} \Delta^2 \omega_{ss}^{-2}}{1 + W(\tau_{sl} + \tau_{dl} \Delta^2 \omega_{ss}^{-2})}, \quad (8)$$

$$(T_{z0}^{-1})_{st} = T_0^{-1} \frac{1 + W \tau_{dl} \Delta^2 \omega_{ss}^{-2}}{1 + W(\tau_{sl} + \tau_{dl} \Delta^2 \omega_{ss}^{-2})}. \quad (9)$$

При сильном насыщении, условия которого имеют вид $2W\tau_{sl} \gg 1$ и $2W\tau_{dl}\Delta^2(\omega_{ss})^{-2} \gg 1$, из (8) и (9) следует

$$(T_{ss}^{-1})_{\infty} = -(T_{z0}^{-1})_{\infty} \frac{\omega_0}{\Delta} = -T_0^{-1} \frac{\omega_0}{\Delta} \left(1 + \frac{\tau_{sl}}{\tau_{dl}} \frac{\omega_{ss}^2}{\Delta^2} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Согласно (10) температура спин-спиновой системы в зависимости от частотной расстройки имеет «дисперсионный» вид, причем максимальное охлаждение достигается при расстройке, равной

$$\Delta_{\max} = \pm \sqrt{\frac{\tau_{sl}}{\tau_{dl}}} \omega_{ss}. \quad (11)$$

Для оценки эффекта охлаждения спин-спиновой системы примем $\Delta_{\max} \approx (M_2)^{1/2}$, где

$$M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\delta) \delta^2 d\delta \quad (12)$$

есть второй момент линии поглощения, тогда из (10) следует [24]:

$$\left(\frac{T_0}{T_{ss}}\right)_{\max} = \frac{\omega_0}{2\Delta_{\max}} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{M_2}}. \quad (13)$$

Работоспособность системы (8)–(9) можно оценить на примере 1-бутанола. Ширина линии ЭПР в подобного рода твердых диэлектриках с парамагнитными добавками обязана слабой анизотропии $(g_{\perp} - g_{\parallel})/g \cong 4 \cdot 10^{-3}$ электронного g -фактора [23] и составляет примерно $2(M_2)^{1/2} = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^8$ Гц, откуда теоретическое усиление равно

$$\frac{T_0}{T_{ss}} = \frac{\omega_0}{2\Delta_{\max}} = \frac{7 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^8} = 175, \quad (14)$$

что дает правильную оценку экспериментальной величины усиления поляризации при температурах выше 1 К.

Как уже отмечалось, для расчета поляризации необходимо приравнять температуру ядер, независимо от их сорта, к температуре электронного спин-спинового резервуара. Сам по себе факт установления единой спиновой температуры разных ядерных спинов служит идентификатором механизма ДО [20, 23, 24], а когда механизм ДО установлен, то поляризацию любых ядер в материале можно рассчитать по формуле Бриллюэна (101), используя известную спиновую температуру ядер одного сорта.

В практике ДПЯ, как правило, применяются температуры ниже 1 К, при которых приближение высоких температур не работает и предыдущая оценка (13) максимального усиления становится неверной. На рис. 1 на примере пропандиола показано поведение времен спин-решеточной

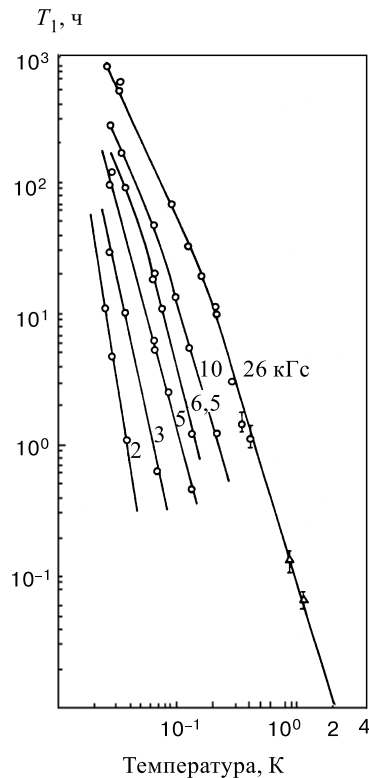


Рис. 1. Зависимость времени спин-решеточной релаксации протонов в пропандиоле от температуры в различных полях H_0 [27]

релаксации в зависимости от поля и температуры [27]. Нетрудно видеть, что переход в область сверхнизких температур сопровождается значительным ростом времен ядерной спин-решеточной релаксации, что вызывает уменьшение «утечки» поляризации. В теории же отказ от высокотемпературного приближения ведет к нелинейным интегральным уравнениям, которые усложняют

расчеты, но и дополняют картину ДПЯ рядом важных подробностей. Первое решение задачи удалось получить Боргини [28]; его уравнение детально проанализировано и сравнивается с экспериментом в работах [23, 24]. Уравнение Боргини удовлетворительно описывает экспериментальные данные, но с использованием феноменологического параметра, а именно фактора «утечки» поляризации, учитывающего влияние спин-решеточной релаксации на величину максимальной поляризации. Более строгое решение практически одновременно было получено Л.Л.Буишвили, Н.П.Гиоргадзе и А.А.Давитулиани [29]; в дальнейшем для краткости их теорию назовем БГД. Согласно теории БГД стационарная спиновая температура T_{ss} определяется интегральным уравнением

$$\int L(\omega)\varphi(\omega)(\omega_0 + \omega - \omega_p)g(\omega)d\omega = 0, \quad (15)$$

где $g(\omega)$ описывает форму ЭПР-линии (очевидно, что $g(\omega)$ не нуждается в нормировке), $L(\omega)$ — медленная функция частоты, описывающая процесс однофоновой спин-решеточной релаксации, функция $\varphi(\omega)$ связана с T_{ss} и T_0 следующим уравнением:

$$\varphi(\omega) = \frac{\exp((\omega_{s0} + \omega)\beta_L - (\omega_{s0} + \omega - \omega_p)\beta_s) - 1}{\exp(-(\omega_{s0} + \omega - \omega_p)\beta_s) + 1}, \quad (16)$$

где $\beta_L = \hbar/(kT_0)$, $\beta_s = \hbar/(kT_{ss})$ — инверсные температуры решетки и спин-спиновой системы соответственно, ω_p — частота поляризующего СВЧ-поля. Если принять $L(\omega)$ постоянной в пределах ЭПР-линии, то уравнение (15) упрощается:

$$\int \varphi(\omega)(\omega_0 + \omega - \omega_p)g(\omega) d\omega = 0. \quad (17)$$

Интегрируя (17) по контуру ЭПР-линии, нетрудно определить равновесную температуру T_{ss} в зависимости от расстройки $\Delta = (\omega_0 - \omega_p)$. Полагая далее $T_{ss} = T_I$, где T_I — температура ядерных спинов, легко найти ядерную поляризацию. В случае протонов ($I = 1/2$) имеем

$$P_I = \tanh\left(\frac{\hbar\gamma_I H_0}{2kT_{ss}}\right). \quad (18)$$

Уравнение (17) не включает каких-либо подгоночных параметров, поэтому оно позволяет предсказать зависимость поляризации от поля и температуры в идеальной модели ДО. Такие оценки могут оказаться полезными при поиске оптимальной технологии изготовления новых материалов мишеней, поэтому

мы численно проинтегрировали (17) с использованием гауссовской формы ЭПР-линии:

$$g(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_0} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\Delta_0^2}\right) \quad (19)$$

с параметром $\Delta_0 = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8$ Гц. Результаты расчета $T_{ss} = T_I$ представлены на рис. 2 для трех характерных температур решетки $T_0 = 1, 0,5$ и $0,25$ К, которые получаются при накачке поляризации в криостатах испарительного типа с ^4He , ^3He и рефрижераторах растворения $^3\text{He}/^4\text{He}$ соответственно. Решение показывает рост максимальной поляризации протонов при понижении температуры решетки, соответственно 50, 75 и 97%, что хорошо отражает ход лучших экспериментальных данных, достигнутых в пропандиоле и бутаноле. Видно, что с понижением T_0 оптимальная расстройка СВЧ-частоты сдвигается от центра ЭПР-линии; эта расстройка теперь не совпадает с $(M_2)^{1/2}$. В экспериментах с пропандиолом и бутанолом такой сдвиг также имеет место, но он меньше расчетных данных на рис. 2 из-за анизотропии g -фактора, которая не учитывалась в проделанных нами расчетах.

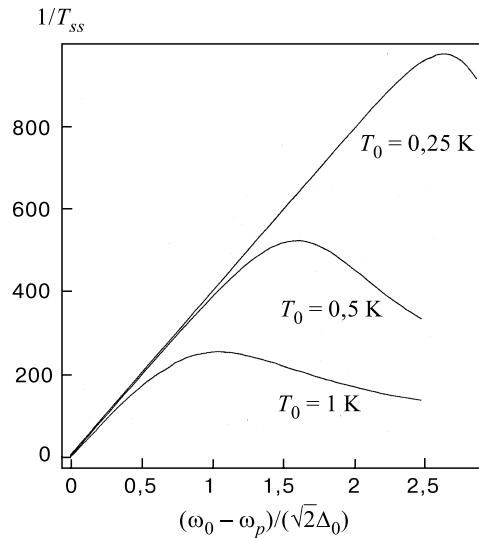


Рис. 2. Зависимость $1/T_{ss}$ от относительной расстройки СВЧ-частоты от центра ЭПР-линии ($\omega_0 = 2\pi \cdot 7 \cdot 10^{10}$ Гц, $\Delta_0 = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8$ Гц). Положительная протонная поляризация (18) $P_p = \text{th}(0,0024/T_{ss})$, где $T_{ss} = T_I$

Для более детального понимания двухтемпературной концепции ДО рассмотрим влияние температуры спин-спинового резервуара на форму гауссовской ЭПР-линии парамагнитных центров в условиях сильного насыщения.

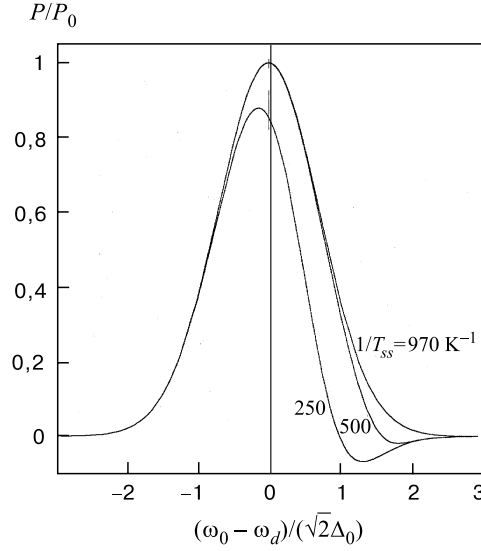


Рис. 3. Форма ЭПР-линии, согласно теории БГД, при трех температурах решетки: 1, 0,5 и 0,25 К. Расчет выполнен при расстройках насыщающего поля, которые на рис.2 соответствуют максимумам обратных температур $1/T_{ss}$, где ω_d — частота детектирующего поля

Предположим, что СВЧ-частота насыщающего поля соответствует фиксированной расстройке $\delta_p = (\omega_0 - \omega_p)/(\sqrt{2}\Delta_0)$, а форма линии детектируется слабым ненасыщающим микроволновым полем с частотой ω_d , которая изменяется вблизи ω_0 . Мощность, поглощаемая спиновой системой на частоте ω_d , равна [29]:

$$P = P_0 \exp(-\delta_d^2) \operatorname{th} \left[\frac{\beta_{ss}\omega_0}{2} \left(\frac{\sqrt{2}\Delta_0}{\omega_0} \right) (\delta_p - \delta_d) \right], \quad (20)$$

где $\delta_d = (\omega_0 - \omega_d)/(\sqrt{2}\Delta_0)$ — нормированная расстройка частоты детектирующего поля и P_0 — мощность поглощения на резонансной частоте. Мы выполнили расчет зависимости P/P_0 для трех минимальных температур спин-спинового резервуара, а именно: $1/T_{ss} = 250, 500$ и 970 K^{-1} , которые на рис.2 достигаются при температурах решетки $T_0 = 1,0, 0,5$ и $0,25 \text{ K}$ соответственно. Для каждой T_0 была взята оптимальная расстройка δ_p , соответствующая максимальной обратной спиновой температуре на рис.2. Результаты расчета представлены на рис.3. Видно, что кривая ЭПР-поглощения сдвигается в сторону, противоположную точке приложения насыщающего

поля. Существует область индуцированного излучения, определяемая условием $\beta_{ss}(\delta_p - \delta_d) < 0$. Из рис. 3 видно, что при больших расстройках насыщение на крыльях линии почти не влияет на форму ЭПР-линии, следовательно, равновесная электронная поляризация практически не изменяется при включении СВЧ-поля, что и послужило основанием приравнять матрицы плотности (3) и (4) при получении оценки (5) усиления ядерной поляризации.

2. ИЗМЕРЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ МИШЕНЕЙ

Наиболее точное определение ядерной поляризации выполняется интегральным методом, т.е. интегрированием линии поглощения $\chi''(\omega)$. Метод основан на соотношении [30]:

$$P = \frac{2\hbar I}{g^2 \mu_N^2 N \pi} \int_0^\infty \chi''(\omega) d\omega, \quad (21)$$

где μ_N — ядерный магнетон, I — спин, g — g -фактор исследуемых ядер и N — их концентрация. Для измерения ядерной поляризации обычно используется последовательный Q-метр [31, 32]. Приемный датчик Q-метра показан на рис. 4 и представляет собой катушку, погруженную в материал мишени, которая индуктивно связана с магнитными моментами ядер. Импеданс катушки равен

$$Z_L = r + i\omega L_0(1 + \eta\chi(\omega)), \quad (22)$$

где $\omega = 2\pi\nu$, ν — частота радиочастотного генератора, η — фактор заполнения катушки материалом, r , L_0 — сопротивление и индуктивность катушки при $\chi = 0$. Функция $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ является ядерной восприим-

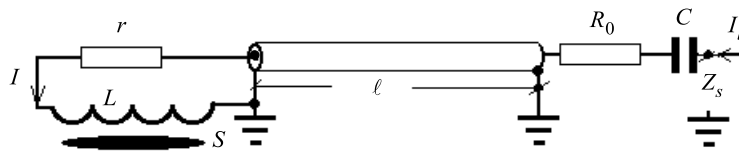


Рис. 4. Приемный гибридный контур Q-метра, где ℓ — коаксиальный кабель, s — материал мишени, L , r , R_0 , C — элементы контура (см. текст)

чивостью материала; ее реальная часть называется дисперсией, мнимая — поглощением. Типичные функции поглощения и дисперсии протонов представлены на рис. 5. Сигнал на выходе Q-метра пропорционален поглощению.

Константа пропорциональности находится калибровкой прибора по так называемому ТЕ (thermal equilibrium)-сигналу от ядер с известной поляризацией. В магнитном поле 2,5 Тл и при температуре около 1 К типичные времена спин-решеточной релаксации протонов ($I = 1/2$) в материалах мишеней составляют менее 10 минут, поэтому спиновая температура ядер достаточно быстро принимает температуру хладагента мишени. В результате ТЕ-поляризацию ядер легко рассчитать по формуле Бриллюэна (101), аргументами которой являются величина магнитного поля и известная температура мишени. Практическое значение формулы (21) заключается в возможности ее использования для калибровки чувствительности Q-метра, когда равновесный тепловой сигнал спинов находится за

порогом чувствительности приемной аппаратуры [30, 33]. В твердых диэлектрических материалах при низких температурах для ядер со спином $I > 1/2$ подобная ситуация является скорее правилом, чем исключением. Например, при определении поляризации фоновых ядер ^{14}N в аммиачной мишени (NH_3), их интенсивность оказывается более чем на два порядка меньше, чем протонных спинов [33]. В такой ситуации нужно измерить интенсивность протонного сигнала с известной поляризацией, но в сниженном поле, используя Q-метр, измеряющий интенсивность сигналов от ядер азота. Поле снижается из-за меньшего g -фактора азота: $g_N = 0,4038$ по сравнению с протонами $g_p = 2,793$. Отношение P_N и P_p поляризации из (21) равно [30]:

$$\frac{P_N}{P_p} = \frac{g_p^2 I_N N_p A_N}{g_N^2 I_p N_N A_p}, \quad (23)$$

где $A = \int_0^\infty \chi''(\omega) d\omega$, $N_p = 3N_N$. Подставляя эти константы в (23), получим [33]:

$$P_N \approx 287 \frac{A_N}{A_p} P_p, \quad (24)$$

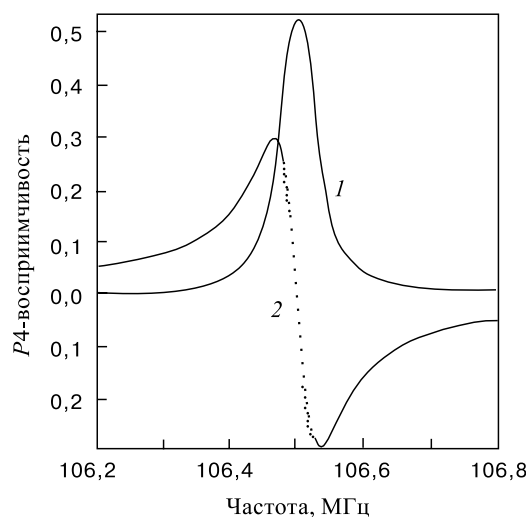


Рис. 5. Формы линий протонных сигналов поглощения (1) и дисперсии (2) в бутаноле [42]

где A_p , A_N — площади под кривой поглощения протонного и азотного сигналов соответственно. Так как P_p и A_p предполагаются известными, то на основании (24) интегральный метод становится доступным и для измерения усиленной поляризации ядер азота без измерения его равновесных сигналов. Характерная погрешность калибровки составляет $\pm 2,5\%$.

