

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970
VOL.31
PART 5
Six issues per year

DUBNA 2000

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года
ТОМ 31
ВЫПУСК 5
Выходит 6 раз в год

ДУБНА 2000

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГҮЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы Е.К.Аксенова, тел. (09621) 65-165

Э.В.Ивашкевич

ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 2000

СТРУКТУРА ПИОНА В МОДЕЛИ ИНСТАНТОННОЙ ЖИДКОСТИ

И.В.Аникин, А.Е.Дорохов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Л.Томио

Instituto de Física Teórica, UNESP,
Rua Pamplona, 145, 01405-900, São Paulo, Brazil

Дан обзор ковариантной кварковой модели пиона, основанной на эффективном нелокальном кварк-адронном лагранжиане с нелокальностью, индуцированной инстанционными флуктуациями вакуума КХД. Явно калибровочно-инвариантный формализм позволяет построить сохраняющиеся векторный и аксиальный токи и продемонстрировать их согласие с различными тождествами Уорда — Такахаси и низкоэнергетическими теоремами. В результате спонтанного нарушения киральной симметрии возникают зависящие от импульса динамическая масса кварка и вершина кварк-пционного взаимодействия. Параметры инстанционного вакуума — средний размер инстантона и эффективная масса кварка — выражены через величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов наименшей размерности и низкоэнергетических наблюдаемых пиона.

Подробно рассмотрен переходный формфактор пиона для процессов $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ и $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$. Кинематическая зависимость переходного формфактора при высоких импульсах передачи позволяет получить соотношение между амплитудой распределения кварков в пионе на световом конусе и кварк-пционной вершинной функцией. Его динамическая зависимость указывает на то, что переходный формфактор $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ при высоких импульсах передачи очень чувствителен к размеру нелокальности непертурбативных флуктуаций в КХД-вакууме. В рамках модели в лидирующем твисте вычислены амплитуда распределения и функция распределения валентных кварков в пионе в низкой точке нормировки порядка обратного среднего размера инстантона ρ_c . Результаты КХД преволовюционированы к более высоким импульсам передачи и находятся в разумном согласии с доступными экспериментальными данными о структуре пиона.

The covariant quark model of the pion based on the effective nonlocal quark-hadron lagrangian with nonlocality induced by instanton fluctuations of the QCD vacuum is reviewed. In the explicitly gauge invariant framework the conserved vector and axial-vector currents are constructed and the consistency with the Ward-Takahashi identities and low-energy theorems is demonstrated. The spontaneous violation of the chiral symmetry result in the momentum dependent dynamical quark mass and quark-pion vertex. The instanton vacuum parameters, the average size of an instanton and the effective quark mass, are expressed in terms of the vacuum expectation values of the lowest dimension quark-gluon operators and the low-energy pion observables.

The pion form factor for the transition processes $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ and $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$ is considered in detail. The kinematic dependence of the transition form factor at high momentum transfers allows us to obtain the relation between the pion light-cone distribution amplitude and the quark-pion vertex function. Its dynamic dependence indicates that the transition form factor $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$

at high momentum transfers is very sensitive to the nonlocality size of nonperturbative fluctuations in the QCD vacuum. In the framework of the model the distribution amplitude as well as distribution function valence-quark in the pion are calculated in the leading twist at a low normalization scale of an order of the inverse average size of an instanton ρ_c . The results are QCD evolved to higher momentum-transfer values and reasonable agreement with available data on the pion structure is found.

1. ВВЕДЕНИЕ

Непертурбативный вакуум КХД плотно заселен длинноволновыми флуктуациями глюонного и кваркового полей. Параметры порядка этого сложного состояния характеризуются с помощью вакуумных матричных элементов различных синглетных комбинаций кварковых и глюонных полей, конденсаторов: $\langle : \bar{q}q : \rangle$, $\langle : F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a : \rangle$, $\langle : \bar{q}(\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2})q : \rangle$ и т.д. Ненулевой кварковый конденсат $\langle : \bar{q}q : \rangle$ отвечает за спонтанное нарушение киральной симметрии. Его величина была оценена много лет назад в подходе алгебры токов. Ненулевой глюонный конденсат $\langle : F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a : \rangle$ через аномалию в следе тензора энергии-импульса задает масштаб масс для адронов, и его величина была оценена в КХД-правилах сумм (ПС). Важность свойств КХД-вакуума для феноменологии адронов была отмечена в [1], где было использовано операторное разложение (ОР) для того, чтобы связать поведение корреляторов адронных токов на малых расстояниях с небольшим набором конденсаторов. Значения конденсаторов низшей размерности были получены феноменологически из анализа КХД ПС в различных адронных каналах.

Позже возникла концепция нелокальных вакуумных конденсаторов или вакуумных корреляторов [2, 3]. Эти величины описывают распределение кварков и глюонов в непертурбативном вакууме. Физически это означает, что флуктуации кварков и глюонов в вакууме имеют ненулевой среднеквадратичный импульс. С этой точки зрения стандартные величины вакуумных ожиданий (ВВО), такие, как $\langle : \bar{q}q : \rangle$, $\langle : \bar{q}D^2q : \rangle$, $\langle : g^2 F^2 : \rangle, \dots$, появляются как коэффициенты разложения корреляторов полей кварков $\langle : \bar{q}(0)\hat{E}(0, x)q(x) : \rangle$ и глюонов $\langle : F_{\mu\nu}^a(0)\hat{E}(0, x)F_{\mu\nu}^a(x)\hat{E}(x, 0) : \rangle$ в ряды Тейлора по переменной $x^2/4$, где $\hat{E}(x, y) = P \exp(i \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu)$ — упорядоченный по пути фактор Швингера, необходимый для калибровочной инвариантности корреляторов.

В то же время в КХД хорошо известны инстантоны [4], нетривиальные нелокальные вакуумные решения классических уравнений Янга — Миллса в пространстве Евклида, обладающие конечным действием и размером ρ . Важность инстантонов для КХД связана с надеждой, что ансамбль взаимодействующих инстантонов и антиинстантонов приведет к реалистической ми-

кроскопической картине КХД-вакуума в форме инстантонной жидкости [5, 6] (см., например, обзор [7]). Из феноменологических соображений было аргументировано, что распределение инстантонов по их размерам является функцией с резким максимумом при некотором конечном среднем размере ρ_c и может быть аппроксимировано $n(\rho) \approx n_c \delta(\rho - \rho_c)$. Кроме того, расстояние между инстантами гораздо больше, чем средний размер инстантона, так что жидкость является разреженной, и эффективная плотность инстантонов в вакууме n_c является малым параметром. Из свойств КХД-вакуума и спектроскопии адронов найдены оценки $n_c \sim 1 \text{ fm}^{-4}$ и $\rho_c \sim 1,7 \text{ ГэВ}^{-1}$. Разреженность инстантонной жидкости удобно характеризовать безразмерным параметром $\eta = (\rho_c M_q)^2$.

Ниже мы покажем, что инстантонная модель КХД-вакуума дает динамический механизм нарушения киральной симметрии и лежит в основе описания свойств пиона [6, 8–10]. Более того, взаимодействие夸克ов, индуцированное инстантонным обменом, естественным образом приводит к решению $U_A(1)$ -проблемы [11, 12] и отвечает за сильные, зависящие от спина связи в адронных мультиплетах [13]. В [14, 15] было показано, что инстантонная модель КХД-вакуума дает способ для построения нелокальных вакуумных конденсатов. В модели динамически генерируются зависящие от импульса эффективная масса夸克а M_q и вершина夸к-пионного взаимодействия $g_{\pi qq}$. Параметры модели имеют наглядный физический смысл и естественным образом связаны с основными величинами низкоэнергетической физики. Так, зависящие от импульса эффективная масса夸克а и夸к-пионная вершина выражены через нелокальный конденсат夸ков. Далее, обратный эффективный размер инстантона ρ_c^{-1} непосредственно измеряет среднюю виртуальность夸ков в вакууме $\langle k_q^2 \rangle \equiv \lambda_q^2 \approx 2\rho_c^{-2}$ [14] $\approx 0,5 \text{ ГэВ}^2$ [16]. Эффективная масса夸кa M_q определена через соотношение Голдбергера — Треймана $M_q = g_{\pi qq} f_\pi$, причем夸к-пионная константа связи $g_{\pi qq}$ однозначно фиксируется с помощью условия связности пиона. Наконец, эффективная плотность инстантонов n_c непосредственно определяется из уравнения щели. Модель инстантонного вакуума содержит все привлекательные черты модели Намбу — Иона-Лазинио (НИЛ) (см., например, обзор [17]), а указанные выше особенности представляют собой важные преимущества по сравнению с различными версиями модели НИЛ. Более того, в инстантонной модели обратный эффективный размер инстантона ρ_c является естественным параметром ультрафиолетового обрезания в夸ковых петлевых интегралах, и, таким образом, она свободна от произвола в этой процедуре, присущего модели НИЛ.

Важным аспектом рассматриваемой нелокальной модели является привлечение калибровочно-инвариантного формализма. Одним из преимуществ такого подхода является то, что параметры модели приобретают смысл наблюдаемых, а все другие физические величины, выраженные через эти параметры, становятся автоматически калибровочно-инвариантными. Более того,

их можно сравнить с теми, которые вычисляются в других подходах, основанных на КХД, таких, как решеточная КХД (рКХД), КХД ПС и т.д. Наборот, когда имеем дело с калибровочно-инвариантными объектами, то можно выбрать любую удобную калибровку. Так, при построении эффективного действия для ансамбля инстантонов наиболее правильным выбором является инстанционное решение в сингулярной калибровке [6]. Инстантоны в этой калибровке в координатном пространстве достаточно быстро убывают на бесконечности, что приводит к малому перекрытию соседних псевдо частиц, и квазиклассическое рассмотрение становится оправданным. Однако результирующее эффективное действие должно быть независимым от выбора калибровки полей, иначе форма действия и других наблюдаемых выглядит не вполне удовлетворительно. Калибровочная инвариантность подхода достигается явным учетом упорядоченных по путям швингеровских P -эксп-факторов в определениях нелокальных величин [14, 18] и приведения нелокального кварк-пионного взаимодействия к инвариантному виду [19, 20].

Обзор построен следующим образом. Во втором разделе рассматривается модель инстанционной жидкости и на ее основе — кварк-пионная динамика. В третьем разделе подробно обсуждается вычисление амплитуды распределения и функции распределения валентных夸克ов в пионе. Первые являются основными объектами при описании жестких эксклюзивных процессов с участием пиона, а вторые — при описании глубоконеупругих процессов. Оба распределения несут существенно непертурбативную информацию о структуре пиона, и мы покажем, что инстанционная модель является наиболее адекватной по сравнению с другими подходами.

2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННАЯ МОДЕЛЬ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ

Эффективное калибровочно-инвариантное четырехфермионное действие. В локальных теориях калибровочный принцип минимального действия однозначно определяет взаимодействие полей материи с калибровочными полями. Однако в нелокальных теориях, как будет видно ниже, такое взаимодействие может быть введено различными способами. Для того чтобы сделать нелокальное действие калибровочно-инвариантным по отношению к внешним полям, удобно с самого начала определить поле кварка с калибровочным фазовым фактором Швингера:

$$Q(x, y) \equiv P \exp \left\{ -i \int_x^y dz^\mu \Lambda_\mu^a(z) T^a \right\} q(y), \quad \Lambda_\mu^a(z) = V_\mu^a(z) + A_\mu^a(z) \gamma_5, \quad (1)$$

где $V_\mu^a(z)$ и $A_\mu^a(z)$ — калибровочные векторное и аксиально-векторное поля соответственно, T^a — генераторы группы ароматов и P обозначает оператор упорядочения вдоль пути (контура), который в каждом члене разложения экспоненты по своему показателю расставляет матрицы слева направо в порядке движения точки z по траектории от x к y . Неоднозначность во введении калибровочно-инвариантного взаимодействия в нелокальном подходе прослеживается в появлении зависимости от пути в определении (1). В частности, как мы увидим ниже, сохраняющиеся токи в нелокальных моделях, вообще говоря, состоят из двух частей: независимая от пути продольная компонента и зависимая от пути поперечная компонента. Независимость от пути продольной компоненты есть следствие требования непрерывности дивергенции тока. Чувствительность к выбору пути поперечной части тока является особенностью любого метода, используемого для построения (частично) сохраняющегося тока, соответствующего нелокальному действию, и требует дальнейшего доопределения. Далее мы используем формализм, который основан на независимом от пути определении производной от интеграла по линейному контуру [21]:

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu} \int_x^y dz^\nu \Lambda_\nu(z) = \Lambda_\mu(y), \quad \delta^{(4)}(x-y) \int_x^y dz^\nu \Lambda_\nu(z) = 0. \quad (2)$$

Такое определение означает, что члены с неминимальной связью, индуцированные кинетическим членом нелокального действия, отбрасываются. Вообще говоря, внешние поля, входящие в (1), являются вспомогательными полями, но некоторые из них могут быть отождествлены с теми, которые переносят электромагнитное, сильное или слабое взаимодействия. В случае электромагнитного взаимодействия этот фактор учитывает эффекты излучения фотонного поля, когда два кварка удаляются друг от друга. Этот формализм был использован в [19] (см. также [22, 23]) для придания нелокальному взаимодействию калибровочно-инвариантной формы. Как будет показано в дальнейшем, такая формулировка модели крайне важна для самосогласованного описания адронных характеристик, тестируемых внешними источниками, таких, как адронные формфакторы [20] и партонные функции распределения [24].

В общей форме нелокальное кирально-инвариантное (с точностью до малых токовых масс кварков) действие может быть переписано через полевые переменные (1) как

$$S = S_0 + S_{4q} \quad (3)$$

с

$$S_0 = \int d^4x d^4y \delta(x-y) \bar{Q}(x, X)(i\hat{\partial}_y - m_c)Q(X, y), \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
S_{4q} = & \frac{1}{2} G_I \int d^4 X \int \prod_{n=1}^4 d^4 x_n K_I(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \\
& \times \left\{ \sum_i \left[\bar{Q}_R(X - x_1, X) \Gamma_i Q_L(X, X + x_3) \right] \times \right. \\
& \times \left. \left[\bar{Q}_R(X - x_2, X) \Gamma_i Q_L(X, X + x_4) \right] + (R \leftrightarrow L) \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где $Q_{R(L)}(x, y) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} Q(x, y)$ — кварковое поле (1) с определенной киральностью. Дираковское сопряжение для кваркового поля определяется как $\bar{Q}(x, y) = Q(x, y)^\dagger \gamma_0$. В (5) матричные комбинации $\Gamma_i \otimes \Gamma_i$ имеют вид

$$1 \otimes 1 - \tau^a \otimes \tau^a, \quad \frac{1}{2(2N_c - 1)} (\sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu} - \tau^a \sigma_{\mu\nu} \otimes \tau^a \sigma_{\mu\nu}), \quad (6)$$

где τ^a — матрицы Паули для пространства ароматов, $N_c=3$ — число цветов. Спин-ароматовая структура действия в (5) инвариантна при глобальных аксиальных $q(x) \rightarrow \exp(i\gamma_5 \tau\theta)q(x)$ и векторных преобразованиях $q(x) \rightarrow \rightarrow \exp(i\tau\theta)q(x)$ и аномально нарушает $U_A(1)$ -симметрию: $q(x) \rightarrow \rightarrow \exp(i\gamma_5 \theta)q(x)$. Токовая масса кварка m_c параметризует малый эффект явного нарушения киральной симметрии. Далее мы ограничим себя только сектором теории с нестранными кварками.

Ядро четырехкваркового взаимодействия в традиционной НИЛ-модели задается $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{const} \prod_{n=1}^4 d^4 x_n \delta(x_n - X)$, и импульсное обрезание вводится при $\Lambda_{NJL} \sim 1$ ГэВ в расходящихся петлевых интегралах, обусловленных контактным взаимодействием. Другие варианты выбора ядра могут быть найдены в литературе. В рассматриваемой модели форма четырехкваркового взаимодействия в (5) мотивирована моделью инстантонного вакуума, и в локальном пределе она сводится к эффективной вершине 'т Хофта. Ядро описывает взаимодействие между кварками, индуцированное инстантонным обменом, и является нелокальным обобщением НИЛ-модели.

Выберем нелокальное ядро $K_I(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в *сепарабельном приближении*:

$$K_I(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4), \quad (7)$$

где функция $f(x)$ связана с профильной функцией кварковой нулевой модой в инстантонном поле (см. ниже). Преимуществом сепарабельного взаимодействия является то, что оно позволяет разрешить интегральные уравнения аналитически и все физические величины свести к квадратурам. В импульсном пространстве сепарабельное ядро имеет вид

$$\tilde{K}_I(k_1, k_2, k_3, k_4) = \tilde{f}(k_1)\tilde{f}(k_2)\tilde{f}(k_3)\tilde{f}(k_4),$$

где k_i являются входящими (выходящими) в вершину импульсами кварков, а $\tilde{f}(k)$ — фурье-образ от $f(x)$.

Эффективный пропагатор кварка. В качестве первого шага построим эффективный пропагатор кварка с помощью уравнения Швингера — Дайсона (ШДУ) для собственной энергии кварка. Мы будем рассматривать это уравнение в лестничном приближении, которое эквивалентно учету лидирующего порядка в $1/N_c$ -разложении. Эффективный пропагатор кварка определяется как

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= i \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \right|_{\Phi=0} = S_0^{-1}(p) - i M_q(p), \\ S_0^{-1}(p) &= \hat{p} - im_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где $M_q(p)$ — зависимая от импульса масса кварка, возникающая динамически за счет эффекта спонтанного нарушения киральной симметрии в инстантонном вакууме. Уравнение щели (или уравнение самосогласованности) для зависящей от импульса массы кварка принимает вид * [6, 25]

$$M_q(p) = m_c + 4N_c G_I \tilde{f}^2(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}^2(k) \frac{M_q(k)}{k^2 + M_q^2(k)} \quad (9)$$

и имеет решение

$$M_q(p) = m_c + (M_q - m_c) \tilde{f}^2(p). \quad (10)$$

Мы должны подчеркнуть, что в рассматриваемом приближении зависимость массы кварка от импульса возникает только благодаря непертурбативному взаимодействию с вакуумом и не содержит пертурбативных поправок по сильной константе связи.

С другой стороны, непертурбативная часть пропагатора кварка (8) может быть вычислена в модели КХД-вакуума. В эффективном одноинстантонном приближении [14, 18] имеем

$$M_q(p) = M_q \tilde{Q}(p), \quad (11)$$

где

$$M_q = \frac{N_Q \rho_c^2 n_c}{m^*} \quad (12)$$

*Здесь и далее все диаграммы Фейнмана, подобные тем, что в (9), вычисляются в пространстве Евклида ($k^2 \rightarrow -k_E^2$, $d^4 k \rightarrow id^4 k_E$), где индуцированные инстантоном формфакторы определены и быстро спадают, так что ультрафиолетовых расходимостей не возникает. Физические результаты получаются аналитическим продолжением обратно в пространство Минковского.

и

$$\tilde{Q}(p) = \frac{N_Q}{2} \frac{p^2}{\rho_c^2} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \exp(-ip \cdot x) Q(x^2), \quad \tilde{Q}(0) = 1; \quad (p = |p|), \quad (13)$$

$$Q(x^2) = \langle : \bar{q}(0) E_g(0, x) q(x) : \rangle / \langle : \bar{q}(0) q(0) : \rangle, \quad Q(0) = 1, \quad (14)$$

где фактор Швингера $E_g(0, x) = P \exp(-ig \frac{\lambda^a}{2} \int_0^x A_\mu^a(z) dz^\mu)$, определенный через вакуумное глюонное поле $A_\mu(z)$, гарантирует калибровочную инвариантность и N_Q дает нормировку. В приведенном уравнении $Q(x^2)$ является нормированной индуцированной инстантонным взаимодействием непертурбативной частью калибровочно-инвариантного пропагатора кварка в конфигурационном пространстве, которая описывает нелокальные свойства конденсата кварков [3, 5]. Заметим также, что пропагатор кварка (14) имеет непосредственную физическую интерпретацию в эффективной теории тяжелых кварков, так как он описывает распространение легкого кварка в цветном поле бесконечно тяжелого кварка [5]. В (12) параметр m^* определяется соотношением

$$m^* = m_c + i \langle \Psi_I | S_0^{-1} (S - S_0) S_0^{-1} | \Psi_I \rangle, \quad (15)$$

где $\langle \Psi_I | \dots | \Psi_I \rangle$ означает независимое усреднение по инстантонным вакуумным конфигурациям. Подставляя выражение для пропагатора кварка (8) и (11) в (15), получим уравнение щели (в киральном пределе)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M_q^2(k)}{k^2 + M_q^2(k)} = \frac{n_c}{4N_c}, \quad (16)$$

которое эквивалентно условию самосогласованности, данному в [6]. Сравнивая (9) и (16), находим, что

$$\tilde{f}(p) = \sqrt{\tilde{Q}(p)} \quad \text{и} \quad G_I = \frac{M_q^2}{N_f n_c}. \quad (17)$$

Выражение для четырехфермионной константы связи G_I совпадает с результатом, полученным в [6]. Таким образом, в сепарабельном приближении для четырехкваркового ядра форма взаимодействия полностью фиксируется эффективным поведением кварка в непертурбативном вакууме.

Нелокальный конденсат $Q(x)$ и формфактор $\tilde{f}(k)$ естественным образом определены в евклидовской области, где они быстро спадают. В явной форме скалярная часть пропагатора кварка в приближении, ограничивающемся только учетом нулевых мод кварка в пропагаторе кварка, имеет

вид [14, 18]:

$$Q_I(x) = \frac{8\rho_c^2}{\pi} \int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dt \frac{\cos \left[\frac{r}{R} \left(\arctan(\frac{t+|x|}{R}) - \arctan(\frac{t}{R}) \right) \right]}{[R^2 + t^2]^{3/2} [R^2 + (t + |x|)^2]^{3/2}}, \quad (18)$$

где $R^2 = \rho_c^2 + r^2$, и $\cos [...]$ — фактор, возникающий из экспоненты Швингера, эффективно суммирует бесконечный набор элементарных актов взаимодействия кварка с инстантонами. Нормировочный коэффициент в (13) равен $N_Q = 4\pi^2$. Для того чтобы получить уравнение (18), следует воспользоваться явными выражениями для инстантного поля и нулевой моды кварка. Скалярный пропагатор кварка в конфигурационном и импульсном представлениях изображен на рис. 1 и 2 (см. также приложение А).

Следует заметить, что в [26], используя стандартное ОР, были получены пертурбативные и непертурбативные вклады в пропагатор кварка. Непертурбативная часть, пропорциональная конденсату кварков $\langle \bar{q}q \rangle$, имеет лидирующий член с импульсным распределением в форме $\delta(p)$ и поправку $\alpha_s \sim p^{-4}$. Первый член является калибровочно-инвариантным, а второй нет. Вклад, рассмотренный в (11), соответствует первому калибровочно-инвариантному лидирующему по α_s члену, который (благодаря нелокальным свойствам инстантного вакуума) размыает импульсную δ -функцию в глад-

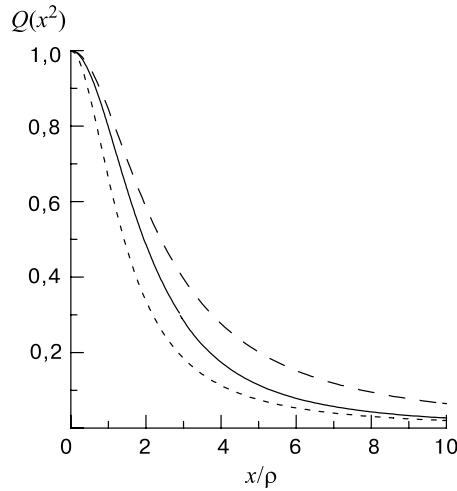


Рис. 1. Скалярная часть нормированного калибровочно-инвариантного непертурбативного пропагатора кварка в инстантном вакууме в евклидовском конфигурационном пространстве (18) (сплошная линия) и пропагаторы, полученные без учета P_{expr} -фактора, соответственно, в сингулярной (пунктирная) и регулярной (107) (штриховая) калибровках

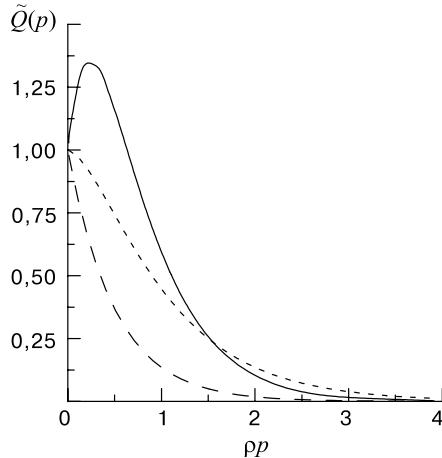


Рис. 2. Тот же пропагатор, что и на рис. 1, но в импульсном представлении (13) (сплошная линия), (108) (штриховая) и (109) (пунктирная)

кий формфактор $\tilde{Q}(p)$. Это означает, что кварки имеют в вакууме ненулевую виртуальность (ср. с $\delta(p=0)$ в ОР). Формально это сводится к суммированию бесконечного подмножества членов в ОР. Таким образом, в лидирующем по α_s порядке непертурбативная масса не зависит от калибровки. В следующем за лидирующим порядке калибровочная зависимость возникает, как и в [26], но эти члены подавлены малой константой связи. (В эффективном действии мягкая часть глюонного поля проинтегрирована). Отметим, что в [6] используется пропагатор кварка в калибровочно-неинвариантной форме $Q(x^2) = \langle : \bar{q}(0)q(x) : \rangle / \langle : \bar{q}(0)q(0) : \rangle$.

Таким образом, рассматриваемая модель основана на калибровочно-инвариантном выражении для эффективного пропагатора кварка в инстантонном вакууме, в котором эффект перерассеяния на инстантоне учитывается P_{exp} -фактором. Такой выбор мотивирован тем, что физические величины, такие, как конденсат кварков или виртуальность кварка (см. ниже), определены через калибровочно-инвариантные объекты. Другим элементом модели является ядро четырехкваркового взаимодействия. В сепарабельном приближении его форма (7) полностью фиксируется формой эффективного пропагатора кварка с помощью уравнения щели. Благодаря инвариантности формализма фактические вычисления, в которых доминирует вклад нулевых мод кварков в поле инстантона, могут быть выполнены в любой калибровке для инстантонного поля, включая сингулярную.

Сохраняющиеся токи, индуцированные нелокальным действием. Сохраняющиеся токи и соответствующие вершины получаются как производные

действия по внешним полям при нулевых значениях полей. В присутствии нелокального взаимодействия сохраняющиеся токи состоят из локальной и нелокальной частей *:

$$\begin{aligned} {}^{\Phi}\Gamma_{4q}^{\mu a}(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = & {}^{\Phi}\Gamma_{4q}^{\mu a} + G_I \tilde{K}_I(k_1, k_2, k_3, k_4) \times \\ & \times \sum_{j=I}^{III} \sum_i [(\Gamma_i^\alpha)_{13} (\Omega_{i\alpha})_{24}]_j^a H_j^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q), \end{aligned}$$

где k_i — входящие (выходящие) импульсы夸ков и q — импульс, соответствующий току.

Выведем в древесном приближении некоторые из вершин для внешнего поля, взаимодействующего с夸ками и пионами, которые будут использованы в диаграммном разложении физических величин. Для этого необходимо построить夸к-夸ковые вершины, включающие один или два внешних тока, который может быть векторным или аксиально-векторным, и (или) пионы. Для того чтобы разложить упорядоченную по пути экспоненту по внешним полям, используем технику, описанную в [19] (см. также [27]). Этот метод, во-первых, состоит в нахождении фурье-образа и разложении в ряд Тейлора нелокальных функций $K_I(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $F_I(x_1, x_2)$; затем необходимо превратить степени импульса в производные, действующие на упорядоченную по пути экспоненту и夸ковые поля, сделать обратное преобразование Фурье и опять просуммировать. Свойствами контурного интеграла, которые следует интенсивно использовать в этой процедуре, являются соотношение (2) и его фурье-образ:

$$\begin{aligned} & \int d^4x f(x^2) e^{-ipx} \int_y^{\lambda x+a} dz^\mu e^{-iqz} = \\ & = i\lambda (2p + q\lambda)^\mu \frac{f(p + \lambda q) - f(p)}{(p + \lambda q)^2 - p^2} e^{-iq\lambda} + f(p^2) \int_y^a dz^\mu e^{-iqz}. \quad (19) \end{aligned}$$

Ниже приведены несколько примеров вершин, найденных таким образом.

*Здесь мы следуем спин-изоспиновой классификации токов, данной в [20]. Отличие нашего определения от используемого в указанной работе состоит в определении интеграла по контуру. Это различие проявляется в форме (импульсной) пространственной зависимости нелокального формфактора $F_\mu(k', k)$ в (21) и сказывается на выражениях для поперечных компонент токов. В то же время продольные компоненты токов одинаковы в обоих подходах, как это и должно быть.

Используя определения (1), (2), видим, что наличие упорядоченной по пути экспоненты в кинетическом члене (4) эквивалентно действию ковариантной производной

$$\int d^4x d^4y \delta(x-y) \overline{Q}(x, X) i\widehat{\partial}_y Q(X, y) \rightarrow \int d^4x d^4y \delta(x-y) \overline{\psi}(x) i\widehat{D}_y \psi(y),$$

$$i\widehat{D}_y \rightarrow i\widehat{\partial}_y + \widehat{V}(y) + \widehat{A}(y)\gamma_5,$$

что приводит к стандартной локальной части токов. Таким образом, минимальное взаимодействие восстанавливается и при введении зависимого от пути фактора в (1). *Локальные вклады* в вершины, возникающие из взаимодействия кварков с токами (4), задаются как

$${}^\Phi\Gamma_{\text{loc}}(x, y, z) = i \left. \frac{\delta^3 S_0}{\delta \Phi(z) \delta \overline{\psi}(x) \delta \psi(y)} \right|_{\Phi=0},$$

где $\Phi(z)$ обозначает внешние поля $V_\mu(z)$, $A_\mu^a(z)$. Переходя к фурье-образу с помощью $\exp[i(k'x - ky - qz)]$ и опуская $(2\pi)^4 \delta(k' - k - q)$, находим

$${}^V\Gamma_{\text{loc}}^{\mu a}(k, q, k' = k + q) = \gamma^\mu T^a, \quad {}^A\Gamma_{\text{loc}}^{\mu a}(k, q, k' = k + q) = \gamma^\mu \gamma_5 T^a,$$

где $T_a = \tau_a/2$, $k(k' = k + q)$ является входящим (выходящим) импульсом кварка и q — импульс, который протекает через ток.

Нелокальный четырехкварковый вклад в вершины, построенный из взаимодействия кварков с токами (5), имеет вид

$${}^\Phi\Gamma_{nl}(x_1, x_2, x_3, x_4, z) = i \left. \frac{\delta^5 S_{q\pi}}{\delta \Phi(z) \delta \overline{\psi}(x_1) \delta \psi(x_3) \delta \overline{\psi}(x_2) \delta \psi(x_4)} \right|_{\Phi=0}$$

и задается выражениями, представленными ниже. Мы не выписываем явно фактор $\delta^{(4)}(k_1 + k_2 + q - k_3 - k_4)$, соответствующий закону сохранения энергии-импульса. Всего возникает три типа нелокальных вершин $H_j^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q)$, построенных из (5). Тип I задается как

$$H_I^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = F^\mu(k_1 + q, k_1) + F^\mu(k_3 - q, k_3), \quad (20)$$

где

$$F^\mu(k \pm q, k) = (2k \pm q)^\mu \frac{f(k \pm q)/f(k) - 1}{(k \pm q)^2 - k^2}, \quad (21)$$

с соответствующими комбинациями матриц $[(\Gamma_i^\alpha)_{13} (\Omega_{i\alpha})_{24}]_I^a$ для изоскалярного векторного тока I:

$$(1 \otimes 1 + i\gamma_5 \tau^a \otimes i\gamma_5 \tau^a), \quad -(\tau^a \otimes \tau^a + i\gamma_5 \otimes i\gamma_5), \quad (22)$$

изовекторного векторного тока I:

$$(\tau^a \otimes 1 + i\gamma_5 \otimes i\gamma_5 \tau^a), \quad -(1 \otimes \tau^a + i\gamma_5 \tau^a \otimes i\gamma_5), \quad (23)$$

изовекторного аксиального тока I:

$$\epsilon^{abc}(\tau^c \otimes i\gamma_5 \tau^b), \quad -\epsilon^{abc}(i\gamma_5 \tau^b \otimes \tau^c). \quad (24)$$

Нелокальная структура типа II также возникает в изовекторном векторном токе

$$H_{\text{II}}^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = F^\mu(k_2 + q, k_2) + F^\mu(k_3 - q, k_3), \quad (25)$$

а спин-изоспиновые матрицы появляются в комбинациях: (изовекторный векторный ток II)

$$i\epsilon^{abc}(i\gamma_5 \tau^b \otimes i\gamma_5 \tau^c), \quad -i\epsilon^{abc}(\tau^b \otimes \tau^c). \quad (26)$$

В изовекторном аксиальном токе не возникает структура типа II, но появляется нелокальная структура третьего рода:

$$\begin{aligned} H_{\text{III}}^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q) &= F^\mu(k_2 + q, k_2) + F^\mu(k_3 - q, k_3) - \\ &- F^\mu(k_1 + q, k_1) - F^\mu(k_4 - q, k_4) \end{aligned} \quad (27)$$

с матричными комбинациями (изовекторный аксиальный ток III)

$$(i\gamma_5 \tau^a \otimes 1), \quad -(i\gamma_5 \otimes \tau^a). \quad (28)$$

Выписанным выражениям для вершин могут быть сопоставлены соответствующие токи. Например, полный аксиальный векторный ток принимает вид

$$j_5^{\mu a}(x) = j_{5(\text{loc})}^{\mu a}(x) + j_{5(nl)}^{\mu a}(x),$$

$$j_{5(\text{loc})}^{\mu a}(x) = \frac{1}{2}\bar{q}(x)\gamma^\mu\gamma_5\tau^a q(x), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} j_{5(nl)}^{\mu a}(x) &= \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 K(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \\ &\times \left\{ \left[\int_{x_1}^{x_4} dz_\mu \delta(z - x) - \int_{x_2}^{x_3} dz_\mu \delta(z - x) \right] \times \right. \\ &\times \bar{q}(x_1)i\gamma_5\tau^a q(x_3)\bar{q}(x_2)q(x_4) + \\ &+ \left. \int_{x_1}^{x_3} dz_\mu \delta(z - x)i\epsilon^{abc}\bar{q}(x_1)\tau^b q(x_3)\bar{q}(x_2)i\gamma_5\tau^c q(x_4) \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Ниже мы увидим, что нелокальные четырехквартковые токи индуцируют вклады в полную вершину Jqq , когда одна квартковая линия замкнута в петлю.

Пропагатор пиона и кварк-пионная вершина. Взаимодействие кварков, индуцированное инстанционным обменом, ответственно за сильные, зависящие от спина связи в адронных мультиплетах [13]. В частности, это взаимодействие является притягивающим для мезонных состояний псевдоскалярного октета, отталкивающим для изосинглета η' , и отсутствует (в приближении нулевых мод) в векторных мезонах ρ, ω и т.д. Если притяжение является достаточно большим, то оно может перестроить вакуум и связать кварк и антикварк в форме легкого (голдстоуновского) мезона.

Масса пиона* и вершинная функция находятся с помощью уравнения Бете — Солпитера (БСУ). Для согласия с ШДУ (9), БСУ рассматривается в лестничном приближении. В этом приближении сепарабельное взаимодействие позволяет записать $\bar{q}q$ -матрицу рассеяния T в форме

$$T(p_1, p_2, p_3, p_4) = \prod_n \tilde{f}(p_n) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \hat{T}(q), \quad (31)$$

где полный импульс $\bar{q}q$ пары обозначен $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$. БСУ может быть представлено через \hat{T} как

$$\hat{T}(q) = G_I + G_I \Pi_{PP}(q) \hat{T}(q), \quad (32)$$

где $\Pi_{PP}(q)$ является поляризационным оператором пионного поля и задается петлевым интегралом

$$\Pi_{PP}(q) = i2N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{F}^2(k_+, k_-) \text{Tr}[i\gamma_5 S_F(k_-) i\gamma_5 S_F(k_+)], \quad (33)$$

где $k_{\pm} = k \pm \frac{1}{2}q$,

$$\tilde{F}(k, k') = \tilde{f}(k)\tilde{f}(k'), \quad (34)$$

и $S_F(k)$ — эффективный пропагатор кварка (8), полученный как решение ШДУ в лестничном приближении. Решение уравнения (32) имеет вид

$$\hat{T}(q) = \frac{1}{1 - G_I \Pi_{PP}(q)} G_I. \quad (35)$$

Связанное состояние пиона дается полюсом \hat{T} и может быть определено из уравнения

$$\det(1 - G_I \Pi_{PP}(q))|_{q^2=m_\pi^2} = 0. \quad (36)$$

*В киральном пределе, который в основном мы используем в работе, масса пиона является нулевой в согласии с теоремой Голдстоуна, и при конечных токовых массах кварков она получается из соотношения Гелл-Манна — Окса — Реннера. Можно показать, что численная зависимость результатов от массы пиона и токовой массы кварка пренебрежимо мала.

В окрестности пионного полюса матрица \hat{T} может быть представлена как

$$-D_\pi(q^2) g_{\pi qq}^2 \bar{V}(q) \otimes V(q), \quad (37)$$

где

$$D_\pi(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_\pi^2}$$

есть пропагатор мезона и $V(q)$ обозначает соответствующую вершинную функцию. Вершинные функции для конечного и начального состояний связаны соотношением $\bar{V} = \gamma^0 V^\dagger \gamma^0$. Для пиона имеем

$$V_\pi(q) = i\gamma_5 \tau^a, \quad (38)$$

и кварк-пионная вершина в окрестности полюса задается

$$\Gamma_{\pi q}^a(k, p) = g_{\pi qq} \tilde{F}(p - k, k) i\gamma_5 T^a. \quad (39)$$

Кварк-пионная константа определяется условием связности [28]:

$$\frac{1}{g_{\pi qq}^2} = \left. \frac{d\Pi_{PP}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=m_\pi^2} = \left[\frac{2\pi^2}{N_c I_{g\pi}(-m_\pi^2)} \right]^{-1}, \quad (40)$$

где, в случае безмассового пиона, интеграл $I_{g\pi}$ сводится к

$$I_{g\pi}(0) = \int_0^\infty \frac{dk}{D^2(k)} \left[1 - \frac{k}{2} \frac{\tilde{Q}'(k)}{\tilde{Q}(k)} + \left(\frac{k}{2} \frac{\tilde{Q}'(k)}{\tilde{Q}(k)} \right)^2 \right] \quad (41)$$

с

$$\tilde{Q}'(k) = \frac{d}{dk} \tilde{Q}(k), \quad D(k) = M_q^2 \tilde{Q}^2(k) + k^2. \quad (42)$$

Как мы увидим ниже, условие (40), дополненное калибровочной инвариантностью эффективного действия, приводит к выполнению партонных ПС для изоспина и импульса. Отметим, что выражение для $g_{\pi q\bar{q}}$, данное в (40) и (41), согласуется с тем, которое получено в [9].

Эффективный киральный лагранжиан. Бозенизация модели. Результаты предыдущего раздела могут быть переформулированы в эквивалентной форме, но для эффективного кварк-мезонного взаимодействия, с помощью процедуры бозенизации полей. Для этого удобно переписать сепарабельный

четырехфермионный член в действии (5), линеаризуя билокальные комбинации $\bar{q}(x)q(y)$ и $\bar{q}(x)\gamma_5\vec{\tau}q(y)$ с помощью введения вспомогательных составных мезонных полей $M(x)$ [29] (приближение среднего поля). Тогда приходим к следующей форме эффективного нелокального действия, соответствующего (5):

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \quad (43)$$

где S_0 является свободным действием для полей кварков и мезонов:

$$\begin{aligned} S_0 = \int d^4x & \left\{ \bar{q}(x) i\hat{D}q(x) + \frac{1}{2} [\sigma(x)(\Delta - m_\sigma^2)\sigma(x)] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\vec{\pi}(x)(\Delta - m_\pi^2)\vec{\pi}(x)] \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

и S_{int} есть кварк-пионное взаимодействие

$$S_{\text{int}} = -M_q \int d^4X d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) f(x_2) \bar{Q}(X - x_1; X) U_\pi(X) Q(X; X + x_2), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} U_\pi(X) &= \exp \left(-\frac{g_{\pi\bar{q}q}}{M_q} i\gamma_5 \tau^a \pi^a(X) \right) = \\ &= \left[1 - \frac{g_{\pi\bar{q}q}}{M_q} (i\gamma_5 \tau^a) \pi^a(X) - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\pi\bar{q}q}}{M_q} \right)^2 \pi^a(X)^2 + O(M_q^{-3}) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

В (44), (45) пренебрегаем членами, индуцированными тензорным взаимодействием в (5), так как они не дают вклада в скалярном канале. Фурье-образ от калибровочно-инвариантной нелокальной вершины $\tilde{F}(k_1, k_2)$ описывает амплитуду мягкого перехода пиона с импульсом p в кварк и антакварк с импульсами $k_1 = p + k/2$ и $k_2 = p - k/2$ соответственно. Эта функция представляет полную вершину взаимодействия со всеми кварк-глюонными возбуждениями жестче, чем масштаб $\mu_0 \sim 1/\rho_c$, сильно (экспоненциально) подавленной. Важно подчеркнуть, что пионное поле, входящее в действие (43), является перенормированным, а константа перенормировки поля составного мезона выбирается равной нулю:

$$Z_\pi = 1 - g_{\pi q\bar{q}}^2 \left. \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 = -m_\pi^2} = 0. \quad (47)$$

Это условие связности [28], фиксирующее константу взаимодействия пионного поля с кварками $g_{\pi q\bar{q}}$, эквивалентно условию (40).

Физические токи. Вершины, данные в предыдущей части, являются «голыми». Теперь необходимо «одеть» модель с помощью учета процессов перерассеяния. Эффективные векторные и аксиально-векторные полные вершины необходимы при вычислении многих физических процессов и будут описаны более детально ниже. Важные ограничения на структуру этих вершин накладывают векторное (УТТ) и аксиальное тождества Уорда — Такахashi (АУТТ):

$$q^\mu \Gamma_\mu(k, q) = S_F^{-1}(k') - S_F^{-1}(k), \quad (48)$$

$$q^\mu - {}^A\Gamma_\mu(k, q) = S_F^{-1}(k')\gamma_5 - \gamma_5 S_F^{-1}(k), \quad (49)$$

где q является фотонным импульсом и k — импульсом кварка, проходящими через вершину. (Изоспиновая структура здесь не выписана явно.) Полная вершина представляется суммой локальной и нелокальной частей. Нелокальные двухкварковые эффективные вершины Γ_{2q} индуцируются четырехкварковыми вершинами Γ_{4q} , в которых одна кварковая линия замкнута в петлю.

В электромагнитном случае полная амплитуда для фотонной связи с кварком задается

$${}^V\Gamma_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, q, k' = k + q) = \left[\gamma^\mu - M_q \frac{\tilde{f}^2(k') - \tilde{f}^2(k)}{k'^2 - k^2} (k + k')^\mu \right] T^a \quad (50)$$

и удовлетворяет УТТ:

$$q^\mu {}^V\Gamma_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, q, k' = k + q) = \left[\hat{q} - \left(M_q \tilde{f}^2(k') - M_q \tilde{f}^2(k) \right) \right].$$

Чтобы получить второй член в (50), индуцированный ${}^V\Gamma_{4q}$ (22), (26), диаграмму, где замкнутая петля имеет скалярную вставку, упрощают при использовании ШДУ (9).

Продольная часть эффективной двухкварковой аксиально-векторной вершины, получающейся из (28), имеет вид [20]:

$${}^A\Gamma_{2q}^{\mu a}(k, q) = \gamma^\mu \gamma_5 T^a - \gamma_5 \frac{q_\mu}{q^2} T^a \{ [M(k + q) + M(k)] -$$

$$- i4N_c N_f G_I f(k + q) f(k) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{M(l^2)}{l^2 - M(l^2)} f(l) [f(l - q) + f(l + q)] \},$$

где, для того чтобы получить первый член внутри фигурных скобок, было использовано уравнение щели (9). Эта вершина является голой, и, в частности, она свободна от сингулярностей. Для того чтобы получить полную

аксиально-векторную вершину, нам необходимо принять во внимание переход тока в конституентные кварки через их перерассеяние в канале с пионными квантовыми числами. В приложении Б мы покажем явно, что полный аксиально-векторный ток принимает вид

$${}^A\Gamma_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, q) = \left[\gamma^\mu - \frac{M(k+q) + M(k)}{q^2} q^\mu \right] \gamma_5 T^a. \quad (52)$$

Этот ток имеет физическую сингулярность, соответствующую пиону, и, очевидно, удовлетворяет АУТТ: $q^\mu {}^A\Gamma_\mu(k, q) = S_F^{-1}(k+q)\gamma_5 + \gamma_5 S_F^{-1}(k)$. УТТ и требование, что вершины не содержат нефизических сингулярностей, однозначно определяют продольную часть векторной и аксиально-векторной вершин. Поперечная часть при этом является модельно-зависимой и, в частности, в настоящем подходе зависит от определения контурного интеграла.

Величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов. Важными характеристиками являются величины кваркового конденсата и средней виртуальности кварков в вакууме. Первая играет роль параметра порядка нарушения киральной симметрии, а вторая определяет среднее значение квадрата импульса виртуального кварка. При заданной динамической массе (11) имеем для кваркового конденсата

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_q(k)}{k^2 + M_q^2(k)} \quad (53)$$

и средней виртуальности кварков [3]:

$$\lambda_q^2 \equiv \frac{\langle : \bar{q}D^2 q : \rangle}{\langle : \bar{q}q : \rangle} = -\frac{4N_c}{\langle \bar{q}q \rangle} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^2 \frac{M_q(k)}{k^2 + M_q^2(k)}. \quad (54)$$

Средняя виртуальность кварков определяет производную от конденсата кварков и, таким образом, его нелокальные свойства. Одним из главных предположений метода КХД ПС [1] было то, что локальные кварковый и глюонный конденсаты доминируют в физике легких адронов, а введение поправок более высокой размерности или даже нелокальных конденсатов [3] не изменяет сильно стандартных результатов. Таким образом, по крайней мере, для согласования локальных и нелокальных КХД ПС значение производной (виртуальности) должно быть относительно малым. Феноменологически имеется достаточно точная оценка этой величины: $\lambda_q^2 \approx (0,4 \pm 0,2) \text{ ГэВ}^2$, основанная на рассмотрении КХД ПС для легких адронов [16] и мезонов, составленных из тяжелых и легких кварков [30]. Вычисления в рКХД дают $\lambda_q^2 = (0,55 \pm 0,05) \text{ ГэВ}^2$ [31]. Конечно, имеются поправки за счет прямых инстантонов к результату в КХД ПС, но они вряд ли поменяют результат существенно. Было бы очень интересно, если бы оценка в рКХД могла быть подтверждена новыми вычислениями.

Чтобы иметь качественное представление о соотношении параметров модели с физическими наблюдаемыми, полезно рассмотреть уравнение щели (9) и вакуумные ожидания (53), (54), пренебрегая членом $M_q^2(k)$, по сравнению с k^2 в знаменателях подынтегральных функций. Это приближение оправданно в режиме достаточно разреженной инстанционной среды (жидкости), когда $\langle k^2 \rangle = \lambda_q^2 \gg M_q^2(\lambda_q)$. Можно показать, что точность такой процедуры лучше, чем 20 – 30%, если параметр разреженности мал: $\eta < 1$. Тогда, с учетом (53) и (54) и используя явные выражения эффективной массы, заданные в (18), (13), (10), получим для значений квarkового конденсата и квarkовой виртуальности, соответственно,

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c M_q}{2\pi^2 \rho_c^2}, \quad \lambda_q^2 = \frac{2}{\rho_c^2}. \quad (55)$$

Первое соотношение, представленное в форме $M_q = -(2\pi^2/N_c)\rho_c^2 \langle \bar{q}q \rangle$, совпадает с результатом, полученным в работе [32], где эффективная масса квакка была определена в системе инстантонов с малыми размерами, взаимодействующих с длинноволновым вакуумным полем. Коэффициент $(2\pi)^2$ в этом соотношении равен нормировке пропагатора квакка в импульсном представлении. Оказывается, что этот фактор является одинаковым как для калибровочно-инвариантного пропагатора (13), так и для пропагатора, вычисленного в сингулярной калибровке (без P_{exp} -фактора). Кроме того, это соотношение является аналогом известного результата НИЛ-модели [17] $\langle \bar{q}q \rangle \approx -N_c M_q \Lambda_{N JL}^2 / (4\pi^2)$, где $\Lambda_{N JL}$ — параметр обрезания по импульсам в ковариантной схеме регуляризации в модели с двумя ароматами. Так как инстантоны создают нелокальность и приводят к регуляризации интегралов также ковариантным способом, мы можем дать оценку на параметр обрезания $\Lambda_{N JL}^2 \approx \lambda_q^2$.

Второе соотношение в (55) было недавно получено в [14], где *нелокальные* свойства конденсата квакков изучались в инстанционной модели. Этот же результат был получен в [33] прямым вычислением локального смешанного квакк-глюонного конденсата:

$$\frac{\lambda_q^2}{2} = \frac{\langle : \bar{q}(ig\sigma_{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2})q : \rangle}{\langle : \bar{q}q : \rangle}. \quad (56)$$

Из выражения для средней виртуальности квакков очевидно, что область квакк-антикваккового взаимодействия характеризуется эффективным размером ρ_c инстанционных флуктуаций в КХД-вакууме.

Обращая равенства (55), выразим параметры инстанционной модели вакуума в терминах фундаментальных параметров вакуума КХД $\rho_c^2 = 2/\lambda_q^2$, $M_q = -(4\pi^2/N_c)(\langle \bar{q}q \rangle/\lambda_q^2)$. Если для численной оценки подставить «стан-

дартное» значение для конденсата кварков $\langle \bar{q}q \rangle \approx -(230 \text{ МэВ})^3$ (см., например, [7]) и для средней виртуальности кварков взять $\lambda_q^2 \approx 0,6 \text{ ГэВ}^2$ [16,31], то получим $\rho_c^{-1} \approx 0,55 \text{ ГэВ}$ и $M_q \approx 0,27 \text{ ГэВ}$. Совместный анализ вакуумных и низкоэнергетических пионных свойств (см. табл. 1), проведенный в [24], подтверждает эти оценки. Выразим параметр разреженности вакуума через физические параметры

$$\eta^{1/2} = \frac{4\sqrt{2}\pi^2}{N_c} \left(\frac{|\langle \bar{q}q \rangle|^{1/3}}{\lambda_q} \right)^3.$$

Это выражение пропорционально малому фактору $1/N_c$ и отношению величины конденсата кварков к размеру его нелокальности в импульсном пространстве. Однако малость $1/N_c$ компенсируется большим численным коэффициентом. Таким образом, разреженность инстанционного вакуума обусловлена вторым фактором и означает, что кварки протекают через вакуум с достаточно большим средним импульсом $\lambda_q \approx \sqrt{\langle k^2 \rangle}$ по сравнению с линейным масштабом, характерным для конденсата кварков $|\langle \bar{q}q \rangle|^{1/3}$. Формально предел разреженной жидкости соответствует пределу малого среднего размера инстантона. Подставив реальные числа, мы получим оценку $\eta \approx 0,24$.

В приближении разреженной жидкости из уравнения массовой щели (9) можно найти плотность инстанционной среды в виде

$$n_c = \frac{N_c M_q^2 \lambda_q^2}{4\pi^2} I_n, \quad I_n = \int_0^\infty du u \tilde{Q}^2(u/\rho_c) \approx 0,61, \quad (57)$$

где константа I_n не зависит от ρ_c . Существуют и другие полезные соотношения, связывающие параметры вакуума друг с другом. Например,

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{1}{I_n} \frac{n_c}{M_q} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{I_n}} \sqrt{N_c n_c \lambda_q^2}. \quad (58)$$

Эти соотношения имеют ту же самую параметрическую зависимость, что и оценки, полученные в [5, 7], но с другими коэффициентами. Первое из них выражает конденсат кварков через эффективный вклад отдельного инстантона, умноженный на плотность инстантонов. Коэффициенты отличаются по той причине, что в [5], где это равенство записано как $\langle \bar{q}q \rangle = -n_c/M_q$, выражения были получены из инстанционных формул в газовом приближении механической заменой токовой массы кварка на эффективную. Напротив, при выводе равенства (58) такая процедура замены фиксирована уравнением щели (9), а коэффициенты главным образом определяются из наклона форм-фактора $M_q(k)$ в нуле.

Второе соотношение в (58) представляет собой самосогласованную оценку конденсата кварков в инстанционном вакууме (см., например, [7]). Далее, по-

скольку инстанционный вклад в величину глюонного конденсата дается соотношением $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle|_{\text{inst}} = 8n_c$, то глюонный конденсат может быть выражен через кварковый конденсат и среднюю виртуальность кварков:

$$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle|_{\text{inst}} = \frac{2^5 \pi^2 I_n}{N_c} \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{\lambda_q^2} \lesssim 0,019 \text{ ГэВ}^4. \quad (59)$$

«Стандартной» оценкой кваркового конденсата, полученной в оригинальной работе [1], является $\langle 0 | (1/4\pi^2) G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \simeq 0,012 \text{ ГэВ}^4$. Последующий анализ [34], выполненный методом ПС КХД для тяжелых и легких мезонов, а также недавние решеточные вычисления [35] дают величины, которые в два и более раз превосходят «стандартные».

Низкоэнергетические наблюдаемые пионы. Для того чтобы зафиксировать параметры инстанционной модели, мы также рассмотрим низкоэнергетические константы пиона. Как было отмечено выше, нелокальный аксиальный ток содержит неоднозначность, связанную с определением контурного интеграла. К счастью, продольная компонента тока не содержит зависимости от выбора пути и однозначно фиксируется с помощью УТТ. Таким образом, константы распадов, рассмотренные ниже, являются хорошо определенными. В результате низкоэнергетические теоремы, которые следуют из (частичного) сохранения тока, выполняются. В частности, соотношение Голдбергера — Треймана для кварк-пионной константы связи имеет привычную форму

$$g_{\pi qq} = \frac{M_q}{f_\pi}, \quad (60)$$

и константа распада пиона на два фотона $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

$$g_{\pi\gamma\gamma} = \frac{1}{4\pi^2 f_\pi} \quad (61)$$

согласована с требованиями аксиальной аномалии.

Зафиксируем модельные параметры так, чтобы константа слабого распада пиона f_π имела точность не хуже, чем 1%. В табл. 1 приведены результаты для двух модельных параметров M_q и ρ_c и предсказания для кварк-пионной константы $g_{\pi qq}$, конденсата кварков $\langle \bar{q}q \rangle$, средней вакуумной виртуальности кварков λ_q^2 и плотности инстантонов n_c .

Из табл. 1 ясно, что с ростом массы кварка величины конденсатов кварков и глюонов падают. Этот эффект является следствием подавления конденсатов массой фермиона. Значения параметров M_q и ρ_c , которые воспроизводят вакуумные ожидания наимизшей размерности с точностью порядка 30 %, находятся в интервале $M_q = 220 \div 260 \text{ МэВ}$, $\rho_c = 1,5 \div 2,0 \text{ ГэВ}^{-1}$. В дальнейшем мы используем типичный набор параметров

$$M_q = 230 \text{ МэВ}, \quad \rho_c = 1,7 \text{ ГэВ}^{-1}. \quad (62)$$

Таблица 1. Значения низкоэнергетических вакуумных и пионных наблюдаемых

M_q , ГэВ	ρ_c , ГэВ $^{-1}$	f_π , МэВ	$g_{\pi qq}$	$ \langle \bar{q}q \rangle ^{1/3}$, МэВ	λ_q^2 , ГэВ 2	n_c , фм $^{-4}$
0,16	1,0	93	1,7	283	2,2	1,36
0,21	1,5	92	2,3	230	1,0	0,87
0,23	1,7	91	2,5	215	0,83	0,75
0,28	2,0	92	3,1	201	0,61	0,68

Отметим, что условие разреженности $\eta \ll 1$ выполняется во всем допустимом интервале.

Параметры модели и предсказания для вакуумных и пионных наблюдаемых получены при некоторых приближениях. Во-первых, мы работаем в киральном пределе нулевой токовой массы кварка. Далее, в приближении нулевых мод мы пренебрегли малыми вкладами от векторных мезонов. Кроме того, учтено только наинизшее двухкварковое фоковское промежуточное состояние в пионе, что соответствует приближению заморозки. Мы считаем, что все эти факторы могут слегка изменить числа в табл. 1, но при этом найденные качественные результаты останутся справедливыми.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАЛЕНТНЫХ КВАРКОВ В ПИОНЕ В ИНСТАНТОННОЙ МОДЕЛИ

Амплитуда распределения кварков в пионе. При больших импульсах передачи амплитуды эксклюзивных адронных процессов вследствие факторизации динамики на больших и малых расстояниях [36–38] выражаются в лидирующем логарифмическом приближении как конволюция амплитуд жесткого и мягкого подпроцессов. Амплитуда жесткого подпроцесса вычисляется в пертурбативной КХД, и основной вклад в данную амплитуду дают диаграммы с жестким одноглюонным обменом. Амплитуда мягкого подпроцесса описывает переход начального и конечного адронного состояний в кварки и определяется через адронные амплитуды распределений (AP) [36]. Эти феноменологические функции имеют значение амплитуд распада адрона (в системе с бесконечным импульсом, $p_h \rightarrow \infty$) в кварк-антикварковую пару (в случае мезонов), с долями импульса адрона, переносимого кварком $x p_h$ и $\bar{x} p_h$ ($\bar{x} = 1 - x$) и виртуальностью μ^2 . Так как AP зависит от динамики на больших расстояниях, распределения могут быть вычислены только с помощью непертурбативных методов.

Первая попытка вычислить адронную AP была выполнена в [39] и привела к двугорбой форме для пионной AP. Однако некоторое время назад

применимость этой формы АР к эксклюзивным процессам при высоких импульсах передачи была поставлена под вопрос [40]. Показано, что в коллинеарном приближении при импульсах передачи, далеких от асимптотической области, доминируют вклады с *мягким* одноглюонным обменом, который соответствует большой величине сильной константы связи. Более того, предсказание, основанное на этой АР, дает превышение над экспериментальными данными по пионному переходному формфактору при больших Q^2 , опубликованными недавно коллаборацией CLEO [41] (для дискуссий см., например, работу [42]).

Позднее в работе [43] с использованием более тонкого метода извлечения адронной АР, основанного на КХД ПС с нелокальными конденсатами [3], было показано, что АР пиона на низкоэнергетическом масштабе более близка по форме к асимптотической АР. Также было найдено, что форма адронной АР очень чувствительна к структуре непертурбативного вакуума, параметризованного через нелокальные конденсаты. Недавно в [14] и [24] нелокальные конденсаты были смоделированы в инстантонной модели.

В этом разделе мы используем кварк-пионную динамику в рамках модели инстантонного вакуума для того, чтобы вычислить в лидирующем твисте АР пиона в низкой точке нормировки порядка обратного эффективного размера инстантона ρ_c [44]. Более ранние попытки [45] (см. также [46]) вычислить АР пиона были сделаны в рамках модели [6], которая имела дальнейшее развитие. Эффективное действие, предложенное в [6], справедливо только в киральном пределе и модифицировано более последовательно в [25]. Выше было показано, что ядро эффективного индуцированного инстантонами четырехкваркового взаимодействия должно быть выражено через калибровочно-инвариантную величину, нелокальный конденсат кварков, эффективно суммирующий непертурбативные эффекты инстантонного поля [24]. В контексте настоящих вычислений важным является то, что, как это было уже отмечено выше, в нелокальной модели форма сохраняющихся токов отличается от обычных локальных токов (см., например, [20]). Эти находки приводят к заключению, что подход [6] не полон и не согласован с низкоэнергетическими теоремами. С учетом этих фактов некоторые из предыдущих вычислений также требуют пересмотра. В частности, подход [6] не способен удовлетворить аксиальным тождествам Уорда — Такахashi (АУТТ). Как показано в [20], локальная часть аксиального тока модифицируется нелокальным членом. Физически это означает, что обычные локальные токи определены через (свободные) токовые кварки, а модификация нелокальными членами происходит благодаря переходу от описания через токовые кварки к описанию в терминах конституентных кварков в эффективной модели. Эти добавочные члены не подавлены параметром малой плотности инстантонов и ведут к поправке порядка 30% к величине константы распада пиона F_π . Так как константа распада пиона является интегральной мерой пионной АР, основ-

ная задача настоящего раздела состоит в том, чтобы оценить эффект таких членов при вычислении АР.

Пионная амплитуда распределения на низкоэнергетическом масштабе. Аксиальная проекция пионной АР на световом конусе $\varphi_\pi^A(x)$ определяет лидирующее асимптотическое поведение электромагнитного формфактора пиона. Она параметризует структуру матричного элемента

$$\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | \pi^+(p) \rangle = i p_\mu F_\pi \int_0^1 dx e^{i(2x-1)p \cdot z} \varphi_\pi^A(x) \quad (63)$$

от билокального оператора

$$J_\mu^A(z, -z) = \bar{d}(z) \gamma_\mu \gamma_5 P \exp \left(i \int_{-z}^z A_\mu(z) dz^\mu \right) u(-z), \quad (64)$$

где рассматривается предел на световом конусе, $z^\mu = \lambda n^\mu$, n^μ является светоподобным вектором: $n^2 = 0$, нормированным условием $p \cdot n = 1$, $F_\pi = 130$ МэВ — константа слабого распада пиона, и пионная АР на световом конусе лидирующего твиста нормирована:

$$\int_0^1 dx \varphi_\pi^A(x) = 1. \quad (65)$$

Упорядоченный по пути швингеровский фазовый фактор требуется для калибровочной инвариантности, и интегрирование выполняется вдоль светоподобного направления z . Далее мы будем пренебречь этим фактором, так как возможный вклад от классического поля (инстантона) дает поправки к АР более высокого твиста, а вклад от квантового поля приводит к поправкам по малому параметру плотности инстантонов.

Билокальный ток в (64) определен через токовые кварки, а эффективная низкоэнергетическая модель, которую мы собираемся использовать, сформулирована в терминах конституентных夸克ов U и D . Таким образом, чтобы получить матричный элемент (63), мы должны рассмотреть вершину $\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | U(k) \bar{D}(k) \rangle$, которая после извлечения пионного полюса становится

$$\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | U(k) \bar{D}(p - k) \rangle = \langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | \pi^+(p) \rangle \frac{1}{m_\pi^2 - p^2} \Gamma_{\pi q}^a(k, p), \quad (66)$$

где $\Gamma_{\pi q}^a(k, p) = \langle \pi^+(p) | U(k) \bar{D}(p - k) \rangle$. Тогда, выражая матричный элемент $\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | U(k) \bar{D}(p - k) \rangle$ через петлевой интеграл, принимая во внимание перерассечение конституентных夸克ов, извлекая полюс пиона, выраже-

ние для АР сводится к

$$\begin{aligned} p^\mu F_\pi \varphi_\pi^A(x) &= 2N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \delta(x - k \cdot n) \times \\ &\times \text{tr}\{\Gamma_{\pi q}^a(k, p) S(k)^A \Gamma^{\mu a}(k, p) S(k - p)\}, \end{aligned} \quad (67)$$

где x является долей пионного импульса p , переносимой кварком*. Дельта-функция в (67) аккумулирует информацию о всех моментах АР и связана с ними с помощью преобразования Меллина.

В указанном выражении $S(k)$, ${}^A\Gamma^{\mu a}(k, p)$ и $\Gamma_{\pi q}^a(k, p)$ являются эффективным пропагатором кварка, кварк-аксиальным током и кварк-пионной вершиной соответственно. Основной задачей здесь является нахождение этих функций. Для этого мы будем использовать ковариантную эффективную низкоэнергетическую модель с сепарабельным нелокальным четырехкварковым взаимодействием. Более того, фактические вычисления будут сделаны в модели с межкварковым взаимодействием, индуцированным инстантонным обменом. Можно показать, что численно зависимость результатов от массы пиона и токового кварка пренебрежимо мала и может быть проигнорирована при дальнейшем рассмотрении: $m_\pi = 0$. Однако взаимосвязь эффективной массы кварка M_q и масштаба нелокальности вакуумного поля λ_q^2 имеет большое влияние на форму АР.

Результаты для пионной амплитуды распределения. Амплитуда распределения пиона вычисляется из (67) с использованием эффективного пропагатора кварка (8), кварк-пионной вершины (39) и аксиально-векторной вершины (51). Импульсная зависимость одетых взаимодействием величин определяется нелокальностью конденсата кварков (13), который в настоящем подходе задан с помощью инстантонной модели (18). В фактических вычислениях будем использовать значения параметров (табл. 1): $\rho_c = 1,7 \text{ ГэВ}^{-1}$, $M_q = 230 \text{ МэВ}$, $n_c = 0,7 \text{ фм}^{-4}$, которые согласованы с низкоэнергетическими наблюдаемыми пионами. Интеграл в (67) вычисляется с помощью преобразования Лапласа методом, описанным в [24].

Из графика на рис. 3 видно, что форма $\varphi_\pi^A(x)$ близка к асимптотической АР $\varphi_\pi^{A,\text{asym}}(x) = 6x\bar{x}$. Основной вклад идет из локальной части вершины, а вклад нелокальной части является подавленным по величине и пологим по форме. Заметим, что пологая форма нелокального вклада есть результат суммы различных нелокальных вкладов, которые имеют более сложную форму.

*Формула (67) обобщает выражение, которое было найдено ранее в [45] (а также в [46]). В этих работах вместо полной вершины $\Gamma^\mu(k, q)$ была использована вершина, соответствующая только локальному аксиальному току $\gamma_\mu \gamma_5$. Как будет видно, это приближение не согласовано с аксиальным УТТ.

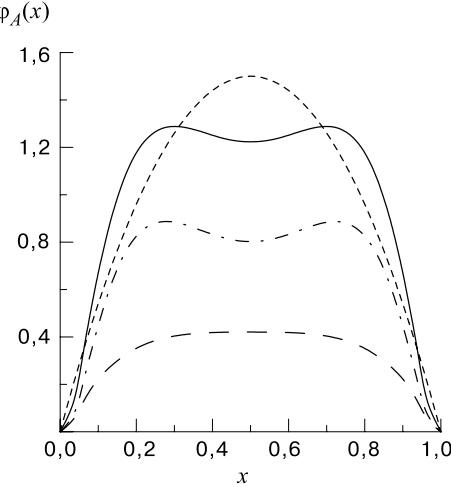


Рис. 3. Аксимальная проекция пионной амплитуды распределения (сплошная линия) при низкоэнергетическом масштабе $\mu_0^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$. Вклад локальной части вершины показан штрихпунктирной линией, нелокальной — пунктирной линией. Асимптотическая амплитуда распределения показана штриховой линией

Найденная АР пиона определена на низкоэнергетическом масштабе $\mu_0 \sim \sim \rho_c^{-1}$, где ожидается, что применение инстанционной модели оправданно. Она служит в качестве начальных данных для КХД-эволюции к более высоким импульсам передачи Q^2 . Для того чтобы получить эту связь, удобно разложить АР по полиномам Гегенбауэра $C_n^{3/2}(x)$, которые являются собственными функциями ядра уравнения КХД-эволюции:

$$\varphi_\pi^A(x, \mu_F) = \varphi_\pi^{A,\text{asym}}(x) \left[1 + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n(\mu_0) \left(\frac{\alpha_s(\mu_F)}{\alpha_s(\mu_0)} \right)^{\gamma_n} C_n^{3/2}(2x - 1) \right], \quad (68)$$

где γ_n — аномальные размерности, вычисленные в лидирующем порядке по константе связи $\alpha_s(\mu)$; $B_n(\mu_0)$ — коэффициенты разложения по полиномам Гегенбауэра. Модельная АР хорошо воспроизводится с помощью этого разложения, если удержать только несколько первых ненулевых коэффициентов:

$$B_2(\mu_0) = 0,069, \quad B_4(\mu_0) = -0,061, \quad B_6(\mu_0) = -0,017, \quad B_{n \geq 8}(\mu_0) = 0.$$

Полученное распределение экстраполируется к более высоким экспериментально достижимым импульсам с помощью пертурбативной КХД, так что

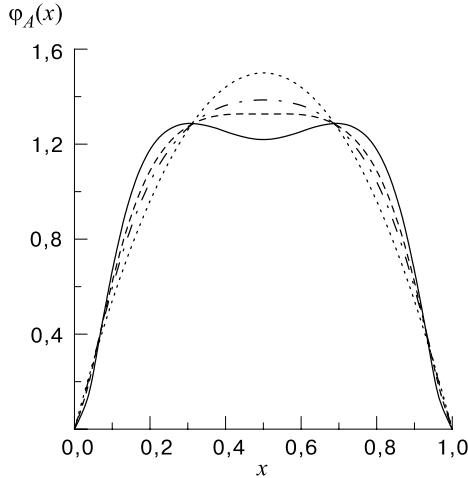


Рис. 4. Аксиальная проекция пионной амплитуды распределения (сплошная линия) при низкоэнергетическом масштабе $\mu_0^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$ и ее эволюция к более высоким импульсам передач в квадрате: $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ (пунктирная линия), $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ (штрихпунктирная линия). Асимптотическая амплитуда распределения показана точечной линией

сравнение с экспериментальными данными может быть выполнено. Мы выбираем КХД-масштабный параметр $\Lambda_{MS}^{(3)} = 250 \text{ МэВ}$. На рис. 4 показана АР пиона с эволюцией к масштабам 1 и 10 ГэВ² в сравнении с начальным распределением на масштабе $\mu_0^2 = \lambda_q^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$.

В итоге мы представили здесь некоторые теоретические предсказания для пионной амплитуды распределения в рамках непертурбативного формализма, основанного на инстанционной модели КХД-вакуума. Показано, что правильная нормировка АР получается только при использовании условия связности и прямого применения ЧСАТ, что улучшает некоторые предыдущие вычисления, выполненные в [45] и [46].

Отметим, что в расширенной нелокальной модели, где во взаимодействии возможны другие спин-ароматовые члены, в АР пиона могут давать вклад и вершины с векторной вставкой ρ -мезона. Известно, что этот вклад в F_π мал и оценивается как -10% [20]. Однако было бы интересно рассмотреть его влияние на форму АР.

Извлеченная АР пиона соответствует низкой точке нормировки, где эффективный инстанционный подход оправдан. Мы получили АР пиона при более высоких импульсах, достижимых в эксперименте, с помощью стандартной пертурбативной эволюции. Найдено разумное согласие с данными CLEO по переходному пионному формфактору при высоких импульсах передачи.

Переходный формфактор пиона для процессов $\pi\gamma^*\gamma^*$. Недавно вновь возрос интерес к формфактору $T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2)$ для переходных процессов $\gamma^*(q_1)\gamma(q_2) \rightarrow \pi^0(p)$ и $\gamma^*(q_1)\gamma^*(q_2) \rightarrow \pi^0(p)$, где q_1 и q_2 — фотонные импульсы. Экспериментальные данные по формфактору T_{π^0} для малой виртуальности одного из фотонов, $q_2^2 \approx 0$, с виртуальностью другого фотона, проектированной до 8 ГэВ², известны из результатов коллабораций CELLO [47] и CLEO [41]. Теоретически при нулевых виртуальностях обоих фотонов формфактор $T_{\pi^0}(0, 0)$ связан с аксиальной аномалией. При асимптотически большой фотонной виртуальности поведение формфактора предсказывается с помощью пертурбативной КХД (пКХД) [38, 48, 49] (см. [50] для недавних дискуссий) и зависит критически от внутренней пионной динамики, которая параметризуется с помощью непертурбативной пионной АР $\varphi_\pi^A(x)$. Более того, знание структуры формфактора вне массовой поверхности позволяет значительно уменьшить неопределенность в вычислении адронного вклада в амплитуду рассеяния света на свете в мюонную $g - 2$ [51], которая измеряется в настоящее время в эксперименте E821 в BNL [52].

Далее, удобно параметризовать фотонные виртуальности как $q_1^2 = -(1 + \omega)Q^2/2$, $q_2^2 = -(1 - \omega)Q^2/2$, где Q^2 и ω , соответственно, полная виртуальность фотонов и асимметрия в их распределении:

$$Q^2 = -(q_1^2 + q_2^2) \geq 0 \quad \text{и} \quad \omega = (q_1^2 - q_2^2)/(q_1^2 + q_2^2). \quad (69)$$

Экспериментальные данные CLEO [41] для процесса $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ ($|\omega| = 1$) могут быть фитированы с помощью монопольного формфактора:

$$T_{\pi^0}(q_1^2 = -Q^2, q_2^2 = 0)|_{\text{fit}} = \frac{g_{\pi\gamma\gamma}}{1 + Q^2/\Lambda_\pi^2}, \quad \Lambda_\pi \simeq 0, 77 \text{ ГэВ}, \quad (70)$$

где $g_{\pi\gamma\gamma}$ — двухфотонная константа распада пиона. В наименее порядке пКХД, с использованием ОР на световом конусе поведение формфактора при высоких Q^2 предсказывается [38, 48] как

$$T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2)|_{Q^2 \rightarrow \infty} = J(\omega) \frac{f_\pi}{Q^2} + O(\frac{\alpha_s}{\pi}) + O(\frac{1}{Q^4}) \quad (71)$$

с асимптотическим коэффициентом

$$J(\omega) = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1 - \omega^2(2x - 1)^2} \varphi_\pi^A(x), \quad (72)$$

где $f_\pi = 93$ МэВ — константа слабого распада пиона. Так как АР пиона отражает внутреннюю непертурбативную динамику пиона, предсказание величины $J(\omega)$ является достаточно нетривиальной задачей, и его точное измерение дало бы достаточно важную информацию.

Важно заметить, что для рассматриваемого переходного процесса лидирующий асимптотический член пКХД-разложения (71) не подавлен сильной константой связи α_s . Следовательно, предсказание пКХД (71) может быть разумным* уже при наиболее высоких из достижимых в настоящее время импульсов $Q^2 \sim 10 \text{ ГэВ}^2$. При асимптотически высоких Q^2 АР эволюционирует к $\varphi_\pi^{A,\text{asymp}}(x) = 6x(1-x)$ и $J_{\text{asymp}}(|\omega| = 1) = 2$. При максимально высоких, доступных в настоящее время виртуальностях $Q^2 \approx 10 \text{ ГэВ}^2$ это предсказание редуцируется за счет радиационных поправок наименьшего порядка по КХД [49] к $J_{\text{asymp}}(10 \text{ ГэВ}^2) = 1,6$ и хорошо фитирует данные CLEO. Это указывает на то, что уже при достаточно высоких импульсах эта величина не слишком далека от своего асимптотического предела.

Однако, так как пКХД-эволюция АР достигает асимптотического режима очень медленно, точная форма АР при умеренно высоких Q^2 может не совпадать с $\varphi_\pi^{A,\text{asymp}}(x)$. При более низких Q^2 становятся важными степенные поправки к формфактору. Таким образом, изучение поведения переходного формфактора при экспериментально достижимых Q^2 есть предмет непрерывативной динамики, где тот же тип лидирующего при высоких Q^2 поведения, как и в (71), получается с помощью различных методов. Таким образом, теоретическое определение переходного формфактора является нетривиальным, и желательно получить $T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2)$ путем прямых вычислений, без каких-либо *a priori* предположений о форме АР пиона.

Переходный формфактор в симметричной кинематике $q_1^2 = q_2^2$ при высокой виртуальности рассматривался в [54], где было использовано локальное ОР и получен результат $J_{\text{ORE}}(\omega = 0) = 4/3$ для асимптотического коэффициента, который находится в согласии с предсказанием (72) при $\omega = 0$. В локальном ОР можно представить $J_{\text{ORE}}(\omega)$ как разложение по степеням ω^2 с коэффициентами разложения, задаваемыми моментами АР пиона: $\int_0^1 dx (2x - 1)^{2n} \varphi_\pi^A(x)$. В [55] (см. также [56]) было показано, что локальное ОР хорошо сходится в кинематической области, когда виртуальности фотонов близки: $|\omega| \lesssim 1/2$. В этой кинематике результат для асимптотического коэффициента близок к $4/3$. Однако в этих работах было указано, что для $|\omega| \gtrsim 1/2$ при любом конечном Q^2 возникают потенциально большие поправки к первому члену локального операторного разложения [55, 56], а также к предсказанию пКХД на световом конусе [38]. С увеличением $|\omega|$ число членов ОР с коэффициентами, зависящими от вакуумных ожиданий более высокой размерности, быстро растет. В такой ситуации практически невозможно найти более чем несколько членов локального разложения. По-

*Эта ситуация не возникает в случае электромагнитных формфакторов и в процессе комптоновского рассеяния на большие углы (например, см. [53]), где мягкие вклады при умеренно высоких Q^2 еще важны.

этому, чтобы контролировать ОР, необходимо иметь гораздо более детальную информацию о непертурбативном КХД-вакууме.

В работе [57] был достигнут некоторый прогресс с помощью использования более тонкого метода, основанного на ОР с нелокальными конденсатами [3], что эквивалентно частичному суммированию бесконечного ряда степенных поправок. С помощью КХД-правил сумм с нелокальными конденсатами было показано, что этот подход работает почти во всей кинематической области $|\omega| \lesssim 1$ и что для больших значений параметра асимметрии $|\omega| \gtrsim 0,8$ переходный формфактор пиона очень чувствителен к нелокальной структуре КХД-вакуума. Последний характеризуется средней виртуальностью夸ков в вакууме [3] λ_q^2 , и в инстанционной модели [7] может быть выражен через средний размер инстантона ρ_c как $\lambda_q^2 \approx 2\rho_c^{-2}$ [14, 24]. В [58] формфактор $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ был непосредственно вычислен из КХД ПС для трехточечной функции, что привело к оценке $J_{sr}(\omega = 1) \approx 1,6 \pm 0,3$.

Ковариантная нелокальная низкоэнергетическая модель (см., например, [59, 60]), основанная на подходе Швингера — Дайсона (ШД) к динамике夸ков и глюонов, имеет много притягательных особенностей, так как подход согласован с низкоэнергетическими теоремами. В частности, в этом подходе стандартный результат для абелевой аксиальной аномалии $T_{\pi^0}(0,0) \equiv g_{\pi^0\gamma\gamma} = (4\pi^2 f_\pi)^{-1}$ воспроизводится точно. В такой непертурбативной модели夸к-пионного взаимодействия имеют реалистическое описание как малая масса пиона, так и его составная структура. Более того, внутренняя нелокальная структура модели может быть мотивирована с помощью фундаментальных КХД-процессов инстанционного и глюонного обменов. В [60, 62] переходный формфактор $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ рассмотрен при низких Q^2 и получено согласие с данными. Там же было показано, что результаты очень чувствительны к величине конституентной массы夸ков.

Пионный переходный формфактор в эффективной кварк-пионной модели. Здесь в рамках ковариантной нелокальной низкоэнергетической модели кварк-пионного взаимодействия изучим поведение пионного переходного формфактора $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$ при высоких Q^2 при произвольной асимметрии виртуальности фотонов [61]. Покажем, что асимптотический коэффициент $J(\omega)$, как это было продемонстрировано в КХД ПС [57, 58], зависит от кинематики переходного процесса и от внутренней пионной динамики, индуцированной нелокальной структурой КХД-вакуума. Динамическая зависимость J управляется параметром разреженности M_q/λ_q , где M_q является конституентной массой夸ка. Если принять во внимание модельную зависимость асимптотического коэффициента J , то экспериментальные данные могут быть очень полезными для того, чтобы дискриминировать различные предположения, которые делаются о непертурбативной динамике КХД-вакуума. В нелокальной кварк-пионной модели выражение для асимптотического коэф-

фициента J будет найдено во всей кинематической области ω . Более того, из этой зависимости реконструируется АР пиона через кварк-пионную вершинную функцию.

Для настоящих целей эффективная кварк-пионная динамика может быть представлена ковариантным нелокальным действием, заданным

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} = & - \int d^4x d^4y F[x + y/2, x - y/2; \Lambda^{-2}] \times \\ & \times \bar{q}(x + y/2) [M_q + g_{\pi\bar{q}q} i\gamma_5 \tau^a \pi^a(x)] q(x - y/2), \end{aligned} \quad (73)$$

где динамическая вершина $F[x + y/2, x - y/2; \Lambda^{-2}]$ с размером нелокальности Λ^{-1} зависит от координат кварка и антикварка; $q(x)$ и $\pi(x)$ — соответственно, поля кварка и пиона. Нелокальная вершина характеризует координатную зависимость параметра порядка для спонтанного нарушения киральной симметрии и может быть выражена через нелокальный конденсат кварков.

В вычислениях этого раздела ограничимся приближением (см., например, [60, 62]):

$$F[x + y/2, x - y/2; \Lambda^{-2}] \rightarrow F(y^2, \Lambda^{-2}), \quad (74)$$

когда динамическая кварк-пионная вершина зависит только от относительной координаты кварка и антикварка в квадрате y^2 , пренебрегая зависимостью вершины от угловой переменной (yx). Фурье-образ вершины в пространстве Минковского определяется как $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2) = \int d^4x F(x^2; \Lambda^{-2}) \exp(-ikx)$ с нормировкой $\tilde{F}(0; \Lambda^2) = 1$; примем, что вершинная функция быстро спадает в евклидовской области импульсов ($k^2 = -k_E^2 \equiv -u$).

В дальнейшем аппроксимируем также собственную энергию кварка, зависящую от импульса, в пропагаторе кварка с помощью постоянной массы [60, 62]: $S^{-1}(k) = \hat{k} - m_q$. Действительно, импульсная зависимость вершины в числителях подынтегральных функций (которые определяют физические величины) важна потому, что она приводит к ультрафиолетовой регуляризации интегралов. Кроме того, благодаря импульсной зависимости вершин, мера в интегралах имеет вид произведения некоторой степени k^2 и функции $\tilde{Q}(k)$. Эта мера имеет максимум при k^2 порядка $1/\rho_c^2$, и при малых импульсах зависящая от импульса масса кварка может быть заменена в знаменателях эффективной постоянной массой $m_q \approx M_q(k \sim \rho_c^{-1})$. С формой импульсного распределения, показанного на рис. 2, этот массовый параметр приблизительно равен массе в нуле $M_q(0)$. Этот параметр m_q может быть отождествлен со стандартной конституентной массой кварка. В соответствии с этой подстановкой переопределим функцию $D(k)$, заданную в (42), как $D(k) = m_q^2 + k^2$, и выберем массовый параметр

$$m_q = 230 \text{ МэВ.} \quad (75)$$

Такой выбор численно хорошо воспроизводит значения интегралов, определяющих вакуумные ожидания (9), (54). Приближение постоянной массы часто используется на практике с массами кварка в области $250 \div 350$ МэВ (см., например, [62–64]).

Заметим, что используемые приближения не вполне согласованы. В частности, благодаря пренебрежению импульсной зависимостью массы кварка, некоторые низкоэнергетические теоремы нарушаются. Кроме того, как будет показано ниже, выбор модели для кварк-пионной вершины (74), зависящей только от относительной координаты, приводит к некоторому артефакту в x -зависимости АР. Однако эти недостатки выбранного приближения не ведут к существенным численным ошибкам, но вместе с тем существенно улучшают анализ структуры пиона, выполненный в более ранних работах.

В приближении постоянной массы кварка константа кварк-пионного взаимодействия задается с помощью условия связности [60, 62]:

$$g_{\pi\bar{q}q}^{-2} = \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty du u \tilde{F}^2(-u; \chi^{-2}) \frac{3+2u}{(1+u)^3}; \quad (76)$$

и константа слабого распада пиона имеет вид

$$f_\pi = \frac{N_c g_{\pi\bar{q}q}}{4\pi^2} M_q \int_0^\infty du u \tilde{F}(-u; \chi^{-2}) \frac{1}{(1+u)^2}. \quad (77)$$

Переменная интегрирования перемасштабирована квадратом массы кварка, и введен параметр $\chi = M_q/\Lambda \approx \eta$, характеризующий разреженность КХД-вакуума. В модели инстанционного вакуума размер нелокальности непертурбативного глюонного поля $\rho_c \sim \Lambda^{-1}$ гораздо меньше, чем комптоновская длина кварка M_q^{-1} , и, таким образом, χ — малый параметр [7].

Рассмотрим вклад в инвариантную амплитуду процесса $\gamma^* \gamma^* \pi^0$, который возникает из вычисления соответствующих треугольных диаграмм:

$$M(\gamma^*(q_1, e_1) \gamma^*(q_2, e_2) \rightarrow \pi^0(p)) = m_{\pi\gamma\gamma}(q_1, e_1; q_2, e_2) + m_{\pi\gamma\gamma}(q_2, e_2; q_1, e_1),$$

где $e_i (i = 1, 2)$ — векторы поляризации фотонов и

$$m_{\pi\gamma\gamma}(q_1, e_1; q_2, e_2) = -\frac{N_c}{3} g_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{F}(k^2; \Lambda^2) \times$$

$$\times \text{tr}\{i\gamma_5 S(k-p/2)\hat{e}_2 S[k-(q_1-q_2)/2]\hat{e}_1 S(k+p/2)\}. \quad (78)$$

Если из этой амплитуды отфакторизовать тензор $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_1^\mu e_2^\nu q_1^\rho q_2^\sigma$, то формфактор может быть представлен как

$$T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2) = \frac{g_{\pi\bar{q}q}}{2\pi^2} M_q I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2), \quad (79)$$

где интеграл Фейнмана $I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2)$ задан выражением

$$I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \\ \times \frac{\tilde{F}(k^2; \Lambda^2)}{[M_q^2 - (k+p/2)^2 - i\varepsilon][M_q^2 - (k-p/2)^2 - i\varepsilon][M_q^2 - (k-(q_1-q_2)/2)^2 - i\varepsilon]}. \quad (80)$$

В приближении постоянной массы низкоэнергетическое соотношение, следующее из аксиальной аномалии Адлера — Белла — Джакива (АБД) ($f_\pi g_{\pi\gamma\gamma} = 1/(4\pi^2)$), хорошо воспроизводится численно с относительной погрешностью меньше 10% [60, 62]. В формальном пределе очень разреженной вакуумной среды $\chi \ll 1$ результаты полностью согласованы с АБД-аномалией и соотношением Голдбергера — Треймана.

Заметим, что интеграл (80) по структуре является подобным интегралу, возникающему в наименшем порядке пКХД, рассматривающем квark-фотонное взаимодействие пертурбативно. В последнем случае его асимптотическое поведение обусловлено подпроцессом $\gamma^*(q_1) + \gamma^*(q_2) \rightarrow \bar{q}(\bar{x}p) + q(xp)$ с x (\bar{x}), равной доле пионного импульса p , переносимой квартком, рожденным в фотонной вершине q_1 (q_2). Соответствующая диаграмма подобна «handbag»-диаграмме для жесткого эксплюзивного процесса, причем основное отличие состоит в том, что следует использовать в качестве непертурбативной входной информации кварт-пионную вершину вместо АР пиона. Как мы увидим ниже, это подобие позволяет преобразовать форму модельной кварт-пионной вершины в специфичную форму АР пиона.

Переходный формфактор пиона $\gamma^\gamma^* \rightarrow \pi^0$ при умеренно высоких Q^2 .* Оценим асимптотику переходного формфактора. С этой целью перепишем выражение для интеграла (80) в форме, которая получается после перехода к пространству Евклида ($k^2 \rightarrow -u$, $-id^4 k \rightarrow \pi^2 u du$, $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2) \rightarrow \tilde{F}(-u; \Lambda^2)$), использования фейнмановской α -параметризации для знаменателей и интегрирования по угловым переменным. Тогда соответствующий интеграл $I_{\pi\gamma\gamma}$ принимает вид

$$I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2) = \int_0^\infty \frac{du u \tilde{F}(-u; \Lambda^2)}{M_q^2 + u - \frac{p^2}{4}} \times \\ \times \int_0^1 d\alpha \left[\frac{1}{\sqrt{b^4 - a_+^4} \left(b^2 + \sqrt{b^4 - a_+^4} \right)} + \frac{1}{\sqrt{b^4 - a_-^4} \left(b^2 + \sqrt{b^4 - a_-^4} \right)} \right], \quad (81)$$

где

$$b^2 = M_q^2 + u + \frac{1}{2}\alpha Q^2 - \frac{1}{4}(1-2\alpha)p^2,$$

$$a_{\pm}^4 = 2u\alpha Q^2(\alpha \pm \omega(1-\alpha)) - (1-2\alpha)up^2. \quad (82)$$

Выражение (81) может быть проанализировано в асимптотическом пределе большой полной виртуальности фотонов $Q^2 \rightarrow \infty$. Более того, интеграл по α может быть взят аналитически, что приводит в киральном пределе к асимптотическому выражению (71) с коэффициентом

$$J(\omega) \equiv J_{np}(\omega) = \frac{2N_{\pi}}{3\omega} \left\{ \int_0^{\infty} du \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{1+u} \ln \left[\frac{1+u(1+\omega)}{1+u(1-\omega)} \right] \right\},$$

$$N_{\pi} = \left[\int_0^{\infty} du u \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{(1+u)^2} \right]^{-1}. \quad (83)$$

Подынтегральная функция в числителе (83) отличается от подынтегральной функции, определяющей константу распада f_{π} (77). Из (83) ясно, что предсказание непертурбативного подхода об асимптотическом коэффициенте достаточно чувствительно к произведению χ , величины конституентной массы M_q и размера нелокальности Λ^{-1} вершины $F(x^2; \Lambda^{-2})$ и к относительному распределению полной виртуальности между фотонами ω . В частности, для виртуального процесса $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$ в симметричной кинематике $q_1^2 = q_2^2 \rightarrow -\infty$ ($\omega \rightarrow 0$) получим из (83) $J(|\omega| = 0) = 4/3$, что находится в согласии с предсказанием ОР [54].

Заметим, что используется приближение постоянной массы кварка для всех трех кварковых линий в диаграмме процесса. Однако асимптотический результат (83) не зависит от величины массы в пропагаторе кварка, по которому протекает жесткий импульс, как это и должно быть. Остальные две кварковые линии остаются мягкими в течение процесса. Таким образом, масса M_q может быть рассмотрена как заданная на некотором характерном мягким масштабе в зависящем от импульса случае $M_q(\lambda_q^2)$. Это означает, что динамическая и кинематическая зависимости $J_{np}(\omega)$, найденные в (83), останутся неизменными, даже если учтена импульсная зависимость массы кварка и рассмотрена эффективная кварк-фотонная вершина, которая сводится к затраченней γ^{μ} , когда виртуальность одного из фотонов становится бесконечной.

Оба выражения для J , полученные в нелокальной кварк-пционной модели (83) и из операторного разложения на световом конусе (72), могут быть приведены к общей форме

$$J(\omega) = \frac{2}{3\omega} \int_0^1 d\xi R(\xi) \ln \left[\frac{1+\xi\omega}{1-\xi\omega} \right] \quad (84)$$

с

$$R(\xi) = -\frac{d}{d\xi} \varphi_\pi^A \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \quad \text{и} \quad R_{np}(\xi) = N_\pi \tilde{F} \left(\frac{-\xi}{1-\xi}; \chi^{-2} \right) \frac{1}{1-\xi},$$

$$\text{где } 0 \leq \xi \equiv (2x-1) \leq 1, \quad (85)$$

и подобному выражению в интервале $-1 \leq \xi \leq 0$. Приравнивая оба вклада, мы найдем АР пиона через вершинную функцию на некотором низкоэнергетическом масштабе $\mu_0^2 \sim \Lambda^2$ [61]:

$$\varphi_\pi^A(x) = N_\pi \int_{|2x-1|}^1 \frac{dy}{1-y} \tilde{F} \left(\frac{-y}{1-y}; \chi^{-2} \right). \quad (86)$$

Таким образом, показано, что формула (83), полученная в нелокальной кварк-пионной модели, эквивалентна стандартному результату пКХД в низшем порядке по константе связи (72), с единственным отличием в том, что непертурбативная информация, аккумулированная в АР пиона $\varphi_\pi^A(x)$, выражена через кварк-пионную вершинную функцию $\tilde{F}(-u; \chi^{-2})$.

Следует заметить, что явная форма асимптотического коэффициента (83) и соотношение между АР и вершинной функцией зависят от конкретной модели кварк-пионного взаимодействия (73). В частности, выражение (86) получается в приближении (74), когда кварк-пионная вершина зависит только от относительной координаты. Это приближение приводит к искусственной зависимости АР от модуля $|x|$ и ведет к негладкому поведению распределения при $x = 1/2$ (см. рис. 5). Однако эти особенности исчезают, если угловая зависимость вершины, мотивированная, например, инстанционной моделью, восстановлена (см. предыдущий раздел).

Оценим реалистическое значение для параметра разреженности χ и проверим, насколько рассматриваемая модель согласована с данными CLEO. Вершинная функция $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2)$ феноменологически описывает нелокальную структуру непертурбативного КХД-вакуума и может быть смоделирована в модели инстанционного вакуума [24]. Для этой цели вершинная функция может быть хорошо аппроксимирована с помощью гауссовской формы $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2) = \exp(k^2/\Lambda^2)$. Обратный размер нелокальности вершины Λ естественным образом связан со средней виртуальностью кварков, которые распространяются в вакууме [3, 14, 24]:

$$\lambda_q^2 \equiv \frac{\langle : \bar{q} D^2 q : \rangle}{\langle : \bar{q} q : \rangle} = -\frac{N_c M_q^5}{4\pi^2 \langle \bar{q} q \rangle} \int_0^\infty du u^2 \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{u+1}, \quad (87)$$

где D_μ — ковариантная производная по отношению к сильному калибровочному полю, а конденсат夸ков выражается как

$$\langle \bar{q} q \rangle = -\frac{N_c M_q^3}{4\pi^2} \int_0^\infty du u \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{u+1}. \quad (88)$$

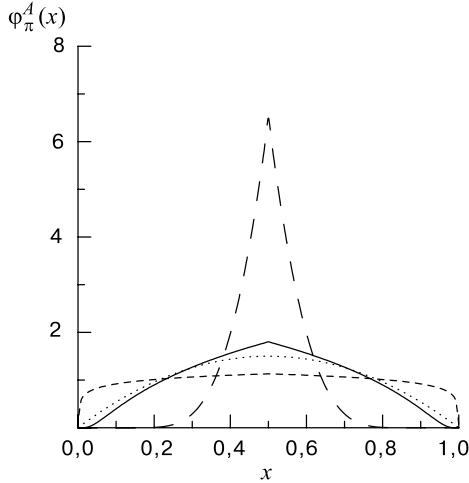


Рис. 5. Амплитуда распределения пиона как функция переменной x (86) при различных значениях параметра разреженности: $\chi^2 = 0, 15$ (сплошная линия), $\chi^2 = 0, 0001$ (короткие штрихи), $\chi^2 = 4$ (длинные штрихи). Асимптотическая амплитуда распределения показана точечной линией

Значение λ_q^2 известно из анализа КХД ПС, $\lambda_q^2 \approx (0,5 \pm 0,1)$ ГэВ² [16]. Для гауссовой вершины имеем $\Lambda^2 \approx \lambda_q^2$, если $\Lambda^2/M_q^2 > 1$. Масса кварка M_q задается соотношением Голлбергера — Треймана $M_q = g_{\pi qq} f_\pi$ с кварк-пионной константой, зафиксированной с помощью условия связности (76), и ее величина согласована с $M_q = 250 \sim 300$ МэВ. Меняя модельные параметры в интервале $\Lambda^2 = (0,55 \pm 0,05)$ ГэВ² и $M_q = (275 \pm 25)$ МэВ, имеем $\lambda_q^2 = (0,65 \pm 0,05)$ ГэВ², $\langle \bar{q}q \rangle = -(205 \pm 15)$ МэВ³ и $J_{np}(\omega = 1) = 1,80 \pm 0,05$. Если учесть ошибку в экспериментальном фите, то эта оценка находится в согласии с данными CLEO. Она также согласуется с новой оценкой $J_{sr}(\omega = 1) \approx 1,83 \pm 0,05$, сделанной в [68] с помощью КХД ПС с нелокальными конденсатами.

Показательно рассмотреть некоторые экстремальные случаи, в зависимости от конкретных физических предположений. Если бы КХД-вакуум был очень разреженным, $M_q \ll \Lambda$, то вершинная функция $\tilde{F}(-u, \chi^{-2})$ была бы очень медленно спадающей функцией. Это соответствует локальной кварк-пионной вершине. В этом случае коэффициент $J_{\text{dilute}}^{np}(|\omega| = 1)$ стремится к бесконечности, и АР также становится пологой, $\varphi_\pi^A(x) \approx 1$. Последнее может быть замечено из (85), где производная от АР по x является очень малой, так как в этом пределе нормировочный фактор N_π становится малым. Из (86) ясно, что область интегрирования эффективно ограничена сверху пределом $y_1 = \chi^{-2}/(1 + \chi^{-2})$, а снизу $y_0 = |1 - 2x|$. Эти пределы хорошо разделены в области $x_0 \lesssim x \lesssim 1 - x_0$, где $x_0 \approx 1/2(1 + \chi^{-2})$. Это озна-

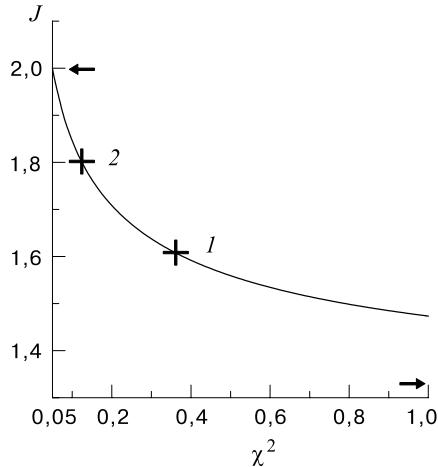


Рис. 6. Асимптотический коэффициент J_{np} как функция квадрата параметра разреженности χ^2 для процесса $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ ($\omega = 1$). Указаны значения J_{np} , полученные из фита данных CLEO (пКХД [38]), и предсказания, полученные из непертурбативной ковариантной модели ($\chi^2 = 0,15$); стрелка справа указывает на предельное значение $J = 4/3$ при $\chi^2 \rightarrow \infty$, стрелка слева — пКХД [38]

чает что АР подавлена на краю кинематического интервала $1 - |1 - 2x| < 2x_0$, где кварки являются мягкими. В противоположном экстремальном случае очень плотной среды (предел тяжелого кварка $M_q \gg \Lambda$), $J_{\text{dense}}^{np}(|\omega| = 1) = 4/3$, как это и предсказывается с помощью первого члена в операторном разложении [55]. В этом случае предел y_1 мал, и подынтегральная функция в (86) сконцентрирована в окрестности $x = 1/2$. Таким образом, как и ожидается, АР становится $\varphi_\pi^A(x) \propto \delta(x - 1/2)$. Как показано выше, реалистическая ситуация находится между этими двумя экстремалами.

Указанные различные ситуации проиллюстрированы на рис. 5 для АР пиона (86). Как ясно из рисунка, модельная АР пиона при реалистическом выборе параметров $\chi \approx 0,4$ близка к асимптотической АР. Как отмечено во введении, при фактически достижимых экспериментальных данных непертурбативная динамика может доминировать. Поэтому данные оказываются достаточно ограничительными и однозначно указывают, что в КХД-вакууме реализуется режим разреженной среды. На рис. 6 для процесса $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ ($\omega = 1$) изображен асимптотический коэффициент $J_{np}(\omega = 1)$ как функция квадрата динамического параметра разреженности χ^2 . На этом рисунке указаны значения $J_{np}(\omega = 1)$, полученные из данных CLEO, и модельные предсказания. На рис. 7 асимптотический коэффициент $J_{np}(\omega)$ изображен как функция кинематического параметра асимметрии ω при $\chi^2 = 0,15$ и $\chi^2 = 0,35$. Первое значение χ соответствует модельной оценке, второе — центральной точке фита данных CLEO.

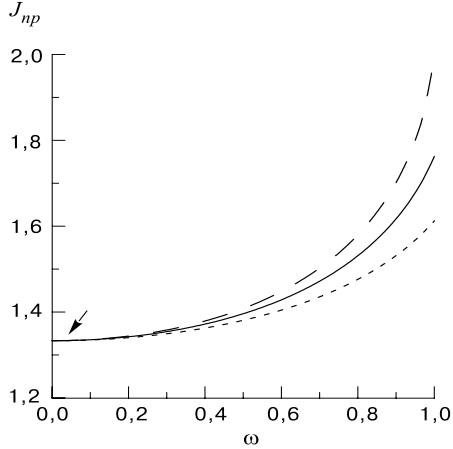


Рис. 7. Асимптотический коэффициент J_{np} как функция кинематического параметра ω . Сплошная кривая соответствует $\chi^2 = 0,15$ с $J_{np}(\omega = 1) = 1,8$; пунктирная — $\chi^2 = 0,35$ с $J_{np}(\omega = 1) = 1,6$; штриховая — асимптотическое предсказание (72) с $J_{\text{asymp}}(\omega = 1) = 2$. Стрелкой указано J_{np} для симметричной кинематики $q_1^2 = q_2^2$

Для того чтобы получить дальнейшую интерпретацию (86), выразим АР через интеграл по поперечному импульсу от пионной волновой функции на световом конусе [38]:

$$\varphi_\pi^A(x) = \int_0^\infty d\vec{k}_\perp^2 \Psi_\pi^A(x, \vec{k}_\perp^2). \quad (89)$$

Переписывая правую часть (86) через исходную переменную $u = y/(1-y)$ и затем подставляя u через комбинацию $\vec{k}_\perp^2/(x\bar{x})$, которая является инвариантной массой $q\bar{q}$ -пары в квадрате, отождествим с пионной волновой функцией выражение

$$\Psi_\pi^A(x, \vec{k}_\perp^2) = \frac{N_\pi \tilde{F}(-\vec{k}_\perp^2/(x\bar{x}); \Lambda^2)}{x\bar{x}M_q^2 + \vec{k}_\perp^2} \theta\left(\vec{k}_\perp^2 \geq \frac{|1-2x|x\bar{x}|}{1-|1-2x|} M_q^2\right). \quad (90)$$

Вершинная функция \tilde{F} в нашей модели пионной волновой функции играет такую же роль, как и θ -функция в волновой функции, построенной по модели «локальной дуальности» [50], $\Psi_\pi^{A,LD}(x, \vec{k}_\perp^2) \sim \theta(\vec{k}_\perp^2 \leq x\bar{x}s_0)$, где $s_0 = 8\pi^2 f_\pi^2$ — интервал дуальности. Заметим, что численно $s_0 \approx 0,67$ ГэВ² близко к значению параметра нелокальности λ_q^2 . Как и в случае выражения (86), пионная волновая функция на световом конусе (89) проявляет неаналитическую зависимость от x , которая исчезает при более реалистическом выборе кварк-пионной вершины. Как было указано ранее, внесение непер-

турбативных эффектов приводит к внутренней поперечной структуре адронной волновой функции [65, 66], и так же, как и судаковский пертурбативный фактор [67], модифицирует картину жесткого рассеяния в эксплозивных реакциях и существенно улучшает ее. В результате область справедливости пертурбативных КХД-вычислений адронных формфакторов распространяется из кинематической области асимптотических значений Q в область, начинающуюся с $Q \sim O(1 \text{ ГэВ})$.

Дискуссия по пионному переходному формфактору $\pi\gamma^\gamma^*$.* Недавно в [69] было заявлено, что в подходе Швингера — Дайсона предсказывается одинаковый асимптотический коэффициент $J(\omega) = 4/3$ для *всех* нелокальных кварк-фотонных вершин $\Gamma^\mu[q(k)q(k')\gamma(q)]$, которые переходят в затрачовые γ^μ по мере того, как виртуальность одного из фотонов (k^2 или k'^2) становится бесконечной (как для вершины в форме Куртиса — Пеннингтона [70]). В [69] пропагатор кварка, который зависит от виртуальности фотона, был аппроксимирован при большом Q^2 асимптотической формой $[M_q^2 - (k - (q_1 - q_2)/2)^2]^{-1} \rightarrow 2/Q^2$. После этой замены интеграл (80) приобретает ту же форму, что и интеграл в (77), определяющий f_π . Принимая во внимание коэффициенты перед интегралами в уравнениях (77) и (76), немедленно приходим к заключению авторов [69] (см. также [71]) об асимптотическом коэффициенте ($J = 4/3$). Однако, как показано выше, такая быстрая асимптотическая оценка является достаточно наивной, не ведет к точному результату и оправдана только в формальном пределе $M_q \gg \Lambda$.

Наши анализы основаны на рассмотрении треугольной диаграммы, в которой пропагатор кварка и кварк-пионная вершина определены непертурбативно. В этом отношении наш подход близок к более ранней работе [72]. Однако в [72] при вычислении треугольной диаграммы были использованы приближения, которые упростили динамику процесса. Оказывается, что эти приближения оправданны в кинематической области больших $|\omega|$. В результате полученное в [72] выражение для асимптотического коэффициента не зависит от внутренней нелокальной структуры пиона, что противоречит результатам ПС КХД и нашим результатам.

В заключение этого раздела в ковариантной нелокальной модели, описывающей кварк-пионную динамику, получен $\pi\gamma^*\gamma^*$ -переходный формфактор при достаточно больших виртуальностях, где пертурбативная КХД-эволюция еще не достигла асимптотического режима. Из модельных вычислений можно найти абсолютную нормировку асимптотического Q^{-2} -члена. Асимптотический нормировочный коэффициент $J(\omega)$, данный в (83), зависит от отношения конституентной кварковой массы на некотором мягком масштабе к характерному размеру КХД-вакуумных флюктуаций, а также от кинематики процесса. Этот результат не подтверждает положения об универсальности асимптотического коэффициента, сделанного в [69, 71, 72]. Если рассмотреть зависимость асимптотического коэффициента от внутренней динамики,

то данные CLEO свидетельствуют о малом значении параметра разреженности, что подтверждает гипотезу о малой плотности инстанционной жидкости в вакууме [7]. Из сравнения кинематической зависимости асимптотического коэффициента переходного формфактора пиона, данной в рКХД и непертурбативной модели, получено новое соотношение (86) между пионной амплитудой распределения и динамической кварк-пионной вершинной функцией. В частном случае симметричной кинематики наш результат согласуется с тем, который получен с помощью ОР [54]. Настоящие результаты также находятся в согласии с заключениями, сделанными в [57, 58, 68] в ПС КХД.

Партоные распределения валентных夸克ов в пионе. Адронные структурные функции играют важную роль в КХД при описании инклузивных процессов. Они выражаются через партоные распределения夸克ов и глюонов по доле x импульса p начального адрона, переносимой активным партоном. Хотя эволюция партоных распределений при достаточно большой виртуальности Q^2 контролируется зависимостью перенормировки масштаба операторов夸克ов и глюонов твиста-2 по КХД-теории возмущений, вывод из первых принципов самих партоных распределений при некотором начальном Q^2 отсутствует. Следовательно, центральным пунктом, неизвестным в КХД, являются партоные распределения при относительно низких виртуальностях, которые должны определяться по непертурбативной схеме.

Недавно возник некоторый прогресс в вычислении моментов партоных распределений для пиона и ρ -мезона [73] в рКХД, где используются фермионы Вильсона в приближении заморозки, когда пренебрегают внутренними夸克овыми петлями. Эти рКХД-предсказания для моментов пионной функции распределения подтверждают результаты предыдущего анализа [74], а также находятся в качественном согласии с распределениями, извлеченными феноменологически [75, 76] из эксперимента [77]. Однако вычисленные моменты имеют относительно низкую точность, и, кроме того, доступны для вычислений только нескольких первых моментов, хотя для реконструкции x -зависимых распределений нужно, в принципе, знать все моменты. Более того, вычисления партоных распределений в пионе с помощью КХД ПС достаточно успешны [78] лишь в ограниченной области скейлинговой переменной x . Функция распределения夸克ов в пионе в наименшем фоковском состоянии кварка-антикварка недавно [79] получена в подходе жесткого рассеяния, когда включены эффекты поперечного импульса и судаковских поправок. Такая функция насыщает феноменологическое夸克овое распределение при больших x .

Кварковая функция распределения в пионе была рассмотрена в [80] в рамках НИЛ-модели [17]. Эти и подобные исследования основаны на предположении, что вычисление матричных элементов твиста-2 в эффективных подходах, основанных на КХД, дает распределения на низком энергетическом масштабе $\mu_0 \lesssim 1$ ГэВ, где использование такой эффективной теории

имеет смысл. Полученные распределения затем экстраполируются к более высоким экспериментально достижимым масштабам импульсов с помощью пертурбативной КХД так, что может быть проведено сравнение с экспериментальными данными. Однако проблема НИЛ-модели состоит в том, что она неперенормируема, и, таким образом, чтобы избежать этого дефекта, вводятся различные *ad hoc* предположения об импульсном обрезании.

Первая попытка вычисления пионной структурной функции в инстантонной модели была сделана в [81]. Сравнительно недавно важный прогресс был достигнут в [63, 82] при вычислении кварковых распределений в нуклоне в инстантонном подходе. В настоящем разделе, основываясь на кварк-пионной динамике в модели инстантонной жидкости, мы вычислим распределение валентных кварков в пионе в лидирующем твисте в низкой точке нормировки порядка обратного среднего размера инстантона ρ_c . Найдем кварковое распределение в пионе и все его моменты для общей формы эффективной кварк-пионной вершинной функции. Справедливость партонных правил сумм для изоспина и полного импульса обеспечивается с помощью условия связности пиона [28] и калибровочной инвариантностью подхода. Так как эффективная инстантонная модель справедлива для значений относительных импульсов кварка до $p \sim \rho_c^{-1} \approx 0,5 - 1$ ГэВ, партонные распределения, вычисленные здесь, определены при этой (низкой) точке нормировки $\mu_0 \sim \rho_c^{-1}$. Полученные результаты затем КХД проэволюционированы к более высоким импульсам передачи, и найдено разумное согласие с функциями распределения пиона, извлеченными из феноменологического анализа экспериментальных данных.

Моменты функции распределения кварков в пионе в ковариантной нелокальной модели. Стандартный КХД-анализ основан на ОР, которое связывает моменты партонных распределений при данном масштабе с адронными матричными элементами локальных операторов твиста-2. Этот формализм применяется для того, чтобы разделить жесткую и мягкую части амплитуды рассеяния вперед. В ОР жесткая часть вычисляется по теории возмущений в форме коэффициентов Вильсона. Мягкая часть представляется набором матричных элементов от локальных операторов, классифицированных по твисту. Эти матричные элементы аккумулируют информацию о непертурбативной структуре адронного состояния.

Калибровочно-инвариантный несинглетный локальный оператор твиста-2 с ароматом кварка j определен следующим образом:

$$O_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}^j = i^N \bar{q}_j \{ \gamma_{\mu_1} D_{\mu_2} \dots D_{\mu_N} \}_{S q_j}, \quad (91)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a\tau_a$ — ковариантная производная * и символ $\{\dots\}_S$ означает бесследовую симметричную часть тензора. Матричные элементы A_N^j локальных операторов O_N^j в обкладках пионного состояния $|\pi(p)\rangle$ с импульсом p

$$A_N^j(\mu^2) = \frac{i^N}{2} \langle \pi(p) | \bar{q}_j \hat{n} (n_\nu D^\nu)^{N-1} q_j | \pi(p) \rangle|_\mu, \quad (92)$$

где μ — точка нормировки, n_ν — светоподобный вектор с $n^2 = 0$ и $(np) = 1$, введенный для отбора симметричной бесследовой части оператора O_N^j (91). Запишем распределение夸克ов для j -го аромата через моменты

$$A_N^j(\mu^2) = \int_0^1 dx x^{N-1} q_j(x, \mu^2). \quad (93)$$

Зависимость момента A_N^j от точки нормировки μ^2 известна точно из решения уравнения эволюции в пертурбативной КХД, в то время как непертурбативная динамическая модель задает начальные данные для этой эволюции. Вычислим начальные значения моментов на масштабе $\mu_0^2 \propto 1/\rho_c^2$ в инстанционной модели.

Вклад наинизшего фоковского夸克-анти夸ркового валентного состояния в N -й момент $A_N^{q\bar{q}}(\mu_0^2)$ в инстанционную модель задается выражением (см. графическое представление на рис. 8):

$$\begin{aligned} A_N^{q\bar{q}}(\mu_0^2) p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots p_{\mu_N} &= 2N_c g_{\pi q\bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \left\{ \tilde{F}^2(k, k+p; \mu_0^2) \text{tr}[\gamma_5 S(k+p) \{ \gamma_{\mu_1}(k+p)_{\mu_2} \dots (k+p)_{\mu_N} \}_S S(k+p) \gamma_5 S(k)] - \right. \\ &\left. - 2 \frac{\partial \tilde{F}^2(k, k+p; \mu_0^2)}{\partial (k+p)^2} \text{tr}[\gamma_5 S(k+p) \{ (k+p)_{\mu_1} (k+p)_{\mu_2} \dots (k+p)_{\mu_N} \}_S \gamma_5 S(k)] \right\}. \end{aligned} \quad (94)$$

Вообще говоря, моменты определены в пространстве Минковского и могут быть разложены по вектору p_μ и тензору $g_{\mu\nu}$. Члены, пропорциональные $g_{\mu\nu}$, приводят к вкладам более высокого твиста, которые подавлены лишиней степенью $1/Q^2$ и должны быть отброшены. Для того чтобы выделить вклад лидирующего твиста, нужно свернуть матричные элементы со светоподобным вектором n_μ . Остающиеся петлевые интегралы нужно аналитически продолжить в пространство Евклида [11], где вершины, индуцированные инстанциями, хорошо определены.

*Как и в работе [63], мы пренебрегаем глюонными операторами в ковариантных производных, что вызвано малостью параметра разреженности η .

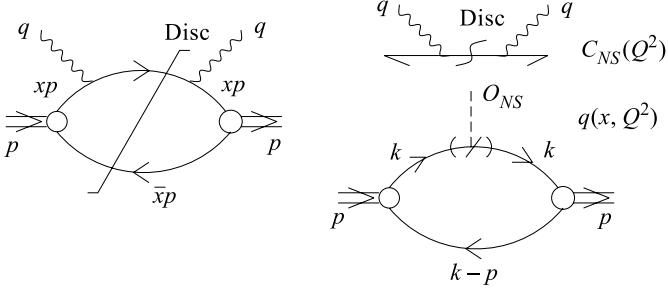


Рис. 8. Графическое представление операторного разложения. Левая часть диаграммы представляет скачок (Disc) амплитуды рассеяния вперед. В рамках операторного разложения скачок представляется как конволюция коэффициентной функции Вильсона $C_{NS}(Q^2)$ жесткого подпроцесса (верхний блок правой диаграммы) и мягкой партонной функции распределения $q(x, Q^2)$ (нижний блок). Конституентный кварк и пион обозначены непрерывной и двойной линиями соответственно. Волнистые линии обозначают фотоны. O_{NS} — локальный оператор, штрих на кварковой линии соответствует $\delta(x - (kn))$

Чтобы получить уравнение (94), необходимо рассмотреть амплитуду комптоновского рассеяния в глубоконеупругой кинематике в лидирующем порядке пертурбативной КХД и взять мнимую часть от нее. В комптоновском процессе налетающий и рассеянный виртуальные фотоны имеют импульсы q , $q^2 \equiv -Q^2$, а начальный и конечный пионы имеют импульсы p , $p^2 \approx 0$. Предел Бьеркена соответствует большим Q^2 при фиксированном $x = Q^2/2(pq)$. Калибровочно-инвариантный набор диаграмм, индуцированный с помощью нелокального действия (43) и (45), включает, в дополнение к однопетлевой «box»-диаграмме, подпроцессы $\pi\gamma \rightarrow \pi \rightarrow \pi\gamma$, $\pi\gamma\gamma \rightarrow \pi$. Можно показать (см. [83]), что только второй тип процесса выживает в пределе Бьеркена для соответствующих амплитуд и приводит к поправке (член с производной от вершины) в (94).

Член с производной, который возникает из P_{exp} -фактора, позволяет удовлетворить партонные правила сумм, соответствующие сохранению изоспина и импульса. Действительно, из (94) для первых двух моментов получим

$$\begin{aligned} A_1^{q\bar{q}}(\mu_0^2) &\equiv \int_0^1 dx q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2) = g_{\pi q\bar{q}}^2 \left. \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}, \\ A_2^{q\bar{q}}(\mu_0^2) &\equiv \int_0^1 dx x q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2) = \frac{g_{\pi q\bar{q}}^2}{2} \left. \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}. \end{aligned} \quad (95)$$

Из этого выражения с учетом условия связности (47) устанавливается справедливость (нормировочного) изоспинового и импульсного правил сумм для

валентных кварковых функций распределения

$$A_1^{q\bar{q}}(\mu_0^2) = 1 \quad \text{и} \quad A_2^{q\bar{q}}(\mu_0^2) + \bar{A}_2^{q\bar{q}}(\mu_0^2) = 1, \quad (96)$$

где \bar{A}_2 — вклад валентных антикварков в пионный импульс. Тот факт, что на низком масштабе импульса μ_0 весь импульс в пионе переносится валентными кварками, является следствием того, что включены только валентные кварк-антикварковые промежуточные состояния, при этом пренебрегается всеми внутренними кварк-глюонными морскими состояниями (так называемое приближение заморозки).

Таким образом, в приближении заморозки динамическая информация, содержащаяся в первых двух моментах, полностью задается симметриями и кинематикой и, как результат, является модельно-независимой. Нетривиальная динамика содержится в моментах с $N > 2$. Общая структура моментов партонных распределений может быть представлена в форме

$$A_N^{SF}(\mu_0^2) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \frac{1}{2i+1} \binom{N-1}{2i} J_i^{SF}(\mu_0^2), \quad N = 1, 2, \dots \quad (97)$$

с коэффициентами

$$J_i^{SF}(\mu_0^2) = \frac{1}{I_{g\pi}(0)} \left\{ \int_0^\infty dk \frac{k^{4i+3} \tilde{Q}(k)^2}{(k^2 + m_q^2)^{2i+3}} [2k^2 + (2i+3)m_q^2] + \dots \right\}, \quad (98)$$

где члены с производными от вершины, подобные тем, которые появляются в (41) для $I_{g\pi}(0)$, обозначены точками. В (97) квадратные скобки [...] обозначают целую часть числа, а $\binom{a}{b}$ являются биномиальными коэффициентами.

Как и в предыдущем разделе, показательно рассмотреть два экстремальных случая, зависящих от физических предположений. Если бы КХД-вакуум был очень плотной средой, $\eta \gg 1$, то $J_i^{SF} = 0$ для всех i , кроме $i = 0$. Из этого следует, что моменты $A_N = 1/2^{(N-1)}$ для всех n , а распределение кварков имеет форму дельта-функции: $q(x) = \delta(x - 1/2)$. Этот экстремальный случай соответствует пределу тяжелого кварка, а коэффициенты J_i^{SF} представляют последовательные поправки по обратным степеням массы тяжелого кварка: $\sim (\langle k^2 \rangle / m_q^2)^i$. В противоположном экстремальном случае очень разреженного вакуума $\eta \ll 1$ получим $J_i^{SF} = 1$ для всех i и $A_N = 1/N$ для моментов. Этот экстремальный случай соответствует независимой от импульса вершине и приводит к плоскому распределению кварков $q(x) = 1$. Более того, первый член в (98) доминирует по отношению к членам, указанным с помощью точек, так как последние являются малыми порядка

$O(\rho_c m_q)$. Реалистическая ситуация оказывается где-то между этими двумя экстремалями. Заметим, что роль массы пиона пренебрежимо мала, но соотношение эффективной массы кварка и наклона нелокальности в $\hat{Q}(k)$ имеет важный эффект.

Функция распределения кварков в пионе в нелокальной ковариантной модели и ее КХД-эволюция. Обратимся теперь к распределению кварков. Это распределение для пиона с 4-импульсом p задается с помощью выражения (см. графическое представление на рис. 8):

$$\begin{aligned} q_{q\bar{q}}(x; \mu_0^2) p^\mu = & 2N_c g_{\pi q\bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta[x - 1 - (k \cdot n)] \times \\ & \times \text{tr} \left\{ \gamma_5 S(k + p) \left[\tilde{F}^2(k, k + p; \mu_0^2) \gamma_\mu S(k + p) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \left(\frac{\partial \tilde{F}^2(k, k + p; \mu_0^2)}{\partial (k + p)^2} \right) (k + p)_\mu \right] \gamma_5 S(k) \right\}, \end{aligned} \quad (99)$$

где $q_{q\bar{q}}(x) = \bar{u}(x)_{\text{val}} = d(x)_{\text{val}}$ для π^- . Индекс $q\bar{q}$ означает, что учтена только наимизшая кварк-антикварковая компонента пионной волновой функции. Выражение (99) для распределения кварков $\delta[x - 1 - (k \cdot n)]$ определено так же, как в [84, 85]. Функция, появляющаяся в (99), представляет собой эффективную вершину, связанную с составными операторами O_N^j (91). Моменты функции распределения (94) воспроизводятся с помощью преобразования Меллина от (99). Светоподобный вектор n выделяет в (94) и (99) симметричные бесследовые части тензоров. Легко показать, что первые моменты $q_{q\bar{q}}(x)$ воспроизводят партонные правила сумм (95).

Для того чтобы вычислить интеграл по 4-импульсу в (99), используем α -представление для пропагаторов*

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha \exp[-\alpha(k^2 + m^2)], \quad (100)$$

а для вершинной δ -функции ее фурье-представление

$$\delta[x - (k \cdot n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[i\alpha(x - k \cdot n)]. \quad (101)$$

*Детали см. в работе [85].

Тогда прямое вычисление из (99) приводит к результату для распределения夸克ов, которое в безмассовом случае ($m_\pi^2 = -p^2 = 0$) сводится к

$$\begin{aligned} q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2) &= \frac{N_c g_{\pi q\bar{q}}^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\nu_1 d\nu_2 F(\nu_1) F(\nu_2) \exp\left(\frac{m_q^2}{\nu_1} + \frac{m_{\bar{q}}^2}{\nu_2}\right) \times \\ &\times \left\{ \left[E_1\left(\frac{m_q^2}{x\nu_1}\right) + \bar{x} \exp\left(-\frac{m_q^2}{x\nu_1}\right) \right] \theta(\bar{x}\nu_2 \geq x\nu_1) + (x \leftrightarrow \bar{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (102)$$

В этом уравнении $\bar{x} = 1 - x$, $E_1(z)$ — интегральная экспонента, а $F(\nu)$ — корреляционная функция, связанная с вершинной функцией $\tilde{Q}(k)$ с помощью преобразования Лапласа. Вершина $\tilde{Q}(p)$ в существенной области импульсов p ($0 \leq p \leq 4/\rho_c$) может быть аппроксимирована функцией

$$\tilde{Q}(p) = 4,5 \exp(-1,9\rho_c p) - 3,5 \exp(-3,6\rho_c p), \quad (103)$$

которая после применения преобразования Лапласа принимает вид

$$F(\nu) = \frac{\rho_c}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu}} [8,55 \exp(-0,9\rho_c^2 \nu) - 12,6 \exp(-3,24\rho_c^2 \nu)]. \quad (104)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (97) для моментов и (102) для распределения валентных夸克ов в пионе являются универсальными и справедливыми для любой формы функций $\tilde{Q}(k)$ и $F(\nu)$, которые, в свою очередь, определяются с помощью конкретной модели кварк-пионной динамики.

Распределение夸克ов $q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2)$ и импульсное распределение $xq_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2)$ показаны на рис. 9. Следует заметить, что форма распределения является достаточно стабильной по отношению к вариациям параметров инстанционной модели, если они фиксированы так, чтобы воспроизвести низкоэнергетические свойства пиона. Кроме того, необходимо упомянуть о том, что эффекты, которыми мы пренебрегли (импульсная зависимость массы кварка в знаменателях и глюонное поле в ковариантных производных), имеют порядок малости $O(\eta)$ и не меняют качественно результатов. Основной эффект, рассмотренный нами при вычислении распределения夸克ов в пионе, связан с нелокальностью кварк-пионной вершины, индуцированной инстанционным взаимодействием. Роль этого эффекта состоит в том, что результат партонной модели в лидирующем твисте $q(x) = 1$ модифицируется, приводя к гладкому распределению с нулями на краях кинематической области. Напомним, что мы вычисляем только распределение лидирующего твиста в низкой точке нормировки $\mu_0 \sim \rho_c^{-1}$, а не полные структурные функции, которые содержат также поправки более высоких твистов. Последние могут быть большими при

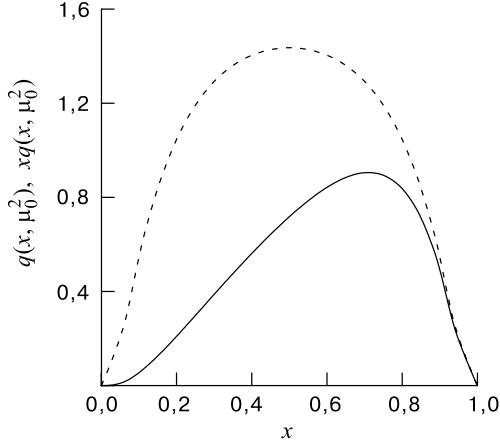


Рис. 9. Функция распределения валентных кварков $q(x; \mu_0^2)$ (пунктирная линия) и импульсное распределение кварков $xq(x; \mu_0^2)$ (сплошная линия) в пионе как функция доли продольного импульса x в низкой точке нормировки $\mu_0^2 = 0,3 \text{ ГэВ}^2$ при $\rho_c m_q = 0,39$

низких q^2 , но быстро (степенным образом) вымирают с ростом q^2 . Следует также заметить, что наши результаты сильно отличаются от результатов, полученных ранее в НИЛ-модели [80], где внутренняя динамика пиона сильно упрощена, и в результате найденные распределения согласованы со строгим киральным пределом $q(x, \mu_0^2) \approx 1$.

Вычисленные распределения используются как начальные условия для пертурбативной эволюции к более высоким значениям Q^2 , где, как ожидается, степенные поправки подавлены, и можно провести сравнение с доступными экспериментальными данными. Фактически мы сравниваем наши теоретические предсказания с феноменологическим анализом, выполненным в [75], данных экспериментов по процессам Дрелла — Яна и по быстрым фотонам, выполненных группами NA10 (CERN) и E615 (FNAL) [77]. Следует также отметить некоторые пределы применимости указанного феноменологического анализа данных. Так, реальные данные охватывают только кинематическую область по $x \geq 0,2$, и, кроме того, в анализе была использована экстраполяция протонных структурных функций при $x \geq 0,75$ в качестве входной информации. Далее, в таком феноменологическом анализе данных не принимаются во внимание неопределенности, индуцированные теоретическими предположениями, лежащими в основе анализа (например, K -фактор).

Форма проэволюционированного распределения $q_{q\bar{q}}(x, Q_0^2)$ на масштабе импульса $Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$ реконструируется по его моментам, проэволюционированным к этому масштабу в лидирующем порядке (ЛП) и следующем за

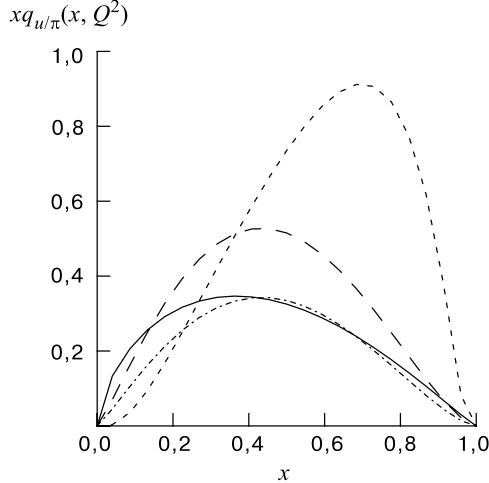


Рис. 10. Импульсное распределение валентных夸克ов в пионе $xq(x; Q_0^2)$ (штриховая линия) как функция доли продольного импульса x , проэволюционированная к $Q_0^2 = 4$ ГэВ 2 (ЛП-приближение), при $\rho_c m_q = 0,39$. Сплошная линия означает феноменологическую кривую [72] на том же масштабе Q_0^2 , извлеченную из данных. Также изображены распределение в низкой точке нормировки $\mu_0^2 = 0,3$ ГэВ 2 (пунктирная линия); распределение, умноженное на фактор 0,65, соответствующее вероятности найти низшее фоковское состояние в волновой функции пиона (штрихпунктирная)

лидирующем порядке (СЛП) пертурбативной КХД в \overline{MS} -схеме, с использованием первых шести полиномов Якоби. Для этой цели мы используем хорошо известные выражения [86] пертурбативных вычислений для коэффициентной функции $C_i^N = C_{0i}^N + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} C_{1i}^N$ и аномальной размерности $\gamma_{(n)}$, вычисленные в ЛП и СЛП. Таким образом, конечный результат для моментов, полученный с помощью процедуры факторизации, имеет вид

$$A_N(Q^2) = \sum_i C_i^N(Q^2, \mu^2) O_i^N(\mu^2) = \int_0^1 dx x^N q(x, Q^2). \quad (105)$$

Для анализа эволюции мы выбираем низкий масштаб импульса $\mu_0^2 = (0,3 \pm 0,03)$ ГэВ 2 и КХД-константу $\Lambda^{(3)} = 0,3$ ГэВ. Результирующее распределение $q_{q\bar{q}}(x, Q_0^2)$ показано на рис. 10 наряду с феноменологическими кривыми, полученными из данных [75].

Значения первых моментов пионного распределения夸克ов при $Q_0^2 = 4$ ГэВ 2 , вычисленных в ЛП и СЛП, показаны в табл.2. Эти величины следует сравнить с теми, которые получаются из феноменологического

Таблица 2. Значения первых моментов при $Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$

Моменты	ЛП	СЛП	рКХД [73]	Эксп. фит [75]	Эксп. фит [76]
$A_2(Q_0^2)$	$0,318 \pm 0,01$	$0,275 \pm 0,017$	$0,279 \pm 0,083$	$0,230 \pm 0,01$	$0,193 \pm 0,01$
$A_3(Q_0^2)$	$0,147 \pm 0,008$	$0,120 \pm 0,012$	$0,107 \pm 0,035$	$0,101 \pm 0,005$	$0,083 \pm 0,005$
$A_4(Q_0^2)$	$0,081 \pm 0,006$	$0,064 \pm 0,008$	$0,048 \pm 0,020$	$0,057 \pm 0,005$	$0,046 \pm 0,005$

анализа [75] и из рКХД-вычислений [73]. В табл. 2 также включены моменты распределения夸克ов в пионе, полученные из параметризации [76].

Обсудим неопределенности КХД-эволюции, начинающейся с низкого масштаба μ_0 . Как мы видим из табл. 2, различие результатов ЛП и СЛП находится в пределах 30%. Оказывается, что использование большего начального масштаба эволюции, скажем, $\mu_0^2 \geq 0,3 \text{ ГэВ}^2$, приводит к достаточно хорошей сходимости с отклонениями меньшими, чем 10%, в то время как в противоположном случае, т.е. для масштабов меньших, чем $0,1 \text{ ГэВ}^2$, отклонения растут, и пертурбативная эволюция теряет всякий смысл. Такое поведение также было отмечено в анализе в НИЛ-модели [80]. Пределы ошибок, приведенные в табл. 2 для модельных вычислений, задаются принятой неопределенностью в выборе начального масштаба эволюции μ_0 .

Сравнение показывает, что наши вычисления, в частности в СЛП, согласованы с феноменологическим анализом [75] и достаточно близки рКХД-результатам. Оба теоретических подхода (рКХД и инстанционная модель) предсказывают величины моментов систематически большие, чем феноменологические. Одна из причин для этого разногласия может быть связана с приближением заморозки, которое не принимает во внимание вкладов морских夸克-глюонных и более высоких фоковых состояний на начальном масштабе эволюции, приписывая весь пионный импульс валентным夸克-анти夸克овым парам. Действительно, происхождение момента A_2 на начальном масштабе (в приближении заморозки) и его последующая эволюция являются чисто кинематическими и не зависят от деталей модели. В принципе, можно было бы зафиксировать долю валентного импульса, получаемую в нашем вычислении, по доле, определенной в [75], с помощью сдвига начальной величины μ_0^2 вниз к $0,01 \text{ ГэВ}^2$ (см., например, [80]). Однако начало пертурбативной эволюции со столь низкого масштаба является формально неправильным и технически сводится к достаточно нестабильной процедуре.

По нашему мнению, более реалистично ожидать, что, включив в наш анализ вклады夸克-глюонного моря и более высоких фоковых состояний, можно значительно улучшить согласие между теоретическим предсказанием и феноменологическим анализом. Вклад моря уменьшает долю импульса, пе-

реносимую валентными кварками, задаваемую моментом A_2 . Более высокие фоковские состояния дают вклад в оба момента — A_1 и A_2 . Это означает, что полная нормировка функции распределения и доля импульса, переносимая валентной кварк-антикварковой компонентой волновой функции, должна быть уменьшена на фактор, который представляет вероятность отсутствия таких конфигураций в пионной волновой функции. На рис. 10 мы также приводим результат нашего ЛП-вычисления, умноженный на фактор 0,65, соответствующий грубой оценке вероятности 35% для более высоких фоковских валентных состояний (пренебрегая вкладом моря). Эта оценка найдена с помощью неравенства

$$q(x, Q_0^2) \geq q_{q\bar{q}}(x, Q_0^2) \quad (106)$$

и насыщения его при $x \rightarrow 1$. Это неравенство, рассмотренное в [79] (и ссылки там), справедливо для любого парциального вклада в функцию распределения. При таком предположении, как можно увидеть из рис. 10, вклад от наименших кварк-антикварковых валентных конфигураций в функцию распределения насыщает найденное феноменологически распределение в области $x \geq 0,4$. Различие в распределениях при более низких значениях x может быть приписано вкладу более высоких фоковских состояний, которые начинают доминировать при $x \rightarrow 0$. Такая картина находится также в согласии с заключениями, сделанными в [79]. В дополнение к другим источникам, которые могут изменить нормировку нашего результата, отметим эффект не-пертурбативной эволюции [87] из начального масштаба μ_0^2 к $Q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели теоретические предсказания для амплитуды распределения и функции распределения валентных кварков в пионе (102) и ее моментов (97). Вычисления основаны на инстанционной модели КХД-вакуума, которая может претендовать на реалистическую трактовку непертурбативной динамики. В таком подходе существует надежда выразить наблюдаемые свойства адронов через фундаментальные характеристики вакуумного состояния. Мы нашли, что инстанционная модель хорошо описывает величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов наименшей размерности и низкоэнергетических наблюдаемых пиона. Для того чтобы получить эти результаты, мы использовали калибровочно-инвариантную форму для динамической массы кварка и кварк-пионной вершины с упорядоченным по пути P -эксп-фактором Швингера. Такие факторы входят в определение нелокальных величин (подобно нелокальному кварковому конденсату), которые эффективно учитывают радиационные эффекты глюонного и фотонного поля, когда два кварка

удаляются друг от друга. В результате пионные функции распределения夸рков выражены через эффективный размер инстантона ρ_c и параметр массы夸рка m_q .

Пионная амплитуда распределения и функция распределения夸рков извлечены в низкой точке нормировки, где эффективный инстантонный подход оправдан. Показано, что справедливость партонных ПС для изоспина и полного импульса есть следствие условия связности и непосредственного применения калибровочной инвариантности. Для вывода этих результатов применяется техника, которая может рассматриваться как независимый подход, наряду с решеточными вычислениями и феноменологическим фитом экспериментальных данных. Используя вычисленную функцию распределения в качестве начальных данных, с помощью стандартной пертурбативной эволюции мы получили распределение夸рков в пионе при более высоких импульсах передачи, достижимых в эксперименте. Найдено разумное согласие с данными. Фактические вычисления выполнены в приближении заморозки, когда эффектами внутреннего夸рк-глюонного моря можно пренебречь. Ожидается, что эффекты внутреннего夸рк-глюонного моря пионной волновой функции и непертурбативная эволюция при промежуточной энергии дадут лучшее согласие между теоретическими предсказаниями и феноменологическим анализом.

Авторы благодарят С.Б. Герасимова, Н.И. Кочелева, С.В. Михайлова, М.К. Волкова за плодотворное обсуждение результатов. Работа А.Е.Д. частично поддержана грантом С.-Петербургского центра фундаментальных исследований № 97-0-6.2-28. Л.Т. благодарит Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) и Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) за частичную поддержку.

Приложение A

Калибровочно-инвариантная скалярная часть пропагатора夸рка (18) имеет следующие разложения на малых и больших евклидовских расстояниях:

$$Q(x^2) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4} \frac{x^2}{\rho_c^2} + \dots & \text{при } x^2 \rightarrow 0; \\ 2 \frac{\rho_c^2}{x^2} + \dots & \text{при } x^2 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Скалярный пропагатор夸рка в конфигурационном и импульсном представлениях изображен на рис. 1 и 2 соответственно наряду с пропагаторами, полученными при пренебрежении P_{exp} -фактором в (14) с помощью выражений для夸рковой нулевой моды в сингулярной и регулярной калибровках.

В регулярной калибровке имеем аналитическое выражение

$$Q_{\text{reg}}(x^2) = \frac{2}{y^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right) \Big|_{y=\frac{x}{2\rho_c}} . \quad (107)$$

В импульсном представлении нормированный пропагатор кварка (без P_{exp} -фактора) пропорционален квадрату кварковой нулевой моды, соответственно, в регулярной и сингулярной калибровках:

$$\tilde{Q}_{\text{reg}}(p) = \exp(-2\rho_c p), \quad (108)$$

$$\tilde{Q}_{\text{sing}}(p) = \left\{ z \frac{d}{dz} [I_1(z)K_1(z) - I_0(z)K_0(z)] \Big|_{z=\frac{\rho_c p}{2}} \right\}^2 . \quad (109)$$

Из рис. 2 видно, что в импульсном представлении форма пропагатора очень чувствительна к P_{exp} -фактору*.

Естественное калибровочно-инвариантное определение для средней виртуальности кварков (54) (а также в (53) для кваркового конденсата) с $M_q(k)$, определенной в (13) и (10), справедливо, если решение в (18) записано калибровочно-инвариантным образом. Если заменить выражением в сингулярной калибровке (пренебрегая P_{exp} -фактором) в (54), то получим $\lambda_q^2 = 9/(2\rho_c^2)$ с коэффициентом, далеким от правильного. Причиной для такого несогласия при вычислении *нелокальной* величины является то, что ковариантность производной в матричном элементе (54) утеряна. Это приводит к тому, что для восстановления правильного результата необходимо учесть добавочные члены в (54), которые учитывали бы эффекты глюонного поля. Однако с использованием настоящего инвариантного подхода (14) такие эффекты автоматически учитываются с помощью P_{exp} -фактора.

Приложение Б

Для полноты приведем явный вывод полной аксиально-векторной вершины и продемонстрируем выполнение аксиального УТГ. После учета пересечения конституентного кварка в канале с пионными квантовыми числами найдем полную вершину:

$${}^A\Gamma_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, p) = {}^A\Gamma^{\mu a}(k, p) + {}^A\Gamma_{\text{rescat}}^{\mu a}(k, p), \quad (110)$$

*Чтобы избежать противоречия с калибровочной инвариантностью, нельзя пользоваться трактовкой пропагатора кварка в p -представлении в факторизованной форме, как это было сделано в работе [18].

где ${}^A\Gamma^{\mu a}(k, p)$ является затравочной вершиной, заданной в (51), и

$${}^A\Gamma_{\text{rescat}}^{\mu a}(k, p) = \frac{p^\mu p_\nu}{p^2} J_{PA}^\nu(p) \frac{G_I}{1 - G_I \Pi_{PP}(p)} \frac{1}{g_{\pi q}^2} \Gamma_{\pi q}^a(k, p) \quad (111)$$

с $\Gamma_{\pi q}^a(k, p)$, $\Pi_{PP}(p)$, определенными с помощью (39), (33) соответственно, и

$$\begin{aligned} J_{PA}^\mu(p) &= i2N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k) f(k') \times \\ &\times \text{tr} \left\{ {}^A\Gamma^{\mu a}(k, p) [\hat{k} + M(k)]^{-1} i\gamma_5 [\hat{k}' + M(k')]^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (112)$$

с $k' = k + p$. Благодаря уравнению щели (9) вершина (111) содержит полюс при $p^2 = m_\pi^2$. Сравнив вычеты в полюсе в (52) и (66) при $z = 0$, получим выражение для константы распада пиона. Интеграл в (112) сводится к интегралу, определяющему $g_{\pi q}^{-2}$ в (40) на массовой поверхности пиона, и (112) может быть записана как $J_{PA}^\mu(p) = 2i \frac{M_q}{g_{\pi q}} p^\mu$. С другой стороны, этот матричный элемент определяет константу распада $J_{PA}^\mu(p) = 2F_\pi i p^\mu$. Таким образом, константа распада пиона F_π воспроизводится в том виде, как она задана соотношением Голдбергера — Треймана [20] $F_\pi = \sqrt{2}M_q/g_{\pi q}$. Подобным образом, если подставить в интеграл (112) фактор $\exp[-i(p - 2k) \cdot z]$, проецирующий夸克 с импульсом k на светоподобное направление z , получим (67).

Полная вершина может быть переписана в форме, явно удовлетворяющей УТТ. Первые два члена в правой части (51), очевидно, удовлетворяют УТТ. Для того чтобы компенсировать третий член этого уравнения, член перерассечения ${}^A\Gamma_{\text{rescat}}^{\mu a}(k, p)$ (с помощью (51)) записываем как

$$\begin{aligned} &-i \frac{p^\mu}{p^2} \frac{G_I N_c N_f}{1 - G_I \Pi_{PP}(p)} \tilde{f}(k') \tilde{f}(k) \times \\ &\times \left[G_I \Pi_{PP}(p) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{M(l^2)}{l^2 - M^2(l^2)} \tilde{f}(l) [\tilde{f}(l + p) + \tilde{f}(l - p)] - \right. \\ &\left. - \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}\{[\hat{p} - M(l^2) - M(l'^2)][\hat{l}' + M(l'^2)]\gamma_5 [\hat{l} + M(l^2)]\gamma_5\}}{(l'^2 - M^2(l'^2))(l^2 - M^2(l^2))} \tilde{f}(l') \tilde{f}(l) \right], \end{aligned} \quad (113)$$

где $l' = l + p$. С помощью сокращения одного из факторов $l^2 - M^2(l^2)$ в знаменателе интеграла с членом из дираковского следа в числителе и, соответственно, сдвигая переменные интегрирования, первый член внутри квадратных скобок (111) можно переписать в той же форме, как и второй. Это демонстрирует требуемое сокращение, а полная вершина задается с помощью (52).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. — Nucl.Phys., 1979, v.147B, p.385.
2. Gromes D. — Phys. Lett., 1982, v.115B, p.482;
Campostrini M., Di Giacomo A., Olejnik Z. — Phys. Rev., 1986, v.31C, p.577.
3. Mikhailov S.V., Radyushkin A.V. — JETP Lett., 1986, v.43, p.712; Sov. J. Nucl. Phys., 1989, v.49, p.494; Phys. Rev., 1992, v.45D, p.1754.
4. Polyakov A.M. — Phys. Lett., 1975, v.59B, p.82;
Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.A., Tyupkin Yu.S. — Phys. Lett., 1975, v.59B, p.85.
5. Shuryak E.V. — Nucl. Phys., 1982, v.203B, p.93.
6. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu. — Nucl. Phys., 1984, v.245B, p.259.
7. Schäfer T., Shuryak E.V. — Rev. of Mod. Phys., 1998, v.70(2), p.323 (and refs. cited here).
8. Carlitz R.D., Creamer D.B. — Ann. Phys. (NY), 1979, v.118, p.429.
9. Дьяконов Д.И., Петров В.Ю. — ЖЭТФ, 1985, т.89, с.751 [Sov. Phys. JETP, 1985, v.62, p.431];
Dyakonov D.I., Petrov V.Yu. — Nucl. Phys., 1986, v.272B, p.457.
10. Есаибегян С.В., Тамарян С.Н. — Ядерная физика, 1989, т.49, с.815;
Esaibegyan S.V., Tamaryan S.N. — Sov. J. Nucl. Phys., 1989, v.49, p.507.
11. 't Hooft G. — Phys. Rev., 1976, v.14D, p.3432; Phys. Rev. Lett., 1976, v.37, p.8.
12. Callan C.G., Dashen R., Gross D.G. — Phys. Rev., 1978, v.17D, p.2717.
13. Доронов А.Е., Кочелев Н.И., Зубов Ю.А. — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.1192;
Dorokhov A.E., Kochelev N.I., Zubov Yu.A. — Sov. J.Part. Nucl. Phys., 1992, v.23, p.522.
14. Dorokhov A.E., Esaibegyan S.V., Mikhailov S.V. — Phys. Rev., 1997, v.56D, p.4062;
15. Dorokhov A.E., Esaibegyan S.V., Maximov A.E., Mikhailov S.V. — Eur. Phys. J., 2000, v.13C, p.331.
16. Беляев В.М., Иоффе Б.Л. — ЖЭТФ, 1992, т.83, с.876.
Belyaev V.M., Ioffe B.L. — Sov. Phys. JETP, 1982, v.56, p.493 ;
Овчинников А.А., Пивоваров А.А. — Ядерная физика, 1988, т.48, с.1135.
Ovchinnikov A.A., Pivovarov A.A. — Sov. J. Nucl. Phys., 1988, v.48, p.721.
17. Hatsuda T., Kunihiro T. — Phys. Rep., 1994, v.247, p.221;
Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K — Progr. Part. Nucl. Phys., 1994, v.35, p.1.
18. Hutter M. — München preprint LMU- 95-03 (1995); e-print hep-ph/9502361.
19. Terning J. — Phys. Rev., 1991, v.44D, p.887.
20. Bowler R.D., Birse M.C. — Nucl. Phys., 1995, v.582A, p.655;
Plant R.S., Birse M.C. — Nucl. Phys., 1998, v.628A, p.607.
21. Mandelstam S. — Ann. Phys., 1962, v.19, p.1.
22. Holdom B. — Phys. Rev., 1992, v.45D, p.2543;
Holdom B., Lewis R. — Phys. Rev., 1994, v.51D, p.6318.
23. Bos J.W., Koch J.H., Naus H.W.L. — Phys. Rev., 1991, v.44C, p.485.
24. Dorokhov A.E., Tomio L. — Phys. Rev., 2000, v.62D, p.014016.
25. Musakhanov M. — Eur. Phys. J., 1999, v.9C, p.235.

26. Politzer H.D. — Nucl. Phys., 1976, v.117B, p.397;
Pascual P., de Rafael E. — Z. Phys., 1982, v.12C, p.127.
27. Ivanov M.A., Locher M.P., Lyubovitskij V.E. — Few-Body Syst., 1996, v.21, p.131.
28. Jouvet B. — Nuovo Cim., 1957, v.5, p.1;
Vaughn M.T., Aaron R., Amado R.D. — Phys. Rev., 1961, v.124, p.1258;
Salam A. — Nuovo Cim., 1962, v.25, p.224;
Weinberg S. — Phys. Rev., 1963, v.130, p.776.
29. Kleinert H. — Phys. Lett., 1976, v.62B, p.429;
Kugo T. — Phys. Lett., 1978, v.76B, p.625;
Volkov M.K. — Ann. Phys. (NY), 1984, v.157, p.282; Sov. J. Part. Nucl. Phys., 1986, v.17, p.186.
30. Radyushkin A.V. — Phys. Lett., 1991, v.271B, p.218.
31. Kremer M., Schierholz G. — Phys. Lett., 1987, v.194B, p.283.
32. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. — Nucl. Phys., 1980, v.163B, p.46.
33. Polyakov M.V., Weiss C. — Phys. Lett., 1996, v.387B, p.841.
34. Broadhurst D.J. et al. — Phys. Lett., 1994, v.329B, p.103;
Geshkenbein B.V. — Phys. Atom. Nucl., 1995, v.58, p.1171;
Narison S. — Phys. Lett., 1996, v.387B, p.162.
35. D'Elia M., Di Giacomo A., Meggiolaro E. — Phys. Lett., 1997, v.408B, p.315.
36. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R. — JETP Lett., 1977, v.25, p.510.
37. Radyushkin A.V. — JINR preprint P2-10717, Dubna 1977;
Efremov A.V., Radyushkin A.V. — Math. Phys., 1980, v.42, p.97; Phys. Lett., 1980, v.94B, p.45.
38. Brodsky S.J., Lepage G.P. — Phys. Lett., 1979, v.87B, p.359; Phys. Rev., 1980, v.22D, p.2157.
39. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R. — Phys. Rep., 1984, v.112, p.173; Nucl. Phys., 1982, v.201B, p.492.
40. Isgur N., Llewellyn Smith C.H. — Nucl. Phys., 1989, v.317B, p.526; Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.1080;
Radyushkin A.V. — Nucl. Phys., 1991, v.532A, p.141.
41. CLEO Collaboration (Gronberg J. et al.) — Phys. Rev., 1998, v.57D, p.33.
42. Kroll P., Raulfs M. — Phys. Lett., 1996, v.387B, p.848.
43. Bakulev A.P., Mikhailov S.V. — Z. Phys., 1995, v.68C, p.451.
44. Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L. — Preprint IFT-P.066/99, 1999, Sao Paulo, Preprint JINR E2-99-339, Dubna, 1999.
45. Esaibegyan S.V., Tamarian S.N. — Sov. J. Nucl. Phys., 1990, v.51, p.310.
46. Petrov Y.U., Polyakov M.V., Ruskov R., Weiss C., Goeke K. — Phys. Rev., 1999, v.59D, p.114018.
47. CELLO Collaboration (Behrend H.-J. et al.) — Z. Phys., 1991, v.49C, p.401.
48. Chase M.K. — Nucl. Phys., 1980, v.167B, p.125.
49. Del Aguila F., Chase M.K. — Nucl. Phys., 1981, v.193B, p.517;
Braaten E. — Phys. Rev., 1983, v.28D, p.524;
Kadantseva E.P., Mikhailov S.V., Radyushkin A.V. — Sov. J. Nucl. Phys., 1986, v.44, p.326;
Gosdzinsky P., Kivel N. — Nucl. Phys., 1998, v.521B, p.274.

-
50. **Musatov I.V., Radyushkin A.V.** — Phys. Rev., 1997, v.56D, p.2713 (and refs. cited here).
51. **Hayakawa M., Kinoshita T.** — Phys. Rev., 1998, v.57D, p.465.
52. **Carey R.M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1999, v.82, p.253.
53. **Isgur N., Llewellyn Smith C.H.** — Nucl. Phys., 1989, v.317B, p.526; Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.1080;
Radyushkin A.V. — Nucl. Phys., 1991, v.532A, p.141;
Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. — Phys. Lett., 1982, v.115B, p.410;
Diehl M., Feldmann T., Jacob R., Kroll P. — Eur. Phys. J., 1999, v.8C, p.409.
54. **Novikov V.A. et.al.** — Nucl. Phys., 1984, v.237B, p.525.
55. **Manohar A.** — Phys. Lett., 1990, v.244B, p.101.
56. **Gorsky A.S.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1987, v.46, p.537.
57. **Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1990, v.52, p.697.
58. **Radyushkin A.V., Ruskov R.T.** — Nucl. Phys., 1996, v.481B, p.625; e-print hep-ph/9706518.
59. **Holdom B., Terning J., Verbeek K.** — Phys. Lett., 1989, v.232B, p.351; Phys. Lett., 1989, v.245B, p.612.
60. **Ito H., Buck W.W., Gross F.** — Phys. Rev., 1992, v.45C, p.1918; Phys. Lett., 1992, v.287B, p.23.
61. **Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L.** — Phys. Lett., 2000, v.475B, p.361.
62. **Anikin I. et. al.** — Phys. Atom. Nucl., 1994, v.57, p.1021.
63. **Diakonov D.I. et. al.** — Nucl. Phys., 1996, v.480B, p.341.
64. **Ito H., Buck W.W., Gross F.** — Phys. Rev., 1992, v.43C, p.2483.
65. **Jakob R., Kroll P.** — Phys. Lett., 1993, v.315B, p.463.
66. **Dorokhov A.E.** — Nuovo Cim., 1996, v.109A, p.391.
67. **Li H.-N., Sterman G.** — Nucl. Phys., 1992, v.381B, p.129.
68. **Bakulev A.P., Mikhailov S.V.** — Phys. Lett., 1998, v.436B, p.351.
69. **Kekez D., Klabucar D.** — Phys. Lett., 1999, v.457B, p.359.
70. **Curtis D.C., Pennington M.R.** — Phys. Rev., 1990, v.42D, p.4165.
71. **Klabucar D., Kekez D.** — Fizika B (Zagreb), 1999, v.8, p.303;
Tandy P. — Fizika B (Zagreb), 1999, v.8, p.295;
Roberts C.D. — Fizika B (Zagreb), 1999, v.8, p.285.
72. **Anselm A., Johansen A., Leader E., Lukaszuk L.** — Z. Phys., 1997, v.359A, p.457.
73. **Best C. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.56D, p.2743.
74. **Martinelli G., Sachrajda C.T.** — Nucl. Phys., 1988, v.306B, p.865.
75. **Sutton P.J., Martin A.D., Roberts R.G., Stirling W.J.** — Phys. Rev., 1992, v.45D, p.2349.
76. **Glück M., Reya E., Vogt A.** — Z. Phys., 1992, v.53C, p.651;
Glück M., Reya E., Schienbein I. — Eur. Phys. J., 1999, v.10C, p.313.
77. NA3 Coll., **Badier J. et al.** — Z. Phys., 1983, v.18C, p.28;
NA10 Coll., **Betev B. et al.** — Z. Phys., 1985, v.28C, p.15;
E537 Coll., **Anassontzis E. et al.** — Phys. Rev., 1988, v.38D, p.1377;
E615 Coll., **Bordalo P. et al.** — Phys. Lett., 1987, v.193B, p.368;
WA70 Coll., **Bonesini M. et al.** — Z. Phys., 1988, v.37C, p.535.
78. **Belitsky A.V.** — Phys. Lett., 1996, v.386B, p.359.

79. **Jakob R., Kroll P., Raulfs M.** — J. Phys., 1996, v.22G, p.45.
80. **Davidson R.M., Ruiz Arriola E.** — Phys. Lett., 1995, v.348B, p.163;
Suzuki K. — Phys. Lett., 1996, v.368B, p.1.
81. **Rosenhaus V.B., Ryskin M.G.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1986, v.44, p.829.
82. **Dorokhov A.E., Kochelev N.I.** — Phys. Lett., 1993, v.304B, p.167.
83. **Аникин И.В., Дорохов А.Е., Максимов А.Е., Томио Л.** — Ядерная физика, 2000, т.63, с.489.
84. **Baulieu L., Floratos E.G., Kounnas C.** — Nucl. Phys., 1980, v.166B, p.321.
85. **Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.** — Nucl. Phys., 1985, v.254B, p.89.
86. **Индурайн Ф.** — Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
87. **Genovese M.** — Nuovo Cim., 1996, v.109A, p.177.

539.1.01

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАСШТАБНЫЕ
СООТНОШЕНИЯ
ДЛЯ КОНСТАНТ СВЯЗИ МЕЗОНОВ,
СОДЕРЖАЩИХ ТЯЖЕЛЫЕ КВАРКИ

B.B. Киселев

Государственный научный центр Российской Федерации
Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл.

Обсуждается формулировка и область применения квазилокальных правил сумм для S -волновых уровней тяжелого кваркония, которые позволяют использовать регулярность спектра масс и получать масштабные соотношения для лептонных констант связи, находящиеся в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными для векторных состояний систем чармония и боттомония. Проведено обобщение предложенного метода на тяжелые мезоны с одним тяжелым夸рком, для которых получено масштабное соотношение, согласующееся с эффективной теорией тяжелых夸рков. Сделаны численные оценки параметров КХД в секторе тяжелых夸рков: масс夸рков, констант связи α_s , энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелого夸рка в тяжелом мезоне. Рассмотрены правила сумм для мезонных токов, определяющих константу распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых псевдоскалярных мезонов, где получено масштабное соотношение, связывающее константы распада кваркониев с различным夸рковым составом. Проведено сравнение с экспериментальными данными, указывающими на хорошее согласие с теоретическими оценками. На основе выведенных масштабных соотношений сделаны предсказания свойств тяжелого кваркония ($\bar{b}c$).

The formulation of quasi-local sum rules for the S -wave levels in a heavy quarkonium and the region of their application are discussed. The sum rules allow one to use the regularity in the mass spectrum and to derive scaling relations for the leptonic decay constants, which stand in a good agreement with the current experimental data for the vector states in the systems of charmonium and bottomonium. The generalization of the offered method to heavy mesons with a single heavy quark is performed, so that for the latter systems, the scaling relation, consistent with the Heavy Quark Effective Theory, is derived. Numerical estimates are presented for the QCD parameters in the heavy quark sector: the quark masses, coupling constant α_s , binding energy and average square of heavy quark momentum inside the heavy meson. The sum rules for the meson currents, determining the decay constant of heavy vector quarkonium to the pair of heavy pseudoscalar mesons are considered to get the scaling relation, connecting the decay constants for the quarkonia with the different quark contents. The comparison with the experimental data points to a good agreement of the theoretical estimates. Some properties of the ($\bar{b}c$) quarkonium are predicted on the basis of scaling relations derived.

ВВЕДЕНИЕ

Полная картина прецизионных исследований стандартной модели [1] и поиска эффектов новой физики предполагает прямое измерение трехбозонной электрослабой вершины, поиски хиггсовских частиц [2], супермультиплетов [3] и т.п. на коллайдерах сверхвысоких энергий (LEP200, LHC), а также изучение эффектов нарушения CP -инвариантности и измерение фундаментальных параметров электрослабой теории (прежде всего, в секторе тяжелых кварков).

Длительное время центр тяжести усилий по реализации этой программы, несомненно, будет находиться в области физики тяжелых кварков как на уже работающих коллайдерах LEP и FNAL, так и на планируемых фабриках B -мезонов в SLAC, KEK и на HERA-B.

В физике тяжелых c - и b -кварков высокоточные измерения характеристик электрослабой теории в редких процессах и поиски возможных эффектов, обусловленных расширениями стандартной модели и связанных с виртуальными поправками, которые задаются большой энергетической шкалой, предполагают их надежное и точное выделение в процессах, где доминируют эффекты сильного взаимодействия, связывающего кварки в адроны. Поэтому значительную роль в проведении подобных исследований будет играть точность и надежность теоретических знаний о динамике КХД [4] в секторе тяжелых кварков.

Масса тяжелого кварка m_Q значительно больше масштаба конфайнмента Λ , определяющего непертурбативные эффекты в адронах. Наличие малого параметра Λ/m_Q позволяет развить мощные средства в изучении мезонов с тяжелыми кварками. Так, малая величина константы КХД $\alpha_s \sim 1/\ln(m_Q/\Lambda)$ [5] определяет надежность вычислений жестких процессов с тяжелыми кварками по теории возмущений КХД. Малая энергия связи тяжелого кварка в адроне, а значит, и малая виртуальность, приводит в ведущем приближении к нерелятивистскому движению тяжелого кварка в адроне, что определяет успешное применение нерелятивистских потенциальных моделей [6] к описанию спектров масс как тяжелых кваркониев, так и мезонов с одним тяжелым夸рком, где в последнее время получила интенсивное развитие также эффективная теория тяжелых кварков (HQET [7]), основанная на ковариантном разложении лагранжиана тяжелого кварка в КХД по малому кинематическому параметру, задаваемому малым виртуальным импульсом тяжелого кварка по сравнению с его массой (в ведущем приближении тяжелый кварк рассматривается как статический источник глюонного поля). Прочным теоретическим фундаментом для построения подобных подходов служит операторное разложение Вильсона [8], которое позволяет выделять эффекты пертурбативной динамики КХД с виртуальностями, большими шкалы факторизации μ , в виде соответствующих коэффициентов $C_i(\mu^2)$ перед составными операторами

$O_i(\mu^2)$, матричные элементы которых определяются непертурбативным характером КХД в инфракрасной области, где виртуальности меньше шкалы μ . В правилах сумм * КХД [10] вклады непертурбативных кварк-глюонных конденсатов являются степенными поправками к пертурбативным выражениям для спектральной плотности корреляторов токов в разложении по обратной массе тяжелого кварка.