2.1. Включение коаксиального кабеля в приемный контур Q-метра. В низкотемпературных экспериментах приемная катушка связывается с Q-метром коаксиальным кабелем. Образуется гибридный приемный колебательный контур (рис. 4), который содержит элементы цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами [31]. Введение кабеля в приемный контур оказывает сильное влияние на чувствительность прибора, поэтому на основании работ [34–36] мы приведем энергетический расчет гибридного контура. Схема последовательного контура и обозначения представлены на рис. 4. Здесь r — сопротивление катушки, R_0 — учитывает передачу мощности во входную цепь усилителя и потери в конденсаторе (C). Индуктивность $L = L_0(1 + \eta\chi)$, где L_0 — невозмущенная индуктивность катушки и S — материал мишени. При расчете резонансной частоты контура будем пренебрегать влиянием сопротивлений r и R_0 . Индуктивность L_0 формально можно заменить эквивалентным отрезком фиктивного кабеля, входное сопротивление которого равно $i\omega L_0$. Если кабель разомкнут на конце, то длина ℓ_1 такого отрезка должна быть равна

$$\omega L_0 = \rho \cdot \operatorname{tg}(\beta \ell_1), \quad (25)$$

где $\beta = \epsilon^{1/2}\omega/c$, c — скорость света в вакууме, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость изолятора кабеля, ρ — волновое сопротивление фиктивного отрезка линии, которое для простоты выберем равным волновому сопротивлению реально присутствующего кабеля. Фиктивный отрезок линии ℓ_1 , заменяющий индуктивность, и реальный кабель длиной ℓ образуют электрическую линию общей длиной $\ell + \ell_1$, индуктивное входное сопротивление которой при резонансе должно быть равно емкостному сопротивлению конденсатора настройки, отсюда с учетом (25) получается трансцендентное уравнение для бесконечного набора резонансных частот контура с кабелем

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L_e = \rho \operatorname{tg}[\beta(\ell + \ell_1)] = \frac{\omega L_0 + \rho \operatorname{tg}(\beta \ell)}{1 - \frac{\omega L_0}{\rho} \operatorname{tg}(\beta \ell)}, \quad (26)$$

где L_e — эквивалентная индуктивность кабеля с подключенной катушкой L_0 , которая «резонирует» с емкостью C . Колебательный контур образуется, когда при длине кабеля $\ell + \ell_1$ его входное сопротивление является индуктивным, то есть при условии $\beta(\ell + \ell_1) - \pi n < \pi/2$ или $\beta \ell = \pi n$, где $n = (0, 1, 2, \dots)$ есть число полуволн, укладывающихся на длине ℓ . Видно, что на частотах порядка нескольких МГц отрезок кабеля $\ell < \lambda/4$ ($n = 0$) можно добавить к

катушке, сохраняя индуктивный характер их общего сопротивления. На более высоких частотах, как правило, используют резонансные отрезки кабеля длиной $\beta\ell = \pi n$. Напомним основные соотношения в простом последовательном контуре без кабеля ($\ell = 0$). Взаимодействие со спинами изменяет импеданс катушки, который в соответствии с формулой (22) равен

$$Z_L = r + \eta\omega L_0\chi'' + i\omega L_0(1 + \eta\chi'). \quad (27)$$

Пусть контур настроен в резонанс и амплитуда переменного тока в нем (I) поддерживается неизменной и достаточно малой, чтобы создаваемое катушкой поле не разрушало ядерную восприимчивость. При резонансе мощность (P_r), рассеиваемая в r , и мощность диссипативных потерь в спиновой системе (P_s), соответственно, равны

$$P_r = \frac{1}{2}rI^2, \quad P_s = \frac{1}{2}\eta\chi''\omega L_0I^2. \quad (28)$$

Отношение P_s/P_r будем называть чувствительностью ($\zeta_{n=0}$), которая выражается цепочкой хорошо известных соотношений

$$\zeta_{n=0} = \frac{P_s}{P_r} = \frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{\Delta r}{r} = \eta\chi''\frac{\omega L_0}{r} = \eta\chi''Q_0, \quad (29)$$

где $Q_0 = \omega L_0/r$ — добротность контура и Δr , ΔQ — обозначают изменения соответствующих параметров. По-видимому, формула (29) впервые получена Робинсоном [37]. Как это следует из (29), при слабом возмущении поля катушки напряжение на контуре будет изменяться пропорционально χ'' . Наличие дисперсии χ' в (27) приведет к сдвигу резонансной частоты контура на величину

$$\frac{2(\omega_p - \omega_0)}{\omega_0} = -\eta\chi', \quad (30)$$

здесь ω_0 — резонансная частота контура. Оба соотношения (29) и (30) справедливы и для параллельного контура. Заметим, что в системе СГС восприимчивость должна быть умножена на 4π . Без кабеля система параметров (L_0, r, C) определяет все электрические свойства контура; через них выражаются все другие производные параметры: добротность, эквивалентное сопротивление, расстройка, частотная характеристика, которые ниже получены и для общего случая гибридного контура.

Включение кабеля качественно меняет предыдущий расчет, поэтому рассмотрим его более подробно. Зависимость тока в кабеле от длины теперь имеет вид [38]:

$$I(x) = I \left[1 - \frac{\omega L_0}{\rho} \operatorname{tg}(\beta x) \right] \cos(\beta x), \quad (31)$$

где $0 \leq x \leq \ell$ — длина, отсчитываемая от левого на рис. 4 конца кабеля. Влияние затухания в кабеле на распределение $I(x)$ приведет к квадратичным поправкам к чувствительности, которыми для простоты будем пренебрегать. При резонансе энергия, запасенная в магнитном поле (N_m), равна энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора (N_e). С учетом катушки и кабеля имеем

$$\omega N_m = \frac{1}{2} \omega L_0 I^2 + \frac{\omega L_1}{2} \int_0^\ell I^2(x) dx, \quad (32)$$

где L_1 — погонная индуктивность кабеля. Используя (31), получаем

$$\omega N_m = \frac{\omega}{2} L_0 A I^2 \cos^2(\beta \ell), \quad (33)$$

где $A = 1 + \frac{1}{2} \beta \ell (1 + \operatorname{tg}^2(\beta \ell)) \left(\frac{\omega L_0}{\rho} + \frac{\rho}{\omega L_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\omega L_0} - \frac{\omega L_0}{\rho} \right) \operatorname{tg}(\beta \ell)$. Энергию магнитного поля можно также выразить и через эквивалентную индуктивность L_e из уравнения (26) и ток $I(\ell) = I_1$ на входном конце кабеля, если записать

$$\omega N_m = \frac{1}{2} \omega L_e I_1^2 \delta, \quad (34)$$

где δ — параметр распределенности, который учитывает зависимость запасенной энергии от конкретного распределения тока вдоль кабеля. Используя формулы (26), (31) и (33), нетрудно найти связь между δ и A в уравнениях (33), (34):

$$\delta = \frac{A}{\left(1 + \frac{\rho}{\omega L_0} \operatorname{tg}(\beta \ell)\right) \left(1 - \frac{\omega L_0}{\rho} \operatorname{tg}(\beta \ell)\right)}. \quad (35)$$

В простом контуре без кабеля $\ell = 0$, $\delta = A = 1$, поэтому $L_e = L_0$. Для расчета добротности гибридного контура

$$Q = \frac{\omega N_m}{P_\Sigma} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad (36)$$

остается только определить P_Σ — мощность суммарных потерь в контуре. Без учета затухания в кабеле мощность потерь (P'_1) равна

$$P'_1 = \frac{1}{2} I_1^2 R_0 + \frac{1}{2} I^2 r = \frac{1}{2} I_1^2 \left[R_0 + \frac{r}{\left(1 - \frac{\omega L_0}{\rho} \operatorname{tg}(\beta \ell)\right)^2 \cos^2(\beta \ell)} \right] = \frac{1}{2} I_1^2 R_1, \quad (37)$$

где ток I был преобразован по формуле (31), с учетом того, что $I(\ell) = I_1$. Для чисто бегущей волны в кабеле погонное сопротивление потерь равно $2\alpha\rho$, где α [Нп/м] — постоянная затухания кабеля. В нашем случае ток в кабеле распределен по закону (31); с учетом этого распределения к P'_1 необходимо добавить потери в коаксиальном кабеле. Имеем [34]

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} I^2 R_1 B \cos^2(\beta\ell), \quad (38)$$

где

$$B = \left(1 - \frac{\omega L_0}{\rho} \operatorname{tg}(\beta\ell)\right)^2 + \frac{\omega L_0}{R_1} \left(\frac{\omega L_0}{\rho} + \frac{\rho}{\omega L_0}\right) k_1. \quad (39)$$

Коэффициент k_1 вычисляется по формуле

$$k_1 = \alpha\ell \cos^{-2}(\beta\ell). \quad (40)$$

Окончательно добротность гибридного контура равна

$$Q = \frac{\omega N_m}{P_\Sigma} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\omega L_0}{R_1} \frac{A}{B}, \quad (41)$$

где $2\Delta\omega$ — полоса пропускания гибридного контура. В частности, формула (41) позволяет определить усредненное затухание кабеля, когда его температура в криостате изменяется от комнатной до температуры мишени. Полагая кабель короткозамкнутым ($L_0 \rightarrow 0$) или разомкнутым ($L_0 \rightarrow \infty$) на конце, а также выбирая его длину $n\lambda/2$, получаем из (41) $Q = \beta/(2\alpha)$ при произвольном n . Усредненное затухание кабеля связано с его полосой пропускания ($2\Delta\nu$), на уровне $\sqrt{2}$ от значения его импеданса при резонансе, простым соотношением

$$\alpha = 0,01\sqrt{\epsilon}(2\Delta\nu) \quad [\alpha = \text{Нп/м}, \quad \Delta\nu = \text{МГц}]. \quad (42)$$

Если $r = 0$, то из формулы (41) добротность контура с кабелем длиной $n\lambda/2$ равна

$$Q = \frac{\omega L_0}{R_0} \frac{1 + \frac{\pi n}{2} \left(\frac{\rho}{\omega L_0} + \frac{\omega L_0}{\rho}\right)}{1 + \frac{\omega L_0}{R_0} \left(\frac{\rho}{\omega L_0} + \frac{\omega L_0}{\rho}\right) k_1}. \quad (43)$$

Другим способом эта формула была получена в [39]. При изменении уровня гелия в криостате мишени изменяется распределение температуры по его длине, а следовательно, и коэффициент k_1 , что может привести к погрешностям при измерении поляризации. Чтобы избавиться от этого нежелательного явления, распределение температуры вдоль кабеля фиксируют привязкой кабеля к температурно-стабильным точкам в криостате.

Включение кабеля драматически изменяет чувствительность, которая теперь имеет вид [34]:

$$\zeta_1 = \frac{P_s}{P_\Sigma} = \eta\chi''Q \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\beta\ell)}{A} = \eta\chi'' \frac{\omega L_0}{R_1} \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\beta\ell)}{B}, \quad (44)$$

где P_s определяется по формуле (28). Формула (44) обобщает формулу (29) на случай гибридного контура с кабелем произвольной длины. Сдвиг частоты настройки гибридного контура равен [34]:

$$\frac{2(\omega_p - \omega_0)}{\omega_0} = -\eta\chi' \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\beta\ell)}{A}. \quad (45)$$

Формула (45) следует из общего выражения для сдвига резонансной частоты сложных резонансных колебательных систем, полученного в [40]. Эквивалентное сопротивление последовательного гибридного контура равно

$$r_e = \delta \frac{\omega L_e}{Q}. \quad (46)$$

Для сравнения приведем формулу эквивалентного сопротивления параллельного гибридного контура

$$R_e = Q \frac{\omega L_e}{\delta}. \quad (47)$$

По поводу параллельного гибридного контура следует сделать следующее общее замечание. Мощность активных потерь и условие резонанса не зависят от параллельного или последовательного способа присоединения конденсатора C на рис. 4. Поэтому в линейном приближении по ядерной восприимчивости чувствительность, резонансная частота и ее сдвиг дисперсионной компонентой одинаковы как для параллельного, так и для последовательного контура. Вблизи резонанса сопротивление последовательного (Z_s) и параллельного (Z_p) контуров равны

$$Z_s = r_e \left(1 + i2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right), \quad Z_p = \frac{R_e}{\left(1 + i2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)}. \quad (48)$$

Приведенные формулы полезны для оценки влияния кабеля на чувствительность Q-метра, они позволяют рассчитать резонансные частоты сложной колебательной системы. Именно на этих частотах (26) при высокой отрицательной поляризации мишени наблюдается так называемое ядерное сверхизлучение. Пример расчета чувствительности приведен в приложении 1.

Необходимо отметить важное обстоятельство, связанное с практическим использованием эквивалентной схемы (рис. 4) на высоких частотах порядка

200 МГц. Если межвитковая емкость катушки становится примерно равной емкости конденсатора настройки контура, то, как нетрудно видеть, кабель трансформирует к входу Q-метра не индуктивное, а эквивалентное сопротивление параллельного контура, составленного из индуктивности и паразитной емкости. Это радикальным образом меняет назначение элементов схемы и приводит к проблемам, которые рассматривались на конференции [41].

2.2. Ливерпульский Q-метр. Практическая блок-схема последовательного (ливерпульского) Q-метра [32] с PSD-детектором (Phase Sensitive Detector) показана на рис. 6. В работе [42] приведены характерные величины параметров приемного контура протонного и дейтронного Q-метров и детальный анализ их работы. Здесь мы дадим точное определение измеряемых величин

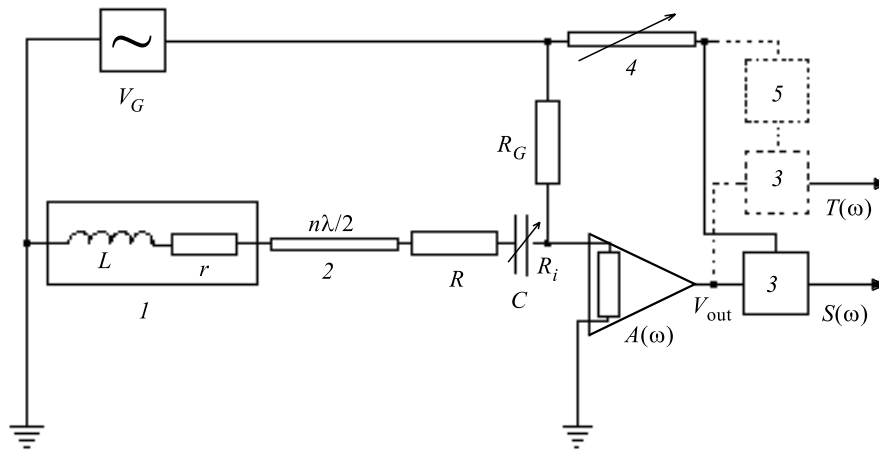


Рис. 6. Упрощенная схема ливерпульского Q-метра [32]. V_G — ВЧ-генератор, $A(\omega)$ — ВЧ-усилитель, 1 — мишень с приемной катушкой, 2 — коаксиальный кабель, R_G — токовый резистор, 3 — фазовые детекторы, 4 — регулируемый фазовращатель, 5 — 90° -фазовращатель. Пунктиром обозначены элементы схемы, необходимые для регистрации дисперсии

и сделаем краткий обзор погрешностей измерения поляризации этим прибором. Для краткости введем комплексную функцию $\xi(\omega) = \eta\chi(\omega)$ и учтем влияние шунтирующего действия токового резистора и входного импеданса приемного усилителя на импеданс резонансного контура $Z(\xi)$. Выходное напряжение Q-метра имеет вид [43]:

$$V_{\text{out}} = \frac{AV_G}{R_G} \frac{Z(\xi)}{1 + pZ(\xi)}, \quad (49)$$

где $p = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_G}$, R_i — входное сопротивление усилителя, R_G — токовый резистор и

$$Z(\xi) = R - \frac{i}{\omega C_p} + \frac{\rho^2 \operatorname{th}(\gamma \ell) + \rho[r + i\omega L(1 + \xi)]}{\rho + [r + i\omega L(1 + \xi)] \operatorname{th}(\gamma \ell)}. \quad (50)$$

В этой формуле $\gamma = \alpha + i\beta$ — комплексный коэффициент, α — усредненная постоянная затухания, β — фазовая константа. Если частота генератора измеряется достаточно медленно, так, чтобы функция $\xi(\omega)$ явно не зависела от времени, то нормированное выходное напряжение из уравнения (49) равно

$$\frac{V_{\text{out}}(\xi(\omega))}{AV_G} = \frac{Z_{\text{eff}}(\xi(\omega))}{R_G} = \frac{1}{R_G} \frac{Z(\xi(\omega))}{1 + pZ(\xi(\omega))} = S_{\text{eff}}(\xi(\omega)) + iT_{\text{eff}}(\xi(\omega)). \quad (51)$$

Формально можно рассмотреть также разность двух импедансов, измеренных при $\xi \neq 0$ и $\xi = 0$; в практике эта процедура называется «вычитанием фона». Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{\text{out}}(\omega)}{AV_G} &= \frac{V_{\text{out}}(\xi) - V_{\text{out}}(\xi = 0)}{AV_G} = S(\omega) + iT(\omega) = \\ &= S(\omega) + i \frac{2\omega}{\pi} \oint_{\omega'} \frac{S(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

где использовано соотношение Кронига—Крамерса и

$$S(\omega) = S_{\text{eff}}(\xi) - S_{\text{eff}}(\xi = 0), \quad (53)$$

$$T(\omega) = T_{\text{eff}}(\xi) - T_{\text{eff}}(\xi = 0). \quad (54)$$

Разность (52) мы будем называть ЯМР-сигналом, поскольку ее реальная часть $S(\omega)$ и мнимая часть $T(\omega)$ почти пропорциональны мнимой (поглощение) и реальной (дисперсия) частям ядерной восприимчивости соответственно. При таком определении ЯМР-сигнала $S(\omega)$ может быть положительной и отрицательной величиной, как разность двух независимых измерений. Используя формулы (49), (50) и (52), выразим ЯМР-сигнал через импеданс резонансного контура $Z(\xi)$:

$$\frac{\Delta V_{\text{out}}(\omega)}{AV_G} = \frac{V_{\text{out}}(\xi) - V_{\text{out}}(\xi = 0)}{AV_G} = \frac{1}{R_G} \frac{Z(\xi) - Z(\xi = 0)}{[1 + pZ(\xi)][1 + pZ(\xi = 0)]}. \quad (55)$$

Из формулы (55) видно, что нелинейные искажения выходного сигнала зависят от коэффициента p , то есть величины шунтирующих резисторов R_i и

R_G . В принципе, при точном определении χ'' необходимо измерение также и χ' , для чего схема ливерпульского Q-метра должна быть дополнена элементами, обозначенными на рис. 6 пунктиром. Практически же предпочитают пользоваться простым вариантом схемы. Имеется общая закономерность, отмеченная Я.К.Семертзидисом (Y.K.Semertzidis), которая определяет вклад дисперсии и квадратичного по поглощению члена в интегральную интенсивность сигнала ЯМР. Дело в том, что для любой комплексной функции $V(\xi)$ типа (55) вблизи $\xi = 0$ справедливо соотношение [42, 44]:

$$\operatorname{Re}(V(\xi) - V(0)) = a\xi' + b\xi'' + c(\xi'^2 - \xi''^2) + d\xi'\xi'' . \quad (56)$$

Кроме того, для любой комплексной функции, удовлетворяющей соотношениям Кронига—Крамерса, выполняется соотношение [44]:

$$\int_0^{\infty} (\xi''^2(\omega) - \xi'^2(\omega)) d\omega = 0. \quad (57)$$

В случае сигнала симметричной формы первый и четвертый члены в уравнении (56) являются нечетными функциями частоты и исчезают при интегрировании так же, как и третий член в (56), вследствие соотношения (57). Последнее утверждение выполняется не строго, так как коэффициенты в формуле (56) зависят от частоты. Именно эти причины и объясняют малые ошибки и широкое применение интегрального метода при измерениях поляризации мишеней.