Наличие двух энергетических масштабов взаимодействия, задающих малый параметр, позволяет в ряде случаев разрабатывать методы получения универсальных масштабных соотношений для физических величин, характерных для процессов с рассматриваемым взаимодействием. Так, малая энергия связи кварков в адроне по сравнению с передачей энергии в процессах глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах позволила выявить эффект скейлинга, определяемого рассеянием на свободных партонах-кварках [11]. В физике мезонов и барионов с одним тяжелым кварком удается определить в ведущем приближении по обратной массе тяжелого кварка универсальные, не зависящие от аромата тяжелого кварка формфакторы в процессах слабых эксклюзивных распадов таких адронов [12]. В этом же приближении статических тяжелых кварков получено масштабное соотношение для лептонных констант тяжелых мезонов с одним тяжелым кварком, которое означает физически, что при заданной точности рассмотрения поле статического источника не зависит от его аромата [13].

Нарушение подобных масштабных соотношений определяется учетом степенных поправок ($1/Q^2$ – в глубоконеупругом рассеянии, $1/m_Q$ – в теории тяжелых кварков), а также учетом логарифмических петлевых поправок в теории возмущений [14]. В этом случае поправки нарушают универсальность масштабных соотношений, так как, к примеру, они явно зависят от аромата тяжелого кварка через его массу.

Масштабное соотношение для лептонной константы мезона с одним тяжелым кварком, а также логарифмическая поправка к нему могут быть получены при рассмотрении матричного элемента тока в эффективной теории тяжелых кварков и сравнении его перенормировки с соответствующими величинами, заданными КХД. Однако подобное рассмотрение не может быть применено к системам с двумя тяжелыми кварками типа тяжелых кваркониев, так как соответствующие выражения определяются относительным движением этих двух кварков, которое явно зависит от их ароматов, то есть от их масс **.

*Правила сумм в адронной физике были сформулированы в [9].

**В операторном разложении для тяжелого кваркония (NRQCD [15]) в качестве малых параметров используют как малые виртуальности ($\Lambda/m_Q \ll 1$, как в HQET), так и малую скорость относительного движения ($v^2 \ll 1$).

В тяжелых кваркониях феноменологически наблюдается как малая энергия связи тяжелых夸рков, выраженная в ограниченном числе уровней в узкой по сравнению с массами состояний энергетической щели ниже порога распада на пару тяжелых мезонов и в надежности применения нерелятивистского рассмотрения, так и явная регулярность спектров масс, определяющая независимость разности энергий уровней от ароматов, а именно от масс c - и b -кварков. Подобная регулярность наиболее явное выражение нашла в рамках потенциальных моделей в виде утверждения о независимости средней кинетической энергии тяжелых кварков от их ароматов и в соответствующих уравнениях для плотности уровней энергии, скажем, S -волновых состояний.

Феноменологические нерелятивистские потенциальные модели тяжелых кваркониев, однако, не могут служить основой для получения масштабных соотношений для лептонных констант, определяемых в ведущем приближении волновой функцией кваркония в начале координат. Несмотря на независимость потенциала статического источника от его аромата, волновые функции тяжелых кваркониев зависят от ароматов кварков и от глобального поведения потенциала вблизи начала координат и на расстоянии $r \gg 1$ фм, которое слабо влияет на спектр масс, так как вероятность нахождения кварков в начале координат (или на больших расстояниях) подавлена (средние расстояния между кварками в тяжелых кваркониях составляют $0,3 - 1,0$ фм), и короткие расстояния дают малый вклад в определение средних значений, например, потенциала, задающих массы уровней. Таким образом, предсказательная сила потенциальных моделей в отношении лептонных констант значительно ослаблена из-за большой модельной зависимости.

Как известно, в правилах сумм КХД при малых значениях номера момента спектральной функции существенны вклады как основного, так и возбужденных резонансных состояний, однако в рамках такого подхода невозможно выделить изолированный вклад каждого отдельного резонанса. При больших же номерах момента правила сумм насыщаются вкладом основного состояния, в то время как вклад возбужденных уровней подавлен и им обычно пренебрегают. Поэтому в рамках правил сумм КХД методически не удается использовать регулярность спектров тяжелых кваркониев. Кроме того, так как вычисления проводятся с оборванным рядом теории возмущений КХД (например, учитываются только поправки от однопетлевого вклада), в методе правил сумм возникает зависимость физической величины от внешнего параметра, определяющего конкретную схему правил сумм. Например, результат зависит от номера n в методе моментов спектральной функции $\Pi(Q^2)$ или от параметра борелевского преобразования $\sigma = 1/M^2$ в формулировке правил сумм с применением преобразования Бореля. Кроме того, параметром является порог s_{th} , отделяющий область узких неперекрывающихся резонансов от области континуума, где широкие перекрывающиеся резонансы приводят к размытию резонансной картины и плавному поведению спектраль-

ной функции $\Pi(Q^2)$. Имеется также зависимость от выбора величины масс кварков. Таким образом, наряду с четким разграничением пертурбативного и непертурбативного вкладов, в правилах сумм КХД приходится мириться с зависимостью результата от внешних параметров, что существенно ослабляет предсказательную силу данного метода.

В конечноэнергетических правилах сумм [16] рассмотрение резонансной области приводит к существенной неопределенности, связанной с выбором интервала интегрирования, включающего в себя дельтообразный вклад резонанса. Исключение подобной неопределенности требует наложения дополнительных условий, так что и в подобном подходе также не удается получать соотношения для констант связи тяжелых кваркониев, следующие из масштабных свойств энергетической плотности уровней.

Таким образом, необходима разработка нового подхода, позволяющего использовать регулярность спектра масс и явные выражения для плотности уровней тяжелого кваркония, нерелятивистское движение кварков в кварконии, подавленность степенных непертурбативных поправок по обратной массе тяжелых кварков и возможность определять вклады отдельных резонансов для вывода универсальных масштабных соотношений для лептонных констант тяжелых кваркониев.

Для описания состояний тяжелого кваркония, находящихся выше порога распада на пару тяжелых мезонов (например, $\Upsilon(4S)$, $B_c^{*+}(3S)$, $\psi(3770)$), существенны константы связи кваркония с мезонами. Такие константы определяются непертурбативной динамикой КХД. Поэтому их описание предполагает применение моделей инфракрасного поведения в КХД, к числу которых относятся потенциальные модели тяжелого кваркония и мезона с одним тяжелым夸рком, где вид потенциала может быть связан с формой глюонного пропагатора в непертурбативной области. В рамках такого подхода была сделана оценка ширины распада $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ в модели корнельского потенциала [17] с линейным ростом энергии взаимодействия кварков при увеличении расстояния между ними. Однако моделирование поведения глюонного пропагатора (потенциала) приводит, очевидно, к модельной зависимости результата расчета констант распадов, что значительно снижает предсказательную силу подобных оценок. В этой связи актуальной проблемой представляется построение правил сумм для мезонных токов, определяющих константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов. Подобный кварконий, лежащий в узкой энергетической щели ниже порога распада на пару более тяжелых, чем псевдоскалярные, векторных состояний, имеет константы, подчиняющиеся масштабному соотношению в силу определенной зависимости размера щели от масс мезонов с одним тяжелым夸рком, которая следует из эффективной теории тяжелых кварков.

Важной задачей становится проведение детального анализа практического применения полученных соотношений для предсказания соответствую-

щих констант связи нового тяжелого кваркония ($\bar{b}c$), поиски которого ведутся в экспериментах с вершинными детекторами на коллайдерах CERN и FNAL.

Система ($\bar{b}c$) с открытыми прелестью и очарованием занимает особое место среди тяжелых кваркониев ($Q\bar{Q}'$). В отличие от подробно изученных экспериментально и достаточно точно описываемых теоретически семейств чармония ($c\bar{c}$) и боттомония ($b\bar{b}$), соответственно, со скрытыми очарованием и прелестью, тяжелый кварконий ($\bar{b}c$), семейство B_c -мезонов, имеет специфические механизмы образования, распадов и спектроскопию, исследование которых позволит заметно расширить и упрочить количественное понимание динамики КХД, а также продвинуться в изучении важнейших параметров электрослабой теории.

Основной целью обзора является изучение следующих проблем.

1. Формулировка метода правил сумм, позволяющая использовать регулярность спектра масс мезонов, содержащих тяжелые кварки, с целью получения масштабных соотношений для констант связи кваркониев, которые характеризуют механизм конфайнмента тяжелых кварков.

2. Извлечение значений параметров КХД в секторе тяжелых кварков.

В разд. 1 изучаются лептонные константы тяжелых кваркониев. Исходным пунктом построения квазилокальных правил сумм является рассмотрение двухточечного коррелятора векторных и псевдоскалярных токов тяжелых кварков на основе операторного разложения и дисперсионного соотношения для спектральной плотности соответствующих формфакторов. Следуя стандартной схеме правил сумм КХД для вычисления моментов спектральной плотности, отвечающих производным коррелятора токов в точке $Q^2 = 0$, где нет физических особенностей, обусловленных образованием резонансов и адронного континуума, можно определить область номеров моментов, где, с одной стороны, можно пренебречь вкладом от глюонного конденсата, а с другой — допустимо нерелятивистское приближение для вклада кварковой петли с учетом суммирования кулоноподобных α_s/v -поправок, где v — скорость относительного движения тяжелых кварков. Необходимость учета таких кулоновских поправок является особенностью рассмотрения систем с двумя тяжелыми кварками в рамках операторного разложения по обратной массе тяжелых кварков, что заметно отличает этот подход от эффективной теории тяжелых кварков. В расчеты включается также и поправка за счет обмена жестким глюоном при $v \rightarrow 0$. Показано, что в таком случае с высокой точностью моменты спектральной плотности коррелятора токов тяжелых кварков могут быть получены на основе использования вероятности образования тяжелых кварков на пороге, которая является постоянной величиной за счет кулоновского перерассеяния, причем систематический фактор подобного представления близок к единице и является величиной, имеющей слабую зависимость от номера момента, которой можно пренебречь.

Моменты спектральной плотности токов тяжелых кварков могут быть непосредственно вычислены по экспериментальным данным о ширинах лептонных распадов S -волновых состояний тяжелых кваркониев (чармония ($c\bar{c}$) и боттомония ($b\bar{b}$)). При этом вклад адронного континуума моделируется спектральной плотностью, вычисленной в КХД, выше некоторого порога s_{th} , что фактически означает использование локальной кварк-адронной дуальности при энергиях выше порога континуума. Подобное представление может приводить к слабой несущественной зависимости результатов от величины s_{th} . Далее, что касается вклада резонансов, то в отмеченной области рассмотрения номеров моментов спектральной плотности необходимо учитывать радиальные возбуждения основного состояния. Для этих возбуждений наблюдается феноменологическая регулярность спектров тяжелых кваркониев, а именно: разности энергий уровней практически не зависят от ароматов тяжелых c - и b -кварков. Это означает, что плотность таких состояний является функцией номера возбуждения и не зависит от масс кварков. Наиболее явное выражение этой закономерности можно установить в рамках нерелятивистских потенциальных моделей тяжелых кваркониев, где согласно теореме Фейнмана—Хеллманна описанная ситуация имеет место при постоянной, не зависящей от ароматов кварков и уровня возбуждения величине средней кинетической энергии тяжелых кварков в связанном состоянии. По теореме о вириале постоянная кинетическая энергия отвечает логарифмическому потенциалу в области средних расстояний между кварками в тяжелом кварконии: $0,1 < r < 1$ фм, где происходит смена пертурбативного кулоноподобного поведения потенциала на линейный рост энергии взаимодействия, приводящий к конфайнменту кварков. Слабая зависимость разности энергий уровней от масс тяжелых кварков может быть учтена путем введения степенного потенциала Мартэна, который имеет в области средних расстояний в кварконии ту же форму, что и логарифмический потенциал, как, впрочем, и потенциалы, заданные КХД. В этом случае можно записать явные выражения для плотности S -волновых состояний кваркония.

Далее, сформулировано интегральное представление для вклада суммы резонансов в моменты коррелятора кварковых токов, причем систематический фактор подобного представления в рассматриваемой области номеров моментов близок к единице и пренебрежимо слабо зависит от номера момента. Спектральная плотность интегрального представления включает в себя явные выражения для плотности уровней кваркония, что позволяет сформулировать квазилокальные правила сумм на основе равенства модельной спектральной плотности адронных состояний и спектральной плотности коррелятора кварковых токов, рассчитанных в КХД, как это было описано выше. Определены точность и рамки применимости построенных правил сумм.

На основе сформулированных правил сумм для лептонных констант nS -волновых уровней тяжелого кваркония получены масштабные соотноше-

ния, которые для констант векторных состояний имеют вид

$$\frac{f_n^2}{M_n} \left(\frac{M_n}{M_1} \right)^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{4\mu_{12}} \right)^2 = \frac{c}{n},$$

где c является величиной, которая не зависит от ароматов тяжелых夸克ов, составляющих кварконий. Она выражается следующим образом:

$$c = \frac{2\alpha_s}{\pi} T \left(\frac{m_1 + m_2}{M_1} \right)^2 H_V Z_{\text{sys}},$$

где T — кинетическая энергия тяжелых夸克ов в кварконии, которая не зависит от ароматов тяжелых夸克ов, α_s определяется на масштабе энергий кулоноподобного обмена между夸克ами, H_V — фактор, отвечающий за жесткой глюонной поправкой, Z_{sys} — систематический фактор используемых представлений, $\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса夸克ов.

Полученные универсальные масштабные соотношения связывают не только константы nS -волновых возбуждений кваркония, но и константы кваркониев с различным夸ковым составом.

Численно выведенные закономерности находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными по лептонным распадам ψ - и Υ -частиц и позволяют сделать предсказания для кваркония ($\bar{b}c$).

Приведенные масштабные соотношения позволяют по данным о лептонных константах боттомония и чармония получить оценку константы взаимодействия КХД, которая обычно приводится к масштабу массы Z -бозона согласно ренормгрупповому поведению, так что

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003,$$

при «физическом» выборе точки нормировки в кулоноподобном обмене между тяжелыми夸克ами $\mu_{\text{Coul}}^2 = T m_Q$, которая определяется средним квадратом импульса夸ка в кварконии. Отметим, что довольно широкая вариация μ_{Coul}^2 в разумных пределах в рамках однопетлевого приближения для коэффициентов Вильсона приводит к методической неопределенности $\delta\alpha_s = 0,010$, которая снижается до $\delta\alpha_s = 0,002$ при учете двухпетлевого вклада. Полученная оценка согласуется со «среднемировым» значением константы $\alpha_s(m_Z^2)$.

Сделаны оценки масс c - и b -夸ков.

В разд. 2 проведено обобщение квазилокальных правил сумм на мезоны с одним тяжелым夸ком. Проанализировано масштабное соотношение для соответствующих лептонных констант в статическом пределе. Показано, что результаты рассмотрения находятся в согласии с ранее полученными результатами в рамках HQET. В ходе анализа сформулирован спектроскопический подход к оценке масс тяжелых夸ксов, исходя из закономерностей для масс

тяжелых кваркониев и приблизительного совпадения уровней $\Upsilon(4S)$ и $\psi(3S)$ с удвоенными массами $m_{B(1S)}$ и $m_{D(1S)}$ соответственно, и получены размernые параметры эффективной теории тяжелых кварков: энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелых кварков в мезоне, которые находятся в согласии с оценками в других подходах.

В разд. 3 сформулирована новая модель правил сумм для мезонных токов, определяющих константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов, лежащего в узкой энергетической щели ниже порога распада на пару более тяжелых, чем псевдоскалярные, векторных состояний. Рассматриваемый подход позволяет использовать зависимость размера энергетической щели от масс тяжелых кварков, который при малых номерах момента спектральной плотности задает величину константы связи. Это дает возможность получить масштабное соотношение для констант распада тяжелого векторного кваркония с различным кварковым составом, которое имеет следующий вид:

$$\frac{g^2}{M} \left(\frac{4m_{12}}{M} \right) = \text{const},$$

вследствие зависимости энергетической щели между векторным и псевдоскалярным состояниями тяжелых мезонов: $\Delta M_{1,2} \cdot M_{1,2} = \text{const}$, где $M_{1,2}$ — массы мезонов в конечном состоянии, m_{12} — их приведенная масса.

Сравнительный анализ указывает на хорошее согласие масштабного соотношения с экспериментальными данными по распадам $\Upsilon \rightarrow B\bar{B}$ и $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$.

Показано практическое применение полученного соотношения для предсказания константы связи нового тяжелого кваркония ($\bar{b}c$), поиски которого ведутся в экспериментах с вершинными детекторами на коллайдерах CERN и FNAL, и предсказана величина ширины распада $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+ D^0$.

Основные результаты, представленные в обзоре, были получены в оригинальных работах [18–29].

1. ЛЕПТОННЫЕ КОНСТАНТЫ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОНИЕВ В ПРАВИЛАХ СУММ

Проблема описания связанных состояний кварков, адронов тесно связана с изучением поведения КХД на больших расстояниях ($r \sim 1/\Lambda$, $\Lambda \approx 200$ МэВ) и конфайнментом цветных объектов. Неприменимость теории возмущений КХД в инфракрасной области приводит к необходимости поиска методов непертурбативного описания сильных взаимодействий.

В случае тяжелых кварков возникает ряд условий, которые позволяют, за счет упрощения рассмотрения, сделать существенное продвижение в изучении КХД на больших расстояниях.

1.1. Правила сумм для тяжелого кваркония. Рассмотрим двухточечные корреляторы кварковых токов

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (1.1)$$

$$\Pi_P(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_5(x) J_5^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (1.2)$$

где

$$J_\mu(x) = \bar{Q}_1(x) \gamma_\mu Q_2(x), \quad (1.3)$$

$$J_5(x) = \bar{Q}_1(x) \gamma_5 Q_2(x), \quad (1.4)$$

$$J_{5\mu}(x) = \bar{Q}_1(x) \gamma_5 \gamma_\mu Q_2(x), \quad (1.5)$$

Q_i — спинорное поле тяжелого кварка типа $i = c, b$.

Запишем далее

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi_V(q^2) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \Pi_S(q^2), \quad (1.6)$$

где Π_V и Π_S — векторная и скалярная функции корреляции соответственно. В дальнейшем мы будем рассматривать векторный и псевдоскалярный корреляторы: $\Pi_V(q^2)$ и $\Pi_P(q^2)$.

Определим лептонные константы f_{V_n} и f_{P_n} :

$$\langle 0 | J_\mu(x) | V_n(\lambda) \rangle = i \epsilon_\mu^{(\lambda)} f_{V_n} M_{V_n} e^{ikx}, \quad (1.7)$$

$$\langle 0 | J_{5\mu}(x) | P_n \rangle = i k_\mu f_{P_n} e^{ikx}, \quad (1.8)$$

где

$$J_{5\mu}(x) = \bar{Q}_1(x) \gamma_5 \gamma_\mu Q_2(x), \quad (1.9)$$

так что

$$\langle 0 | J_5(x) | P_n \rangle = i \frac{f_{P_n} M_{P_n}^2}{m_1 + m_2} e^{ikx}, \quad (1.10)$$

причем $|V\rangle$ и $|P\rangle$ — векторы 1^- - и 0^- -состояний кваркония, λ — поляризация векторного кваркония, k — 4-импульс мезона, $k_{P,V}^2 = M_{P,V}^2$.

В случае чармония (ψ, ψ' ...) и боттомония ($\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon''$...) легко показать, что ширина лептонного распада $V_n \rightarrow e^+ e^-$ выражается через f_{V_n} в виде

$$\Gamma(V_n \rightarrow e^+ e^-) = \frac{4\pi}{9} e_i^2 \bar{\alpha}_{em}^2 \frac{f_{V_n}^2}{M_{V_n}}, \quad (1.11)$$

где e_i — электрический заряд кварка типа i , а величина электромагнитной константы задается масштабом массы связанного состояния.

В области узких неперекрывающихся резонансов из определений (1.1)–(1.10) следует, что

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Pi_V^{(\text{res})}(s) = \sum_n f_{V_n}^2 M_{V_n}^2 \delta(s - M_{V_n}^2), \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Pi_P^{(\text{res})}(s) = \sum_n f_{P_n}^2 M_{P_n}^4 \frac{1}{(m_1 + m_2)^2} \delta(s - M_{P_n}^2). \quad (1.13)$$

Таким образом, для наблюдаемой адронной спектральной функции имеем

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Pi_{V,P}^{(\text{had})}(s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Pi_{V,P}^{(\text{res})}(s) + \rho_{V,P}(s, s_{\text{th}}^{V,P}), \quad (1.14)$$

где $\rho_{V,P}(s, s_{\text{th}}^{V,P})$ — вклад континуума, отличный от нуля при $s > s_{\text{th}}$. В дальнейшем мы будем полагать, что вклад континуума равен вычисленной пертурбативной части при $s > s_{\text{th}}$, так что это может привести к дополнительной параметрической зависимости от s_{th} .

С другой стороны, метод операторного разложения позволяет записать

$$\Pi^{(\text{QCD})}(q^2) = \Pi^{(\text{pert})}(q^2) + C_G(q^2) \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle + C_i(q^2) \langle m_i \bar{Q}_i Q_i \rangle + \dots, \quad (1.15)$$

где выделен пертурбативный вклад $\Pi^{(\text{pert})}(q^2)$, а непертурбативный представлен в виде суммы кварк-глюонных конденсатов с вильсоновскими коэффициентами, которые могут быть вычислены в теории возмущений КХД.

В уравнении (1.15) мы ограничились вкладом вакуумных средних от операторов с размерностью $d = 4$. Для $C_G^{(P)}(q^2)$ имеем, например [10]:

$$C_G^{(P)} = \frac{1}{192m_1 m_2} \frac{q^2}{\bar{q}^2} \left(\frac{3(3v^2 + 1)(1 - v^2)^2}{2v^5} \ln \frac{v+1}{v-1} - \frac{9v^4 + 4v^2 + 3}{v^4} \right), \quad (1.16)$$

где

$$\bar{q}^2 = q^2 - (m_1 - m_2)^2, \quad v^2 = 1 - \frac{4m_1 m_2}{\bar{q}^2}. \quad (1.17)$$

Аналогичные формулы для других вильсоновских коэффициентов могут быть найдены в [10].

В ведущем порядке по теории возмущений КХД для мнимой части коррелятора получено [10]:

$$\operatorname{Im} \Pi_V^{(\text{pert})}(s) = \frac{\tilde{s}}{8\pi s^2} (3\bar{s}s - \bar{s}^2 + 6m_1 m_2 s - 2m_2^2 s) \theta_i(s), \quad (1.18)$$

$$\text{Im } \Pi_P^{(\text{pert})}(s) = \frac{3\tilde{s}}{8\pi s} (s - (m_1 - m_2)^2) \theta_i(s), \quad (1.19)$$

где $\tilde{s} = s - m_1^2 + m_2^2$, $\tilde{s}^2 = \tilde{s}^2 - 4m_2^2 s$, $\theta_i(s) = \theta(s - (m_1 + m_2)^2)$.

Однопетлевой вклад в $\text{Im } \Pi(s)$ также может быть включен в рассмотрение (см., например, [10]). Однако для нас более существенной является поправка, суммирующая ряд по степеням (α_s/v) , где v определено в (1.17), а α_s — постоянная КХД-взаимодействия на масштабе характерных средних импульсов夸кков в мезоне. В дальнейшем рассмотрении мы полагаем, что средний квадрат импульса夸кка равен

$$\langle \mathbf{p}_Q^2 \rangle = 2\mu_{12}\langle T \rangle,$$

где T — кинетическая энергия, а μ_{12} — приведенная масса системы. Для «бегущей» константы связи мы используем схему \overline{MS} , так что $\alpha_s = \alpha_s(\langle \bar{p}_Q^2 \rangle)$, где величина \bar{p}_Q^2 задается $\langle \mathbf{p}_Q^2 \rangle$, что соответствует «физическому» выбору шкалы кулоноподобного взаимодействия. Для оценки величины зависимости результатов от вариации точки нормировки константы взаимодействия мы рассматриваем также фиксацию шкалы в подходе Бродского—Лепажа—Маккензи (BLM), где [30]:

$$\langle \bar{p}_Q^2 \rangle = e^{-5/3} \langle (\mathbf{p}_Q - \mathbf{p}'_Q)^2 \rangle = e^{-5/3} 2\langle \mathbf{p}_Q^2 \rangle.$$

В [10] показано, что учет кулоноподобного взаимодействия приводит к фактору

$$F(v) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_s}{v} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{4\pi\alpha_s}{3v}\right)}, \quad (1.20)$$

причем разложение по $\alpha_s/v \ll 1$ в точности воспроизводит однопетлевую $O(\frac{\alpha_s}{v})$ -поправку

$$F(v) \approx 1 + \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha_s}{v} \dots \quad (1.21)$$

Дополнительная α_s -поправка связана с вкладом жестких глюонов. Она приводит к фактору H , который для векторного состояния при $m_1 = m_2 = m_Q$ и $v \rightarrow 0$ равен

$$H_V^{m_Q} = 1 - \frac{16\alpha_s^H}{3\pi}, \quad (1.22)$$

где шкала оценки α_s^H задается массой тяжелого夸кка, и, например, в процедуре BLM [30,31] вычисления в схеме \overline{MS} приводят к масштабу $e^{-11/24}m_Q \simeq$

$\simeq 0,632m_Q$ [33]. Расчет H -фактора для псевдоскалярного состояния с $m_1 \neq m_2$ был выполнен в [32], где найдено, что

$$H_P = 1 + \frac{2\alpha_s^H}{\pi} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \ln \frac{m_2}{m_1} - 2 \right), \quad (1.23)$$

здесь поправка α_s^H взята на масштабе приведенной массы夸克ов. Результат (1.23) не переходит в (1.22) при $m_1 = m_2$, и, следовательно, жесткие глюонные поправки к корреляторам векторных и псевдоскалярных токов различны. Так как нерелятивистская КХД для тяжелых夸克ов, сформулированная недавно в [15], приводит к отщеплению взаимодействия спинов夸克ов с глюонами в ведущем приближении, массовая зависимость в H -факторах определяется соответствующей перенормировкой в КХД, где она задается однопетлевыми вычислениями диаграмм для вершины и собственной энергии夸кка. Следуя [32], находим

$$H_V = 1 + \frac{2\alpha_s^H}{\pi} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \ln \frac{m_2}{m_1} - \frac{8}{3} \right). \quad (1.24)$$

Результаты (1.23) и (1.24) могут быть получены из перенормировочных факторов для векторных и аксиально-векторных токов переходов тяжелых夸克ов $Q_1 \rightarrow Q_2$, рассмотренных в [13]. Так, необходимо заменить один夸克, скажем Q_1 , на антикварк \bar{Q}_1 , что приводит к подстановкам $m_1 \rightarrow -m_1$, $F_A^2 \rightarrow H_V$ и $F_V^2 \rightarrow H_P$ с определением абсолютного значения для аргумента логарифма.

Расчет масштаба BLM при $m_1 \neq m_2$ в настоящее время не проведен, но с достаточной для наших целей точностью можно считать, что он равен $0,63\sqrt{m_1 m_2}$.

Согласно дисперсионным соотношениям имеем правила сумм КХД, которые гласят, что в среднем при $q^2 < 0$, где нет физических особенностей, обусловленных образованием резонансов и адронного континуума, верно уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Pi^{(\text{had})}(s)}{s - q^2} ds = \Pi^{(\text{QCD})}(q^2), \quad (1.25)$$

где неявно предполагаются необходимые вычитания. $\text{Im } \Pi^{(\text{had})}(s)$ определена согласно (1.12)–(1.14), а $\Pi^{(\text{QCD})}(q^2)$ — в (1.15)–(1.21). Формула (1.25) является основой для развития методов правил сумм в форме моментов корреляционной функции и анализа борлевского преобразования $\Pi(q^2)$ (см. [10]). Неполнота ряда в правой части (1.25) приводит к упомянутой выше нефизической зависимости величин $f_{P,V}$ от внешнего параметра схемы правил сумм.

Далее мы используем условия, упрощающие рассмотрение в случае тяжелого кваркония.

1.2. Непертурбативный вклад. Следуя [10, 34], рассмотрим n -ю производную по q^2 от (1.25) при $q^2 = 0$. Эта процедура соответствует вычислению моментов спектральной плотности коррелятора токов. Как было найдено в [10, 34], отношение n -го момента, вычисленного с учетом глюонного конденсата, существенного для тяжелого кваркония, к n -му моменту, рассчитанному в однопетлевом приближении теории возмущений КХД, равно

$$\frac{A(n^{\text{mom}})}{A^{(0)}(n^{\text{mom}})} = 1 + a(n^{\text{mom}})\alpha_s - \frac{4\pi^2}{9} \frac{n^{\text{mom}}(n^{\text{mom}}+1)(n^{\text{mom}}+2)(n^{\text{mom}}+3)}{(2n^{\text{mom}}+5)} \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle}{(2m_Q)^4} \quad (1.26)$$

для векторных состояний при $m_1 = m_2 = m_Q$. Член разложения α_s соответствует двухпетлевой поправке КХД. Можно видеть, что вклад глюонного конденсата становится существенным при «больших» значениях $n^{\text{mom}} > n_l \sim \sim (m_Q/\Lambda)^{4/3}$, где Λ — масштаб конфайнмента (или, что то же, конденсата). Для боттомония величина n_l близка к 20, так что при $n^{\text{mom}} < 20$ доля вклада глюонного конденсата меньше 1%, и она быстро увеличивается при $n^{\text{mom}} > 20$ (см. [33, 35–37], где можно найти многогранное обсуждение). Поэтому при $n^{\text{mom}} < n_l$ допустимо пренебречь вкладом глюонного конденсата*.

1.3. Нерелятивистское движение夸ков. Нерелятивистское движение夸ков означает, что в резонансной области мы имеем согласно (1.17)

$$v \rightarrow 0. \quad (1.27)$$

Отсюда легко получить, что в ведущем порядке

$$\text{Im } \Pi_P^{(\text{pert})}(s) \approx \text{Im } \Pi_V^{(\text{pert})}(s) \rightarrow \frac{3v}{8\pi} (4\mu_{12})^2, \quad (1.28)$$

что, с учетом кулоновского фактора

$$F(v) \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_s}{v} \quad (1.29)$$

и жесткой глюонной поправки, дает

$$\text{Im } \Pi_{P,V}^{(\text{pert})}(s) \simeq \frac{\alpha_s}{2} (4\mu_{12})^2 H_{P,V}. \quad (1.30)$$

*К сожалению, очарованный夸к не столь тяжел, и $n_l \sim 5$ [10], так что область используемого приближения значительно ограничена.

Для боттомония использование предела $v \rightarrow 0$ в выражении для кулоновского фактора (1.29) в резонансной области справедливо с точностью меньше, чем 5%. Что касается приближения для спектральной плотности с помощью выражения (1.30), находим, что отношение моментов, вычисленных по (1.18), (1.19) и (1.30) в резонансной области $s < s_{\text{th}}$, быстро стремится к единице, так что максимальное отклонение от единицы при номерах момента $n^{\text{mom}} \sim 1$ близко к 10%. Чтобы уменьшить величину погрешности за счет нерелятивистского приближения, М.Б.Волошин [33, 35, 37] рассматривает $n^{\text{mom}} > 8$. В настоящем рассмотрении мы удовлетворяемся такой точностью, когда погрешность для лептонных констант близка к 5%, так что мы используем нежесткое ограничение $n^{\text{mom}} > 2$, когда $\Delta f/f \leq 8\%$.

Заметим, что, в отличие от [33, 35, 37], мы рассматриваем случай, когда пертурбативные интегралы при $s > s_{\text{th}}$ компенсируются вкладами адронного континуума в уравнениях правил сумм, так что на практике мы проводим интегрирование по «резонансной» области и не забываем о параметрической зависимости от s_{th} .

Рассматривая моменты пертурбативной спектральной плотности в резонансной области, можно ввести систематическое отклонение нерелятивистского приближения от однопетлевого результата посредством следующего фактора к значениям моментов: $Z_{\text{nr}}^{Q\bar{Q}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}})$, зависящего от номера момента и порога континуума. На практике при умеренных величинах номеров момента соответствующий фактор имеет очень слабую зависимость от n^{mom} и s_{th} : $(2m_Q + 1 \text{ ГэВ})^2 < s_{\text{th}} < (2m_Q + 1,5 \text{ ГэВ})^2$, так что

$$Z_{\text{nr}}^{b\bar{b}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) = 1,09 \pm 0,05, \quad Z_{\text{nr}}^{c\bar{c}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) = 1,30 \pm 0,10. \quad (1.31)$$

1.4. Интегральное представление адронного вклада и квазилокальные правила сумм. Что касается адронной части коррелятора, то для вклада узких векторных резонансов можно записать

$$\Pi_V^{(\text{res})}(q^2) = \int \frac{ds}{s - q^2} \sum_n f_{V_n}^2 M_{V_n}^2 \delta(s - M_{V_n}^2), \quad (1.32)$$

$$\Pi_P^{(\text{res})}(q^2) = \int \frac{ds}{s - q^2} \sum_n f_{P_n}^2 \frac{M_{P_n}^4}{(m_1 + m_2)^2} \delta(s - M_{P_n}^2). \quad (1.33)$$

Интегралы в (1.32), (1.33) легко вычисляются, что обычно и делается.

В предлагаемой схеме введем функцию числа состояний $n(s)$ такую, что

$$n(M_k^2) = k. \quad (1.34)$$

Данное определение вполне осмысленно в резонансной области. Тогда можно записать, например,

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Pi_V^{(\text{res})}(s) = s f_{V_n(s)}^2 \frac{d}{ds} \sum_k \theta(s - M_{Vk}^2). \quad (1.35)$$

Далее, очевидно, что

$$\frac{d}{ds} \sum_k \theta(s - M_k^2) = \frac{dn(s)}{ds} \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k), \quad (1.36)$$

и (1.32) можно записать в виде

$$\Pi_V^{(\text{res})}(q^2) = \int \frac{ds}{s - q^2} s f_{V_n(s)}^2 \frac{dn(s)}{ds} \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k). \quad (1.37)$$

Взяв среднее значение, получим

$$\Pi_V^{(\text{res})}(q^2) = \left\langle \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k) \right\rangle \int \frac{ds}{s - q^2} s f_{V_n(s)}^2 \frac{dn(s)}{ds}. \quad (1.38)$$

Очевидно, что в среднем производная ступенчатой функции в резонансной области равна

$$\left\langle \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k) \right\rangle = Z \simeq 1, \quad (1.39)$$

где Z зависит от q^2 , так как весовая функция в (1.38) является зависящей от q^2 . Таким образом, в этой схеме, которая может быть феноменологически продуктивно использована в пределе больших масс m_Q , имеем

$$\left\langle \Pi_V^{(\text{res})}(q^2) \right\rangle \approx Z \int \frac{ds}{s - q^2} s f_{V_n(s)}^2 \frac{dn(s)}{ds}, \quad (1.40)$$

$$\left\langle \Pi_P^{(\text{res})}(q^2) \right\rangle \approx Z \int \frac{ds}{s - q^2} \frac{s^2 f_{P_n(s)}^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{dn(s)}{ds}. \quad (1.41)$$

Чтобы оценить ошибки, обусловленные переходом от суммы по резонансам к интегралу по плотности состояний, рассмотрим отношение n^{mom} -х моментов для векторных состояний боттомония и соответствующих непрерывных приближений для M_n и f_n (см. рис. 1). Можно заключить, что сделанное преобразование дает стабильное отношение моментов при $n^{\text{mom}} < 20$, и на этот результат слабо влияет вариация порога континуума s_{th} : $\delta n_{\text{th}} \simeq 0,5$, а более

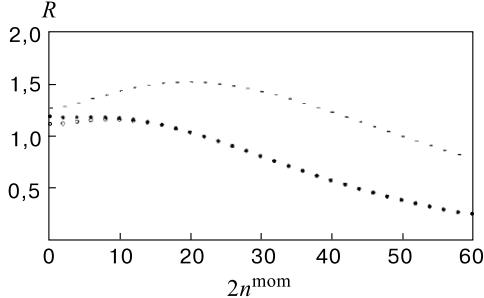


Рис. 1. Отношение моментов спектральной плотности для векторных резонансов боттомония, рассчитанных для дискретных и непрерывных состояний, $R = M^{\text{dis}}(n^{\text{mom}})/M^{\text{con}}(n^{\text{mom}})$. Темные и светлые точки соответствуют $n_{\text{th}} = 4$ и $n_{\text{th}} = 4,5$, когда $m_b = (4, 60 \pm 0,01)$ ГэВ. Штрихи показывают отношение для $m_b \approx 4,64$ ГэВ. Параметр фитирования кинетической энергии тяжелых кварков равен $(0,40 \pm 0,03)$ ГэВ

существен порог масс кварков*. Итак, это приближение может приводить к точности, близкой к 10%, при оценке лептонных констант. Безусловно, абсолютная величина ошибки интегрального представления связана с низкими номерами возбуждений, а их относительный вклад возрастает с увеличением номера момента, когда высшие возбуждения подавлены.

Как это было сделано для нерелятивистского приближения, можно ввести в рассмотрение систематические факторы для интегрального представления моментов резонансного вклада $Z_{\text{int}}^{Q\bar{Q}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}})$. В отмеченной области параметров n^{mom} и s_{th} эти факторы близки к постоянным величинам (см. рис. 1):

$$Z_{\text{int}}^{b\bar{b}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) = 1,19 \pm 0,02, \quad Z_{\text{int}}^{c\bar{c}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) = 1,29 \pm 0,05. \quad (1.42)$$

Еще раз отметим, что сделанное преобразование — в чистом виде феноменологическое представление экспериментальных данных.

Далее, производные по q^2 от усредненного вклада резонансов в (1.40) и (1.41) могут быть записаны при $q^2 = 0$ как

$$\frac{(-1)^{n^{\text{mom}}}}{n^{\text{mom}}!} \frac{d^{n^{\text{mom}}}}{dq^{2n^{\text{mom}}}} \left\langle \Pi_{V,P}^{(\text{res})}(0) \right\rangle = b_{V,P}(n^{\text{mom}}) Z_{\text{int}}^{Q\bar{Q}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) \int \frac{ds}{s^{(n^{\text{mom}}+1)}}, \quad (1.43)$$

*С высокой точностью область стабильности интегрального представления достигается при $n^{\text{mom}} < 10$.

где

$$b_V(n^{\text{mom}}) = \left\langle s f_{V_{n(s)}}^2 \frac{dn}{ds} \right\rangle \Big|_{n^{\text{mom}}}, \quad (1.44)$$

$$b_P(n^{\text{mom}}) = (m_1 + m_2)^{-2} \left\langle s^2 f_{P_{n(s)}}^2 \frac{dn}{ds} \right\rangle \Big|_{n^{\text{mom}}}, \quad (1.45)$$

усреднение выполняется с весовыми функциями, зависящими от номера момента спектральной плотности n^{mom} , и они показаны в правой части (1.43). С ростом n^{mom} величина b_V будет стремиться к своему значению на основном состоянии

$$b_V \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)f_{V_1}^2 \left[\frac{dM_n}{dn}(n=1) \right]^{-1}, \quad (1.46)$$

где мы используем $M_1 \approx m_1 + m_2$. Конечно, разность между массой основного состояния и суммой масс кварков становится существенной при больших значениях номера момента n^{mom} , где энергия связи кварков определяется величиной глюонного конденсата, скажем, в дополнение к чисто пертурбативному взаимодействию. Для боттомония при $2n^{\text{mom}} \simeq 15 - 20$ точность приближения (1.46) меньше, чем 10%.

Далее заметим, что в рассматриваемой области $2 < n^{\text{mom}} < n_l$ используется постоянное значение пертурбативной плотности, так что при наибольших допустимых величинах n^{mom} находим

$$\frac{f_{V_1}^2}{M_1} = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{dM_n}{dn}(n=1) \left(\frac{4\mu}{M_1} \right)^2 H_V Z_{\text{sys}}, \quad (1.47)$$

где $Z_{\text{sys}} = Z_{\text{nr}}^{Q\bar{Q}}/Z_{\text{int}}^{Q\bar{Q}}$ слабо зависит от номера момента и порога адронного континуума.

Более того, в исследуемой области умеренных номеров моментов спектральной плотности пертурбативные части могут быть при $q^2 = 0$ записаны в виде

$$\frac{(-1)^{n^{\text{mom}}}}{n^{\text{mom}}!} \frac{d^{n^{\text{mom}}}}{dq^{2n^{\text{mom}}}} \Pi_{P,V}^{(\text{pert})}(0) = \frac{\alpha_s}{2\pi} 16\mu^2 H_{P,V} Z_{\text{nr}}^{Q\bar{Q}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) \int \frac{ds}{s^{(n^{\text{mom}}+1)}}. \quad (1.48)$$

Сравнивая (1.48) с (1.43), можно заключить, что при $2 < n^{\text{mom}} < n_l$ величины $b_{P,V}$ должны быть независимы от n^{mom} с точностью меньшей, чем 5%.

В качестве ведущего приближения можно установить квазилокальные правила сумм^{*}:

$$\text{Im} \left\langle \Pi^{(\text{hadr})}(s) \right\rangle = \text{Im} \Pi^{(\text{QCD})}(s), \quad (1.49)$$

с точностью, которая зависит от точки резонансной области, так что систематическая погрешность в (1.49) равна 5% для нижележащего резонанса и 15% для резонанса, ближайшего к порогу распада на пару тяжелых мезонов. Эта погрешность приводит к дополнительной неопределенности для лептонных констант, $\Delta f/f \approx 3\%$ и 8% для описанных резонансов соответственно. С учетом (1.30), (1.40) и (1.41) уравнение (1.49) дает в физических точках $s_n = M_n^2$:

$$\frac{f_n^2}{M_n} = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{dM_n}{dn} \left(\frac{4\mu}{M_n} \right)^2 H_V Z_{\text{sys}}, \quad (1.50)$$

где мы определили $f_n = f_{Vn}$. Заметим, что в реальных тяжелых кваркониях $(\bar{b}b)$, $(\bar{b}c)$ и $(\bar{c}c)$ зависимая от масштаба правая часть (1.50) является примерно постоянной (см. численные оценки ниже):

$$\alpha_s H_V Z_{\text{sys}} \left(\frac{m_1 + m_2}{M_1} \right)^2 \approx \text{const.}$$

Аналогичные соотношения могут быть выведены для псевдоскалярных состояний, так что получим

$$f_{P_n} = f_n \left(1 + \frac{2\alpha_s^H}{3\pi} \right) \frac{m_1 + m_2}{M_n}. \quad (1.51)$$

1.5. Масштабные соотношения. Как было отмечено во введении, плотность состояний тяжелого кваркония с заданными квантовыми числами не зависит от ароматов тяжелых夸рков. Наиболее явное выражение эта регулярность спектров масс мезонов с тяжелыми кварками находит в рамках нерелятивистских потенциальных моделей.

*Заметим, что вычисленная мнимая часть для вклада резонансов не предполагается равной истинному физическому выражению, и она не может считаться описывающей точный адронный вклад. Как обычно в правилах сумм, предполагается только, что вычисленное выражение может быть (в качестве приближения) использовано для оценки реальной части коррелятора. В данном случае считается, что расчетная часть близка к *усредненной* (а не точной) адронной части (см. (1.49)). Несмотря на отсутствие явной зависимости от параметров схемы правил сумм (n^{mom} , s_{th}), смысл выражения (1.49) строго определен только в отмеченной области номеров моментов и с указанием схемной неопределенности, описанной в тексте.

Как было показано в [36], непертурбативные эффекты в спектроскопии тяжелого кваркония не могут быть описаны в рамках потенциальных моделей, так как корректное описание должно учитывать запаздывание взаимодействия с конденсатами. Тем не менее потенциальные модели вполне подходят для феноменологических исследований, потому что они способны воспроизводить модельные формулы для ряда величин, использованных в качестве входных параметров (уровни масс, например). Следовательно, потенциальные модели могут рассматриваться в качестве феноменологически осмысливших параметризаций некоторых экспериментальных величин, но они не могут восстановить некий истинный потенциал, который в действительности не существует из-за непотенциального характера непертурбативных эффектов в целом.

Как было показано в [38], КХД-мотивированные, не зависящие от аромата статических источников потенциалы тяжелых кварков с кулоноподобным взаимодействием на малых расстояниях и с линейно растущим удерживающим потенциалом на больших расстояниях (корнельская модель [17], потенциал Ричардсона [39], модель Бухмюллера—Тая [40]) в области средних расстояний между тяжелыми кварками в чармонии ($c\bar{c}$) и боттомонии ($b\bar{b}$)

$$0,1 < r < 1 \text{ фм} \quad (1.52)$$

допускают (с точностью до аддитивного сдвига) параметризации в виде логарифмического [41] и степенного [42] законов, обладающих простыми масштабными свойствами:

$$V_L(r) = c_L + d_L \ln \Lambda r, \quad (1.53)$$

$$V_M(r) = -c_M + d_M (\Lambda r)^k. \quad (1.54)$$

По теореме вириала для средних значений кинетической энергии в потенциалах (1.53), (1.54) можно, соответственно, получить

$$\langle T_L \rangle = d_L / 2 = \text{const}, \quad (1.55)$$

$$\langle T_M \rangle = \frac{k}{k+2} (c_M + E), \quad (1.56)$$

причем $|E| \ll c_M$, $k \ll 1$, так что с точностью до малой энергии связи кварков в кварконии кинетическая энергия этих кварков — практически постоянная величина, не зависящая от ароматов кварков:

$$\langle T_M \rangle \simeq \text{const}. \quad (1.57)$$

Согласно теореме Фейнмана—Хеллманна

$$\frac{dE}{d\mu_{12}} = - \frac{\langle T \rangle}{\mu_{12}}, \quad (1.58)$$

Таблица 1. Разность масс (в МэВ) для легчайших векторных состояний с заданным составом валентных夸арков

Состояние	Υ	ψ	ϕ
ΔM	563	588	660

где μ_{12} — приведенная масса тяжелых夸арков ($Q_1\bar{Q}_2$), получим при условии (1.55) для разности энергий двух уровней

$$E(\bar{n}, \mu_{12}) - E(n, \mu_{12}) = E(\bar{n}, \mu'_{12}) - E(n, \mu'_{12}), \quad (1.59)$$

т.е. плотность уровней энергии системы ($Q_1\bar{Q}_2$) не зависит от масс (ароматов) тяжелых夸арков

$$\frac{dn}{dM_n} = \phi(n), \quad (1.60)$$

где $\phi(n)$ не зависит от μ_{12} , что достаточно хорошо подтверждается эмпирически (см. табл. 1).

Квантование S -волновых нерелятивистских систем с логарифмическим и степенным потенциалами по Бору—Зоммерфельду дает

$$\frac{dM_n^L}{dn} = \frac{2T}{n} = \frac{1}{n} \frac{dM_n}{dn} (n = 1), \quad (1.61)$$

$$\frac{dM_n^M}{dn} = V_0 \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 \mu_0}{\mu} \right)^{k/(2+k)}. \quad (1.62)$$

Так как $k \ll 1$, плотность S -волновых состояний в потенциале Мартэна только логарифмически зависит от приведенной массы μ_{12} . С той же точностью можно утверждать, что (1.61) приблизительно справедливо в системах с потенциалом Мартэна.

Описанные свойства потенциала тяжелых夸арков найдены феноменологически. Они обусловливают высокую точность потенциальных моделей для расчетов масс тяжелых夸аркониев без учета расщепления, зависящего от спина, так что $\delta m(nL) \simeq 30$ МэВ. Еще раз отметим, что масштабные свойства (1.55), (1.57) и (1.61) являются ведущим приближением в фитировании экспериментально измеренных масс уровней тяжелого夸аркония.

Таким образом, для лептонных констант S -волновых夸аркониев имеет место масштабное соотношение

$$\frac{f_n^2}{M_n} \left(\frac{M_n}{M_1} \right)^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{4\mu_{12}} \right)^2 = \frac{c}{n}, \quad (1.63)$$

независимо от ароматов тяжелых夸арков.

Вывод о независимости правой части (1.63) от ароматов кварков может быть сделан без использования результатов потенциальных моделей, так как приближение, когда разность между массами уровней в тяжелом кварконии не зависит от аромата, является феноменологическим наблюдением, следующим из экспериментальных данных и ведущим к независимости плотности состояний от ароматов тяжелых кварков. Подробное обсуждение регулярности в спектрах масс тяжелых кваркониев можно найти в следующем разделе.

1.6. Численный анализ масштабных соотношений. Соотношение (1.63), связывающее лептонные константы кваркониев с различным кварковым составом, находится в прекрасном согласии с данными по константам систем со скрытым ароматом ($c\bar{c}$, $b\bar{b}$), где $4\mu/M \simeq 1$ (см. табл. 2).

Таблица 2. Экспериментальные значения лептонных констант (в МэВ) для кваркониев в сравнении с оценками в квазилокальных правилах сумм (КПС)

Величина	Эксп.	КПС
f_ϕ	232 ± 5	245 ± 12
f_ψ	409 ± 13	404 ± 20
f_Υ	690 ± 14	690 ± 35

Таблица 3. Лептонные константы векторных и псевдоскалярных состояний nS -уровней системы ($\bar{b}c$), f_n и f_n^P , вычисленные в правилах сумм по масштабному соотношению. Погрешность 6%

n	f_n , МэВ	f_n^P , МэВ
1	385	397
2	260	245

Пренебрегая энергией возбуждения по сравнению с массами кварков, получим

$$\frac{f_{n_1}^2}{f_{n_2}^2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.64)$$

Значение лептонной константы $1S$ -уровня было взято в качестве исходного параметра, и рассчитаны константы высших nS -возбуждений в чармонии и боттомонии, которые вполне согласуются с имеющимися данными (см. жирные кривые на рис. 2, где мы не учитывали отклонение величины M_n/M_1 от единицы, однако такое отклонение может быть существенно в системе ($\bar{c}c$)).

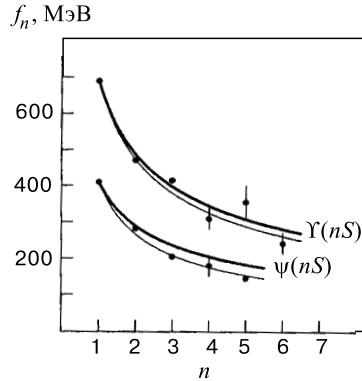


Рис. 2. Рассчитанная в КПС зависимость лептонных констант nS -уровней боттомония и чармония и экспериментальные значения f_n

Легко найти модификацию (1.64):

$$\frac{f_{n_1}^2}{f_{n_2}^2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{M_{n_2}}{M_{n_1}}. \quad (1.65)$$

Лептонные константы, пересчитанные по соотношению (1.65), представлены тонкими кривыми на рис. 2, так что можно увидеть величину неопределенности, обусловленную приближением малой величины возбуждения.

Отметим, что $\psi(3770)$ - и $\psi(4040)$ -состояния чармония, как полагают, являются результатом перемешивания $3D$ - и $3S$ -состояний, так что D -волна доминирует в $\psi(3770)$, а смешивание волновых функций $3D$ - и $3S$ -состояний сопровождается лишь малым сдвигом масс, и мы полагаем $M_3 = M_{\psi(4040)}$ и $f_3^2 = f^2(3770) + f^2(4040)$. Эти оценки показывают, что полученные квазилокальные правила сумм могут вполне надежно применяться к системам с тяжелыми кварками.

Таким образом, можно заключить, что в рамках этих правил сумм удается вывести универсальные масштабные соотношения для лептонных констант связи тяжелых кваркониев.

Далее, используя масштабные соотношения, можно сделать предсказания для констант связи системы $(\bar{b}c)$ (см. табл. 3), которые находятся также в согласии с оценками лептонной константы основного состояния, выполнеными в рамках других схем правил сумм КХД [43].

1.7. Константа f_{B_c} . Потенциалы, заданные КХД, имеют линейный рост на больших расстояниях и кулоноподобное поведение на коротких. При этом форма потенциала в области смены пертурбативного режима на непертурбативный с ростом расстояния между кварками совпадает с формой логарифмического или степенного потенциалов, так что точность предсказания уровней

энергии в тяжелых кваркниях, в том числе и для системы $(\bar{b}c)$, задается величиной 30 МэВ.

Глобальные же свойства потенциалов, т.е. их асимптотическое поведение в граничных точках $r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, существенны при определении констант связи состояний, таких, как, например, лептонные константы связи f для nS -уровней. В ведущем приближении величина f не зависит от спинового состояния уровня и задается значением радиальной волновой функции в начале координат $R(0)$:

$$\tilde{f}_n = \sqrt{\frac{3}{\pi M_n}} R_{nS}(0).$$

С учетом жестких глюонных поправок константы связи векторного и псевдоскалярного состояний равны

$$f_n^{V,P} = \tilde{f}_n \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \ln \frac{m_1}{m_2} - \delta^{V,P} \right) \right), \quad (1.66)$$

где $m_{1,2}$ — массы кварков, $\delta^V = 8/3$, $\delta^P = 2$, а константа связи КХД определяется на масштабе глюонной виртуальности, задаваемой массами кварков [33].

Значения волновых функций тяжелого кваркния существенны при рассмотрении рождения и распадов их состояний в рамках кварковых моделей мезонов. Однако, как уже указывалось выше, точность потенциальных моделей для рассматриваемых величин весьма низка, и неопределенность выражается фактором, достигающим двойки.

Правила сумм КХД позволяют определять лептонные константы состояний тяжелого кваркния со значительно лучшей точностью. Стандартные схемы правил сумм дают возможность вычислять константы основного состояния для векторного и псевдоскалярного токов с учетом поправок от кварк-глюонных конденсатов, имеющих степенную форму по обратной массе тяжелых кварков [10]. Интегральное представление для вклада резонансов, лежащих ниже порога распадов на пару тяжелых мезонов, в области номеров моментов спектральной плотности двухточечного коррелятора токов, где несущественны вклады от конденсатов, позволяет использовать регулярность плотности состояний кваркния, указанную выше, и установить масштабные соотношения для лептонных констант кваркниев с различным кварковым составом и возбужденных состояний.

При вычислении величин $R(0)$, которые входят в качестве параметров статических кварковых моделей при рассмотрении распадов и образования мезонов, по лептонным константам, вычисленным в правилах сумм, возникает дополнительная неопределенность, связанная с выбором шкалы, задающей константу связи КХД при учете жесткой глюонной поправки. Зависимость

Таблица 4. Лептонная константа B_c -мезона, полученная в различных потенциальных моделях (точность $\sim 15\%$), в МэВ

Модель	Мартэн	Кулон	[45]	[44]	[46]	[47, 48]	[49]
f_{B_c}	510	460	570	495	410	600	500

Таблица 5. Лептонная константа B_c -мезона, полученная в правилах сумм КХД (в МэВ)

Модель	[54]	[50]	[51]	[52]	[55]	[56]	КПС
f_{B_c}	375	400	360	300	300	450	385

от такого выбора указывает на значение высших порядков пертурбативного приближения. Полагая, что в \overline{MS} -схеме шкала близка к $\mu^2 = m_1 m_2 e^{-11/12}$, получим значения $R(0)$, из которых видно, что предсказания правил сумм и потенциальных моделей Мартэна и БТ находятся в разумном согласии друг с другом (см. также табл. 4, 5).

Таким образом, наиболее надежная оценка f_{B_c} в правилах сумм получается при использовании масштабного соотношения для лептонных констант кваркониев, которое согласуется с результатами потенциальных моделей.

1.8. Оценка α_s . В рамках стандартной модели константа сильного взаимодействия, измеренная в пике Z -бозона на LEP $\alpha_s(m_Z^2) \approx 0,125$, долгое время по имеющимся данным была заметно больше $\alpha_s(m_Z^2) \approx 0,11$, которая извлекалась из низкоэнергетических данных [57], таких, как глубоконеупругое рассеяние лептонов на адронах [58] (правила сумм Гросса—Льюислин-Смита и эволюция по Q^2 структурных функций), распады Υ , в правилах сумм КХД для системы $(\bar{b}b)$ и в вычислениях спектра масс тяжелого кваркония на решетках. Подобное расхождение между измерениями на LEP при $Q^2 \sim 10^4$ ГэВ² и величиной, ожидаемой из КХД при более низких энергиях ($Q^2 \sim 10^2$ ГэВ²), могло бы служить указанием на виртуальные эффекты «новой» физики при больших энергиях, которая не укладывается в схему стандартной модели при энергиях Z -бозона [59].

В работе [33] были рассмотрены правила сумм КХД для лептонных констант векторных состояний тяжелого кваркония $(\bar{b}b)$ для прецизионного извлечения константы сильного взаимодействия и массы b -кварка. Волошин использовал схему моментов спектральной плотности поперечного коррелятора векторных токов в нерелятивистском приближении и получил $\alpha_s(m_Z^2) = 0,109 \pm 0,001$, где указана лишь статистическая погрешность. С целью исследования методической устойчивости результата по измерению $\alpha_s(m_Z^2)$ в правилах сумм для $(\bar{b}b)$ представляет интерес рассмотрение этой проблемы в других схемах.

В этом разделе мы получаем $\alpha_s(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003$ из данных по константам векторных nS -уровней ($\bar{b}b$) в квазилокальных правилах сумм и показываем, что основная неопределенность в вычислении величины константы связи КХД при энергиях боттомония связана с выбором точки нормировки кулоноподобного обмена между кварками, так что $\delta\alpha_s(m_Z^2) = 0,010$.

В основе оценки лежит соотношение для лептонных констант f_n векторных состояний

$$\frac{f_n^2}{M_n} = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{dM_n}{dn} \left(\frac{4\mu_{12}}{M_n} \right)^2 H_V Z_{\text{sys}}. \quad (1.67)$$

Масштаб, задающий величину константы в кулоноподобном обмене, определяется величиной среднего квадрата импульса кварка в мезоне, так что мы полагаем

$$\alpha_s = \alpha_s^{\overline{MS}}(2T\mu_{12}),$$

а в факторе жесткой глюонной поправки H_V константа задается массами кварков, поэтому

$$\alpha_s^H = \alpha_s^{\overline{MS}}(\sqrt{m_1 m_2}).$$

Для оценки зависимости результата от точки нормировки мы используем также процедуру BLM. В \overline{MS} -схеме перенормировки величина $\alpha_s^{(\text{BLM})}$ определяется выражением

$$\alpha_s^{(\text{BLM})} = \alpha_s^{\overline{MS}}(e^{-5/3}\bar{p}_Q^2), \quad (1.68)$$

где \bar{p}_Q^2 — средний квадрат передачи импульса между кварками, так что

$$\bar{p}_Q^2 = \langle (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \rangle = 2\langle \mathbf{p}_{1,2}^2 \rangle = 4\langle T \rangle \mu_{12}. \quad (1.69)$$

В жесткой глюонной поправке к коррелятору векторных токов имеем для $m_1 = m_2 = m_Q$ [33]:

$$\alpha_s^{H(\text{BLM})} = \alpha_s^{\overline{MS}}(e^{-11/12}m_Q^2). \quad (1.70)$$

Далее, фактор $Z_{\text{sys}} = Z_{\text{nr}}/Z_{\text{int}}$ близок к единице, и он определяет систематическую поправку за счет нерелятивистского приближения для вклада кварковой петли с учетом α_s/v -членов кулоновского типа (Z_{nr}) и за счет интегрального представления вклада резонансов в адронную часть правил сумм (Z_{int}). Величина Z_{sys} слабо зависит от номера момента, так что для основного состояния ($\bar{b}b$) в области стабильности Z_{int} ($m_b = (4,58 \pm 0,03)$ ГэВ) имеем

$$Z_{\text{sys}} = 0,90 \pm 0,03. \quad (1.71)$$

Таблица 6. Систематические факторы в квазилокальных правилах сумм в зависимости от масс квартков (в ГэВ)

m_b	$Z_{\text{int}}^{(3)}$	$Z_{\text{nr}}^{(3)}$	m_c	$Z_{\text{int}}^{(3)}$	$Z_{\text{nr}}^{(3)}$
4,55	1,13	1,09	1,20	0,74	1,42
4,58	1,19	1,09	1,30	0,96	1,36
4,61	1,26	1,09	1,35	1,10	1,33
4,66	1,39	1,08	1,41	1,29	1,30
4,72	1,57	1,07	1,48	1,58	1,26

В табл. 6 приведены значения систематических факторов в зависимости от масс квартков (область стабильности Z_{int} для системы $(\bar{c}c)$ $m_c = (1,41 \pm 0,04)$ ГэВ).

Для плотности состояний dn/dM_n в тяжелом кварконии имеем явное выражение

$$\frac{dM_n}{dn} = \frac{2T}{n}. \quad (1.72)$$

Из (1.72) следует, что

$$T = \frac{M_2 - M_1}{\ln 4}, \quad (1.73)$$

где M_n — масса nS -уровня, $M_n = (3M_{V_n} + M_{P_n})/4$, $M_{V,P}$ — массы векторного и псевдоскалярного состояний соответственно. Из данных о массах чармония и боттомония следует, что

$$T = (415 \pm 20) \text{ МэВ.}$$

В данном разделе мы исследуем константы векторных состояний, поэтому в качестве параметра T используется величина, задаваемая экспериментальными значениями масс $\Upsilon(nS)$ и $\psi(ns)$, $n = 1, 2$.

Как было показано,

$$a_Q = \alpha_s H_V \left(\frac{2m_Q}{M_1} \right)^2 Z_{\text{sys}}$$

с высокой точностью не зависит от аромата тяжелого квартка, что приводит к масштабным соотношениям для лептонных констант. Согласно (1.67), эмпирическая величина

$$a_Q = \pi \frac{f_1^2}{M_1} \frac{\ln 2}{M_2 - M_1}$$

дает возможность определить α_s . При этом следует учесть, что лептонная ширина $\Upsilon(1S) \rightarrow l^+l^-$ определяется эффективной константой тонкой структуры $\bar{\alpha}_{em}$ на масштабе M_Υ [33], так что мы полагаем $f_1 = (690 \pm 15)$ МэВ.

Из эксперимента имеем

$$a_b = 0,195 \pm 0,007, \quad a_c = 0,20 \pm 0,01.$$

С двухпетлевой точностью для «бегущей» константы α_s (описание зависимости Λ_{QCD} от числа активных ароматов см. в [57]) находим*, что

$$\alpha_s^{\overline{MS}}(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003, \quad (1.74)$$

так что $\Lambda^{(5)} = (205 \pm 35)$ МэВ. Погрешность в (1.74), главным образом, статистическая. Систематическая неопределенность обусловлена выбором точки нормировки константы КХД при энергиях тяжелого кваркона. Так, разумная вариация этого параметра, к примеру, выбор фиксации масштаба в схеме BLM, приводит к $\alpha_s^{\overline{MS}(\text{BLM})}(m_Z^2) = 0,106 \pm 0,003$, что находится в согласии с результатом Волошина $\alpha_s^{\overline{MS}(\text{BLM})}(m_Z^2) = 0,109 \pm 0,001$, так что мы оцениваем методическую точность в однопетлевом приближении как $\delta\alpha_s(m_Z^2) = 0,010$.

Заметим, что недавнее применение выбора масштаба BLM к методу измерения α_s по «форме адронных событий» дало $\alpha_s^{\overline{MS}}(m_Z^2) = 0,109 \pm 0,008$ [60].

Высокая точность извлечения величины α_s в правилах сумм для $(\bar{b}b)$ обусловлена большой ролью кулоноподобных α_s/v -поправок, которые приводят к линейной зависимости квадрата лептонной константы от величины константы связи на масштабе средней передачи импульса между夸ками в тяжелом кварконии.

В работе [61] были использованы $O(\alpha_s^2)$ -выражения для корреляторов векторных токов для извлечения константы КХД и массы b -кварка из данных по боттомонию. При этом использовался анзац для вклада кулоноподобного обмена между кварками с масштабом, задаваемым относительным импульсом кварков. Результат такого рассмотрения согласуется с величиной, полученной в данном разделе.

Таким образом, мы показали, что использование различных схем правил сумм для лептонных констант векторных состояний тяжелого кваркона $(\bar{b}b)$ приводит к систематически устойчивому результату $\alpha_s^{\overline{MS}}(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003$, который согласуется со значением, измеренным в полюсе Z -бозона на LEP.

*Аналогичное рассмотрение в однопетлевом приближении для α_s приведено в [24].

Двухпетлевое приближение. Коэффициент Вильсона в операторном разложении NRQCD для матричного элемента векторного тока аннигиляции тяжелых夸克ов с равными массами после двухпетлевой перенормировки имеет вид [62]:

$$K_V(\alpha_s, m_Q/\mu) = 1 - 2 \frac{C_F \alpha_s(m_Q)}{\pi} + c_2(m_Q/\mu) \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2, \quad (1.75)$$

где $C_F = (N^2 - 1)/2N = 4/3$, а $N = 3$ — число цветов夸克ов, так что аномальная размерность K_V в однопетлевом приближении равна нулю, и

$$\gamma_K = \frac{d K_V}{d \ln \mu} = \gamma_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 + O(\alpha_s^3),$$

и ($C_A = 3$)

$$\gamma_2 = -C_F(2C_F + 3C_A) \frac{\pi^2}{6},$$

а полное выражение для K_V в точке сшивки КХД и NRQCD $\mu = m_Q$ можно найти в [62]. В правилах сумм мы используем $H_V = K_V^2$. Таким образом, становится ясно, что константа кулоноподобного обмена между нерелятивистскими夸克ами в однопетлевом приближении определяется на масштабе μ_0 , который не зависит от масштаба факторизации вильсоновских коэффициентов и матричных элементов в NRQCD, так как фактор H_V не зависит от μ , но в двух петлях такая зависимость появляется, и кулоноподобный вклад определяется на масштабе $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mu)$. Следует отметить, что γ_2 — отрицательная величина, так что $\alpha_s(\bar{\mu}^2)$ растет при увеличении μ . Очевидно, имеется точка, где $\alpha_s(\bar{\mu}^2) = \alpha_s(\mu^2)$, в которой мы будем проводить расчет правил сумм. Чтобы определить эту точку, заметим, что средний квадрат передачи импульса между нерелятивистскими夸克ами определяется выражением, учитывающим пертурбативный вклад с учетом фиксации шкалы факторизации NRQCD [68]:

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = \bar{\mu}^2 + \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\mu^2) \mu^2,$$

причем $\langle \mathbf{p}^2 \rangle = \mu_0^2$. Полагая $\bar{\mu} = \mu$, получим

$$\mu^2 = \frac{\mu_0^2}{1 - \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\mu^2)}.$$

В однопетлевом приближении мы полагали феноменологически $\mu_0^2 = T m_Q$. Теперь же сравнение результатов расчетов константы связи КХД в рамках правил сумм в одной и двух петлях позволяют зафиксировать μ_0 , так как эти расчеты могут находиться в согласии друг с другом только при определенном значении μ_0 . Численные оценки, как оказывается, подтверждают,

что $\mu_0^2 = T m_Q^0$, где m_Q^0 определяет порог кваркового вклада в правила сумм (см. ниже).

Далее, во втором порядке по α_s следует учесть зависимость массы тяжелого кварка от шкалы факторизации, так что пороговая энергия кваркового вклада за счет кулоноподобной связи определяется выражением

$$2m_b^0 = 2m_b(\mu) - \frac{4}{9}\alpha_s^2(\mu^2)m_b(\mu),$$

где m_b^0 в правилах сумм не зависит от μ , и в рассматриваемом подходе мы имеем, как и прежде, $m_b^0 \approx 4,58$ ГэВ.

В этом же порядке по константе связи КХД следует особо отметить роль кулоновских связанных состояний в узкой щели $2m_b - 2m_b^0$. Эти состояния в рассматриваемой области номеров моментов спектральной плотности допускают представление суммы по резонансам в интегральном виде, причем спектральная плотность в интегральном представлении в точности совпадает с константой, определяемой на пороге вклада континуума, так что в принятой аппроксимации спектральной плотности ее пороговым значением формально не нужно вводить никаких изменений в теоретическую часть правил сумм (другими словами, квазилокальные правила сумм для чисто кулоновской системы с ее энергетической плотностью состояний обращаются в тождество). Но при этом можно умозрительно выделить в области интегрирования домен резонансов и говорить, что с ростом номера момента спектральной плотности относительный вклад кулоновских резонансов (т.е. области, наименее подавленной весом интегрирования $1/s^n$) становится сравнимым с единицей [63]. Численные оценки показывают, что учет вклада кулоновских резонансов очень слабо варьирует величину систематического фактора нерелятивистского представления Z_{nr} для b -кварков, но весьма существен для c -кварков.

После сделанных замечаний приведем результаты извлечения параметров КХД в рамках квазилокальных правил сумм с учетом двухпетлевой перенормировки:

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,002, \quad m_b(\mu \approx 1,24 \text{ ГэВ}) = (4,76 \pm 0,01) \text{ ГэВ} \quad (1.76)$$

для системы $\bar{b}b$, и

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0,116 \pm 0,003, \quad m_c(\mu \approx 0,60 \text{ ГэВ}) = (1,87 \pm 0,04) \text{ ГэВ} \quad (1.77)$$

для системы $\bar{c}c$, из которой видно, что учет членов $O(\alpha_s^2)$ весьма значителен, и поэтому трудно судить об устойчивости теории возмущений КХД в разложении NRQCD.

Таким образом, мы показали, что квазилокальные правила сумм в однодвухпетлевом приближении позволяют надежно извлекать параметры КХД

из данных о системе тяжелого боттомония, и результаты подобных расчетов согласуются с оценками в других подходах.

2. ЛЕПТОННЫЕ КОНСТАНТЫ ТЯЖЕЛЫХ МЕЗОНОВ В СТАТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

В этом разделе мы обобщаем квазилокальные правила сумм на системы, в которых один夸克 намного тяжелее другого, что соответствует, например, B -мезонам.

В эффективной теории тяжелых夸克ов [7], которая широко используется для описания динамики сильных взаимодействий тяжелых夸克ов, имеется ряд размерных параметров, которые определяют как точность ведущего приближения в пределе бесконечно тяжелых夸克ов, так и величину степенных поправок по $\Lambda/m_Q \ll 1$, где Λ — шкала, определяющая виртуальность тяжелого夸кса в адроне. К числу таких важнейших параметров в физике тяжелых мезонов $(Q\bar{q})$ с одним тяжелым夸ком относятся: разность масс тяжелого夸кса и мезона $\bar{\Lambda} = M(Q\bar{q}) - m_Q$, лептонная константа мезона f_Q^{stat} в статическом пределе $m_Q \rightarrow \infty$ и квадрат импульса тяжелого夸кса в мезоне μ_π^2 . Так как эти величины определяются КХД-взаимодействиями на больших расстояниях, для их оценок используют непертурбативные методы, среди которых наиболее мощным средством являются правила сумм [10].

Что касается величины $\bar{\Lambda}$, то ее оценки в правилах сумм КХД для тяжелых мезонов были сделаны в [64], где $\bar{\Lambda} = (0,57 \pm 0,07)$ ГэВ. Кроме того, «оптические» правила сумм Волошина [65] позволяют получить ограничение [66]

$$\bar{\Lambda} > 2\delta_1 \left(\rho^2 - \frac{1}{4} \right) \simeq 0,59 \text{ ГэВ}, \quad (2.1)$$

где ρ^2 — наклон универсальной функции Изгурда—Вайза [12], а δ_1 — разность масс легчайшего векторного S -волнового уровня и P -волнового состояния в системе $(Q\bar{q})$ при $m_Q \rightarrow \infty$.

Далее, оценки f_B^{stat} в рамках правил сумм КХД и в вычислениях на решетках согласуются друг с другом и приводят [7] к

$$f_B^{\text{stat}} = (240 \pm 40) \text{ МэВ}. \quad (2.2)$$

В рамках правил сумм получена также оценка среднего квадрата импульса тяжелого夸кса в мезоне [7]

$$\mu_\pi^2 = (0,5 \pm 0,1) \text{ ГэВ}^2 \quad (2.3)$$

и ограничение [66]

$$\mu_\pi^2 > 3\delta_1^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{4} \right) \simeq 0,45 \text{ ГэВ}^2. \quad (2.4)$$

В предыдущем разделе были рассмотрены правила сумм КХД для лептонных констант S -волновых уровней кваркония ($Q_1\bar{Q}_2$), в которых использовался спектр масс состояний, рассчитанный в квазиклассическом приближении. Для $1S$ -уровня с точностью до систематической неопределенности порядка 10% было получено выражение

$$f_{V,P}^2 \cdot M = \frac{16\alpha_s}{\pi} \mu_\pi^2 \mu_{12} H_{V,P} Z_{\text{sys}}, \quad (2.5)$$

где $\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса кваркония, $\mu_\pi^2 = 2\mu_{12}\langle T \rangle$ — средний квадрат импульса кварка в кварконии с массой $M \simeq m_1 + m_2$. В (2.5) константа связи КХД оценивается на масштабе кулоновского обмена между кварками, который рассматривается на пороге образования пары кварков.

Для тяжелого мезона ($Q\bar{q}$) существенную роль играет движение легкого токового кварка в среде кварк-глюонных конденсатов, поэтому наиболее последовательное рассмотрение правил сумм предполагает использование операторного разложения произведения кварковых токов с учетом вакуумных ожиданий операторов высших размерностей. Однако, в качестве разумного приближения, можно рассмотреть случай, когда влияние конденсатов сводится, главным образом, к появлению эффективной массы легкого кварка. Подобный конституентный кварк можно рассматривать как нерелятивистский объект, движущийся в потенциале статического тяжелого кварка*. Так, потенциальные кварковые модели довольно успешно применяются в спектроскопии тяжелых мезонов. Далее, можно рассматривать феноменологические выражения, где не включаются в рассмотрение вклады конденсатов, так как они неявно учитываются посредством введения неких феноменологических параметров типа конституентных масс.

В таком подходе используемое приближение означает, что

$$\mu_{12} = \frac{m_Q \mu_q}{m_Q + \mu_q} \approx \mu_q = \mu \simeq M(Q\bar{q}) - m_Q = \bar{\Lambda}. \quad (2.6)$$

Введение конституентной массы легкого кварка является, безусловно, дополнительным, но вполне разумным предположением. Она является аналогом не-пертурбативной величины E_c , определяющей порог адронного континуума в

*Такое приближение означает, что легкие степени свободы рассматриваются как единое целое, не имеющее внутренней структуры.

лапласовской схеме правил сумм HQET. Величина E_c определяется из принципа стабильности для вычисляемых параметров, таких, как лептонная константа. Связь E_c с $\bar{\Lambda}$ обсуждается в [7]. Неопределенность оценки E_c в HQET такая же, как в оценке конституентной массы кварка. В конечноэнергетических правилах сумм, которые согласуются с правилами сумм HQET, E_c — базисная величина, определяющая различные размерные параметры (см. [67], где приводятся явные выражения). Таким образом, величина $\mu_{12} \sim \bar{\Lambda}$ имеет достаточную определенность, как и в других подходах.

Так как кварконий рассматривается на пороге образования составляющих его кварков, следует говорить о статическом приближении для тяжелого мезона с одним тяжелым夸рком.

Далее, H -фактор может быть представлен в следующем виде, учитывая ренормгрупповые свойства константы связи КХД:

$$H_{V,P}^{\text{RG}} = \left(\frac{\alpha_s(e^{\delta_V} \mu)}{\alpha_s(m_Q)} \right)^{4/\beta_0(n_f)},$$

где $\delta_V = 8/3$, $\delta_P = 2$, $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$, n_f — число ароматов кварков с массами $m < m_Q$.

С учетом последнего фактора приходим к известному результату* в HQET о масштабном соотношении для лептонных констант тяжелых мезонов в статическом пределе

$$f_{\text{stat}}^2(\mu) M \left(\frac{\alpha_s(e^{\delta_P} \mu)}{\alpha_s(m_Q)} \right)^{-4/\beta_0(n_f)} = \text{const.} \quad (2.7)$$

Таким образом, в рамках квазилокальных правил сумм с использованием спектроскопических данных кваркония удается получить разумный предел для систем с одним тяжелым夸рком.

Для тяжелых мезонов в резонансной области находится лишь одно состояние. Легко показать, что в этом случае

$$Z_{\text{sys}} \approx \ln(n_i n_{\text{th}}),$$

причем для статических кварков $n_i = 1$. Величина n_{th} определяется порогом континуума $E_c = 0,9 \div 1$ ГэВ, так что $E_c = \mu + 2T \ln(n_{\text{th}})$. Тогда $Z_{\text{sys}} = 0,40 \pm 0,06$. Численные оценки для B -мезонов дают

$$H_P^{\text{RG}} = 1,008 \pm 0,004, \quad \alpha_s(\mu_\pi^2) Z_{\text{sys}} = 0,35 \pm 0,05$$

и

$$f_B^{\text{stat}} = (310 \pm 60) \text{ МэВ.}$$

*С точностью до $\delta_{V,P}$, которые в HQET полагаются равными нулю.

2.1. Спектроскопия и размерные параметры HQET. В основе разложения операторов по обратной массе тяжелого кварка (HQET и NRQCD) лежит представление о разделении описания тяжелых статических источников и генерируемых ими полей глюонов и легких夸克ов. В таком случае ведущим является приближение нерелятивистских тяжелых кварков с не зависящим от их аромата потенциалом. Тогда массы тяжелых кварков, используемые в спектроскопии тяжелых кваркониев (NRQCD), могут применяться в разложении HQET для тяжелых мезонов с одним тяжелым夸кком. В спектроскопии тяжелого кваркония зависимость энергии возбуждения S -волновых состояний от номера уровня и масс кварков является вполне определенной, что может быть использовано для устранения произвольного сдвига потенциальной энергии, который ведет лишь к изменению энергии уровня в $1/m_Q^2$ -порядке разложения, если ввести в рассмотрение условие независимости масс тяжелых кварков от типа мезона, т.е. использовать сшивку шкалы энергий для тяжелых кваркониев и тяжелых мезонов.

Другими словами, массы тяжелых кварков не могут быть однозначно зафиксированы в спектроскопии тяжелых кваркониев, так как согласно теореме Фейнмана—Хеллманна вариация приведенной массы кварков вызывает лишь малое изменение энергии связи:

$$dE = -\langle T \rangle \frac{d\mu_{12}}{\mu_{12}},$$

которое, очевидно, находится за рамками исследуемой точности, когда $M = m_1 + m_2 + \langle T \rangle + \langle V \rangle$. Однако произвольный сдвиг масс можно устранить, если использовать такое условие, например: массы $\Upsilon(4S)$ и $\psi(3S)$ практически совпадают с удвоенными массами тяжелых B - и D -мезонов соответственно, где в расчетах HQET стоят те же самые значения масс тяжелых кварков.

В отличие от подобного подхода, в квантовой теории поля источники, излучающие поля, с необходимостью обладают самодействием, что приводит к введению критерия разделения внешнего поля и поля, относящегося к источнику. Формально это означает, что в операторном разложении и операторы, и параметры типа масс кварков, и коэффициенты Вильсона зависят от масштаба факторизации, который выбирается согласно физическим характеристикам каждой рассматриваемой системы в целях обеспечения быстрой сходимости соответствующих матричных элементов операторных рядов. В физике тяжелых кварков на практике вводят обрезание мягких глюонов при расчетах пертурбативных диаграмм Фейнмана, так что параметры разложения зависят от этого обрезания λ . Так, при малых вариациях обрезания были

получены выражения [68]:

$$m_Q(\lambda) - m_Q(\lambda') = -\frac{2}{3}\alpha_s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda'), \quad (2.8)$$

$$\mu_\pi^2(\lambda) - \mu_\pi^2(\lambda') = \frac{4}{3\pi}\alpha_s(\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda'^2). \quad (2.9)$$

Подобная зависимость приводит к необходимости рассмотрения проблемы сравнения результатов извлечения параметров разложения по обратной массе тяжелых夸克ов в различных подходах [69]. Тем не менее не зависящий от ароматов夸克ов потенциал тяжелого кваркония существует при идентичном выборе масштаба нормировки параметров и операторов.