2.3. Характерные искажения протонных спектров. Чтобы показать характерные искажения формы сигнала, приведем результаты расчета по формулам (50), (55) [42], используя функцию поглощения [45]:

$$\xi''(\omega) = \frac{\xi_0}{1 + \left| \frac{\omega - \omega_0}{\sigma} \right|^{2,5}} . \quad (58)$$

Дисперсия рассчитывалась из соотношения Кронига—Крамерса по алгоритму [46] (обе функции показаны на рис. 4). Результаты расчета представлены на рис. 7. Зависимость знаменателя формулы (55) от восприимчивости является главной причиной искажений усиленных ЯМР-сигналов, глубина модуляции которых превышает 20%. Как и ожидалось, амплитуда сигнала при отрицательной поляризации больше, чем при положительной, а интеграл от сигнала при положительной меньше, чем при отрицательной поляризации. При поляризации порядка 90% и глубине модуляции, достигающей 40%, отношение интегралов этих сигналов равно 0,98, вопреки значительным искажениям формы линий. При одной и той же величине, но разных знаках поляризации, расчет и эксперимент показывают уширение до 85 кГц при положительной и

сужение формы линии до 53 кГц при отрицательной поляризации; естественная полуширина линии равнялась 70 кГц.

В предыдущих расчетах полагалось, что интегрирование ЯМР-сигнала ведется относительно известной базовой линии. На практике же крылья сигнала

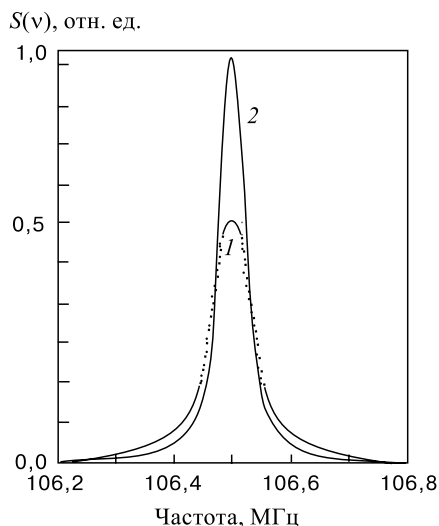


Рис. 7. Сравнение форм линий усиленного ЯМР-сигнала положительной (1) и инвертированного сигнала отрицательной (2) поляризации на выходе Q-метра при одинаковой по модулю ядерной поляризации мишени

полностью прописать не удастся, поэтому точное положение базовой линии неизвестно. Анализ показывает, что меньшая ошибка получается при среднем положении базовой линии, когда при интегрировании дисперсионный вклад на крыльях взаимно компенсируется. С целью уменьшения влияния неполного интегрирования сигнала при относительных измерениях стараются точно фиксировать положение сигнала по отношению к развертке.

Помимо перечисленных погрешностей необходимо иметь в виду, что даже в пределах рабочего диапазона частотной развертки, составляющего обычно 500 кГц, чувствительность Q-метра зависит от частоты.

При работе с протонной мишенью часто возникает проблема больших сигналов. Здесь приходится специальным образом выполнять приемную катушку Q-метра. Различные формы приемных катушек рассмотрены в работе [30]. Там же приведен характерный ход корректирующих поправок Q-метра в зависимости от величины поляризации. Катушки, выполненные из тонкой проволоки, как правило, вызывают значительное радиационное разрушение поляризации вблизи витков из-за высокой плотности поверхностных токов; по этой причине их стараются изготавливать из металлической трубки диаметром около 2 мм.

3. ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЯДЕР СО СПИНОМ $I = 1$

В сильном магнитном поле спиновая система с $I = 1$ имеет три магнитных подуровня, заселенности которых необходимо знать для полного определения состояния мишени в экспериментах по рассеянию частиц. На практике

вместо заселенностей удобнее использовать производную систему других трех параметров. Первый из них — плотность охлажденного материала, которая при известном химическом составе позволяет рассчитать количество различных ядер в мишени. Определение плотности материала, обычно используемого в виде охлажденных шариков, представляет собой непростую задачу, требующую применения специальной методики [47]. Далее, если спиновая система находится в термическом (больцмановском) равновесии, то известно соотношение заселенностей подуровней — второй параметр. Таким образом, для полного расчета спиновой системы остается измерить единственную величину — векторную поляризацию, которая позволяет определить численное значение спиновой температуры и тензорную поляризацию ядер. Мы рассмотрим ядра двух типов: дейтроны в дейтерированном бутаноле [47, 48], пропандиоле [50] и ядра азота (^{14}N) в аммиачной мишени [30, 33]. В обоих материалах тензор градиента электрического поля обладает аксиальной симметрией, что в дальнейших расчетах будет предполагаться по умолчанию. Гиромагнитное отношение дейтронов в 6,5 раз меньше протонного, отличается и форма ЯМР-линии, так что при одинаковой спиновой концентрации интегральная интенсивность дейтронных сигналов оказывается примерно в 100 раз ниже. Тем не менее в дейтронных мишенях еще удастся выполнить ТЕ-калибровку с малой погрешностью [30, 49]. С другой стороны, весьма трудные проблемы приходится решать при детектировании даже усиленных в 300 раз сигналов от ядер азота в аммиачной мишени [33].

В мишенях небольшого объема ($10 \div 20 \text{ см}^3$) [50] поляризацию часто определяют не по интегральной интенсивности, а менее точным методом — по асимметрии формы ЯМР-линии. Этот метод не требует ТЕ-калибровки, но предполагает наличие внутреннего равновесия в спиновой системе и точное воспроизведение формы линии. На асимметрию и форму линии сигнала существенно влияют квадрупольные взаимодействия, поэтому их роль необходимо учитывать наряду с зеемановским взаимодействием.

3.1. Поляризационные параметры ядер со спином $I = 1$. В магнитном поле энергия каждого из подуровней спиновой системы ($I = 1$), с учетом квадрупольного взаимодействия, может быть представлена в виде [51]:

$$E_m = E_0 - E_1 m + E_2 m^2, \quad (59)$$

где m — магнитное квантовое число,

$$E_0 = -2h\nu_Q(2 \cos^2 \theta - 1), \quad E_1 = h\nu_D, \quad E_2 = 2h\nu_Q(3 \cos^2 \theta - 1). \quad (60)$$

Здесь $\nu_D = \gamma_D H_0 / 2\pi$ — центральная частота спектра, γ_D — гиромагнитное отношение дейтрона, $\nu_Q = eqQ / (8h)$, q — квадрупольный момент ядра в см^2 , Q — главное значение симметричного тензора $Q_{\alpha\beta} = \partial^2 \varphi / \partial x_\alpha \partial x_\beta$ (φ — потенциал электрического поля в кристалле), θ — угол между направлением

магнитного поля H_0 и главной осью тензора $Q_{\alpha\beta}$. В системе главных осей ненулевые компоненты тензора записываются в виде $Q_{zz} = Q$, $Q_{zz} = Q_{yy} = -Q/2$. В E_0 включены все вклады в энергию взаимодействия, которые не зависят от спина. В свою очередь, поляризационные параметры не зависят от E_0 . В разных ядрах соотношение E_2/E_1 может меняться от 10^{-3} до 10^{-2} . Заселенности уровней $w(m)$ имеют следующий вид [51]:

$$Z_1 w(1) = \exp [-(E_0 - E_1 + E_2)/kT],$$

$$Z_1 w(-1) = \exp [-(E_0 + E_1 + E_2)/kT], \quad (61)$$

$$Z_1 w(0) = \exp [-E_0/kT],$$

где T — спиновая температура, Z_1 — статистическая сумма:

$$Z_1 = e^{-E_0/kT} \left[1 + 2e^{-E_2/kT} \operatorname{ch} \left(\frac{E_1}{kT} \right) \right]. \quad (62)$$

С помощью уравнений (60)–(62) получается следующая формула для поляризации, учитывающая квадрупольное взаимодействие [51]:

$$P_{I=1}(x, y) = w(1) - w(-1) = P_1(x) \left[1 - \frac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{x}{2})) (1 - e^{-y})}{1 + 2e^{-y} + (2e^{-y} - 1) \operatorname{th}^2(\frac{x}{2})} \right], \quad (63)$$

$$x = \frac{E_1}{kT}, \quad y = \frac{E_2}{kT}. \quad (64)$$

Формула (63) позволяет оценить влияние квадрупольного взаимодействия на величину поляризации. Выражение в квадратных скобках в уравнении (63) составляет небольшую, но асимметричную по знаку поляризации поправку к $P_1(x)$, которая обычно менее $\sim 3\%$. При небольших квадрупольных взаимодействиях, когда $E_2 \approx 0$, поляризация рассчитывается по формуле

$$P_1(x) = \frac{4 \operatorname{th}(\frac{x}{2})}{3 + \operatorname{th}^2(\frac{x}{2})}. \quad (65)$$

Чтобы связать поляризацию с параметром, определяющим спектральную форму линии, вводится асимметрия [52]:

$$R = \frac{w(1) - w(0)}{w(0) - w(-1)}. \quad (66)$$

Используя соотношения (61), (62), нетрудно выразить R в виде [51]:

$$R(\theta) = \frac{e^{(x-y(\theta))} - 1}{1 - e^{-(x+y(\theta))}}. \quad (67)$$

Формула (67) в параметрическом виде выражает зависимость асимметрии от спиновой температуры. В частном случае $E_2 = 0$, $y = 0$, отсюда получается формула, обычно используемая для расчета дейтронной поляризации по асимметрии

$$P = \frac{R^2 - 1}{R^2 + R + 1}. \quad (68)$$

При нулевой поляризации ($T \rightarrow \infty$) асимметрия стремится к пределу

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(\theta) = \frac{1 - E_2/E_1}{1 + E_2/E_1}. \quad (69)$$

Отношение E_1/E_2 определяется по ЯМР-спектру. В случае дейтронов асимметрия (69) с точностью 0,6% равна единице и, очевидно, $E_2 \cong 0$ является хорошим приближением для расчета поляризации. В случае ядер ^{14}N в аммиачной мишени это отношение равно 1,46, и при расчете асимметрии необходимо учитывать квадрупольное взаимодействие. Форма линии спектров ^{14}N также будет отличаться от формы дейтронных спектров [30, 33].

3.2. Метод расчета поляризации дейтронов. Спектр ЯМР дейтронов состоит из двух взаимно перекрывающихся линий $J^+(x_i)$ и $J^-(x_i)$, соответствующих переходам $m = +1 \leftrightarrow m = 0$ и $m = 0 \leftrightarrow m = -1$. Теоретическая [53] и экспериментальная формы линий в пропандиоле [54] показаны на рис. 8. Так как интенсивность ЯМР-линии пропорциональна разности заселенностей магнитных подуровней с $\Delta m = \pm 1$, то отношение интенсивностей переходов совпадает с определением асимметрии по формуле (66). Более того, при аксиальной симметрии теория предсказывает зеркальную симметрию нормированных форм линии переходов $J^+(x_i)$ и $J^-(x_i)$ (см. формулы (75), (76)), поэтому будем считать, что отношение амплитуд

$$R = \frac{J^+(x_i)}{J^-(x_i)}, \quad (70)$$

где x_i — номер канала анализатора, отсчитываемый от центральной (ларморовской) частоты спектра. Сумма интенсивностей обоих переходов составляет спектр наблюдаемого сигнала

$$S(x_i) = J^+(x_i) + J^-(x_i), \quad (71)$$

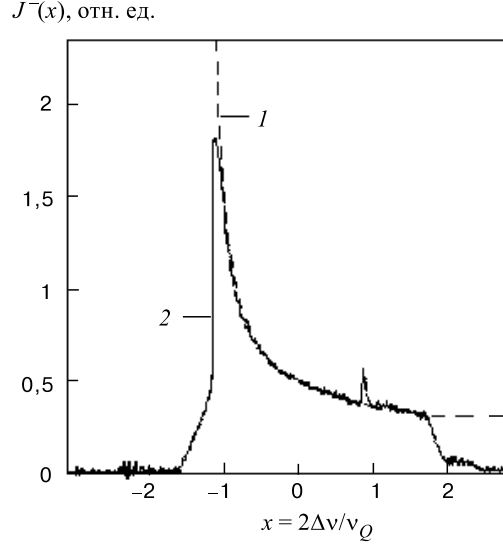


Рис. 8. Теоретическая (1) и экспериментальная (2) формы линий поглощения магнитного дипольного перехода $J^-(x)$ в дейтерированном пропандиоле [54]

по асимметрии которого определяется поляризация дейтронов. Введем вспомогательные симметричную $C(x)$ и антисимметричную $A(x)$ функции [54]:

$$C(x_i) = \frac{1}{2}[S(x_i) + S(-x_i)], \quad A(x_i) = \frac{1}{2}[S(x_i) - S(-x_i)]. \quad (72)$$

Используя соотношения (70)–(72), нетрудно выразить функции $J^\pm$ через функции $A(x_i)$ и $C(x_i)$. Имеем

$$J^+(x_i) = \frac{R}{R^2 - 1}[(R + 1)A(x_i) + (R - 1)C(x_i)], \quad (73)$$

$$J^-(x_i) = \frac{1}{R^2 - 1}[(R - 1)C(x_i) - (R + 1)A(x_i)]. \quad (74)$$

Единственной неизвестной в этих уравнениях является параметр R , для определения которого необходимо привлечь дополнительную информацию о функциях $J^\pm$. Например, R можно рассчитать по трем седловым точкам спектра [54], отмеченным на рис. 9, чтобы получить наилучшее приближение к теоретической форме линии переходов [53]:

$$J_T^+(x) = \frac{B}{\sqrt{1-x}}, \quad -2 < x < 1, \quad (75)$$

$$J_T^-(x) = \frac{B}{R\sqrt{1+x}}, \quad -1 < x < 2, \quad (76)$$

где B — нормировочная константа, $x = (\nu - \nu_D)/(2\nu_Q)$. Форма спектра (76) показана пунктиром на рис. 8. В результате несложных алгебраических преобразований из уравнений (73), (74) получается полезная формула [54]:

$$R = \frac{S(+1) - S(0)/\sqrt{2}}{S(-1) - S(0)/\sqrt{2}}. \quad (77)$$

Эта формула позволяет рассчитать асимметрию дейтронного спектра по амплитудам трех седловых точек, расположение которых показано на рис. 9. Далее, используя (68), легко определить поляризацию, и, наконец, из уравнений (73), (74) получить форму линии каждого магнитного дипольного перехода.

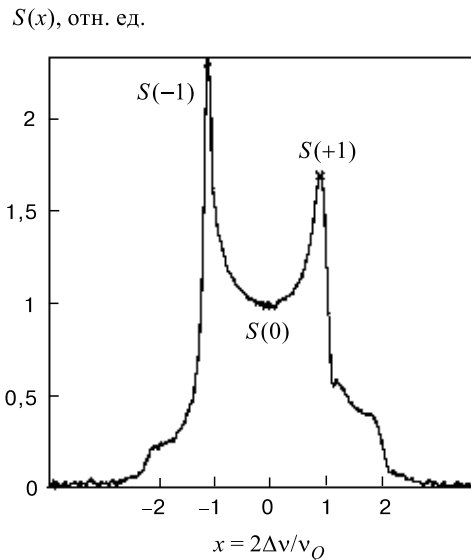


Рис. 9. Обозначение седловых точек на дейтронном спектре, которые используются при расчете поляризации по формуле (77)

В опытах [55, 56] было выполнено сравнение поляризации, измеренной по асимметрии и интегральным методом. При высоких значениях ядерной поляризации оба метода показывают хорошо совместимые значения. Однако при абсолютных величинах поляризации менее $15 \div 20\%$, как правило, методы дают существенное расхождение в определении поляризации. Мы вернемся к этой проблеме, связанной с установлением теплового равновесия в спиновых системах квадрупольных ядер, и попытаемся глубже проанализировать причины такого расхождения.

3.3. Поляризация ядер ^{14}N в аммиачной мишени. В процессе динамической поляризации протонов в аммиачной мишени (NH_3) поляризуются также и ядра азота. Последние составляют небольшой паразитный фон к эффекту рассеяния частиц на водороде, для вычитания которого нужно знать поляризацию ^{14}N . Исследование поляризации ядер азота является также полезной иллюстрацией к вопросу об установлении единой спиновой температуры в сложных спиновых системах, без рассмотрения которого трудно правильно интерпретировать состояние спиновой системы [33]. Гиромагнитное отношение ядер ^{14}N примерно в 2,5 раза меньше, чем у дейтронов, $\gamma_N/2\pi = 307,627$ Гц/Гс, а по отношению к протонному составляет всего $\gamma_N/\gamma_p = 0,07224$. Константа квадрупольного взаимодействия спинов с градиентом электрического поля в формуле (60) измерялась по спектру ЯМР-сигнала и составила $3 \cdot \nu_Q = 1,185 \cdot 10^6$ Гц [33]. Как и в случае дейтронов, теория [53] предсказывает два пика в спектре ЯМР при $\theta = \pi/2$ в формулах (60), так что пики сигналов приходятся на частоты

$$\nu = \nu_N \pm 3\nu_Q. \quad (78)$$

Измерения проводились на частоте $\nu_N = 6,47$ МГц в поле 2,1 Тл [33]. Вследствие огромного квадрупольного уширения ЯМР-линии в разумном диапазоне развертки Q-метра 300 кГц на частоте 6,47 МГц удается перекрыть лишь четверть дистанции между пиками сигналов, поэтому для получения обоих областей спектра вблизи максимумов магнитное поле приходилось сдвигать почти в 1,5 раза. Амплитуды усиленных сигналов оказались столь малыми по сравнению с шумами и дрейфом базовой линии, что приходилось использовать технику накопления сигналов. Измеренные таким образом области спектров вблизи пиков, для удобства сравнения, совмещены на одном рис. 10 [57]. Широкий «шлейф» на склонах сигналов связан с дрейфом их базовой линии. С целью более точного определения положения базовой линии приходилось складывать несколько спектров (по пять спектров на рис. 10), чтобы затем отсчитать усредненную амплитуду. При высоких температурах асимметрия (69) стремится к $\lim_{T \rightarrow \infty} R(\theta = \pi/2) = 1,46$ — пределу, который и определяет отношение амплитуд спектра при нулевой векторной поляризации дейтронов. Следовательно, формула (77), справедливая при малом квадрупольном расщеплении, не может быть в этом случае использована для расчета поляризации азота. Интересно отметить, что отношение амплитуд пиков сигналов положительной и отрицательной поляризаций ^{14}N соответствует отрицательному знаку E_2 в формуле (59). В результате анализа было установлено, что совпадение поляризации, рассчитанной по асимметрии (67), с экспериментом носит лишь качественный характер. Проблема связана с установлением равновесной температуры в спиновой системе. В рассматриваемом случае расстояние между сигнальными пиками $6\nu_Q \approx 0,31\nu_N$ — такого же порядка,

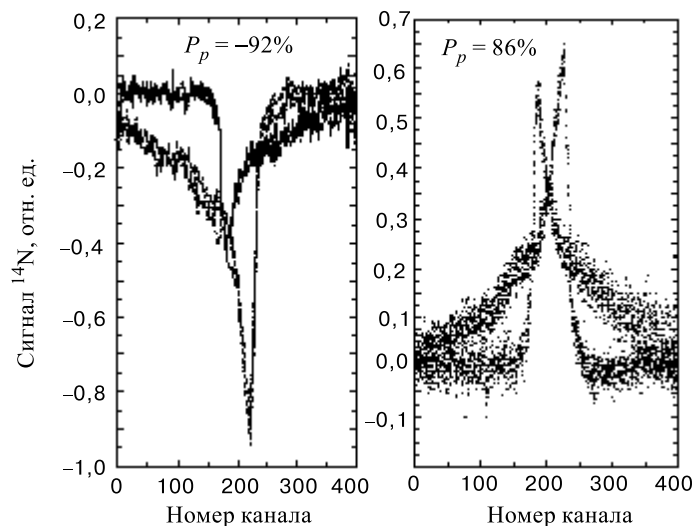


Рис. 10. Области ЯМР-спектра ^{14}N вблизи обоих максимумов, полученные путем сдвига поля H_0 . Спектры ^{14}N слева соответствуют поляризации протонов -92% , справа — поляризации $+86\%$

что и зеемановская частота ядер, поэтому перераспределение спинов по частотному спектру должно изменять их зеемановскую энергию. В жесткой решетке изменение полной энергии спинов определяется длинными временами спин-решеточной релаксации. Другими словами, наблюдаемые ЯМР-спектры соответствуют какой-то переходной стадии к установлению больцмановского распределения заселенностей. Отметим, что речь идет о температурах материала $\approx 0,2$ К в условиях накачки поляризации СВЧ-полем. Без СВЧ-поля поляризация замораживается и сколько-нибудь заметная динамика в поведении сигналов отсутствует. В нарушении больцмановского распределения можно убедиться следующим образом. По абсолютной величине поправка к поляризации в квадратных скобках формулы (63) менее $\pm 3\%$, и, если ею пренебречь, считая формы линии обоих переходов зеркально-симметричными, то интегральная интенсивность сигнала легко оценивается по амплитудам пиков [57]:

$$S = \int_{\nu} [I_+(\nu) + I_-(\nu)] d\nu = C[J^+(\pi/2) + J^-(\pi/2)], \quad (79)$$

где C — калибровочная константа. Левая часть этого равенства представляет собой интеграл по всему спектру, который в данном случае невозможно опре-

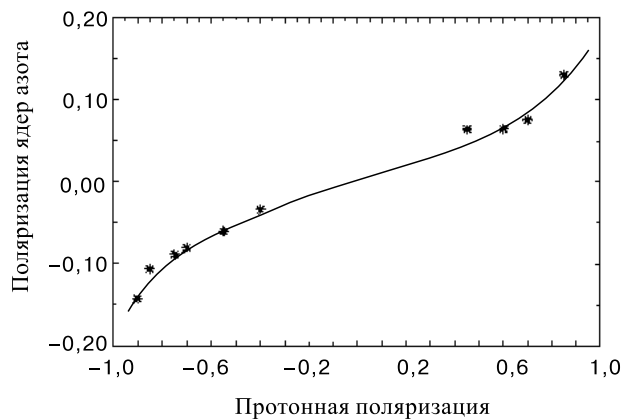


Рис. 11. Сравнение протонной и ^{14}N -поляризаций, рассчитанных по формуле Бриллюэна в предположении равенства спиновых температур (жирная линия). Экспериментальные точки — суммы амплитуд пиков в формуле (79)

делить экспериментально. Правая часть выражает этот интеграл через амплитуды пиков, допуская зеркальную симметрию формы линии обоих переходов. Суммы амплитуд пиков спектров ^{14}N в (79), полученные при различной поляризации протонов в аммиаке, показаны на рис. 11; данные находятся в хорошем согласии с ходом поляризации, рассчитанной по формуле Бриллюэна (101) при равенстве спиновых температур протонов и ядер азота [33, 57]. Единственным подгоночным параметром служила константа C в формуле (79). Хорошее совпадение с экспериментом подтверждает центральную концепцию ДО о равенстве некоторой усредненной спиновой температуры ядер азота и температуры протонов. Проведенный анализ наглядно показывает, что при работе с мишенями сложных ядер необходимо контролировать процесс установления равновесия в спиновой системе, например, путем сравнения поляризации, измеренной интегральным методом и по асимметрии.

4. МОДУЛЯЦИОННОЕ УСИЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

4.1. Частотная (временная) дисперсия при ЧМ. Величина поляризации является главным параметром, обеспечивающим эффективность применения мишени, поэтому обнаруженное в [58, 59] значительное модуляционное усиление дейтронной поляризации в 1,7 раза, сопровождаемое к тому же примерно двукратным уменьшением времени накачки поляризации, имеет важное значение для техники поляризованных мишеней. Предыдущие исследования также показывали усиление ДПЯ при частотной модуляции (ЧМ). Наиболь-

шее усиление от 10 до 20% ранее было получено во фторированных (fluorinated) спиртах и привело к поляризации 80% [60]. Считалось, что появление таких эффектов не выходит за рамки простейших предположений, и они не исследовались.

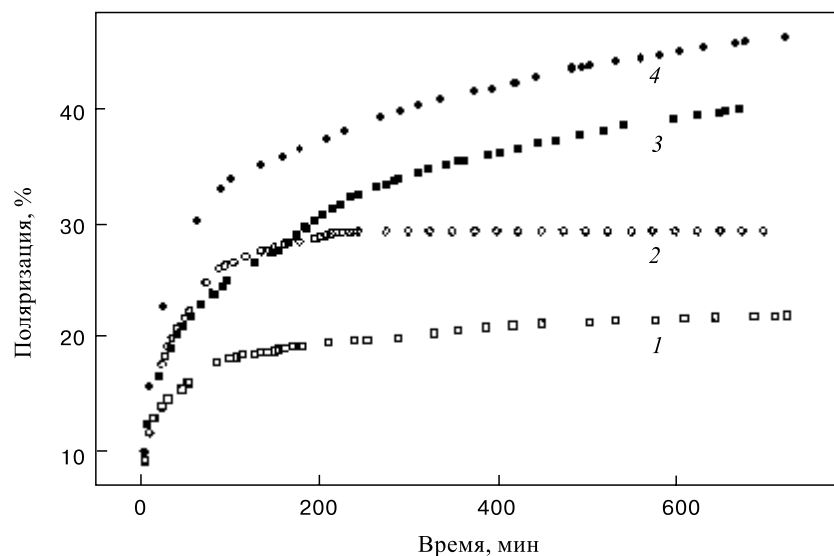


Рис. 12. Зависимость положительной (1, 3) и отрицательной (2, 4) дейтронной поляризации в бутаноле от времени при накачке с выключенной (1, 2) и включенной (3, 4) частотной модуляцией СВЧ-генератора

В SMC-мишени [61], изготовленной из дейтерированного бутанола (C_4D_9OD) с 5% добавкой тяжелой воды и парамагнитным комплексом $EDBA-Cr^{+V}$ с концентрацией $7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, усиление эффективности ДПЯ достигалось частотной модуляцией СВЧ-генератора накачки (70 ГГц) с девиацией 30 МГц и модуляционным периодом $\sim 2 - 5 \text{ мс}$ [62, 63]. На рис. 12 приведена зависимость поляризации от времени при накачке с включенной и выключенной ЧМ. При выключенной ЧМ поляризация быстро снижалась к значению, полученному без ЧМ. Максимальная поляризация достигалась при более низком уровне СВЧ-мощности $0,05 \div 0,2 \text{ мВт/г}$ по сравнению с накачкой без ЧМ, при этом оптимальные частоты накачки сдвигаются от центра ЭПР-линии. Было установлено, что СВЧ-поле в резонаторе, полученное при медленном прохождении ЭПР-линии, содержит боковые резонансы, которые исчезают при включенной ЧМ. На рис. 13 показана интенсивность поля в резонаторе, полученная болометрическим детектором. В качестве детектора использовался угольный композиционный резистор «Speer-220». Техника бо-

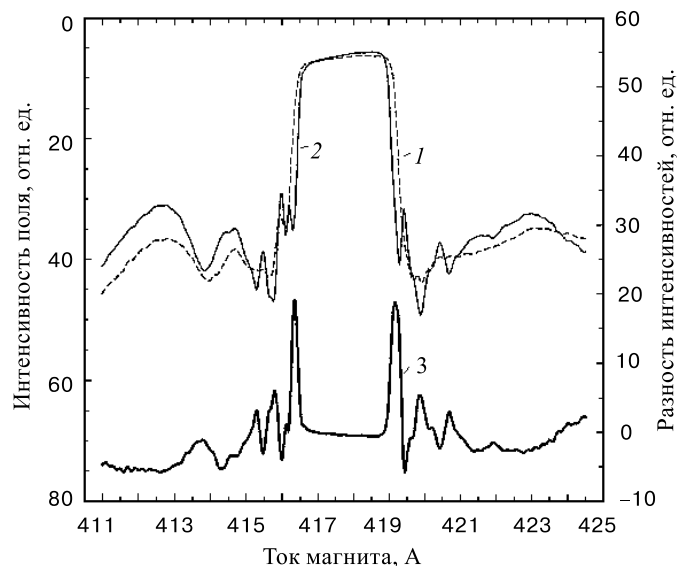


Рис. 13. Болومترические ЭПР-спектры в резонаторе SMC-мишени с включенной $\Omega = 30$ МГц (1) и выключенной $\Omega = 0,1$ МГц (2) ЧМ. Нижний спектр (3) показывает дополнительное поглощение, вызывающее усиление ядерной поляризации. СВЧ-мощность 0,1 мВт/г, $T_m = 1$ мс, $f_0 = 69,540$ ГГц

лометрических измерений описана в приложении 2 [63]. При получении спектров центральная частота СВЧ-генератора поддерживалась неизменной, а ток магнита изменялся мелкими шагами, дожидаясь каждый раз равновесных показаний термометра, так что на получение каждого спектра затрачивалось по несколько часов. Спектры 2 и 1 на рис. 13 сняты при естественной ширине спектра генератора 0,1 МГц (без модуляции) и при девиации частоты 30 МГц (с модуляцией) соответственно. Их разность, показанная внизу на рис. 13, указывает на существенный рост парамагнитных потерь на крыльях линии. На рис. 14 показана зависимость дополнительного поглощения от частоты модуляции при четырех уровнях микроволновой мощности [30, 65]. Видно, что при достаточно длинных периодах модуляции (T_m) дополнительное поглощение пропадает, но вместе с ним исчезает и модуляционное усиление поляризации. Таким образом, дополнительное поглощение зависит от скорости изменения частоты. Эта скорость появляется в квадратичном по τ члене в разложении в ряд фазового сдвига $\varphi(t - \tau) - \varphi(t)$ при определении энергетических параметров микроволнового поля. Отсюда следует, что дополнительное поглощение при включении модуляции связано с процессом, который имеет характерное время корреляции (τ) порядка $\omega\tau^2 \approx 2\pi$, где

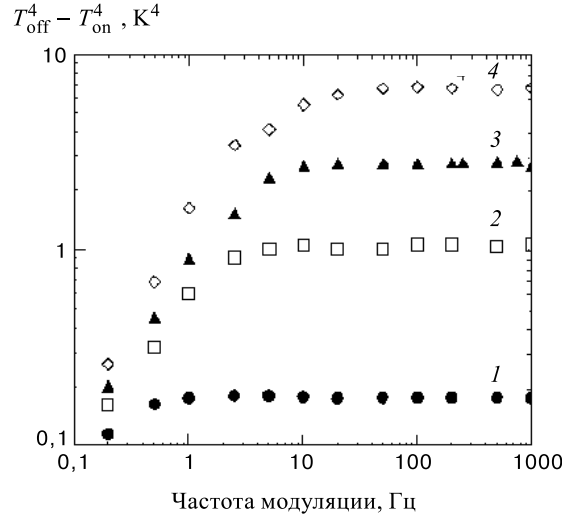


Рис. 14. Зависимость дополнительного поглощения от частоты модуляции. Цифры на графиках показывают относительную величину подводимой СВЧ-мощности [65]

$\dot{\omega} = d\omega/dt$. Для оценки можно положить $\dot{\omega} \approx \Omega/T_m$, где $\Omega \approx 2\pi \cdot 4 \cdot 10^6$ Гц — девиация частоты (см. рис. 15). Причиной дополнительного поглощения может быть микроскопическая неоднородность локальных полей электронных спинов, вследствие чего без частотной модуляции СВЧ-поле взаимодействует лишь с незначительной группой электронных спинов, называемых спиновыми пакетами [24, 64]. Если в качестве τ выбрать полученное Портисом [64] характерное время насыщения $\tau \approx (\tau_1 \tau_{ss})^{1/2}$, где $\tau_1 \approx 0,1$ с и $\tau_{ss} \approx 10^{-5}$ с — типичные времена спин-решеточной и спин-спиновой релаксации спиновых пакетов в материалах мишени при $T < 0,5$ К соответственно, то период модуляции, при котором должно наблюдаться сильное влияние ЧМ, должен быть менее

$$T_m \leq \frac{\Omega}{2\pi} \tau_1 \tau_{ss} \approx 4 \text{ с}, \quad (80)$$

что по порядку величин совпадает с данными на рис. 14 ($1/T_m \cong 0,25$). Таким образом, дополнительное поглощение может быть связано с процессом восстановления (насыщения) спиновых пакетов и, следовательно, может зависеть от частотной (временной) дисперсии электронной восприимчивости.

Такой вывод, тем не менее, не является безупречным. Действительно, характерные времена накачки ядерной поляризации составляют десятки минут и значительно превосходят времена кросс-релаксации электронных спинов. В

таком случае ЭПР-линия может рассматриваться как однородно уширенная, что подтверждается на практике справедливостью центральной концепции динамического охлаждения о равенстве спиновых температур различных ядер в мишени. С этой точки зрения роль спиновых пакетов не является существенной для объяснения модуляционного эффекта.

4.2. Пространственная дисперсия ЧМ. С другой стороны, длина SMC-мишени ($d = 600$ мм) более чем в 100 раз превышает длину волны СВЧ-поля $\lambda \approx 4$ мм [61]. Оценки показывают, что в этом случае ЧМ может влиять и на структуру микроволнового поля в материале мишени, которая в общем случае зависит от пространственно-временных переменных ($kr \pm \omega t$). Таким образом, помимо временной, может возникать и эффект пространственной дисперсии, отражающий [66] «...зависимость макроскопических свойств вещества от пространственной неоднородности электромагнитного поля».

Поле в резонаторе мишени является суперпозицией падающей и отраженной от стенок резонатора волн. В результате образуются стоячие волны с пространственно неоднородным распределением интенсивности поля. При простейшем рассмотрении основное поглощение следует ожидать в некоторой области $\ell_0 < \lambda/4$ вблизи максимумов интенсивностей $Z_i - \ell_0/2 \leq z \leq \leq z_i + \ell_0/2$, где i — номера пучностей магнитной компоненты поля вдоль оси z резонатора, а за этими пределами поглощением можно пренебречь. Материальное уравнение для плоской ТЕМ-волны, распространяющейся вдоль оси z , можно представить в виде [63]:

$$\mathbf{B}(z) = \mu_0 \left[1 + \chi(\omega, \overline{H^2}) \right] \mathbf{H}(z, t), \quad (81)$$

где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ — комплексные, зависящие от времени векторы напряженности поля и магнитной индукции. Насыщение в (81) учитывается зависимостью восприимчивости от интенсивности поля. В этой модели пространственное распределение интенсивности поля вдоль оси z можно задать формулой [63]:

$$h_i h_r^* = \frac{1}{2} h_i^2 e^{-2d \cdot \beta(\omega)} (1 + \cos[2(\alpha_0 z - \alpha d)]), \quad (82)$$

где h_i и h_r — плотности амплитуд падающей и отраженной волны, α_0 и α — постоянная распространения на несущей ω_0 и частоте ω соответственно, β — постоянная затухания (здесь обозначения α и β отличаются от принятых в разд. 2):

$$\alpha - i\beta = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon \cong \frac{\sqrt{\epsilon_r} \omega}{c} \left[1 + \frac{\chi'}{2} - \frac{i}{2} \chi'' \right], \quad (83)$$

где $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ — скорость света в вакууме и ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость. При изменении частоты модуляции пространственная структура СВЧ-поля в мишени может изменяться как из-за резонансной зависимости дисперсии, так и поглощения от частоты в формуле (83).