Определим массу тяжелого кварка согласно

$$m_Q = m(Q\bar{q}) - \bar{\Lambda} - \frac{\mu_\pi^2}{2m(Q\bar{q})} + O(1/m_Q^2), \quad (2.10)$$

где μ_π^2 — средний квадрат импульса кварка в тяжелом мезоне, $m(Q\bar{q}) = (3m_V + m_P)/4$ — усредненная по спину масса векторного и псевдоскалярного состояний. Мы полагаем, что

$$\mu_\pi^2 = 2\langle T \rangle \mu_{Q\bar{q}}, \quad (2.11)$$

где $\mu_{Q\bar{q}}$ — приведенная масса $Q\bar{q}$, а T — кинетическая энергия. Разумный выбор $\mu_{Q\bar{q}}$ определяется как $\bar{\Lambda}$.

Значения $m(Q\bar{q})$ для $Q = b, c$ и $q = u, d$ известны экспериментально [57]:

$$m_B(1S) = 5,313 \text{ ГэВ}, \quad m_D(1S) = 1,975 \text{ ГэВ}, \quad (2.12)$$

с точностью лучше чем 5 МэВ.

В тяжелом кварконии квантование по Бору—Зоммерфельду для nS -состояний при постоянной $\langle T \rangle$ дает энергию связи кварков

$$E(n) = C + T \ln \frac{n^2}{\mu_{12}}, \quad (2.13)$$

где C — постоянная, не зависящая от ароматов кварков. Уравнение (2.13) дает зависимость энергии связи от номера возбуждения и массы кварков. Заметим, что квазиклассическое приближение WKB для задачи с трехмерным центральным потенциалом приводит к замене n на $n - 1/4$ в (2.13). Однако данная замена не приводит к лучшему описанию экспериментальных

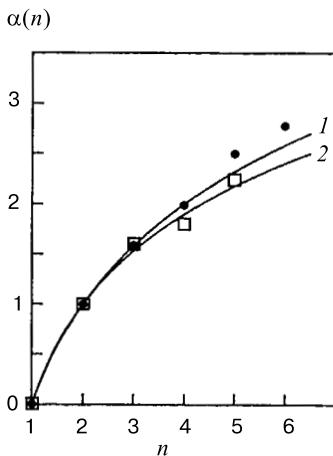


Рис. 3. Экспериментальные значения разностей масс nS -уровней боттомония (точки) и чармония (квадраты) $\alpha(n) = [M(nS) - M(1S)]/[M(2S) - M(1S)]$ и зависимости в рассматриваемой модели (кривая 1) и в приближении WKB (кривая 2)

данных * (см. рис. 3). Чтобы изолировать зависимость от n , мы рассмотрели отношение $\alpha(n)$ в данной модели:

$$\alpha(n) = \frac{M(nS) - M(1S)}{M(2S) - M(1S)} = \frac{\ln n}{\ln 2} \quad (2.14)$$

и в приближении WKB:

$$\alpha^{\text{WKB}}(n) = \frac{\ln[(4n-1)/3]}{\ln[7/3]}.$$

Сравнение модельного приближения (2.14) с экспериментальными величинами и модификацией WKB представлено на рис. 3. Как видно, рассматриваемая модель является более подходящей для точного описания значений $M(nS)$, так что

$$T = (0,415 \pm 0,02) \text{ ГэВ.} \quad (2.15)$$

Заметим, что, в отличие от анализа в [6], мы используем массы возбуждений, усредненные по зависящей от спинов кварков части потенциала, что кажется

*Такая же тенденция была замечена и в кулоновском потенциале, где уравнение Бора—Зоммерфельда давало точный результат.

более резонным. Кроме того, анализ спектров тяжелого кваркония, выполненный в [6] по формулам WKB, приводит к меньшим значениям величины $T \approx 0,37$ ГэВ. Масса nS -уровня определяется по формуле

$$M(nS) = m_1 + m_2 + E(n).$$

В целях удобства введем «начальные» значения $n_i(\mu_{12})$, зависящие от приведенных масс и связанные с не зависящей от ароматов постоянной C в (2.13):

$$C = -T \ln \frac{n_i^2(\mu_{12})}{\mu_{12}}. \quad (2.16)$$

Используем экспериментальные данные, сшивающие энергетическую шкалу в тяжелом кварконии и тяжелом мезоне:

$$M_Y(4S) = 2m_B(1S) + \delta_b, \quad M_\psi(3S) = 2m_D(1S) + \delta_c,$$

где $\delta_{b,c}$ — малое отклонение экспериментальных данных от расчетных. Эти уравнения могут быть переписаны в виде*

$$2T \ln \frac{n_{\text{th}}(b\bar{b})}{n_i(b\bar{b})} = 2\bar{\Lambda} + \frac{\mu_\pi^2}{m_b} + \delta_b, \quad (2.17)$$

$$2T \ln \frac{n_{\text{th}}(c\bar{c})}{n_i(c\bar{c})} = 2\bar{\Lambda} + \frac{\mu_\pi^2}{m_c} + \delta_c, \quad (2.18)$$

где $n_{\text{th}}(b\bar{b}) = 4$, $n_{\text{th}}(c\bar{c}) = 3$. Из (2.16) находим

$$\ln \frac{n_i(b\bar{b})}{n_i(c\bar{c})} = \frac{1}{2} \ln \frac{m_b}{m_c}. \quad (2.19)$$

Объединяя (2.11), (2.17)–(2.19), получим

$$\bar{\Lambda} = \frac{m_b m_c}{m_b - m_c} \left\{ \ln \sqrt{\frac{m_b}{m_c}} \frac{n_{\text{th}}(c\bar{c})}{n_{\text{th}}(b\bar{b})} - \frac{\delta_c - \delta_b}{2T} \right\}, \quad (2.20)$$

где скрыта неявная зависимость масс кварков от T и $\bar{\Lambda}$.

Уравнение (2.20) может быть решено численно, и оно дает**

$$\bar{\Lambda} = (0,63 \pm 0,03) \text{ ГэВ}. \quad (2.21)$$

* Аналогичная оценка с дополнительным условием $n_i(b\bar{b}) = 1$ была рассмотрена в [19].

** Полученный результат находится в хорошем согласии с ограничениями [66].

Вариация $\delta = \delta_c - \delta_b = \pm 80$ МэВ дает $\bar{\Lambda} = \pm 150$ МэВ. Что касается масс кварков в первом порядке по $1/m_Q$, то находим

$$m_b = (4, 63 \pm 0, 03) \text{ ГэВ}, \quad m_c = (1, 18 \pm 0, 07) \text{ ГэВ}.$$

Дополнительная неопределенность в массе c -кварка связана с допустимой заменой $\bar{\Lambda}/m(Q\bar{q}) \rightarrow \bar{\Lambda}/(m(Q\bar{q}) - \bar{\Lambda}) + O(\bar{\Lambda}^2/m_Q^2)$ в выражении для массы тяжелого кварка, т.е. она обусловлена членами второго порядка по обратной массе тяжелого кварка.

Параметр $\mu_\pi^2 = (0, 54 \pm 0, 08)$ ГэВ² [70].

Проведенные вычисления позволяют предсказать массы nS -уровней семейства $(\bar{b}c)$ ниже порога распада на пару BD :

$$m_{B_c}(1S) = (6, 37 \pm 0, 04) \text{ ГэВ}, \quad m_{B_c}(2S) = (6, 97 \pm 0, 04) \text{ ГэВ}.$$

Положение $1S$ -уровня немного выше, чем в потенциальных моделях. Это отклонение, в основном, обусловлено большей величиной параметра T , но не различием в массах кварков, потому что массы уровней $(\bar{b}c)$ не очень чувствительны к вариации масс кварков. Используя оценку зависящего от спина расщепления $1S$ -уровня в $(\bar{b}c)$, $m(1^-) - m(0^-) \approx 60 - 70$ МэВ, получим для массы основного псевдоскалярного состояния

$$m_{B_c}(0^-) = (6, 32 \pm 0, 05) \text{ ГэВ}.$$

Проведенные выше оценки не учитывали пертурбативных вкладов в энергию связи тяжелого кварка и его средний квадрат импульса, которые могут быть учтены в конечном порядке теории возмущений КХД, где, как было указано, возникает зависимость параметров операторного разложения от масштаба факторизации непертурбативных матричных элементов (см. уравнения (2.8), (2.9)).

Нетрудно учесть модификацию расчетов в первом порядке по константе связи КХД. Действительно, выделяя зависимость от обрезания импульса глюона, получим

$$\mu_\pi^2 = 2\langle T \rangle \bar{\Lambda}(\lambda) + \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\lambda) \cdot \lambda^2, \quad (2.22)$$

где $\Delta\mu_{\text{pert}}^2(\lambda) = \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\lambda) \cdot \lambda^2$ может быть оценена на характерном масштабе $\lambda = 1$ ГэВ:

$$\Delta\mu_{\text{pert}}^2(\lambda) = (0, 215 \pm 0, 010) \text{ ГэВ}^2.$$

Тогда

$$\bar{\Lambda}(\lambda) = \frac{m_b m_c}{m_b - m_c} \left\{ \ln \sqrt{\frac{m_b}{m_c}} \frac{n_{\text{th}}(cc)}{n_{\text{th}}(bb)} - \frac{\delta_c - \delta_b}{2T} \right\} - \frac{\Delta\mu_{\text{pert}}^2(\lambda)}{2T}, \quad (2.23)$$

где опущена зависимость масс кварков от λ . В итоге

$$\bar{\Lambda}(1 \text{ ГэВ}) = (0,22 \pm 0,02) \text{ ГэВ}, \quad \mu_\pi^2(1 \text{ ГэВ}) = (0,40 \pm 0,02) \text{ ГэВ}. \quad (2.24)$$

Неопределенность в $\delta = \delta_c - \delta_b$ может быть уменьшена за счет ее связи с вариацией параметра T , и ее вклад был учтен в данной оценке. Для масс кварков находим

$$m_b(1 \text{ ГэВ}) = (5,05 \pm 0,01) \text{ ГэВ}, \quad m_c(1 \text{ ГэВ}) = (1,63 \pm 0,02) \text{ ГэВ}.$$

Тогда улучшается согласие оценок масс тяжелого кваркония ($\bar{b}c$)

$$\begin{aligned} m_{B_c}(1S) &= (6,317 \pm 0,030) \text{ ГэВ}, \\ m_{B_c}(2S) &= (6,892 \pm 0,030) \text{ ГэВ}, \\ m_{B_c}(0^-) &= (6,267 \pm 0,035) \text{ ГэВ} \end{aligned} \quad (2.25)$$

с расчетами в других моделях.

Следует отметить также и модификацию оценки лептонной константы B -мезона в статическом пределе, рассмотренном в первом разделе, за счет введения зависимости от масштаба факторизации, так что, используя параметры, рассчитанные в данном разделе, получим

$$f_B^{\text{stat}}(1 \text{ ГэВ}) = (220 \pm 30) \text{ МэВ}.$$

Таким образом, регулярная структура спектров кваркония позволяет оценить размерные параметры эффективной теории тяжелых кварков.

3. КОНСТАНТЫ РАСПАДА ТЯЖЕЛОГО ВЕКТОРНОГО КВАРКОНИЯ НА ПАРУ ТЯЖЕЛЫХ МЕЗОНОВ

Экспериментальный поиск B_c^+ -мезона на установках с вершинными детекторами (OPAL [71], ALEPH [73], DELPHI [72] и CDF [74]) стимулировал теоретические исследования по спектроскопии тяжелого кваркония ($\bar{b}c$), механизмам его образования в различных взаимодействиях и оценкам ширин различных мод распада как основного состояния, так и возбужденных уровней. Особенностью системы ($\bar{b}c$) является отсутствие аннигиляционных мод распада за счет сильного или электромагнитного взаимодействий, так что основное псевдоскалярное состояние B_c^+ распадается за счет слабого взаимодействия и является долгоживущей частицей, $\tau(B_c^+) = (0,55 \pm 0,15) \text{ пс}$. Ниже порога распада на пару тяжелых мезонов BD возбужденные уровни кваркония ($\bar{b}c$) радиационно переходят в состояния этого кваркония с меньшей массой.

Выше порога пары BD находится векторное $B_c^{*+}(3S)$ -состояние, распад которого аналогичен $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$. Константа последнего распада была рассмотрена в работе [23] в рамках правил сумм для мезонных токов.

В данном разделе мы рассматриваем константу g распада векторного кваркония, содержащего, вообще говоря, кварки разного аромата, для определенности обозначений, скажем, $(\bar{b}c)$. Этот тяжелый кварконтон с массой M , удовлетворяющей условию $m_B + m_D < M < m_{B^*} + m_{D^*}$, распадается на пару тяжелых мезонов B^+D^0 . Мы выводим масштабное соотношение

$$\frac{g^2}{M} \left(\frac{4\mu_{BD}}{M} \right) = \text{const},$$

где $\mu_{BD} = m_B m_D / (m_B + m_D)$ — приведенная масса пары тяжелых мезонов. Постоянная в правой части соотношения одна и та же для распадов $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$, $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+D^0$ и $\psi(3770) \rightarrow D^+D^-$, где уже $\mu_{BB} = M_{\Upsilon(4S)}/4$, $\mu_{DD} = M_{\psi(3770)}/4$.

Ниже рассмотрены правила сумм для мезонных токов, получено масштабное соотношение и сделаны численные оценки.

3.1. Правила сумм. Рассмотрим векторный ток мезонов

$$J_\mu^{BD}(x) = \frac{i}{2} [B^+(x) \cdot \partial_\mu D^0(x) - \partial_\mu B^+(x) \cdot D^0(x)]$$

и определим вклад этого тока в лептонную константу f_{BD} векторного кваркония $(\bar{b}c)$, лежащего выше порога BD :

$$if_{BD} M \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{ipx} = \langle 0 | J_\mu^{\dagger BD}(x) | V_{(\bar{b}c)}, \lambda \rangle, \quad (3.1)$$

где λ — поляризация состояния $V_{(\bar{b}c)}$, $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ — вектор поляризации, p — импульс $V_{(\bar{b}c)}$, $p^2 = M^2$.

Далее, введем формфактор \mathcal{F} поперечного взаимодействия пары BD с векторным током \mathcal{A}_μ с вершиной

$$\mathcal{L}_{J\mathcal{A}}^{\text{tr}} = \mathcal{F}(q^2) \mathcal{A}_\mu \cdot k^\mu, \quad (3.2)$$

где $q = p_B + p_D$, $p_{B,D}$ — импульсы выходящих из вершины мезонных линий и $p_B = q_B + k$, $p_D = q_D - k$, $q_{B,D} \cdot k = 0$. Таким образом,

$$\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \langle 0 | J_\nu^{\dagger BD}(0) | B^+(p_B) D^0(p_D) \rangle = i \mathcal{F}(q^2) k^\mu.$$

Рассмотрим поперечную часть коррелятора токов

$$\Pi_{JJ}^{\text{tr}}(q^2) = \frac{1}{3} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_\mu^{\dagger BD}(x) J_\nu^{BD}(0) | 0 \rangle.$$

В этом корреляторе можно выделить вклад резонанса, лежащего выше порога пары BD , так что

$$\Pi_{JJ}^{\text{tr}}(q^2) = \frac{f_{BD}^2 M^2}{M^2 - q^2} + \int_{s_{\text{th}}}^{\infty} \frac{ds}{s - q^2} \rho(s),$$

где $\rho(s)$ — плотность нерезонансного вклада. С другой стороны, формфактор в (3.2) определяет величину

$$\text{Im } \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{\text{tr}}(q^2) = \frac{1}{8\pi} \frac{|\mathbf{k}|^3}{3\sqrt{q^2}} \mathcal{F}^2(q^2), \quad (3.3)$$

где $|\mathbf{k}|^2 = -k^2 = (q^2 + m_B^2 - m_D^2)^2 / (4q^2) - m_B^2$. Запишем правила сумм для мезонных токов

$$\Pi_{JJ}^{\text{tr}}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{ds}{s - q^2} \text{Im } \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{\text{tr}}(s),$$

где $s_i = (m_B + m_D)^2$. Смоделируем плотность континуума в виде

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{\text{tr}}(s) \theta(s - s_{\text{th}}).$$

Тогда правила сумм примут вид

$$\frac{f_{BD}^2 M^2}{M^2 - q^2} = \frac{1}{\pi} \int_{s_i}^{s_{\text{th}}} \frac{ds}{s - q^2} \text{Im } \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{\text{tr}}(s). \quad (3.4)$$

Значение порога континуума определяется энергией открытия новых каналов в рождении частиц током J_μ . Как было показано в [23] для $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-$ и $\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$ распадов, эта величина задается порогом образования векторных состояний $B^{*+} B^{*-}$ и $D^{*+} D^{*-}$, так что мы полагаем

$$s_{\text{th}} = (m_{B^*} + m_{D^*})^2.$$

Определим

$$v^2(s) = 1 - \frac{4m_B m_D}{s - (m_B - m_D)^2}.$$

Тогда $v_{\text{th}}^2 \ll 1$.

Рассмотрение формфактора \mathcal{F} в модели для $B^+ B^-$ и $D^+ D^-$ токов [23] показало, что соотношение (3.4) и его первые четыре производные по q^2 при $q^2 = 0$ дают стабильное значение f с точностью от 5% до 25% соответственно. Имея в виду указанную область применения (номер момента спектральной

плотности меньше 5), перейдем в (3.4) к интегрированию по $v^2(s)$ и положим $q^2 = 0$ и $\mathcal{F}(s) \approx \mathcal{F}(s_i) = F$. Тогда при $v_{\text{th}}^2 \ll 1$ и $|\mathbf{k}| \approx 2\mu_{BD}v$ имеем

$$f_{BD}^2 \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{v_{\text{th}}} dv^2 \cdot v^3 \left(\frac{4\mu_{BD}}{M} \right)^4 \frac{F^2}{64\pi} \frac{M^2}{3}.$$

Таким образом,

$$f_{BD} = \frac{FM}{4\pi} \left(\frac{4\mu_{BD}}{M} \right)^2 \sqrt{\frac{v_{\text{th}}^5}{30}}. \quad (3.5)$$

Введем поперечную вершину распада состояния $V_{(\bar{b}c)}$ на пару B^+D^0 :

$$\mathcal{L}_g = g \epsilon_\mu^{(\lambda)} \cdot k^\mu. \quad (3.6)$$

Вершина (3.6) приводит к появлению мнимой части константы f_{BD} , так что $\text{Im } f_{BD}(q^2) \rightarrow 0$ при $q^2 \rightarrow s_i$, и, следовательно, $\text{Im } f_{BD} \ll \text{Re } f_{BD}$. Согласно векторной доминантности легко получить соотношение между $\text{Im } f_{BD}$ и поперечным коррелятором, определяемым током распада $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ и мезонным током J_ν [23]:

$$\text{Im } \Pi_{Fg}^{\text{tr}}(q^2) = -\frac{M}{2} \text{Im } f_{BD},$$

где $\text{Im } \Pi_{Fg}^{\text{tr}}$ совпадает с выражением в (3.3) при замене $F^2 \rightarrow Fg$. Тогда дисперсионное соотношение для функции f_{BD} при $q^2 = s_i = (m_B + m_D)^2$ дает

$$f_{BD} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{Fg}{9} \left(\frac{4\mu_{BD}}{M} \right)^3 M v_{\text{th}}^3. \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.5) с (3.7), находим

$$g = \left(\frac{M}{4\mu_{BD}} \right) 12\pi \sqrt{\frac{3}{10v_{\text{th}}}}. \quad (3.8)$$

3.2. Масштабное соотношение и численные оценки. Как уже упоминалось, значение v_{th} определяется порогом образования векторных возбуждений тяжелых мезонов B^{*+} и D^{*0} :

$$v_{\text{th}}^2 \approx \frac{1}{2\mu_{BD}} (\Delta m_B + \Delta m_D),$$

где $\Delta m_B = m_{B^*} - m_B$, $\Delta m_D = m_{D^*} - m_D$. В эффективной теории тяжелых кварков (см. обзор в [7]) имеем

$$m_B \Delta m_B = m_D \Delta m_D = \text{const},$$

Таблица 7. Предсказания масштабного соотношения в сравнении с экспериментальными данными

Величина	Эксперимент	Масштабное соотношение
$g_{\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-}$	52	input
$g_{\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-}$	31	31
$g_{B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+ D^0}$	—	49

вне зависимости от аромата тяжелого кварка с точностью до поправок по $\Lambda_{QCD}/m_{B,D}$. Отсюда следует, что

$$v_{\text{th}} \cdot \mu_{BD} = \text{const.} \quad (3.9)$$

Используя (3.9) и (3.8), легко получить масштабное соотношение для констант распада тяжелого векторного кваркония с массой $m_B + m_D < M < m_{B^*} + m_{D^*}$:

$$\frac{g^2}{M} \left(\frac{4\mu_{BD}}{M} \right) = \text{const.} \quad (3.10)$$

Соотношение (3.10) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными для отношения констант распадов $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-$ и $\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$, известных с точностью $\Delta g \simeq 3$ (см. табл. 7). Заметим, что оценка по формуле (3.8), дающей $g_{\Upsilon B\bar{B}} = 57$, согласуется с экспериментальной величиной, взятой в качестве входящего параметра для масштабного соотношения. Последний факт указывает на самосогласованность метода получения (3.10). Что касается точности масштабного соотношения, то она задается неопределенностью в правилах сумм, где была получена формула (3.8). Напомним, что с уменьшением массы векторного состояния стабильность определения константы f по начальным пяти моментам спектральной плотности изменяется от 5% для $\Upsilon(4S)$ до 25% для $\psi(3770)$, что следует отнести к систематической неопределенности используемого метода. Мы оцениваем $\Delta g/g \sim 15 - 20\%$ для $B_c^{*+}(3S)$, так что

$$g_{B_c BD} = 49 \pm 8.$$

Ширина распада определяется выражением

$$\Gamma(B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+ D^0) = \frac{1}{24\pi} g^2 \frac{|\mathbf{k}|^3}{M^2} \approx (90 \pm 35) \text{ МэВ}, \quad (3.11)$$

и, с учетом канала $B^0 D^+$ и в предположении, что каналом распада $B^* D$ можно пренебречь, так как он подавлен третьей степенью импульса продуктов распада за счет большей массы B^* по сравнению с массой B , полная

ширина $B_c^{*+}(3S)$ составляет $\Gamma_{\text{tot}} = (180 \pm 70)$ МэВ. При численной оценке в (3.11) мы полагали $M(B_c^{*+}(3S)) = 7,250$ ГэВ. Заметим, что ширина сильно зависит от разности масс $\Delta M = M - (m_B + m_D)$, определяющей $|\mathbf{k}|$. При используемой величине массы кваркония имеем $\Delta M \sim 110$ МэВ, в отличие от $\Delta M \sim 30$ МэВ для распадов $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$ и $\psi(3770) \rightarrow D^+D^-$. Большой фазовый объем и приводит к тому, что полная ширина $B_c^{*+}(3S)$ на порядок больше полных ширин $\Upsilon(4S)$ - и $\psi(3770)$ -состояний, имеющих $\Gamma_{\text{tot}} \simeq 24$ МэВ.

Таким образом, в данном разделе мы рассмотрели правила сумм для мезонных токов, позволяющие определить константу связи тяжелого векторного кваркония $(\bar{b}c)$, распадающегося на пару тяжелых мезонов:

$$g = \left(\frac{M}{4\mu_{BD}} \right) 12\pi \sqrt{\frac{3}{10v_{\text{th}}}},$$

где $m_B + m_D < M < m_{B^*} + m_{D^*}$. Величина v_{th} , определяющая порог нерезонансного вклада в поперечный коррелятор токов, задается расщеплением масс векторного и псевдоскалярного состояний тяжелых мезонов и обладает определенными масштабными свойствами, так что получено соотношение

$$\frac{g^2}{M} \left(\frac{4\mu_{BD}}{M} \right) = \text{const},$$

которое находится в хорошем согласии с экспериментальными данными по константам распадов $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$ и $\psi(3770) \rightarrow D^+D^-$. Численная оценка ширины распада $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+D^0$ сильно зависит от разности масс $\Delta M = M - (m_B + m_D)$, определяющей фазовый объем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение приведем следующие результаты.

1. Предложена и разработана новая квазилокальная модель правил сумм, позволяющая использовать регулярность спектра масс и явные выражения для плотности уровней тяжелого кваркония, нерелятивистское движение夸ков в кварконии, подавленность степенных непертурбативных поправок по обратной массе тяжелых夸ков и возможность определять вклады отдельных резонансов.

2. В рамках предлагаемого подхода получены универсальные масштабные соотношения для лептонных констант тяжелых кваркониев с различным кварковым составом, причем как для основных S -волновых состояний, так и для их радиальных возбуждений.

3. Проведен сравнительный анализ масштабных соотношений с экспериментальными данными по ширинам лептонных распадов $\Upsilon(nS) \rightarrow l^+l^-$ и $\psi(nS) \rightarrow l^+l^-$.

4. В рамках масштабных соотношений для лептонных констант чармония и боттомония по имеющимся экспериментальным данным сделаны численные оценки параметров КХД в секторе тяжелых кварков: масс c - и b -кварков и константы взаимодействия КХД $\alpha_s(m_Z^2)$. Определены точность и границы применимости метода.

5. На основе масштабных соотношений предсказаны величины лептонных констант нового тяжелого кваркония B_c . Проведено сравнение расчетов лептонных констант кваркония в потенциальных моделях и в рамках квазилокальных правил сумм.

6. Проведено обобщение квазилокальных правил сумм на мезоны с одним тяжелым夸рком. Проанализировано масштабное соотношение для соответствующих лептонных констант в статическом пределе.

7. Получены величины размерных параметров эффективной теории тяжелых кварков: энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелых кварков в мезоне.

8. Предложена новая модель правил сумм для мезонных токов, определяющих константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов, лежащего в узкой энергетической щели ниже порога распада на пару более тяжелых, чем псевдоскалярные, векторных состояний. Рассматриваемый подход позволяет использовать зависимость размера энергетической щели от масс тяжелых кварков, что дает возможность получить масштабное соотношение для констант распада тяжелого векторного кваркония с различным кварковым составом.

9. Проведен сравнительный анализ согласия масштабного соотношения с экспериментальными данными по распадам $\Upsilon \rightarrow B\bar{B}$ и $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$.

10. Показано практическое применение полученных соотношений для предсказания константы связи нового тяжелого кваркония ($\bar{b}c$), поиски которого ведутся в экспериментах с вершинными детекторами на коллайдерах CERN и FNAL (о первом наблюдении B_c в эксперименте CDF см. [75]), и предсказана величина ширины распада $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+D^0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, p.1264;
Salam A. — In: Proc. of 8th Nobel Symp., Stockholm, 1968, p.367;
Glashow S.L., Iliopoulos J., Maiani I. — Phys. Rev., 1970, v.D2, p.1285.
2. Higgs P.N. — Phys. Lett., 1964, v.C12, p.132;
Englert F., Brout R. — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.321;
Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W. — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.385.

3. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452;
Волков Д.В., Акулов В.П. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621;
Wess J., Zumino B. — Nucl. Phys., 1974, v.B70, p.39.
4. Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H. — Phys. Lett., 1973, v.47B, p.365;
Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1973, v.31, p.494.
5. Gross D.J., Wilczek F. — Phys. Rev. Lett., 1973, v.30, p.1343;
Politzer H.D. — Phys. Rev. Lett., 1973, v.30, p.1346.
6. Quigg C., Rosner J.L. — Phys. Rep., 1979, v.56, p.167;
Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В. — УФН, 1986, т.143, с.3.
7. Neubert M. — Phys. Rep., 1994, v.245, p.259.
8. Wilson K. — Phys. Rev., 1969, v.179, p.1499; Phys. Rev., 1971, v.D3, p.1818;
Zimmerman W. — Ann. Phys., 1973, v.77, p.536, 570.
9. Logunov A.A., Soloviev L.D., Tavkhelidze A.N. — Phys. Lett., 1967, v.24B, p.181.
10. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. — Nucl. Phys., 1979, v.B147, pp.345, 448;
Reinders L.J., Rubinshtein H., Yazaki S. — Phys. Rep., 1985, v.127, p.1;
Narison S. — Phys. Lett., 1987, v.B198, p.104;
Dominguez C.A., Paver N. — Phys. Lett., 1987, v.B197, p.423, v.B199, p.596.
11. Feynman R.P. — Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.1415;
Bjorken J.D., Paschos E.A. — Phys. Rev., 1969, v.185, p.1975;
Drell S.D., Yan T.M. — Ann. Phys., 1971, v.66, p.578.
12. Isgur N., Wise M.B. — Phys. Lett., 1989, v.B232, p.113, v.B237, p.527.
13. Волошин М.Б., Шифман М.А. — ЯФ, 1988, т.47, с.801 .
14. Dokshitzer Y.L. — JETP, 1971, v.73, p.1216;
Gribov V.N., Lipatov L.N. — Sov. J. Nucl. Phys., 1972, v.15, p.78;
Altarelli G., Parisi G. — Nucl. Phys., 1977, v.B126, p.298;
Altarelli G. — Phys. Rep., 1982, v.81, p.1.
15. Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G. P. — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.1125;
Mannel T., Schuller G.A. — Z. Phys., 1995, v.C67, p.159.
16. Krasnikov N.V., Pivovarov A.A. — Phys. Lett., 1982, v.B112, p.397;
Kataev A.L., Krasnikov N.V., Pivovarov A.A. — Phys. Lett., 1983, v.B123, p.93;
Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A. — Phys. Lett., 1984, v.B135, p.457.
17. Eichten E. et al. — Phys. Rev., 1979, v.D17, p.3090; Phys. Rev., 1980, v.D21, p.203.
18. Kiselev V.V. — Nucl. Phys., 1993, v.B406, p.340.
19. Киселев В.В. — Письма в ЖЭТФ, 1994, т.60, с.498.
20. Герштейн С.С., Киселев В.В., Лиходед А.К., Ткабладзе А.В. — УФН, 1995, т.165, с.3.
21. Gershtein S.S., Kiselev V.V., Likhoded A.K., Tkabladze A.V. — Phys. Rev., 1995, v.D51, p.3613.
22. Kiselev V.V. — Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10, p.465.
23. Kiselev V.V. — Mod. Phys. Lett., 1995, v.A10, p.2113.
24. Киселев В.В. — ЯФ, 1996, т.59, с.188.
25. Kiselev V.V. — Phys. Lett., 1995, v.B362, p.173.
26. Kiselev V.V. — Int. J. Mod. Phys., 1996, v.A11, p.3689.
27. Kiselev V.V. — Phys. Lett., 1996, v.B373, p.207.

-
28. **Kiselev V.V.** — Phys. Lett., 1997, v.B390, p.427.
29. **Kiselev V.V.** — Preprint IHEP 96-83, 1996 [hep-ph/ 9610482].
30. **Brodsky S.J., Lepage G.P., Mackenzie P.B.** — Phys. Rev., 1983, v.D28, p.228.
31. **Grunberg G., Kataev A.L.** — Phys. Lett., 1992, v.B279, p.352;
Brodsky S.J., Lu H.J. — Preprint SLAC-PUB-6683, 1994.
32. **Braaten E., Fleming S.** — Phys. Rev., 1995, v.D52, p.181.
33. **Voloshin M.** — Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10, p.2865.
34. **Vainshtein A.I., Zakharov V.I., Shifman M.A.** — Pis'ma v ZhETF, 1978, v.27, p.60.
35. **Волошин М.Б., Зайцев Ю.М.** — УФН, 1987, т.152, с.361.
36. **Voloshin M.B.** — Nucl. Phys., 1979, v.B154, p.365.
37. **Волошин М.Б.** — ЯФ, 1982, т.36, с.247.
38. **Eichten E.** — Preprint FERMILAB-Conf-85/29-T, 1985.
39. **Richardson J.L.** — Phys. Lett., 1979, v.82B, p.272.
40. **Buchmüller W., Tye S.-H.H.** — Phys. Rev., 1981, v.D24, p.132.
41. **Quigg C., Rosner J.L.** — Phys. Lett., 1977, v.B71, p.153.
42. **Martin A.** — Phys. Lett., 1980, v.93B, p.338.
43. **Narison S.** — Phys. Lett., 1988, v.B210, p.238.
44. **Eichten E., Quigg C.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.5845.
45. **Godfrey S., Isgur N.** — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.189.
46. **Галкин В.О., Миншурин А.Ю., Фаустов Р.Н.** — ЯФ, 1991, т.53, с.1676.
47. **Colangelo P., Nardulli G., Pietroni M.** — Phys. Rev., 1991, v.D43, p.3002.
48. **Avaliani I.S., Sissakian A.N., Slepchenko L.A.** — Preprint JINR E2-92-547, Dubna, 1992.
49. **Картвелишвили В.Г., Лиходед А.К.** — ЯФ, 1985, т.42, с.1306.
50. **Bagan E. et al.** — Z. Phys., 1994, v.C64, p.57.
51. **Colangelo P., Nardulli G., Paver N.** — Z. Phys., 1993, v.C57, p.43.
52. **Aliev T.M., Yilmaz O.** — Nuovo Cim., 1992, v.105, p.827.
53. **Novikov V.A. et al.** — Phys. Rep., 1978, v.41C, p.1.
54. **Киселев В.В., Ткабладзе А.В.** — ЯФ, 1989, т.50, с.1714.
55. **Chabab M.** — Phys. Lett., 1994, v.B325, p.205.
56. **Reinshagen S., Rückl R.** — Preprints CERN-TH.6879/93, MPI-Ph/93-88, 1993.
57. **Barnett R.M. et al., PDG** — Phys. Rev., 1996, v.D54, p.1.
58. **Kataev A.L.** — Preprint INR-092696, 1996 [hep-ph/9607426];
Kataev A.L., Kotikov A.V., Parente G., Sidorov A.V. — Phys. Lett., 1998, v.B417, p.374.
59. **Shifman M.** — Mod. Phys. Lett., 1995, v.A10, p.605; Int. J. Mod. Phys., 1996, v.A11, p.3195.
60. **Burrows P.N. et al.** — Phys. Lett., 1996, v.B382, p.157.
61. **Jamin M., Pich A.** — Preprint HD-THEP-96-55, 1996 [hep-ph/9702276]; Nucl. Phys., 1997, v.B507, p.334.
62. **Czarnecki A., Melnikov K.** — Phys. Rev. Lett., 1998, v.80, p.2531;
Beneke M., Singer A., Smirnov V.A. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.80, p.2535.

-
63. **Kühn J.H., Penin A.A., Pivovarov A.A.** — Preprint TTP98-01, 1998 [hep-ph/9801356].
 64. **Bagan E., Ball P., Braun V., Dosch H.** — Phys. Lett., 1992, v.B278, p.457;
Neubert M. — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.1076.
 65. **Voloshin M.** — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.3062.
 66. **Bigi I., Grozin A.G., Shifman M., Uraltsev N.G., Vainshtein A.** — Phys. Lett., 1994, v.B339, p.160.
 67. **Narison S.** — Phys. Lett., 1994, v.B341, p.73; Phys. Lett., 1995, v.B352, p.122.
 68. **Bigi I. et al.** — Phys. Rev., 1994, v.D50, p.2234; Phys. Rev., 1995, v.D55, p.196;
Voloshin M. — Phys. Rev., 1992, v.D46, p.3062;
Uraltsev N. — Int. J. Mod. Phys., 1996, v.A11, p.515;
Neubert M. — Phys. Lett., 1997, v.B393, p.110.
 69. **Bigi I., Shifman M., Uraltsev N.** — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1997, v.47, p.591.
 70. **Ball P., Braun V.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.2472;
Neubert M. — Phys. Lett., 1994, v.B322, p.419.
 71. **Alexander G. et al., OPAL Coll.** — Z. Phys., 1996, v.C70, p.197;
Ackerstaff K. et al. — Phys. Lett., 1996, v.B420, p.157.
 72. **Abreu P. et al., DELPHI Coll.** — Phys. Lett., 1997, v.B398, p.207.
 73. **Barate R. et al., ALEPH Coll.** — Phys. Lett., 1997, v.B402, p.213.
 74. **Abe F. et al., CDF Coll.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.5176.
 75. **Abe F. et al., CDF Coll.** — Preprint FERMILAB-PUB-98-157-E, 1998 [hep-ex/9805034].

УДК 538.3; 621.38

COOPERATIVE ELECTROMAGNETIC EFFECTS

V.I. Yukalov, E.P. Yukalova

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna
and University of Western Ontario, London, Canada

Collective phenomena in strongly nonequilibrium systems interacting with electromagnetic field are considered. Such systems are described by complicated nonlinear differential or integro-differential equations. The aim of this review is to show that many nonlinear collective phenomena can be successfully treated by a recently developed method called the Scale Separation Approach whose name is due to the idea of separating different characteristic space-time scales existing in nonequilibrium statistical systems. This approach is rather general and can be applied to various nonequilibrium physical problems, several of which are discussed here. The problems considered not only serve as illustrations of the method but are quite important by themselves presenting interesting physical effects, such as Collective Liberation of Light, Turbulent Photon Filamentation, Superradiant Spin Relaxation, Negative Electric Current, and Magnetic Semiconfinement of Atoms.

Исследуются коллективные явления в сильнонеравновесных системах, взаимодействующих с электромагнитным полем. Такие системы описываются сложными нелинейными дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями. Цель данного обзора — показать, что многие нелинейные коллективные явления могут быть успешно описаны с помощью развитого недавно метода, названного методом разделения масштабов, основанного на идее выделения различных характерных пространственно-временных масштабов, существующих в неравновесных статистических системах. Этот подход обладает достаточной общностью и может быть применен к всевозможным неравновесным физическим проблемам, некоторые из которых рассматриваются в данном обзоре. Рассмотренные проблемы не только играют роль иллюстрации метода, но важны и сами по себе, представляя интересные физические эффекты, такие, как коллективное освобождение света, турбулентное фотонное нитеобразование, сверхизлучательная спиновая релаксация, отрицательный электрический ток и магнитный полуконфайнмент атомов.

1. INTRODUCTION

Strongly nonequilibrium cooperative processes that occur in statistical systems interacting with electromagnetic field are described by complicated nonlinear differential and integro-differential equations. For treating such difficult problems, a general approach has been recently developed called the *Scale Separation Approach* whose basic idea is to present the evolution equations in such a form where it could be possible to separate several characteristic space-time scales. In many cases, different scales appear rather naturally being directly related to the physical properties of the considered system.

Since the scale separation approach makes the mathematical foundation for the following applications, we start the review with presenting the basic techniques of this approach. Then we demonstrate it by applying the method to

different physical problems related to strongly nonequilibrium processes occurring under the interaction of electromagnetic field with matter. The considered examples not only serve as illustrations of the method but are of importance as such since they concern interesting and rather nontrivial physical effects. For consideration, those effects are chosen that have been first correctly described or predicted by the authors. Among these effects, we would like to emphasize, as the most interesting, the following: *Collective Liberation of Light, Turbulent Photon Filamentation, Superradiant Spin Relaxation, Negative Electric Current, and Magnetic Semiconfinement of Atoms.*

The content of the report is as follows. In Section 2 the *Scale Separation Approach* is described. This method makes it possible to solve, or to strongly simplify, many complicated systems of nonlinear differential equations, including stochastic and partial-derivative equations. The mathematical procedure of solving nonlinear differential equations in the following applications is based on this approach. The examples we consider have mainly to do with the evolution equations describing strongly nonequilibrium statistical systems interacting with electromagnetic fields. We concentrate our attention on collective phenomena whose existence as such, as well as their properties, are due to nonlinear effects. This is why we constantly have to deal with nonlinear equations.

Resonant interactions of electromagnetic field with radiating systems are usually described by the Maxwell–Bloch equations, in which one often passes to the momentum representation by means of Fourier transform. But we prefer to work in the *Real-Space representation*, outlined in Section 3, which seems to be more convenient for employing the Scale Separation Approach. Another convenient trick we employ is the elimination of electromagnetic field from evolution equations. For this purpose, the operator Maxwell equations, supplemented by the Coulomb calibration, can be rewritten in the integral form connecting the vector potential with the retarded current formed by the radiating system. Substituting this vector potential into evolution equations eliminates from them electromagnetic field. In this way, we come to the system of equations not containing explicitly electromagnetic field, instead of which there appears an effective dipole interaction of radiating atoms. After eliminating electromagnetic field, we have less equations, although the price for this is that these equations become integro-differential. Nevertheless, the obtained equations are more convenient for applying to them our method of solution. Another important advantage of the derived equations is the possibility of taking into account quantum effects. Such effects are often principal, while the standard semiclassical Maxwell–Bloch equations cannot take account of them. To simplify evolution equations, not loosing quantum effects, is the idea of the *Stochastic Mean-Field Approximation* of Section 4. Since cooperative electromagnetic phenomena are directly related to arising coherence, Section 5 gives the definitions for *Dynamical Characteristics of Coherence*.

The equations derived in the previous sections and the method of solution developed above are applied to several concrete systems exhibiting interesting physical properties. In Section 6, we suggest the theory of *Collective Liberation of Light*, which can occur in materials with polariton band gap. In Section 7, we consider the influence of external fields on radiation properties of resonant atoms, checking whether it is feasible to get *Amplification by Nonresonant Fields*. Section 8 discusses the so-called *Mössbauer Magnetic Anomaly* observed in some magnetic materials. In Section 9 the *Problem of Pattern Selection* is analyzed. This problem arises, for instance, when one needs to describe resonant media with spatially nonuniform electromagnetic structures. For treating the problem, we have suggested an original approach based on probabilistic analysis of possible spatiotemporal patterns. This method is applied, in Section 10, to describing *Turbulent Photon Filamentation* in resonant media.

Scale Separation Approach, being a general method, can be employed for treating strongly nonequilibrium systems of different physical nature. In Section 11, it is used for giving a thorough picture of *Superradiant Spin Relaxation* occurring in nonequilibrium nuclear magnets. This method also makes it possible to analyse nonlinear differential equations in partial derivatives. Such an analysis helps in finding conditions under which unusual nonlinear effects can happen. This is illustrated in Section 12 by describing a transient effect of *Negative Electric Current* in nonuniform semiconductors. Another novel effect of *Magnetic Semiconfinement of Atoms* is described in Section 13. Both these effects have been predicted by the authors. In Section 14, we discuss conditions when *Nuclear Matter Lasing* could be possible.

Throughout the review, we consider several physical systems of rather different nature. Because of this, it is more appropriate to give all details and to discuss the related literature in the corresponding sections, limiting the Introduction by a brief enumeration of the considered problems. Section 15 contains *Conclusion* summarizing main results.

2. SCALE SEPARATION APPROACH

Because of the pivotal role of this approach for treating physical problems in the following sections, we need to start by presenting its general scheme. It is possible to separate five main steps, or parts, of the approach: (i) stochastic quantization of short-range correlations; (ii) separation of variables onto fast and slow; (iii) averaging method for multifrequency systems; (iv) generalized expansion about guiding centers; and (v) selection of scales for space structures. Below, these steps are explicitly explained.

2.1. Short-Range Stochastic Quantization. When considering nonequilibrium processes in statistical systems, one needs to write evolution equations for

some averages $\langle A_i \rangle$ of operators $A_i(t)$, where t is time and $i = 1, 2, \dots, N$ enumerates particles composing the considered system. For simplicity, a discrete index i is employed, although everywhere in what follows one could mean an operator $A(\vec{r}_i, t)$ depending on a continuous space variable \vec{r}_i .

There exists the well-known problem in statistical mechanics consisting in the fact that writing an evolution equation for $\langle A_i \rangle$ one does not get a closed set of equations but a hierarchical chain of equations connecting correlation functions of higher orders. Thus, an equation for $\langle A_i \rangle$ involves the terms as $\sum_j \langle A_i B_j \rangle$ with double correlators $\langle A_i B_j \rangle$, and the evolution equations for the latter acquire the terms with triple correlators, and so on. The simplest way for making the system of equations closed is by resorting to the mean-field type decoupling $\langle A_i B_j \rangle \rightarrow \langle A_i \rangle \langle B_j \rangle$. When considering radiation processes, this decoupling is called the semiclassical approximation. Then the term $\sum_j \langle A_i B_j \rangle$ reduces to $\langle A_i \rangle \sum_j \langle B_j \rangle$, so that one can say that $\langle A_i \rangle$ is subject to the action of the mean field $\sum_j \langle B_j \rangle$. The semiclassical approximation describes well coherent processes, when long-range correlations between particles govern the evolution of the system, while short-range correlations, due to quantum fluctuations, are not important. However, the latter may become of great importance if there are periods of time when the long-range correlations are absent. For example, this may happen at the beginning of a nonequilibrium process when long-range correlations have had yet no time to develop. Then neglecting short-range correlations can lead to principally wrong results for the whole dynamics.

To include the influence of short-range correlations, the semiclassical approximation can be modified as follows:

$$\sum_j \langle A_i B_j \rangle = \langle A_i \rangle \left(\sum_j \langle B_j \rangle + \xi \right), \quad (1)$$

where ξ is a random variable describing local short-range correlations. It is natural to treat ξ as a Gaussian stochastic variable defined by its first, $\ll \xi \gg$, and second, $\ll |\xi|^2 \gg$, moments. According to the short-range character of local fields, we should set

$$\ll \xi \gg = 0. \quad (2)$$

The second moment, aiming at taking into account incoherent local fluctuations, can be defined by means of the following reasoning. Consider the equality

$$\ll \left| \sum_j \langle A_i B_j \rangle \right|^2 \gg = | \langle A_i \rangle |^2 \left(\left| \sum_j \langle B_j \rangle \right|^2 + \ll |\xi|^2 \gg \right)$$

resulting from definitions (1) and (2). On the other hand, wishing to take into account both long-range coherent and short-range incoherent terms, one should write

$$\left| \sum_j \langle A_i B_j \rangle \right|^2 = |\langle A_i \rangle|^2 \left(\left| \sum_j \langle B_j \rangle \right|^2 + \sum_j |\langle B_j \rangle|^2 \right),$$

where the first term in the brackets corresponds to the coherent while the second term, to incoherent parts. Comparing the latter two equalities, we come to the conclusion that

$$\ll |\xi|^2 \gg = \sum_j |\langle B_j \rangle|^2. \quad (3)$$

As far as short-range correlations and fluctuations are often due to quantum effects, the manner of taking them into account by introducing a stochastic variable ξ can be named the stochastic quantization. Then the decoupling (1) may be termed the *stochastic mean-field approximation*. A similar kind of approximation has been used for taking account of quantum spontaneous emission of atoms in the problem of atomic superradiance [1]. Somewhat related ideas have also been used in the stochastic quantization of quantum field theory [2].

2.2. Classification of Function Variations. Employing the stochastic mean-field approximation makes it possible to write down a closed set of stochastic differential equations. The next step is to find such a change of variables which results in the possibility of separating the functional variables onto fast and slow. Let us consider, first, the variation of functions in time. Assume that we come to the set of equations of the form

$$\frac{du}{dt} = f, \quad \frac{ds}{dt} = \varepsilon g, \quad (4)$$

in which $f = f(\varepsilon, u, s, \xi, t)$, $g = g(\varepsilon, u, s, \xi, t)$, and $\varepsilon \ll 1$ is a small parameter. Equations (4) are complimented by initial conditions

$$u = u_0, \quad s = s_0 \quad (t = 0). \quad (5)$$

Here, for simplicity, we deal with only two functions, u and s , and one small parameter ε . The whole procedure is straightforwardly applicable to the case of many functions and several parameters.

Let the functions f and g be such that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f \neq 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon g = 0. \quad (6)$$

Then from Eqs. (4) it follows that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{du}{dt} \neq 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{ds}{dt} = 0. \quad (7)$$

This permits us to classify the solution u as fast, compared to the slow solution s . In turn, the slow solution s is a *quasi-invariant* with respect to the fast solution u . Thus, we may classify the functions representing the sought solutions onto fastly and slowly varying in time.

In the case of partial differential equations, one has, in addition to time, a space variable \vec{r} . Then the notion of fast and slow functions can be generalized as follows [3]. Let $\vec{r} \in \mathbf{V}$, with V being the measure of the volume \mathbf{V} , and let $t \in [0, T]$, where T can be infinite. If one has

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ll \frac{1}{V} \int_{\mathbf{V}} \frac{\partial u}{\partial t} d\vec{r} \gg \neq 0 , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ll \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\nabla} u dt \gg \neq 0 , \quad (8)$$

while

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ll \frac{1}{V} \int_{\mathbf{V}} \frac{\partial s}{\partial t} d\vec{r} \gg = 0 , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ll \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\nabla} s dt \gg = 0 , \quad (9)$$

then the solution u can be called *fast on average* with respect to both space and time, as compared to s that is *slow on average*. In such a case, s is again a quasi-invariant with respect to u . In general, it may, of course, happen that one of the solutions is fast in time but slow in space, or vice versa, as compared to another solution. Note that in the Hamiltonian mechanics quasi-invariants with respect to time are called adiabatic invariants [4]. A generalization of this notion to the case of both space and time variables [3] is given by definition (9).

2.3. Multifrequency Averaging Technique. Let us continue considering the ordinary differential equations (4). The generalization to the case of partial differential equations can be done similarly to the way discussed at the end of the previous section. After classifying the function u as fast and s as slow, we may resort to the Krylov–Bogolubov averaging technique [5] extended to multifrequency systems.

Since the slow solution s is a quasi-invariant for the fast variable u , one considers the equation for the fast function, with the slow one kept fixed,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(\varepsilon, X, z, \xi, t) , \quad (10)$$

here $s = z$ being treated as a constant parameter. The initial conditions for Eq. (10) is

$$X = u_0 \quad (t = 0) . \quad (11)$$

The pair of solutions

$$X = X(\varepsilon, z, \xi, t) , \quad z = \text{const} \quad (12)$$

are called the *generating solutions*. Substituting the solution X into the right-hand side of the equation for the slow function s , one defines the average

$$\bar{g}(\varepsilon, z) \equiv \ll \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(\varepsilon, X(\varepsilon, z, \xi, t), z, \xi, t) dt \gg , \quad (13)$$

in which τ is the characteristic time of fast oscillations. In many cases, it is sufficient to set $\tau \rightarrow \infty$. In this way, we come to the equation

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \bar{g}(\varepsilon, z) , \quad (14)$$

with the initial condition

$$z = s_0 \quad (t = 0) . \quad (15)$$

The solution to Eq. (14),

$$z = z(\varepsilon, t) , \quad (16)$$

is to be substituted into X yielding

$$y(\varepsilon, \xi, t) = X(\varepsilon, z(\varepsilon, t), \xi, t) . \quad (17)$$

Generating solutions (12) are the first crude approximations one starts with. More elaborate solutions (16) and (17) are termed *guiding centers*.

Notice two points that difference the considered way of obtaining the guiding centers (16) and (17) from the standard averaging method [5]. The first point is in retaining in Eq. (10) the small parameter ε , which makes it possible to correctly take into account important physical effects, such as attenuation. The standard manner of defining the generating solutions with setting $\varepsilon = 0$ would result in essentially more rough approximations. The second difference is in the occurrence of the stochastic average in definition (13), since here we are dealing with stochastic differential equations.

2.4. Generalized Asymptotic Expansion. The generating solutions (12) play the role of the trial zero-order approximation, while the guiding centers (16) and (17) essentially improve the trial approximations. Higher-order corrections may be obtained by presenting the general solutions as asymptotic expansions about the guiding centers. Then, k -order approximations are written as

$$u_k = y(\varepsilon, \xi, t) + \sum_{n=1}^k y_n(\varepsilon, \xi, t) \varepsilon^n , \quad s_k = z(\varepsilon, t) + \sum_{n=1}^k z_n(\varepsilon, \xi, t) \varepsilon^n . \quad (18)$$

Such series are named *generalized asymptotic expansions* [6], since the expansion coefficients depend themselves on parameter ε . The right-hand sides of Eqs. (4) are also to be expanded about the guiding centers yielding

$$f(\varepsilon, u_k, s_k, \xi, t) \simeq f(\varepsilon, y, z, \xi, t) + \sum_{n=1}^k f_n(\varepsilon, \xi, t) \varepsilon^n ,$$

$$g(\varepsilon, u_k, s_k, \xi, t) \simeq g(\varepsilon, y, z, \xi, t) + \sum_{n=1}^k g_n(\varepsilon, \xi, t) \varepsilon^n. \quad (19)$$

Then, expansions (18) and (19) are to be substituted in Eqs. (4) with equating the like terms with respect to the explicit powers of ε . Thus, in the first order, this gives

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(\varepsilon, \xi, t) - \bar{g}(\varepsilon, z) X_1(\varepsilon, \xi, t), \quad \frac{dz_1}{dt} = g(\varepsilon, y, z, \xi, t) - \bar{g}(\varepsilon, z), \quad (20)$$

where

$$X_1(\varepsilon, \xi, t) \equiv \frac{\partial}{\partial z} X(\varepsilon, z, \xi, t), \quad z = z(\varepsilon, t).$$

For the approximations of order $n \geq 2$, we get

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(\varepsilon, \xi, t), \quad \frac{dz_n}{dt} = g_n(\varepsilon, \xi, t). \quad (21)$$

The initial conditions for all $n = 1, 2, \dots$ are

$$y_n = z_n = 0 \quad (t = 0). \quad (22)$$

The functions f_n and g_n depend on y_1, y_2, \dots, y_n , and on z_1, z_2, \dots, z_n , but it is important that the dependence on y_n and z_n is linear. The latter follows from the fact that expanding a function

$$f \left(y + \sum_{n=1}^k y_n \varepsilon^n \right) = \sum_{n=1}^k f_n \varepsilon^n$$

in powers of ε , one has

$$\begin{aligned} f_1 &= f'(y)y_1, \quad f_2 = \frac{1}{2!} [f''(y)y_1 + f'(y)y_2], \\ f_3 &= \frac{1}{3!} [f'''(y)y_1 + 2f''(y)y_2 + f'(y)y_3], \end{aligned}$$

and so on. In this way, Eqs. (20) directly define y_1 and z_1 , and Eqs. (21) are linear equations, thus, being easily integrated.

Usually, one does not need the higher-order approximations since the main physics, in the majority of cases, is already well described by the guiding centers (16) and (17). The latter are good approximations to the exact solutions [7] in the time interval $0 \leq t \leq T_s/\varepsilon$, where T_s is a characteristic time of the slow-solution variation. In those cases when the higher-order approximations are important, each k -order approximant can also be improved by invoking some sort of summation [8] of asymptotic series (18), for instance, the self-similar summation [9–12].

2.5. Selection of Space Structures. The solutions to differential or integro-differential nonlinear equations in partial derivatives are generally nonuniform in space exhibiting the formation of different spatial structures. And it often happens that a given set of equations possesses several solutions corresponding to different spatial patterns or to different scales of such patterns [13]. When there is a family of solutions describing several possible patterns, the question arises which of these solutions, and respectively patterns, is preferable and in what sense could it be preferable. This problem of pattern selection is a general and very important problem constantly arising in considering spatial structures. In this subsection we delineate a simple way that in many cases helps to solve the problem of pattern selection. A more refined theory will be presented in Sections 9 and 10.

Assume that the obtained solutions describe spatial structures that can be parametrized by a multiparameter β , so that the k -order approximations $u_k(\beta, \vec{r}, t)$ and $s_k(\beta, \vec{r}, t)$ include the dependence on β whose value is, however, yet undefined. To define β , and respectively the related pattern, one may proceed in the spirit of the self-similar approximation theory [14–23], by treating β as a control function. According to the theory [14–23], control functions are to be defined from fixed-point conditions for an approximation cascade constructed for an observable quantity. For the latter, one may take the average energy defined as follows. The internal energy, which is a statistical average of the system Hamiltonian, is a functional $E[u, s]$ of the solutions. Taking the k -order approximations for the latter and averaging the internal energy over the period of fast oscillations and over stochastic variables, one gets the average energy

$$E_k(\beta) \equiv \ll \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E[u_k(\beta, \vec{r}, t), s_k(\beta, \vec{r}, t)] dt \gg . \quad (23)$$

For the sequence of approximations, $\{E_k(\beta)\}$, it is possible to construct an approximation cascade whose fixed point can be given by the condition

$$\frac{\partial}{\partial \beta} E_k(\beta) = 0 , \quad (24)$$

from which one gets the control function $\beta = \beta_k$ defining the corresponding pattern. According to optimal control theory, control functions are defined so that to minimize a cost functional. The latter, in our case, is naturally represented by the average energy (23). Hence, when the fixed-point equation (24) has several solutions, one may select of them that one which minimizes the cost functional (23), so that

$$E_k(\beta_k) = \text{abs} \min_{\beta} E_k(\beta) . \quad (25)$$

Equations (24) and (25) have a simple physical interpretation as the minimum conditions for the average energy (23). However, one should keep in mind that

there is no, in general, such a principle of minimal energy for nonequilibrium systems [13]. Therefore the usage of the ideas from the self-similar approximation theory [14–23] provides a justification for employing conditions (24) and (25) for nonequilibrium processes.

The scale separation approach presented in this section makes it possible to solve rather complicated sets of nonlinear differential equations describing various nonequilibrium phenomena in statistical systems. More details on this approach can be found in Refs. 24–28.

3. REAL SPACE REPRESENTATION

When considering the interaction of atoms with electromagnetic fields, one usually employs the so-called mode representation, expanding field operators over mode wave functions [29,30]. These can be either free-mode functions, that is plane waves, or resonator-mode functions depending on the resonator geometry. We prefer to deal with the real-space representation because of the following reasons: First, the evolution equations in this representation are written in a form more convenient for analysing temporal nonstationary behaviour of solutions. Second, it is more suitable for describing nonuniform solutions corresponding to self-organized space structures. And third, this representation is more appropriate for using the scale separation approach. Since the real space representation is rarely considered in literature, it is worth recalling in brief the derivation of the main equations in this representation [31]. To understand the basis of the main evolution equations is very important, for these equations will be constantly used in what follows. One more peculiarity of the consideration below, differing it from the standard texts, is the comparison of the formulas for the cases of electrodipole and magnetodipole transitions.

Let us have a system of radiators that can be atoms, molecules, nuclei, etc. Assume that the size of a radiator, a_0 , is small as compared to the mean distance between them, a , as well as to the characteristic radiation wavelength λ ,

$$\frac{a_0}{a} \ll 1, \quad \frac{a_0}{\lambda} \ll 1, \quad (26)$$

while the relation between a and λ can be arbitrary. Canonical variables related to the electromagnetic field are the electric field \vec{E} and the vector potential \vec{A} , whose commutation relations are

$$[E^\alpha(\vec{r}, t), A^\beta(\vec{r}', t)] = 4\pi i c \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

$$[E^\alpha(\vec{r}, t), E^\beta(\vec{r}', t)] = [A^\alpha(\vec{r}, t), A^\beta(\vec{r}', t)] = 0,$$

where c is the light velocity and the indices $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, or x, y, z , enumerate the Cartesian coordinates. The magnetic field is

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) .$$

To uniquely define the latter, we invoke the Coulomb gauge condition

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 .$$

Here and in what follows the system of units is used where $\hbar \equiv 1$.

The radiator charges are described by the annihilation, ψ , and creation, ψ^\dagger , field operators with the commutation relations

$$[\psi(\vec{r}, t), \psi^\dagger(\vec{r}', t)]_\mp = \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad [\psi(\vec{r}, t), \psi(\vec{r}', t)]_\mp = 0 ,$$

$$[\psi(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}', t)] = [\psi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}', t)] = 0 ,$$

in which the indices minus or plus mean the commutators or anticommutators, respectively, depending on the Bose or Fermi statistics of the charges.

Assume that in addition to the quantum radiation fields \vec{E} and \vec{H} there are classical fields \vec{E}_0 and \vec{H}_0 for which we have

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi_0(\vec{r}, t) , \quad \vec{H}_0(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0(\vec{r}, t) , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0(\vec{r}, t) = 0 .$$

These additional fields can be due to external sources or can be created by the matter which the radiators are inserted in.

Each radiator is also subject to the action of a scalar potential $\varphi_i(\vec{r})$ representing all stationary Coulomb interactions. Thus, we may introduce the total scalar and vector potentials

$$\varphi_{tot}(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{r}) , \quad \vec{A}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t) , \quad (27)$$

where N is the number of radiators. Then the local energy operator is defined as

$$\hat{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m_0} \left[i \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A}_{tot}(\vec{r}, t) \right]^2 + e \varphi_{tot}(\vec{r}, t) , \quad (28)$$

where m_0 is mass and e , charge of a particle. Omitting here the relativistic term $e^2 \vec{A}_{tot}^2 / c^2$ and using the Coulomb calibration, we have

$$\hat{H}(\vec{r}, t) = -\frac{\nabla^2}{2m_0} + \frac{ie}{m_0 c} \vec{A}_{tot}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} + e \varphi_{tot}(\vec{r}, t) .$$

The Hamiltonian of the system of radiators interacting with electromagnetic field and with matter is written as the sum

$$\hat{H} = \hat{H}_r + \hat{H}_f + \hat{H}_{rf} + \hat{H}_m + \hat{H}_{mf} , \quad (29)$$

in which the terms represent, respectively, the Hamiltonians of radiators, field, radiator–field interaction, matter, and matter–field interaction. The Hamiltonian of the system of radiators is

$$\hat{H}_r(t) = \int \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left[-\frac{\nabla^2}{2m_0} + e \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) d\vec{r} . \quad (30)$$

This includes also the direct interaction of radiators with matter by means of the effective scalar potentials $\varphi_i(\vec{r})$. The field Hamiltonian writes

$$\hat{H}_f(t) = \frac{1}{8\pi} \int [\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{H}^2(\vec{r}, t)] d\vec{r} . \quad (31)$$

The radiator–field interaction is described by

$$\hat{H}_{rf}(t) = \int \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left[\frac{ie}{m_0 c} \vec{A}_{tot}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} + e \varphi_0(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) d\vec{r} . \quad (32)$$

The Hamiltonians of matter and of matter–field interaction are to be specified according to particular cases under consideration.

The size of a radiator, according to inequalities (26), is the smallest characteristic length. If \vec{r}_i is the center-of-mass of a radiator, we shall use the notation

$$\vec{E}_i(t) \equiv \vec{E}(\vec{r}_i, t) , \quad \vec{H}_i(t) = \vec{H}(\vec{r}_i, t) ,$$

$$\vec{A}_i(t) \equiv \vec{A}(\vec{r}_i, t) , \quad \vec{E}_{0i}(t) \equiv \vec{E}_0(\vec{r}_i, t) , \quad \vec{H}_{0i}(t) = \vec{H}_0(\vec{r}_i, t) .$$

For \vec{r} in the vicinity of \vec{r}_i , we may write

$$\varphi_0(\vec{r}, t) \simeq -\vec{r} \cdot \vec{E}_{0i}(t) \quad (\vec{r} \approx \vec{r}_i) ,$$

$$\vec{A}_0(\vec{r}, t) \simeq -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{H}_{0i}(t) , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \vec{A}_i(t) - \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_i) \times \vec{H}_i(t) .$$

The energy levels of each radiator are defined by the Schrödinger equation

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m_0} + e \varphi_i(\vec{r}) \right] \psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i) = E_n \psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i) ,$$

where it is assumed that all radiators are identical and $\varphi_i(\vec{r}) = \varphi(\vec{r} - \vec{r}_i)$. The eigenfunctions $\psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i)$ form a complete orthonormal set enumerated by the indices n and i , so that

$$\int \psi_m^*(\vec{r} - \vec{r}_i) \psi_n(\vec{r} - \vec{r}_j) d\vec{r} = \delta_{mn} \delta_{ij}, \quad \sum_{in} \psi_n^*(\vec{r} - \vec{r}_i) \psi_n(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

With these functions, we may define the density of transition current

$$\vec{j}_{mn}(\vec{r}) = -\frac{ie}{2m_0} [\psi_m^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_n(\vec{r}) - \psi_n(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_m^*(\vec{r})] \quad (33)$$

and the transition current

$$\vec{j}_{mn} = \int \vec{j}_{mn}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (34)$$

We also introduce the electric transition dipole

$$\vec{d}_{mn} = e \int \psi_m^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_n(\vec{r}) d\vec{r} \quad (35)$$

and the magnetic transition dipole

$$\vec{\mu}_{mn} = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{j}_{mn}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (36)$$

Using the equality

$$\vec{\nabla} = m_0 \left[\vec{r}, -\frac{\nabla^2}{2m_0} + e \varphi_i(\vec{r}) \right],$$

one can connect the electric transition current (34) and transition dipole (35) as

$$\vec{j}_{mn} = i \omega_{mn} \vec{d}_{mn}, \quad \omega_{mn} \equiv E_m - E_n. \quad (37)$$

The field operators can be expanded over the basis of the wave functions as

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n \sum_{i=1}^N c_{ni}(t) \psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

From the commutation relations for the field operators one has

$$[c_{mi}(t), c_{ni}^\dagger(t)]_\mp = \delta_{mn} \delta_{ij}, \quad [c_{mi}(t), c_{nj}(t)]_\mp = 0.$$

The fact that each radiator is certainly in one of the states labelled by the index n is expressed by the unipolarity condition

$$\sum_n c_{ni}^\dagger(t) c_{ni}(t) = 1. \quad (38)$$

The wave functions $\psi_n(\vec{r} - \vec{r}_i)$, in agreement with inequalities (26), are localized in a small region of the size of a radiator. Such functions are called the localized orbitals. The localization condition can be represented by the equality

$$\int \psi_m^*(\vec{r} - \vec{r}_i) f(\vec{r}) \psi_n(\vec{r} - \vec{r}_j) d\vec{r} = 0 \quad (i \neq j),$$

in which $f(\vec{r})$ is a finite function.

Using the notations and conditions introduced above, we transform the radiator Hamiltonian (30) to the form

$$\hat{H}_r(t) = \sum_n \sum_{i=1}^N E_n c_{ni}^\dagger(t) c_{ni}(t). \quad (39)$$

The radiator-field Hamiltonian (32) becomes

$$\hat{H}_{rf}(t) = - \sum_{mn} \sum_{i=1}^N c_{mi}^\dagger(t) c_{ni}(t) \left[\vec{d}_{mn} \cdot \vec{E}_{0i}(t) + \frac{1}{c} \vec{j}_{mn} \cdot \vec{A}_i(t) + \vec{\mu}_{mn} \cdot \vec{B}_i(t) \right], \quad (40)$$

where

$$\vec{B}_i(t) = \vec{H}_{0i}(t) + \vec{H}_i(t) \quad (41)$$

is the total magnetic field.

From definitions (34) to (36), we have

$$\vec{d}_{mn}^* = \vec{d}_{nm}, \quad \vec{j}_{mn}^* = \vec{j}_{nm}, \quad \vec{\mu}_{mn}^* = \vec{\mu}_{nm}.$$

Because the wave functions are usually either symmetric or antisymmetric with respect to the spatial inversion, so that

$$|\psi_n(-\vec{r})| = |\psi_n(\vec{r})|, \quad (42)$$

then we see that $\vec{d}_{nn} = \vec{j}_{nn} = 0$ but, in general, $\vec{\mu}_{nn} \neq 0$.

The next approximation that is usually involved is related to the situation when only a couple of radiator levels takes part in the considered process. This happens when the transition frequency

$$\omega_0 \equiv \omega_{21} = E_2 - E_1 > 0 \quad (43)$$

for these two levels is selected by means of an external alternating field whose frequency is close to the transition frequency (43). In this way, considering only two levels is equivalent to the quasiresonance approximation. Then, it is convenient to introduce the transition operators

$$\sigma_i^-(t) = c_{1i}^\dagger(t) c_{2i}(t), \quad \sigma_i^+(t) = c_{2i}^\dagger(t) c_{1i}(t)$$

and the population-difference operator

$$\sigma_i^z(t) = c_{2i}^\dagger(t) c_{2i}(t) - c_{1i}^\dagger(t) c_{1i}(t),$$

so that

$$2c_{1i}^\dagger(t) c_{1i}(t) = 1 - \sigma_i^z(t), \quad 2c_{2i}^\dagger(t) c_{2i}(t) = 1 + \sigma_i^z(t).$$

The commutation relations for the introduced operators are

$$[\sigma_i^-, \sigma_j^+] = -\delta_{ij} \sigma_i^z, \quad [\sigma_i^-, \sigma_j^-] = [\sigma_i^+, \sigma_j^+] = 0, \quad [\sigma_i^-, \sigma_j^z] = 2 \delta_{ij} \sigma_i^-,$$

$$[\sigma_i^+, \sigma_j^z] = -2 \delta_{ij} \sigma_i^+, \quad [\sigma_i^-, \vec{A}_j] = [\sigma_i^-, \vec{E}_j] = [\sigma_i^z, \vec{A}_j] = [\sigma_i^z, \vec{E}_j] = 0,$$

where all operators are taken at coinciding times.

With the notation

$$\vec{d}_{21} \equiv \vec{d}, \quad \vec{\mu}_{21} \equiv \vec{\mu}, \quad (44)$$

we have $\vec{d}_{12} = \vec{d}^*$, $\vec{\mu}_{12} = \vec{\mu}^*$, and consequently

$$\vec{j}_{12} = -i \omega_0 \vec{d}^*, \quad \vec{j}_{21} = i \omega_0 \vec{d}. \quad (45)$$

Since only the difference between level energies is measurable, one can set $E_1 = 0$. Then the radiator Hamiltonian (39) reduces to

$$\hat{H}_r(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_0 [1 + \sigma_i^z(t)]. \quad (46)$$

Everywhere in what follows we assume that electromagnetic fields acting on a radiator do not change the classification of its energy levels. In the other case it would be impossible to talk about quasiresonance. This implies that the interaction energies of a radiator with fields are assumed to be much smaller than ω_0 . Because of the latter, the term

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\vec{\mu}_{11} + \vec{\mu}_{22}) + (\vec{\mu}_{22} - \vec{\mu}_{11}) \sigma_i^z(t)] \cdot \vec{B}_i(t),$$

entering the radiator-field Hamiltonian (40), can be neglected as compared to Eq. (46). As a result, we obtain

$$\hat{H}_{rf}(t) = - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{c} \vec{j}_i(t) \cdot \vec{A}_i(t) + \vec{d}_i(t) \cdot \vec{E}_{0i}(t) + \vec{\mu}_i(t) \cdot \vec{B}_i(t) \right], \quad (47)$$

where the notation

$$\vec{j}_i(t) = i \omega_0 \left[\vec{d} \sigma_i^+(t) - \vec{d}^* \sigma_i^-(t) \right], \quad \vec{d}_i(t) = \vec{d} \sigma_i^+(t) + \vec{d}^* \sigma_i^-(t),$$

$$\vec{\mu}_i(t) = \vec{\mu} \sigma_i^+(t) + \vec{\mu}^* \sigma_i^-(t) \quad (48)$$

is used. The Hamiltonian of the matter-field interaction can be written analogously to the first term in Eq. (47) as

$$\hat{H}_{mf}(t) = -\frac{1}{c} \sum_{j=1}^{N_0} \vec{J}_{mj}(t) \cdot \vec{A}_j(t), \quad (49)$$

where N_0 is the number of particles forming the matter and \vec{J}_{mj} is a local matter current having the structure of the operator $\vec{J}_{mj} = (e/m)\vec{p}_j$, with \vec{p}_j being the momentum of a j -particle.

The transition between the quantum states ψ_1 and ψ_2 can be either accompanied by the change of parity or not. Then from definitions (35) and (36) it follows that one has one of two possibilities:

$$\begin{aligned} \vec{d} &\neq 0, & \vec{\mu} &= 0 && (\text{changed parity}) ; \\ \vec{d} &= 0, & \vec{\mu} &\neq 0 && (\text{conserved parity}) . \end{aligned} \quad (50)$$

Thus, we actually have to deal with only one of the dipole transitions, either with electric or with magnetic. Here we consider them in parallel in order to compare these two cases.

4. STOCHASTIC MEAN-FIELD APPROXIMATION

Now it is necessary to write down the evolution equations for the operators entering the total Hamiltonian (29) whose terms are given by Eqs. (46), (31), (47), and (49). The Heisenberg equations yield

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{r}, t), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\vec{E}(\vec{r}, t), \quad (51)$$

which are, actually, the operator Maxwell equations, where the operator of current is

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \left[\vec{j}_i(t) - c \vec{\mu}_i(t) \times \vec{\nabla} \right] \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \sum_{j=1}^{N_0} \vec{J}_{mj}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (52)$$

For the transition operators we have

$$\frac{d\sigma_i^-}{dt} = -i \omega_0 \sigma_i^- + \left(k_0 \vec{d} \cdot \vec{A}_i - i \vec{d} \cdot \vec{E}_{0i} - i \vec{\mu} \cdot \vec{B}_i \right) \sigma_i^z \quad (53)$$

for the lowering operator, where $k_0 \equiv \omega_0/c$, and the Hermitian conjugate equation for the rising operator σ_i^+ . For the population-difference operator we get

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i^z}{dt} = & -2k_0 \left(\vec{d} \sigma_i^+ + \vec{d}^* \sigma_i^- \right) \cdot \vec{A}_i + \\ & + 2i \left(\vec{d} \sigma_i^+ - \vec{d}^* \sigma_i^- \right) \cdot \vec{E}_{0i} + 2i \left(\vec{\mu} \sigma_i^+ - \vec{\mu}^* \sigma_i^- \right) \cdot \vec{B}_i . \end{aligned} \quad (54)$$

From Eqs. (51), using the Coulomb calibration, we find the wave equation

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{r}, t) . \quad (55)$$

The solution of the latter has the form

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{vac}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \int \vec{J} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (56)$$

in which \vec{A}_{vac} is the vacuum vector potential being a solution of the uniform wave equation. With the operator of current (52), the vector potential (56) can be written as the sum

$$\vec{A} = \vec{A}_{vac} + \vec{A}_{rad} + \vec{A}_{mat} \quad (57)$$

of the vacuum potential \vec{A}_{vac} , the radiator potential

$$\vec{A}_{rad}(\vec{r}_i, t) = \sum_j \frac{1}{cr_{ij}} \vec{j}_j \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) + \sum_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \times \left(r_{ij} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} - 1 \right) \vec{\mu}_j \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) , \quad (58)$$

and of the matter potential

$$\vec{A}_{mat}(\vec{r}_i, t) = \sum_j \frac{1}{c r_{ij}} \vec{J}_{mj} \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) , \quad (59)$$

where $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}|$, and the summation \sum_j does not include the term with $j = i$.

Our aim is to derive the evolution equations for the variables

$$u_i(t) \equiv \langle \sigma_i^- (t) \rangle , \quad s_i(t) \equiv \langle \sigma_i^z (t) \rangle , \quad (60)$$

in which the angle brackets mean the statistical averaging over the radiator degrees of freedom. For the double correlators, we shall employ the *mean-field-type decoupling*

$$\langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \rangle = \langle \sigma_i^\alpha \rangle \langle \sigma_j^\beta \rangle \quad (i \neq j) . \quad (61)$$

The quantum effects due to self-action [29] can be taken into account by including into the evolution equations the attenuation terms defined by

$$\gamma \equiv \frac{4}{3} k_0^3 (d_0^2 + \mu_0^2) , \quad (62)$$

where $d_0 \equiv |\vec{d}|$ and $\mu_0 \equiv |\vec{\mu}|$. More generally, one includes the phenomenological longitudinal and transverse attenuation parameters γ_1 and γ_2 .

To take into account the retardation, we may remember that the action of electromagnetic fields is characterized by the energies that are much smaller than ω_0 . That is, in the zero order one has $\sigma_i^- \sim \exp(-i\omega_0 t)$, as follows from Eq. (53). This suggests to treat the retardation by means of the formula

$$\langle \sigma_j^- \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) \rangle = u_j(t) \exp(i k_0 r_{ij}) , \quad (63)$$

which can be called the *quasirelativistic approximation* since in the relativistic limit, $c \rightarrow \infty$, Eq. (63) becomes an identity.

Comparing the terms of the vector potential (58), induced by either electrodi- pole or magnetodipole transitions, we notice their essential difference. Really, averaging over angles gives

$$\sum_j f(r_{ij}) \vec{r}_{ij} = 0 , \quad (64)$$

unless there is a special arrangement of radiators in space. Hence, the vector potential induced by magnetodipole transitions, in usual conditions, is negligibly small. Then for the averaged potential (58), we have

$$\langle \vec{A}_{rad}(\vec{r}_i, t) \rangle = i k_0^2 \sum_j \left(\vec{d} \varphi_{ij}^* u_j^* - \vec{d}^* \varphi_{ij} u_j \right) , \quad (65)$$

where

$$\varphi_{ij} \equiv \frac{\exp(i k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} . \quad (66)$$

The influence of vacuum fluctuations and of matter is characterized by the term

$$\xi_i(t) \equiv k_0 \vec{d} \cdot \left[\vec{A}_{vac}(\vec{r}_i, t) + \vec{A}_{mat}(\vec{r}_i, t) \right] , \quad (67)$$

which we consider as a stochastic variable, whose properties are to be defined by additional conditions.

In this way, we come to the evolution equations for the transverse variable,

$$\frac{du_i}{dt} = -(i \omega_0 + \gamma_2) u_i - i s_i \left(\vec{d} \cdot \vec{E}_{0i} + \vec{\mu} \cdot \vec{H}_{0i} \right) +$$

$$+i k_0^3 s_i \vec{d} \cdot \sum_j (\vec{d} \varphi_{ij}^* u_j^* - \vec{d}^* \varphi_{ij} u_j) + s_i \xi_i , \quad (68)$$

and for the longitudinal variable,

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} = & 2 i u_i^* (\vec{d} \cdot \vec{E}_{0i} + \vec{\mu} \cdot \vec{H}_{0i}) - 2 i u_i (\vec{d}^* \cdot \vec{E}_{0i} + \vec{\mu}^* \cdot \vec{H}_{0i}) - \\ & - 2 i k_0^3 (\vec{d} u_i^* + \vec{d}^* u_i) \cdot \sum_j (\vec{d} \varphi_{ij}^* u_j^* - \vec{d}^* \varphi_{ij} u_j) - \gamma_1 (s_i - \zeta) - 2(u_i^* \xi_i + u_i \xi_i^*), \end{aligned} \quad (69)$$

where $\zeta \in [-1, 1]$ is a pumping parameter. An equation for u_i^* can be obtained by the complex conjugation of Eq. (68). Another useful equation is

$$\begin{aligned} \frac{d|u_i|^2}{dt} = & -2 \gamma_2 |u_i|^2 + s_i (u_i^* \xi_i + u_i \xi_i^*) - i s_i u_i^* (\vec{d} \cdot \vec{E}_{0i} + \vec{\mu} \cdot \vec{H}_{0i}) + \\ & + i s_i u_i (\vec{d}^* \cdot \vec{E}_{0i} + \vec{\mu}^* \cdot \vec{H}_{0i}) + \\ & + i k_0^3 s_i (u_i^* \vec{d} + u_i \vec{d}^*) \cdot \sum_j (\vec{d} \varphi_{ij}^* u_j^* - \vec{d}^* \varphi_{ij} u_j) . \end{aligned} \quad (70)$$

Equations (68) to (70) are basic for describing nonequilibrium collective phenomena in radiating systems. The set of assumptions employed for deriving these equations can be briefly named the *stochastic mean-field approximation* since the mean-field-type decoupling (61) was used for the radiator correlators, but quantum effects are taken into account through the stochastic variable (67).

5. DYNAMICAL CHARACTERISTICS OF COHERENCE

One of the most important results of the cooperative behaviour of radiators is the appearance of coherent radiation. The level of coherence of electromagnetic fields can be described by the corresponding correlation functions [32]. Here we introduce another characteristic of coherence, which is convenient for considering the radiation from ensembles of radiators [33].