Это может привести к более равномерному насыщению материала мишени и вызвать рост средней поляризации. Здесь мы ограничимся рассмотрением влияния дисперсии на дополнительное поглощение. В принципе, формулу (82) можно принять за исходный постулат для сравнения с экспериментальными данными, так как в сложном многомодовом резонаторе мишени не видно другого пути для разумного расчета распределения поля. В предположении быстрой модуляции частоты, то есть $T_m \ll 1$ с в формуле (80), плотность поглощаемой мощности теперь будет зависеть от изменения постоянной распределения ($\Delta\alpha$) при девиации частоты [63, 67]:

$$p_{\text{on(off)}} = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \chi h_{\text{on(off)}}^2 \cos^2(d\Delta\alpha_{\text{on(off)}}) \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} d\omega \cdot e^{-2d\beta(\omega-\omega_0)}, \quad (84)$$

где аргумент косинуса определяется расстройкой частоты относительно центра ЭПР-линии. Индексы «on», «off» обозначают включенную и выключенную ЧМ соответственно. Интегрирование выполняется по всей полосе частотного спектра генератора. В пределе $d \rightarrow 0$ и $h^2\Omega \rightarrow I$ выражение (84) переходит в обычное уравнение для плотности поглощаемой мощности, справедливое при $d \ll \lambda$:

$$p_{\text{on(off)}} = i \frac{\mu_0}{2} \omega \chi I, \quad (85)$$

где I — интенсивность поля в резонаторе. Нетрудно видеть, что парамагнитное поглощение в длинной мишени имеет дополнительный экспоненциальный член в поглощении, обязанный перемещению максимумов интенсивностей поля. Так как поглощение в (84) зависит от дисперсии, то рассматриваемая модель позволяет не только объяснить появление боковых сателлитов в спектре поглощения на рис. 13, но и предсказать их число (n) [63]:

$$d \cdot \alpha(H_0) - d \cdot \alpha(H_{\text{res}}) = \sqrt{\epsilon_r} \omega_0 [\chi'(\omega) - \chi'(\omega_0)] d / (2c) = n\pi. \quad (86)$$

Принимая $\epsilon_r = 2$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^{10}$ Гц, $d = 50$ см, $\Delta\chi' \leq |\chi'|_{\text{max}}/2 = 4 \cdot 10^{-2}$, получаем $n \cong 6$; данные на рис. 13 показывают 4 или 5 взаимно перекрывающихся пиков. На рис. 15 показаны дополнительные потери (реальная часть уравнения (84)) как функция Ω при $T_m = 2$ мс. Данные получены на частоте, обеспечивающей максимум отрицательной ядерной поляризации. Свободными параметрами при фитировании были производная $\dot{\beta} = \partial\beta/\partial\omega$, обозначающая изменение поглощения между максимумом и минимумом интенсивности поля вдоль оси z резонатора, Ω_0 — незначительный подгоночный параметр, который улучшает фитирование при небольшой величине СВЧ-мощности и $\chi''h^2$ — параметр, нормирующий входную СВЧ-мощность.

Хорошее совпадение с экспериментом при сделанных предположениях подтверждает возможность обнаружения SMC-коллаборацией в CERN эффекта пространственной дисперсии в магнитном резонансе. Тем не менее рассмотренные здесь модели модуляционного эффекта не исчерпывают истинной природы обнаруженного явления. Так, данные, приведенные в этом разделе, формально можно рассматривать как увеличение ядерной поляризации (т.е. повышение степени СВЧ-насыщения материала), но при меньшей подводимой СВЧ-мощности с включенной модуляцией частоты. Интересно отметить, что и такое объяснение оказывается вполне допустимым, если учесть, что ЭПР-линия (см. рис. 3) имеет инвертированный участок индуцированного усиления приложенного поля.

В техническом плане болометрическое детектирование СВЧ-мощности в резонаторе, используемое в этом эксперименте [63], впервые позволило измерить кривую магнитного насыщения материала мишени, которая, по существу, и определяет эффективность использования СВЧ-мощности.

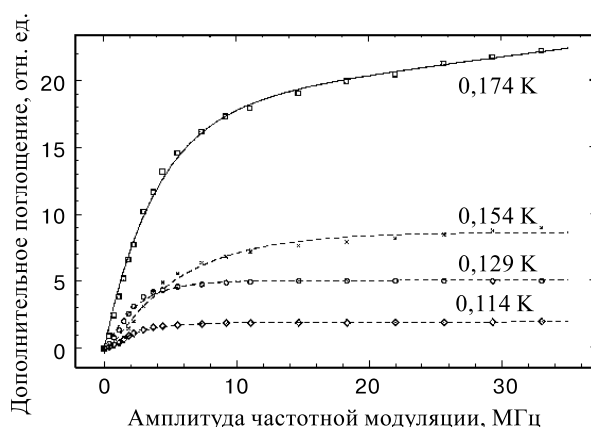


Рис. 15. Зависимость дополнительного поглощения по формуле (84) от амплитуды модуляции частоты. Экспериментальные точки получены при фиксированной для каждой кривой СВЧ-мощности, которая и определяет температуру материала, приведенную у кривых

Другим полезным для практики следствием сделанных экспериментов является вывод о том, что при проектировании резонатора мишени следует всемерно избегать использования конструктивных элементов, которые вносят заметные диэлектрические потери: массивные пластиковые контейнеры, каркасы катушек и тому подобные материалы, нагружающие камеру растворения диэлектрическими потерями СВЧ-мощности.

5. МАГНИТНОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ

Генерация радиоволн, стимулированная слабоактивной средой с отрицательно поляризованными ядерными спинами, изучалась при исследовании работы ядерных спиновых генераторов [53]; ее обычно называют генерацией «мазерного» типа. В мазерном генераторе спины компенсируют потери в резонаторе, но его связь со спиновой системой слишком слаба, чтобы образовывать единую связанную колебательную систему. В работах [7, 68–70] было показано, что выше некоторого порога ядерной поляризации возникает другой сверхизлучательный (СИ) тип генерации, интенсивность которого пропорциональна квадрату ядерной поляризации. Такой генератор, в некотором смысле, является аналогом оптическому СИ-лазеру, хотя и отличается от него способом создания инверсной заселенности и наличием резонатора, который осуществляет корреляцию излучения пространственно разделенных ядерных магнитных моментов. Энергетическую возможность СИ-генерации обосновали Бломберген и Паунд [71]. Файн [72] предложил назвать новый источник когерентных радиоволн когетроном.

5.1. Исследование радиочастотного сверхизлучения. В качестве активного вещества использовался пропандиол ($C_3H_8O_2$) — диэлектрик с высокой концентрацией протонных спинов и парамагнитной примесью Cr^{+V} , необходимой для получения ДПЯ [68]. В CERN [33] сильные эффекты СИ наблюдались в облученном аммиаке с F -центрами. С целью более полного освещения здесь собраны данные обоих во многом аналогичных экспериментов. Материал мишени готовится в виде замороженных шариков или гранул с коэффициентом заполнения около 0,6. При $T_0 = 0,3$ К в поле $\approx 2,5$ Тл в мишени методом ДПЯ получалась $(-70 \div -90)\%$ поляризация протонов. Затем СВЧ-поле выключалось, вследствие чего температура камеры растворения понижалась до ≈ 50 мК, а время ядерной спин-решеточной релаксации превышало 500 часов (см. рис. 1). Такова стартовая ситуация для всех ниже описанных экспериментов по СИ.

Было обнаружено [68–70], что если, изменяя поле магнита, совместить ларморовскую частоту ядерных спинов с резонансной частотой пассивного колебательного контура, то первоначальная поляризация -85% самопроизвольно реверсируется и становится положительной, достигая $12 \div 50\%$. В зависимости от величины начальной поляризации и параметров резонатора генерация происходит либо с реверсом, либо сопровождается значительным понижением абсолютной величины поляризации. На рис. 16 иллюстрируются оба сценария на примере протонов в аммиачной мишени [57].

Оценку возможности возникновения генерации можно выполнить, сравнивая потери в контуре с отрицательным сопротивлением, которое спиновая система вносит в контур при СИ. Для аммиачной мишени протонная восприимчивость равна

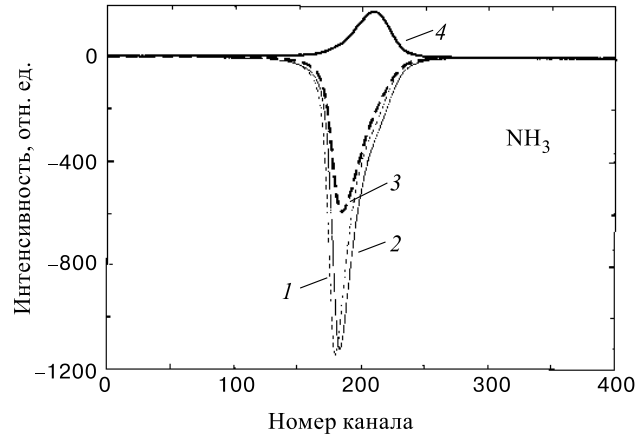


Рис. 16. В результате СИ стартовая отрицательная поляризация (спектры 1, 2) либо значительно уменьшается (3), либо инвертирует знак (4). Результат зависит от добротности контура

$$\begin{aligned}\overline{\chi''} &\approx \frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\Delta\nu} (-\chi_0) = -\frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\Delta\nu} \frac{N\mu_0\mu_N}{B_0} = \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{106 \cdot 10^6 \text{ Гц}}{4,7 \cdot 10^4 \text{ Гц}} \frac{5,4 \cdot 10^{28} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,05 \cdot 10^{-27}}{2,6} = -0,47,\end{aligned}\quad (87)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ — магнитная постоянная, μ_N — ядерный магнетон, N — спиновая концентрация, равная $3,8 \cdot 10^{28}$ спин/м³ в пропандиоле и $5,4 \cdot 10^{28}$ спин/м³ в аммиаке и B_0 — индукция магнита в Тл. Примем резонансную частоту 100 МГц, индуктивность $L = 10^{-7}$ Гн и фактор заполнения $\eta = 0,5$, тогда магнитные моменты ядер вносят в контур отрицательное эквивалентное сопротивление

$$\bar{r} = \eta \overline{\chi''} \cdot \omega L = -0,5 \cdot 0,47 \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 10^{-7} = -16 \text{ Ом}.\quad (88)$$

Величина этого сопротивления по модулю намного превышает собственные потери в контуре, составляющие обычно менее 1 Ом. Следовательно, активное вещество мишени может вызвать радиочастотную генерацию; ниже мы проследим за ее развитием.

Для наблюдения генерации в простой колебательный контур, индуктивно связанный с мишенью, включался резистор с номиналом меньше 1 Ом. Сигнал с этого резистора, пропорциональный току (полю в катушке), детектировался и записывался цифровым осциллографом, который запускался при

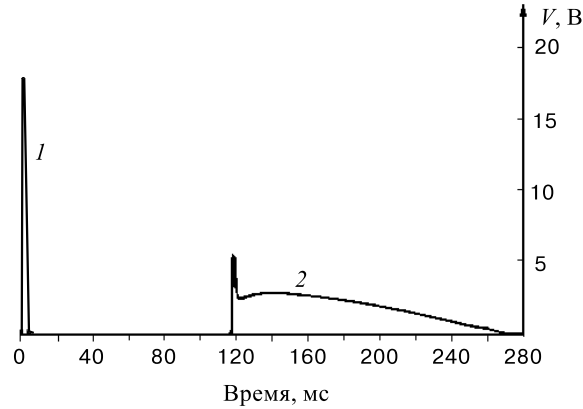


Рис. 17. При высокой начальной поляризации сначала возникает СИ (1), затем МГ-импульс (2). При низкой поляризации — только правый импульс МГ. Поле H_0 в процессе опыта плавно изменяется

возникновении генерации в контуре. Резонансная частота контура составляла 21,5 МГц, она соответствовала протонному резонансу при $H_0 \approx 0,5$ Тл, добротность в охлажденном состоянии — около 500. Эксперимент выполнялся следующим образом [68]. Поле H_0 адиабатически уменьшалось от 2,5 Тл, в котором осуществлялась поляризация ядер, до момента пересечения ларморовской частоты спинов с резонансной частотой контура ($\approx 0,5$ Тл). В ходе экспериментов было установлено, что при начальной поляризации $(-39 \div -45) < P < -9\%$ система детектирует один импульс мазерной генерации (МГ) с характерной, широкой по сравнению с T_2 длительностью, достигающей 0,3 с (правый импульс на рис. 17). По мере роста модуля начальной поляризации характер излучения меняется. Сначала возникает короткий СИ-импульс (левый импульс на рис. 17), вслед за которым с задержкой идет МГ. Таким образом, при высокой начальной поляризации за один цикл снижения H_0 можно наблюдать два разных процесса — СИ- и МГ-импульсы, как это в целом показано на рис. 17. Модуляция поля H_0 полем звуковой частоты вызывает амплитудную модуляцию МГ-импульса с частотой модулирующего поля. При увеличении амплитуды модулирующего поля процесс МГ можно многократно прерывать и возобновлять, образуя «гребенку» МГ-импульсов. В противоположность этому СИ-импульс появляется единожды, и для его повторения необходимо вновь повторять накачку ядерной поляризации. На рис. 18 в развернутом виде показана форма СИ-импульса, которая, в соответствии с общей теорией СИ [73], имеет вид

$$f(t) \propto \operatorname{sch} \left[\frac{(t - t_0)}{\tau} \right], \quad (89)$$

где t_0 — время задержки, τ — длительность, характеризующая ширину импульса. Результаты теоретических расчетов по формуле (89), фитированные

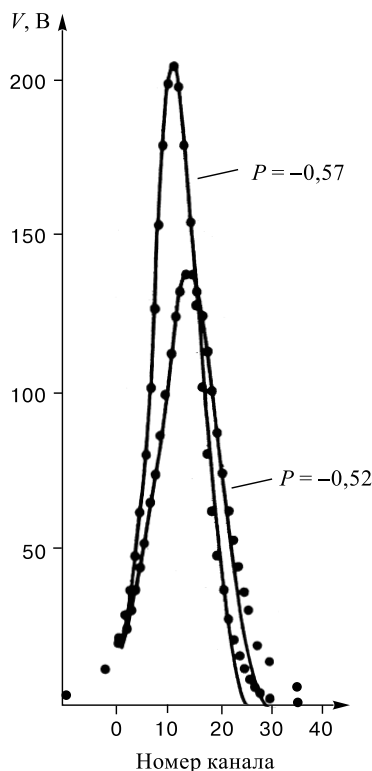


Рис. 18. Сравнение экспериментальной формы СИ-импульсов (сплошные линии) с теорией Дикке (точки на кривых). Длительность 10 мкс/канал

новой системой [74], вследствие чего длительность МГ растет с увеличением начальной поляризации. В противоположность этому длительность СИ-импульса уменьшается с ростом поляризации.

В любой системе с обратной связью, включая, разумеется, и СИ-генератор, для возбуждения генерации необходимо выполнение не только амплитудных условий (иметь высокую отрицательную поляризацию и спиновую плотность активного вещества), но и выполнение фазовых соотношений, которые связаны с наличием дисперсии и комплексным характером импеданса контура в

к данным, показаны точками на этом рисунке. Чтобы атомы в макроскопически большом объеме смогли излучать когерентно, переходы между уровнями должны происходить за время $\tau \sim 1/N$, которое должно быть меньше времени спин-спиновой релаксации (T_2). Следовательно, при магнитном СИ длительность импульса должна уменьшаться при повышении поляризации. Поскольку полная энергия, излучаемая коллективом N спинов, очевидно, есть $Nh\nu_0$, где ν_0 — частота перехода и h — постоянная Планка, то интенсивность излучения

$$J \propto Nh\nu_0/\tau_c \propto N^2 \quad (90)$$

должна включать член, пропорциональный квадрату ядерной поляризации. Все эти общие закономерности СИ-процесса, предсказанные Дикке, наблюдаются и в магнитном СИ. Так, с увеличением начальной поляризации появляется параболическая зависимость интенсивности излучения от поляризации и сокращается длительность СИ [68].

Эксперимент показывает, что длительность МГ-импульса значительно превышает как время поперечной релаксации T_2 , так и время пересечения полосы пропускания контура, что нетрудно рассчитать, зная скорость изменения поля H_0 . Происходит «захват» резонансной частоты контура спиновой системой [74], вследствие чего длительность МГ растет с увеличением начальной поляризации. В противоположность этому длительность СИ-импульса уменьшается с ростом поляризации.

широкой полосе частот. По этой причине при анализе СИ уравнения Блоха необходимо дополнить или видоизменить с учетом комплексного характера импеданса контура. В работах [75, 76] система уравнений Блоха была дополнена уравнением для колебательного контура

$$L \frac{dI_c}{dt} + RI_c + \frac{1}{C} \int I_c dt = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (91)$$

где L , C и R — индуктивность, емкость и активное сопротивление контура соответственно; I_c — ток в контуре, $\Phi = \mu_0 \eta_0 S_c N_c m_x$ — поток, индуцируемый спинами в катушке с площадью поперечного сечения S_c и числом витков N_c , η_0 — фактор заполнения. Переход от тока I_c к полю H_c в катушке выполнялся по формуле $H_c = N_c I_c / \ell$, где ℓ — длина катушки. Рассматривая СИ в полосе пропускания контура, авторы работы [76] получили аналитические выражения для времени задержки, длительности и интенсивности СИ, которые находятся в хорошем согласии с данными эксперимента. Интересно отметить, что баланс энергии «контур плюс спиновая система» зависит от суммы [76]:

$$I = -\frac{d}{dt}(W_c + W_z), \quad (92)$$

где $W_c = \mu_0 V_c h^2 / 2$ — энергия, запасенная в радиочастотном контуре; $W_z = -\mu_0 \eta_0 V_c H_0 m_z$ — зеемановская энергия спинов, V_c — объем катушки и I — интенсивность излучения. Таким образом, СИ-интенсивность зависит от суммарной энергии «контур плюс зеемановская система». Генерация представляет собой излучение зеемановского резервуара за малое время T_2 , когда поперечная намагниченность уже не является «хорошей» динамической переменной.

В более широкой полосе частот поведение СИ-генератора исследовалось в работе [74]. Было показано, что при сильной связи спинов с контуром частота МГ-генерации

$$\omega_1 = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \gamma k M_z \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (93)$$

может существенно отличаться от ларморовской частоты (ω_0); разность частот зависит от фазового сдвига φ между напряжением и током (полем катушки), который составляет

$$\varphi = \arctg [(\omega_1 L - 1/\omega_1 C)/R]. \quad (94)$$

В опыте [68] этот сдвиг достигал 10^5 Гц. Формула (93) была получена также в работе [77]. Если поле H_0 непрерывно варьируется, то генерация должна начаться еще до совмещения ларморовской частоты с резонансной частотой

контура, поскольку дисперсия отрицательной магнитной восприимчивости стремится подстроить частоту контура к ларморовской частоте спинов. Сдвиг частоты настройки колебательного контура определяется формулой (30):

$$\frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \omega_0 \chi'.$$

Ядерную дисперсию в этой формуле нетрудно оценить по (87). Используя данные для пропандиола и полагая $\chi'' \cong \chi'$, получим $\chi' \approx 0,1$. Отсюда, согласно (30), на частоте 21,5 МГц сдвиг частоты настройки контура достигает 1 МГц. Так как знак дисперсии инвертируется в центре ЯМР-линии, то удержание частоты настройки контура будет продолжаться и после пересечения резонансной частоты контура, т.е. генерация может длиться в удвоенной полосе частот порядка 2 МГц. Повышение начальной поляризации будет способствовать расширению области захвата частоты, поэтому длительность МГ-импульса, в полном соответствии с экспериментом, растет при увеличении абсолютной величины начальной поляризации, вплоть до возникновения СИ, а длительность излучения значительно превосходит время T_2 . Учет комплексного характера импеданса контура и исследование СИ позволили уточнить условие возникновения МГ [53], которое является необходимым условием возникновения СИ [74–76]:

$$T_R^{-1} \leq \frac{1}{2} \eta \gamma Q |M_z| \cos^2 \varphi, \quad M_z < 0,$$

где T_R — время радиационного затухания, определяющее диссипативные потери энергии в контуре, Q — добротность контура и M_z — ядерная намагниченность. Это условие означает, что МГ и СИ невозможны вне полосы пропускания контура, когда $\cos(\varphi) \rightarrow 0$.

Наиболее естественно когерентный и некогерентный вклады появляются в микроскопической теории. Так, используя метод Монте-Карло, авторы [78] смогли моделировать форму линии как СИ, так и МГ. Более того, авторы этой работы утверждают, что разделение СИ и МГ, в принципе, нельзя выполнить, пользуясь уравнениями Блоха, в которых намагниченность выступает как классический вектор, то есть когерентность изначально заложена в этих уравнениях. Действительно, уравнения Блоха не содержат информации о тепловых шумах в резонаторе, которые приходится вводить в эти уравнения в качестве начальных условий для возникновения генерации. С другой стороны, квантово-механическое рассмотрение эффекта дает СИ и без настроенного резонатора, что противоречит опыту эксплуатации поляризованных мишеней, в которых без радиочастотного контура самопроизвольного возникновения генерации при отрицательной поляризации экспериментально пока не наблюдалось.

СИ способно прервать адиабатический реверс поляризации, который в технике мишеней выполняется с целью уменьшения систематических погрешностей при измерении слабых сечений спин-спиновых взаимодействий. При реверсе ведущего поля магнита отрицательная поляризация мишени за несколько десятков микросекунд может разрушиться или даже инвертироваться за счет взаимодействия спинов с измерительной катушкой Q-метра. Отметим, что СИ можно наблюдать не только по изменению ядерной поляризации, но и по резкому перегреву низкотемпературных термометров радиочастотным полем. Анализ, выполненный в п. 2.1, показывает, что гибридный контур Q-метра имеет много резонансных частот, причем из-за сильного влияния кабеля добротность контура должна возрастать с понижением его резонансной частоты, так что без применения специальных мер иногда невозможно подавить СИ-потери поляризации при реверсе поля. Наиболее эффективное подавление эффекта достигается с помощью искусственного нарушения однородности постоянного поля ведущего магнита, например, путем изменения полярности тока в корректирующих катушках сверхпроводящего соленоида [30]. После подавления СИ потери поляризации при реверсе обычно составляют менее 0,3%.

6. НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МИШЕНЕЙ

6.1. Другие методы динамической поляризации. Измерение анизотропии углового распределения β - γ -излучений является наиболее чувствительным методом исследования поляризованных ядер и их сверхтонких взаимодействий [79]. Обычно исследуемые ядра имплантируют в ферромагнитные матрицы, в которых они поляризуются за счет значительной внутренней индукции (≈ 50 Тл) и охлаждения до сверхнизких температур (10–30 мК). Благодаря высокой скорости спин-решеточной релаксации в спиновой системе ядер устанавливается больцмановское (равновесное) распределение с температурой решетки, но жесткая связь спинов с решеткой в ферромагнитных матрицах не позволяет задействовать весь арсенал известных методов исследования спиновых систем, например, возможность изменять знак их спиновой температуры.

В отличие от ферромагнитных матриц, диэлектрики прозрачны для электромагнитных полей, по крайней мере, вплоть до частот 10^{11} Гц, имеют пренебрежимо слабые внутренние локальные магнитные поля $\approx 10^{-3}$ Тл, а высокая протонная поляризация в них обеспечивается при сравнительно легко достижимых экспериментальных условиях: при температуре 0,2–0,5 К и в обычном магнитном поле $\approx 2,5$ Тл. Принципиальным отличием диэлектриков от ферромагнитных матриц являются огромные, достигающие 1000 и более часов времени спин-решеточной релаксации, так что магнитные моменты

оказываются практически изолированными от решетки. Благодаря этому становятся возможными создание высокой векторной и тензорной поляризации ядер, приготовление неبولцмановских заселенностей спиновых состояний [23, 80] и даже «фокусировка» спинов в чистое квантовое состояние [81]. Можно ли использовать эти преимущества для поляризации редких радиоактивных ядер, имплантированных в поляризованную мишень? Проблема не ограничивается исследованием самих радиоактивных ядер. Ядра с известной схемой распада можно попытаться использовать для изучения коллективных электронных и электронно-ядерных спин-спиновых взаимодействий в конденсированных средах, для измерения поляризации основных ядер поляризованных мишеней.

Метод «динамического охлаждения» (ДО), рассмотренный в разд. 1, не является единственной возможностью поляризовать ядра. Аналогичный эффект теплового контакта возникает, если вместо электронных спинов использовать поляризованные протонные спины [23, 80]. Различие заключается в том, что облучению переменным полем теперь необходимо подвергнуть не электронные спины примесных центров, а поляризованные протоны в сильном магнитном поле на частоте, близкой к протонной ларморовской частоте ($\nu_{J0} = \gamma_p H_0 / 2\pi \approx 106$ МГц в поле 2,5 Тл). Ширина спектра ядерных локальных полей составляет десятки кГц, поэтому в интересующем нас случае редких радиоактивных ядер, растворенных в поляризованной мишени, «резонирующей системой» могут оказаться квадрупольные взаимодействия ядерных спинов с электрическим полем в матрице [80]. Энергия квадрупольного взаимодействия при аксиальной симметрии поля дается формулой [23]:

$$\langle \hat{H}_Q \rangle = hX \langle 3\hat{J}_z^2 - J(J+1) \rangle = hXA,$$

$$X = \nu_Q (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (95)$$

$$\nu_Q = \frac{eqQ}{8hJ(2J-1)},$$

где ν_Q , ϑ и J обозначены так же, как и в формулах (59), (60). В системе главных осей ненулевые компоненты тензора записываются в виде (см. п. 3.1):

$$Q_{zz} = Q, \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{Q}{2}. \quad (96)$$

Нетрудно видеть из формулы (95), что изменение энергии квадрупольных взаимодействий ведет к изменению тензорной поляризации (A) или выстроенности [23]. Наиболее простым для анализа является случай нулевой векторной поляризации квадрупольных ядер, поскольку при этом заселенности стационарных состояний ядра с фиксированными проекциями спинов m на

направление магнитного поля определяются только квадрупольным взаимодействием. В этом случае матрица плотности имеет вид [82]:

$$\begin{aligned}\rho_{mm} &= \frac{\exp(-\beta H_Q^{(m)}/h)}{\sum_{m=-J}^J \exp(-\beta H_Q^{(m)}/h)} = \\ &= \frac{\exp(-\beta X(3m^2 - J(J+1)))}{\exp(-\beta X J(J+1)) + 2 \sum_{m=1}^J \exp(-\beta X(3m^2 - J(J+1)))},\end{aligned}\quad (97)$$

где $\beta_Q = h/(kT_Q)$ — инверсная спиновая температура резервуара квадрупольных взаимодействий. Знак T_Q определяется знаком произведения $P_p(\nu - \nu_{J0})$. Заселенности p_{mm} представляют собой элементы спиновой матрицы плотности ядер, которая в данном случае является диагональной. С учетом (97) выстроенность принимает вид [82]:

$$\begin{aligned}A &= \sum_{m=-J}^J \rho_{mm}(3m^2 - J(J+1)) = \\ &= \frac{6 \sum_{m=1}^J m^2 \exp(-\beta X(3m^2 - J(J+1)))}{\exp(\beta X J(J+1)) + 2 \sum_{m=1}^J \exp(-\beta X(3m^2 - J(J+1)))} - J(J+1).\end{aligned}\quad (98)$$

В частном случае $J = 1$ эта формула была получена и экспериментально проверена в [23]. В пределе очень низких положительных температур T_Q и при углах $0 \leq \vartheta < \arccos(3^{-1/2})$ выстроенность $A \rightarrow -J(J+1)$, то есть все ядра находятся в состоянии с проекцией спина $m = 0$, а при углах $\arccos(3^{-1/2}) < \vartheta \leq \pi/2$ величина $A \rightarrow J(2J-1)$, и в этом случае заселенности делятся поровну между состояниями $m = J$ и $m = -J$. В пределе очень низких отрицательных температур ситуация обращается. Метод предложен и проверен на дейтронах [23, 80] и может оказаться полезным в случае небольших квадрупольных моментов порядка, когда $\nu_Q \approx (\nu - \nu_{J0})$. Времена поляризации, достигнутые этим методом в эксперименте, составляют несколько десятков секунд, а спиновые температуры — порядка ± 10 мК [23].

Из-за типично низких величин магнитных моментов квадрупольных ядер величина поляризации и время накачки поляризации, достигаемые при ДО, могут оказаться неприемлемыми для исследования короткоживущих ядер.

Поэтому значительное усиление поляризации, достигнутое в [33] методом кросс-релаксации ядер азота с поляризованными протонами, представляет существенное продвижение к повышению эффективности поляризации редких ядер. Идея заключается в следующем: пусть помимо ядер со спином $J \geq 1$ матрица содержит распространенные ядра, например, поляризованные протоны ($J = 1/2$), которые, ввиду большого гиромагнитного отношения, имеют высокую теплоемкость спиновой системы. Так как, в отличие от протонных спинов, взаимодействие квадрупольных ядер с решеткой сохраняется и в нулевом магнитном поле, то, понижая H_0 , можно совместить ларморовскую частоту протонов с квадрупольным расщеплением ядер со спином $J \geq 1$. В момент пересечения частот происходит кросс-релаксационная передача высокой протонной поляризации квадрупольным ядрам. Эксперименты были выполнены на аммиаке (NH_3) [33]. В поле 0,056 Тл квадрупольное расщепление стабильных ядер азота $6\nu_Q = 2,4$ МГц оказывается равным ларморовской частоте протонов, поэтому в результате кросс-релаксации с поляризованными протонами ядра ^{14}N достигают почти 50% поляризации. Кросс-релаксация обеспечивает высокую скорость поляризации порядка [83]:

$$W = (\gamma_N/\gamma_H)^2 \left(T_2 \operatorname{ch} \left(\xi \frac{\Delta_0}{\Delta_H} \right) \right)^{-1}, \quad (99)$$

где $\gamma_N/\gamma_H \approx 7 \cdot 10^{-2}$ — отношение ядерных гиромагнитных констант, $T_2 \approx 10^{-5}$ с — время поперечной релаксации протонных спинов, Δ_0 — частотная расстройка между спинами, Δ_H — ширина протонной линии, $\xi \approx 1$ — свободный параметр. Полагая $\Delta_0 \approx \Delta_H$, получаем $W^{-1} \approx 2$ мс, т.е. исключительно короткое время поляризации, что было бы выгодно использовать в режиме «on-line» имплантации ядер в мишень. Полученное распределение спинов по магнитным подуровням не является больцмановским, но оно может сохраняться длительное время, «замораживаться», благодаря тому, что магнитные подуровни квадрупольных ядер не являются эквидистантными, поэтому процесс установления внутреннего равновесия должен зависеть от длинных времен спин-решеточной релаксации. Теоретически в таких системах можно «сфокусировать» спины в чистое квантовое состояние [81].

Явным преимуществом диэлектрических матриц является их более высокая ($\approx 0,2$ К) температура решетки, при которой сохраняется возможность поляризации квадрупольных ядер, по сравнению с характерными температурами, необходимыми в случае ферромагнитных матриц ($\approx 0,02$ К). Последнее связано с тем, что мощность рефрижератора растворения ^3He в ^4He квадратично падает с температурой, поэтому при 0,2 К удастся обеспечить примерно в 100 раз более высокую холодопроизводительность рефрижератора, чем при 0,02 К. Например [82], если предположить, что пучок с интенсивностью 10^5 с $^{-1}$ радиоактивных ядер с энергией 10 МэВ/нуклон и массовым

числом, равным 60, полностью поглощается в поляризованной мишени, то рассеиваемая мощность составит $\sim 0,1$ мВт. При температуре $\approx 0,2$ К это вполне допустимая нагрузка для рефрижератора растворения средней мощности, но практически недостижимая холодопроизводительность при 0,02 К. Отрицательным фактором при кросс-релаксационной поляризации является необходимость снижения поля H_0 , в результате чего происходит уменьшение времени ядерной спин-решеточной релаксации до десятков часов. Тем не менее эти времена остаются еще достаточно длинными для «on-line» исследований в области короткоживущих ядер.

Рассмотренные методы можно использовать и в случае радиоактивных ядер, имплантированных в поляризованную мишень, если они входят в состав диамагнитных атомов или крамеровских [7] парамагнитных центров. Следует отметить, однако, что применительно к редким ядрам сама идея метода ДО, опирающаяся на динамику коллективных спин-спиновых взаимодействий, нуждается в практическом подтверждении.

6.2. β -распад поляризованного ядра. Примером возможной конкретной реализации обсуждаемого метода является измерение спиновой температуры протонов (или дейтронов) в пропандиоле с примесью парамагнитного иона Cr^{+V} . В такой матрице практически достигнута поляризация протонов $\pm 97\%$ [16] и дейтронов $\pm 39\%$ [50], что соответствует единой спиновой температуре $\pm 1,3$ мК в поле $H_0 = 2,7$ Тл. При введении в матрицу радиоактивных ядер возникнет анизотропия β -излучения, зависящая только от спиновой температуры этих ядер. В случае разрешенных β -переходов анизотропия связана исключительно с несохранением четности в процессах, обусловленных слабым взаимодействием [84, 85]. При этом угловое распределение β -электронов имеет структуру

$$\frac{dN}{d\Omega} \approx 1 + aP \cos \theta, \quad (100)$$

где θ — угол между направлением вылета электрона (или позитрона) и направлением внешнего поля, P — степень поляризации ядер, которая определяется функцией Бриллюэна

$$P = \frac{2J+1}{2J} \operatorname{cth} \left[\frac{2J+1}{2J} \left(\frac{\mu H_0}{kT} \right) \right] - \frac{1}{2J} \operatorname{cth} \left[\frac{1}{2J} \left(\frac{\mu H_0}{kT} \right) \right], \quad (101)$$

где μ — магнитный момент ядра. Рассмотрим пример [86], в котором в качестве радиоактивной примеси используется изотоп $^{32}_{15}\text{P}$, входящий в молекулу PH_3 и способный в микроколичествах растворяться в пропандиоле. Период полураспада составляет 14,5 дней, его спин $J = 1$, спин конечного ядра $^{32}_{16}\text{S}$ равен нулю, энергия разрешенного гамма-теллеровского β -перехода 1,7 МэВ [87]. В этом случае $\langle \nu \rangle / c = 0,835$ и величина $a \cong -0,835$. Если

$T = 1,3$ мК, $H_0 = 2,7$ Тл, то в соответствии с (101) поляризация ядер фосфора $P = -0,125$. Знак «минус» связан с отрицательным знаком магнитного момента ядер $^{32}_{15}\text{P}$ ($\mu = -0,252$ [88]). Таким образом,

$$\frac{dN}{d\Omega} \cong 1 + 0,1 \cos \theta, \quad (102)$$

следовательно, при реверсе знака поляризации разница в счете будет достигать 20%. При радиоактивности примеси 12 мкКи мишень будет излучать $\sim 4 \cdot 10^5$ част./с. Кремниевый «теплый» детектор диаметром 3 см, расположенный на расстоянии 15 см от образца, будет регистрировать 10^3 соб./с. Далее легко сосчитать, что для измерения коэффициента 0,1 в (102) с точностью 2% требуется $3 \cdot 10^5$ отсчетов, и, следовательно, набор событий завершится через 300 с, при этом в исследуемую мишень достаточно ввести всего лишь $5 \cdot 10^{11}$ радиоактивных молекул. В действительности детекторы [88], изготовленные по планарной технологии с имплантированным p - n -переходом, способны работать и при температурах криогенных экранов по крайней мере до 2 К, так что расстояние от поляризуемого образца до «охлажденного» кремниевого детектора можно сократить до 1 см, что приведет к повышению скорости счета более чем в 200 раз.