The energy density of the radiated electromagnetic field is

$$W \equiv \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) , \quad (71)$$

where $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ and $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$. Differentiating Eq. (71) with respect to time, using the Maxwell equations (51), and defining the intensity of scattering

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} \equiv \frac{1}{2} (\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{J}) \quad (72)$$

and the Poynting vector

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{8\pi} (\vec{E} \times \vec{H} - \vec{H} \times \vec{E}) , \quad (73)$$

we obtain the continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial t} (W + W_s) + \operatorname{div} \vec{S} = 0 . \quad (74)$$

The intensity of radiation into the unit solid angle is

$$I(\vec{n}, t) \equiv <: \vec{n} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) :> r^2 , \quad (75)$$

where $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$, $r \equiv |\vec{r}|$, and the colons imply the normal ordering of operators. To accomplish the latter, one separates the Hermitian operators into their conjugate parts, which, for instance, for the vector potential (58) reads as

$$\vec{A}_{rad}(\vec{r}, t) = \vec{A}^+(\vec{r}, t) + \vec{A}^-(\vec{r}, t) , \quad (76)$$

where

$$\vec{A}^+(\vec{r}, t) = \sum_j \left[\frac{i k_0 \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \frac{1 + i k_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \vec{\mu} \times (\vec{r} - \vec{r}_j) \right] \sigma_j^+ \left(t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_j| \right) .$$

Respectively, the electromagnetic positive and negative fields related to Eq. (76) are

$$\vec{E}_{rad} \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{rad}}{\partial t} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- , \quad \vec{H}_{rad} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}_{rad} = \vec{H}^+ + \vec{H}^- .$$

In the time and space derivatives, we may employ, for differentiating σ_j^\pm , the relations

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \right) \sigma_j^\pm \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) = 0 , \quad \left(\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \pm i k_0 \right) \sigma_j^\pm \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) = 0 .$$

In the wave zone, where $r \gg |\vec{r}_i|$ and $|\vec{r} - \vec{r}_j| \simeq r - \vec{n} \cdot \vec{r}_j$, ($r \gg |\vec{r}_j|$), we have

$$\vec{A}^+(\vec{r}, t) \simeq i \frac{k_0}{r} (\vec{d} + \vec{\mu} \times \vec{n}) \sum_j \sigma_j^+ \left(t - \frac{r - \vec{n} \cdot \vec{r}_j}{c} \right) , \quad (77)$$

from where

$$\vec{E}^+ = -ik_0 \vec{A}^+ , \quad \vec{H}^+ = \vec{n} \times \vec{E}^+ . \quad (78)$$

Then in the part of the Poynting vector (73), describing the radiation from the ensemble of radiators, one has

$$\vec{S}_{rad} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times \vec{H}_{rad} , \quad \vec{H}_{rad} = \vec{n} \times \vec{E}_{rad} .$$

For the corresponding part of the radiation intensity (75), we get

$$I_{rad}(\vec{n}, t) = \frac{cr^2}{4\pi} \langle : \vec{E}_{rad}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{E}_{rad})^2 : \rangle . \quad (79)$$

Averaging the latter over stochastic variables and over fast oscillations yields

$$\bar{I}(\vec{n}, t) \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \ll I_{rad}(\vec{n}, t) \gg dt , \quad (80)$$

the slow variables in the process of integration being kept fixed. For the radiation intensity (79), this results in

$$\bar{I}(\vec{n}, t) = \omega_0 \gamma \sum_{ij}^N f_{ij}(\vec{n}) \overline{\langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle} , \quad (81)$$

where

$$f_{ij}(\vec{n}) \equiv \frac{3}{8\pi} |\vec{n} \times \vec{e}|^2 \exp(i k_0 \vec{n} \cdot \vec{r}_{ij}) \quad (82)$$

and $\vec{e} = \vec{d}/d_0$ or $\vec{\mu}/\mu_0$ depending on the type of radiation.

In the radiation intensity (81), we may separate the terms with the coinciding and with different indices, so that $\sum_{ij} = \sum_{i=j} + \sum_{i \neq j}$. This makes it possible to separate the radiation intensity into the incoherent and coherent parts,

$$\bar{I}(\vec{n}, t) = I_{inc}(\vec{n}, t) + I_{coh}(\vec{n}, t) , \quad (83)$$

so that the incoherent radiation intensity is

$$I_{inc}(\vec{n}, t) = \frac{1}{2} \omega_0 \gamma \sum_{i=1}^N f_{ii}(\vec{n}) [1 + s_i(t)] \quad (84)$$

while the coherent radiation intensity is

$$I_{coh}(\vec{n}, t) = \omega_0 \gamma \sum_{i \neq j}^N f_{ij}(\vec{n}) \overline{\langle u_i^*(t) u_j(t) \rangle} . \quad (85)$$

Here the equality $2\sigma_i^+ \sigma_i^- = 1 + \sigma_i^z$ was used. The total radiation intensity is given by the integral

$$I(t) \equiv \int \bar{I}(\vec{n}, t) d\Omega(\vec{n}) = I_{inc}(t) + I_{coh}(t) \quad (86)$$

over solid angles. Here the incoherent part is

$$I_{inc}(t) = \frac{1}{2} \omega_0 \gamma \sum_{i=1}^N [1 + s_i(t)] , \quad (87)$$

and the coherent part is

$$I_{\text{coh}}(t) = \omega_0 \gamma \sum_{i \neq j}^N f_{ij} \overline{u_i^*(t) u_j(t)}, \quad (88)$$

where

$$f_{ij} \equiv \int f_{ij}(\vec{n}) d\Omega(\vec{n}), \quad f_{ii} = 1. \quad (89)$$

Finally, the level of coherence can be defined [33] by means of the *coherence coefficients*

$$C_{\text{coh}}(\vec{n}, t) \equiv \frac{I_{\text{coh}}(\vec{n}, t)}{I_{\text{inc}}(\vec{n}, t)}, \quad C_{\text{coh}}(t) \equiv \frac{I_{\text{coh}}(t)}{I_{\text{inc}}(t)}. \quad (90)$$

The radiation is mainly incoherent when $C_{\text{coh}} \ll 1$ and it is almost purely coherent if $C_{\text{coh}} \gg 1$.

6. COLLECTIVE LIBERATION OF LIGHT

A system of initially inverted atoms can, due to photon exchange, become strongly correlated, as a result emitting a coherent pulse. This effect of self-organization, accompanied by a coherent burst, is called the Dicke superradiance [34]. This phenomenon is well studied for atoms in vacuum [1,29,30], including different particular cases, such as superradiance in two-component systems [35–37], superradiance from ensembles of three-level molecules [1,38], two-photon superradiance [39,40], and so on (see citations in Refs. [41]). When radiating atoms or molecules are placed in a solid, they interact with phonons [42,43], which can lead to such interesting phenomena as the laser cooling of solids [44,45].

When an atom is placed in a periodic dielectric structure, in which, due to periodicity, a photonic band gap develops, then spontaneous emission with a frequency inside the band gap can be rigorously forbidden [46,47]. This kind of matter, where photon band gap appears because of the structure periodicity in real space, has been called photonic band-gap materials. The photon band gap also appears in natural dense media due to photon interactions with optical collective excitations, such as phonons, magnons, or excitons [48,49]. One calls this type of the gap the polariton band gap since photons coupled with collective excitations of a medium are termed polaritons.

If a single resonance atom is placed in a medium with a photon band gap, and the atomic transition frequency lies inside this gap, then the spontaneous emission is suppressed, which is named the localization of light [46,47]. This

effect is caused by the formation of a photon–atom bound state [50–52]. When a collection of identical resonance atoms is doped into a medium with a photon band gap, so that the atomic transition frequency is inside this gap, then the atoms, in principle, can radiate because of the formation of a photonic impurity band within the photon band gap [50,53–55]. A model case of a concentrated sample, whose linear size L is much smaller than the radiation wavelength λ , has been considered for studying superradiance near a photonic band gap [56,57], when the transition frequency almost coincides with the frequency of the upper band edge. Here, following Ref. 58, we study the realistic case of a sample with $\lambda \ll L$.

Assume that the localization of light occurs for a single atom with an electric dipole transition, so that its population difference is always $s_0 = s(0)$. Considering an ensemble of resonance atoms, we resort to Eqs. (68), (69), and (70). For simplicity, we write $u_i = u$ and $s_i = s$. Introduce the effective coupling parameters

$$g \equiv \frac{3\gamma}{4\gamma_2} \sum_j \frac{\sin(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}}, \quad g' \equiv \frac{3\gamma}{4\gamma_2} \sum_j \frac{\cos(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}}, \quad (91)$$

where $\gamma \equiv 4k_0^3 d_0^2/3$. In the absence of resonator imposing a selected mode,

$$g \approx g' \approx \frac{3\gamma}{4\gamma_2} \rho \lambda^3, \quad (92)$$

where ρ is the density of resonance atoms. It is convenient to introduce the effective frequency and effective attenuation defined, respectively, as

$$\Omega \equiv \omega_0 + \gamma_2 g' s, \quad \Gamma \equiv \gamma_2 (1 - g s). \quad (93)$$

These expressions include the influence of local fields [59] through the coupling parameters (91). Since the latter take into account the existence of an ensemble of atoms, we may call Ω and Γ the *collective frequency* and *collective width*, respectively.

With these notations, Eq. (68) reduces to

$$\frac{du}{dt} = -(i \Omega + \Gamma) u + s \xi + \gamma_2 \vec{e}_d^2 (g + i g') s u^*, \quad (94)$$

where $\xi = \xi_i$ and $\vec{e}_d \equiv \vec{d}/d_0$. Equation (69) becomes

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = & -4 \gamma_2 g |u|^2 - \gamma_1 (s - s_0) - 2 (u^* \xi + u \xi^*) - \\ & - 2 \gamma_2 \left[(g + i g') (u^* \vec{e}_d)^2 + (g - i g') (u \vec{e}_d^*)^2 \right], \end{aligned} \quad (95)$$

where $\zeta = s_0$ takes into account that for a single atom the localization of light occurs. And for Eq. (70), we have

$$\begin{aligned} \frac{d|u|^2}{dt} &= -2\Gamma|u|^2 + s(u^*\xi + \xi^*u) + \\ &+ \gamma_2 s \left[(g + i g')(u^*\vec{e}_d)^2 + (g - ig')(u\vec{e}_d^*)^2 \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

Let us accept the natural inequalities

$$\frac{\gamma_1}{\Omega} \ll 1, \quad \frac{\gamma_2}{\Omega} \ll 1, \quad \left| \frac{\Gamma}{\Omega} \right| \ll 1. \quad (97)$$

And, as always, we keep in mind that the interaction term (67) is small as compared to the frequency Ω , or that $\ll \xi \gg = 0$, which tells that this term is small on average. Then, according to Sec. 2, we may classify the solution u as fast while s and $|u|^2$ as slow. Solving Eq. (94), with s being a quasi-invariant, we get

$$u(t) = \left[u_0 + s \int_0^t e^{(i\Omega+\Gamma)t'} \xi(t') dt' \right] e^{-(i\Omega+\Gamma)t}. \quad (98)$$

Introduce the notation

$$\alpha \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Re}}{\tau \Gamma s} \int_0^\tau \ll \xi^*(t)u(t) \gg dt, \quad (99)$$

where Re means the real part and which, if $\ll \xi \gg = 0$, takes the form

$$\alpha = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Re}}{\tau \Gamma} \int_0^\tau dt \int_0^t e^{-(i\Omega+\Gamma)(t-t')} \ll \xi^*(t)\xi(t') \gg dt'. \quad (99)$$

When $\xi(t)$ is a stochastic variable corresponding to a stationary random process, so that

$$\ll \xi^*(t)\xi(t') \gg = \ll \xi^*(t-t')\xi(0) \gg,$$

then the notation (99) becomes

$$\alpha = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Re}}{\tau \Gamma} \int_0^\tau dt \int_0^t e^{-(i\Omega+\Gamma)t'} \ll \xi^*(t')\xi(0) \gg dt'. \quad (99)$$

Defining a new function

$$w \equiv |u|^2 - \alpha s^2, \quad (100)$$

and averaging the right-hand sides of Eqs. (95) and (96) over time and over stochastic variables we get

$$\frac{ds}{dt} = -4g\gamma_2 w - \gamma_1^* (s - \zeta^*), \quad \frac{d|u|^2}{dt} = -2\Gamma w,$$

where

$$\gamma_1^* \equiv \gamma_1 + 4\gamma_2 \alpha, \quad \zeta^* \equiv \frac{\gamma_1}{\gamma_1^*} s_0.$$

In what follows, we assume that the quantity (99), describing the intensity of interaction between atoms and matter, is small,

$$|\alpha| \ll 1. \quad (101)$$

To understand the structure of the atom-matter coupling α , we may model the random variable ξ by the interaction of an atom with an ensemble of oscillators as

$$\xi(t) = \sum_{\omega} \gamma_{\omega} (b_{\omega} e^{-i\omega t} + b_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega t}),$$

where b_{ω} and b_{ω}^{\dagger} are Bose operators. Then the atom-matter coupling is

$$\alpha = \sum_{\omega} \gamma_{\omega}^2 \left[\frac{n_{\omega}}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2} + \frac{1 + n_{\omega}}{(\omega + \Omega)^2 + \Gamma^2} \right],$$

with $n_{\omega} \equiv \ll b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} \gg$. If the coupling α is small, then $\gamma_1^* \approx \gamma_1$, $\zeta^* \approx s_0$, and $d|u|^2/dt \approx dw/dt$. Therefore, we obtain the equations

$$\frac{ds}{dt} = -4g\gamma_2 w - \gamma_1 (s - s_0), \quad \frac{dw}{dt} = -2\gamma_2 (1 - g s) w. \quad (102)$$

For transient times, when $t \ll \gamma_1^{-1}$, Eqs. (102) can be solved explicitly, giving

$$s = -\frac{\gamma_0}{g\gamma_2} \tanh\left(\frac{t - t_0}{\tau_0}\right) + \frac{1}{g}, \quad w = \frac{\gamma_0^2}{4g^2\gamma_2^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t - t_0}{\tau_0}\right), \quad (103)$$

where the integration constants $\gamma_0 = \tau_0^{-1}$ and t_0 are defined by the initial conditions $u(0) = u_0$ and $s(0) = s_0$. For the radiation width γ_0 , we get the equation

$$\gamma_0^2 = \Gamma_0^2 + 4g^2\gamma_2^2 (|u_0|^2 - \alpha_0 s_0^2), \quad (104)$$

where

$$\Gamma_0 \equiv \gamma_2(1 - gs_0), \quad \gamma_0 \equiv \frac{1}{\tau_0}, \quad \alpha_0 \equiv \alpha(0).$$

For the delay time, we find

$$t_0 = \frac{\tau_0}{2} \ln \left| \frac{\gamma_0 - \Gamma_0}{\gamma_0 + \Gamma_0} \right|. \quad (105)$$

Introducing the critical coupling

$$\alpha_c \equiv \frac{(1 - gs_0)^2}{4g^2 s_0^2} + \frac{|u_0|^2}{s_0^2}, \quad (106)$$

we may rewrite the radiation width as

$$\gamma_0 = 2g |s_0| \gamma_2 \sqrt{\alpha_c - \alpha_0}. \quad (107)$$

In the case of only one atom, we have to set $g = 0$. Then Eqs. (102) give

$$s = s_0, \quad w = (|u_0|^2 - \alpha_0 s_0^2) e^{-2\gamma_2 t} \quad (g = 0),$$

which means that the light is localized. But for an ensemble of atoms the radiation becomes possible.

To find out what happens at large times, when $t \rightarrow \infty$, we need to analyse the stationary solutions of Eqs. (102). There are two pairs of such solutions:

$$s_1^* = s_0, \quad w_1^* = 0 \quad (108)$$

and

$$s_2^* = \frac{1}{g}, \quad w_2^* = \frac{\gamma_1(gs_0 - 1)}{4g^2\gamma_2}. \quad (109)$$

The stability analysis [58] shows that the fixed point (108) is stable for $gs_0 < 1$ and unstable for $gs_0 > 1$, when the point (109) becomes stable. When $gs_0 < 1$, the stationary point (108) is a stable node, while that (109) is a saddle point. In the interval $1 < gs_0 \leq 1 + \gamma_1/8\gamma_2$, the fixed point (108) is a saddle point, and that (109) is a stable node. For $gs_0 > 1 + \gamma_1/8\gamma_2$, the stationary solutions (108) correspond again to a saddle point, while the fixed point (109) becomes a stable focus. In the latter case, the pulsing regime of radiation is realized, with the asymptotic period between pulses

$$T_p = \frac{4\pi}{|\gamma_1^2 + 8(1 - gs_0)\gamma_1\gamma_2|^{1/2}}. \quad (110)$$

However, at finite times the radiation pulses are not periodic, so that the characteristic time (110) is an approximate period only for $t \rightarrow \infty$.

In this way, when a single atom cannot radiate because of the localization of light, an ensemble of atoms can emit coherent radiation, provided that the interaction between atoms is sufficiently strong, so that $gs_0 > 1$. This is why such an effect can be called the collective liberation of light. However, this liberation is not complete but only partial since $s_2^* > 0$.

7. AMPLIFICATION BY NONRESONANT FIELDS

An essential enhancement of radiation can occur due to correlations between radiators, which results in the emission of a coherent pulse. In order that these correlations could be sufficiently strong, it is usually required that the radiation wavelength would be much larger than the mean distance between radiators. If the latter is not the case, it is hardly probable that the self-organized coherence can develop. How would it be possible to amplify the radiation intensity for a system of radiators whose wavelength is smaller than or comparable with the mean distance between them? This question is of high importance for short-wave emission such as x -ray and γ -ray radiation. Coherent transient effects due to phase modulation of recoilless γ radiation have been considered both theoretically and experimentally [60–63]. A regenerated signal of gamma echo has been observed [64], which is similar to photon echo in optics [65]. In the present section we explore the conditions when *stationary* enhancement of short-wave radiation is feasible, being due to external nonresonant fields. Some preliminary results on the problem have been reported [66–68], based on simplified models. Here the problem is considered more accurately, using the main Eqs. (68) to (70). The latter, in the case of short-wave radiation, when the interaction of radiators can be neglected, take the form

$$\frac{du_i}{dt} = -(i\omega_0 + \gamma_2)u_i - is_i \vec{d} \cdot \vec{E}_{0i}, \quad (111)$$

$$\frac{ds_i}{dt} = 2i(u_i^* \vec{d} - u_i \vec{d}^*) \cdot \vec{E}_{0i} - \gamma_1(s_i - \zeta), \quad (112)$$

$$\frac{d|u_i|^2}{dt} = -2\gamma_2|u_i|^2 - is_i(u_i^* \vec{d} - u_i \vec{d}^*) \cdot \vec{E}_{0i}. \quad (113)$$

The initial conditions are $u_i(0) = u_0$ and $s_i(0) = s_0$.

Assuming, as usual, the existence of small parameters

$$\frac{\gamma_1}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\gamma_2}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_{0i}|}{\omega_0} \ll 1, \quad (114)$$

we see that u_i has to be classified as a fast solution while s_i and $|u_i|^2$, as slow ones. With s_i being a quasi-invariant, Eq. (111) gives

$$u_i(t) = e^{-(i\omega_0 + \gamma_2)t} \left[u_0 - i s_i \vec{d} \cdot \int_0^t \vec{E}_{0i}(\tau) e^{(i\omega_0 + \gamma_2)\tau} d\tau \right].$$

Let the external field $\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{0i}(t)$ consist of two parts,

$$\vec{E}_{0i} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_i - \omega t)} + \vec{E}_1^* e^{-(\vec{k} \cdot \vec{r}_i - \omega t)}, \quad (115)$$

one being a stationary nonresonant field \vec{E}_0 , and another part is a pair of plane waves, which are in quasiresonance with the transition frequency,

$$\frac{|\Delta|}{\omega_0} \ll 1, \quad \Delta \equiv \omega - \omega_0. \quad (116)$$

Then the solution of Eq. (111) writes

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -\frac{s_i \vec{d} \cdot \vec{E}_0}{\omega_0 - i\gamma_2} + \frac{s_i \vec{d} \cdot \vec{E}_1}{\Delta + i\gamma_2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_i - \omega t)} + \\ & + \left(u_0 + \frac{s_i \vec{d} \cdot \vec{E}_0}{\omega_0 - i\gamma_2} - \frac{s_i \vec{d} \cdot \vec{E}_1}{\Delta + i\gamma_2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_i)} \right) e^{-(i\omega_0 + \gamma_2)t}. \end{aligned} \quad (117)$$

Substituting this into the right-hand side of Eq. (112) and averaging over time as

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(s, t) dt,$$

we come to the equation

$$\frac{ds_i}{dt} = -\gamma_1^* (s_i - \zeta^*), \quad (118)$$

with

$$\gamma_1^* \equiv \gamma_1 + 4\gamma_2 \left(\frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_0|^2}{\omega_0^2 + \gamma_0^2} + \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2} \right), \quad \zeta^* \equiv \frac{\gamma_1}{\gamma_1^*} \zeta.$$

The solution to Eq. (118) is

$$s_i(t) = s_0 e^{-\gamma_1^* t} + \zeta^* \left(1 - e^{-\gamma_1^* t} \right). \quad (119)$$

Calculating the correlation function

$$\overline{u_i^*(t) u_j(t)} = s^2(t) \left(\frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_0|^2}{\omega_0^2 + \gamma_0^2} + \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}_{ij})} \right),$$

where, for simplicity, we set $s_i = s$, we find the incoherent and coherent radiation intensities (84) and (85), respectively, as

$$I_{inc}(\vec{n}, t) = \frac{3N}{16\pi} \omega_0 \gamma |\vec{n} \times \vec{e}_d|^2 [1 + s(t)],$$

$$I_{coh}(\vec{n}, t) = \frac{3N^2}{8\pi} \omega_0 \gamma |\vec{n} \times \vec{e}_d|^2 s^2(t) \times$$

$$\times \left[F(k_0 \vec{n}) \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_0|^2}{\omega_0^2 + \gamma_2^2} + F(k_0 \vec{n} - \vec{k}) \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2} \right], \quad (120)$$

where $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$ and the form factor is

$$F(\vec{k}) \equiv \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j}^N e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_{ij}} = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \right|^2. \quad (121)$$

As is seen from expressions (120) and (121), the maxima of coherent radiation occur in the directions satisfying the condition

$$(k_0 \vec{n} - \vec{k}) \cdot \vec{r}_i = 2\pi n_i \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots). \quad (122)$$

This corresponds either to forward scattering, when all $n_i = 0$, and the periodicity of matter is not required, or to the scattering in the Bragg directions, for which the strict space periodicity of radiators is needed. The enhancement of coherent radiation in the directions defined by condition (122) is called the Borrmann effect [69,70], which for the case of γ -rays is sometimes termed the Kagan–Afanasiev effect [71,72].

The total radiation intensities (87) and (88) are

$$\begin{aligned} I_{inc}(t) &= \frac{1}{2} N \omega_0 \gamma [1 + s(t)], \\ I_{coh}(t) &= N^2 \varphi \omega_0 \gamma s^2(t) \left(\frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_0|^2}{\omega_0^2 + \gamma_2^2} + \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2} \right), \end{aligned} \quad (123)$$

where the shape factor is

$$\varphi \equiv \frac{3}{8\pi} \int |\vec{n} \times \vec{e}_d|^2 F(k_0 \vec{n} - \vec{k}) d\Omega(\vec{n}). \quad (124)$$

The value of the latter strongly depends on the shape of the considered sample. Thus, for pencil-like or disk-like shapes [29], one has

$$\varphi = \begin{cases} \frac{3\lambda}{8L}, & \frac{\lambda}{2\pi L} \ll 1, \quad \frac{R}{L} \ll 1 \\ \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda}{\pi R} \right)^2, & \frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1, \quad \frac{L}{R} \ll 1, \end{cases}$$

where R and L are the radius and length of a cylindrical sample, and $\lambda \equiv 2\pi/k$, $k \equiv |\vec{k}| = \omega/c$.

Consider the stationary limit $t \rightarrow \infty$, keeping in mind the situation typical of Mössbauer experiments, when the alternating field is weak,

$$\frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{\gamma_1 \gamma_2} \ll 1, \quad (125)$$

and let us set, for simplicity,

$$\zeta = -1 \quad (126)$$

which means that there is no additional pumping except through the given field (115). Then Eq. (119) reduces to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_i(t) = -1 + \frac{4\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_0|^2}{\omega_0^2} + \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{\Delta^2 + \gamma_2^2} \right).$$

For the coherence coefficient, defined in Eq. (90), we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{coh}(t) = N \frac{\varphi \gamma_1}{2\gamma_2}. \quad (127)$$

The role of the nonresonant field \vec{E}_0 can be characterized by the *switching factor* [24]

$$S(E_0, t) \equiv \frac{I(t)}{\lim_{E_0 \rightarrow 0} I(t)} \quad (128)$$

and its stationary limit

$$S(E_0) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} S(E_0, t). \quad (129)$$

For our case, we obtain

$$S(E_0) = 1 + \frac{\Delta^2 + \gamma_2^2}{\omega_0^2} \left| \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}_0}{\vec{d} \cdot \vec{E}_1} \right|^2. \quad (130)$$

The switching factors (128) and (129) show how the radiation intensity is amplified when a nonresonant field \vec{E}_0 is switched on, as compared to the situation when $\vec{E}_0 = 0$. As is seen from expression (130), the amplification can be quite noticeable only if $|\vec{d} \cdot \vec{E}_0| \gg |\vec{d} \cdot \vec{E}_1|$, so that to compensate the smallness of the parameters $|\Delta|/\omega_0$ and γ_2/ω_0 .

8. MÖSSBAUER MAGNETIC ANOMALY

Stationary fields, electric or magnetic, can be due not to external sources but can arise in a sample as a result of phase transitions [73,74]. If an ensemble of radiators is incorporated into matter exhibiting a phase transition accompanied by the appearance of a constant field, the latter may influence some radiation characteristics. An interesting example of this kind is given by the gamma radiation of Mössbauer nuclei placed into magnetic materials. This example is especially intriguing because of long-standing controversy related to its interpretation.

There exists a number of experiments demonstrating the so-called magnetic anomaly of the Mössbauer effect in materials undergoing magnetic phase transition. This anomaly consists in an essential increase, up to 50%, of the area under the Mössbauer spectrum below the temperature of magnetic transition, as compared to the spectrum area in paramagnetic state above the transition temperature. A detailed discussion of these experiments can be found in the book [75] and review [76]. The controversy related to this anomaly concerns the explanation of the cause of the latter.

The area of the Mössbauer spectrum, for Mössbauer nuclei in a solid sample, is given by the integral

$$A_{abs} = f_M \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{abs}(\omega) d\omega , \quad (131)$$

in which

$$f_M = \exp(-k_0^2 r_0^2) \quad (132)$$

is the Mössbauer factor, $k_0 = \omega_0/c$, r_0 is the mean-square deviation of the nucleus from a lattice site,

$$\sigma_{abs}(\omega) = \frac{\sigma_0 \Gamma_{abs}^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_{abs}^2} \quad (133)$$

is the absorption cross-section, Γ_{abs} is the absorption half-width,

$$\sigma_0 = \frac{2\pi(1+2I_1)}{k_0^2(1+2I_0)(1+\alpha_e)} \quad (134)$$

is the cross-section of resonant absorption, I_0 and I_1 are the nuclear spins of the ground-state and excited levels, and α_e is the electron conversion coefficient. After integrating Eq. (131), we have the spectrum area

$$A_{abs} = \pi f_M \sigma_0 \Gamma_{abs} . \quad (135)$$

It is important to emphasize that the Mössbauer anomaly, we consider here, has been observed only in the so-called absorption geometry, when absorbing Mössbauer nuclei are placed inside magnetic matter which is irradiated by an external source. Contrary to this, in the experiments with the so-called source geometry, when a radioactive source is incorporated into the magnetic matter, but absorbing Mössbauer nuclei are outside this matter, no magnetic anomaly has been observed [77–79]. Therefore it is clear that the considered Mössbauer anomaly is directly related to the action on Mössbauer nuclei of an effective magnetic field appearing below the critical point. But what is the origin of this anomaly?

Historically, the first suggestion was to ascribe the anomaly in the temperature behaviour of the spectrum area (135) to the influence of the appearing magnetic order on the Mössbauer factor (132). A number of citations having to do with this suggestion are listed in Refs. 75,76. This assumption implies that the mean-square deviation r_0 defining the Mössbauer factor (132) is essentially influenced by arising magnetic order. The course of reasoning is as follows. Mössbauer nuclei doped into a solid are characterized by the same mean-square deviation as the particles forming the solid sample. The latter can be described by the Hamiltonian

$$\hat{H}_m = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(R_{ij}) - \sum_{i \neq j} I(R_{ij}) \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j , \quad (136)$$

in which $\Phi(R_{ij})$ is a potential of direct pair interactions while $I(R_{ij})$ is that of exchange interactions, \vec{S}_i is a spin operator, and $R_{ij} \equiv |\vec{R}_{ij}|$, with $\vec{R}_{ij} = \vec{R}_i - \vec{R}_j$. The indices of summation in Eq. (136) run as $i = 1, 2, \dots, N_0$, with N_0 being the number of lattice sites. Introduce the deviation from a lattice site,

$$\vec{u}_i \equiv \vec{R}_i - \vec{a}_i , \quad (137)$$

defined so that

$$\vec{a}_i = < \vec{R}_i > , \quad < \vec{u}_i > = 0 . \quad (138)$$

Taking into account that $|\vec{u}_i|$ is small as compared to the interparticle distance, one expands the interaction potential in powers of u_i^α up to the second order, which results in the Hamiltonian

$$\hat{H}_m = U_0 + \hat{H}_p + \hat{H}_s + \hat{H}_{sp} + \hat{H}' , \quad (139)$$

whose terms are explained below: the constant part of the lattice energy

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(a_{ij}) ; \quad a_{ij} \equiv |\vec{a}_{ij}| , \quad \vec{a}_{ij} \equiv \vec{a}_i - \vec{a}_j , \quad (140)$$

the phonon term

$$\hat{H}_p = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha \beta} \Phi_{ij}^{\alpha \beta} u_i^\alpha u_j^\beta , \quad (141)$$

in which $\Phi_{ij}^{\alpha \beta} \equiv \partial^2 \Phi(a_{ij}) / \partial a_i^\alpha \partial a_j^\beta$, the spin Hamiltonian

$$\hat{H}_s = - \sum_{i \neq j} I(a_{ij}) S_{ij} ; \quad S_{ij} \equiv \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j , \quad (142)$$

the term responsible for spin–phonon interactions,

$$\hat{H}_{sp} = - \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha\beta} I_{ij}^{\alpha\beta} u_i^\alpha u_j^\beta S_{ij} , \quad (143)$$

where $I_{ij}^{\alpha\beta} = \partial^2 I(a_{ij}) / \partial a_i^\alpha \partial a_j^\beta$, and the term

$$\hat{H}' = - \sum_i \sum_\alpha u_i^\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \sum_\beta u_i^\beta \frac{\partial}{\partial a_i^\beta} \right) F_i^\alpha \quad (144)$$

related to the striction energy, where the striction force acting on the site i is given by the components

$$F_i^\alpha \equiv - \frac{\partial}{\partial a_i^\alpha} \sum_j [\Phi(a_{ij}) - 2I(a_{ij})S_{ij}] .$$

The correct definition of the lattice sites in Eq. (138) presupposes that they serve as equilibrium positions for particles. This implies that the striction energy is to be zero on average,

$$\langle \hat{H}' \rangle = 0 . \quad (145)$$

Then one invokes a kind of the semiclassical approximation

$$\langle u_i^\alpha S_{ij} \rangle = \langle u_i^\alpha \rangle \langle S_{ij} \rangle = 0 , \quad \langle u_i^\alpha u_j^\beta S_{ij} \rangle = \langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle \langle S_{ij} \rangle ,$$

decoupling the phonon and spin degrees of freedom, which suggests to present the operator term in the spin–phonon interaction (143) as

$$u_i^\alpha u_j^\beta S_{ij} = \langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle S_{ij} + u_i^\alpha u_j^\beta \langle S_{ij} \rangle - \langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle \langle S_{ij} \rangle . \quad (146)$$

Thus, the matter Hamiltonian (139) can be reduced to

$$\hat{H}_m = \bar{U}_0 + \hat{H}_p + \hat{H}_s , \quad (147)$$

with the renormalized terms

$$\bar{U}_0 = U_0 + \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha\beta} I_{ij}^{\alpha\beta} \langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle \langle S_{ij} \rangle ,$$

$$\hat{H}_p = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha\beta} D_{ij}^{\alpha\beta} u_i^\alpha u_j^\beta , \quad \hat{H}_s = - \sum_{i \neq j} J_{ij} S_{ij} ,$$

in which the striction energy, because of condition (145), is omitted and the renormalized interactions are

$$D_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \Phi_{ij}^{\alpha\beta} - 2I_{ij}^{\alpha\beta} \langle S_{ij} \rangle, \quad J_{ij} \equiv I(a_{ij}) + \sum_{\alpha\beta} I_{ij}^{\alpha\beta} \langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle.$$

The renormalized dynamical matrix $D_{ij}^{\alpha\beta}$ defines the effective phonon spectrum ω_{ks} through the eigenvalue problem

$$\frac{1}{m} \sum_j \sum_\beta D_{ij}^{\alpha\beta} e^{-\vec{k} \cdot \vec{a}_{ij}} e_{ks}^\beta = \omega_{ks}^2 e_{ks}^\alpha,$$

where \vec{e}_{ks} is a polarization vector; the index s , labelling polarizations. The spectrum and polarization vectors are assumed to be even functions of the wave vector, so that $\omega_{ks} = \omega_{-ks}$ and $\vec{e}_{ks} = \vec{e}_{-ks}$. Polarization vectors form a complete orthonormal basis with the properties

$$\vec{e}_{ks} \cdot \vec{e}_{ks'} = \delta_{ss'}, \quad \sum_s e_{ks}^\alpha e_{ks}^\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Expanding the deviation and momentum as

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \sum_{ks} \frac{\vec{e}_{ks}}{\sqrt{2mN_0\omega_{ks}}} (b_{ks} + b_{-ks}^\dagger) e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_i}, \\ \vec{p}_i &= -i \sum_{ks} \sqrt{\frac{m\omega_{ks}}{2N_0}} \vec{e}_{ks} (b_{ks} - b_{-ks}^\dagger) e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_i}, \end{aligned}$$

one transforms the renormalized phonon Hamiltonian to the standard form

$$\hat{H}_p = \sum_{ks} \left(b_{ks}^\dagger b_{ks} + \frac{1}{2} \right).$$

After this, it is straightforward to calculate the correlators

$$\langle u_i^\alpha u_j^\beta \rangle = \frac{\delta_{ij}}{2N_0} \sum_{ks} \frac{e_{ks}^\alpha e_{ks}^\beta}{m \omega_{ks}} \coth \frac{\omega_{ks}}{2T},$$

in which T is temperature. Thus, one gets the mean-square deviation from the equation

$$r_0^2 \equiv \frac{1}{3} \sum_\alpha \langle u_i^\alpha u_i^\alpha \rangle = \frac{1}{6mN_0} \sum_{ks} \frac{1}{\omega_{ks}} \coth \frac{\omega_{ks}}{2T}. \quad (148)$$

In this way, the influence of magnetic order on the mean-square deviation comes from its influence on the phonon spectrum.

However, the magnitude of the spin–phonon interaction, renormalizing the dynamical matrix, is rather small, as compared to the magnitude of direct interactions [76], so that $|I_{ij}^{\alpha\beta}/\Phi_{ij}^{\alpha\beta}| \sim 10^{-3}$. Hence, magnetic order cannot influence much phonon frequencies, as well as the sound velocity

$$c_s \equiv \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega_{ks}}{k} = - \lim_{k \rightarrow 0} \sum_j \sum_{\alpha\beta} D_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{a}_{ij})^2}{2mk^2} e_{ks}^\alpha e_{ks}^\beta. \quad (149)$$

This conclusion is in agreement with all known experiments where phonon characteristics have been examined by means of neutron scattering, sound–velocity measurements, elastic and thermal investigations. The onset of magnetic order can change the Mössbauer factor not more than by 1%, which cannot explain the observed Mössbauer anomaly of the spectrum area (135).

Another explanation was advanced by Babikova et al. [78], supposing that magnetic order can influence the electron conversion coefficient α_e in the cross-section (134). A noticeable decrease of the conversion coefficient could lead to the increase of the cross-section (134), and, consequently, to the increase of the spectrum area (135). The decrease of the conversion coefficient could be due to the suppression of the conversion channel in favour of the γ -radiation channel whose weight could be increased by the enhancement of the γ -radiation caused by the arising magnetic order [80].

To estimate the influence of an effective magnetic field, appearing in magnets, on the radiation intensity of Mössbauer nuclei, we have to consider the switching factor (130) that in our case, takes the form

$$S(H_0) = 1 + \frac{\gamma_2^2}{\omega_0^2} \left| \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{H}_0}{\vec{\mu} \cdot \vec{H}_1} \right|^2.$$

For the characteristic Mössbauer nucleus ^{57}Fe , we have $\omega_0 = 1.44 \times 10^4$ eV and $\gamma_2 = \gamma_1 = 0.67 \times 10^{-8}$ eV, which can be transformed to the frequency units as $\omega_0 \sim 10^{19}\text{s}^{-1}$ and $\gamma_2 \sim \gamma_1 \sim 10^7\text{s}^{-1}$. The corresponding wavelength is $\lambda \sim 10^{-8}$ cm. Let us take for the effective magnetic field $H_0 \sim 10^5$ G and for the alternating source field $H_1 \sim 10^{-5}$ G. The transition magnetic dipole $\mu_0 \sim 0.1\mu_n$, where μ_n is the nuclear magneton, hence $\mu_0 \sim 10^{-13}$ eV/G. This gives $\mu_0 H_0 \sim 10^7\text{s}^{-1}$ and $\mu_0 H_1 \sim 10^{-3}\text{s}^{-1}$. From here we obtain $\gamma_2^2 H_0^2 / \omega_0^2 H_1^2 \sim 10^{-4}$, which tells us that the switching factor $S(H_0)$ changes too little. Therefore, although the arising magnetic order does enhance the radiation of Mössbauer nuclei, this enhancement is not sufficient for causing such a drastic increase of the spectrum area.

The last quantity that could be blamed to be responsible for the Mössbauer magnetic anomaly is the absorption width Γ_{abs} . The latter can be presented as the sum

$$\Gamma_{abs} = \gamma_2 + \gamma_2^* \quad (150)$$

of the homogeneous line width γ_2 and of the inhomogeneous line width γ_2^* . The inhomogeneous width can be due to the variation of local magnetic fields resulting in the random shift of the Mössbauer transition frequency [81]. Returning to Section 3, we see that, really, an external magnetic field shifts the transition frequency as $\omega_0 + (\vec{\mu}_{22} - \vec{\mu}_{11}) \cdot \vec{H}_0$. Therefore, the inhomogeneous width can be of order $\gamma_2^* \sim (\vec{\mu}_{22} - \vec{\mu}_{11}) \cdot \vec{H}_0$ or $\gamma_2^* \sim \mu_0 H_0$. From here, $\gamma_2^* \sim 10^7 \text{s}^{-1}$, that is, $\gamma_2^* \sim \gamma_2$. In this way, the anomalous increase of the Mössbauer spectrum area (135) below the magnetic transition temperature can be explained by the increase of the absorption width (150) caused by the increasing inhomogeneous width $\gamma_2^* \sim \mu_0 H_0$.

9. PROBLEM OF PATTERN SELECTION

Nonequilibrium cooperative phenomena are often described by nonlinear differential or integro-differential equations in partial derivatives. The solutions to such equations are in many cases nonuniform in space exhibiting the formation of different spatial structures. It happens that a given set of equations possesses several solutions corresponding to different spatial patterns [13]. In such a case, the question arises which of these solutions, and respectively patterns, to prefer? The problem of pattern selection has no general solution [13]. A possible way of selecting spatial structures, by minimizing the average energy, was delineated in subsection 2.5. Here we advance another method of pattern selection.

Assume that the considered differential equations in partial derivatives can be reduced to a d -dimensional system of ordinary equations; the dimensionality d may equal infinity. Suppose also that admissible patterns are parametrized by a multiparameter β . Let the state of the dynamical system be defined by the set

$$y(t) = \{y_i(t) = y_i(\beta, t) | i = 1, 2, \dots, d\} \quad (151)$$

of solutions to the system of differential equations

$$\frac{d}{dt} y(t) = v(y, t). \quad (152)$$

For different parameters β there are different sets (151) corresponding to different spatial structures. All admissible values of β form a manifold $\mathcal{B} = \{\beta\}$. Each particular value of β can be considered as a realization of the random variable

from the manifold \mathcal{B} . The classification of the states (151) can be done by defining a probability measure on \mathcal{B} .

To introduce the probability distribution $p(\beta, t)$ of patterns at time t , we resort to the ideas of statistical mechanics [82], where a probability p can be connected with entropy S by the relation $p \sim e^{-S}$. The entropy at time t may be expressed as

$$S(t) \equiv \ln |\Delta\Phi(t)| \quad (153)$$

through the elementary phase volume

$$\Delta\Phi(t) \equiv \prod_i \delta y_i(t) . \quad (154)$$

Let us count the entropy from its initial value $S(0)$, thus, considering the entropy variation

$$\Delta S(t) \equiv S(t) - S(0) . \quad (155)$$

Then the probability distribution $p \sim e^{-\Delta S}$, normalized by the condition

$$\int p(\beta, t) d\beta = 1$$

takes the form

$$p(\beta, t) = \frac{e^{-\Delta S(\beta, t)}}{Z(t)} , \quad (156)$$

where the normalization factor is

$$Z(t) = \int e^{-\Delta S(\beta, t)} d\beta .$$

The entropy variation (155) writes

$$\Delta S(t) = \ln \left| \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta\Phi(0)} \right| , \quad (157)$$

where the dependence on β , for brevity, is omitted. Define the multiplier matrix [83]

$$M(t) = [M_{ij}(t)] , \quad M_{ij}(t) \equiv \frac{\delta y_i(t)}{\delta y_j(0)} , \quad (158)$$

for which at the initial time one has

$$M_{ij}(0) \equiv \frac{\delta y_i(0)}{\delta y_j(0)} = \delta_{ij} . \quad (159)$$

The variation of the state (151) gives

$$\delta y(t) = M(t) \delta y(0) , \quad (160)$$

which yields for the elementary phase volume (154)

$$\Delta\Phi(t) = \prod_i \sum_j M_{ij}(t) \delta y_j(0).$$

Hence, the entropy variation (157) is

$$\Delta S(t) = \ln \left| \prod_i \sum_j M_{ij}(t) M_{ji}(0) \right|.$$

With condition (159), this results in

$$\Delta S(t) = \ln \left| \prod_i M_{ii}(t) \right| = \sum_i \ln |M_{ii}(t)|. \quad (161)$$

Taking the variational derivative of equation (152), we get the equation

$$\frac{d}{dt} M(t) = J(y, t) M(t) \quad (162)$$

for the multiplier matrix (158), where

$$J(y, t) = [J_{ij}(y, t)], \quad J_{ij}(y, t) \equiv \frac{\delta v_i(y, t)}{\delta y_j(t)}, \quad (163)$$

is the Jacobian matrix. Substituting the entropy variation (161) into Eq. (156), we get

$$p(\beta, t) = \frac{\prod_i |M_{ii}(\beta, t)|^{-1}}{Z(t)}, \quad (164)$$

with

$$Z(t) = \int \prod_i |M_{ii}(\beta, t)|^{-1} d\beta.$$

Expression (164) defines the probability distribution of patterns labelled by a multiparameter β . This expression naturally connects the notion of probability and the notion of stability. Really, the multipliers are smaller by modulus for more stable solutions and, respectively, patterns, for which the probability is higher.

Another form of the distribution (164) can be derived as follows. Introduce the matrix

$$L(t) = [L_{ij}(t)], \quad L_{ij}(t) \equiv \ln |M_{ij}(t)|. \quad (165)$$

Then the entropy variation (161) becomes

$$\Delta S(t) = \text{Tr } L(t). \quad (166)$$

Since the trace of a matrix does not depend on its representations, we may perform intermediate transformations of Eq. (166) using one particular representation and returning at the end to the form independent of representations. To this end, let us consider a representation when the multiplier matrix is diagonal. Because of Eq. (162) with the initial condition (159), the matrix M is diagonal if and only if the Jacobian matrix is also diagonal. Then from the evolution equation (162) it follows that

$$M_{ii}(t) = \exp \left\{ \int_0^t J_{ii}(y(t'), t') dt' \right\} .$$

Hence

$$L_{ii}(t) = \int_0^t \Lambda_i(t') dt' , \quad \Lambda_i(t) \equiv \operatorname{Re} J_{ii}(t) ,$$

from where

$$\operatorname{Tr} L(t) = \int_0^t \Lambda(t') dt' , \quad \Lambda(t) \equiv \sum_i \Lambda_i(t) .$$

We assume that the state (151) is formed of real functions, so that the velocity field in the evolution equation (152) is also real. Then the eigenvalues of the Jacobian matrix (163) are either real or, if complex, come in complex conjugate pairs. Therefore

$$\sum_i \operatorname{Re} J_{ii}(y, t) = \sum_i J_{ii}(y, t) = \operatorname{Tr} J(y, t) .$$

For the entropy variation (166) we obtain

$$\Delta S(t) = \int_0^t \Lambda(t') dt' , \quad (167)$$

where

$$\Lambda(t) = \operatorname{Tr} J(y, t) \quad (168)$$

is called [84] the *contraction rate*. The latter is given by the form independent of representations of the Jacobian matrix (163). With the entropy variance (167), the probability distribution (156) becomes

$$p(\beta, t) = \frac{1}{Z(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \Lambda(\beta, t') dt' \right\} , \quad (169)$$

where the contraction rate is defined in Eq. (168) and

$$Z(t) = \int \exp \left\{ - \int_0^t \Lambda(\beta, t') dt' \right\} d\beta .$$

The *most probable pattern* at a time t corresponds to the maximum of the distribution (169),

$$\text{abs} \max_{\beta} p(\beta, t) \rightarrow \beta(t). \quad (170)$$

One may also define the *average pattern* at t as corresponding to

$$\bar{\beta}(t) \equiv \int \beta p(\beta, t) d\beta.$$

The most probable and average patterns, in general, do not coincide, although this may happen, especially with increasing time. To illustrate the latter, consider a particular case when the contraction rate $\Lambda(\beta, t) = \Lambda(\beta)$ does not depend on time. Then, as $t \rightarrow \infty$, we have

$$Z(t) = \int e^{-\Lambda(\beta) t} d\beta \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda''(\beta_0)t}} \exp\{-\Lambda(\beta_0)t\},$$

where β_0 is the point of the minimum of $\Lambda(\beta)$, so that

$$\frac{d}{d\beta} \Lambda(\beta) = 0, \quad \Lambda''(\beta) \equiv \frac{d^2}{d\beta^2} \Lambda(\beta) > 0 \quad (\beta = \beta_0).$$

In the distribution

$$p(\beta, t) \simeq \sqrt{\frac{\Lambda''(\beta_0)}{2\pi}} t \exp\{-[\Lambda(\beta) - \Lambda(\beta_0)]t\}$$

one may expand $\Lambda(\beta)$ near $\beta = \beta_0$, which gives

$$p(\beta, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{(\beta - \beta_0)^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad \sigma(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Lambda''(\beta_0)t}}.$$

From here one finds

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(\beta, t) = \delta(\beta - \beta_0).$$

In this way, if differential equations describing a nonequilibrium process have several solutions corresponding to different spatial patterns, the latter can be characterized by the probability distribution (169), with the contraction rate (168). In the case when the multiplier matrix (158) can be calculated, one may use the expression (164) of the probability distribution. If all patterns correspond to stable solutions, it is sufficient to analyse only the beginning of the process of pattern formation. Then for the entropy variation (167) we may write

$$\Delta S(\beta, t) \simeq \Lambda(\beta, 0) t \quad (t \rightarrow 0).$$

Consequently, the most probable pattern, defined by the maximum of the probability distribution (169), that is, by the minimum of the entropy variation (167), is now characterized by the minimum of the contraction rate $\Lambda(\beta, 0)$ at the initial time.

10. TURBULENT PHOTON FILAMENTATION

Spatial structures can appear in radiating systems if the radiation wavelength is much shorter than the system characteristic sizes [13]. For instance, electric field in laser cavities can exhibit a state which bears some analogy with a superfluid vortex [85]. The Maxwell–Bloch equations for slowly varying field amplitudes have been shown to be analogous to hydrodynamic equations for compressible viscous fluid [86]. The Fresnel number for optical systems plays the role similar to the Reynolds number for fluids. In the same way as when increasing the Reynolds number, the fluid becomes turbulent, there can appear optical turbulence when increasing the Fresnel number.

Spatial structures emerge from an initially homogeneous state with a break of space-translational symmetry. For small Fresnel numbers $F \leq 5$, such structures correspond to the empty-cavity Gauss–Laguerre modes imposed by the cavity geometry. These transverse structures can be described by expanding fields over the modal Gauss–Laguerre functions [87–92], which results in reasonable agreement with experiments for CO₂ and Na₂ lasers. For large Fresnel numbers $F > 10$, the appearing structures are very different from those associated with empty-cavity modes. The modal expansion is no longer relevant at large F , and the boundary conditions have little or no importance. The laser medium looks like divided in a large amount of parallel independently oscillating uncorrelated filaments [93–100] the number of filaments being proportional to F , contrary to the case of small Fresnel numbers when the number of bright spots is proportional to F^2 . This filamentation was observed in Dye and CO₂ lasers, as well as in other resonance media, even without resonators [101–105]. The same type of patterns arises in active nonlinear media, such as photorefractive Bi₁₂SiO₂₀ crystal pumped by a laser [106–109]. In the latter media there are also two types of pattern formation: for small Fresnel numbers, the symmetry is imposed through the boundary, while for large Fresnel numbers, the symmetry is imposed by the bulk parameters. In the case of large F , there occurs a kind of self-organization with spontaneous spatial symmetry breaking [110]. It is possible to easily notice a qualitative transition in the behaviour of photorefractive media as well as in that of lasers: In low- F regime there are a few modes of regular arrangement of bright spots corresponding to the peaks of the Gauss–Laguerre functions in cylindrical geometry, the number of modes being proportional to F^2 . And in the high- F regime there are many modes spatially uncorrelated with each other, which is typical for spatiotemporal chaos, the number of the chaotic filaments being proportional to F . Short-range spatial correlation is characteristic for turbulence, this is why one calls the similar phenomenon in optics the optical turbulence.

The theory of self-organized photon filamentation in high-Fresnel-number resonant media was suggested in Refs. 33,111–116, where the consideration was based on simplified models and only the stationary regime was analysed. The

choice of filament radii was done by means of the variational principle, as is described in subsection 2.5. Here we present a more general and elaborate theory based on the evolution equations (68) to (70), which includes the description of temporal behaviour, and for defining the characteristics of filaments we employ the method of pattern selection developed in Sec. 9.

First, it is convenient to pass in Eqs. (68) to (70) to continuous representation replacing the sums by integrals according to the rule

$$\sum_{i=1}^N = \int \rho(\vec{r}) d\vec{r},$$

where $\rho(\vec{r})$ is the spatial density of radiators. Wishing to return to the localized representation, one makes the replacement $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$. In the case when the structure of matter is of no importance, it can be treated as uniform on average setting $\rho(\vec{r}) = \rho \equiv N/V$. Cooperative optical phenomena are often considered in this representation of uniform medium [117]. Let us stress that the uniformity of matter in no case requires the uniformity of fields or polarization. The solutions to Eqs. (68) to (70) can correspond to highly nonuniform structures.

Introduce the notation

$$f(\vec{r}, t) \equiv f_0(\vec{r}, t) + f_{rad}(\vec{r}, t) \quad (171)$$

for an effective field acting on a radiator with the transition dipole \vec{d} . This field consists of the term

$$f_0(\vec{r}, t) \equiv -i \vec{d} \cdot \vec{E}_0(\vec{r}, t) \quad (172)$$

due to an external electric field and of the term

$$f_{rad}(\vec{r}, t) \equiv k_0 \langle \vec{d} \cdot \vec{A}_{rad}(\vec{r}, t) \rangle \quad (173)$$

responsible for the action of other radiators. Taking into account Eq. (65), we have

$$f_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{3}{4} i \gamma \rho \int \left[\varphi(\vec{r} - \vec{r}', t) u(\vec{r}', t) - \vec{e}_d^2 \varphi^*(\vec{r} - \vec{r}', t) u^*(\vec{r}', t) \right] d\vec{r}' , \quad (174)$$

where the continuous representation is used, and

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{e^{ik_0|\vec{r}|}}{k_0|\vec{r}|} , \quad \gamma \equiv \frac{4}{3} k_0^3 d_0^2 .$$

Then Eqs. (68) to (70) acquire the form

$$\frac{du}{dt} = -(i\omega_0 + \gamma_2)u + sf , \quad \frac{ds}{dt} = -2(u^*f + f^*u) - \gamma_1(s - \zeta) ,$$

$$\frac{d|u|^2}{dt} = -2\gamma_2|u|^2 + s(u^*f + f^*u). \quad (175)$$

Notice that from the latter two equations one has

$$\frac{d}{dt}(s^2 + 4|u|^2) = -2\gamma_1 s(s - \zeta) - 8\gamma_2|u|^2.$$

We consider a sample of the cylindrical shape typical of lasers. The seed laser field defining the cylinder axis is given by the sum of two running waves,

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 e^{i(kz - \omega t)} + \vec{E}_1^* e^{-i(kz - \omega t)}, \quad (176)$$

which selects a longitudinal mode. The radius, R , and length, L , of the cylinder are such that the following inequalities are valid:

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1, \quad \frac{\lambda}{R} \ll 1, \quad \frac{R}{L} \ll 1, \quad (177)$$

where a is the mean distance between radiators and λ , wavelength. There are also the standard small parameters

$$\frac{\gamma_1}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\gamma_2}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{|\Delta|}{\omega_0} \ll 1, \quad (178)$$

with $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ being detuning.

The solutions to Eqs. (175) are not necessarily uniform in the whole volume $V = \pi R^2 L$ of the sample, but may have noticeable values only inside narrow regions of filamentary form, while being almost zero outside these filaments. Consider one such filament, and let us surround it by a cylinder of radius b so that the magnitude of solutions is an order smaller at the surface of this enveloping cylinder than at its axis. If the profile of a filament is close to the Gaussian $\exp(-r^2/2r_f^2)$, with r_f being the filament radius, then

$$b = \sqrt{2 \ln 10} r_f. \quad (179)$$

In what follows we assume this relation between the radius b of an enveloping cylinder and the radius r_f of a filament.

Suppose that there are N_f filaments in the volume of the sample, the axis of each filament being centered at a point $\{x_n, y_n\}$, with $n = 1, 2, \dots, N_f$. Let us present the solutions to Eqs. (175) as expansions over enveloping cylinders,

$$u(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_f} u_n(\vec{r}, t) \Theta_n(x, y) e^{ikz}, \quad s(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_f} s_n(\vec{r}, t) \Theta_n(x, y), \quad (180)$$

where

$$\Theta_n(x, y) \equiv \Theta\left(b - \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}\right)$$

is a unit-step function. The filaments are located randomly in the cross-section of the sample, but so that their enveloping cylinders do not intersect with each other. The interaction between filaments is small, which follows from Eq. (174). This is why they do not form a regular lattice but are distributed randomly.

The function $\varphi(\vec{r})$ in Eq. (174) oscillates at the distance λ , and the solutions u_n and s_n essentially change in the radial direction in the interval b . Assuming that

$$\frac{\lambda}{b} \ll 1, \quad (181)$$

we may say that, in the radial direction, the function $\varphi(\vec{r})$ is fastly varying in space, as compared to the slow variation of u_n and s_n . For the latter, we define the averages

$$u(t) \equiv \frac{1}{V_n} \int_{\mathbf{V}_n} u_n(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad s(t) \equiv \frac{1}{V_n} \int_{\mathbf{V}_n} s_n(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (182)$$

over the corresponding enveloping cylinder of the volume $V_n \equiv \pi b^2 L$, where in the left-hand side of Eq. (182) we, for short, do not write the index n .

The seed field (176) is needed mainly for selecting a longitudinal mode with cylindrical symmetry, but the amplitude of this field is small, so that

$$\frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|}{\gamma_2} \ll 1. \quad (183)$$

The excitation of radiators is accomplished by means of pumping characterized by the pumping parameter ζ in Eqs. (175).

Defining the effective coupling parameters

$$g \equiv \frac{3\gamma\rho}{4\gamma_2 V_n} \int_{\mathbf{V}_n} \frac{\sin[k_0|\vec{r} - \vec{r}'| - k(z - z')]}{k_0|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r} d\vec{r}', \quad (184)$$

$$g' \equiv \frac{3\gamma\rho}{4\gamma_2 V_n} \int_{\mathbf{V}_n} \frac{\cos[k_0|\vec{r} - \vec{r}'| - k(z - z')]}{k_0|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r} d\vec{r}', \quad (185)$$

and the collective frequency and width, respectively,

$$\Omega \equiv \omega_0 + g'\gamma_2 s, \quad \Gamma \equiv \gamma_2(1 - gs), \quad (186)$$

for functions (182) we obtain the equations

$$\frac{du}{dt} = -(i\Omega + \Gamma)u - is\vec{d} \cdot \vec{E}_1 e^{-i\omega t},$$

$$\frac{ds}{dt} = -4g\gamma_2|u|^2 - \gamma_1(s - \zeta) - 4\text{Im} \left(u^* \vec{d} \cdot \vec{E}_1 e^{-i\omega t} \right), \quad (187)$$

$$\frac{d|u|^2}{dt} = -2\Gamma|u|^2 + 2s \text{Im} \left(u^* \vec{d} \cdot \vec{E}_1 e^{-i\omega t} \right).$$

Because of the inequalities (178) and (183), the solution u in Eqs. (187) is fast, while s and $|u|^2$ are slow in time. Using the scale separation approach, we find

$$u(t) = u_0 e^{-(i\Omega+\Gamma)t} + \frac{s \vec{d} \cdot \vec{E}_1}{\omega - \Omega + i\Gamma} \left[e^{-i\omega t} - e^{-(i\Omega+\Gamma)t} \right]. \quad (188)$$

Introduce the parameter

$$\alpha \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Im}}{\tau \Gamma s} \int_0^\tau u^*(t) \vec{d} \cdot \vec{E}_1 e^{-i\omega t} dt, \quad (189)$$

characterizing the coupling of radiators with the seed field. This, with Eq. (188), gives

$$\alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{E}_1|^2}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2}. \quad (190)$$

The latter, according to inequality (183), is small,

$$|\alpha| \ll 1. \quad (191)$$

Finally, defining the function

$$w \equiv |u|^2 - \alpha s^2, \quad (192)$$

we obtain the equations

$$\frac{ds}{dt} = -4g\gamma_2 w - \gamma_1(s - \zeta), \quad \frac{dw}{dt} = -2\gamma_2(1 - gs) w. \quad (193)$$

The behaviour of solutions to Eqs. (193) essentially depends on the values of the coupling parameters (184) and (185). To evaluate the latter, we may notice that their integrands diminish and fastly oscillate at the distance of the wavelength λ . If condition (181) holds, we may neglect boundary effects in the integrals (184) and (185) writing approximately

$$\int_{\mathbf{V}_n} f(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \cong V_n \int_{\mathbf{V}_n} f(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Then parameter (184) reduces to

$$g = \frac{3\pi\gamma\rho}{2\gamma_2} \int_0^b r dr \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sin(k_0\sqrt{r^2 + z^2} - kz)}{k_0\sqrt{r^2 + z^2}} dz,$$

where r is the radial variable. Because of the quasiresonance condition $|\Delta| \ll \omega_0$, we have $k_0 \simeq k$. With the change of the variable $x \equiv k(\sqrt{r^2 + z^2} - z)$, we get

$$g = \frac{3\pi\gamma\rho}{2\gamma_2 k} \int_0^b r dr \int_{kr^2/L}^{kL} \frac{\sin x}{x} dx .$$

In this expression, one can replace $kL \rightarrow \infty$, thus obtaining

$$g = \frac{3\pi\gamma\rho}{2\gamma_2 k} \int_0^b \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}\left(\frac{kr^2}{L}\right) \right] r dr ,$$

where the integral sine appears,

$$\text{Si}(x) \equiv \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} + \text{si}(x) , \quad \text{si}(x) \equiv \int_\infty^x \frac{\sin t}{t} dt .$$

Introducing the dimensionless quantity

$$\beta \equiv \frac{kb^2}{L} = \frac{2\pi b^2}{\lambda L} , \quad (194)$$

we come to the coupling parameter

$$g = g(\beta) = \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} \int_0^\beta \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) \right] dx . \quad (195)$$

This can be integrated explicitly by means of the property

$$\int \text{Si}(x) dx = x \text{ Si}(x) + \cos x ,$$

which results in

$$g(\beta) = \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} \left\{ \beta \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\beta) \right] + 1 - \cos \beta \right\} . \quad (196)$$

For the coupling parameter (185), one similarly finds

$$g' = g'(\beta) = - \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} \int_0^\beta \text{Ci}(x) dx , \quad (197)$$

where the integral cosine occurs,

$$\text{Ci}(x) \equiv \int_\infty^x \frac{\cos t}{t} dt .$$

Integrating

$$\int \text{Ci}(x) dx = x \text{ Ci}(x) - \sin x ,$$

we finally get

$$g'(\beta) = \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} [\sin \beta - \beta \text{ Ci}(\beta)] . \quad (198)$$

To better understand the properties of the coupling parameters, we consider two limiting cases. When $x \ll 1$, then

$$\text{Si}(x) \simeq x - \frac{x^3}{18} , \quad \text{Ci}(x) \simeq \gamma_E + \ln x - \frac{x^2}{4} ,$$

where $\gamma_E = 0.577216$ being the Euler constant. From here

$$g(x) \simeq \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right) , \quad g'(x) \simeq \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} x |\ln x| .$$

In the opposite case, when $x \gg 1$, using

$$\text{Si}(x) \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} , \quad \text{Ci}(x) \simeq \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} ,$$

we find

$$g(x) \simeq \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) , \quad g'(x) \simeq \frac{3\pi\gamma\rho L}{4\gamma_2 k^2} \left(\frac{\cos x}{x} \right) .$$

These asymptotic expressions help to analyse the dependence of the coupling parameters on the variable (194) changing in the interval

$$0 < \beta \leq 2F \quad \left(F \equiv \frac{\pi R^2}{\lambda L} \right) . \quad (199)$$

The stability analysis of Eqs. (193), similarly to that given in Ref. 58, shows that, for $g\zeta < 1$, the solutions tend to the stationary stable point $s_1^* = \zeta$, $w_1^* = 0$, while for $g\zeta > 1$, the stable fixed point is

$$s_2^* = \frac{1}{g} , \quad w_2^* = \frac{\gamma_1 (g\zeta - 1)}{4g^2\gamma_2} .$$

In this way, for all β from the interval (199), except the sole case when $g\zeta = 1$, there exists a stable fixed point, that is, almost all solutions are stable, independently of the value of β . Following the method of pattern selection from Sec. 9, we can equip the solutions labelled by β with the probabilistic weights (169).

The most probable, among all stable solutions, is that providing the minimum of the initial contraction rate, which for this case is

$$\Lambda(\beta, 0) = -\gamma_1 - 2\gamma_2 (1 - gs_0) . \quad (200)$$

The minimum of this rate requires that

$$\frac{dg}{d\beta} = 0 , \quad s_0 \frac{d^2g}{d\beta^2} > 0 . \quad (201)$$

For $s_0 > 0$, one needs the minimum of g , which gives $\beta = 4.9$. From Eq. (194), one has $b = 0.88\sqrt{\lambda L}$. And the relation (179) yields

$$r_f = 0.41\sqrt{\lambda L} \quad (s_0 > 0) . \quad (202)$$

When $s_0 < 0$, conditions (201) imply the maximum of g , for which $\beta = 1.92$, $b = 0.55\sqrt{\lambda L}$, and the filament radius is

$$r_f = 0.26\sqrt{\lambda L} \quad (s_0 < 0) . \quad (203)$$

This is practically the same value as found for the filaments radius in Refs. 33,111–115 by using the variational principle of subsection 2.5. When the system of radiators is not inverted at the initial time and becomes excited by means of a pulse characterized by the pumping parameter ζ , one has to consider the filament radius (203) as corresponding to the most probable pattern. The number of filaments can be defined from the normalization condition

$$\frac{1}{V} \int s(\vec{r}, t) d\vec{r} = \zeta , \quad (204)$$

assuming that the population difference equals +1 inside each filament of radius r_f and -1 outside of the filaments. Then the number of filaments is

$$N_f = \frac{1}{2} (1 + \zeta) \left(\frac{R}{r_f} \right)^2 . \quad (205)$$

The most probable filament radius (203) and the number of filaments (205) are in good agreement with the values observed in experiments [93–99,101–105]. The considered phenomenon of filamentation can be termed turbulent since the filaments are chaotically distributed in space and for sufficiently strong pumping, when $g\zeta > 1 + \gamma_1/8\gamma_2$, each filament is aperiodically flashing in time. The turbulent photon filamentation is a self-organized phenomenon due to the bulk properties of interacting radiators. It practically does not depend on boundary conditions and exists in both types of lasers, the resonator–cavity lasers, such as CO₂ and Dye lasers [93–99], as well as in the resonatorless discharge–tube

lasers, such as lasers on Ne, Tl, Pb, N₂, and N₂⁺ vapors [101–105]. The turbulent filamentation is also principally nonlinear phenomenon. Thus, in low-Fresnel-number lasers ($F \leq 5$) the number of light spots is proportional to F^2 . The same dependence of the number of coherent rays on F is typical of the initial linearized stage of superfluorescence [118]. However, for high- F lasers ($F \gg 10$) the number of filaments is proportional to F , which is in agreement with formula (205) giving $N_f \sim F$.

11. SUPERRADIANT SPIN RELAXATION

When the initial state of a spin system is strongly nonequilibrium, different kinds of spin relaxation can occur. If there are no transverse external fields acting on spins, they relax to an equilibrium state by an exponential law with a longitudinal relaxation time T_1 . When the motion of spins is triggered by a transverse magnetic field, the relaxation is again exponential but with a transverse relaxation time T_2 that is usually much shorter than T_1 . A rather special relaxation regime arises, if the spin system is coupled to a resonator. This can be done by inserting the sample into a coil connected with a resonance electric circuit. Because of the action of resonator feedback field, the motion of spins can become highly coherent resulting in their ultrafast relaxation during a characteristic collective relaxation time much shorter than T_2 [119]. This latter type of collective spin relaxation from a strongly nonequilibrium state in the presence of coupling with a resonator is the most difficult to realize experimentally and to describe theoretically. Experimental difficulties have been overcome in a series of observations of this phenomenon for a system of nuclear spins inside different paramagnetic materials [120–127]. The collective relaxation time of this ultrafast coherent process is inversely proportional to the number of spins, N , and the intensity of magnetodipole radiation is proportional to N^2 , in the same way as cooperative radiation time and radiation intensity of N resonant atoms depend on this number in optic superradiance [1,29,30,42,45,59]. This is why the process of collective coherent relaxation of spins has been called *superradiant spin relaxation* or, for short, *spin superradiance*. In the case of spin systems, what is usually measured is not the radiation intensity itself, which is rather weak, but the power of current induced in the resonant circuit [128]. The enhancement of generated pulses by using resonators is, actually, well known in laser optics and is important for realizing superradiance of Rydberg atoms [129] and recombination superradiance in electron-hole or electron-positron plasmas [130]. Resonators can be employed for modifying radiated pulses in optical superradiance [131]. Note also the usage of resonators for amplifying the nuclear spin echo signals in magnets [132,133].

The appearance of strong correlations between spins is due to the resonator feedback field, but not to the photon exchange as it happens for atomic systems. Hence, various quantum effects existing in the interaction of electromagnetic field with atoms [32,134–137] seem to be absent in the case of spin systems. Therefore it looked natural to try, for the theoretical description of relaxation in a spin system coupled with a resonator, to invoke the classical Bloch equations complimented by the Kirchhoff equation for the resonant electric circuit [1,119,138–140]. However, these equations can provide a description of coherent spin relaxation only when the latter is triggered by a coherent pulse, similarly to the semiclassical Bloch – Maxwell equations in optics [1,141,142]. The phenomenon of the self-organized coherent spin relaxation cannot be described by the Bloch – Kirchhoff equations. Then, what initiates spin motion leading to the appearance of purely self-organized spin superradiance? This problem of the origin of pure spin superradiance was posed by Bloembergen and Pound [119]. They also noticed that the thermal Nyquist noise of resonator cannot be a mechanism triggering the motion of spins, since the thermal relaxation time is proportional to the number of spins in the sample and, thus, the thermal damping is to be negligibly small for macroscopic samples. Nevertheless, this notice was forgotten by the following researchers who assumed that it is just the thermal noise of resonator which triggers the spin motion.

To resolve this controversy and to discover the genuine mechanisms originating the spin motion, it was necessary to turn to microscopic models. The system of nuclear spins is characterized [143] by the Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} H_{ij} - \mu_n \sum_i \vec{B} \cdot \vec{I}_i , \quad (206)$$

in which spins interact through the dipole potential

$$H_{ij} = \frac{\mu_n^2}{r_{ij}^3} \left[\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j - 3 (\vec{I}_i \cdot \vec{n}_{ij}) (\vec{I}_j \cdot \vec{n}_{ij}) \right] ,$$

where μ_n is the nuclear magnetic moment, \vec{I}_i is a nuclear spin operator, $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $\vec{n}_{ij} = \vec{r}_{ij}/r_{ij}$. The total magnetic field

$$\vec{B} = H_0 \vec{e}_z + H \vec{e}_x$$

contains an external magnetic field H_0 and a resonator feedback field H defined by the Kirchhoff equation.

The temporal behaviour of a finite number of spins, with $27 \leq N \leq 343$, was analysed numerically by computer simulations [144–149]. From various cases studied, we present here some that give the general qualitative understanding of the whole picture. In Figs. 1–4, $K_{coh} \equiv P_{coh}/P_{inc}$ is a coherence coefficient,

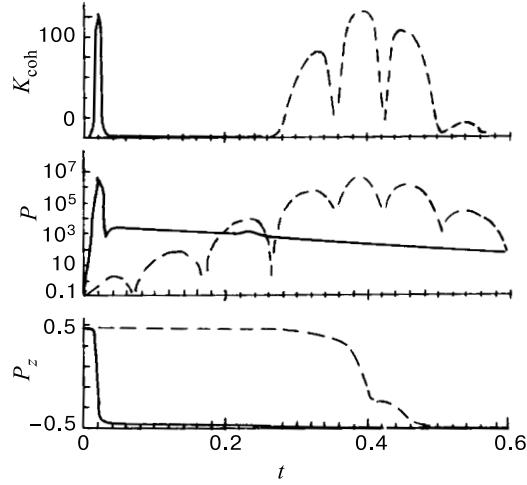


Fig. 1. Coherence coefficient K_{coh} , current power P , and spin polarization p_z as functions of time for two different coupling parameters defined in Eq. (207), g_1 (solid line) and g_2 (dashed line), with the relation $g_1/g_2 = 10$

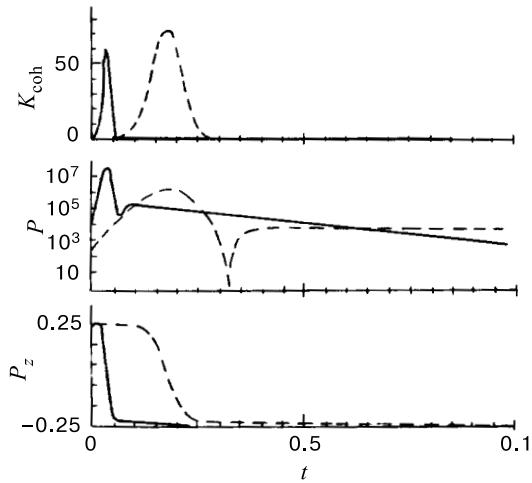


Fig. 2. The same as in Fig. 1 for two different Zeeman frequencies, ω_{01} (solid line) and ω_{02} (dashed line), related by the ratio $\omega_{01}/\omega_{02} = 5$

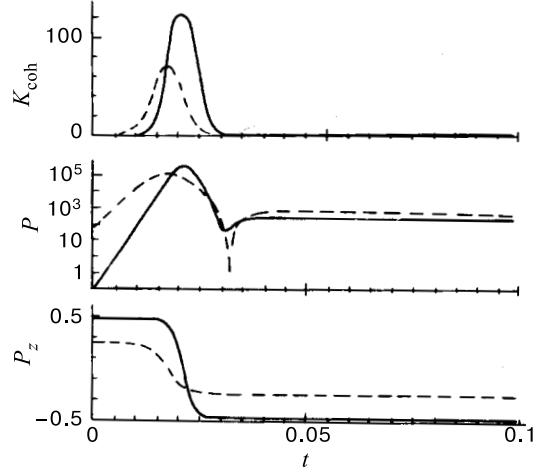


Fig. 3. The same functions as in Fig. 1 for different initial polarizations, $p_{z1}(0)$ (solid line) and $p_{z2}(0)$ (dashed line), with the relation $p_{z1}/p_{z2}(0) = 2$

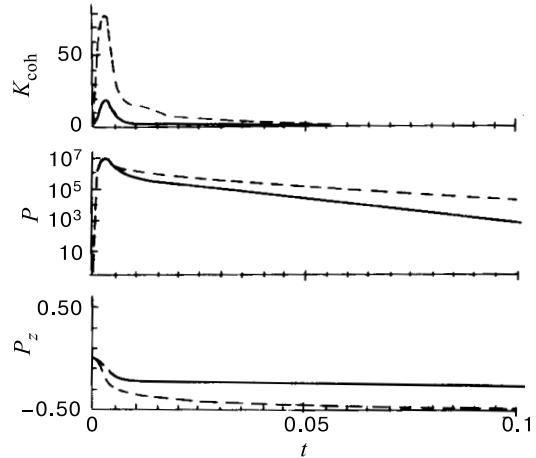


Fig. 4. The same functions as in Fig. 1 for different initial transverse polarizations, $p_{x1}(0)$ (solid line) and $p_{x2}(0)$ (dashed line), with the relation $p_{x1}/p_{x2}(0) = 0.5$

being the ratio of the coherent part of the current power P to its incoherent part, and p_z is the negative spin polarization. In Figs. 5–11, $C_{coh} \equiv I_{coh}/I_{inc}$ is the coherence coefficient of the average magnetodipole radiation defined as in Eq. (90), with respect to the total radiation intensity I . The current power and radiation intensity are given in dimensionless units and time is measured in

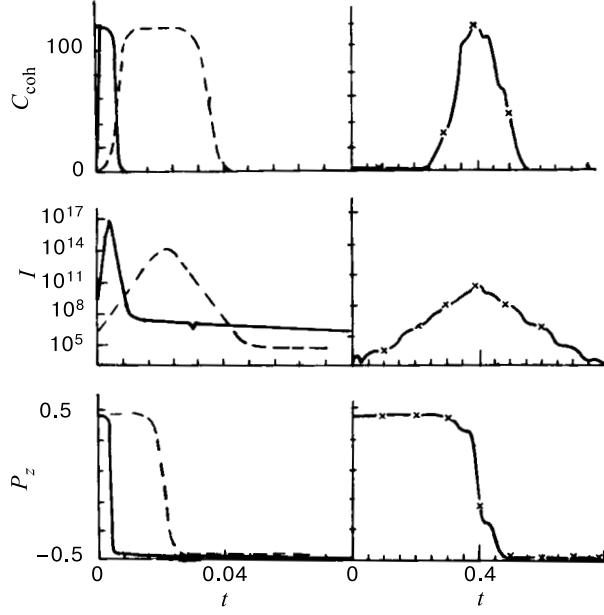


Fig. 5. Coherence coefficient C_{coh} , radiation intensivity I , and spin polarization p_z versus time for $p_z(0) = 0.48$ and different parameters: $\omega_0 = 200$, $g = 25$ (solid line); $\omega_0 = 40$, $g = 25$ (dashed line); and $\omega_0 = 40$, $g = 2.5$ (solid line with crosses)

units of T_2 . In the figure captions, $p_z(0)$ and $p_x(0)$ mean the corresponding polarization components at the initial time, ω_0 is the Zeeman frequency, ω is the natural frequency of the resonant electric circuit and also a frequency of an alternating magnetic field, if any, the amplitude of the latter being denoted by h_0 . The quantity

$$g \equiv \pi^2 \eta \frac{\rho_n \mu_n^2 \omega_0}{\hbar \Gamma_2 \omega} \quad (207)$$

is the effective coupling parameter, in which η is a filling factor; ρ_n , nuclear density; and $\Gamma_2 = T_2^{-1}$ is a line width. Computer simulations proved that pure spin superradiance does exist with no thermal noise involved.

However, computer simulations can provide only a qualitative picture, as the number of spins considered in such simulations is incomparably smaller than what one has in real macroscopic samples. Moreover, these simulations give no analytical formulas, making it difficult, if possible, to classify all relaxation regimes occurring when varying the numerous parameters of the system. Simplified models [150] can also provide only a qualitative understanding.

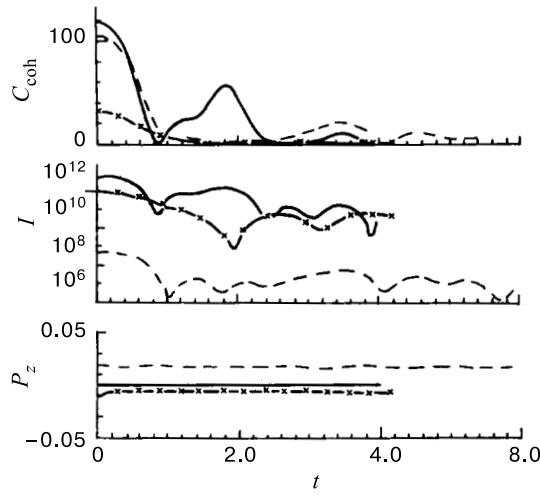


Fig. 6. Coherence coefficient C_{coh} , radiation intensivity I , and spin polarization p_z as functions of time in the case of switched-off resonator-spin coupling ($g = 0$). The varied parameters are: $\omega_0 = 200$, $p_x(0) = 0.48$ (solid line); $\omega_0 = 20$, $p_x(0) = 0.48$ (dashed line); and $\omega_0 = 200$, $p_x(0) = 0.20$ (solid line with crosses)

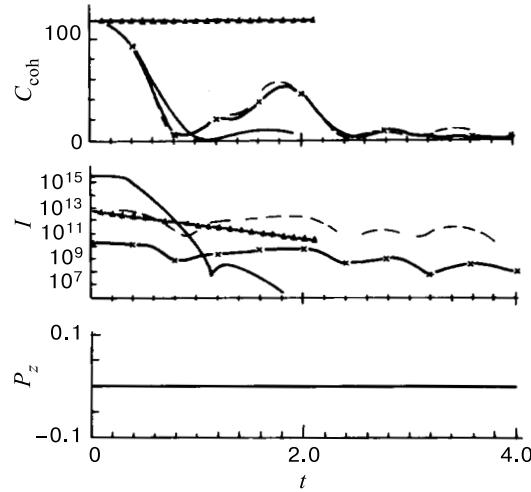


Fig. 7. The same as in Fig. 6 for $p_x(0) = 0.48$ and for different Zeeman frequencies: $\omega_0 = 1000$ (solid line); $\omega_0 = 200$ (dashed line); $\omega_0 = 50$ (solid line with crosses); and $\omega_0 = 200$ with switched-off dipole interaction (solid line with triangles)

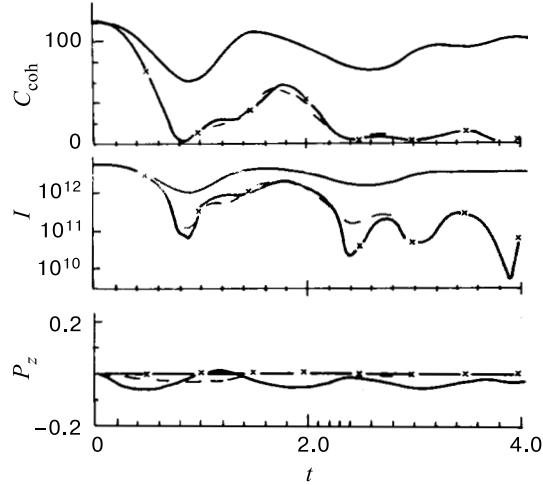


Fig. 8. The same as in Fig. 6 for $p_x(0) = 0.48$ but in the presence of an alternating magnetic field with the frequency $\omega = \omega_0$ and different amplitudes: h_{01} (solid line); h_{02} (dashed line); where $h_{01}/h_{02} = 10$; and $h_{03} = 0$ (solid line with crosses)

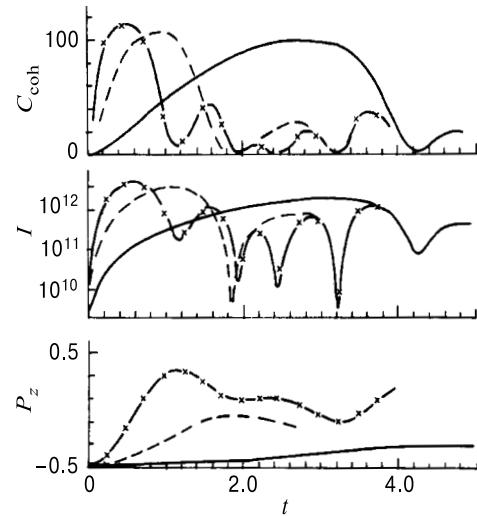


Fig. 9. The same as in Fig. 8 but for $p_x(0) = -0.48$ and different amplitudes of the alternating field: h_{01} (solid line); h_{02} (dashed line); and h_{03} (solid line with crosses), where the amplitude relations are $h_{01}/h_{02} = 0.25$ and $h_{01}/h_{03} = 0.1$

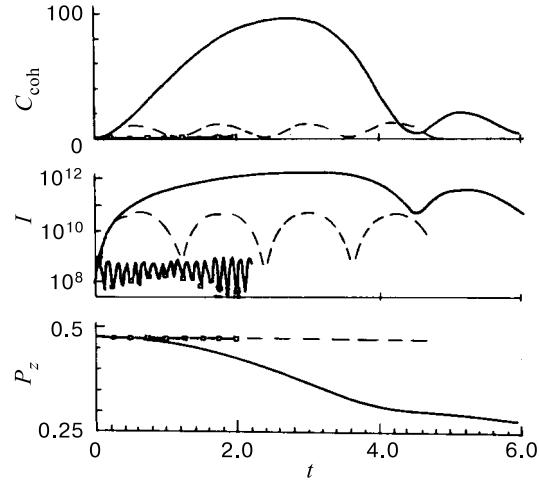


Fig. 10. The same as in Fig. 8 for a varying relative detuning from the resonance $\delta \equiv (\omega - \omega_0)/\omega_0$ taking the values: $\delta = 0$ (solid line); $\delta = 0.025$ (dashed line); and $\delta = 0.25$ (solid line with squares)

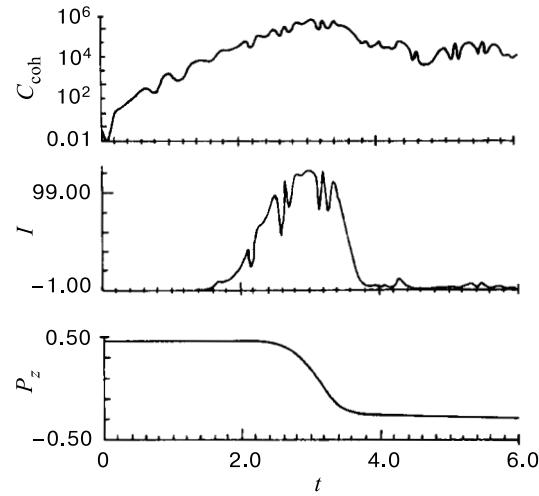


Fig. 11. Radiation intensivity I , coherence coefficient C_{coh} , and spin polarization p_z versus time, in the absence of alternating external fields and with a weak coupling with a resonator, $g \sim 1$

An analytical solution of the evolution equations corresponding to the microscopic Hamiltonian (206) and a complete analysis of different relaxation regimes of nonequilibrium nuclear magnets coupled with a resonator has been done [25,26,151-158] by employing the scale separation approach. The evolution equations are written for the averages

$$u \equiv \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i^- \rangle, \quad s \equiv \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i^z \rangle, \quad (208)$$

where $S_i^- = S_i^x - iS_i^y$. Presenting local fluctuating fields through stochastic variables ξ_0 and ξ , one comes [25,26] to the evolution equations

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i(\omega_0 - \xi_0 + i\Gamma_2) u - i(\gamma_3 h + \xi) s, \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{i}{2} (\gamma_3 h + \xi) u^* - \frac{i}{2} (\gamma_3 h + \xi^*) u - \Gamma_1(s - \zeta), \\ \frac{d}{dt} |u|^2 &= -2\Gamma_2|u|^2 - i(\gamma_3 h + \xi) su^* + i(\gamma_3 h + \xi^*) su, \end{aligned} \quad (209)$$

in which the resonator feedback field, h , in dimensionless units, satisfies the Kirchhoff equation

$$\frac{dh}{dt} + 2\gamma_3 h + \omega^2 \int_0^t h(t') dt' = -2\kappa \frac{d}{dt} (u^* + u) + \gamma_3 f, \quad (210)$$

in which f is an electromotive force, γ_3 is the resonator ringing width, and $\kappa \equiv \pi\eta\rho_n\mu_n^2/\hbar\gamma_3$. The random local fields are defined as Gaussian stochastic variables with the stochastic averages

$$\ll \xi_0^2 \gg = \ll |\xi|^2 \gg = \Gamma_*^2, \quad (211)$$

where Γ_* is the inhomogeneous dipole broadening. Because of the existence of the small parameters

$$\frac{\Gamma_1}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\Gamma_2}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\Gamma_*}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\gamma_3}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{|\Delta|}{\omega_0} \ll 1, \quad (212)$$

where $\Delta \equiv \omega - \omega_0$, the functions u and h can be classified as fast while s and $|u|^2$ as slow.

Solving Eqs. (209) and (210), it was shown [25,26,151] that the role of the thermal Nyquist noise in starting the relaxation process is negligible. But the main cause triggering the motion of spins, leading to coherent self-organization, is the action of *nonsecular dipole interactions*. This gives the answer to the question posed by Bloembergen and Pound [119]: what is the origin of self-organized

coherent relaxation in spin systems? All possible regimes of nonlinear spin dynamics have been analysed. When the nonresonant external pumping is absent, that is $\zeta > 0$, there are seven qualitatively different transient relaxation regimes: *free induction*, *collective induction*, *free relaxation*, *collective relaxation*, *weak superradiance*, *pure superradiance*, and *triggered superradiance* [25,26,151,155].

In the presence of pumping, realized, e.g., by means of dynamical nuclear polarization directing nuclear spins against an external constant magnetic field, one has $\zeta \leq 0$. Then, as was shown using phenomenological equations [139], two stationary solutions can appear. In our approach, the behaviour of the system is as follows [158]. When $\zeta \leq 0$, three dynamical regimes can be observed, depending on the value of ζ with respect to the pump thresholds

$$\zeta_1 = -\frac{1}{g}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{g} \left(1 + \frac{\Gamma_1}{8\Gamma_2}\right). \quad (213)$$

Analysing the equations for the slow variables s and w , where

$$w \equiv |u|^2 - \frac{\Gamma_*^2}{\omega_0^2} s^2, \quad (214)$$

we find two fixed points

$$s_1^* = \zeta, \quad w_1^* = 0; \quad s_2^* = -\frac{1}{g}, \quad w_2^* = -\frac{\Gamma_1(1+g\zeta)}{\Gamma_2 g^2}. \quad (215)$$

When $\zeta_1 < \zeta \leq 0$, the first fixed point is a stable node and the second one is a saddle point. For $\zeta = \zeta_1$, both points merge together, being neutrally stable. After the bifurcation at $\zeta = \zeta_1$, in the region $\zeta_2 \leq \zeta < \zeta_1$, the first fixed point loses its stability becoming a saddle point while the second fixed point becomes a stable node. Finally, when $\zeta < \zeta_2$, the second fixed point turns into a stable focus, and the first one continues to be a saddle point. In this way, there are three qualitatively different lasting relaxation regimes induced by the pumping [158]. The first one is the *incoherent monotonic relaxation* to the first stationary solution s_1^* , w_1^* . The second regime is the *coherent monotonic relaxation* to the second stationary solution s_2^* , w_2^* , although the level of coherence may be rather low. And the third case is the *coherent pulsing relaxation* to the second fixed point. This unusual regime of pulsing relaxation was observed experimentally [159]. Here we present the results of numerical solution of the evolution equations for the slow variables $s = z(t)$ and $w(t)$ defined in Eq. (214). Different cases of the pulsing regime are clearly demonstrated in Figs. 12 to 18. In the corresponding figure captions we use the notation $z_0 = z(0)$, $w_0 = w(0)$, and $\gamma \equiv \gamma_1/\gamma_2$. Everywhere in Figs. 12 to 17, the pump parameter is $\zeta = -0.5$, and in Fig. 18 this parameter is varied. The coupling parameter (207) is always $g = 10$.

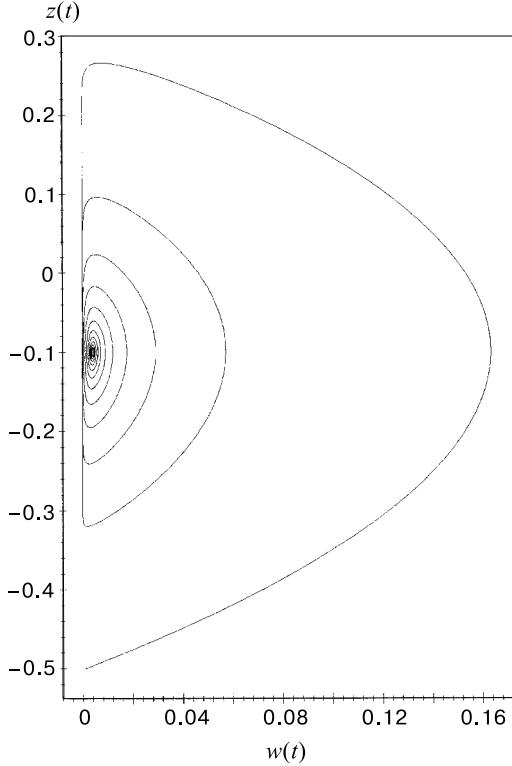


Fig. 12. Phase portrait demonstrating a stable focus for the parameters $z_0 = -0.5$, $w_0 = 0.001$, $g = 10$, and $\gamma = 0.1$

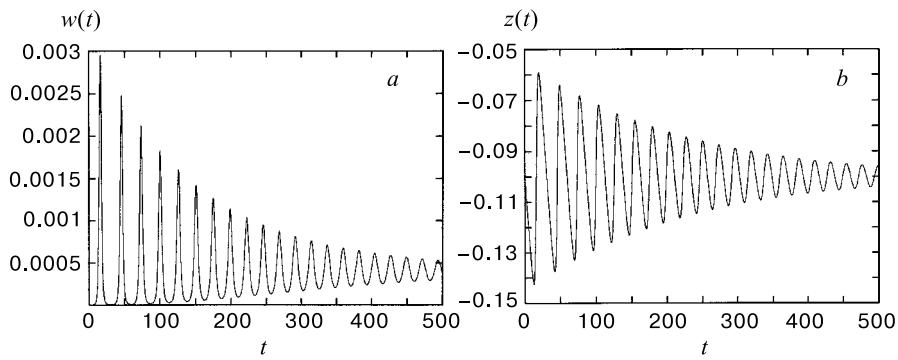


Fig. 13. Pulsing regime of spin relaxation with the parameters $z_0 = -0.1$, $w_0 = 10^{-6}$ and $\gamma = 0.01$ for the functions: (a) $w(t)$; (b) $z(t)$

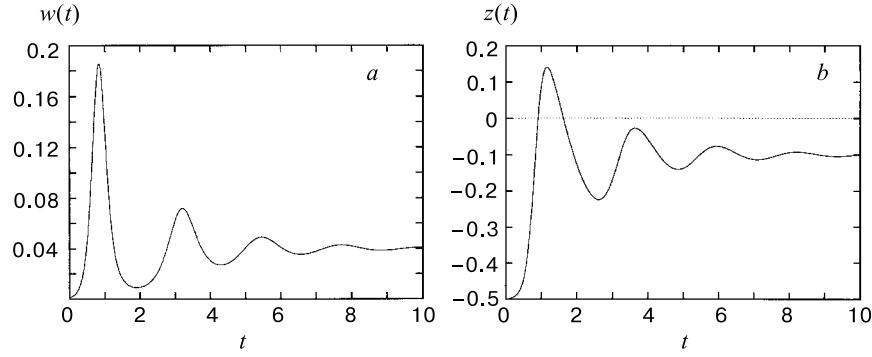


Fig. 14. The time dependence of the functions: (a) $w(t)$; (b) $z(t)$, for the parameters $z_0 = -0.5$, $w_0 = 0.001$, and $\gamma = 1$

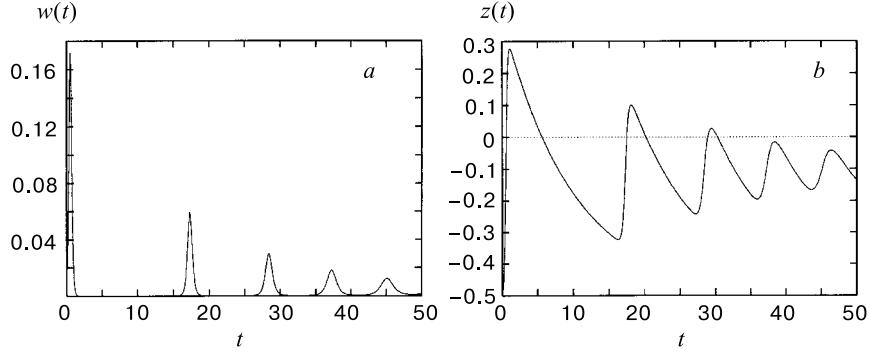


Fig. 15. Dynamics of slow solutions: (a) $w(t)$; (b) $z(t)$, for the parameters $z_0 = -0.5$, $w_0 = 0.01$, and $\gamma = 0.1$

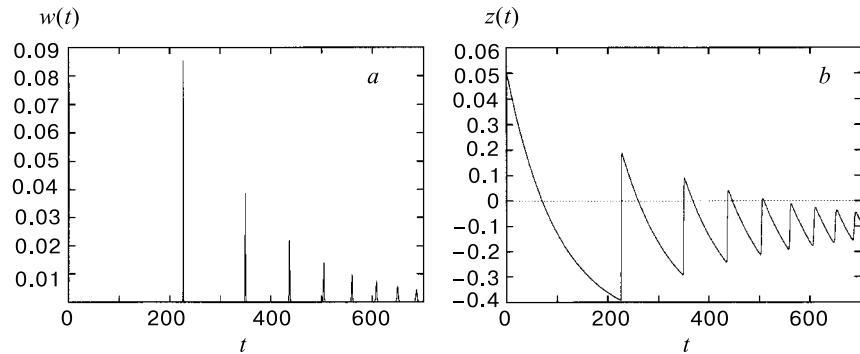


Fig. 16. Evolution of slow solutions: (a) $w(t)$; (b) $z(t)$, for the parameters $z_0 = 0.5$, $w_0 = 0.01$, and $\gamma = 0.01$

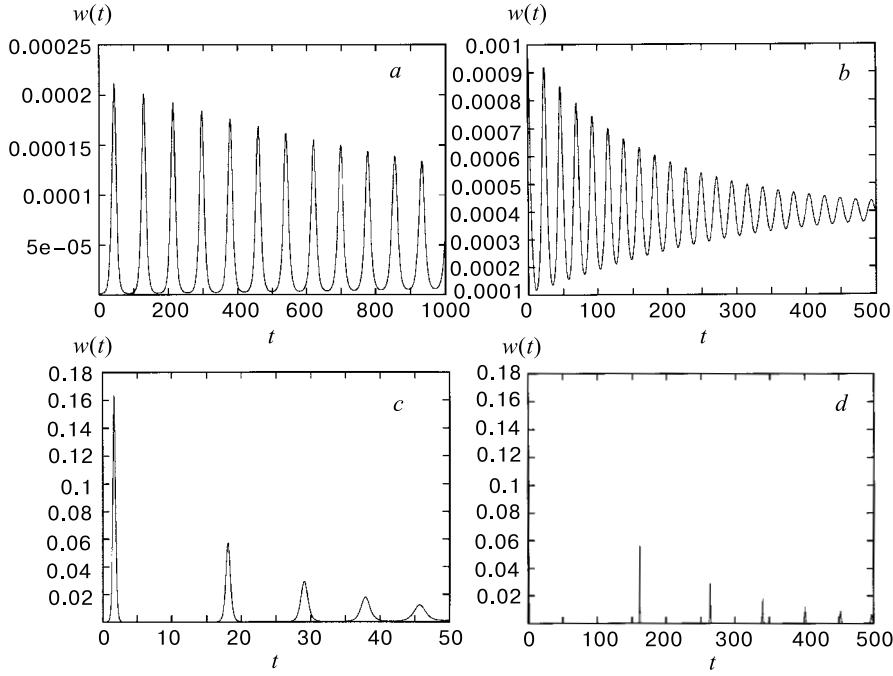


Fig. 17. Temporal behaviour of the function $w(t)$ for different sets of parameters: (a) $z_0 = -0.1$, $w_0 = 10^{-6}$, $\gamma = 0.001$; (b) $z_0 = -0.1$, $\omega_0 = 0.001$, $\gamma = 0.01$; (c) $z_0 = -0.5$, $w_0 = 10^{-6}$, $\gamma = 0.1$; (d) $z_0 = -0.5$, $w_0 = 0.001$, $\gamma = 0.01$

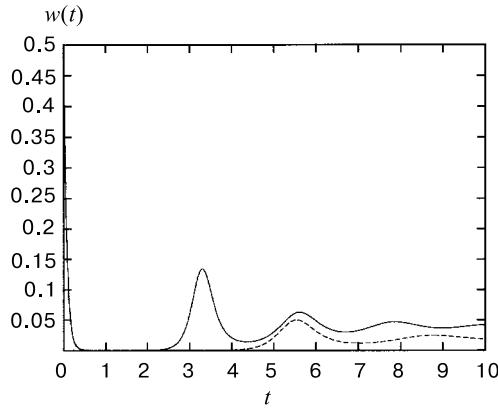


Fig. 18. Function $w(t)$ for $z_0 = 0.5$, $w_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, and varying pump parameters: $\zeta = -0.5$ (solid line); $\zeta = -0.3$ (dashed line)

The problem of superradiant spin relaxation can be generalized to the case of nuclei incorporated into a ferromagnetic matrix, where nuclear and electron spins interact through hyperfine forces. Some model studies of this case have been undertaken [160–162], and a general microscopic theory has also been developed [163]. The latter theory makes it possible to discover all feasible causes triggering the process of self-organized coherent relaxation. The most important such causes are the *dipole hyperfine interactions*, *dipole nuclear interactions*, and the *transverse magnetocrystalline anisotropy*.

12. NEGATIVE ELECTRIC CURRENT

The study of electric processes in semiconductors is important for describing and modelling semiconductor devices [164]. One of the most difficult problems is the consideration of strongly nonequilibrium phenomena in essentially nonuniform semiconductors. Nonequilibrium and nonuniform distributions of charge carriers can be formed in several ways, for instance, by means of external irradiation [165,166]. Transport properties of semiconductors with essentially nonuniform distribution of charge carriers can be rather specific. For example, in a sample, biased with an external constant voltage, the resulting electric current may turn against the latter displaying the transient effect of negative electric current [3,166–168].

Transport properties of semiconductors are usually described by the semiclassical drift-diffusion equations [164]. In what follows a plane device, of area A and length L is considered, which is biased with a constant voltage V_0 . It is convenient to pass to dimensionless quantities, measuring the space variable x in units of L , time in units of the transit time

$$\tau_0 \equiv \frac{L^2}{\mu V_0} , \quad \mu \equiv \min\{|\mu_i|\} ,$$

where μ_i is a mobility of the i -type carriers. And the characteristic quantities

$$\begin{aligned} \rho_0 &\equiv \frac{Q_0}{AL} , & Q_0 &\equiv \varepsilon A E_0 , & E_0 &\equiv \frac{V_0}{L} , \\ j_0 &\equiv \frac{Q_0}{A\tau_0} , & D_0 &\equiv \mu V_0 , & \xi_0 &\equiv \frac{\rho_0}{\tau_0} , \end{aligned}$$

are employed for measuring other physical values which are used below.

The drift-diffusion equations consist of the continuity equations

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i E) - D_i \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} + \frac{\rho_i}{\tau_i} = \xi_i , \quad (216)$$

for each type of charge carriers, and of the Poisson equation

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi \sum_i \rho_i \quad (217)$$

for the electric field $E(x, t)$. Here $\rho_i(x, t)$ is a charge density; μ_i , D_i , and τ_i are mobility, diffusion coefficient, and relaxation time, respectively; ξ_i is a generation–recombination noise [169]. The sample is biased with an external constant voltage, which in our dimensionless notation implies that

$$\int_0^1 E(x, t) dx = 1. \quad (218)$$

At the initial time, the distribution of charge carriers

$$\rho_i(x, 0) = f_i(x) \quad (219)$$

is assumed to be nonuniform.

The total electric current through the semiconductor sample is

$$J(t) \equiv \int_0^1 j(x, t) dx, \quad (220)$$

where the density of current

$$j = \sum_i \left(\mu_i E - D_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (221)$$

Because of the voltage integral (218), one has

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} E(x, t) dx = 0. \quad (222)$$

It is also possible to show that

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \ll \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial x} E(x, t) dt \gg = 0. \quad (223)$$

This means that the function E can be considered as slow on average in time and in space. Then, treating E as a quasi-invariant, one may find the solutions to Eqs. (216) and (217) in order to analyse their general space-time behaviour and to find conditions when the effect of negative electric current could arise. Such negative current can appear only when the initial charge distribution is essentially nonuniform. For example, if this initial charge distribution forms a narrow layer located at the point $x = a$, then the total current (220) becomes negative for

a transient interval of time in the vicinity of $t = 0$, if one of the following conditions holds true:

$$a < \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi Q} \quad \left(Q > \frac{1}{2\pi} \right) , \quad \text{or} \quad a > \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi|Q|} \quad \left(Q < -\frac{1}{2\pi} \right) , \quad (224)$$

where

$$Q \equiv \sum_i Q_i , \quad Q_i \equiv \int_0^1 \rho_i(x, 0) dx .$$

The effect of the negative electric current can be employed for various purposes, as is discussed in Refs. 3, 168. For instance, when the initial charge layer is formed by an ion beam irradiating the semiconductor sample, the location a corresponds to the ion mean free path. In this case, by measuring the negative current $J(0)$, one can define this mean free path

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi Q} \left[1 - \frac{J(0)}{\sum_i \mu_i Q_i} \right] . \quad (225)$$

This formula is valid for both positive and negative values of Q .

Equations (216) and (217) have also been solved numerically [3, 168], which confirmed the appearance of the negative electric current. Two cases were analysed, with one layer of charge carriers and with two such layers. Here we present the results of calculations for the double-layer case. The initial charge distributions (219) are given by the Gaussians

$$f_i(x) = \frac{Q_i}{Z_i} \exp \left\{ -\frac{(x - a_i)^2}{2b_i} \right\} ,$$

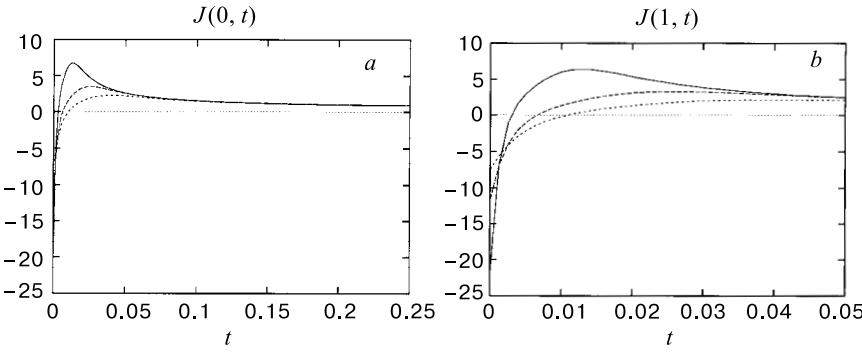


Fig. 19. Electric current through the semiconductor surfaces in the case of $a = 0.1$, $Q_2 = -1$, $\gamma = 1$ and different mobilities: $\mu_2 = -10$ (solid line); $\mu_2 = -5$ (dashed line); $\mu_2 = -3$ (short-dashed line). (a) Left-surface current $J(0, t)$; (b) Right-surface current $J(1, t)$

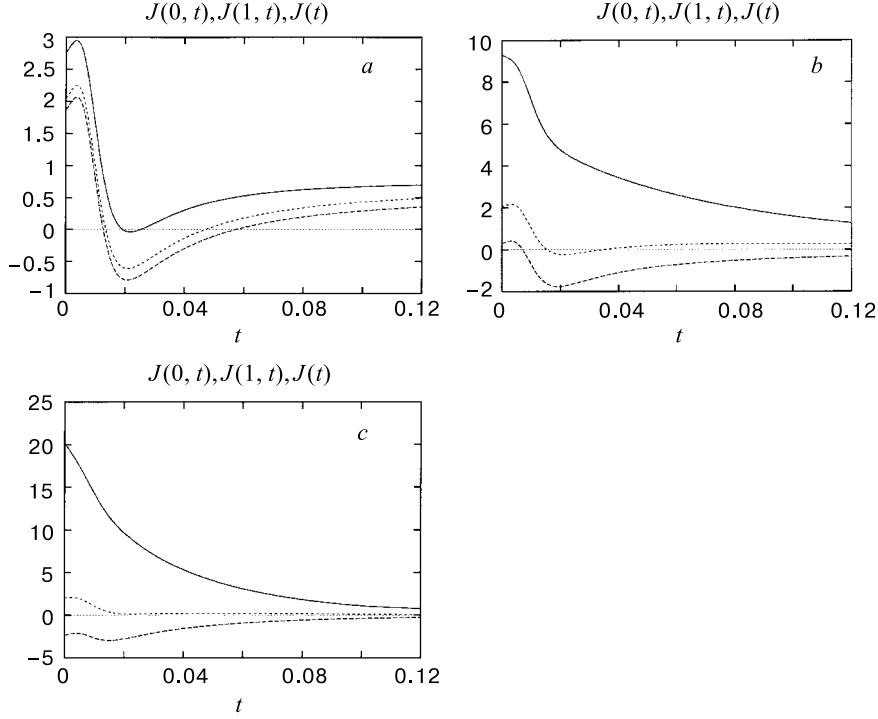


Fig. 20. Left-surface current $J(0, t)$ (solid line), right-surface current $J(1, t)$ (dashed line), and the total current $J(t)$ (short-dashed line) for $a = 0.25$, $Q_2 = -0.1$, $\mu_2 = -10$ and different relaxation parameters: (a) $\gamma = 1$; (b) $\gamma = 10$; (c) $\gamma = 25$

in which $0 \leq a_i \leq 1$ and

$$Q_i = \int_0^1 f_i(x) dx , \quad Z_i = \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{(x - a_i)^2}{2b_i} \right\} dx .$$

The positive charge carriers, with $\mu_1 = 1$ and $Q_1 = 1$, form the left layer centered at $a_1 = a$, while the negative charge carriers form the layer centered at $a_2 = 1 - a$. We keep in mind the relation $D_2 = 3D_1$ for the diffusion coefficients, typical for holes and electrons, and we set $D_1 = 10^{-3}$. For short, we use the notation $\tau_1^{-1} = \tau_2^{-1} = \gamma$ and $b_1 = b_2 = b$. The generation-recombination noise is neglected, which is admissible at the initial stage of the process. As the boundary conditions, we accept the absence of diffusion through the semiconductor surface,

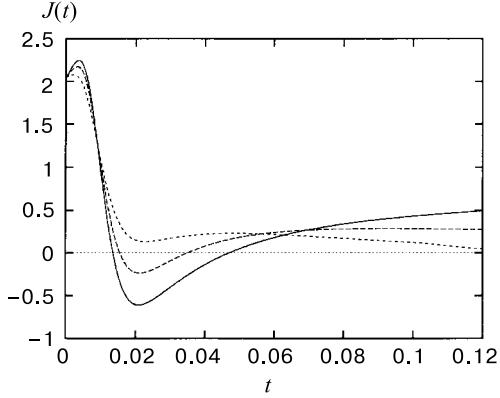


Fig. 21. Total electric current $J(t)$ for $a = 0.25$, $Q_2 = -0.1$, $\mu_2 = -10$ and varying relaxation parameters: $\gamma = 1$ (solid line); $\gamma = 10$ (dashed line); $\gamma = 25$ (short-dashed line)

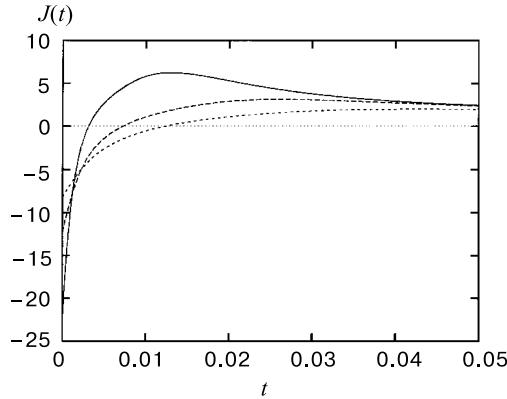


Fig. 22. Electric current through semiconductor for the parameters $a = 0.1$, $Q_2 = -1$, $\gamma = 1$ and different mobilities: $\mu_2 = -10$ (solid line); $\mu_2 = -5$ (dashed line); $\mu_2 = -3$ (short-dashed line)

which implies the Neumann boundary condition

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_i(x, t) = 0 \quad (x = 0, x = 1).$$

In Figs. 19 to 24, we present the total current (220) as well as the electric current through the left surface, $J(0, t) \equiv j(0, t)$ and through the right surface, $J(1, t) \equiv j(1, t)$, defined by the current (221) at $x = 0$ or $x = 1$, respectively.

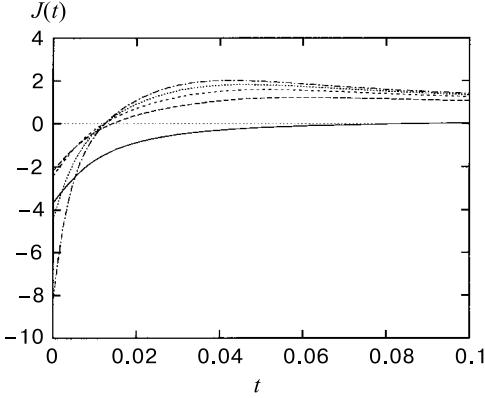


Fig. 23. Electric current $J(t)$ as a function of time for $a = 0.1$, $\mu_2 = -3$, $\gamma = 1$ and different initial charges: $Q_2 = 0$ (solid line); $Q_2 = -0.25$ (dashed line); $Q_2 = -0.5$ (short-dashed line); $Q_2 = -0.75$ (dotted line); $Q_2 = -1$ (dashed-dotted line)

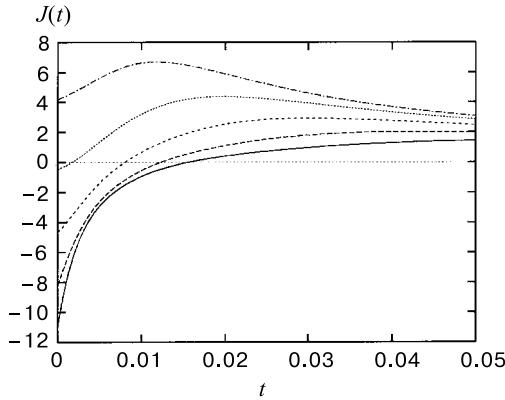


Fig. 24. Electric current $J(t)$ for $Q_2 = -1$, $\mu_2 = -3$, $\gamma = 1$, and different locations of initial charge layers: $a = 0.05$ (solid line); $a = 0.1$ (dashed line); $a = 0.15$ (short-dashed line); $a = 0.2$ (dotted line); $a = 0.25$ (dashed-dotted line)

13. MAGNETIC SEMICONFINEMENT OF ATOMS

Dynamics of neutral atoms in nonuniform magnetic fields concerns problems of current experimental and theoretical interest. By means of such fields, atoms can be confined inside magnetic traps, which allows to accomplish various experiments with the systems of trapped atoms. Recently, Bose – Einstein condensation has been attained in a dilute gas of trapped atoms of ^{87}Rb [170], ^7Li [171], Na [172], and H \downarrow [173]. The details on theory and experiment can be

found in reviews [174–176]. The Bose – Einstein condensate is believed to form, at least partially, a coherent state. If it would be possible to construct a device emitting a coherent atomic beam, this would be analogous to a laser radiating a coherent photon ray. This is why one may call the device, emitting a coherent atomic beam, an atom laser [177–184]. An output coupler, coherently extracting condensed atoms from a trap, was demonstrated recently [185–187]. But in these demonstrations, the atoms, when escaping from a trap, fly out more or less in all directions, with anisotropy formed only by the gravitational force. While the very first condition on a laser is that its output is highly directional, with the possibility of varying the beam direction [183].

A mechanism for creating well-collimated beams of neutral atoms was advanced in Refs. 188–192. This mechanism suggests an output coupler that extracts trapped atoms in the form of a directed beam.

The motion of neutral atoms in magnetic fields can be described by the semiclassical equations for the quantum-mechanical average of the real-space coordinate $\vec{r} = \{r_\alpha\}$, where $\alpha = x, y, z$, and for the average $\vec{S} = \{S_\alpha\}$ of the spin operator [193–195]. The first equation writes

$$m \frac{d^2 r_\alpha}{dt^2} = \mu_0 \vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial r_\alpha} + mg_\alpha + f_\alpha, \quad (226)$$

where m and μ_0 are mass and magnetic moment of an atom; \vec{B} is a magnetic field; g_α is a component of the standard gravitational acceleration; and f_α is a collision force component. The equation for the average spin is

$$\hbar \frac{d\vec{S}}{dt} = \mu_0 \vec{S} \times \vec{B}. \quad (227)$$

The total magnetic field

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \\ \vec{B}_1 = B'_1 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + \lambda z \vec{e}_z), \quad \vec{B}_2 = B_2 (h_x \vec{e}_x + h_y \vec{e}_y), \quad (228)$$

where $|\vec{h}| = 1$, consists of the quadrupole field \vec{B}_1 , typical of quadrupole magnetic traps, and of a transverse field, e.g., of a rotating field [196,197]. In the quadrupole field, λ is the anisotropy parameter.

It is convenient to pass to the dimensionless space variable, measuring the components of \vec{r} in units of the characteristic length

$$R_0 \equiv \frac{B_2}{B'_1}. \quad (229)$$

Introduce the characteristic frequencies by the relations

$$\omega_1^2 \equiv \frac{\mu_0 B'_1}{m R_0}, \quad \omega_2 \equiv \frac{\mu_0 B_2}{\hbar}, \quad \omega \equiv \max_t \left| \frac{d\vec{h}}{dt} \right|. \quad (230)$$

Also, we define

$$\delta_\alpha \equiv \frac{g_\alpha}{R_0 \omega_1^2}, \quad \gamma \xi_\alpha \equiv \frac{f_\alpha}{m R_0}, \quad (231)$$

where γ is a collision rate and ξ_α can be treated as a random variable with the stochastic averages

$$\ll \xi_\alpha(t) \gg = 0, \quad \ll \xi_\alpha(t) \xi_\beta(t') \gg = 2D_\alpha \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'),$$

in which D_α is a diffusion rate. Then Eq. (226) can be written as the stochastic differential equation

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \omega_1^2 \left(S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y + \lambda S_z \vec{e}_z + \vec{\delta} \right) + \gamma \vec{\xi}, \quad (232)$$

and Eq. (227) acquires the form

$$\frac{d \vec{S}}{dt} = \omega_2 \hat{A} \vec{S}, \quad (233)$$

in which the antisymmetric matrix $\hat{A} = [A_{\alpha\beta}]$ has the elements

$$A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$A_{12} = \lambda z, \quad A_{23} = x + h_x, \quad A_{31} = y + h_y.$$

Assuming the occurrence of the small parameters

$$\left| \frac{\gamma}{\omega_1} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\omega}{\omega_2} \right| \ll 1, \quad (234)$$

we may classify the variables \vec{r} and \vec{h} as slow, compared to the fast spin variable \vec{S} . Then Eq. (233) can be solved yielding

$$\vec{S}(t) = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{b}_i(t) \exp\{\beta_i(t)\}, \quad (235)$$

where

$$a_i = \vec{S}(0) \cdot \vec{b}_i(0),$$

$$\vec{b}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{C_i}} [(A_{12}A_{23} - \alpha_i A_{31}) \vec{e}_x + (A_{12}A_{31} + \alpha_i A_{23}) \vec{e}_y + (A_{12}^2 + \alpha_i^2) \vec{e}_z],$$

$$C_i = (A_{12}^2 - |\alpha_i|^2)^2 + (A_{12}^2 + |\alpha_i|^2)(A_{23}^2 + A_{31}^2),$$

$$\alpha_{1,2} = \pm i\alpha, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha^2 \equiv A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2, \quad \beta_i(t) = \omega_2 \int_0^t \alpha_i(t') dt'.$$

Substituting Eq. (235) into the right-hand side of Eq. (232) and averaging the latter over time and over stochastic variables, we obtain

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \omega_1^2 \vec{\delta}, \quad (236)$$

where

$$\vec{F} \equiv \omega_1^2 a_3 < b_3^x \vec{e}_x + b_3^y \vec{e}_y + \lambda b_3^z \vec{e}_z >,$$

$$a_3 = \frac{(x + h_x^0) S_x^0 + (y + h_y^0) S_y^0 + \lambda z S_z^0}{[(x + h_x^0)^2 + (y + h_y^0)^2 + \lambda^2 z^2]^{1/2}},$$

$$\vec{b}_3 = \frac{(x + h_x) \vec{e}_x + (y + h_y) \vec{e}_y + \lambda z \vec{e}_z}{[(x + h_x)^2 + (y + h_y)^2 + \lambda^2 z^2]^{1/2}},$$

angle brackets imply time averaging and $h_\alpha^0 \equiv h_\alpha(0)$, $S_\alpha^0 \equiv S_\alpha(0)$. For the rotating transverse field, with

$$h_x = \cos \omega t, \quad h_y = \sin \omega t, \quad (237)$$

we find

$$\vec{F} = \frac{\omega_1^2 [(1+x) S_x^0 + y S_y^0 + \lambda z S_z^0] (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + 2\lambda^2 z \vec{e}_z)}{2[(1+2x+x^2+y^2+\lambda^2 z^2)(1+x^2+y^2+\lambda^2 z^2)]^{1/2}}.$$

The motion of atoms, described by Eq. (236), essentially depends on the initial state, which, as is known [198,199], can be prepared in an arbitrary way. Suppose that atoms, after being laser cooled in a magneto-optical trap [200], are loaded into a magnetic trap where they are further cooled by evaporative cooling down to sufficiently low temperatures, so that there is a portion of atoms with low velocities, which are located close to the trap center. If the initial spin condition for these atoms is such that $S_x^0 < 0$ and $S_y = S_z = 0$, then the atoms are confined inside the trap moving in an approximately harmonic potential. The gradient of the quadrupole field supplies the levitating force to support atoms against gravity. The combination of the magnetic field and gravity produces a very nearly harmonic confining potential within the trap volume in all three dimensions [201].

The semiconfining regime of motion [188–192] can be realized by preparing for the spin variable nonadiabatic initial conditions

$$S_x^0 = S_y^0 = 0, \quad S_z^0 \equiv S \neq 0. \quad (238)$$

Such conditions can be arranged in several ways. One possibility could be to confine atoms in a trap, where all atoms are polarized having their spins in the z direction, as, e.g., in the trap of Ref. 201, being a quadrupole trap with a bias field along the z axis. Then the longitudinal bias field is quickly switched off, and at the same time, a transverse field is switched on, which would correspond to the sudden change of potential [202]. Another way could be to prepare spin polarized atoms in one trap and quickly load them into another trap with the required field configuration. Atoms can be prepared practically 100% polarized [203], with the spin–spin relaxation time reaching 100 s [204]. The possibility of realizing two ways of transferring atoms from one trap to another, by means of sudden transfer as opposed to adiabatic transfer, is discussed in Ref. 205. The third way of organizing the nonadiabatic initial conditions (238) could be by acting on the trapped atoms with a short pulse of strong magnetic field, polarizing atomic spins in the desired way.

With the initial conditions (238), the motion of atoms becomes axially restricted from one side, depending on the sign of λS . Atoms fly out of the trap predominantly in one direction, forming a well-collimated beam [188–192]. This mechanism can be used for atom lasers. Another possibility could be to study the dynamics of binary mixtures of Bose systems, where the effect of conical stratification [206] can arise. The mixtures of two condensates have been realized for rubidium [207] and sodium [208], and the dynamics of two rubidium condensates was observed in Ref. 209.

When solving equation (236) for the realistic case of a finite trap, one should take into account the trap shape factor, which can be written in the Gaussian form

$$\varphi(\vec{r}) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{z^2}{L^2}\right),$$

where R and L are the trap radius and length. The relation between the latter can be quite different for different traps, starting from almost spherical traps, where $R \approx L$, to needle-shape traps, with $R/L \sim 10^{-3}$, as for Ioffe–Pritchard magnetic traps [210]. Accepting the initial spin conditions (238), and using the notation

$$f(\vec{r}) \equiv \frac{\varphi(\vec{r})}{[(1 + 2x + x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)(1 + x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)]^{1/2}},$$

from Eq. (236) we obtain

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega_1^2 \left(\frac{\lambda}{2} S f z x + \delta_x \right), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \omega_1^2 (\lambda^3 S f z^2 + \delta_z), \quad (239)$$

where the equation for y , being similar to that for x , is not written down. Note that instead of the Gaussian shape factor for the trap, one could opt for

$$\varphi(\vec{r}) = 1 - \Theta(x - R) \Theta(y - R) \Theta\left(|z| - \frac{1}{2} L\right),$$

with $\Theta(\cdot)$ being the unit-step function.

Equations (239) were analysed both analytically and numerically [188–192]. Their solutions display the semiconfined regime of motion. Taking into account random pair collisions in Eq. (232) shows that atomic collisions do not disturb the semiconfined motion provided that temperature T is sufficiently low, satisfying the condition

$$\frac{k_B T \hbar \rho^2 a_s^2}{m^2 \omega_1^3} \ll 1, \quad (240)$$

in which ρ is the density of atoms and a_s , their scattering length. The semi-confined regime of motion makes it possible to form well-collimated beams on neutral atoms by means of only magnetic fields.

14. NUCLEAR MATTER LASING

The natural question that arises after talking about atom lasers is whether there can be produced matter waves corresponding to other Bose particles, which could be employed for lasing. One such possibility is related to the creation of a large number of pions in hadronic, nuclear, and heavy-ion collisions. If the density of pions appearing in the course of these collisions is sufficiently high, then correlations between pions can result in the formation of coherent state and in the feasibility of realizing a pion laser [211]. Pions are not the sole type of Bose particles arising in nuclear matter under extreme conditions characteristic of fireballs produced in high-energy collisions [212,213]. There are plenty of reviews devoted to the state of nuclear matter at extreme conditions, including the region of deconfinement transition. Here we cite only some recent of such reviews [214–217].

The very first necessary condition that is required for lasing is to be able to generate Bose particles with sufficiently high density. Therefore, in order to answer the question what kind of Bose particles appearing in nuclear matter under extreme conditions could be used for lasing, one has, first of all, to find out what are these Bose particles and under what conditions their density is maximal. In this section, we give a very brief account of an analysis based on the multichannel model of nuclear matter [217–221]. The main idea in constructing this model goes back to the Weinberg approach for describing composite particles [222–224], with effective Hamiltonians that are assumed to be a result of the

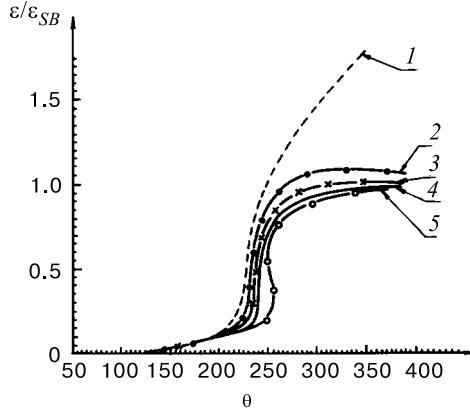


Fig. 25. Relative energy density as a function of temperature in MeV for the $SU(3)$ gluon–glueball mixture of different glueball radii: 0 (line 1); 0.5 fm (line 2); 0.7 fm (line 3); 0.8 fm (line 4); 1 fm (line 5)

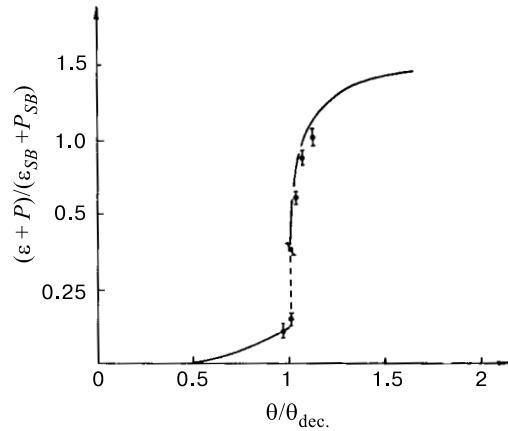


Fig. 26. Relative enthalpy for the gluon–glueball mixture as a function of temperature reduced to the deconfinement temperature, in the case of the glueball radius 0.82 fm, compared with the lattice numerical calculations

Fock–Tani transformation [225]. Now we shall not plunge into the details of the multichannel model, which can be found in Refs. 217,219, but we shall present some figures and will formulate the conclusion of an analysis [221] with regard to the most probable candidates for nuclear matter lasing.

When rising temperature or density, nuclear matter exhibits a transition from hadron state to quark–gluon state. This transition is often assumed to be a sharp

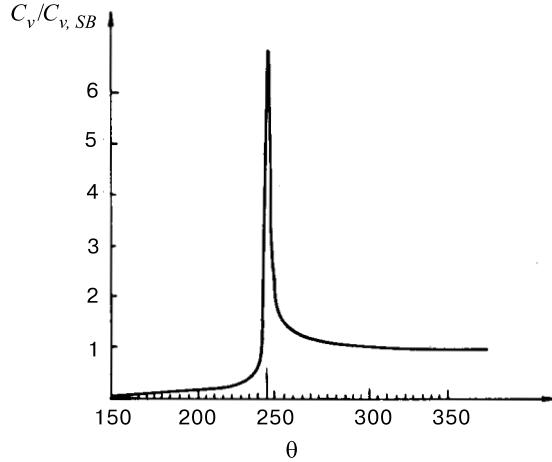


Fig. 27. Relative specific heat for the gluon–glueball mixture, for the glueball radius 0.82 fm, as a function of temperature in MeV

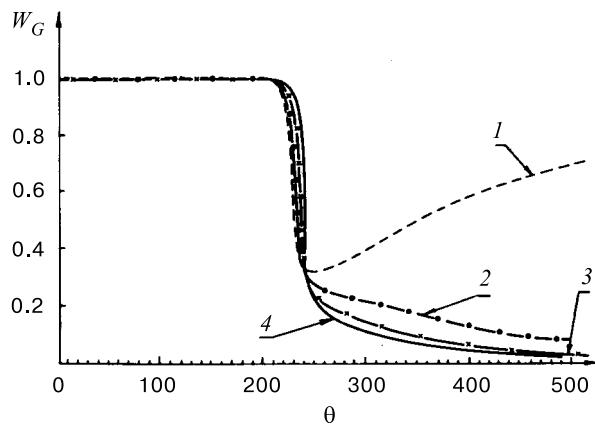


Fig. 28. Glueball channel probability versus temperature in MeV for the glueball radii as in Fig. 25

first-order transition. Lattice numerical simulations for the quarkless $SU(3)$ gauge model show that deconfinement is really a first-order phase transition [226], which is in agreement with the multichannel model. Figures 25 to 27 illustrate the behaviour of some thermodynamic characteristics, normalized to the corresponding Stefan–Boltzmann limits, for the case of the $SU(3)$ gluon–glueball mixture. Figure 28 shows the related glueball channel probability. The sharpness on the

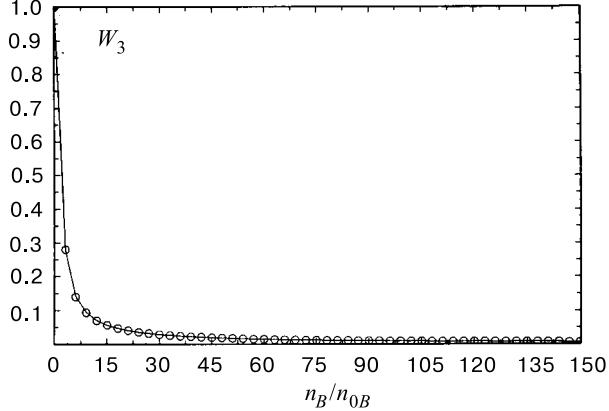


Fig. 29. Nucleon channel probability as a function of relative baryon density

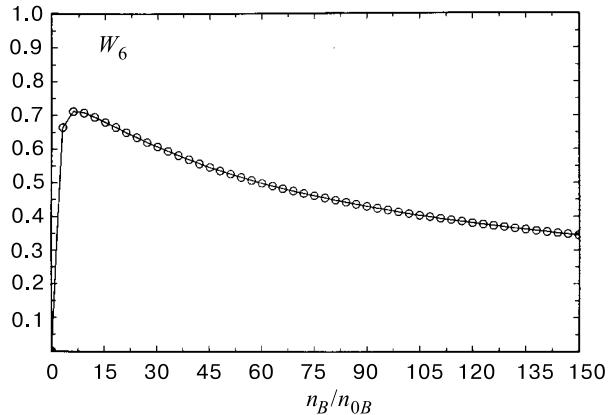


Fig. 30. Dibaryon channel probability versus relative baryon density

deconfinement transition essentially depends on the interactions between particles or on their radii, when the composite particles are treated as bags [227].

In the case of realistic nuclear matter, deconfinement is rather a gradual crossover but not a genuine phase transition [217]. Then all thermodynamic characteristics change continuously, without jumps. This concerns as well the channel probabilities. Thus, in Figs. 29, 30 the channel probabilities of nucleons and dibaryons are shown as functions of baryon density normalized to the normal baryon density of nuclear matter $n_{0B} = 0.167 \text{ fm}^{-3}$. The possible appearance of dibaryons is of special interest since they, being bosons, can form a Bose condensate [217,228–230].

Summarizing the results of the analysis [221], three types of Bose particles can appear in nuclear matter in large quantities: pions, dibaryons, and gluons. The maximum of the pion channel probability, reaching $w_\pi = 0.6$, occurs in the vicinity of the deconfinement transition at $T \approx 160$ MeV and low baryon densities $n_B < n_{0B}$. Dibaryons can appear mainly at low temperatures $T < 20$ MeV and relatively high baryon densities $n_B \sim 10 n_{0B}$, where their channel probability $w_6 \approx 0.7$. Large amount of gluons emerges only at high temperatures $T > 160$ MeV. In addition, one should keep in mind that gluons cannot be observed as free particles.

Talking about possible pion, dibaryon, or gluon lasing from nuclear matter, we have touched here just one necessary condition, trying to find out when these Bose particles can appear in large quantities. To realize such a lasing in reality will, certainly, require to solve a number of other problems. But, anyway, to understand the conditions when this lasing could be plausible in principle is the necessary first step.

15. CONCLUSION

We have described a general method for treating strongly nonequilibrium processes in statistical systems. This method is called the *Scale Separation Approach* since its basic idea is to try to separate different characteristic scales of time and space variables. The idea itself is, of course, not new and we have employed some known techniques. What is original in our approach is: (i) The combination of several methods and their adjustment to the problems of nonequilibrium statistical mechanics. (ii) The generalization of the averaging method to stochastic and partial differential equations. (iii) Probabilistic solution of the problem of pattern selection.

The scale separation approach has been shown to be very useful for describing cooperative phenomena in the interaction of radiation with matter. To emphasize the generality of the approach, it is illustrated here by several different physical examples, whose common feature is that the related evolution equations are nonlinear differential or integro-differential stochastic equations. Such equations, as is known, are difficult to solve. The scale separation approach makes it possible to find accurate approximate solutions. The accuracy of these solutions has been confirmed by numerical calculations and by comparison with experiment, when available. Using this approach, several interesting physical problems have been solved and new effects are predicted. Among the most interesting applications we would like to emphasize the following.

Collective Liberation of Light happens when an ensemble of resonant atoms is doped into a medium with polariton band gap. If the transition frequency of an atom is inside this prohibited gap, then atomic spontaneous emission is strongly

suppressed, which is termed localization of light. Although spontaneous emission of a single atom is prohibited, a collective of such atoms can radiate due to their coherent interactions. As a result of this coherent radiation, light becomes partially liberated. We have advanced dynamical theory of this light liberation for the realistic situation when the radiation wavelength is smaller than the linear sizes of the sample (see Sec. 6).

Mössbauer Magnetic Anomaly has puzzled researches for many years. This anomaly consists in a strong increase of the area under the Mössbauer spectrum, below the temperature of magnetic phase transition. Several explanations of this anomaly have been suggested. We have thoroughly analysed this phenomenon and concluded that previously suggested mechanisms cannot explain this anomaly but that its origin is rather in the increase of inhomogeneous broadening of Mössbauer nuclei, which is due to the arising magnetic field (see Sec. 8).

Turbulent Photon Filamentation in resonant media is an intriguing example of self-organization in a strongly nonequilibrium system, whose dynamical theory was absent. We have developed such a theory, based on the probabilistic approach to pattern selection, and showed that it gives agreement with experiment (see Sec. 10).

Superradiant Spin Relaxation occurs in a system of spins coherently interacting with each other through resonator feedback field. This ultrafast coherent relaxation is similar to superradiance in optical systems, because of which the term spin superradiance was coined. Contrary to its optical counterpart, the origin of purely self-organized spin superradiance has not been understood for about 40 years, after Bloembergen and Pound posed this problem in 1954. We have developed a theory of nonlinear spin dynamics, based on a microscopic Hamiltonian, elucidated the origin of pure spin superradiance, and described all main regimes of spin relaxation, without pumping as well as in the presence of the latter (see Sec. 11).

Negative Electric Current is a rather unusual effect, when electric current flows against an applied voltage. This is a transient effect that can occur in nonuniform semiconductors. We have predicted this effect and suggested its theory (see Sec. 12).

Magnetic Semiconfinement of Atoms is another effect we predict. This effect can serve as a mechanism for creating well-collimated beams of neutral atoms by means of magnetic fields. It can be used to form coherent beams of Bose atoms from atom lasers. We have presented a theory of this effect (see Sec. 13).

The possibility of treating nonequilibrium processes in nonlinear systems of quite different nature has become possible owing to the Scale Separation Approach, which provides accurate approximate solutions to complicated systems of differential and integro-differential equations.

ACKNOWLEDGEMENT

We are grateful for discussions and useful advice to V.S.Bagnato, N.A.Bazhanov, C.M.Bowden, M.G.Cottam, V.I.Emelyanov, R.Friedberg, S.R.Hartmann, V.K.Henner, Vl.V.Kocharovsky, J.T.Manassah, A.N.Oraevsky, T.Ruskov, V.V.Samartsev, M.A.Singh, and R.Tanas. We appreciate the contribution of all our coauthors.

REFERENCES

1. **Benedict M.G., Ermolaev A.M., Malyshev V.A., Sokolov I.V., Trifonov E.D.** — Superradiance-Multiatom Coherent Emission, Inst. of Physics, Bristol, 1996.
2. **Damgaard P.H., Hüffel H.** — Phys. Rep., 1987, v.152, p.227.
3. **Yukalov V.I., Yukalova E.P.** — Phys. Lett. A, 1997, v.236, p.113.
4. **Arnold V.I.** — Mathematical Methods of Classical Mechanics, Nauka, Moscow, 1974.
5. **Bogolubov N.N., Mitropolsky Y.A.** — Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.
6. **Poincaré H.** — New Methods of Celestial Mechanics, Am. Inst. Phys., New York, 1993.
7. **Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z.** — Introduction to Nonlinear Physics, Nauka, Moscow, 1988.
8. **Zinn-Justin J.** — Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon, Oxford, 1996.
9. **Yukalov V.I., Gluzman S.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.333.
10. **Gluzman S., Yukalov V.I.** — Phys. Rev. E, 1997, v.55, p.3983.
11. **Yukalov V.I., Gluzman S.** — Phys. Rev. E, 1997, v.55, p.6552.
12. **Yukalov V.I., Gluzman S.** — Phys. Rev. E, 1998, v.58, p.1359.
13. **Cross M.C., Hohenberg P.C.** — Rev. Mod. Phys., 1993, v.65, p.851.
14. **Yukalov V.I.** — Mosc. Univ. Phys. Bull., 1976, v.31, p.10.
15. **Yukalov V.I.** — JINR Commun. P17-88-893, Dubna, 1988.
16. **Yukalov V.I.** — Int. J. Mod. Phys. B, 1989, v.3, p.1691.
17. **Yukalov V.I.** — Physica A, 1990, v.167, p.833.
18. **Yukalov V.I.** — Phys. Rev. A, 1990, v.42, p.3324.
19. **Yukalov V.I.** — J. Math. Phys., 1991, v.32, p.1235.
20. **Yukalov V.I.** — J. Math. Phys., 1992, v.33, p.3994.
21. **Kadantseva E.P., Yukalov V.I.** — Renormalization Group, eds. Shirkov D.V., Priezzhev V.B., World Scientific, Singapore, 1992, p.218.
22. **Yukalov V.I., Yukalova E.P.** — Physica A, 1994, v.206, p.553.
23. **Yukalov V.I., Yukalova E.P.** — Physica A, 1996, v.225, p.336.
24. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1993, v.3, p.870.
25. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1995, v.5, p.970.
26. **Yukalov V.I.** — Phys. Rev. B, 1996, v.53, p.9232.
27. **Yukalov V.I.** — Phys. At. Nucl., 1998, v.61, p.1882.

-
28. **Yukalov V.I.** — JINR Commun. E17-99-22, Dubna, 1999.
 29. **Allen L., Eberly J.H.** — Optical Resonance and Two-Level Atoms, Wiley, New York, 1975.
 30. **Andreev A.V., Emelyanov V.I., Ilinski Y.A.** — Cooperative Effects in Optics, Inst. of Physics, Bristol, 1993.
 31. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1991, v.1, p.85.
 32. **Klauder J.R., Sudarshan E.C.G.** — Fundamentals of Quantum Optics, Benjamin, New York, 1968.
 33. **Yukalov V.I.** — J. Mod. Opt., 1990, v.37, p.1361.
 34. **Dicke R.H.** — Phys. Rev., 1954, v.93, p.99.
 35. **Bogolubov N.N., Turaev M.T., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** - JINR Rapid Commun., 1986, No.14, p.33.
 36. **Kadantseva E.P., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — Int. J. Mod. Phys. B, 1988, v.2, p.255.
 37. **Andreev A.V., Polevoy P.V.** — Infrared Phys. Technol., 1995, v.36, p.15.
 38. **Andreev A.V., Sheetlin S.L.** — Infrared Phys. Technol., 1996, v.37, p.733.
 39. **Bakasov A.A., Yukalov V.I.** — Theor. Math. Phys., 1987, v.72, p.773.
 40. **Bakasov A.A., Bogolubov N.N., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — Theor. Math. Phys., 1987, v.72, p.987.
 41. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1998, v.8, p.955.
 42. **Zinoviev P.V., Samartsev V.V., Silaeva N.B.** — Laser Phys., 1991, v.1, p.1.
 43. **Samartsev V.V.** — Hyperfine Interact., 1997, v.107, p.359.
 44. **Andrianov S.N., Samartsev V.V.** — Laser Phys., 1997, v.7, p.314.
 45. **Andrianov S.N., Samartsev V.V.** — Optical Superradiance and Laser Cooling in Solids, Russ. Acad. Sci., Kazan, 1998.
 46. **Yablonovitch E.** — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.2059.
 47. **John S.** — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.2486.
 48. **Davydov A.S.** — Theory of Molecular Excitations, Plenum, New York, 1971.
 49. **Agranovich V.M., Ginzburg V.L.** — Crystal Optics with Spatial Dispersion and Excitons, Springer, Berlin, 1984.
 50. **John S., Wang J.** — Phys. Rev. B., 1991, v.43, p.12772.
 51. **Rupasov V.I., Singh M.** — Phys. Lett. A, 1996, v.222, p.258.
 52. **Rupasov V.I., Singh M.** — Phys. Rev. A, 1996, v.54, p.3614.
 53. **Bay S., Lambropoulos P., Molmer K.** — Phys. Rev. A, 1997, v.55, p.1485.
 54. **Rupasov V.I., Singh M.** — Phys. Rev. A, 1997, v.56, p.898.
 55. **Singh M.R., Lau W.** — Phys. Status Solidi B, 1997, v.203, p.401.
 56. **John S., Quang T.** — Phys. Rev. A., 1994, v.50, p.1764.
 57. **John S., Quang T.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.74, p.3419.
 58. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1998, v.8, p.1182.
 59. **Friedberg R., Hartmann S.R., Manassah J.T.** — Phys. Rep., 1973, v.7, p.101.
 60. **Ikonen E., Helistö P., Katila T., Riski K.** — Phys. Rev. A., 1985, v.32, p.2298.
 61. **Helistö P., Ikonen E., Katila T.** — Phys. Rev. B., 1986, v.34, p.3458.

-
62. **Ikonen E., Helistö P., Hietaniemi J., Katila T.** — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.643.
 63. **Ikonen E., Hietaniemi J., Katila T.** — Phys. Rev. B., 1988, v.38, p.6380.
 64. **Helistö P., Tittonen I., Lippmaa M., Katila T.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.2037.
 65. **Kalachev A.A., Samartsev V.V.** — Photon Echo and Its Applications, Kazan University, Kazan, 1998.
 66. **Yukalov V.I.** — Problems in Quantum Optics, ed. Yukalov V.I., Joint Inst. Nucl. Res., Dubna, 1988, p.132.
 67. **Yukalov V.I.** — Proceedings of Workshop on Gravitational Wave Emitter and Detector, ed. Pisarev A.F., Joint Inst. Nucl. Res., Dubna, 1989, p.66.
 68. **Yukalov V.I.** — World Sci. Condens. Matter Phys., 1990, v.7, p.210.
 69. **Borrman J.** — Phys. Z., 1941, v.42, p.157.
 70. **Borrman J.** — Phys. Z., 1950, v.127, p.297.
 71. **Afanasiev A.M., Kagan Y.M.** — Z. Eksp. Teor. Fiz., 1965, v.48, p. 327.
 72. **Shvydko Y.V., Smirnov G.V.** — J. Phys. Condens. Matter, 1989, v.1, p.10563.
 73. **Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — Phase States and Transitions, Joint Inst. Nucl. Res., Dubna, 1985.
 74. **Yukalov V.I., Shumovsky A.S.** — Lectures on Phase Transitions, World Scientific, Singapore, 1990.
 75. **Nikolaev V.I., Rusakov V.S.** — Mössbauer Investigations of Ferrites, Moscow University, Moscow, 1985.
 76. **Yukalov V.I.** — Selected Topics in Statistical Mechanics, ed. Bogolubov N.N., Joint Inst. Nucl. Res., Dubna, 1988, p.444.
 77. **Delyagin N.N., Zonnenberg Y.D., Kornienko E.N., Nesterov V.I.** - Fiz. Tverd. Tela, 1977, v.19, p.922.
 78. **Babikova U.F., Gruzin P.Z., Spirin A.N., Uspensky M.N.** — Solid State Commun., 1979, v.32, p.191.
 79. **Kolk, B., Bleloch A., Hall D.** — Hyperfine Interact., 1986, v.29, p.1377.
 80. **Yukalov V.I.** — Mod. Phys., Lett., 1989, v.3, p.1337.
 81. **Stevens J. G., Bowen L.H., Whatley K.M.** — Anal. Chem. Fund. Rev., 1990, v.62, p.125.
 82. **Mayer J.E., Goeppert Mayer M.** — Statistical Mechanics, Wiley, New York, 1977.
 83. **Yukalov V.I.** — Physica A, 1997, v.234, p.725.
 84. **Lichtenberg A.J., Liberman M.A.** — Regular and Chaotic Dynamics, Springer, New York, 1992.
 85. **Coulett P., Gil L., Rocca F.** — Opt. Commun., 1989, v.73, p.403.
 86. **Staliunas K.** — Phys. Rev. A, 1993, v.48, p.1573.
 87. **Lugiato L.A. et al.** — Phys. Rev. A, 1988, v.37, p.3847.
 88. **Tredice J.R. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1989, v.62, p.1274.
 89. **Lugiato L.A. et al.** — J. Opt. Soc. Am. B, 1990, v.7, p.1019.
 90. **Green C. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.3124.
 91. **Brambilla M. et al.** — Phys. Rev. A, 1991, v.43, p.5090.
 92. **Brambilla M. et al.** — Phys. Rev. A, 1991, v.43, p.5114.

-
93. **Pastor I., Guerra J.M.** — Appl. Phys. B, 1990, v.51, p.342.
94. **Dangoisse D.** et al. — Phys. Rev. A, 1992, v.46, p.5955.
95. **Pastor I.** et al. — Physica D, 1993, v.66, p.412.
96. **Pérez-Garcia V.M., Guerra J.M.** — Phys. Rev. A, 1994, v.50, p.1646.
97. **Pérez-Garcia V.M., Pastor I., Guerra J.M.** — Phys. Rev. A, 1995, v.52, p.2392.
98. **Encinas-Sanz F., Guerra J.M., Pastor I.** — Opt. Lett., 1996, v.21, p.1153.
99. **Huyet G., Tredice J.R.** — Physica D, 1996, v.96, p.209.
100. **Huyet G., Rica S.** — Physica D, 1996, v.96, p.215.
101. **Korolev F.A., Abrosimov G.V., Odintsov A.I., Yakunin V.P.** — Opt. Spectrosc., 1970, v.28, p.290.
102. **Abrosimov G.V.** — Opt. Spectrosc., 1971, v.31, p.54.
103. **Korolev F.A., Abrosimov G.V., Odintsov A.I.** — Opt. Spectrosc., 1972, v.33, p.399.
104. **Ishenko V.I.** et al. — Pisma JETP, 1974, v.19, p.346.
105. **Korolev F.A., Odintsov A.I., Turkin E.G., Yakunin V.P.** — Kvant. Electron., 1975, v.2, p.413.
106. **Arecchi F.T., Giacomelli G., Ramazza P.L., Residori S.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.2531.
107. **Arecchi F.T., Giacomelli G., Ramazza P.L., Residori S.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.67, p.3749.
108. **Arecchi F.T., Bocaletti S., Ramazza P.L., Residori S.** — Phys. Rev. Lett., 1993, v.70, p.2277.
109. **Arecchi F.T.** — Physica D, 1995, v.86, p.297.
110. **Nicolis G., Progogine I.** — Self-Organization in Nonequilibrium Systems, Wiley, New York, 1974.
111. **Emelyanov V.I., Yukalov V.I.** — Opt. Spectrosc., 1986, v.60, p.385.
112. **Yukalov V.I.** — J. Mod. Opt., 1988, v.35, p.35.
113. **Yukalov V.I.** — Selected Topics in Statistical Mechanics, ed. Bogolubov N.N., Joint Inst. Nucl. Res., Dubna, 1988, p.468.
114. **Yukalov V.I.** — Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., 1989, v.53, p.100.
115. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1991, v.1, p.81.
116. **Umarov A.M., Yukalov V.I.** — Probl. At. Sci. Tech., 1992, v.24, p.189.
117. **Zheleznyakov V.V., Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy Vl.V.** — Usp. Fiz. Nauk, 1989, v.159, p.193.
118. **Mostowski J., Sobolewska B.** — Phys. Rev. A, 1984, v.30, p.1392.
119. **Bloembergen N., Pound R.V.** — Phys. Rev., 1954, v.95, p.8.
120. **Bösiger P., Brun E., Meir D.** — Phys. Rev. A, 1978, v.18, p.671.
121. **Kiselev J.F., Prudkoglyad A.F., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — Mod. Phys. Lett. B, 1988, v.1, p.409.
122. **Kiselev Y.F., Prudkoglyad A.F., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — J. Exp. Theor. Phys., 1988, v.67, p.413.
123. **Kiselev Y.F., Prudkoglyad A.F., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — Problems in Quantum Optics, ed. Yukalov V.I., Joint. Inst. Nucl. Res., Dubna, 1988, p.68.

124. **Kiselev Y.F., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — Mod. Phys. Lett. B, 1989, v.3, p.1149.
125. **Bazhanov N.A.** et al. — Fiz. Tverd. Tela, 1989, v.31, p.206.
126. **Bazhanov N.A.** et al. — J. Exp. Theor. Phys., 1990, v.70, p.1128.
127. **Reichert L.** et al. — Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A, v.340, p.278.
128. **Friedberg R., Hartmann S.R.** — Phys. Rev. A, 1974, v.10, p.1728.
129. **Beterov I.M., Lerner P.B.** — Usp. Fiz. Nauk, 1989, v.159, p.665.
130. **Belyanin A.A., Kocharyan V.V., Kocharyan V.L.V.** — Quantum Semiclass. Opt., 1997, v.9, p.1.
131. **Andreev A.V.** — Usp. Fiz. Nauk, 1990, v.160, p.1.
132. **Shavishvili T.M., Khutishvili K.O., Fokina N.P., Lavrentiev G.V.** - Pisma Z. Tekh. Fiz., 1989, v.15, p.33.
133. **Fokina N.P., Khutishvili K.O.** — Fiz. Met. Met., 1990, v.8, p.65.
134. **Kilin S.Y.** — Quantum Optics, Nauka, Minsk, 1990.
135. **Aliskenderov E.I., Shumovsky A.S., Dung H.T.** — Phys. Part. Nucl., 1993, v.24, p.409.
136. **Kochetov E.A., Yukalov V.I.** — Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., 1994, v.58, p.1235.
137. **Kochetov E.A., Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1995, v.5, p.186.
138. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1992, v.2, p.559.
139. **Fokina N.P., Khutishvili K.O., Chkhaidze S.G.** — Z. Eksp. Theor. Phys., 1992, v.102, p.1013.
140. **Fokina N.P., Khutishvili K.O., Chkhaidze S.G.** — Physica B, 1992, v.179, p.171.
141. **Scherrer D.P., Kneubühl F.K.** — Infrared Phys., 1993, v.34, p.227.
142. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1998, v.8, p.955.
143. **Slichter C.P.** — Principles of Magnetic Resonance, Springer, Berlin, 1980.
144. **Belozerova T.S., Henner V.K., Yukalov V.I.** — Phys. Rev. B, 1992, v.46, p.682.
145. **Belozerova T.S., Henner V.K., Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1992, v.2, p.545.
146. **Belozerova T.S., Henner V.K., Yukalov V.I.** — Comput. Phys. Commun., 1992, v.73, p.151.
147. **Belozerova T.S., Henner V.K., Yukalov V.I.** — Tech. Phys. Lett., 1992, v.18, p.404.
148. **Belozerova T.S., Henner V.K., Yukalov V.I.** — Proc. Int. Soc. Opt. Eng., 1994, v.2098, p.86.
149. **Belozerova T.S., Davis C.L., Henner V.K.** — Phys. Rev. B, 1998, v.58, p.3111.
150. **Mizrahi S.S., Mewes M.A.** — Int. J. Mod. Phys., 1993, v.7, p.2353.
151. **Yukalov V.I.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.3000.
152. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1995, v.5, p.526.
153. **Yukalov V.I.** — Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, eds. Makhankov V.G., Bishop A.R., Holm D.D., World Scientific, Singapore, 1995, p.356.
154. **Yukalov V.I.** — Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A, 1996, v.370, p. 345.
155. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1997, v.7, p.58.
156. **Yukalov V.I.** — Proc. Int. Soc. Opt. Eng., 1997, v.3239, p.118.
157. **Yukalov V.I., Gonzalez J.A., Dias C.L.** — Laser Phys., 1998, v.8, p.19.
158. **Yukalov V.I., Yukalova E.P.** — Laser Phys., 1998, v.8, p.1029.
159. **Holzner R., Derighetti B., Ravani M., Brun E.** — Phys. Rev. A, 1987, v.36, p.1280.

-
160. **Bogolubov N.N., Turaev M.T., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.** — JINR Rapid Commun., 1985, v.9, p.5.
 161. **Khutsishvili K.O., Chkhaidze S.G.** — Physica B, 1992, v.176, p.54.
 162. **Okunev I.S., Bazhanov N.A.** — Inst. Nucl. Phys. Commun. SS-42-2185, Gatchina, 1997.
 163. **Yukalov V.I., Cottam M.G., Singh M.R.** — J. Appl. Phys., 1999, v.85, p.5627.
 164. **Snowden C.M.** — Introduction to Semiconductor Device Modelling, World Scientific, Singapore, 1986.
 165. **Yukalov V.I.** — Ionizing Radiation Effects on Properties of Dielectrics and Semiconductors, ed. Ryazanov M.I., Atomizdat, Moscow, 1979, p.217.
 166. **Rudenko A.I., Yukalov V.I.** — Investigation of Surface and Volume Properties of Solids by Particle Interactions, ed. M.I. Ryazanov, Energoizdat, Moscow, 1981, p.78.
 167. **Yukalov V.I.** — JINR Rapid Commun., 1985, No.7, p.51.
 168. **Yukalov V.I., Yukalova E.P.** — Laser Phys., 1997, v.7, p.1076.
 169. **Van der Ziel A.** — Noise in Solid State Devices and Circuits, Wiley, New York, 1986.
 170. **Anderson M. H.** et al. — Science, 1995, v.269, p.198.
 171. **Bradley C.C., Sackett C.A., Tollet J.J., Hulet R.G.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.1687.
 172. **Davis K.B.** et al. — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.3969.
 173. **Fried D.G.** et al. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.8, p.3811.
 174. **Ketterle W.** et al. — Phys. Scr. T, 1996, v.66, p.31.
 175. **Pitaevskii L.P.** — Usp. Fiz. Nauk, 1998, v.168, p.641.
 176. **Parkins A.S., Walls D.F.** — Phys. Rep., 1998, v.303, p.1.
 177. **Wiseman H.M., Collett M.J.** — Phys. Lett. A, 1995, v.202, p.246.
 178. **Borde C.J.** — Phys. Lett. A, 1995, v.204, p.217.
 179. **Spreeuw R.J., Pfau T., Janicke U., Wilkens M.** — Europhys. Lett., 1995, v.32, p.469.
 180. **Guzman A.M., Moore M., Meystre P.** — Phys. Rev. A, 1996, v.53, p.977.
 181. **Holland M.** et al. — Phys. Rev. A, 1996, v.54, p.1757.
 182. **Moy G.M., Hope J.J., Savage C.M.** — Phys. Rev. A, 1997, v.55, p.3631.
 183. **Wiseman H.M.** — Phys. Rev. A, 1997, v.56, p.2068.
 184. **Kneer B.** et al. — Phys. Rev. A, 1998, v.58, p.4841.
 185. **Mewes M.O.** et al. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.582.
 186. **Andrews M.R.** et al. — Science, 1997, v.275, p.637.
 187. **Burt E.A.** et al. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.337.
 188. **Yukalov V.I.** — Phys. Rev. A, 1997, v.56, p.5004.
 189. **Yukalov V.I.** — Laser Phys., 1997, v.7, p.998.
 190. **Yukalov V.I.** — Braz. J. Phys., 1997, v.27, p.260.
 191. **Yukalov V.I., Yukalova E.P.** — Laser Phys., 1998, v.8, p.890.
 192. **Yukalov V.I.** — Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., 1998, v.62, p.305.
 193. **Kogan V.I., Galitsky V.M.** — Problems in Quantum Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963.

194. Constantinescu F., Magyari E. — Problems in Quantum Mechanics, Pergamon, Oxford, 1971.
195. Goswami A. — Quantum Mechanics, WCB, Dubuque, 1997.
196. Petrich W., Anderson M.H., Ensher J.R., Cornell E.A. — Phys. Rev. Lett., 1995, v.74, p.3352.
197. Han D.J., Wynar R.H., Courteille P., Heinzen D.J. — Phys. Rev. A, 1998, v.57, p.4114.
198. Dicke R.H., Wittke J.P. — Introduction to Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, 1960.
199. Gardiner S.A., Cirac J.L., Zoller P. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.79, p.4790.
200. Raab E.L. et al. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.59, p.2631.
201. Monroe C., Swann W., Robinson H., Wieman C. — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.1571.
202. Bohm D. — Quantum Theory, Prentice-Hall, New York, 1951.
203. Lee H.J., Chu S. — Phys. Rev. A, 1998, v.57, p.2905.
204. Kadlecak S., Andersen L.W., Walker T.G. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.80, p.5512.
205. Williams J. et al. — Phys. Rev. A, 1998, v.57, p.2030.
206. Yukalov V.I. — Acta Phys. Pol. A, 1980, v.57, p.295.
207. Myatt C.J. et al. — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.586.
208. Stamper-Kurn D.M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.80, p.2027.
209. Hall D.S. et al. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.81, p.1539.
210. Killian T.C. et al. — Phys. Rev. Lett., 1998, v.81, p.3807.
211. Pratt S. — Phys. Lett. B, 1993, v.301, p.159.
212. Baldin A.M. — Phys. Part. Nucl., 1977, v.8, p.429.
213. Baldin A.M. — Usp. Fiz. Nauk, 1985, v.147, p.424.
214. Reeves H. — Phys. Rep., 1991, v.201, p.335.
215. Boyko V.G., Jenkovszky L.L., Sysoev V.M. — Phys. Part. Nucl., 1991, v.22, p.675.
216. Adami C., Brown G.E. — Phys. Rep., 1993, v.234, p.1.
217. Yukalov V.I., Yukalova E.P. — Phys. Part. Nucl., 1997, v.28, p.37.
218. Shamenko A.A., Yukalova E.P., Yukalov V.I. — Int. J. Mod. Phys. B, 1996, v.10, p.669.
219. Yukalov V.I., Yukalova E.P. — Physica A, 1997, v.243, p.382.
220. Shamenko A.A., Yukalova E.P., Yukalov V.I. — Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics, eds. Baldin A.M., Burov V.V., Joint Inst. Nucl. Res., Dubna, 1997, v.2, p.345.
221. Yukalov V.I. — Laser Phys., 1998, v.8, p.1249.
222. Weinberg S. — Phys. Rev., 1963, v.130, p.776.
223. Weinberg S. — Phys. Rev. B, 1964, v.133, p.232.
224. Weinberg S. — Physica A, 1979, v.96, p.327.
225. Hadjimichef D., Krein G., Szpigiel S., Da Veiga J.S. — Ann. Phys., 1998, v.268, p.105.
226. Brown F. — Phys. Rev. Lett., 1988, v.61, p.2058.
227. Bogolubov P.N., Dorokhov A.E. — Phys. Part. Nucl., 1987, v.18, p.917.
228. Faessler A., Buchmann A.J., Krivoruchenko M.I., Martemyanov B.V. - Phys. Lett. B, 1997, v.391, p.255.
229. Faessler A., Buchmann A.J., Krivoruchenko M.I. — Phys. Rev. C, 1997, v.56, p.1576.
230. Faessler A., Buchmann A.J., Krivoruchenko M.I. — Phys. Rev. C, 1998, v.57, p.1458.

УДК 539.12.01

MANY-BODY THEORY FOR SYSTEMS OF COMPOSITE HADRONS

*G. Krein**

Institut für Kernphysik, Universität Mainz, D-55099 Mainz, Germany

Many-body systems of composite hadrons are characterized by processes that involve the simultaneous presence of hadrons and their constituents. We briefly review several methods that have been devised to study such systems and present a novel method that is based on the ideas of mapping between physical and ideal Fock spaces. The method, known as the Fock-Tani representation, was invented years ago in the context of atomic physics problems and was recently extended to hadronic physics. Starting with the Fock-space representation of single-hadron states, a change of representation is implemented by a unitary transformation such that composites are redescribed by elementary Bose and Fermi field operators in an extended Fock space. When the unitary transformation is applied to the microscopic quark Hamiltonian, effective, hermitian Hamiltonians with a clear physical interpretation are obtained. The use of the method in connection with the linked-cluster formalism to describe short-range correlations and quark deconfinement effects in nuclear matter is discussed. As an application of the method, an effective nucleon-nucleon interaction is derived from a constituent quark model, and used to obtain the equation of state of nuclear matter in the Hartree-Fock approximation.