6.3. Угловая анизотропия γ -излучения. Еще один возможный путь измерения спиновой температуры заключается в исследовании угловой анизотропии γ -квантов в каскадных β - γ -переходах. В качестве радиоактивной примеси следует взять долгоживущие β -активные ядра с отличным от нуля магнитным моментом (спин $J \neq 0$). Возьмем ядро ^{22}Na [86], которое имеет период полураспада 2,6 года, спин-четность 3^+ и магнитный момент в ядерных магнетонах $\mu/\mu_N = +1,75$ [87]. В результате гамов-теллеровского β^+ -перехода с максимальной энергией позитронов 550 кэВ (или K -захвата) образуется промежуточное ядро ^{22}Ne со спином $J' = 2$. Его период полураспада составляет $3,7 \cdot 10^{-12}$ с, т.е. время жизни очень мало по сравнению с характерным периодом для сверхтонкого расщепления атомных уровней. Ядро $^{22}\text{Ne}(2^+)$ излучает γ -кванты с энергией 1280 кэВ и переходит в стабильный изотоп ^{22}Ne с нулевым спином [87]. В рассматриваемой ситуации угловое распределение γ -квантов с энергией 1280 кэВ относительно магнитного поля может быть вычислено по формуле [82, 86]:

$$W(\theta) \frac{5}{8\pi} \left\{ \frac{1}{2}(\rho_{22}^{(2)} + \rho_{-2-2}^{(2)}) \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}(\rho_{11}^{(2)} + \rho_{-1-1}^{(2)})(4 \cos^2 \theta - 3 \cos^2 \theta + 1) + 3\rho_{00}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\}, \quad (103)$$

причем

$$\rho_{22}^{(2)} = \rho_{33}^{(3)} + \frac{1}{3}\rho_{22}^{(3)} + \frac{1}{15}\rho_{11}^{(3)},$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{11}^{(2)} &= \frac{2}{3}\rho_{22}^{(3)} + \frac{8}{15}\rho_{11}^{(3)} + \frac{1}{5}\rho_{00}^{(3)}, \\
 \rho_{00}^{(2)} &= \frac{2}{5}\rho_{11}^{(3)} + \frac{3}{5}\rho_{00}^{(3)} + \frac{2}{5}\rho_{-1-1}^{(3)}, \\
 \rho_{-1-1}^{(2)} &= \frac{1}{5}\rho_{00}^{(3)} + \frac{8}{15}\rho_{-1-1}^{(3)} + \frac{2}{3}\rho_{-2-2}^{(3)}, \\
 \rho_{-2-2}^{(2)} &= \frac{1}{15}\rho_{-1-1}^{(3)} + \frac{1}{3}\rho_{-2-2}^{(3)} + \rho_{-3-3}^{(3)},
 \end{aligned} \tag{104}$$

где

$$\rho_{mm}^{(3)} = \frac{e^{\frac{m}{3}x}}{\text{sh}\left(\frac{7}{6}x\right)} \text{sh}\left(\frac{x}{6}\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \tag{105}$$

и $x = 0,64H_0/T$, где H_0 задается в Тл, спиновая температура в мК. Как следует из формул (103)–(105), изменение знака спиновой температуры при

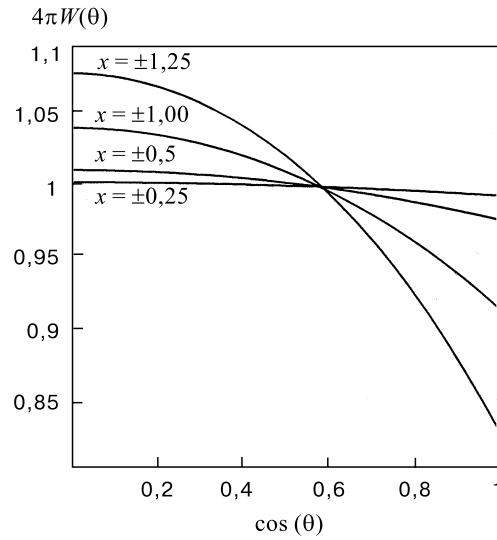


Рис. 19. Угловое распределение ^{22}Na по формуле (103), нормированное на изотропное распределение неполяризованных ядер. Параметр $x = 0,64 H_0/T_0$ определяет знак и спиновую температуру ядер

большинством в распределении зеемановских уровней в магнитном поле не будет влиять на вид углового распределения γ -излучения ввиду симметрии

этих выражений относительно замены $\rho_{mm} \leftrightarrow \rho_{-m-m}$. С другой стороны, при квадрупольном расщеплении уровней инверсия знака температуры, несомненно, изменит угловое распределение [82], так как в пределе очень низких спиновых температур она ведет к замене $\rho_{JJ} + \rho_{-J-J} \leftrightarrow \rho_{00}$ (см. комментарии к формуле (98)). Таким образом, инверсия знака спиновой температуры позволяет исследовать квадрупольные взаимодействия нестабильных ядер совершенно новым методом, который невозможно реализовать в ферромагнитных матрицах. На рис. 19 представлено нормированное угловое распределение, рассчитанное по (103)–(105) [82].

Препятствием к практическому использованию метода является наличие в рефрижераторах нескольких слоев металлических тепловых экранов, пластиковых или кварцевых окон, окружающих мишень, которые поглощают продукты радиоактивного распада на пути к детектору. Эта проблема в значительной степени разрешается применением нового типа сверхтонкой мишени, охлаждаемой сверхтекучей пленкой ^4He . Эксперимент по поляризации протонов в тонкой полиэтиленовой пленке выполнен в швейцарском Институте Пауля Шеррера (PSI) [89]. В полиэтиленовую пленку путем диффузии вводился иминоксильный радикал [14], после чего пленка приобретала светлорозовую окраску радикала. Затем пленка помещалась в вакуумную камеру из материала с плохой теплопроводностью (стайкаст). В эту камеру с пленкой конденсировалось небольшое количество ^4He , достаточное для создания сверхтекучей пленки толщиной 0,12 мкм. В свою очередь, через пленку ^4He осуществлялся термический контакт исследуемого материала с охлажденным до 0,1 К медным стержнем, поэтому сразу после конденсации ^4He в камере включение СВЧ-накачки вызывало резкий рост ядерной поляризации в полиэтилене до +44% (см. рис. 20). Таким образом, было доказано, что конвективная теплопроводность ^4He оказывается достаточной для охлаждения тонких поляризованных мишеней. Использование сверхтекучей пленки ^4He , в принципе, позволяет поляризовать ядра в тонкой герметичной диэлектрической оболочке, расположенной в вакууме на пучке частиц с достаточно низкой интенсивностью.

Проведенный анализ предполагает, что методы динамической ориентации будут «работать» и в случае редких ядер. Вопрос, так ли это, требует экспериментального исследования. Априори остаются неясными и другие вопросы, например: можно ли определить понятие спиновой температуры для редких ядер, как быстро будут поляризоваться такие ядра методом ДО, если их имплантация осуществляется в мишень с предварительно поляризованными протонами? На все эти и другие вопросы невозможно найти ответ, используя методы классического ЯМР, ввиду крайне низкой чувствительности последнего.

Автор выражает глубокую благодарность всем членам SMC-коллаборации CERN в Женеве, совместно с которыми на крупнейшей в мире SMC-мишени

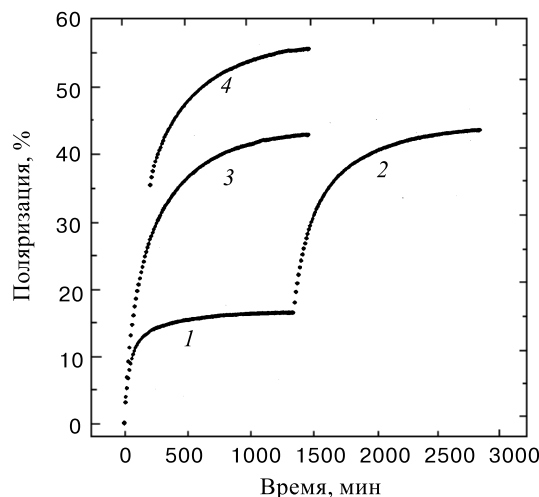


Рис. 20. Динамическая поляризация протонов в тонкой полиэтиленовой пленке. Кривая 1 — без сверхтекучей пленки ^4He , 2 — со сверхтекучей пленкой, 3 — со сверхтекучей пленкой, начиная с нулевой поляризации, 4 — при полном заполнении камеры ^4He

были получены некоторые результаты данного обзора; С.Манго, П.Хаутле и Б.Брандту из Института П.Шеррера в Цюрихе за сотрудничество в исследовании тонких поляризованных пленок, А.Ф.Прудкогляду, А.С.Шумовскому и В.И.Юкалову за сотрудничество в исследовании сверхизлучения; В.Л.Любошицу за помощь в разработке метода исследования радиоактивных ядер. Особая признательность Ф.Легару (Франция) и Л.Б.Пикельнеру (Дубна) за полезные дискуссии по проблемам использования мишеней, академику А.М.Балдину за поддержку в работе и лидерам SMC-коллаборации: В.Хьюзу (V.W.Hughes) из Йельского университета, Р.Воссу (R.Voss, Женева), Г.Маллоту (G.Mallot, Германия) и Т.Нииникоски (T.Niinikoski) за прекрасную организацию совместной работы в SMC-коллаборации CERN.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для сравнения оценим чувствительность ^{14}N -Q-метра при длинах кабеля $\ell < \lambda/4$ и $\ell = \lambda/2$. Исходными выберем следующие параметры гибридного контура: $\alpha = 0,02$ Нп/м, $R_0 = 10$ Ом, $r = 0,1$ Ом ≈ 0 , $L_0 = 9,5 \cdot 10^{-8}$ Гн, $C = 4 \cdot 10^{-10}$ Ф, частота $\nu = 6,47 \cdot 10^6$ Гц, $\rho = 50$ Ом, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $\sqrt{\epsilon} = 1,41$. Определим $\beta = 2\pi\nu\sqrt{\epsilon}/c = 0,191$ рад $\cdot$ м $^{-1}$. По формуле (25) находим длину эквивалентного отрезка кабеля $\ell_1 = \beta^{-1} \cdot \arctg(2\pi\nu L\rho^{-1}) = 0,403$ м. Из

уравнения (26) определяем суммарную длину: $\ell + \ell_1 = \beta^{-1} \cdot \arctg \left(\frac{1}{2\pi\nu\rho C} \right) = 4,65$ м, откуда $\ell = 4,25$ м. Определяем $\tg(\beta\ell) = \tg(0,191 \cdot 4,25) = 1,05$. По формуле (39) находим $B_{\ell < \lambda/4} = 1,74$, где при расчете использовано $k_1 = \alpha\ell \cos^{-2}(\beta\ell) = 0,085/0,474 = 0,179$. По формуле (39) находим $B_{\ell < \lambda/2} = 2,65$, где для расчета использована длина полуволнового отрезка $\ell = 16,4$ м, $\beta\ell = \pi$, $\alpha\ell = 0,02 \cdot 16,4 = 0,329$. В итоге получим отношение сигналов Q-метра с кабелем длиной $\ell < \lambda/4$ к сигналу Q-метра с кабелем $\ell = \lambda/2$ по уравнению (44)

$$\frac{\zeta_{\ell < \lambda/4}}{\zeta_{\ell = \lambda/2}} = [1 + \tg^2(\beta\ell)_{\ell < \lambda/4}] \frac{B_{\ell = \lambda/2}}{B_{\ell < \lambda/4}} = 2,1 \cdot \frac{2,65}{1,74} = 3,2, \quad (\text{П1.1})$$

так как в наших расчетах $R_1 = R_0$. Таким образом, короткий кабель позволяет повысить амплитуду сигнала в 3,2 раза. Увеличение сигнала связано с разным распределением тока в кабеле; при $\ell < \lambda/4$ и $\ell = \lambda/2$ максимум тока в кабеле длиной $\ell < \lambda/4$ приходится на катушку индуктивности, что и обеспечивает усиление ЯМР-поглощения по сравнению с потерями в кабеле.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Мощность $P_{\text{in}} + iQ_{\text{in}}$, поступающая в волновод через поперечное сечение питающего волновода S_f , расходуется по трем каналам [90]:

$$P_m + iQ_m = \frac{1}{2} \int_V dV \cdot \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \int_{S_{\text{cav}} - S_f} dS \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}), \quad (\text{П2.1})$$

где первый интеграл описывает мощность, связанную с диэлектрическими и магнитными свойствами материала, $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/2$ — вектор плотности потока энергии и $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности резонатора. Второй интеграл берется по поверхности резонатора, исключая поверхность питающего волновода. Пренебрегая отраженной от резонатора мощностью, отделим магнитные потери (P_m) в мишени от паразитных потерь (P_p), которые не участвуют в поляризации ядер:

$$P_{\text{in}} = P_m + P_p = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_V dV \cdot \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + P_p. \quad (\text{П2.2})$$

Ранние работы [91] и калибровочные испытания в работе [63] показывают, что при низких температурах мощность, поглощаемая термометром P_{bol} , есть

$$P_{\text{bol}} = \text{const} \cdot (T_{\text{bol}}^4 - T_{\text{He}}^4), \quad (\text{П2.3})$$

где T_{bol} — температура композитного угольного термометра и T_{He} — температура хладагента. Если предположить, что мощность, поглощаемая термометром, пропорциональна общей мощности нерезонансных потерь, то есть $P_p \cong P_{\text{bol}}$, то магнитное поглощение равно

$$P_m = P_{\text{in}} - P_p = P_{\text{in}} - \text{const} \cdot (T_{\text{bol}}^4 - T_{\text{He}}^4). \quad (\text{П2.4})$$

Обычно мощность, поступающая в резонатор, поддерживается постоянной, поэтому

$$P_{m,\text{on}} - P_{m,\text{off}} = P_{p,\text{off}} - P_{p,\text{on}} = \text{const} \cdot (T_{\text{off}}^4 - T_{\text{on}}^4), \quad (\text{П2.5})$$

где индексы «on» и «off» обозначают включенную и выключенную ЧМ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abraham A. et al.** — Phys. Lett., 1962, v.2, p.310.
2. **Alguard M.J. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1976, v.37, p.1258; p.1261.
3. **Baum G.E. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1983, v.51, p.1135.
4. **Draghicescu P., Lushchikov V.I. et al.** — Phys. Lett., 1964, v.12, p.334.
5. **Алфименков В.П., Пикельнер Л.Б., Шарапов Э.И.** — ЭЧАЯ, 1980, т.11, в.2, с.411.
6. **Алфименков В.П., Мареев Ю.Д., Пикельнер Л.Б.** — ЯФ, 1991, т.54, в.6, с.1489.
7. **Абрагам А., Гольдман М.** — Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок. М.: Мир, 1984, т.2, гл.6.
8. **Overhauser A.W.** — Phys. Rev., 1953, v.92, p.411.
9. **Jeffries C.D.** — Phys. Rev., 1957, v.106, p.164; **Джеффрис К.** — Динамическая ориентация ядер. М.: Мир, 1965 (см. ссылки в этой книге).
10. **London H., Clarke G.R., Meudoza E.** — Phys. Rev., 1962, v.128, p.1992.
11. **Борисов Н.С., Неганов Б.С., Либург М.Ю.** — ЖЭТФ, 1966, т.50, с.1445.
12. **Niikoski T.O.** — Nucl. Instr. and Meth., 1971, v.97, p.95.
13. **De Boer W., Niikoski T.O.** — Nucl. Instr. and Meth., 1974, v.114, p.495.
14. **Борисов Н.С., Бунятова Э.И., Киселев Ю.Ф. и др.** — Препринт ОИЯИ Р6-7408, Дубна, 1973.
15. **Niikoski T.O., Udo F.** — Nucl. Instr. and Meth., 1974, v.114, p.495.
16. **Борисов Н.С., Бунятова Э.И., Киселев Ю.Ф. и др.** — Препринт ОИЯИ 13-10253, ч.1, 13-10257, ч.2, Дубна, 1976; ПТЭ, 1978, вып.2, с.32; Препринт ОИЯИ Р13-86-734, Дубна, 1986.
17. **Кожушнер М.А., Провоторов Б.Н.** — В кн.: Радиоспектроскопия твердого тела. (Труды Всесоюз. совещ., Красноярск, 1964), М.: Атомиздат, 1967, с.3;
Кожушнер М.А. — ЖЭТФ, 1969, т.56, p.246.
18. **Буишвили Л.Л.** — ЖЭТФ, 1965, т.49, p.1886.

19. Ацаркин В.А., Родак М.И. — УФН, 1972, т.107, вып.1, с.3 (см. ссылки в этой работе).
20. De Boer W., Borghini M. et al. — J. Low Temp. Phys., 1974, v.15, p.249.
21. Van den Brandt B., Bunyatova E.I., Hautle P. et al. — Proc. of SPIN 96, 12th Int. Symp. on High-Energy Spin Physics, Sept. 10–14, Amsterdam, World Scientific, Singapore, ed. C.W. De Jader et al. 1996, p.238; Van den Brandt B. et al. — Proc. of SPIN 98, 13th Int. Symp. on High-Energy Spin Physics, Sept. 1998, Protvino, Russia, World Scientific, Singapore, 1999.
22. Crabb D. G., Meyer W. — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1997, v.47, p.67.
23. De Boer W. — Dynamic Orientation of Nuclei at Low Temperature. CERN Yellow Report 74-11, 1974.
24. Ацаркин В.А. — Динамическая поляризация ядер в твердых диэлектриках. М.: Наука, 1980.
25. Провоторов Б.Н. — ЖЭТФ, 1961 т.41, с.1582.
26. Провоторов Б.Н. — ФТТ, 1962, т.4, с.2940.
27. Буишвили Л.Л., Киселев Ю.Ф., Фокина Н.П. — Краткие сообщения ОИЯИ №5[51]-91, Дубна, 1991, с.42.
28. Borghini M. — Phys. Rev. Lett., 1968, v.20, p.419; Borghini M. — Proc. 2nd Intern. Conference on Pol. Targets. Berkeley, 1971. Ed. B.Shapiro, LBL 500, UC-34 Physics. Springfield: Nat. Techn. Inform. Service, 1, 1972.
29. Буишвили Л.Л., Гиоргадзе Н.П., Давитулиани А.А. — ЖЭТФ, 1974, т.67, №1(7), с.161.
30. Adams D. et al. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1999, v.A437, p.23–67 (и ссылки в этой работе).
31. Petříček V. — Nucl. Instr. and Meth., 1968, v.58, p.111.
32. Court G.R., Gifford D.W. et al. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1993, v.A324, p.433.
33. Adeva B., Dulya Ch., Kuynäräinen J. et al. — CERN Preprint, CERN-PPE/97-66, June 16 1997, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1998, v.A419, No.1, p.60.
34. Киселев Ю.Ф., Черников А.Н. — Препринт ОИЯИ, 13-85-734, Дубна, 1985.
35. Киселев Ю.Ф., Карпихин И.Л. — Препринт ОИЯИ, P13-89-468, Дубна, 1989.
36. Киселев Ю.Ф., Сирунян А.М., Степанян С.С. — ПТЭ, 1991, т.1, с.99.
37. Robinson F.N.H., Phil D. — J. of Scient. Instr., 1959, v.36, p.481.
38. Лосев Ф.Л. — Линейные радиотехнические цепи. М.: Высшая школа, 1971, с.560.
39. Burget J. et al. — Report of Nucl. Phys. Instr., Czechoslovak. Acad. Sci., Rez, 1972.
40. Нейман М.С. — Обобщение теории цепей на волновые системы. М.: Госэнергоиздат, 1955, с.192.
41. Proc. of the Workshop on NMR in Pol. Targets. Ed. Bültmann S. and Crabb D.G. Univ. of Virginia, April 15–16, 1998.
42. Kisselev Yu.F., Dulya C.M., Niinikoski T.O. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1995, v.A354, p.249. Preprint CERN-PPE/94-118, 14 July, 1994.
43. Niinikoski T.O. — Proc. 2nd Int. Workshop on Polarized Target Materials, eds. Court G.R., Cragg D.A., Niinikoski T.O. Report RL-80-080, SRC, Rutherford Laboratory, 1980, p.85.
44. Arfken G. — Math. Meth. for Physicists, 3rd Ed., Academic, 1985.
45. Hill J.J., Hill D.A. — Nucl. Instr. and Meth., 1974, v.116, p.269.
46. Sperisen F. — Nucl. Instr. and Meth., 1987, v.A260, p.455.