Многочастичные системы составных адронов характеризуются процессами, которые включают в себя одновременно и адроны, и их составляющие. Кратко рассмотрены несколько методов, специально разработанных для изучения таких систем, и представлен новый метод, который основан на идее соответствия между физическим и идеальным пространствами Фока. Этот метод, известный как представление Фока-Тани, был разработан уже давно для решения задач атомной физики, а недавно был расширен и для применения в адронной физике. Начиная с одночастичных адронных состояний в пространстве Фока с помощью унитарного преобразования представление меняется так, что составляющие переписываются в терминах элементарных полевых операторов Бозе и Ферми в расширенном пространстве Фока. Когда это унитарное преобразование применяется к микроскопическому квартковому гамильтониану, получаются эффективные эрмитовы гамильтонианы с ясной физической интерпретацией. Обсуждается использование этого метода в связи с формализмом связанных кластеров для описания корреляций на малых расстояниях и эффектов кварткового деконфайнмента в ядерной материи. В качестве применения этого метода рассмотрены: вывод эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия из конституентной квартковой модели и получение уравнения состояния ядерной материи в приближении Хартри-Фока.

*Alexander von Humboldt Research Fellow
Permanent address: Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista,
Rua Pamplona, 145, 01405-900, São Paulo, SP - Brazil

1. INTRODUCTION

One of the most central problems of contemporary particle and nuclear physics is the description of the interactions among hadrons and the properties of high temperature and/or density hadronic matter in terms of quark and gluon degrees of freedom. The mathematical description of such systems is complicated due to the simultaneous presence of composites (hadrons) and constituents (quarks and gluons). The early studies of the hadron–hadron interaction using quark models employ cluster techniques such as adiabatic methods [1] and resonating group or generator coordinate methods [2]. More recently Barnes and Swanson [3] introduced a formalism based on the concepts of constituent interchange and quark line diagrams, known as the «quark Born diagram» formalism. This method is similar to the «constituent exchange» mechanisms proposed by Gunion, Brodsky and Blankenbecler [4] many years ago for high-energy hadron scattering. Also recently, Blaschke and Röpke [5] considered a thermodynamic Green's function approach for meson–meson scattering in a constituent quark model. Thermodynamic Green's functions have been used to study many-body problems in many areas of physics and seem appropriate for the study of quark-nuclear physics problems.

A different approach to the problem is the use of mapping representations, in which composites are redescribed by elementary particles. There exists an extensive literature on the subject; in nuclear physics mapping representations are mainly used in the study of collective oscillations of the nucleus. Examples of such mappings include the Holstein–Primakoff representation [6], the boson expansion of Belyaev and Zelevinskii [7] and the Marumori mapping [8]. A good review on these can be found in Ref. 9. Although such techniques are available for a long time, only recently there have been made attempts to extend them to treat hadron–hadron interactions in the context of quark models. References 10–15 are examples of extensions of such techniques to quark models. Here we discuss in some detail the Fock–Tani representation, which was originally developed for atomic physics applications and recently was extended to hadronic physics problems [16–18]. It was invented independently by Girardeau [19] and Vorob'ev and Khomkin [20]. It has been continuously improved during the last two decades, and has been used with success by Girardeau and collaborators in several areas of atomic physics [21–23]. Like many other mapping formalisms, the method is based on a change of representation by introducing fictitious elementary hadrons in close correspondence to the real hadrons. The change of representation is implemented by means of a unitary transformation such that the composite hadrons are redescribed by elementary-particle field operators. The unitary transformation is a generalization of a transformation employed by S. Tani [24] in 1960 to study single-particle scattering by a potential with a bound state. In the new representation the microscopic interquark forces change, they

become weaker, in the sense they cannot bind the quarks into hadrons, they describe only truly scattering processes. In the new representation, in addition to the modified interquark forces, one obtains effective interactions describing all possible processes between hadrons and their constituents. In the new representation all field operators representing quarks, antiquarks, gluons and *hadrons* satisfy canonical commutation relations and therefore the traditional methods of quantum field theory can be readily applied.

The use of the Fock–Tani representation for studying hadronic interactions at the quark–gluon level shares some similarities with the program outlined by Weinberg in the last section of his 1979 paper on effective Lagrangians [25]. Weinberg makes the suggestion of using the «quasiparticle» approach [26] for making perturbative calculations in QCD at low energies. The quasiparticle approach is a formalism developed by Weinberg in the 60's to deal with potentials that are too strong to allow the use of perturbation theory. In the quasiparticle approach the bound states of the theory are redescribed by fictitious elementary particles and, in order not to change the physics of the problem, the original potential is modified in such a way that the new potential does not produce the elementary particles as bound states of the theory. With such a modification the potential becomes sufficiently weak that scattering amplitudes can be calculated perturbatively. Weinberg imagines the possibility of implementing a quasiparticle approach to QCD. The program would start by weakening the forces of QCD with the introduction of an infrared cut-off. In order to preserve the physical content of the theory, the bound states (hadrons) are introduced as fictitious elementary particles which should be described by an effective chirally invariant Lagrangian. The parameters of the effective Lagrangian would have to be functions of the cut-off, defined by differential equations which guarantee the cut-off independence of the S -matrix, with the boundary condition that for higher enough energies one recovers pure QCD, where there is no cut-off. The program would work in practice if the solutions of the equations could be continued at low energies to cut-off values sufficiently small that perturbation theory could be employed.

A major complication for the applications of many-body techniques to systems containing composite particles is the absence of a good understanding of the low-energy regime of quantum chromodynamics (QCD). The phenomena of confinement of quarks and gluons and the formation of the hadron bound states in QCD requires the use of effective models, which in many cases are oversimplifications of reality. The techniques mentioned above invariably employ nonrelativistic quark models, or semi-relativistic ones. Obviously for the study of high temperature and/or density hadronic matter, relativity seems to be essential. On the other hand, for the study of low-energy hadron–hadron scattering, or even to low-temperature and/or density nuclear matter, the use of nonrelativistic or semirelativistic models might still be of interest for obtaining insight into the problem.

In the present paper we discuss the application of the Fock–Tani representation to study the properties of nuclear matter in terms of composite nucleons. We start in Section 2 with a brief discussion on quark models and possible connections to some aspects to QCD. In particular, for low-energy applications, the connection of the constituent quark model to the dynamical chiral symmetry breaking in QCD is discussed. In order to make contact with other composite-particle formalisms commonly used in this context, we briefly review in Section 3 the resonating group method (RGM), the quark–Born diagram (QBD) method and thermodynamic Green’s function formalisms. In Section 4 we present in some detail the basic ideas and methods of the Fock–Tani representation. Section 5 presents the derivation of an effective nucleon–nucleon interaction from a microscopic quark model. In Section 6 we discuss the use of a linked-cluster formalism in the Fock–Tani representation for the problem of nuclear matter and the onset of quark deconfinement. We also present one application of the effective nucleon–nucleon interaction derived in Section 5 to the calculation of the equation of state of cold nuclear matter. Conclusions and future perspectives are presented in Section 7.

2. QCD, CHIRAL SYMMETRY AND THE QUARK MODEL

There is a widespread belief that there exists an intermediate energy region in which it makes sense to describe the strong interactions in terms of an effective field theory of *constituent quarks* subject to weak color forces that become strong only at large separations and keep the quarks confined. The u and d constituent quarks have a mass of $m \sim 300$ MeV, which are believed to be the result of the spontaneous breakdown of the $SU(2) \otimes SU(2)$ chiral symmetry. If this is so, the Goldstone bosons of the spontaneous symmetry breakdown (pions in the case of u and d quarks only) must be included among the degrees of freedom of the effective theory. The lowest order terms of the Lagrangian of such an effective field theory were written down by Manohar and Georgi [27]. Many of the successes of the simple nonrelativistic quark model can be understood in this framework with a chiral symmetry breaking scale $\Lambda_{\chi SB} \sim 1$ GeV, which is significantly larger than the confinement scale Λ_{conf} . This scenario of weakly interacting constituent quarks has recently been shown [28] to provide a nice interpretation of lattice calculations. Also it has been shown recently that the Manohar and Georgi model can be derived from QCD models of the Nambu–Jona-Lasinio type and QCD effective action calculations [29].

The use of the Fock–Tani representation in connection with an effective quark–gluon Lagrangian involves a two-step process, as in Weinberg’s program outlined in the Introduction. In the first step the QCD forces are weakened by the introduction of an infrared cut-off Λ , which we choose to be $\Lambda_{\text{conf}} <$

$\Lambda < \Lambda_{\chi SB}$, and the QCD Lagrangian is replaced by an effective Lagrangian, as for example the one of Manohar and Georgi. In the next step, fictitious elementary particles with the quantum numbers of hadrons are introduced and their effective interactions are derived from the microscopic effective quark–gluon Lagrangian through the Fock–Tani unitary transformation. The parameters of the resulting effective hadronic interactions are functions of those of the quark–gluon Lagrangian. The program will be completed, in the sense of Weinberg’s program, when the cut-off independence of the S -matrix elements is enforced. Of course, this is the most difficult part of the entire program and not much progress can be made without a better understanding of the underlying mechanisms which govern the confinement and dynamical chiral symmetry breaking phenomena of QCD. While such an understanding is not reached, progress in the study of the hadronic interactions at the quark–gluon level can be made by fixing the parameters of the effective quark–gluon theory experimentally.

As discussed previously, since the effects of dynamical chiral symmetry breaking are included in the constituent quark mass the interquark forces become weaker in the effective theory. This allows one to identify the low-lying hadrons with nonrelativistic bound states of the constituent quarks. The quarks are presumably bound by the confining QCD interactions, along with effects of multiquark and multigluon operators that appear in high orders of $1/\Lambda_{\text{conf}}$ in the effective Lagrangian. Calculations of matrix elements of strong and electroweak couplings of quarks are performed using perturbation theory or large N_c expansion techniques, where N_c is the number of colors. For the calculation of matrix elements involving hadrons, such as the calculation of baryon magnetic moments and the G_A/G_V ratio in β -decay, the usual nonrelativistic quark-model wave functions are used for the hadron bound states. The nonrelativistic wave functions are obtained by solving the Schrödinger equation for three quarks (baryons) or a quark–antiquark pair (mesons) using a phenomenological confining interaction.

For future purposes, let us consider just the pion–quark interaction piece of the Manohar and Georgi model. At tree level, it is the standard pseudovector coupling

$$\mathcal{H}_{\pi q} = \frac{1}{f_\pi} \bar{\psi} \gamma_5 t^a \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} \pi^a \psi, \quad (1)$$

where $t^a = 1/2 \tau^a$. This leads to an effective nonrelativistic quark–quark interaction of the form

$$V_{\pi q} = - \left(\frac{1}{f_\pi} \right)^2 t^{a(1)} t^{a(2)} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2}. \quad (2)$$

This effective quark–quark interaction will be used to study the short-range part of the nucleon–nucleon interaction obtained via mapping to the Fock–Tani representation. This will be discussed in Section 5.

Before proceeding to the next section, let us introduce some notations. A meson state composed of one quark and one antiquark can be written in terms of constituent quark and antiquark creation operators q^\dagger and \bar{q}^\dagger as

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (3)$$

where $|0\rangle$ is the vacuum state for the constituent quarks, defined by

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0, \quad (4)$$

M_α^\dagger is the meson creation operator

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (5)$$

and $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ is the Fock-space meson amplitude. The index α identifies the quantum numbers of the meson, $\alpha = \{\text{spatial, spin, isospin}\}$. The indices μ and ν denote the spatial, spin, flavor, and color quantum numbers of the quarks. A summation over a repeated index is implied. It is convenient to work with Φ orthonormalized

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

The quark and antiquark operators satisfy canonical anticommutation relations,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}, \\ \{q_\mu, q_\nu\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Using these quark anticommutation relations and the normalization condition of Eq. (6), one can easily show that the meson operators satisfy the following commutation relations

$$\begin{aligned} [M_\alpha, M_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \\ [M_\alpha, M_\beta] &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (9)$$

In addition, one has

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \delta_{\mu\mu'} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, & [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\delta_{\nu\nu'} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} q_\mu^\dagger, \\ [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

The single-composite baryon creation operator, B_α^\dagger , is written in terms of three constituent-quark creation operators as

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \quad (11)$$

$\Psi_{\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ is the Fock-space baryon amplitude, where the index α identifies the quantum numbers of the baryon, and μ those of the quarks. As for the mesons, it is convenient to take the Fock-space amplitude orthonormalized

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Psi_{\alpha}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \delta_{\alpha \beta}. \quad (12)$$

Using the quark anticommutation relations, Eq. (7), and the normalization condition above, it can easily be shown that the baryon operators satisfy the following noncanonical anticommutation relations

$$\{B_{\alpha}, B_{\beta}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha \beta} - \Delta_{\alpha \beta}, \quad \{B_{\alpha}, B_{\beta}\} = 0, \quad (13)$$

where

$$\Delta_{\alpha \beta} = 3\Psi_{\alpha}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1 \mu_2 \nu_3} q_{\nu_3}^{\dagger} q_{\mu_3} - \frac{3}{2} \Psi_{\alpha}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1 \nu_2 \nu_3} q_{\nu_3}^{\dagger} q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\mu_2} q_{\mu_3}. \quad (14)$$

In addition,

$$\{q_{\mu}, B_{\alpha}^{\dagger}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\alpha}^{\mu \mu_2 \mu_3} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger}, \quad \{q_{\mu}, B_{\alpha}\} = 0. \quad (15)$$

The bound state amplitudes $\Phi_{\alpha}^{\mu\nu}$ and $\Psi_{\alpha}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ are obtained from a microscopic quark Hamiltonian. The commonly-used quark-model Hamiltonians can be written generically as

$$\begin{aligned} H &= T(\mu) q_{\mu}^{\dagger} q_{\mu} + T(\nu) \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} q_{\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\rho} q_{\sigma} + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} \bar{q}_{\sigma}, \end{aligned} \quad (16)$$

where the convention of a summation over repeated indices is again assumed. Strong decays and baryon-meson couplings are described by terms involving annihilation terms such as $\bar{q}^{\dagger} q^{\dagger} q^{\dagger} q$, which we do not write explicitly.

From Eq. (16), the equation of motion for the single meson state, in free space, is given by

$$\begin{aligned} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu'} &= \\ &= \{\delta_{\mu[\mu']} \delta_{\nu[\nu']} [T(\mu) + T(\nu)] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')\} \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu'} = E_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (17)$$

where E_{α} is the total energy of the meson. Here we are using the convention that there is no sum over repeated indices inside square brackets. A similar equation follows for the baryon amplitude.

The composite nature of the mesons and baryons is manifest in the terms $\Delta_{\alpha\beta}$ in Eqs. (8) and (13). Because of these terms, the usual field theoretic techniques, such as the Green's function method, Wick's theorem, etc., cannot be

directly applied to such operators. In the same way, the fact that the commutators $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$ and $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$, and the anticommutator $\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\}$ are not equal to zero, is a manifestation of the lack of kinematic independence of the hadron operators from the quark and antiquark operators. The point is that the hadron operators M_α , M_α^\dagger , B_α and B_α^\dagger are not convenient dynamical variables to be used.

Of course, as will be shown in the next section for the case of the Blaschke and Röpke approach, the traditional methods can be directly applied to the microscopic degrees of freedom. But then, the hadron degrees of freedom will appear as poles of Green's functions and their role as independent degrees of freedom is difficult to assess. The aim of changing representation is precisely to isolate the hadronic degree of freedom from the microscopic ones, and transfer the complicated interactions among the hadrons themselves and with their constituents to effective interactions.

We next briefly review the traditional methods RGM, QBD and Green's functions. We make contact between these and the Fock–Tani representation in Section 4.

3. THE RESONATING GROUP, GREEN'S FUNCTIONS AND QUARK-BORN-DIAGRAMS

Let us consider, for simplicity, the scattering of two composite mesons. The baryon–baryon and baryon–meson cases follow similar path. In a RGM calculation, the two-cluster state is introduced by writing

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_\Lambda^{\alpha\beta}M_\alpha^\dagger M_\beta^\dagger|0\rangle, \quad (18)$$

where $\psi_\Lambda^{\alpha\beta}$ is the ansatz wave function for the meson pair; it describes the c.m. and relative motions of the two-meson clusters. The M^\dagger 's are the meson creation operators as defined in Eq. (5). Λ identifies the set of quantum numbers of the two-cluster state. Using the commutation relation of the meson operators, Eq. (8), the normalization condition for the $\psi_\Lambda^{\alpha\beta}$ is obtained to be

$$\langle\Lambda|\Lambda'\rangle = \psi_\Lambda^{*\alpha\beta}N(\alpha\beta; \alpha'\beta')\psi_{\Lambda'}^{\alpha'\beta'} = \delta_{\Lambda'\Lambda}, \quad (19)$$

where $N(\alpha\beta; \alpha'\beta')$ is the «normalization kernel»,

$$N(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{*\rho\sigma}\Phi_{\beta'}^{\mu\sigma}\Phi_{\alpha'}^{\rho\nu}. \quad (20)$$

The exchange kernel, $N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta')$, comes from the noncanonical part of the meson commutation relation of Eq. (8), and it reflects the Pauli principle among

the quarks and antiquarks in the clusters α and β . The equation of motion for $\psi_{\Lambda}^{\alpha\beta}$ is determined by means of the variational principle

$$\delta\langle\Lambda|(H - E_{\Lambda})|\Lambda\rangle = 0, \quad (21)$$

where H is the quark–antiquark Hamiltonian given by Eq. (16). Eq. (21) leads to the RGM equation,

$$[H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_{\Lambda}N(\alpha\beta; \gamma\delta)]\psi_{\Lambda}^{\gamma\delta} = 0, \quad (22)$$

with

$$H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (23)$$

where the kinetic term $T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ is given by

$$T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\beta\delta}\Phi_{\alpha}^{*\mu\nu}H(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} + \delta_{\alpha\gamma}\Phi_{\beta}^{*\mu\nu}H(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu'\nu'}, \quad (24)$$

and the potential term $V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ can be written as a sum of three contributions

$$V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{mm}^{dir}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{exc}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{int}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (25)$$

where each of these is given by

$$\begin{aligned} V_{mm}^{dir}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 2\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\nu'}\Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} + \\ &+ \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho')\Phi_{\delta}^{\rho'\nu}\Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\nu'}\Phi_{\gamma}^{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} V_{mm}^{exc}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \left[\Phi_{\alpha}^{*\mu\nu}\Phi_{\beta}^{*\rho\sigma}V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu'\sigma}\Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} + \right. \\ &+ \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma}\Phi_{\beta}^{*\mu\nu}V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\nu'}\Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu'\nu'}\Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} + \\ &+ \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu}\Phi_{\beta}^{*\mu\sigma}V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\sigma}\Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} + 2\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho')\Phi_{\delta}^{\mu'\nu}\Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} + \\ &\left. + 2\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu\nu'}\Phi_{\gamma}^{\rho\sigma'} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} V_{mm}^{int}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -\frac{1}{2} \left[\Phi_{\alpha}^{*\mu\nu}\Phi_{\beta}^{*\rho\sigma}H(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu'\sigma}\Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} + \right. \\ &+ \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma}\Phi_{\beta}^{*\mu\nu}H(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\nu'}\Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}H(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu'\nu'}\Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} + \\ &\left. + \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu}\Phi_{\beta}^{*\mu\sigma}H(\mu\nu; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\sigma}\Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

The two-meson wave function is not normalized in the usual quantum mechanical way, because of the presence of normalization kernel in Eq. (19). It is common practice [2] to introduce a «renormalized» wave function defined as

$$\bar{\psi}_{\Lambda}^{\alpha\beta} \equiv N^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta')\psi_{\Lambda}^{\alpha'\beta'}, \quad (29)$$

where $N^{1/2}$ is the square root of the RGM normalization kernel. This clearly leads to

$$\bar{\psi}_{\Lambda'}^{*\alpha\beta} \bar{\psi}_{\Lambda}^{\alpha\beta} = \delta_{\Lambda'\Lambda}. \quad (30)$$

In terms of the renormalized wave function, the RGM equation can be rewritten as

$$[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_{\Lambda}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}] \bar{\psi}_{\Lambda}^{\gamma\delta} = 0, \quad (31)$$

where the «renormalized» RGM Hamiltonian is

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta') H_{RGM}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta') N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \gamma\delta). \quad (32)$$

Now, let us expand $N^{-\frac{1}{2}}$ in Eq. (32) as

$$N^{-\frac{1}{2}} = (1 - N_E)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}N_E + \frac{3}{8}N_E^2 + \dots, \quad (33)$$

where N_E is the exchange kernel defined in Eq. (20). Now, if only the first order term is retained, then the lowest order correction to the RGM Hamiltonian is

$$\begin{aligned} \bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{dir}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{exc}(\alpha\beta; \gamma\delta) - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} [H(\mu\nu; \mu'\nu') - H(\mu\nu; \lambda\tau)\Delta(\lambda\tau; \mu'\nu')] \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha \leftrightarrow \beta; \gamma \leftrightarrow \delta) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} [H(\mu\nu; \mu'\nu') - \Delta(\mu\nu; \lambda\tau)H(\lambda\tau; \mu'\nu')] \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha \leftrightarrow \beta; \gamma \leftrightarrow \delta) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

If the Φ 's are chosen to be the eigenstates of the microscopic quark Hamiltonian, Eq. (17), the intra-exchange term V_{mm}^{int} is obviously canceled. This cancellation is the main effect of the renormalization of the wave function, higher order terms in the expansion give small corrections. This can be explicitly demonstrated in a simple example.

We consider meson–meson scattering, where the quark and the antiquark have equal masses, m_q , and use an harmonic potential for the microscopic interaction. The Fock-space amplitude is then a gaussian whose width b is related to the r.m.s. radius of the meson by $\langle r^2 \rangle = \sqrt{3/2}b$. The total energy of a single meson is [18]

$$E(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}^2}{4m_q} + 2m_q + \frac{3}{m_q b^2} + \frac{4C}{3}, \quad (35)$$

where C is the spring constant.

The evaluation of normalization kernel and its square root can be done analytically. The results are [18],

$$N(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\gamma)\delta^{(3)}(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\delta) - \frac{1}{6}\mathcal{N}_E(\mathbf{P}_\alpha\mathbf{P}_\beta; \mathbf{P}_\gamma\mathbf{P}_\delta), \quad (36)$$

$$N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\gamma)\delta^{(3)}(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\delta) + C_N\mathcal{N}_E(\mathbf{P}_\alpha\mathbf{P}_\beta; \mathbf{P}_\gamma\mathbf{P}_\delta), \quad (37)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_E(\mathbf{P}_\alpha\mathbf{P}_\beta; \mathbf{P}_\gamma\mathbf{P}_\delta) &= \delta^{(3)}(\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_\delta) \left(\frac{b^2}{2\pi}\right)^{3/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{b^2}{4} \left[\mathbf{P}_\alpha^2 + \frac{\mathbf{P}_\gamma^2}{2} + \frac{\mathbf{P}_\delta^2}{2} - \mathbf{P}_\alpha \cdot (\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_\delta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

with

$$C_N = \frac{\omega}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \left(\frac{\omega}{2}\right)^{m-1} \left(\prod_{n=1}^m \frac{2n-1}{n} \right), \quad (39)$$

with $\omega = 1/6$. The partial sums $C(k)$,

$$C(k) = \sum_{m=1}^k \left(\frac{\omega}{2}\right)^{m-1} \left(\prod_{n=1}^m \frac{2n-1}{n} \right), \quad (40)$$

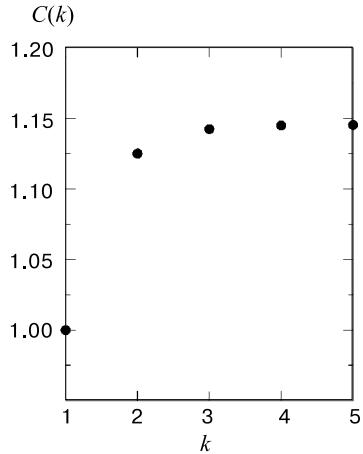


Fig. 1. The partial sums $C(k)$ of Eq. (39)

are plotted in Fig. 1 below. It is seen that the series is rapidly convergent, for $k \geq 2$, the $C(k)$'s have almost reached their asymptotic value, $C(\infty) \sim 1.145$. The meaning of this is that retention of only the first term in Eq. (33) is a very good approximation to the exchange kernel.

One can also show [18], by solving the full RGM equation exactly, that the effect of the higher order terms in Eq. (33) is less than 5% on the effective meson-meson potentials. Obviously, these results are for a microscopic harmonic interaction. For other types of interactions, Fock-space amplitudes Φ will not be a gaussian, and a check on the rate of convergence of the expansion in Eq. (33) is advisable.

We next consider the thermodynamic Green's function method of Blaschke and

Röpke [5]. In order to simplify the discussion these authors considered a static quark–antiquark potential $V_{q\bar{q}}$ which operates within color neutral pairs only. Therefore, only ladder diagrams contribute. The starting point is the single-quark Green’s function (we follow Ref. 5, which uses the notations of Ref. 30)

$$G(\mu, z) = \frac{1}{z - E_\mu}, \quad (41)$$

where, as above, μ represents collectively the spatial, spin, flavor, and color quantum numbers of the quarks and E_μ is the energy of the quark. The two-quark Green’s function, which contains information on the meson bound-states, is the solution of the equation represented in Fig. 2.

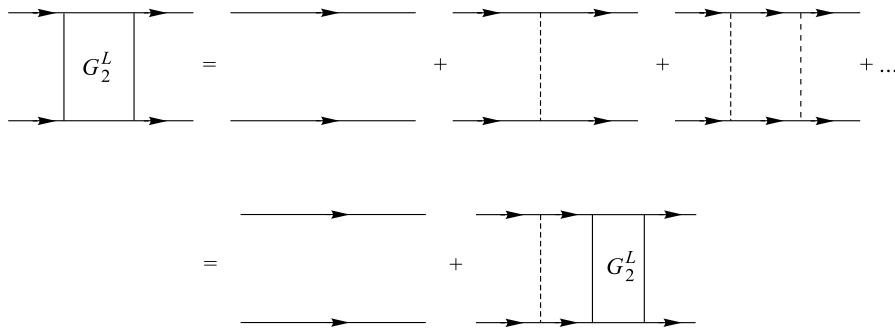


Fig. 2. Equation for the two-particle Green’s function in the ladder approximation

The equation for G_2^L is

$$G_2^L(\mu\nu, \mu'\nu', \Omega_2) = G_2^0(\mu, \nu, \Omega_2) [\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} + V(\mu\nu, \sigma\rho)G_2^L(\sigma\rho, \mu'\nu', \Omega_2)], \quad (42)$$

where L indicates ladder approximation. Here the notation of sum over repeated indices is used (wherever clarity demands, a summation will be explicitly indicated), and $G_2^0(\mu, \nu, \Omega_2)$ is the free two-quark Green’s function

$$G_2^0(\mu, \nu, \Omega_2) = \sum_n G(\mu, z_n) G(\nu, \Omega_2 - z_n) = \frac{1 - f(E_\mu) - f(E_\nu)}{\Omega_2 - E_\mu - E_\nu}. \quad (43)$$

The Fermi–Dirac distributions can be neglected at low densities.

Let, as above, $\Phi_\alpha^{\mu\nu} \equiv <\mu\nu|\alpha>$ denote the solution of the two-quark equation of motion with energy E_α . Obviously,

$$G_2 = \sum_\alpha |\alpha> \mathcal{G}_{\text{meson}}(\alpha, \Omega_2) <\alpha|, \quad (44)$$

where the summation is over the discrete and continuum states and $\mathcal{G}_{\text{meson}}(\alpha, \Omega_2)$ is the meson propagator,

$$\mathcal{G}_{\text{meson}}(\alpha, \Omega_2) = \frac{1}{\Omega_2 - E_\alpha}. \quad (45)$$

Again, in the low density limit, where one expects that the quarks remain confined into the mesons, the summation is only over discrete states (bound meson states).

The effective meson-meson potential can be identified by considering the four-quark T_4 -matrix or, equivalently, the four-quark Green's function G_4 . The Green's function G_4 is obtained from the T_4 -matrix by the usual amputation procedure, as explained in Ref. 30. A typical diagram that contributes to G_4^L (where L again means ladder approximation) is shown in Fig. 3 below.

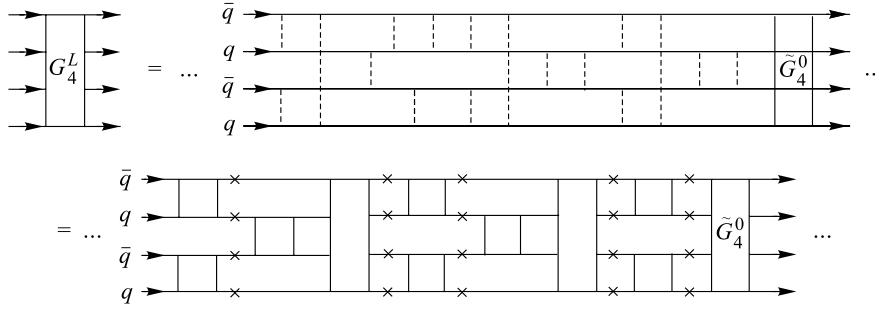


Fig. 3. A typical contribution to G_4^L

This particular diagram is represented by

$$G_{2+2}^I G_4^{0-1} G_{2+2}^{II} G_4^{0-1} G_{2+2}^I G_4^{0-1} G_{2+2}^{II} G_4^{0-1} G_{2+2}^I G_4^{0-1} \tilde{G}_4^0. \quad (46)$$

Here, G_{2+2}^I and G_{2+2}^{II} are the two possible two-meson interactions

$$G_{2+2}^I(\mu\nu\sigma\rho, \mu'\nu'\sigma'\rho', \Omega_4) = \\ = \frac{\Phi_{\alpha_1}^{*\mu\nu} \Phi_{\alpha_2}^{*\sigma\rho} \Phi_{\alpha'_2}^{\sigma'\rho'} \Phi_{\alpha'_1}^{\mu'\nu'}}{\Omega_4 - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2}} - \frac{\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\rho\rho'}}{\Omega_4 - E_\mu - E_\nu - E_\sigma - E_\rho}, \quad (47)$$

and

$$G_{2+2}^{II}(\mu\nu\sigma\rho, \mu'\nu'\sigma'\rho', \Omega_4) = G_{2+2}^I(\sigma\nu\mu\rho, \sigma'\nu'\mu'\rho', \Omega_4), \quad (48)$$

and G_4^{0-1} describes the amputation of the four free quark propagators represented by the crosses in Fig. 3. Neglecting Fermi-Dirac occupation probabilities, G_4^{0-1} is given by

$$G_4^{0-1}(\mu\nu\sigma\rho, \mu'\nu'\sigma'\rho', \Omega_4) = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\rho\rho'} (\Omega_4 - E_\mu - E_\nu - E_\sigma - E_\rho). \quad (49)$$

\tilde{G}_4^{0-1} is the antisymmetrized form of G_4^0

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_4^0(\mu\nu\sigma\rho, \mu'\nu'\sigma'\rho', \Omega_4) = \\ & = \frac{\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\rho'} - \delta_{\mu\sigma'}\delta_{\nu\nu'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\rho'} - \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\rho'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\nu'} + \delta_{\mu\sigma'}\delta_{\nu\rho'}\delta_{\sigma\mu'}\delta_{\rho\nu'}}{\Omega_4 - E_\mu - E_\nu - E_\sigma - E_\rho}. \end{aligned} \quad (50)$$

Introducing the pair-flip potential

$$U_{2+2}(\mu\nu\sigma\rho, \mu'\nu'\sigma'\rho', \Omega_4) = -(\Omega_4 - E_\mu - E_\nu - E_\sigma - E_\rho) \delta_{\mu\sigma'}\delta_{\nu\nu'}\delta_{\sigma\mu'}\delta_{\rho\rho'}, \quad (51)$$

represented in Fig.4, all the sequences as in Eq. (46) can be broken up as

$$G_4^L = G_4^I + G_4^{II} - \tilde{G}_4^0, \quad (52)$$

$$G_4^I = \tilde{G}_4^0 + G_{2+2}^I U_{2+2} G_4^I, \quad (53)$$

$$G_4^{II} = \tilde{G}_4^0 + G_{2+2}^{II} U_{2+2} G_4^{II}. \quad (54)$$

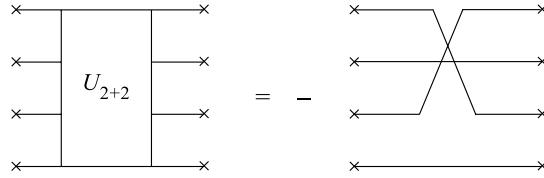


Fig. 4. The pair-flip potential defined in Eq. (51)

Let us consider Eq. (53). For the repeated sequence of this, $G_{2+2}^I U_{2+2}$, it is not difficult to show [5] that

$$\begin{aligned} & G_{2+2}^I(\mu\nu\sigma\rho, \mu''\nu''\sigma''\rho'', \Omega) U_{2+2}(\mu''\nu''\sigma''\rho'', \mu'\nu'\sigma'\rho', \Omega) = \\ & = -\frac{\Phi_{\alpha_1}^{*\mu\nu}\Phi_{\alpha_2}^{*\sigma\rho}\Phi_{\alpha'_2}^{\sigma''\rho''}\Phi_{\alpha'_1}^{\mu''\nu''}}{\Omega_4 - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2}} \times \\ & \times [V_{q\bar{q}}(\mu''\rho'', \mu'\rho')\delta_{\nu''\nu'}\delta_{\sigma''\sigma'} + V_{q\bar{q}}(\sigma''\nu'', \sigma'\nu')\delta_{\mu''\mu'}\delta_{\rho''\rho'}]. \end{aligned} \quad (55)$$

From the iteration of this, $G_{2+2}^I U_{2+2} G_{2+2}^I U_{2+2}$, one can read off the effective meson-meson potential

$$\begin{aligned} & G_{2+2}^I U_{2+2} G_{2+2}^I U_{2+2} \sim \sum_{\alpha,\beta,\dots} \Phi_\alpha^{\mu\nu}\Phi_\beta^{\sigma\rho} \mathcal{G}_{2,\text{meson}}(\alpha, \beta, \Omega_4) \times \\ & \times V_{mm}(\alpha\beta, \gamma\delta) \mathcal{G}_{2,\text{meson}}(\gamma, \delta, \Omega_4) \Phi_\gamma^{*\mu''\nu''}\Phi_\delta^{\sigma''\rho''} \dots \end{aligned} \quad (56)$$

with

$$\begin{aligned} V_{mm}(\alpha\beta, \gamma\delta) = & -\Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\sigma\rho} \times \\ & \times [V_{q\bar{q}}(\mu\rho, \mu'\rho')\delta_{\nu\nu'}\delta_{\sigma\sigma'} + V_{q\bar{q}}(\sigma\nu, \sigma'\nu')\delta_{\mu\mu'}\delta_{\rho\rho'}] \Phi_\gamma^{*\mu'\rho'} \Phi_\delta^{*\sigma'\nu'}, \end{aligned} \quad (57)$$

and

$$\mathcal{G}_{2,\text{meson}} = \frac{1}{\Omega_4 - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2}}. \quad (58)$$

This last equation is obtained with the neglect of Bose–Einstein occupation factors.

Notice that the effective meson–meson potential in Eq. (57) is precisely equal (after reshuffling indices) to 1/2 of the second line of Eq. (27). However, notice also that the first line of Eq. (27) has the same quark indices as Eq. (57), but the interaction indices are contracted with the indices of the mesons in the final states. We come back to this point in Section 4.

The expression of Blaschke and Röpke is identical to the expression obtained by Barnes and Swanson using the Quark-Born-Diagram method [3]. As mentioned in the Introduction, the QBD is similar to the «constituent exchange» of Gunion, Brodsky and Blankenbecler [4] for high-energy hadron scattering. For high-energy processes, there is strong experimental evidence for the «exchange force» from large momentum transfer processes [31]. For low-energy processes, the situation is not so clear in view of the model dependence of the microscopic interactions, whose connection to QCD is not yet understood, as discussed in Section 2.

The way to obtain the effective hadron–hadron interaction in the QBD method is as follows. Initially a generic scattering diagram with initial and final hadron–hadron states is drawn. Then initial and final quark lines are connected in all possible ways consistent with flavor conservation. The next step consists in inserting interaction lines (e.g., one-gluon-exchange interactions) between all pairs of initial quarks in different initial baryons. Naturally many diagrams are trivially zero because of color symmetry, and the potential can be read-off immediately. Care must be exercised with combinatorial factors, i.e., the number of ways that quark lines can be connected. Although the applications of Barnes, Swanson and collaborators [3] for scattering cross sections were done in the Born approximation, there is no reason for not using the effective potential in an integral equation for obtaining the scattering amplitude.

In the next section we discuss the Fock–Tani method and discuss further comparisons with the methods discussed here.

4. THE FOCK–TANI REPRESENTATION AND EFFECTIVE HADRON HAMILTONIANS

In this section we summarize the basic features of the Fock–Tani representation. We use a simple example to explain the formalism, but it should become

clear that the applicability of the method is not restricted to this example. For the purposes of illustration, we consider the representation for mesons, considered as a bound-state of a quark and an antiquark as in Section 2. The Hamiltonian is taken as in Eq. (16). We note that a great variety of quark-model Hamiltonians used in the literature can be written in such a form. However, at this point of the discussion we have not included in Eq. (16) terms such as pair-creation, which are of the form $\bar{q}^\dagger q^\dagger q^\dagger q$, as discussed in Section 2. However, it will become clear from the discussion in the next sections such terms are treated without difficulties.

The change to the FT representation is implemented by means of a unitary transformation U , such that a *single* composite meson state $|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle$ is transformed into a *single* ideal-meson state $|\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger |0\rangle \equiv U^{-1}|\alpha\rangle$, where U is of the general form

$$U = \exp(-\pi/2F), \quad F = \sum_{\alpha} (m_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger m_\alpha). \quad (59)$$

The m_α^\dagger and m_α are the ideal-meson creation and annihilation operators and the O_α^\dagger and O_α operators are functionals of the M_α^\dagger , M_α and $\Delta_{\alpha\beta}$. By definition, the m 's and O 's satisfy canonical commutation relations

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= [O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \\ [m_\alpha, m_\beta] &= [m_\alpha^\dagger, m_\beta^\dagger] = [O_\alpha, O_\beta] = [O_\alpha^\dagger, O_\beta^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

and, by definition, the m^\dagger and m commute with the quark and antiquark operators.

The operator U acts on an enlarged Fock space \mathcal{I} , which is the graded direct product of \mathcal{F} and an *ideal* state space \mathcal{M} , the space with the new degrees of freedom described by the ideal meson operators m_α^\dagger and m_α . The vacuum state of \mathcal{M} is denoted by $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ and so, the vacuum state of \mathcal{I} is

$$|0\rangle = |0\rangle \times |0\rangle_{\mathcal{M}}. \quad (61)$$

In \mathcal{I} the physical states, $|\psi\rangle$, constitute a subspace \mathcal{I}_0 isomorphic to \mathcal{F} and satisfy the constraint equation

$$m_\alpha |\psi\rangle = 0. \quad (62)$$

Now, the new degrees of freedom acquire physical content when the unitary operator U transforms the physical states $|\psi\rangle$ of \mathcal{I}_0 to states $|\psi\rangle = U^{-1}|\psi\rangle$. The image states $|\psi\rangle$ span the FT space $\mathcal{F}_{FT} = U^{-1}\mathcal{I}_0$, and satisfy the transformed constraint equation

$$U^{-1}m_\alpha U|\psi\rangle = O_\alpha|\psi\rangle = 0. \quad (63)$$

Although the physical content of the Fock spaces \mathcal{F} and \mathcal{F}_{FT} is the same, the mathematical representation of states and operators in \mathcal{F}_{FT} involves only

canonical field operators. A more detailed discussion of these and other formal aspects of the mapping procedure can be found in [18].

The operators O_α^\dagger and O_α are constructed by an iterative procedure as a power series in the Φ 's

$$O_\alpha = \sum_n O_\alpha^{(n)}, \quad (64)$$

where n identifies the power of Φ in the expansion. The expansion starts at zeroth order with

$$O_\alpha^{(0)} = M_\alpha. \quad (65)$$

The construction of the higher order terms $O_\alpha^{(n)}$, $n \geq 1$, involves addition of a series of counterterms such that commutation relations of O^\dagger and O are satisfied order by order. Since at zeroth order one has

$$[O_\alpha^{(0)}, O_\beta^{(0)\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (66)$$

and $\Delta_{\alpha\beta}$ is of second order [see Eq. (9)], one has that

$$O_\alpha^{(1)} = 0. \quad (67)$$

The next nonzero term is then of order $n = 2$. It is not difficult to show that the second order counterterm that has to be added to $O_\alpha^{(0)}$ to cancel the $\Delta_{\alpha\beta}$ in $[O_\alpha^{(0)}, O_\beta^{(0)\dagger}]$ is equal to

$$\frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta. \quad (68)$$

Then, up to $n = 2$,

$$O_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}B_\beta, \quad (69)$$

and one obtains

$$\begin{aligned} [O_\alpha, O_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}[\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta]M_\gamma - \frac{1}{2}M^\dagger[M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] = \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3). \end{aligned} \quad (70)$$

A third order counterterm has to be added such that the $\mathcal{O}(\Phi^3)$ piece cancels, and so on to higher orders. However, for our purposes here one needs O_α up to $n = 3$ only

$$O_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta - \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma. \quad (71)$$

The transformation of the Hamiltonian is made by transforming initially the quark and antiquark operators. Since the O operators are given by a power series,

the transformed quark operators are also obtained as a power series, which can be obtained by expanding the exponential in Eq. (59) to the desired order or, equivalently, by means of the «equation of motion» technique [19, 21]. Up to third order, one obtains [18]

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(0)} &= q_\mu, \quad \bar{q}_\nu^{(0)} = \bar{q}_\nu, \\
 q_\mu^{(1)} &= \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger (m_\alpha - M_\alpha), \quad \bar{q}_\nu^{(1)} = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger (M_\alpha - m_\alpha), \\
 q_\mu^{(2)} &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu\nu_1} (m_\alpha^\dagger m_\beta + M_\alpha^\dagger M_\beta + 2M_\alpha^\dagger m_\beta) q_{\mu_2}, \\
 \bar{q}_\nu^{(2)} &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu} (m_\alpha^\dagger m_\beta + M_\alpha^\dagger M_\beta + 2M_\alpha^\dagger m_\beta) \bar{q}_{\nu_2}, \\
 q_\mu^{(3)} &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \left[\Phi_\beta^{\mu\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger (-m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma - M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma + \right. \\
 &\quad \left. + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma) + \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \left(\Phi_\beta^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma + \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho \right) (m_\beta - 2M_\beta) \right], \\
 \bar{q}_\nu^{(3)} &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \left[\Phi_\beta^{\rho\nu} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} q_{\rho_1}^\dagger (-m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma - M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma + \right. \\
 &\quad \left. + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma) + \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \left(\Phi_\beta^{\rho\sigma_1} q_{\mu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma + \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho \right) (m_\beta - 2M_\beta) \right].
 \end{aligned} \tag{72}$$

The transformation of the microscopic Hamiltonian is obtained by using the transformed quark operators of Eq. (72) in Eq. (16). This is done by considering all possible combinations of the form $T(\mu) q_\mu^{(n)\dagger} q_\mu^{(m)}$, $V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{(n)\dagger} q_\nu^{(m)\dagger} q_\rho^{(k)} q_\sigma^{(l)}$, etc., where $n, m, k, l = 1, 2, 3$. One obtains that the general structure of the transformed Hamiltonian is

$$H_{\text{FT}} = H_q + H_m + H_{mq}, \tag{73}$$

where the subindices identify the operator content of each term. The quark Hamiltonian H_q has an identical structure to the one of the microscopic quark Hamiltonian of Eq. (16), except that the term corresponding to the quark–antiquark interaction is modified to

$$\begin{aligned}
 V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) &\rightarrow \left[V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma\rho) - H(\mu\nu; \sigma'\rho') \times \right. \\
 &\quad \left. \times \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) + \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) \right] q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma,
 \end{aligned} \tag{74}$$

where $\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') = \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{\mu'\nu'}$ is the «bound state kernel». When Φ is an eigenstate of the microscopic Hamiltonian, Eq. (17), the quark–antiquark interaction is then modified to

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \rightarrow [V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - E_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\sigma\rho}] q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma. \tag{75}$$

It is not difficult to show (see Appendix C of Ref. 21) that this modified interaction does not produce the quark–antiquark bound states. This feature leads to the same effect of curing the bound state divergences of the Born series as in Weinberg’s quasiparticle method [26] discussed in the Introduction: the modified quark–antiquark interaction is unable to form mesons, the mesons are redescribed by the H_m part of the effective Hamiltonian.

H_{mq} describes quark–meson processes as meson breakup into a quark–antiquark pair, meson–quark scattering, meson–meson total breakup into two quark–antiquark pairs, etc. In models where quarks are truly confined, these terms contribute to free-space meson–meson processes as intermediate states only. However, in high temperature and/or density systems hadrons and quarks can co-exist and the breakup and recombination processes can play important role.

The term involving only ideal meson operators has a component that represents an effective meson–meson interaction. This meson–meson interaction is of the general form

$$H_m = E_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha + \frac{1}{2} V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma, \quad (76)$$

where the effective meson–meson potential V_{mm} can be divided into a sum of *direct*, *exchange*, and *intra-exchange* parts, as given by Eqs. (25)–(28). The higher order terms by Φ which are neglected from these expression give rise to many-meson (higher than two-meson) forces, and also introduce orthogonality corrections. The orthogonality corrections are precisely of the same nature of the higher-order terms of the expansion of the square-root of the normalization kernel of the RG method, Eq. (33). As seen in the last section, the cancellation of the intra-exchange terms in lowest order is the dominant effect of the orthogonalization terms and higher order corrections are in general small.

The technique can be applied in a straightforward way to baryon bound states of three constituent quarks as in Eq. (11). For a Hamiltonian as given in Eq.(16), the effective baryon–baryon Hamiltonian consistent with the lowest-order orthogonality corrections is [18]

$$H_b = \Psi_\alpha^{*\mu\nu\lambda} H(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\beta^{\sigma\rho\lambda} b_\alpha^\dagger b_\beta + \frac{1}{2} V_{bb}(\alpha\beta; \delta\gamma) b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma b_\delta, \quad (77)$$

where b_α and b_α^\dagger are the ideal baryon operators, and V_{bb} is the effective baryon–baryon potential. V_{bb} is given as a sum of five terms

$$V_{bb}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \sum_{n=1}^5 V_n(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (78)$$

where the V_n ’s are given in terms of the baryon amplitudes Ψ as

$$\begin{aligned}
V_1(\alpha\beta;\gamma\delta) &= +9V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3}\Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3}, \\
V_2(\alpha\beta;\gamma\delta) &= -36V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3}\Psi_\gamma^{\rho\nu_2\mu_3}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\nu_3}, \\
V_3(\alpha\beta;\gamma\delta) &= -9V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3}\Psi_\gamma^{\sigma\nu_2\nu_3}\Psi_\delta^{\rho\mu_2\mu_3}, \\
V_4(\alpha\beta;\gamma\delta) &= -18V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu\nu}\Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\rho}\Psi_\delta^{\mu_1\sigma\nu_3}, \\
V_5(\alpha\beta;\gamma\delta) &= -18V_{qq}(\mu\nu;\sigma\rho)\Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu}\Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3}\Psi_\delta^{\sigma\mu_2\rho}.
\end{aligned} \tag{79}$$

In the next two figures we show a graphical representation of the different contributions V_n , $n=1, \dots, 5$ to V_{bb} . The qualitative difference between V_1 and the $V_2 \dots V_5$ is that the latter involve quark interchange between the two colliding nucleons.

Note that this effective baryon–baryon interaction is completely general, it depends only on the fact that the baryons are three-quark bound-states, and that quarks interact through two-body forces.

The method however can handle more complicated Fock-space amplitudes and more complicated microscopic interactions. The necessary extension of the formalism to the more general situation can be found in Ref. 17.

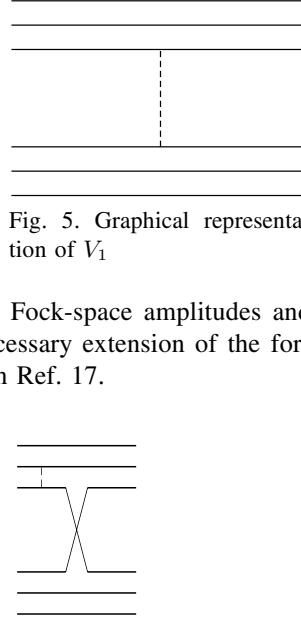


Fig. 5. Graphical representation of V_1

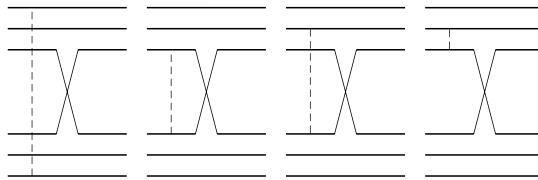


Fig. 6. Graphical representation of $V_2 \dots V_5$

One particularly important property of the effective hadron–hadron interactions in the Fock–Tani representation is that they lead to scattering T -matrices that are post-prior symmetrical [32]. That is, the scattering matrix is symmetric under exchange of initial and final states. The lack of this symmetry is of no importance for the case of «symmetric» initial and final states, as in processes like $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$. However, it is of importance [18] for asymmetric cases like $J/\Psi + \pi \rightarrow D$ -mesons [33]. The different position of the quark–antiquark interaction and the factors of 1/2 in the effective meson–meson interaction of Blaschke and Röpke as compared to the corresponding Fock–Tani (or RGM) interaction are the cause [18] of the breaking of the post-prior symmetry in the calculation of the charmonium dissociation in Ref. 33.

In the next section we specialize to the case of the nucleon–nucleon (NN) interaction, and obtain an effective NN interaction which will be used in Section 5 in a nuclear matter calculation.

5. SHORT-RANGE PART OF THE NN INTERACTION FROM QUARK-PION EXCHANGE

The nucleon–nucleon interaction exhibits a strongly repulsive short-distance core which is attributed to the exchange of the ω -meson (and ρ -exchange). Since nucleons have a radii of about 0.8 fm and the range of the meson exchange force is $1/m_\omega \approx 0.2$ fm, it is natural to expect that the nucleon substructure will play a role at such short distances. The replacement of vector-meson exchange as the main source of the short-range part of the NN interaction is one of our main motivations in this section. Motivated by the Manohar and Georgi model for the low-energy structure of the nucleon, we consider the lowest-order three-level one-pion exchange between constituent quarks, as given in Eq. (2). We then apply the Fock–Tani transformation to this interaction and obtain an effective NN potential, and compare this potential to the short-range part of the Bonn potential.

For later convenience, we start rewriting Eq. (2) as

$$\begin{aligned}
V_{\pi q} = & - \left(\frac{1}{f_\pi} \right)^2 t^{a(1)} t^{a(2)} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} = \\
= & - \left(\frac{1}{f_\pi} \right)^2 t^{a(1)} t^{a(2)} \frac{1}{3} \left[\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} + \frac{S_{12}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \right] = \\
= & - \left(\frac{1}{f_\pi} \right)^2 t^{a(1)} t^{a(2)} \frac{1}{3} \left[\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \frac{m_\pi^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} + \frac{S_{12}}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \right]. \quad (80)
\end{aligned}$$

This shows clearly the usual pieces of the OPE interaction, a short-range spin-spin interaction (a delta function in coordinate space) and long-range spin-spin and tensor interactions.

The Fock-space amplitude Ψ for the nucleon can be written as

$$\Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \frac{\epsilon^{c_1 c_2 c_3}}{\sqrt{3!}} \frac{\chi_\lambda^{m_1 m_2 m_3}}{\sqrt{18}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (81)$$

where \mathbf{p} is the c.m. momentum of the nucleon, the Φ is the momentum-dependent amplitude, the $\epsilon^{c_1 c_2 c_3}$ is the color antisymmetric tensor and $\chi_\lambda^{m_1 m_2 m_3}$ is the Clebsch–Gordan coefficient of spin-isospin, where $m_1 = \{s_1, f_1\} \dots$ denote the spin-flavor of a quark.

Using this in the expression for the effective NN interaction given in Eq. (79), one obtains

$$V_{NN} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{Q} d\mathbf{Q}' dp dp'}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}) \langle \lambda_1 \lambda_2 | V_{NN}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}', \mathbf{p}) | \lambda_3 \lambda_4 \rangle \times \\ \times b_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}' + \mathbf{Q}'/2) b_{\lambda_2}^\dagger(-\mathbf{p}' + \mathbf{Q}'/2) b_{\lambda_4}(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) b_{\lambda_3}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2), \quad (82)$$

with

$$V_{NN}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_{n=1}^5 \mathcal{O}_n^{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) u_n^{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (83)$$

where the \mathcal{O}_n contain the spin-isospin dependence; and u_n , the momentum dependence of the potential. The spin-isospin factors can be written as the product

$$\mathcal{O}_n = z_n C_n \Lambda_n, \quad (84)$$

where z_n is the overall numerical factor (including the sign) in front of each of the V_n in Eqs. (79), C_n is the result of the summation over the color indices, and Λ_n is the result of the summation over the spin-flavor indices of the quarks.

Inspection of Eq. (79) reveals that

$$z_1 = +9, \quad z_2 = -36, \quad z_3 = -9, \quad z_4 = z_5 = -18. \quad (85)$$

The color coefficients are given by $C_1 = 1$ and $C_i = 1/3$ for $i = 2, 3, 4, 5$. The spin-flavor coefficients are most easily evaluated making use of the «substitution rules» of Holinde [34] and Liu, Swift, Thomas and Holinde [35]. These are rules to transcribe spin-flavor operators at the quark level to the nucleon level. The spin-flavor dependence of the quark-pion interaction is of the form $\boldsymbol{\tau}_q^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_q^{(2)} \sigma_q^{(1)i} \sigma_q^{(2)j}$ and the substitution rules lead to

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{ij} &= \frac{25}{81} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \sigma_N^{(1)i} \sigma_N^{(2)j}, \\ \Lambda_2^{ij} &= \frac{1}{36} \left\{ \delta^{ij} \left[\frac{25}{3} + \frac{1}{9} \left(1 + 18 \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{7}{3} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \right) \sigma_N^{(1)i} \sigma_N^{(1)j} \right\}, \\ \Lambda_3^{ij} &= \frac{1}{36} \left\{ \delta^{ij} \left[27 - 3 \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} - \left(1 - \frac{25}{9} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(6 - \frac{50}{9} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \right) \sigma_N^{(1)i} \sigma_N^{(2)j} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_4^{ij} &= \frac{1}{36} \left\{ \delta^{ij} \left[15 + \frac{1}{3} \left(1 + 10 \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{5}{9} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \right) \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)i} \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)j} \right\}, \\
\Lambda_5^{ij} &= \Lambda_4^{ij}.
\end{aligned} \tag{86}$$

The momentum-dependent functions u^{ij} cannot in general be evaluated in closed form because of the multidimensional integrals over the quark momenta. However, for a Fock-space amplitude $\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ of gaussian form

$$\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \left(\frac{3b^4}{\pi^2} \right)^{3/4} \exp \left(-\frac{b^2}{6} \sum_{i < j}^3 (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)^2 \right), \tag{87}$$

where b is the r.m.s. radius of the nucleon, almost all the integrals over the quark coordinates can be performed analytically.

The most important contribution to the NN potential at short distances comes, as expected, from the delta-function piece of the quark-pion interaction. This component of the NN potential can be calculated in a closed form. The result is

$$\begin{aligned}
V_{NN} = & -\frac{1}{3} \frac{1}{4f_\pi^2} \left[\frac{25}{9} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} v_1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) - \right. \\
& -\frac{1}{3} \left(25 + \frac{1}{3} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} + \frac{61}{9} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) v_2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) - \\
& -\frac{1}{4} \left(27 - \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} + \frac{25}{27} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) v_3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) - \\
& -\frac{1}{6} \left(45 + \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} + \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} + \frac{85}{9} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) v_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}) - \\
& \left. -\frac{1}{6} \left(45 + \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} + \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} + \frac{85}{9} \boldsymbol{\tau}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_N^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_N^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_N^{(2)} \right) v_5(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \right], \tag{88}
\end{aligned}$$

where

$$v_1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = e^{-b^2/3} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2, \tag{89}$$

$$v_2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} e^{-b^2/6} (\mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}^2), \tag{90}$$

$$v_3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = e^{-b^2/3} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2, \quad (91)$$

$$v_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} e^{-2b^2/11} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - b^2/33 (\mathbf{p}'^2 + 7\mathbf{p}^2), \quad (92)$$

$$v_5(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} e^{-2b^2/11} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - b^2/33 (\mathbf{p}^2 + 7\mathbf{p}'^2). \quad (93)$$

In order to obtain insight on the range and strength of the potential, we make a local approximation as suggested by Barnes, Capstick, Kovarik and Swanson (the last reference in Ref. 3), and perform a Fourier transform to coordinate space. The spin-flavor part of the potential is of course unaffected by this, and the radial part becomes

$$v_1(r) = v_3(r) = \left(\frac{3\pi}{b^2} \right)^{3/2} e^{-3/4(r^2/b^2)}, \quad (94)$$

$$v_2(r) = \left(\frac{9\pi}{b^2} \right)^{3/2} e^{-3(r^2/b^2)}, \quad (95)$$

$$v_4(r) = v_5(r) = \left(\frac{9\pi}{2b^2} \right)^{3/2} e^{-33/32(r^2/b^2)}. \quad (96)$$

This potential is obviously of short range, because we are considering only the δ -function part of the pion-quark interaction. Also, the quark-exchange contributions are typically of the order of the nucleon size. In Fig. 7 the quark-pion exchange potential of Eq. (96), for $b = 0.6$ fm, is compared with the one-boson-exchange Bonn potential for ω and ρ exchanges. These are the main sources of repulsion in the NN interaction. Because of the Yukawa form of the meson-exchange potentials, we have multiplied the potentials by r^2 . In this way, we obtain a better understanding of the relevant contributions to observables. The corresponding expressions of the Bonn potential are given by Eqs. (A-19) and (A-28) of Ref. 36. The parameters are given in Table A.3 of the same reference.

It is seen that the two potentials have roughly the same ranges, but have very different strengths (volume). Note however that in order to have a better

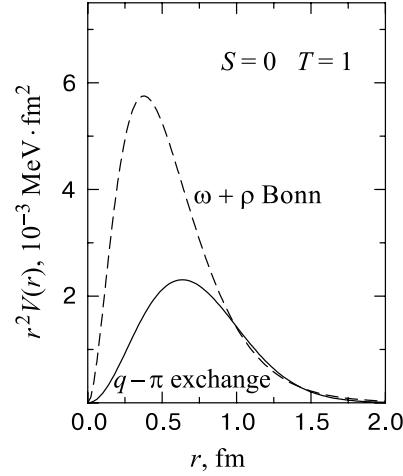


Fig. 7. The quark- π (solid) and $\omega + \rho$ (dashed) Bonn potentials

assessment of the ranges of the potentials (for distances larger than 1 fm), for consistency a gaussian form factor for the vector-mesons should be used, instead of the dipole form factor of Ref 36.

In the next section, when we consider the nuclear matter problem, we will show that although the quark-pion exchange interaction provides a large fraction of the required repulsion to stabilize nuclear matter against collapse, extra repulsion is needed to saturate nuclear matter at the right density.

6. FOCK-TANI REPRESENTATION FOR NUCLEAR MATTER

In the limit that the quark cores of the nucleons do not overlap, effects from the Pauli principle at the quark level can be neglected, and the anticommutation relations of creation and annihilation operators of composite nucleons are simply the ones of elementary particles, as discussed previously. For field operators that satisfy canonical (anti)commutation relations, the coupled-cluster expansion (or e^S -formalism) is a very powerful formalism for treating many-body problems. This is a formalism that treats short-range correlations induced by strong short-range repulsion, as is the case of the NN interaction, and allows for systematic improvement as the density of the system increases [37, 38]. This formalism seems to be particularly appropriate also for the case of composite nucleons when used in connection with the Fock-Tani representation.

The idea is to implement the e^S -formalism in the ideal space. In the Fock-Tani space \mathcal{F}_{FT} , the Hamiltonian can be split as

$$H_{FT} = H_q + H_b + H_m + H_{bm} + H_{qb} + H_{qm}, \quad (97)$$

where each component has obvious meaning. When the Hamiltonian is truncated to involve only ideal nucleons, in analogy with the point nucleon case, the wave function of nuclear matter can be written as

$$|\Psi\rangle = e^S |\Phi\rangle, \quad (98)$$

where $|\Phi\rangle$ is a Fermi-gas state of *ideal* nucleon states

$$|\Phi\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} b_{\alpha_1}^\dagger b_{\alpha_2}^\dagger \cdots b_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle, \quad (99)$$

and S is the operator that creates *ideal nucleon* particle-hole states on the top of the ideal Fermi-gas state

$$S = \sum_{n>1} s_n, \quad (100)$$

with

$$s_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\alpha > k_F} \sum_{\beta < k_F} s_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n; \beta_1 \cdots \beta_n) b_{\alpha_1}^\dagger \cdots b_{\alpha_n}^\dagger b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_n}. \quad (101)$$

The form of the functions $s_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n; \beta_1 \cdots \beta_n)$ are in general chosen such as to minimize the energy density of nuclear matter [37, 38]. Explicit *ideal* meson degrees can be incorporated with no extra conceptual difficulties, again using the analogy with point hadrons [39].

With increasing density, the terms H_{qb} and H_{qm} of the effective Hamiltonian in \mathcal{F}_{FT} cannot be neglected. These terms describe the possibility of hadrons breaking up into quarks that can propagate outside the confining region within hadrons. The incorporation of such effects within the e^S -formalism seems to be very natural. The functions s_n can be generalized such as to describe the deconfining effects.

One interesting term present in H_{qb} of Eq. (97) is [18]

$$V_{\text{binary-break}} = \frac{3}{4} \Psi_{\alpha}^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_{\beta}^{\sigma\nu_2\nu_3} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\nu_3}^{\dagger} b_{\alpha} b_{\beta}. \quad (102)$$

This describes a process in which two nucleons collide and break up into six quarks. At high densities, such processes are expected to play an important role in the description of the equation of state of nuclear matter. Within the e^S -formalism, such processes can be taken into account by a term in the exponent S of the form

$$S_{\text{binary-break}} = \sum_{\beta < k_F} \sum_{\mu_1 \cdots \mu_6} s(\mu_1 \cdots \mu_6; \beta_1 \beta_2) q_{\mu_6}^{\dagger} q_{\mu_5}^{\dagger} q_{\mu_4}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_1}^{\dagger} b_{\beta_2} b_{\beta_1}. \quad (103)$$

Other terms of the effective Hamiltonian, such as single-hadron breakup [18], can similarly be taken into account.

There are no numerical results of applications of this formalism. Of course, one technical problem is the large amount of algebraic manipulations necessary to obtain the relevant variational equations to be solved numerically. Another problem is the apparent necessity for a relativistic quark model, since it seems that a nonrelativistic model of the type used in the previous sections would not perform well in the high-density regime of nuclear matter.

To finalize, let us consider the Hartree–Fock approximation to the nuclear matter equation of state using the present formalism. This amounts to retaining only the part of the effective Hamiltonian that involves the ideal nucleon operators, and to neglecting the (interesting) correlations between nucleons, i.e., $S = 0$ in Eq. (98). We consider here a quark-meson-coupling model with constituent quarks [40], on the lines of the Guichon–Saito–Thomas model [41]. Ref. 40 considers a semi-relativistic quark model, where the massive constituent quarks are confined by a phenomenological nonrelativistic harmonic potential and interact via exchange of mesons. The meson exchanges are treated in a similar fashion to the traditional derivation of the one-gluon interaction [43], but the kinetic energy and the quark-meson interactions are taken to be relativistic.

The pion and a fictitious σ meson are coupled directly to the constituent quarks, as in the Guichon–Saito–Thomas model, but the ω meson is coupled to the nucleon core. The very short range part of the NN interaction is described by quark–pion exchange, while the ω meson is responsible for the outer part of the repulsion, since it is coupled to the nucleon with the form factor provided by the model. The rationale of such an idea is of course to replace the ω meson as the main source of the NN repulsion, as discussed above.

The «microscopic» quark–meson Hamiltonian is obtained from the Lagrangian density of the Walecka model [42]. In Ref. 40, the Fock–Tani representation was used to derive the effective NN interaction involving quark–pion exchanges of Fig. 6. For the effective NN interaction of Fig. 5, the Fock–Tani representation is of course not necessary. We present here only the contribution of the NN interaction of Eqs. (82)–(93) to the energy density of symmetrical nuclear matter [40]

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_q^{exch} = & \frac{1}{3f_\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \left[54 + 8 \left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} e^{-1/12 b^2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + \right. \\ & + 120 \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} e^{-2/33 b^2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - \frac{44}{3} e^{-1/3 b^2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - \\ & \left. - \frac{272}{3} \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} e^{-8/33 b^2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \right]. \end{aligned} \quad (104)$$

The contributions from nonquark-exchange graphs can be written down without difficulty and are given explicitly in Ref. 40.

The interesting result obtained in Ref. 40 is that the quark–pion exchange interaction does provide a large fraction of the required NN interaction to stabilize nuclear matter. Moreover, it turns out that the value of the $NN\omega$ coupling constant g_ω^2 , adjusted to obtain a binding energy per nucleon $E/A - M_N \simeq -15.75$ MeV at $k_F \simeq 1.36$ fm $^{-1}$ is very close to the quark-model SU(6) symmetry prediction $g_\omega^2/4\pi \approx 9g_\rho^2/4\pi = 9 \times 0.55$. Note that this value is a much smaller value than the ones used in one-boson-exchange models [36].

7. CONCLUSIONS AND FUTURE PERSPECTIVES

The traditional picture of the nucleus, which follows from a large body of experiments in the last 60 years, is that of a system of nucleons whose properties are not very different from free-space nucleons. This means that the explicit dynamics of the color degree of freedom must be limited to very short distances.

Therefore, any theoretical approach based on quark degrees of freedom that is intended to study low-energy properties of nuclei, should minimally deviate from, as well as contain in some limit, the traditional approach based on nucleon degrees of freedom. In this sense, the effective Hamiltonian of the Fock–Tani representation has a well-defined limit, since it explicitly describes the interactions among hadrons; quark–quark and quark–hadron interactions are treated separately as «residual» interactions that are expected to play an important role only at higher densities/temperatures.

For higher densities and/or temperatures, the Fock–Tani representation seems particularly useful when used in connection with the linked-cluster (or e^S) formalism. The Fock–Tani representation naturally leads to effective Hamiltonians that describe processes that are expected to be present in the system at the transition regime from a cold, low-density phase to a high density/temperature phase. The wave function of the system at this regime is naturally given by the linked-cluster formalism, where nucleon–nucleon correlations and other deconfining effects are built on the top of a Fermi-gas of confined, color-singlet clusters of quarks.

ACKNOWLEDGMENTS

The author gratefully acknowledges collaborative work with M. Betz, M. Bracco, D. Hadjimichef, M.D. Girardeau, C. Maekawa, M. Nielsen, S. Szpigiel, and J.S. da Veiga. This work was supported in different stages by the Alexander von Humboldt Foundation of Germany and the Brazilian agencies CNPq, CAPES, and FAPESP.

REFERENCES

1. **Liberman D.A.** — Phys. Rev. D, 1977, v.16, p.1542.
DeTar C.E. — Phys. Rev. D, 1977, v.17, p.302; 1977, v.17, p.323;
Prog. Theor. Phys., 1981, v.66, p.556; 1981, v.66, p.572;
Neudatchin V.G., Smirnov Y.F., Tamagaki R. — *Prog. Theor. Phys.*, 1977, v.58, p.1072;
Obukhovsky I.T., Neudatchin V.G., Smirnov Y.F., Tchuvil'sky Y.M. — *Phys. Lett. B*, 1979, v.88, p.231;
Harvey M. — *Nucl. Phys. A*, 1981, v.352, p.326.
2. **Ribeiro J.E.T.F.** — *Z. Phys. C*, 1980, v.5, p.27;
Warke C.S., Shanker R. — *Phys. Rev. C*, 1980, v.21, p.2643;
Oka M., Yazaki K. — *Prog. Theor. Phys.*, 1981, v.66, p.556; 1981, v.66, p.572;
Faessler A., Fernandes F., Lübeck G., Shimizu K. — *Phys. Lett.*, 1982, v.112B, p.201;
Faessler A., Fernandes F. — *Phys. Lett.*, 1983, v.124B, p.145;
Wilets L. — *Nontopological Solitons*, World Scientific, Singapore, 1989.
3. **Swanson E.S.** — *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1992, v.220, p.73;
Barnes T., Swanson E.S. — *Phys. Rev. D*, 1992, v.46, p.131;
Barnes T., Capstick S., Kovarik M.D., Swanson E.S. — *Phys. Rev. C*, 1993, v.48, p.539.

4. **Gunion J.F., Brodsky S.J., Blankenbecler R.** — Phys. Lett. B, 1972, v.39, p.649; Phys. Rev. D, 1972, v.6, p.2652; Phys. Rev. D, 1973, v.8, p.287.
5. **Blaschke D., Röpke G.** — Phys. Lett. B, 1993, v.299, p.332.
6. **Holstein T., Primakoff H.** — Phys. Rev., 1940, v.58, p.1098.
7. **Belyaev S.T., Zelevinskii V.G.** — Nucl. Phys., 1962, v.39, p.582.
8. **Marumori T., Yamamura M., Tokunaga A.** — Prog. Theor. Phys., 1964, v.31, p.1009;
Marumori T., Yamamura M., Tokunaga A., Takeda A. — Prog. Theor. Phys., 1964, v.32, p.726.
9. **Klein A., Marshalek E.R.** — Rev. Mod. Phys., 1991, v.63, p.375.
10. **Zhu Y. et al.** — Comm. Theor. Phys., 1987, v.7, p.149.
11. **Pittel S., Engel J., Dukelsky J., Ring P.** — Phys. Lett. B, 1990, v.247, p.185;
Dukelsky J., Pittel S. — Phys. Rev. C, 1992, v.45, p.1871;
Pittel S., Arias J.M., Dukelsky J., Frank A. — Phys. Rev. C, 1994, v.50, p.423;
Georgieva A.I. et al. — Phys. Rev. C, 1995, v.52, p.2131.
12. **Nadjakov E.G.** — J. Phys. G, 1990, v.16, p.1473.
13. **Meyer J.** — J. Math. Phys., 1991, v.32, p.2142.
14. **Catara F., Sambataro M.** — Nucl. Phys., 1991, v.A535, p.605; Phys. Rev. C, 1992, v.46, p.754;
Sambataro M. — Phys. Rev. C, 1995, v.52, p.3378.
15. **Reboiro M., Ring P.** — Paper 2.1.1 presented at the 1992 International Nuclear Physics Conference, Wiesbaden, Germany. Book of Abstracts.
16. **Hadjimichef D. et al.** — Phys. Lett. B, 1996, v.367, p.317.
17. **Girardeau M.D., Krein G., Hadjimichef D.** — Mod. Phys. Lett. A, 1996, v.11, p.1121.
18. **Hadjimichef D. et al.** — Annals of Physics (NY) in press.
19. **Girardeau M.D.** — Phys. Rev. Lett., 1971, v.27, p.1416.
20. **Vorob'ev V.S., Khomkin A.L.** — Teor. i Mat. Fiz., 1971, v.8, p.109 (in Russian). English translation: Consultants Bureau, Plenum Publ. Co, New York, 1972.
21. **Girardeau M.D.** — J. Math. Phys., 1975, v.16, p.1901.
22. **Girardeau M.D., Gilbert J.D.** — Physica, 1979, v.97A, p.42.
23. For a list of references see: **Lo C., Girardeau M.D.** — Phys. Rev. A, 1990, v.41, p.158.
24. **Tani S.** — Phys. Rev., 1960, v.117, p.252.
25. **Weinberg S.** — Physica, 1979, v.96A, p.341.
26. **Weinberg S.** — Phys. Rev., 1963, v.130, p.776; 1963, v.131, p.440; 1964, v.133, p.B232.
27. **Manohar A., Georgi H.** — Nucl. Phys. B, 1984, v.234, p.189.
28. **Gocksch A.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.67, p.1701.
29. **Bijnens J., Bruno Ch., de Rafael E.** — Nucl. Phys. B, 1993, v.390, p.501;
Espriu D., de Rafael E., Taron J. — Nucl. Phys. B, 1990, v.345, p.22; v.355, p.278 (E).
30. **Kraeft W.-D. et al.** — *Quantum Statistics of Charged Particles*. Plenum, New York, 1986.
31. **Baller B.R.** — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.1118.
32. **Schiff L.I.** — *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
33. **Martins K., Blaschke D., Quack E.** — Phys. Rev. C, 1995, v.51, p.2723.
34. **Holinde K.** — Nucl. Phys. A, 1984, v.415, p.477.

35. **Liu G.Q. et al.** — Nucl. Phys. A, 1993, v.556, p.331.
36. **Machleidt R.** — Adv. Nucl. Phys., 1989, v.19, p.189.
37. **Coester F.** — In: *Lectures in Theoretical Physics*, Mahanthappa K.T., Brittin W.E., eds., Volume XI B. Gordon & Breach, New York, 1969.
38. **Kummel H., Luhrmann K.H., Zabolitsky J.G.** — Phys. Rep., 1978, v.36, p.1.
39. See Section 7.3 of: **Thomas A.W.** — Adv. Nucl. Phys., 1984, v.13, p.1.
40. **Bracco M.E., Krein G., Nielsen M.** — Submitted for publication.
41. **Guichon P.A.M.** — Phys. Lett., 1988, v.B200, p.235;
Saito K., Thomas A.W. — Phys. Lett. B, 1994, v.327, p.9.
42. **Serot B.D., Walecka J.D.** — Adv. Nucl. Phys., 1986, v.16, p.1.
43. **de Rujula A., Georgi H., Glashow S.** — Phys. Rev. D, 1975, v.12, p.147.

УДК 539.17:621.384.63

ФОТОЭЛЕКТРОННЫЙ МЕТОД
НЕВОЗМУЩАЮЩЕЙ ДИАГНОСТИКИ ПУЧКА
ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

A.C.Артёмов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре подробно рассмотрен предложенный автором метод невозмущающей фотоэлектронной диагностики пучка (ФЭДП) отрицательных ионов. В данном методе необходимая информация о пучке выводится посредством электронов, рождающихся в результате околопороговой однофотонной обдирки пренебрежимо малой части ионов на зондирующей пучок фотонной мишени, которая формируется с помощью лазерного излучения. Для различных отрицательных ионов детально рассмотрены предельные возможности такой диагностики и проведен анализ влияния пространственного заряда пучка на ФЭДП. При этом основное внимание уделено широко используемым в ускорительной технике релятивистским ионам водорода H^- . Детально описано разработанное многофункциональное устройство для реализации ФЭДП на линейном участке канала транспортировки. Данное устройство может быть с успехом использовано для невозмущающей диагностики пучка релятивистских ионов H^- с током до нескольких сотен миллиампер, например, в проектируемых в различных научных центрах источниках нейтронов на основе линейных ускорителей.

The method of nonperturbative photoelectron beam diagnostics (PEBD) of negative ions, proposed by the author, is described in detail in this review. In this method, necessary information on the beam is extracted by means of electrons, which are produced as a result of near-threshold single-photon detachment of a negligible part of ions on the photon target, probing the beam, and formed using laser radiation. The limited possibilities of this diagnostics are considered in detail for various negative ions, and the influence of the beam space-charge on PEBD is analysed. Herewith, main attention is given to H^- relativistic hydrogen ions widely used in accelerator techniques. The developed multifunctional device for the realization of PEBD in a linear area of the beam transport line is described in detail. This device can be used successfully for the nonperturbative beam diagnostics of H^- relativistic ions with a current up to some hundreds of milliamperes, for example, in neutron sources based on linear accelerators and projected at various scientific centres.

ВВЕДЕНИЕ

В современных ускорительно-накопительных комплексах широко используется перезарядный метод управления потоками частиц. Формируя внутренние перезарядные мишени на различных участках канала транспортировки пучка, можно существенно влиять на распределение частиц в фазовом пространстве и на характер их движения во внешних электромагнитных полях, а также осуществлять удобную для физических экспериментов разводку пучков

высоких энергий [1]. Наибольшая эффективность метода достигается при использовании отрицательных ионов на начальном этапе транспортировки пучка и невозмущающей диагностики его параметров. В зависимости от решаемой задачи выбирается внутренняя мишень с такими характеристиками, чтобы пучок после нее содержал необходимое количество представляющих интерес вторичных частиц.

Среди отрицательных ионов наибольшее распространение получили пучки ионов H^- (LAMPF, TRIUMF, HERA, BNL, LHC, RAL, FNAL, CERN, ANL, KEK и другие ускорительные центры). Они также широко используются при формировании потоков нейтральных атомов водорода для пучкового нагрева плазмы и ее диагностики [2–5], в циклических ускорителях для наработки изотопов [6], в проектах сильноточных ускорителей для трансмутации радиоактивных отходов и при разработке высокointенсивных импульсных источников нейтронов [7–10], для имплантации ионов [11], а также при решении ряда других прикладных задач [12–17]. В качестве перезарядных, а также зондирующих пучок диагностических мишеней при этом используются как корпускулярные, так и фотонные внутренние мишени.

Под невозмущающими методами диагностики обычно подразумеваются такие способы получения информации, когда вносимыми при измерении возмущениями пучка можно пренебречь. Наиболее полное представление о пучке ионов дают измерения тока пучка во времени, его пространственного распределения по сечению канала транспортировки, а также информация об эмиттансных характеристиках, которые связаны с угловым распределением и энергетическим спектром ионов в пучке. Невозмущающий характер измерений большинства этих параметров трудно реализовать при использовании традиционных для заряженных частиц методов диагностики [18]. Дополнительное усложнение вызывает важное для пучков высоких энергий требование компактности диагностических устройств. В связи с этим актуальной задачей является разработка методов и устройств для измерения различных характеристик пучка ионов по вторичным частицам, рожденным при взаимодействии ионов с компонентами остаточного газа или практически прозрачной для пучка внутренней мишенью. Основной задачей связанных с этим исследований является выявление возможности определения необходимых параметров пучка по соответствующим характеристикам выбранного типа вторичных частиц, а также изучение границ использования основанных на этом методов диагностики и достигаемых при этом точностей.

В зависимости от типа иона и зондирующей пучок внутренней мишени в качестве носителей информации о характеристиках пучка могут служить различные вторичные частицы. Например, для невозмущающей диагностики пучка ионов H^- используются быстрые атомы H^0 [19–23]. Они рождаются при обтирке незначительной части ионов на оптимальным образом сформированных корпускулярных или фотонных мишенях. Эти методы наибо-

лее удобны на участках транспортировки пучка с поворотным магнитом, где легко осуществляется вывод атомов H^0 из пучка ионов. Недостатками предложенных методов диагностики высокоэнергетических (сотни МэВ) пучков ионов H^- являются большие пролетные базы атомов H^0 в случае времязадержек измерений энергетического спектра [19, 23], либо значительные весогабаритные характеристики магнитных анализаторов при использовании обдирик атомов в протоны [21, 22]. Помимо этого данные методы не пригодны в линейных системах.