47. Bültmann et al. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1995, v.A356, p.102;
Krumpolc M., Roček J. — J. Am. Chem. Soc., 1979, v.101, p.3206.
48. Adeva B., Magnon A. et al. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1996, v.A372, p.339.
49. Krämer D. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1995, v.A356, p.122.
50. Kisselev Yu.F., Polyakov V. et al. — Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res., 1984, v.220, p.399.
51. Лapidус Л.И. — Сообщение ОИЯИ P2-84-267, Дубна, 1984.
52. Hamada O., Hiramatsu S., Isagava S. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1981, v.189, p.561.
53. Abragam A. — The Principles of Nuclear Magnetism. Oxford, Clarendon Press, 1961.
54. Киселев Ю.Ф., Попов С.А., Федоров А.Н. — Письма в ЖЭТФ, 1992, т.55, вып.2, с.99.
55. Guckelsberger K., Udo F. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1976, v.137, p.415.
56. Kisselev Yu.F., Özben C. — Proc. of 8th Int. Workshop on Pol. Target Mat. and Tech., Vancouver, 1996.
57. Kisselev Yu.F. — Comments to «Ammonia Paper», SMC/96/19, CERN/PPE, 1996.
58. Adeva B. et al. (Spin Muon Collaboration) — Phys. Lett., 1993, v.B302, p.533.
59. Adeva B. et al. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1994, v.A349, p.334.
60. Hill D. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1989, v.A277, p.319.
61. Kyyrääinen J. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1995, v.A356, p.47.
62. Kisselev Yu.F. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1995, v.A356, p.99.
63. Kisselev Yu.F., Niinikoski T.O. — Preprint CERN PPE/96-146, 21 October (1996).
64. Portis A.M. — Phys. Rev., 1953, v.91(5), p.1071; Phys. Rev., 1956, v.104(3), p.584.
65. Adeva B., Magnon A. et al. — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1996, v.A372, p.339.
66. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Электродинамика сплошн. сред. М.: Наука, гл. IX, 1982.
67. Kisselev Yu.F., Niinikoski T.O. — Proceedings of 12th Intern. Symposium on High Energy Spin Physics, Amsterdam, Netherlands, Sept. 1996, p.389.
68. Киселев Ю.Ф., Прудкогляд А.Ф., Шумовский А.С., Юкалов В.И. — ЖЭТФ, 1988, т.94, в.2, с.344; Препринт ОИЯИ P17-87-842, Дубна, 1987; Mod. Phys. Lett. B, 1988, v.1, p.409.
69. Бажанов Н.А. и др. — ФТТ, 1989, т.31, с.206.
70. Reichertz L.A. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1994, v.A340, p.278.
71. Blombergen N., Pound R. — Phys. Rev., 1954, v.95, p.8.
72. Фаун В.М. — Usp. Fiz. Nauk, 1958, т.64, с.273.
73. Dicke R.H. — Phys. Rev., 1954, v.93, p.99.
74. Киселев Ю.Ф., Алискандеров Э.И. — Письма в ЖЭТФ, 1989, т.51, вып.1, с.14.
75. Фокина Н.П., Хуцишвили К.О., Чхаидзе С.Г. — ЖЭТФ, 1992, т.102, вып.3(9), с.1013.
76. Фокина Н.П., Хуцишвили К.О. и др. — ФТТ, 1995, т.37, №7, с.1910.
77. Скрипов Ф.И., Альтман Э.Д. — Изв. вузов, Радиофизика, 1962, т.5, с.104.
78. Belozeroва T.S et al. — JINR Comm. E17-92-21, Dubna, 1992.
79. Зигбан К. — Альфа-бета-гамма-спектроскопия. М.: Атомиздат., 1969, вып.1, с.246.
80. De Boer W., Borghini M., Morimoto K. et al. — Phys. Lett., 1973, v.46A, p.143.
81. Джепаров Ф.С., Киселев Ю.Ф. — Письма в ЖЭТФ, 1998, т.68, с.539.

-
82. **Киселев Ю.Ф., Любошиц В.Л.** — Препринт ОИЯИ, Р6-99-258, Дубна, 1999.
 83. **Dzheparov F.C.** — ZhETF, 1991, v.99, p.982; Phys. Part. Nucl., 1995, v.26, p.692.
 84. **Lee N.D., Yang C.N.** — Phys. Rev., 1956, v.104, p.204.
 85. **Shmushkevich I.M.** — ZhETF, 1957, т.33, p.1477.
 86. **Киселев Ю.Ф., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И., Черников А.Н.** — Краткие сообщения ОИЯИ, 1988, №3[29], с.5; JINR Preprint, E14-89-195, 1989.
 87. **Lederer M.C. et al.** — Table of Isotopes, New York, 1978.
 88. **Cheremukhin A.E. et al.** — JINR Preprint E13-94-247, Dubna, 1994.
 89. **Van den Brandt B. et al.** — Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res., 1996, v.A381, p.219.
 90. **Jackson J.D.** — Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, 2nd Ed., 1975.
 91. **Niinikoski T.O. et al.** — Phys. Lett., 1979, v.72A, p.141.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 530.145

Поиск стандартного бозона Хиггса на суперколлайдерах. Красников Н.В., Матвеев В.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.3, с.525.

Дается обзор проблем, связанных с физикой стандартного бозона Хиггса и его поиском на суперколлайдерах LEP и LHC.

Табл.1. Ил.25. Библиогр.: 99.

УДК 539.12.01

Радиально возбужденные скалярные, псевдоскалярные и векторные нонеты мезонов в киральной кварковой модели. Волков М.К., Юдичев В.Л. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.3, с.576.

Построен киральный лагранжиан, содержащий кроме обычных мезонных полей их первые радиальные возбуждения. Лагранжиан получен бозонизацией кварковой модели типа Намбу–Иона–Лазинио (НИЛ) с сепарабельным нелокальным взаимодействием. Нелокальность описывается формфакторами, соответствующими трехмерным волновым функциям возбужденных мезонов. Спонтанное нарушение киральной симметрии определяется уравнением на щель. На простом примере $SU(2) \times SU(2)$ -версии этой модели продемонстрировано выполнение всех низкоэнергетических теорем в киральном пределе.

Для описания спектра масс возбужденных скалярных, псевдоскалярных и векторных мезонов построена более реалистичная $U(3) \times U(3)$ -модель с взаимодействием 'т Хофта. В силу глобальной киральной симметрии, мы используем одинаковые формфакторы для скалярных и псевдоскалярных мезонов. Фиксируя параметры формфакторов по массам псевдоскалярных мезонов, мы предсказываем спектр масс скалярных мезонов. Это позволяет нам интерпретировать экспериментально наблюдаемые скалярные, псевдоскалярные и векторные мезонные состояния как члены кварк-антикварковых нонетов. Показано, что скалярные мезонные состояния $a_0(1450)$, $K_0^*(1430)$, $f_0(1370)$, $f_J(1710)$ являются первыми радиальными возбуждениями основных состояний $a_0(980)$, $K_0^*(960)$, $f_0(400-1200)$, $f_0(980)$. Вычислены константы слабых распадов $F_\pi, F_{\pi'}, F_K, F_{K'}$ и ширины основных сильных распадов скалярных, псевдоскалярных и векторных нонетов мезонов.

Табл.4. Ил.6. Библиогр.: 40.

УДК 519.72 + 539.12

Сигнал, данные и информация в физических измерениях. Басиладзе С.Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.3, с.634.

В обзоре рассматриваются вопросы получения информации о физических явлениях. Большое внимание уделено анализу процесса отображения — как воздействию и восприятию сигналов, так и их последующей дискретизации. Исходя из информационных пороговых и предельных соотношений обсуждается возможная форма и параметры сигналов в процессах взаимодействия в микромире.

Поскольку воспринимаемый сигнал принципиально неточно определен, показано, как получить основные соотношения о количестве данных и содержащейся в них

информации на основе «анализа целых чисел», не прибегая к классическим математическим понятиям бесконечно малых и бесконечных процедур. Кратко рассмотрены основные практические приемы кодирования информации.

Ил.12. Библиогр.: 42.

УДК 539.12.01

Термодинамика киральной эффективной модели с аксиальной и конформной аномалиями. Ван ден Бошэ Б. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.3, с.671.

Вводится модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) с масштабной и аксиальной $U_A(1)$ аномалиями при конечной температуре и плотности в случае трех ароматов (u, d, s). Затем она используется для вычисления конденсатов и термодинамических функций (давления, плотности энергии и энтропии). В основном представлены аналитические результаты.

Ил.10. Библиогр.:84.

УДК 621.384.664

Техника поляризованных мишеней. Киселев Ю.Ф. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.3, с.714.

В обзоре анализируются последние достижения в развитии и применении твердых мишеней с поляризованными ядрами. Приводится описание метода динамического охлаждения и рассчитывается усиление ядерной поляризации при сверхнизких температурах. Изложена техника измерения поляризации ядер со спинами $I=1/2$ и $I=1$: выполнен детальный расчет чувствительности Q -метра с гибридным приемным контуром, дан анализ погрешностей измерения поляризации ливерпульским Q -метром. Анализируется проблема установления теплового равновесия в спиновых системах квадрупольных ядер. Приводятся данные по магнитному сверхизлучению. Описан эффект частотной модуляции, усиливающий поляризацию мишеней. Показана связь этого эффекта как с временной (частотной), так и пространственной дисперсией СВЧ-поля в мишени.

Обсуждаются новые перспективы в использовании протонной мишени для ориентации спинов радиоактивных ядер. При наличии квадрупольного взаимодействия анизотропия γ -излучения таких ядер зависит от знака спиновой температуры. Предлагается использовать динамическую поляризацию для исследования квадрупольных моментов радиоактивных ядер в тонкой протонной мишени, охлаждаемой пленкой сверхтекучего ^4He . В работе приводятся данные экспериментальных работ, выполненных с участием автора в CERN (Женева), ОИЯИ (Дубна), ИФВЭ (Протвино) и PSI (Виллиген, Швейцария).

Ил.20. Библиогр.:91.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Красников Н.В., Матвеев В.А.</i> Поиск стандартного бозона Хиггса на суперколлайдерах	525
<i>Волков М.К., Юдичев В.Л.</i> Радиально возбужденные скалярные, псевдоскалярные и векторные нонеты мезонов в киральной кварковой модели	576
<i>Басиладзе С.Г.</i> Сигнал, данные и информация в физических измерениях	634
<i>Ван ден Бошэ Б.</i> Термодинамика киральной эффективной модели с аксиальной и конформной аномалиями	671
<i>Киселев Ю.Ф.</i> Техника поляризованных мишеней	714

CONTENTS

<i>Krasnikov N.V., Matveev V.A.</i> Search for Standard Higgs Boson at Supercolliders	525
<i>Volkov M.K., Yudichev V.L.</i> Radially Excited Scalar, Pseudoscalar, and Vector Meson Nonets in a Chiral Quark Model	576
<i>Bassiladze S.G.</i> Signal, Data and Information in the Physical Measurements	634
<i>Van den Bossche B.</i> Thermodynamics of a Chiral Effective Model with Axial and Trace Anomalies	671
<i>Kisselev Yu.F.</i> The Polarized Target Technique	714

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с одной стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркиваются двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, векторы — синим, либо знаком снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например, ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами: не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год

издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbiner A.V.** — Comm. Math. Phys., 1988, v.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 20.12.99. Подписано в печать 28.02.2000. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 16. Уч.-изд.л. 19,25.
Тираж 400. Заказ 51891. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
2000. Том 31. Вып.3. 521—774.

SEARCH FOR STANDARD HIGGS BOSON AT SUPERCOLLIDERS

N.V.Krasnikov, V.A.Matveev

INR RAS, Moscow 117312

INTRODUCTION	525
THE LAGRANGIAN OF THE STANDARD MODEL	527
INDIRECT HIGGS BOSON MASS BOUNDS	531
Tree-Level Unitarity	531
Vacuum Stability Bound	532
Higgs Boson Mass Bound from Electroweak Precision Data	535
HIGGS BOSON DECAYS	536
HIGGS BOSON SEARCH AT LEP	542
HIGGS BOSON PRODUCTION AT HADRON SUPERCOLLIDERS	544
SEARCH FOR THE HIGGS BOSON AT TEVATRON	549
LHC DETECTORS	551
Brief Description of CMS Subdetectors [?]	553
ATLAS Detector [?]	557
SEARCH FOR STANDARD HIGGS BOSON AT THE LHC	559
The Search for $h \rightarrow \gamma\gamma$	559
Search for $h \rightarrow \gamma\gamma$ in Association with High- E_T Jets	562
$h \rightarrow W^+W^- \rightarrow l^+\nu l^-\nu$ Signature	563
$h \rightarrow ZZ^*(ZZ) \rightarrow 4$ Leptons	564
The Use of the Signature $pp \rightarrow \gamma\gamma + \text{Lepton}$	566
The Use of Channels $h \rightarrow WW \rightarrow l\nu\nu$, $h \rightarrow WW \rightarrow l\nu jj$ and $h \rightarrow ZZ \rightarrow lljj$	567
Summary	570
CONCLUSION	571
REFERENCES	571

RADIALLY EXCITED SCALAR, PSEUDOSCALAR, AND VECTOR MESON NONETS IN A CHIRAL QUARK MODEL

M.K. Volkov, V.L. Yudichev

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

INTRODUCTION	577
$SU(2) \times SU(2)$ MODEL	581
Nambu–Jona-Lasinio Model with Separable Interactions	581
Effective Lagrangian for π and π' Mesons	584
The Axial Current	589
The Weak Decay Constants of π and π' Mesons	591
Numerical Estimates and Conclusions	593
$U(3) \times U(3)$ MODEL	594
$U(3) \times U(3)$ Chiral Lagrangian with Excited Meson States and 't Hooft Interaction	594
The Masses of Isovector and Strange Scalar and Pseudoscalar Mesons (Ground and Excited States)	602
The Masses of Isoscalar Mesons (the Ground and Excited States)	606
The Effective Lagrangian for the Ground and Excited States of Vector Mesons	608
Numerical Estimates	610
STRONG DECAYS OF MESONS	611
Decays $\rho \rightarrow 2\pi, \pi' \rightarrow \rho\pi, \pi' \rightarrow \sigma\pi, \rho' \rightarrow 2\pi, \rho' \rightarrow \omega\pi$ and $\omega' \rightarrow \rho\pi$	611
The Decays of Strange Mesons (Vectors and Pseudoscalars)	616
Strong Decays of Scalar Mesons	620
Strong Decays of $\eta(1295)$ and $\eta(1440)$	624
CONCLUSION	626
ACKNOWLEDGMENT	629

Appendix	629
A.COEFFICIENTS OF THE FREE PART OF THE EFFECTIVE LAGRANGIAN FOR SCALAR ISOSCALAR MESONS	629
B.THE CALCULATION OF THE AMPLITUDES FOR DECAYS OF THE EXCITED SCALAR MESON $\hat{a}_0$	630
REFERENCES	632

СИГНАЛ, ДАННЫЕ И ИНФОРМАЦИЯ В ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

С.Г.Басиладзе

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

ВВЕДЕНИЕ	634
Отличительные черты и понятия информатики.	635
СИГНАЛ, ЕГО ПОРОГОВАЯ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОСТОЯННЫЕ	638
Сигнал в микромире	646
ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВИДЫ ПОВТОРОВ В ФУНКЦИИ ОТОБРАЖЕНИЯ	652
Получение данных	652
Выделение информации	656
ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ	663
Компрессия данных	665
Компактизация данных	666
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	668
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	669

THERMODYNAMICS OF A CHIRAL EFFECTIVE MODEL WITH AXIAL AND TRACE ANOMALIES

B. Van den Bossche

Université de Liège, Institut de Physique B5, Sart Tilman, B-4000 Liège 1, Belgium

INTRODUCTION	671
A. Symmetries	673
B. Effective Action	675
THERMODYNAMICS	678
A. Pressure, Energy Density, Entropy Density, Bag Constant	679
B. Bag Constant B	683
C. High Temperature Zero Density Limit ($T > T_c$)	684
D. Low Temperature Zero Density Limit	686
RESULTS	686
A. Condensates	686
B. Thermodynamics	691
C. Comparison with Lattice QCD	699
CONCLUSIONS	702
ACKNOWLEDGMENTS	702
Appendix A	
HIGH AND LOW TEMPERATURE EXPANSION OF THERMO- DYNAMICAL FUNCTIONS	702
1. Pressure	702
a. High Temperature Zero Density Expansion	703
b. Low Temperature Zero Density Expansion	707
c. Finite Density, Zero Temperature	708
2. Energy Density	708
a. High Temperature Zero Density Expansion	708
b. Low Temperature Zero Density Expansion	709
c. Finite Density, Zero Temperature	709
3. Entropy Density	710

a. High Temperature Zero Density Expansion	710
b. Low Temperature Zero Density Expansion	710
c. Finite Density, Zero Temperature	710
REFERENCES	711

ТЕХНИКА ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МИШЕНЕЙ

Ю.Ф.Киселев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	714
ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЯДЕР МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ	716
ИЗМЕРЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ МИШЕНЕЙ	724
Включение коаксиального кабеля в приемный контур	
Q-метра	726
Ливерпульский Q-метр	731
Характерные искажения протонных спектров	733
ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЯДЕР СО СПИНОМ $I = 1$	734
Поляризационные параметры ядер со спином $I = 1$	735
Метод расчета поляризации дейтронов	737
Поляризация ядер ^{14}N в аммиачной мишени	740
МОДУЛЯЦИОННОЕ УСИЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ	742
Частотная (временная) дисперсия при ЧМ	742
Пространственная дисперсия ЧМ	746
МАГНИТНОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ	749
Исследование радиочастотного сверхизлучения	749
НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МИШЕНЕЙ	755
Другие методы динамической поляризации	755
β -распад поляризованного ядра	759
Угловая анизотропия γ -излучения	760
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	765