Наиболее компактные диагностические устройства могут быть разработаны при использовании вторичных электронов. В частности, для измерения профиля пучка и его фазовой структуры широко используются электроны эмиссии практически прозрачной для пучка корпускулярной мишени [24–27]. При использовании нескольких разнесенных на пролетной базе подобных устройств можно определять поперечный [28] и продольный [29] эмиттансы пучка. Возможность прямого перенесения этих методов и устройств, разработанных в основном для протонов или ядер, на более сложные ионы требует дополнительных исследований. Нетривиальность этого шага связана в основном с их атомной структурой и, как следствие, более сложным характером взаимодействия ионов с частицами мишени. В наибольшей степени это относится к отрицательным ионам, слабоионизированным и нейтральным частицам. Для использования данных методов необходимо, чтобы электроны, появляющиеся в результате взаимодействия ядра частицы пучка с мишенью, рождались независимо от других каналов и их можно было выделить на фоне электронов обдирик, а также электронов ионизации мишени, возникающих при ее взаимодействии с электронными компонентами налетающей частицы. В то же время экспериментальные и теоретические исследования, например, с ионами H^- [30–42], показывают, что при фиксированном угле вылета электронов в их энергетическом спектре отсутствует пик, характерный для взаимодействия протонов с практически свободными электронами мишени. Следовательно, для ионов H^- неприменим предложенный в работах [43, 44] метод измерения энергетического и углового распределений по δ -электронам. Кроме того, широкий диапазон энергий электронов, вылетевших под большими углами ($\theta \sim 90^\circ$) по отношению к импульсу ионов H^- , затрудняет их использование в устройствах для измерения фазовой структуры пучка и его профиля, предложенных в работах [24–27]. Этот факт подтверждается в экспериментальной работе [45]. Необходимая точность измерений в этом случае может быть достигнута только введением в устройство дополнительного магнитного сепаратора, выделяющего электроны с энергией, необходимой для анализа. В то же время благодаря электронной структуре отрицательных ионов могут быть предложены свои, отличные от протонов или ядер методы диагностики параметров пучка по вторичным электронам. В частности, в работе [36] для диагностики пучка ионов H^- предложено использовать электроны,

рождающиеся при обтирке ионов на корпускулярных мишенях. Идея метода основана на том, что при использовании тонких мишеней эти электроны составляют основную часть общего потока, а их скорости близки по величине и направлению к скорости ионов. Отсутствие предложений по технической реализации этого метода диагностики обусловлено в основном недостаточно высокой достигаемой точностью (см. разд. 4).

Значительно более широкие возможности диагностики пучка частиц с электронной структурой открываются при его зондировании фотонной мишенью. Высокая монохроматичность и направленность лазерного излучения, относительная простота управления им в пространстве позволяют эффективно использовать додлер-эффект для избирательного воздействия на определенные квантовые состояния иона высокой энергии и рождения при этом электронов (электронов фотообтирки), позволяющих осуществлять диагностику пучка с требуемой точностью. Примером этого является предложенный автором в 1984 г. и рассмотренный в данной работе фотоэлектронный метод невозмущающей диагностики пучка отрицательных ионов.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ФОТОЭЛЕКТРОННОЙ ДИАГНОСТИКИ ПУЧКА (ФЭДП) ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Для получения информации о параметрах пучка отрицательных ионов на прямолинейных участках канала транспортировки предложен метод диагностики, основанный на использовании электронов однофотонной обтирки, рождающихся при зондировании с помощью фотонной мишени слабосвязанного квантового состояния иона вблизи порога ε_t [46–48]. При поглощении фотона с энергией $\hbar\omega$, превышающей порог, происходит «стрихивание» электрона из данного состояния в непрерывный спектр с величиной и направлением скорости, близкими к ионной. Без учета послестолкновительного взаимодействия с атомным остовом иона приобретаемые электроном максимальные возмущения могут быть определены на основе анализа кинематики спонтанного («самопроизвольного») разрушения частицы с известной положительной энергией распада ε_p на две составляющие части, изотропно вылетающие в ее системе покоя и движущиеся независимо друг от друга (см., например, [49]). Пренебрежимо малый импульс фотона в системе покоя иона позволяет рассматривать фотообтирку как процесс поглощения фотона с рождением практически покоящейся квазичастицы и ее последующий развал с $\varepsilon_p = \hbar\omega - \varepsilon_t$. С учетом релятивизма при переходе в лабораторную систему отсчета получаем следующие выражения для максимального разброса электронов по энергии E_e (в отн. ед.) и углу θ_e (в рад) в элементарных актах

своего рождения:

$$\Delta E_e/E_e = \frac{2\beta\gamma}{(\gamma - 1)} \sqrt{\frac{2(\hbar\omega - \varepsilon_t)}{m_e C^2}}; \quad \Delta\theta_{e[\text{рад}]} = \frac{2}{\gamma\beta} \sqrt{\frac{2(\hbar\omega - \varepsilon_t)}{m_e C^2}}; \quad (1.1)$$

где $E_e = E_i \cdot m_e/M_i$, m_e и M_i — массы покоя электрона и иона соответственно, E_i — кинетическая энергия иона в лабораторной системе отсчета, C — скорость света, β и γ — релятивистские параметры пучка, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\omega = \omega_o\gamma(1-\beta \cos\eta)$, ω_o — частота фотона в лабораторной системе отсчета, η — угол между импульсами иона и фотона. Минимальная величина $\hbar\omega - \varepsilon_t$, которую можно реализовать для пучка ионов, определяется в основном разбросом по величине ($\Delta\beta$) и направлению ($\Delta\theta_i$) их скорости и выбирается такой, чтобы сечение околоспороговой фотообтирки $\sigma(\omega) \propto (\hbar\omega - \varepsilon_t)^q$ ($q = 3/2$ и $1/2$ для электронов в s - и p -квантовых состояниях соответственно) [50] было одинаковым для всех ионов:

$$(\hbar\omega - \varepsilon_t)_{\min} \gg q\gamma\hbar\omega_o \left\{ |\Delta\beta[\beta(1 - \beta \cos\eta)\gamma^2 - \cos\eta]| + \beta \sin\eta |\Delta\theta_i| \right\}. \quad (1.2)$$

С учетом результатов работы [51] вылет электрона в системе покоя квазичастицы в общем случае не изотропен и зависит от поляризации поглощенного фотона, его энергии и исходного квантового состояния электрона. В связи с этим на мишени, зондирующую пучок, реальные точности соответствия распределений отрицательных ионов и электронов фотообтирки по относительной энергии и углу определяются выражениями (1.1), умноженными на коэффициенты $W_e \leq 1$ и $W_\theta \leq 1$ соответственно, с учетом (1.2). При этом величины W_e и W_θ зависят от распределений электронов по энергии и поперечному импульсу в элементарных актах своего рождения (собственных распределений) в пределах кинематически определяемых границ.

2. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ МИШЕНИ ПРИ ОДНОФОТОННОМ РОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ПАРАМЕТРАМИ УГЛОВОЙ АСИММЕТРИИ $\beta_o = 2, 0, -1$

Угловая компонента дифференциального сечения реакции фотоионизации с поглощением одного фотона в релятивистской квантовой электродинамике имеет вид [52]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \sum_{L', L'', \Lambda} (-1)^{j+1/2+\Lambda+q} \frac{[j', j'', \Lambda]}{4\pi} \begin{pmatrix} L' & L'' & \Lambda \\ -q & q & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} j' & j'' & \Lambda \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & L' & j \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j'' & L'' & j \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} L' & L'' & \Lambda \\ j'' & j' & j \end{matrix} \right\} P_\Lambda(\cos \theta) \sum_{\beta' \beta''} \| \langle \rho k' j' \beta' | a_{l'' L''}(r) | n k j - \beta'' \rangle \times \langle \rho k'' j'' \beta'' | a_{l'' L''}(r) | n k j - \beta'' \rangle^* \|; \quad (2.1)$$

где $[l_1, l_2, l_3, \dots] \equiv [(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)\dots]$; $\Lambda = L, L\pm 1$; $\left(\begin{matrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right)$, $\left\{ \begin{matrix} A & B & C \\ a & b & c \end{matrix} \right\}$ — $3j$ - и $6j$ -символы соответственно (см., например, [53]); $\langle pkm | a_{lL'} | p'k'm' \rangle$ — матричный элемент перехода в электромагнитном поле; P_Λ — полином Лежандра. Для неполяризованной ионизуемой частицы в электрическом дипольном приближении (длина волны фотона много больше характерных размеров частицы) отсутствует зависимость от угла φ , и для излучения различной степени поляризации выражение (2.1) может быть сведено к более простому виду (см., например, [51,54,55]). В частности, для линейно поляризованных фотонов дифференциальное сечение представляется в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{|l}} = \frac{\sigma_{nl}(\omega)}{4\pi} [1 + \beta_0 \cdot P_2(\cos \theta_{ke})]; \quad (2.2)$$

где $P_2(x) = 0,5(3x^2 - 1)$; $\sigma_{nl}(\omega)$ — полное сечение фотоионизации nl -подоболочки фотоном с энергией $\hbar\omega$; β_0 — параметр угловой асимметрии, зависящий от начального и конечного квантовых состояний электрона и матричного элемента перехода при фотоионизации; θ_{ke} — угол между вектором поляризации фотонов и направлением импульса электронов в системе центра масс. Из очевидного условия $d\sigma/d\Omega > 0$ следует, что $-1 \leq \beta_0 \leq 2$. Неполяризованные электроны эквивалентны линейной комбинации двух некогерентных линейно поляризованных потоков излучения. Циркулярно поляризованное (или с круговой поляризацией) излучение, в свою очередь, может быть представлено как линейная комбинация двух когерентных линейно поляризованных потоков равной интенсивности со сдвигом на $\pi/2$ фазой. Для этих двух случаев дифференциальное сечение вылета электрона в системе центра масс может быть представлено в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{|n,k}} = \frac{\sigma_{nl}(\omega)}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{2}\beta_0 \cdot P_2(\cos \theta_k) \right], \quad (2.3)$$

где θ_k — угол между импульсами электрона и фотона. Частично линейно поляризованное излучение можно представить в виде двух некогерентных линейно поляризованных потоков фотонов с колеблющимися электрическими векторами относительно ортогональных X - и Y -осей (импульс фотона направлен по оси Z). Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{|plp}} = \frac{\sigma_{nl}(\omega)}{4\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\beta_0 \left[P_2(\cos \theta_z) - \frac{3}{2}Q(\cos^2 \theta_x - \cos^2 \theta_y) \right] \right\}, \quad (2.4)$$

где $Q = (I_x - I_y)/(I_x + I_y)$ — степень поляризации излучения; I_x и I_y — потоки линейно поляризованных фотонов с соответствующим направлением электрического вектора; θ_x , θ_y и θ_z — углы направления импульса электрона относительно координатных осей. В связи с тем, что эллиптически поляризованный свет отличается от частично линейно поляризованного излучения тем, что он проявляет когерентность между X - и Y -компонентами электрического вектора, для него справедливо аналогичное (2.4) выражение, с тем отличием, что I_x и I_y есть интенсивности потоков фотонов с поляризациями вдоль главных осей эллипса.

В релятивистской квантовой электродинамике параметр β_0 определяется выражением [52]:

$$\begin{aligned} \beta_0 = & \left\{ \frac{(2j-3)(2j-1)}{48j^2} R_{j-1}^2 - \frac{(2j-1)(2j+3)}{48j^2(j+1)^2} R_j^2 + \right. \\ & + \frac{(2j+3)(2j+5)}{48(j+1)^2} R_{j+1}^2 + \frac{(2j-1)}{8j^2(j+1)} |R_j R_{j-1}^*| + \\ & + \frac{(2j+3)}{8j(j+1)^2} |R_j R_{j+1}^*| + \frac{(2j-1)(2j+3)}{8j(j+1)} |R_{j-1} R_{j+1}^*| \Big\} \times \\ & \times \left\{ \frac{(2j-1)}{12j} R_{j-1}^2 + \frac{1}{12j(j+1)} R_j^2 + \frac{(2j+3)}{12(j+1)} R_{j+1}^2 \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $R_{j'} = \sum_{\beta} \{\beta(k-k') - 1\} < pk' j' \beta |nkj - \beta> \exp(i\eta_{j'})$ — радиальные матричные элементы релятивистских волновых функций электрона, η_j — фазовый сдвиг j -й парциальной волны непрерывного спектра. В нерелятивистском пределе оно сводится к известному выражению [51]:

$$\beta_{0|nr} = \frac{l(l-1)R_{l-1}^2 + (l+1)(l+2)R_{l+1}^2 - 6l(l+1)|R_{l-1} R_{l+1}^*|}{(2l+1)\{lR_{l-1}^2 + (l+1)R_{l+1}^2\}}, \quad (2.6)$$

где $R_{l\pm 1}$ — радиальная компонента дипольного матричного элемента $l \pm 1$ канала, l — орбитальное квантовое число инжектируемого электрона до фотоионизации. Авторы работы [52] показали, что величина β_0 будет отличаться от величины, предсказываемой с использованием нерелятивистских волновых функций ($\beta_{0|nr}$), только когда матричные элементы и относительные сдвиги фаз изменяются при релятивистских расчетах. В наибольшей степени этот эффект проявляется при фотоионизации s -квантовых состояний ($j = 1/2$ в выражении (2.5)) и приводит к сильному изменению β_0 в определенном диапазоне энергий фотонов (область «кооре»-минимума). Соответствующее выражение для параметра угловой асимметрии имеет вид

$$\beta_{0|s} = \frac{2R_{\hat{p}}^2 + 4|R_{\hat{p}} R_{\bar{p}}^*|}{R_{\hat{p}}^2 + 2R_{\bar{p}}^2} = \frac{2R_{\hat{p}}^2 + 4R_{\hat{p}} R_{\bar{p}} \cos(\eta_{\hat{p}} - \eta_{\bar{p}})}{R_{\hat{p}}^2 + 2R_{\bar{p}}^2}, \quad (2.7)$$

где использованы обозначения \bar{p} для $p_{1/2}^-$ и \hat{p} для $p_{3/2}^-$ -состояний электрона в непрерывном спектре. При равных радиальных матричных элементах и идентичных фазовых сдвигах для двух орбиталей непрерывного спектра получаем не зависящую от энергии фотона нерелятивистскую величину $\beta_{0|nr,s} = 2$. Данные условия могут быть выполнены, например, при однофотонной обдиরке s -квантовых состояний отрицательных ионов некоторых щелочных металлов (Li^- , Na^- , K^-), оставляющей атомный остов в основном состоянии [51,56]. При околопороговой фотообдиирке тех же ионов с переводом атомного остова в первое возбужденное состояние параметр угловой асимметрии $\beta_0 \approx 0$ [57], что соответствует изотропному вылету электрона в системе центра масс (см. (2.2) и (2.3)). Аналогичные распределения электронов предсказываются также при околопороговой фотообдиирке np -подоболочек ионов C^- , Si^- и Ge^- [58], метастабильного $\text{He}^-({}^4\text{P}^0)$ [59], иона O^- [60] и др. Наименьшее значение параметра $\beta_0 = -1$ характеризует, в частности, фотообдиирку в области форм-резонансов отрицательных ионов $\text{C}^-(2s)$, $\text{Si}^-(3s)$ и $\text{Ge}^-(4s)$ [58], а также фотообдиирку метастабильного $\text{He}^-({}^4\text{P}^0)$ при некоторой отстройке от порога, соответствующего переходу нейтрального остова в $\text{He}({}^3\text{S})$ -состояние [59].

Соответствующие значению $\beta_0 = 2$ собственные распределения электронов в пространстве поперечных импульсов (P_x , P_y , P_z) и кинетической энергии (E_e) в лабораторной системе отсчета, для различной ориентации плоскости поляризации и импульса фотонов, детально рассмотрены в работах [61,62] на примере ионов H^- ($\varepsilon_t = 0,754$ эВ). В основу численного моделирования распределений положено выражение (2.2) для дифференциального сечения вылета электрона в системе покоя иона и соответствующие релятивистские преобразования при переходе в лабораторную систему отсчета:

$$\begin{aligned} P_x &= P_0(\cos \theta_{ke} \sin \alpha - \sin \theta_{ke} \cos \varphi \cos \alpha); \\ P_y &= P_0[\sin \theta_{ke} \sin \varphi \sin \eta - (\sin \theta_{ke} \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta_{ke} \cos \alpha) \cos \eta]; \\ P_z &= m_e \gamma \beta C + \gamma P_0[(\sin \theta_{ke} \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta_{ke} \cos \alpha) \sin \eta - \sin \theta_{ke} \sin \varphi \cos \eta]; \\ E_e &= m_e(\gamma - 1)C^2 + \gamma \beta C P_0[(\sin \theta_{ke} \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta_{ke} \cos \alpha) \sin \eta - \sin \theta_{ke} \sin \varphi \cos \eta], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где P_z — компонента импульса электрона в направлении движения иона; P_x направлена перпендикулярно, а P_y лежит в плоскости взаимодействия фотона и иона; $P_0 = \sqrt{2\mu_{e0}(\hbar\omega - \varepsilon_t)}$, $\mu_{e0} \approx m_e$ — приведенная масса электрона и атомного остова, φ — азимутальный угол вылета электрона относительно вектора поляризации фотона ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$); α — угол между плоскостью поляризации фотона и плоскостью его взаимодействия с ионом. По углу φ , а также по углу α для неполяризованных фотонов полагались случайные

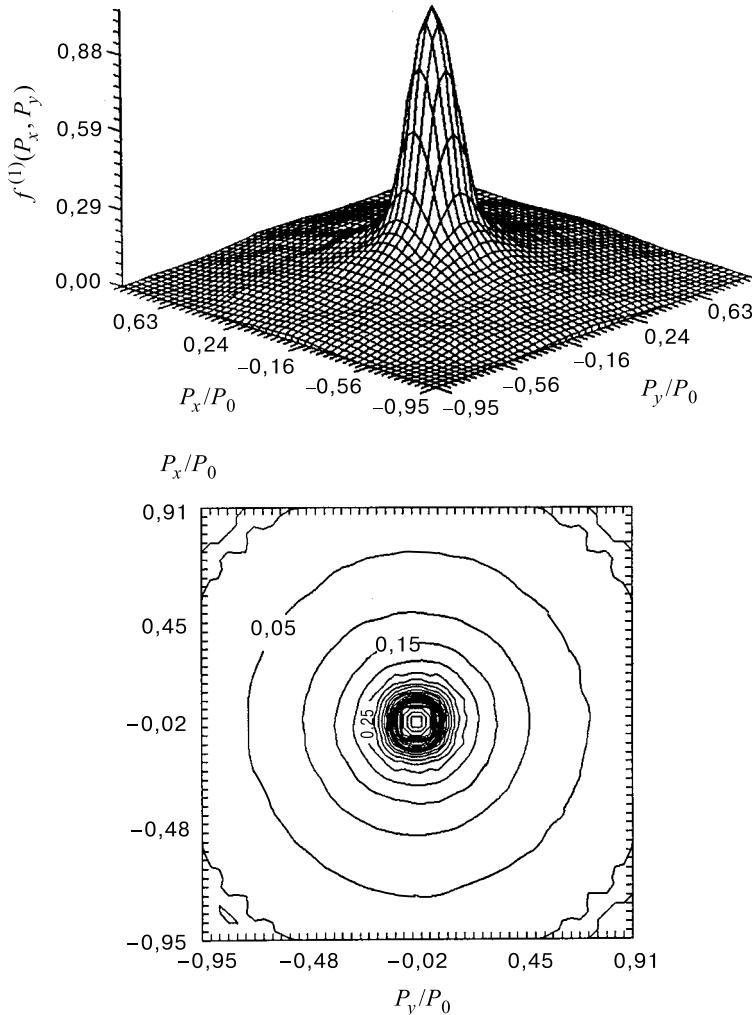
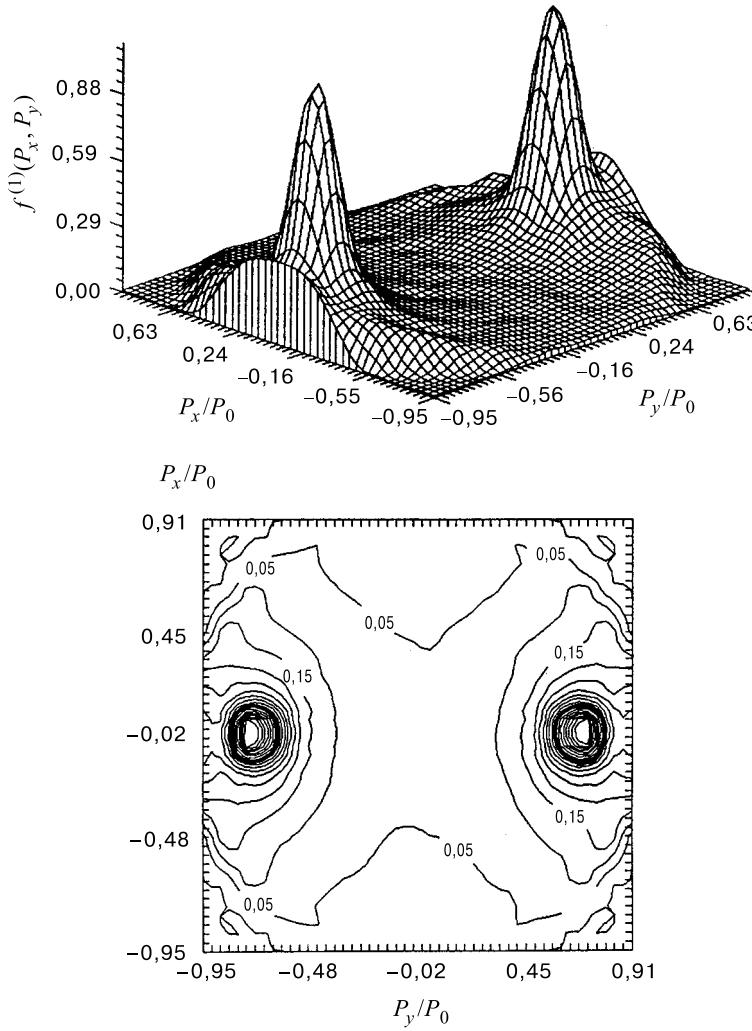
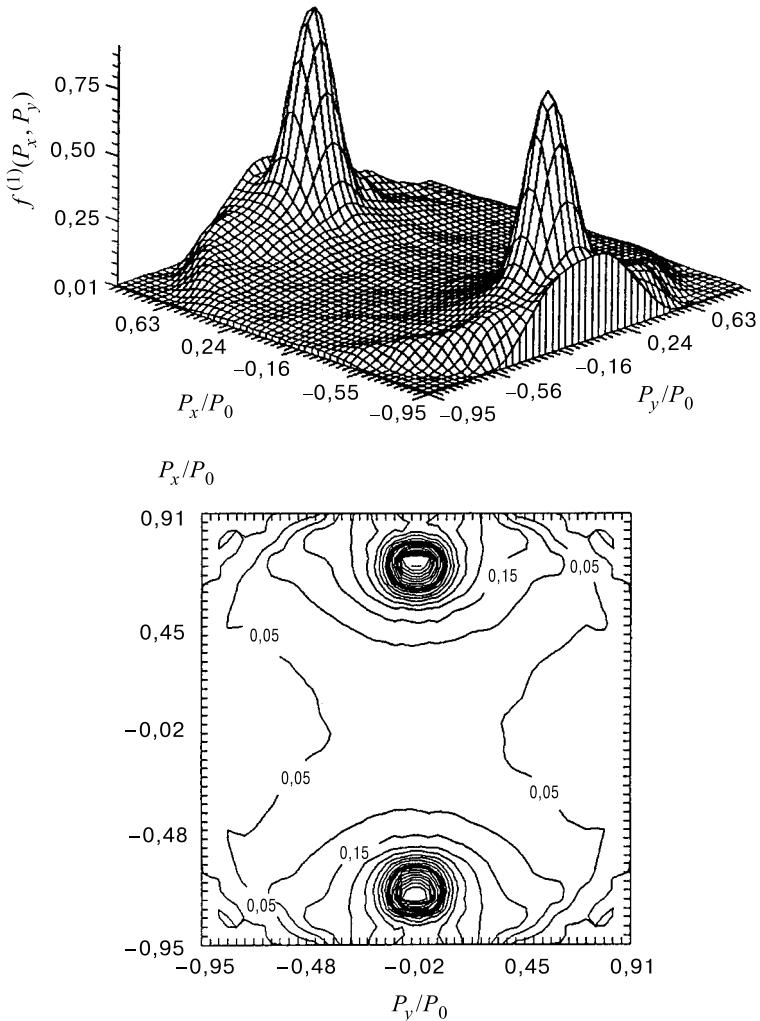


Рис. 1. Трехмерное представление нормированного собственного $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -распределения электронов и его топограмма при однофотонной обdirке ионов H^- с $\alpha = 0$, $\eta = \pi/2$. Жирной кривой на топограмме выделен уровень 0,5 от амплитуды распределения

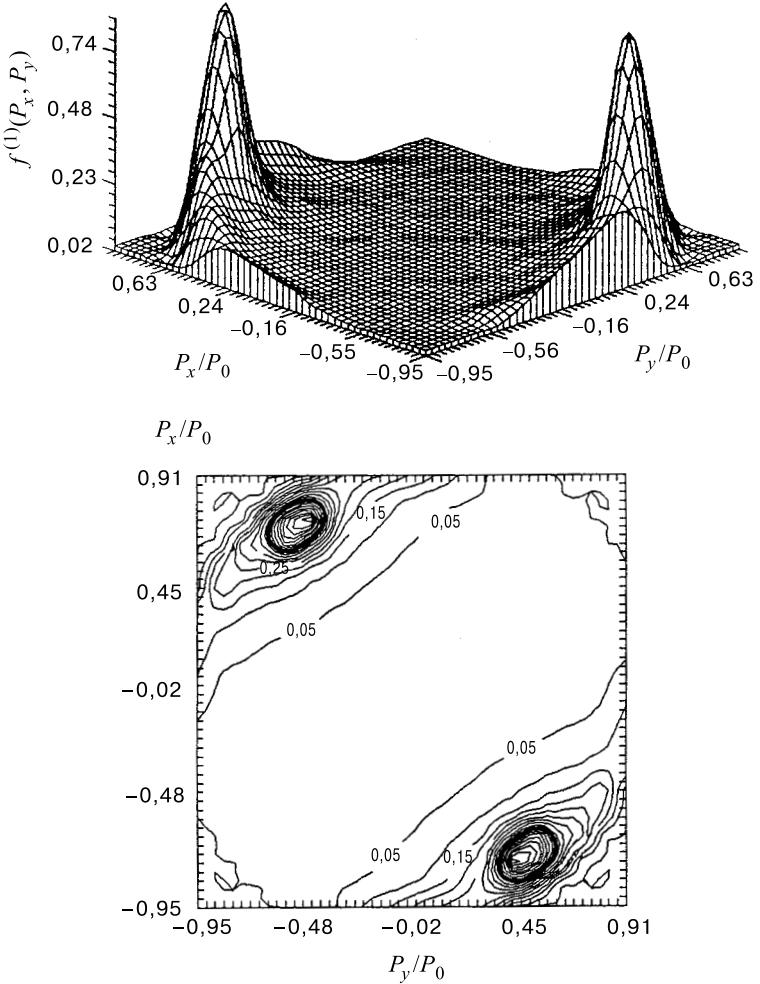
равномерные распределения в пределах $[0, 2\pi]$ и $[0, \pi]$ соответственно. Количество ячеек дискретных разбиений составляло 20×20 для пространства поперечных импульсов и 20 по энергии. При этом общее количество проанализированных электронов (обычно $\sim 5 \cdot 10^5$) выбиралось таким, чтобы

Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $\alpha = 0$, $\eta = \pi/4$

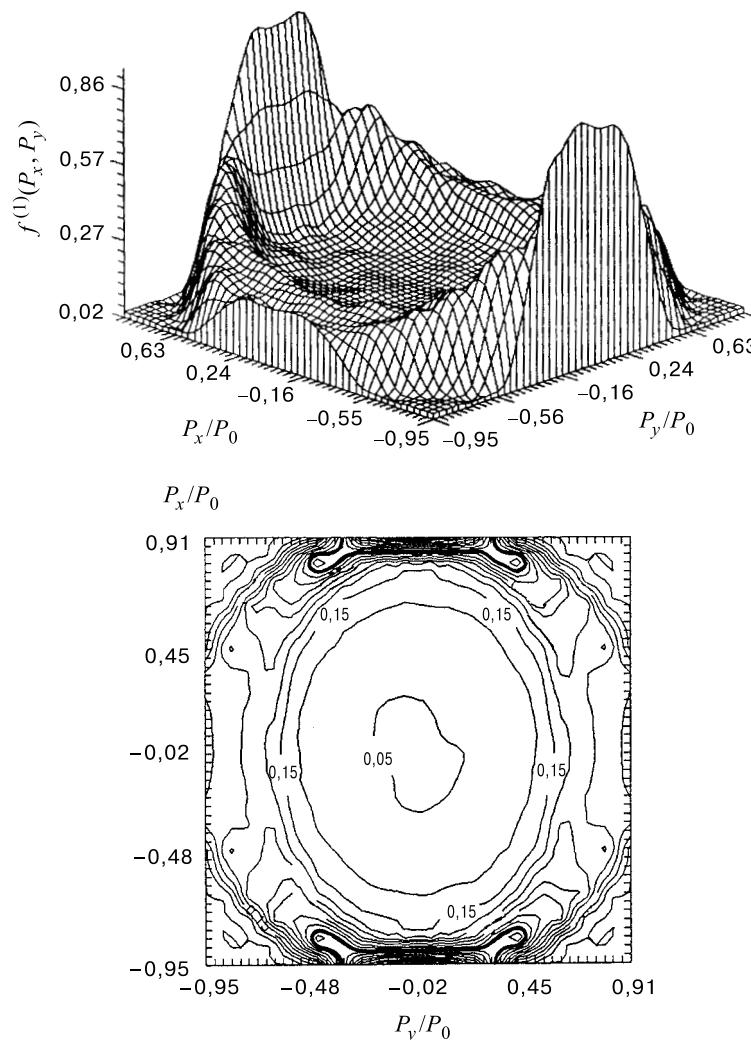
статистический разброс числа событий в каждой ячейке уровня 0,1 от максимума распределения не превышал 5–10 %. Некоторые из полученных таким образом в работах [61,62] трехмерных представлений нормированных по амплитуде собственных $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -распределений и их топограмм, а также $f(XS)$ -распределения, где $XS = [E_e - m_e(\gamma - 1)C^2]/(0,1\gamma\beta P_0 C)$, приве-

Рис. 3. То же, что на рис. 1, для $\alpha = \pi/4$ ($3\pi/4$), $\eta = \pi/2$

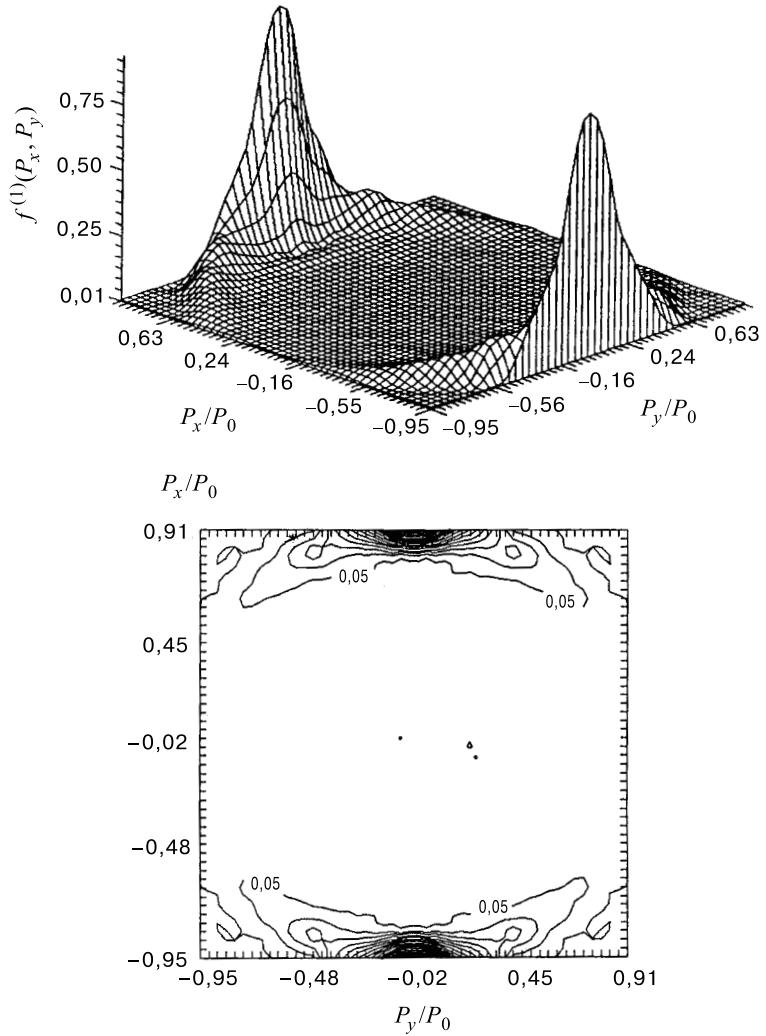
дены на рис. 1–7. Представленные результаты показывают, что собственные распределения электронов при однофотонной обтирке ионов H^- существенным образом зависят от поляризации фотонов и угла пересечения взаимодействующих пучков. Для $f(XS)$ -распределений характерна симметрия относительно среднего значения энергии электрона $\bar{E}_e = m_e(\gamma - 1)C^2$ с границами $m_e(\gamma - 1)C^2 \pm \gamma\beta P_0 C$ (см. рис. 7). При этом наиболее узкие распределения

Рис. 4. То же, что на рис. 1, для $\alpha = \pi/4$, $\eta = \pi/4$

по энергии получаются независимо от η для $\alpha = \pi/2$. Для $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -распределений, за исключением $\alpha = 0$ и $\eta = \pi/2$, характерно отсутствие аксиальной симметрии относительно направления импульса иона. Аксиально-симметричный случай (см. рис. 1) соответствует наиболее узкому угловому распределению электронов в лабораторной системе отсчета. В связи с тем, что при фотообтирке происходит двухчастичный развал иона H^- , $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -

Рис. 5. То же, что на рис. 1, для $\eta = \pi/4$, неполяризованное излучение

распределения продуктов развала (электрон, атом водорода) имеют одинаковый вид. Предсказанные поляризационные эффекты для $\eta = \pi/2$ и $\alpha = 0, \pi/2$ получили качественное подтверждение при регистрации угловых распределений атомов водорода в эксперименте по фотообтирке ленточного пучка ионов H^- [63].

Рис. 6. То же, что на рис. 1, для $\alpha = \pi/2$ и произвольного η

Моделирование фотоионизации с $\beta_0 = 0$ приводит к представленным на рис. 8, 9 $f^{(1)}(P_x, P_y)$ - и $f(XS)$ -распределениям. Полученные результаты хорошо согласуются с аналитическим рассмотрением кинематики спонтанного распада частицы на две составляющие части (см., например, [64]).

Численное изучение собственных распределений электронов, рождающихся в результате однофотонной обтирки ионов с параметром угловой асим-

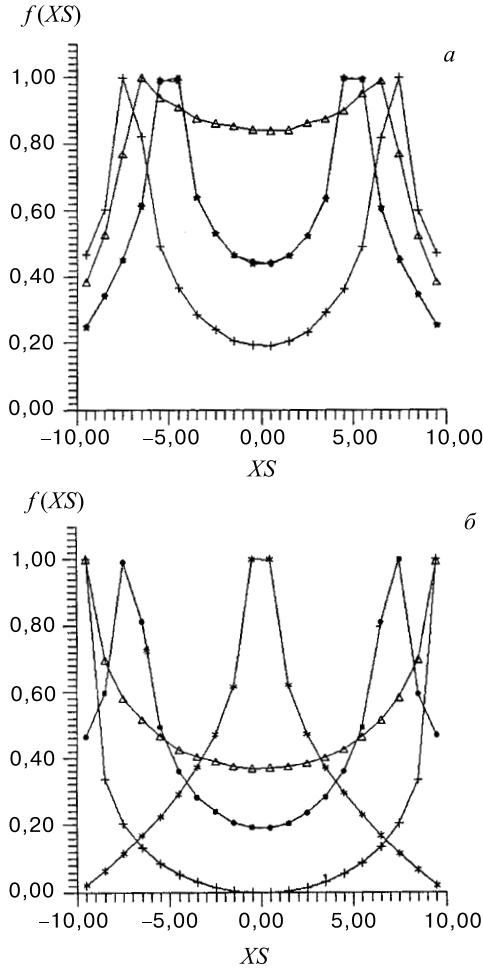


Рис. 7. Нормированное собственное распределение электронов по энергии при одинофотонной обтирке ионов H^- с $\eta = \pi/4, 3\pi/4$ (а) и $\eta = \pi/2$ (б) для различной поляризации излучения: $\alpha = \pi/4$ (\bullet), $\alpha = 0$ (+), неполяризованные фотоны (\triangle), $\alpha = \pi/2$, произвольное η (*), $\alpha = \pi/4$, $\eta = 3\pi/4$ (\star)

метрии $\beta_0 = -1$, проведено в работе [65]. Для линейно поляризованного излучения в этом случае $d\sigma/d\Omega_{||} \propto \sin^2 \theta_{ke}$. Некоторые из полученных результатов приведены на рис. 10–12. Они указывают на слабую зависимость $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -распределений от значений углов α и η , а подбором этих параметров не удается получить распределения с ярко выраженным максимумами

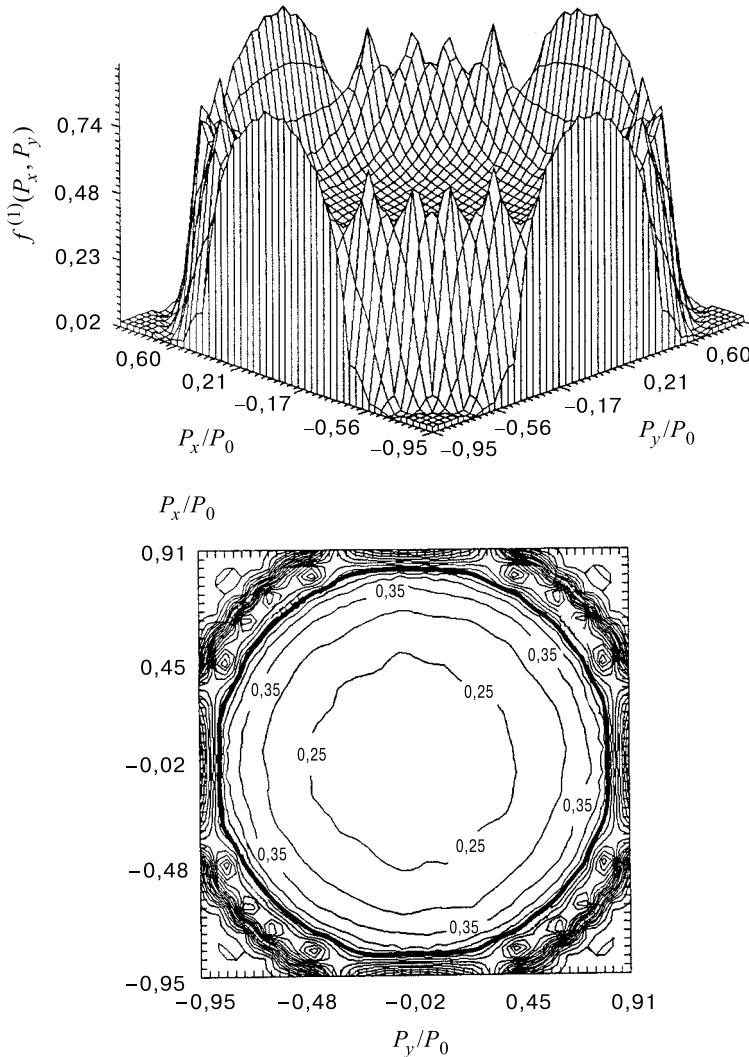


Рис. 8. Трехмерное представление нормированного собственного $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -распределения электронов и его топограмма при однофотонной обтирке ионов с $\beta_0 = 0$. Жирной кривой на топограмме выделен уровень 0,5 от амплитуды распределения

и малыми ширинами их проекций на P_x/P_0 - или P_y/P_0 -координаты. Аналогичный вывод может быть сделан и для $f(XS)$ -распределений.

В соответствии с (2.6) дифференциальное сечение вылета электрона при значениях $l \geq 1$ определяется $(l \pm 1)$ -волнами с фазами $\eta_{l \pm 1}$. Величина вклада переходов $l \rightarrow l \pm 1$ различна и во многих случаях $(l \rightarrow l + 1)$ -парциальное

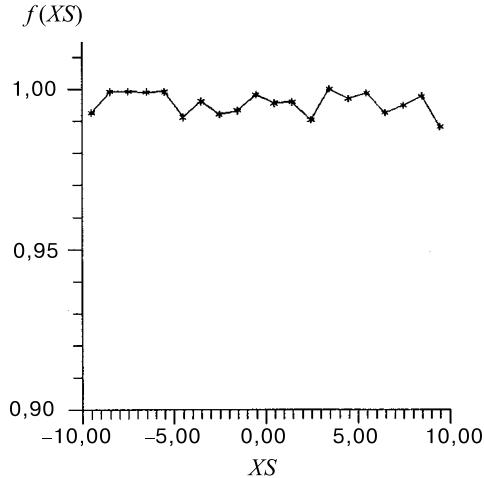


Рис. 9. Нормированное собственное распределение электронов по энергии при однофотонной обтирке ионов с $\beta_0 = 0$

сечение является основным. При этом (см., например, [54]) значение $\beta_{0|nr}$ близко к величине $(l+2)/(2l+1)$. Доминирование вклада $(l \rightarrow l-1)$ -перехода приводит к значению $\beta_{0|nr}(\omega) \approx (l-1)/(2l+1)$. В промежуточных ситуациях, как отмечается в работе [54], наличие перекрестного члена в (2.6) и возможность изменения разности фаз $\eta_{l+1} - \eta_{l-1}$ в широких пределах определяют интерференционную картину по ω в дифференциальном сечении $d\sigma/d\Omega$ при регистрации фотоэлектрона под определенным углом θ_{ke} (θ_k). В этом случае, как видно из приведенных на рис. 1–12 результатов, заметные осцилляции в функциональной зависимости $\beta_0(\omega)$ приведут к периодическому изменению нормированных собственных $f^{(1)}(P_x, P_y)$ - и $f(XS)$ -распределений электронов при изменении энергии фотонов.

Проведенный выше анализ и представленные результаты показывают, что в электрическом дипольном приближении степень влияния пространственной ориентации импульса и поляризации излучения мишени на однофотонную обтирку ионов в лабораторной системе отсчета существенным образом зависит от величины параметра угловой асимметрии β_0 . Причем, в зависимости от энергии фотонов в системе центра масс, к взаимодействию подключаются различные квантовые состояния частицы, и параметр β_0 может меняться в широких пределах. Таким образом, в рассматриваемом методе диагностики, основанном на оклопороговой однофотонной обтирке отрицательных ионов, предельная точность воспроизведения информации о пучке электронами существенным образом зависит от характеристик слабосвязанного квантового состояния и структуры иона, которые проявляются через величину параметра

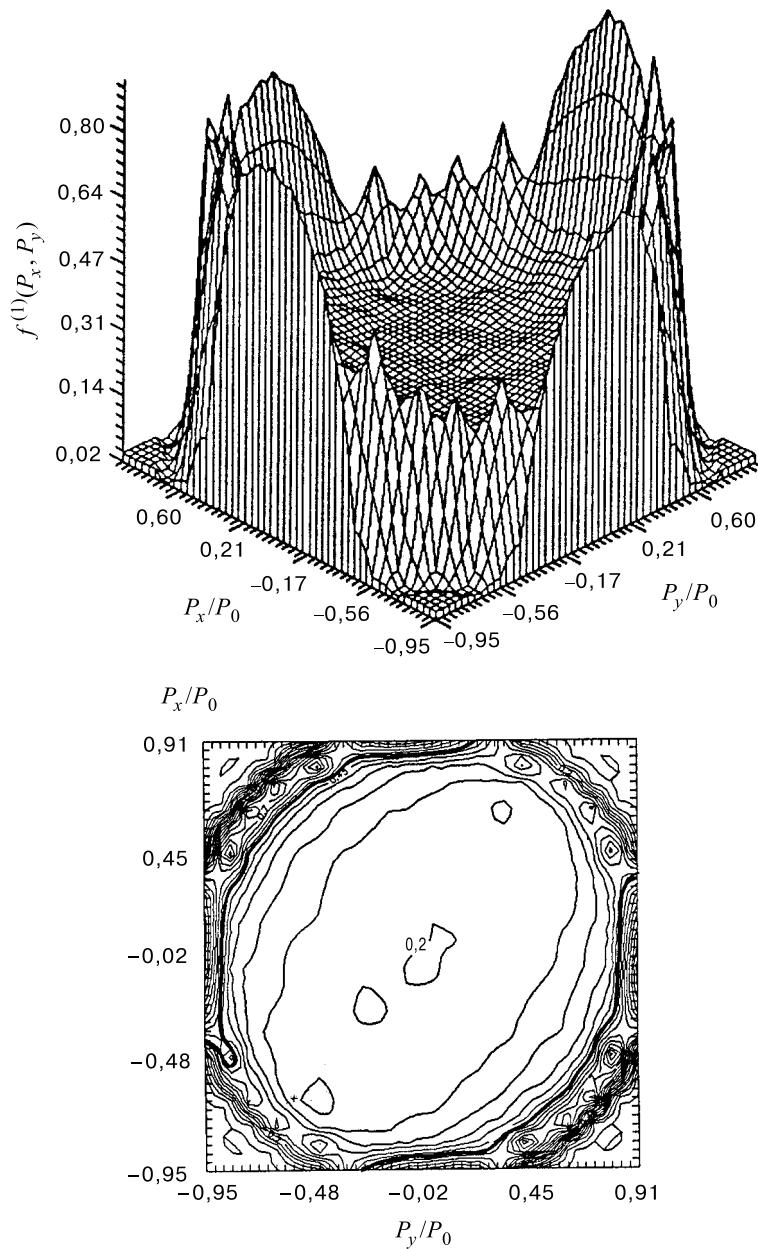
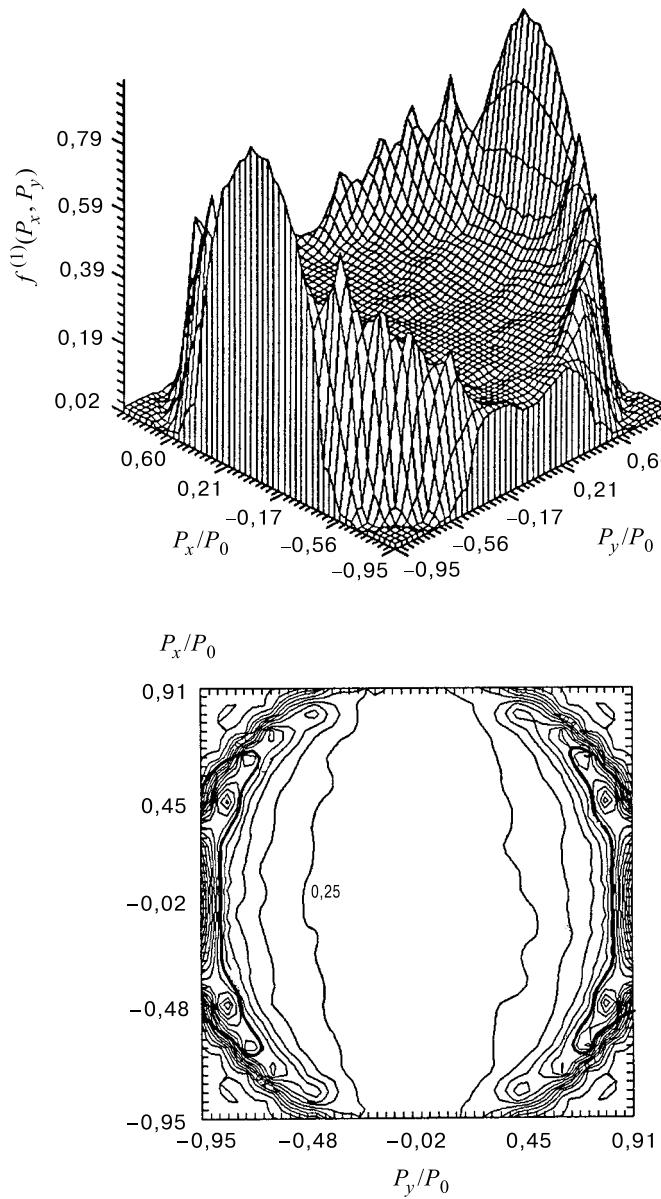


Рис. 10. Трехмерное представление нормированного собственного $f^{(1)}(P_x, P_y)$ -распределения электронов и его топограмма при однофотонной обтирке ионов с $\beta_0 = -1$ и $\alpha = \pi/4$, $\eta = \pi/4$. Жирной кривой на топограмме выделен уровень 0,5 от амплитуды распределения

Рис. 11. То же, что на рис. 10, для $\alpha = \pi/2$, произвольное η

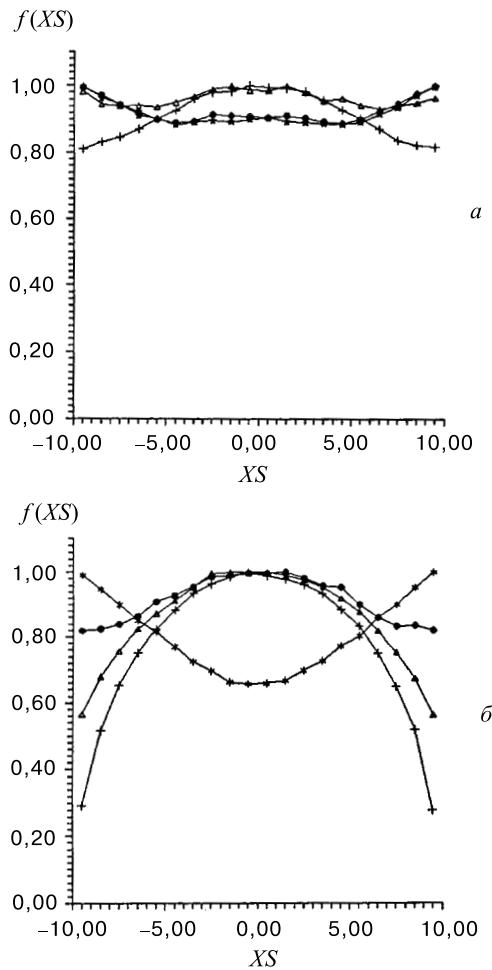


Рис. 12. Нормированное собственное распределение электронов по энергии при однофотонной обдирке ионов с $\beta_0 = -1$ для $\eta = \pi/4, 3\pi/4$ (а) и $\eta = \pi/2$ (б) при различной поляризации излучения: $\alpha = \pi/4$ (\bullet), $\alpha = 0$ (+), неполяризованные фотоны (\blacktriangle), $\alpha = \pi/2$ (*), $\alpha = \pi/4, \eta = 3\pi/4$ (\star)

угловой асимметрии β_0 ($-1 \leq \beta_0 \leq 2$). При этом максимальная чувствительность этой точности к поляризации фотонов и углу их пересечения с пучком ионов в пределах кинематически определяемых границ, соответствующих $W_e = W_\theta = 1$, проявляется для электронов, рождающихся с параметрами угловой асимметрии $\beta_0 = 2$ (например, однофотонная обдирка отрицательных ионов H^- , Ag^- , Cu^- , Au^-). В этом случае подбором направления плоскости

поляризации фотонов в пространстве могут быть реализованы минимальные ширины на полувысоте распределений электронов по проекции угла и энергии. Например, наиболее узкие распределения вдоль оси X' ($X' = P_x/P_z$) имеют место, когда излучение фотонной мишени поляризовано в плоскости YZ декартовых координат с осью Z , направленной по пучку ионов (см. рис. 1, 2). Максимумы этих распределений расположены вдоль оси Y' ($Y' = P_y/P_z$) на расстоянии, зависящем от угла η , и сливаются в один при $\eta = \pi/2$.

Для фотонной мишени с указанной поляризацией точность $\Delta X'$ воспроизведения электронами информации о распределении ионов в пучке по оси X' определяется шириной на полувысоте распределений $\varphi^{(1)}(P_x) = \int f^{(1)}(P_x, P_y) dP_x$, не зависит от η и соответствует $W_\theta \approx 1/8$. При этом полагается, что измерительное устройство осуществляет интегрирование распределений вдоль оси P_y без возмущения информации в фазовой плоскости $X'X$.

Максимальная точность воспроизведения электронами данного типа ($\beta_0 = 2$) информации о продольном эмиттансе пучка и спектре ионов по энергии достигается, если плоскости поляризации фотонной мишени и взаимодействия ионов с фотонами взаимно перпендикулярны (рис. 7). В данном случае точность соответствия распределений ионов (в масштабе $E_i \cdot m_e/M_i$) и электронов по энергии определяется величиной $W_e \approx 1/5$. Поток электронов адекватно отражает распределения ионов в плоскости $X'X$ и по энергии при выполнении условий (1.2), $\Delta X' \ll \Delta\theta_i$ и $0,6\sqrt{(\hbar\omega - \varepsilon_t)/m_e C^2} \ll \gamma^2 \Delta\beta$ для оптимально поляризованной мишени. Следует отметить, что при формировании мишени с оптимальной поляризацией фотонов такая же точность измерения распределений ионов по X' и по энергии, как и при неполяризованной мишени ($W_e \approx 1$, $W_\theta \approx 1$), может быть достигнута при удалении от порога и увеличении значения $\sqrt{\hbar\omega - \varepsilon_t}$ в 8 и 5 раз соответственно. Для ионов H^- , в частности, это приводит к уменьшению необходимой плотности мощности излучения в ~ 500 или ~ 100 раз ($q = 3/2$ в выражении для сечения околопороговой фотообтирки, см. разд. 1) в зависимости от измеряемого параметра пучка. С уменьшением β_0 от рассмотренного выше максимального значения точность воспроизведения распределений ухудшается до значений $W_e \approx 1$ и $W_\theta \approx 1$, отвечающих околопороговой фотообтирке ионов с $|\beta_0| \ll 1$ (например, O^- [60], F^- , Cl^- , Br^- , I^- [66] и др.). При дальнейшем уменьшении этого параметра незначительное улучшение точности ($\approx 1,4$ раза по проекции угла и $\approx 1,2$ раза по энергии относительно величин $W_\theta = W_e = 1$) может быть достигнуто, если околопороговая фотообтирка ионов происходит по каналу рождения электронов со значением β_0 , близким к -1 . В этой связи следует отметить, что в некоторых случаях, когда параметр угловой асимметрии значительно меняется с изменением частоты фотонов, для улучшения точности измерений выгоднее отстроиться от порога, где $\beta_0 \approx 0$, и попасть в область наиболее благоприятной фотообтирки с $\beta_0 \approx 2$. В частности,

это имеет место, например, для ионов $\text{He}^-({}^4\text{P}^0)$ [59], когда, отстроившись от порога на величину $\Delta(\hbar\omega) \approx 0,5 \div 1,0$ эВ, при использовании фотонов с оптимальной поляризацией можно рассчитывать на увеличение точности измерений по углу в несколько раз.

3. ОСОБЕННОСТИ ФОТООБДИРКИ В ИНТЕНСИВНОМ ПОТОКЕ ФОТОНОВ НА ПРИМЕРЕ ИОНОВ H^-

Прецизионные внутренние мишени фотонов для зондирования пучка отрицательных ионов, например, H^- , при его диагностике формируются с помощью лазерного излучения (см., например, [19, 20, 67]). В отличие от однофотонного механизма при фотообтирке отрицательных ионов в лазерных полях могут проявляться эффекты динамического сдвига порога, корреляционного взаимодействия электронов и многофотонной обтирки [68–74]. Увеличение порога связано со штарковским сдвигом основного состояния электрона и границы непрерывного спектра. В работе [75] отмечается, что учет корреляционных эффектов важен для ионов с достаточно большим зарядом ядра (например, для отрицательных ионов щелочных металлов), а при разрушении H^- приводит лишь к малым поправкам к дисперсионной зависимости вероятности фотоотрыва электрона.

При достаточно высокой плотности фотонов в мишени рождаются электроны по каналу n -фотонной обтирки отрицательных ионов ($n > 1$), вероятность которой в единицу времени равна (см., например, [76])

$$W^{(n)} = \sigma^{(n)}(I_\gamma)^n = 4^{-n}(2\pi)^{-2}k_f \int |V_{fi}^{(n)}|^2 d\Omega_f, \quad (3.1)$$

где $\sigma^{(n)}$ — сечение n -фотонной обтирки для данной частоты и поляризации излучения, $V_{fi}^{(n)}$ — соответствующий матричный элемент перехода электрона из начального i -состояния в конечное состояние f в электромагнитном поле с напряженностью F , I_γ — плотность мощности фотонной мишени или плотность потока фотонов (в зависимости от используемых единиц измерения $\sigma^{(n)}$) в системе покоя иона, $d\Omega_f = \sin\theta_f d\theta_f d\varphi_f$, k_f и (θ_f, φ_f) — импульс фотоэлектрона и его сферические координаты соответственно. Для таких мишеней с энергией фотонов вблизи порога ε_t ($0 < \omega - \varepsilon_t \ll \varepsilon_t$) основным конкурирующим процессом однофотонной обтирки (см. выражение для сечения $\sigma(\omega) \equiv \sigma^{(1)}(\omega)$ в разд. 1) является канал раз渲ла отрицательного иона с $n = 2$. Для удобства здесь и далее в данном разделе используется атомная система единиц ($|e| = m_e = \hbar = 1$). Известные результаты по двухфотонной обтирке H^- при энергии фотонов в системе покоя иона ниже однофотонного порога ε_t существенно зависят не только от поляризации фотонов, но

и от выбранной теоретической модели [73]. Поэтому при изучении влияния поляризации и мощности фотонной мишени на оклопороговый развал ионов H^- ($0 < \omega - \varepsilon_t \ll \varepsilon_t$), представляющий интерес для диагностики, важно рассматривать однофотонный и двухфотонный каналы в рамках единого подхода. В связи с тем, что статическая и динамическая поляризуемости атомного остова H^- малы по величине, а их значения для иона слабочувствительны к конкретному виду потенциала взаимодействия электрона с атомом [74], в работах [62, 77, 78] данные исследования проводились в рамках аналитически решаемой одноэлектронной модели потенциала нулевого радиуса (δ -потенциал [79]). Ниже приведены выдержки и некоторые результаты работы [62].

Волновая функция единственного связанных s -состояния в потенциале нулевого радиуса представляется в виде

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}} \cdot \frac{1}{r} \exp(-\zeta r), \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_t = \zeta^2/2$ — энергия связи. При этом учет взаимодействия с δ -потенциалом эквивалентен вводу граничного условия

$$\frac{d \ln(r\Psi_0)}{dr} |_{r=0} = -\zeta. \quad (3.3)$$

В непрерывном спектре от плоских волн отличаются только s -волны с фазой рассеяния

$$\eta_s = -\arctan \frac{k}{\zeta}, \quad (3.4)$$

где k — импульс электрона, $k^2 \equiv P_0^2 = 2(\omega - \varepsilon_t)$. Матричный элемент однофотонной обтирки иона из s -связанного в p -континуальное состояние в дипольном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} V_{ps}^{(1)} &= F \int \Psi_{\vec{k}}^{(-)*}(\vec{e}\vec{r}) \Psi_0 d\vec{r} = \\ &= F \frac{1}{2k} \sum_l (-i)^l (2l+1) \exp(i\eta_l) \int P_l^*(\cos \theta_{\vec{k}\vec{r}}) \times \\ &\quad \times 2k \cdot j_l(kr) (\vec{e}\vec{r}) \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}} \exp(-\zeta r) r^2 dr \cdot d\vec{n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\Psi_{\vec{k}}^{(\pm)} = (1/2k) \sum_l i^l (2l+1) \exp(\pm i\eta_l) \cdot P_l(\cos \theta_{\vec{k}\vec{r}}) \times R_{kl}(r)$ — волновые функции непрерывного спектра в плосковолновом приближении $R_{kl}(r) = 2k \cdot j_l(kr)$, $\int \Psi_{\vec{k}'}^{(\pm)*} \cdot \Psi_{\vec{k}}^{(\pm)} d\vec{k} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k})$, $j_l(kr)$ — сферические функции Бесселя с нормировкой $\int j_l(k'r) j_l(kr) r^2 dr = \pi \delta(k' - k)/2k' k$, \vec{e} — вектор

поляризации, $\vec{n} = \vec{r}/r$. Выражение для оператора $(\vec{e}\vec{n})$ зависит от поляризации излучения. В частности, для линейной и круговой поляризации (см., например, [54]):

$$(\vec{e}\vec{n}) = \begin{cases} \sqrt{4\pi/3} \cdot Y_{10}(\theta_{ne}, \varphi_{ne}) & \text{— линейная поляризация,} \\ \sqrt{8\pi/3} \cdot Y_{1,\pm 1}(\theta_n, \varphi_n) & \text{— левокруговая (+), правокруговая (-),} \end{cases} \quad (3.6)$$

где Y_{10} и $Y_{1,\pm 1}$ — шаровые (сферические) функции, $(\theta_{ne}, \varphi_{ne})$ и (θ_n, φ_n) — сферические координаты вектора \vec{n} относительно вектора поляризации и импульса фотона соответственно. Считая θ_{ke} углом между импульсом электрона и вектором поляризации фотона в системе покоя иона, получаем известную в литературе (см., например, [80]) угловую зависимость вероятности вылета электрона для линейно поляризованного излучения:

$$\begin{aligned} V_{ps|l}^{(1)} &= 4F\sqrt{2\pi\zeta} \frac{k}{(\zeta^2 + k^2)^2} P_1(\cos \theta_{ke}), \\ \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega}(\theta_{ke})|_l &\propto |V_{ps|l}^{(1)}|^2 \propto \cos^2 \theta_{ke}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Она соответствует значению $\beta_0 = 2$ в (2.2).

Для излучения с круговой поляризацией матричный элемент (3.5) приобретает вид

$$V_{ps|\pm}^{(1)} = \mp 4F\sqrt{2\pi\zeta} \frac{k}{(\zeta^2 + k^2)^2} \sin \theta_k \exp(\pm i\varphi_k), \quad (3.8)$$

где (θ_k, φ_k) — сферические координаты вектора \vec{k} относительно импульса фотона, верхний знак соответствует левокруговой поляризации, а нижний — правокруговой. При этом угловая зависимость дифференциального сечения определяется выражением

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega}(\theta_k)|_{\pm} \propto |V_{ps|\pm}^{(1)}|^2 \propto \sin^2 \theta_k, \quad (3.9)$$

которое совпадает с (2.3) при $\beta_0 = 2$. Усредняя (3.7) по направлениям вектора поляризации фотонов, получаем аналогичную (3.9) зависимость для неполяризованного излучения (см. также [81]).

Следуя работе [73], двухфотонный матричный элемент перехода из основного $|s\rangle$ состояния в состояние $|k'\rangle$ непрерывного спектра можно представить в виде

$$V_{k's}^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{V_{k'k}^{(1)} V_{ks}^{(1)} d\vec{k}}{E_k + \varepsilon_t - \omega - i\xi}, \quad \xi \rightarrow +0, \quad (3.10)$$

где $E_k = k^2/2$, $V_{k'k}^{(1)} = F \int \Psi_{\vec{k}'}^{(-)*}(\vec{e}\vec{r}) \Psi_{\vec{k}}^{(+)} d\vec{r}$ — однофотонный матричный элемент перехода в непрерывном спектре. В выражении (3.10) учтена плотность промежуточных состояний электрона $d\vec{k}/(2\pi)^3$ в интервале импульсов $\vec{k} \div \vec{k} + d\vec{k}$ для используемых волновых функций. С учетом (3.7) и вида функций $\Psi_{\vec{k}}^{(\pm)}$, для линейно поляризованного излучения получаем

$$V_{k's|l}^{(2)} = \frac{F^2}{(2\pi)^3} \int \sum_{l'l} (-i)^{l'} (i)^l (2l'+1)(2l+1) \exp[i(\eta_l - \eta_{l'})] \times \\ \times W_{l'l} I_{l'l} (-i) \sqrt{2\pi\zeta} \frac{4k}{(\zeta^2 + k^2)^2} P_1(\cos \theta_{ke}) \frac{d\vec{k}}{E_k + \varepsilon_t - \omega - i\xi}, \quad (3.11)$$

где $W_{l'l} = \int r^3 j_{l'}(k'r) j_l(kr) dr$, $I_{l'l} = \int P_{l'}^*(\cos \theta_{\vec{k}'\vec{r}})(\vec{e}\vec{n}) P_l(\cos \theta_{\vec{k}\vec{r}}) d\vec{n}$. Так как в этом случае возможны *sps*- и *spd*-двуфотонные переходы, с учетом (3.4) и радиальной части *s*-волны в конечном $|k'|>$ -состоянии $R_{k'0} = (2/r) \sin(k'r + \eta_s)$, для интегралов $W_{l'l}$ и $I_{l'l}^{(2)} \equiv \int (2l'+1)(2l+1) I_{l'l} P_1(\cos \theta_{ke}) d\Omega_{\vec{k}}$ справедливы следующие выражения:

$$W_{21} = 0,5\pi \left[\frac{1}{k'k} \frac{\partial}{\partial k} \delta(k' - k) + \frac{2}{(k')^3} \delta(k' - k) \right]; \\ W_{01} = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + (k')^2}} \left[-\frac{\pi\zeta}{2} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\delta(k' - k)}{k'k} + \right. \\ \left. + \frac{k}{(k^2 - k'^2 - i\alpha)^2} + \frac{k}{(k^2 - k'^2 + i\alpha)^2} \right]; \\ I_{21}^{(2)} = \frac{2}{3}(4\pi)^2 P_2(\cos \theta_{k'e}); \quad I_{01}^{(2)} = \frac{1}{3}(4\pi)^2 P_0(\cos \theta_{k'e}). \quad (3.12)$$

В результате в случае линейно поляризованного излучения выражение для матричного элемента двухфотонного перехода электрона в конечное состояние с импульсом $k' \equiv P_{0w} = \sqrt{2(2\omega - \varepsilon_t)}$ в системе покоя иона приобретает вид

$$V_{k's|l}^{(2)} = F^2 \frac{4\sqrt{2\pi\zeta}}{(2\pi)^3} \int [I_{01}^{(2)} \exp(-i\eta_0) W_{01} - I_{21}^{(2)} W_{21}] \frac{k^3}{(\zeta^2 + k^2)^2} \frac{dk}{E_k + \varepsilon_t - \omega - i\xi} = \\ = F^2 \frac{\sqrt{2\pi\zeta}}{3\omega^4} \left\{ \exp(-i\eta_0) [\zeta(\omega - \varepsilon_t) + i\sqrt{2}(\omega - \varepsilon_t)^{3/2}] \times \right. \\ \left. \times \frac{P_0(\cos \theta_{k'e})}{\sqrt{\omega}} - 2P_2(\cos \theta_{k'e})(2\omega - \varepsilon_t) \right\}, \quad (3.13)$$

где первое слагаемое в фигурных скобках соответствует *sps*-переходу и учитывает вклад резонансных промежуточных состояний непрерывного спектра с энергией $E_k = \omega - \varepsilon_t$, а второе есть результат интегрирования в смысле главного значения и соответствует виртуальному *spd*-переходу (см. также [73]). Угловая зависимость двухфотонного дифференциального сечения вблизи порога ε_t ($0 < \omega - \varepsilon_t \ll \varepsilon_t$) определяется

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega}(\theta_{k'e})|_l \propto |V_{k's|l}^{(2)}|^2 \propto (3 \cos^2 \theta_{k'e} - 1)^2. \quad (3.14)$$

При использовании оператора (3.6) и значения $V_{ks}^{(1)}$ в виде (3.8) с помощью (3.10) получаются следующие выражения для матричного элемента двухфотонной обтирки иона и угловые компоненты дифференциального сечения в мишени с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} V_{k's|\pm}^{(2)} &= -F^2 \frac{\sqrt{2\pi}\zeta}{4} \exp(\pm 2i\varphi_{k'}) \sin^2 \theta_{k'} \frac{2\omega - \varepsilon_t}{\omega^4}, \\ \frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega}(\theta_{k'})|_{\pm} &\propto |V_{k's|\pm}^{(2)}|^2 \propto \sin^4 \theta_{k'}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для энергии фотонов ниже однофотонного порога аналогичная зависимость получена в работе [82]. В то же время для линейно поляризованного излучения с учетом выражения (3.13) для надпороговой двухфотонной обтирки ионов H^- и результатов работы [82] для $\varepsilon_t/2 < \omega < \varepsilon_t$ характерна существенная зависимость углового распределения фотоэлектронов от энергии фотонов. Она меняется от практически изотропного вблизи двухфотонного порога до ярко выраженного распределения по направлению вектора поляризации при $\omega \approx \varepsilon_t$. В окрестности однофотонного порога распределение (3.14) и результаты работы [82] хорошо согласуются между собой. Усреднение выражения (3.14) по направлениям вектора поляризации фотонов приводит к следующей угловой зависимости вылета электронов относительно импульса фотонов при двухфотонной околопороговой обтирке ионов в неполяризованном излучении:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega}(\theta_{k'})|_{up} \propto 3 \sin^4 \theta_{k'} - (8/3) \sin^2 \theta_{k'} + 8/9. \quad (3.16)$$

Из выражений (3.13) и (3.15) видно, что в одноэлектронной модели потенциала нулевого радиуса двухфотонная обтирка отрицательного иона имеет место даже при $\omega = \varepsilon_t$ и равном нулю матричном элементе (3.7). При этом в околопороговой области основным каналом фотообтирки с $n=2$ является виртуальный *spd*-переход. Аналогичный вывод ранее был сделан в работе

[73], а для линейно поляризованного излучения в области ниже однофотонного порога ($\omega < \varepsilon_t$) — в работах [83–85]. Полученные для линейно поляризованного излучения результаты (3.7) и (3.14) согласуются (при $a_2^{(1)} = 1$, $a_2^{(2)} = 10/7$ и $a_4^{(2)} = 18/7$) с приведенным в работе [50] выражением

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega} = \sigma^{(n)} \left[1 + \sum_{m=1}^n a_{2m}^{(n)} P_{2m}(\cos \theta_{ke}) \right], \quad (3.17)$$

для угловой зависимости n -фотонного дифференциального сечения ионизации частиц, при наличии у них промежуточных резонансных состояний с поглощением m фотонов ($m < n$). Коэффициенты $a_{2m}^{(n)}$ являются в общем случае функциями интенсивности и ширины спектра излучения мишени. Данное согласие указывает на правомерность формального представления двухфотонной обтирки ионов H^- вблизи однофотонного порога как ионизации частиц, для которых в качестве промежуточного резонансного состояния можно рассматривать границу непрерывного спектра.

В работе [62] расчет распределений вероятности вылета электрона по каналу $n = 2$ в пространстве поперечных импульсов в лабораторной системе отсчета (P_x/P_{0w} , P_y/P_{0w}) и по энергии, представленной в безразмерных единицах $XW = [E_e - (\gamma - 1)C^2]/(0, 1\gamma\beta P_{0w}C)$ (собственные двухфотонные распределения), для линейно поляризованного и неполяризованного излучения проводился численным моделированием при $0 < \omega - \varepsilon_t \ll \varepsilon_t$ с использованием выражений (2.8) и (3.14). За исключением генерации случайного распределения угла $\theta_{k'e}$ по закону $(3 \cos^2 \theta_{k'e} - 1)^2$ особенности моделирования аналогичны рассмотренному выше однофотонному каналу. Некоторые из полученных для различных значений α и η трехмерных представлений нормированных по амплитуде собственных двухфотонных $f^{(2)}(P_x, P_y)$ -распределений и их топограммы, а также $f(XW)$ -распределения приведены на рис. 13–16. Представленные в работе результаты показывают, что с учетом $P_{0w} \gg P_0$ общий характер распределений при тех же α и η близок к результатам, полученным для однофотонной обтирки ионов (см. рис. 2, 4, 5, 7).

Результирующие собственные распределения электронов в пространстве поперечных импульсов лабораторной системы отсчета (P_x, P_y) и по энергии (E_e) определяются суммой соответствующих распределений от однофотонного и двухфотонного каналов обтирки с учетом их статистических весов. Статистический вес распределения определяется вероятностью обтирки (3.1) для данной поляризации и мощности фотонной мишени. Матричные элементы (3.7), (3.8), (3.13) и (3.15), при учете плотности $d\vec{k}'/(2\pi)^3$ конечных состояний электрона в непрерывном спектре, приводят к следующим выражениям для вероятности n -фотонной обтирки ($n = 1, 2$) в мишени с линейной

и круговой поляризациями:

$$\begin{aligned}
 W_l^{(1)} &= W_{\pm}^{(1)} = (2/3)F^2\omega^{-4}\sqrt{\varepsilon_t}(\omega - \varepsilon_t)^{3/2}, \\
 W_l^{(2)} &= (1/18)F^4\omega^{-8}\sqrt{\varepsilon_t(2\omega - \varepsilon_t)}[(\omega - \varepsilon_t)^2(\varepsilon_t/\omega) + \\
 &\quad + (\omega - \varepsilon_t)^3/\omega + (2/5)(2\omega - \varepsilon_t)^2], \\
 W_{\pm}^{(2)} &= (1/120)F^4\omega^{-8}\sqrt{\varepsilon_t(2\omega - \varepsilon_t)}(2\omega - \varepsilon_t)^2, \\
 W_l^{(2)}|_{(0<\omega-\varepsilon_t\ll\varepsilon_t)} &\approx (8/3)W_{\pm}^{(2)}. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Таким образом, в одноэлектронной модели потенциала нулевого радиуса вероятность двухфотонной надпороговой обтирки иона существенным образом зависит от поляризации мишени, причем для линейно поляризованного излучения она значительно больше, чем в случае с круговой поляризацией. В области ниже однофотонного порога данный вопрос теоретически рассматривался, например, в работах [82, 86–89]. В отличие от полученного выше результата в этой области ($\omega < \varepsilon_t$) соотношение между вероятностями двухфотонной обтирки в линейно и циркулярно поляризованном излучении качественно меняется в зависимости от энергии фотонов. В частности, несмотря на количественное различие результатов разных работ, неравенство $\rho \equiv W_l^{(2)}(\omega)/W_{\pm}^{(2)}(\omega) \gg 1$ в области двухфотонного порога ($\omega \geq \varepsilon_t/2$) переходит в соотношение $\rho \leq 1$ при $\omega \leq \varepsilon_t$. В рассмотренной теоретической модели зависимость (3.18) для околовороговой однофотонной обтирки иона H^- согласуется с вигнеровским законом ионизации *s*-квантового состояния [81, 90, 91] и известными экспериментальными результатами [92, 93]. В соответствии с (3.18) отношение статвесов собственных распределений однофотонного и двухфотонного каналов обтирки вблизи порога определяется соотношением

$$\frac{W_l^{(1)}}{W_l^{(2)}} = \frac{3}{8} \frac{W_{\pm}^{(1)}}{W_{\pm}^{(2)}} \approx \frac{15\varepsilon_t^{1.5}(\omega - \varepsilon_t)^{1.5}C}{4\pi I_{\gamma}}, \tag{3.19}$$

где $I_{\gamma} = F^2C/8\pi$ — плотность мощности мишени в атомных единицах (1 а.е. = $6,436 \cdot 10^{15}$ Вт/см²). С учетом выражения (3.1) для линейно поляризованного излучения на рис. 17 приведена полученная в работе [62] теоретическая зависимость парциального сечения двухфотонной обтирки иона H^- от энергии фотона при $\omega > \varepsilon_t$. Для сравнения там же представлены теоретические результаты работ [84, 94, 95] для фотонов с $\omega < \varepsilon_t$. Приведенные сечения нормированы на один из двух электронов у иона H^- и хорошо стыкуются на границе однофотонной обтирки.

Представленные выше для каналов $n = 1, 2$ результаты позволяют детально исследовать эволюцию результирующих собственных распределений электронов в лабораторной системе отсчета при надпороговой фотообтирке

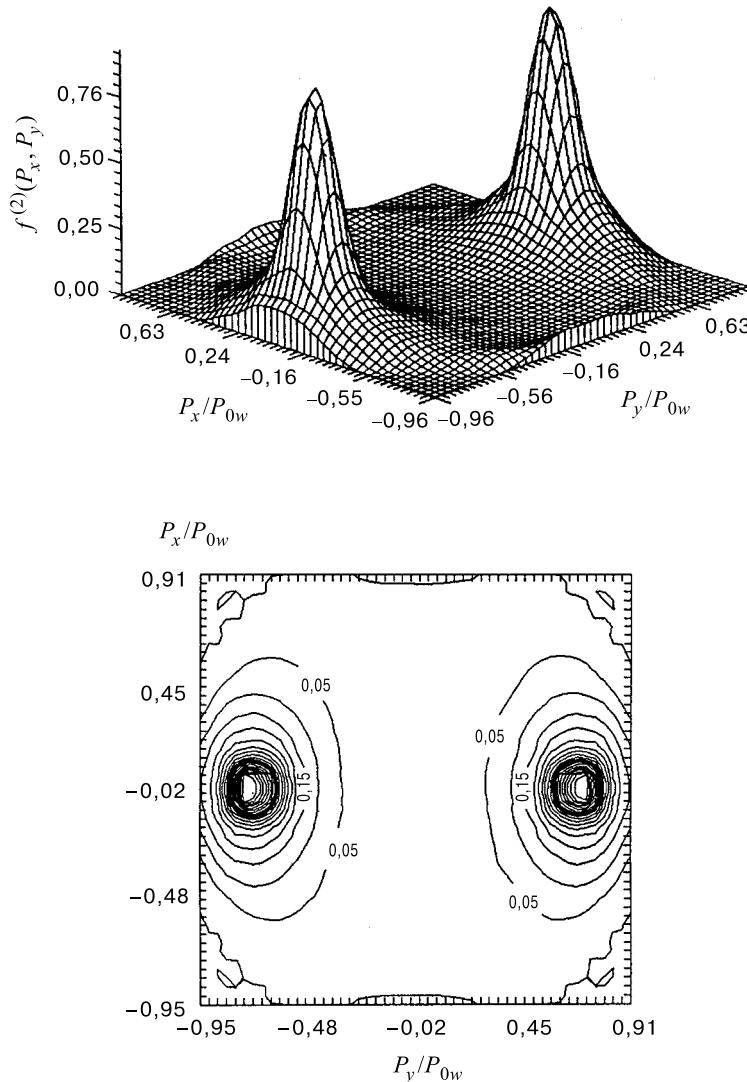
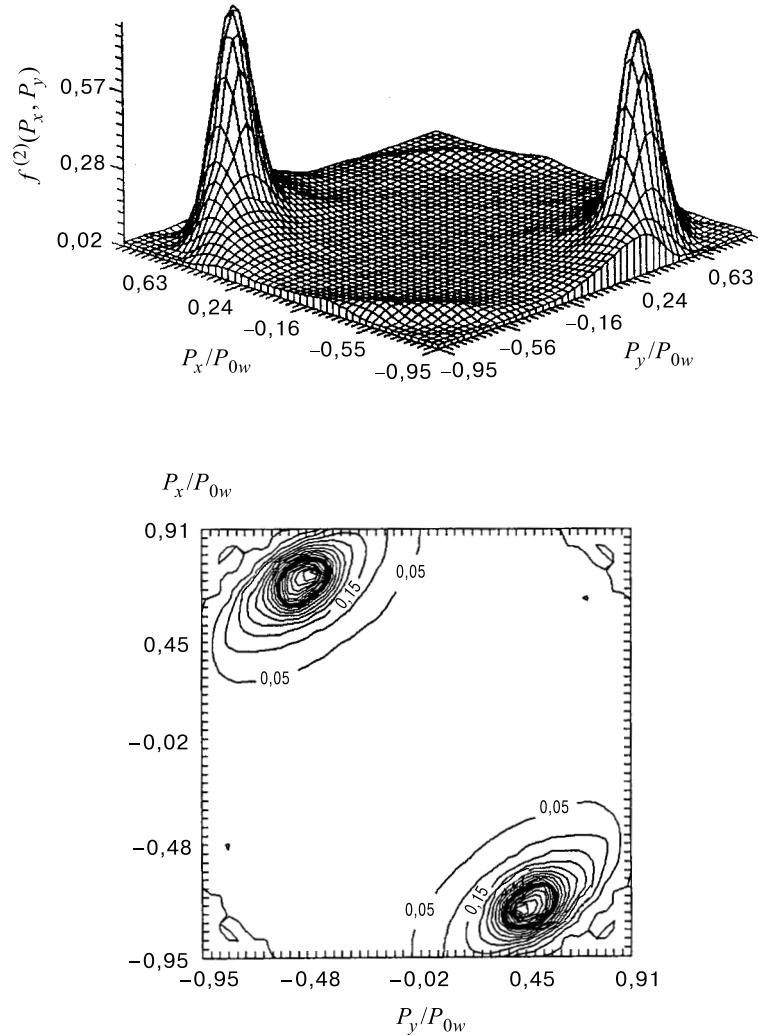
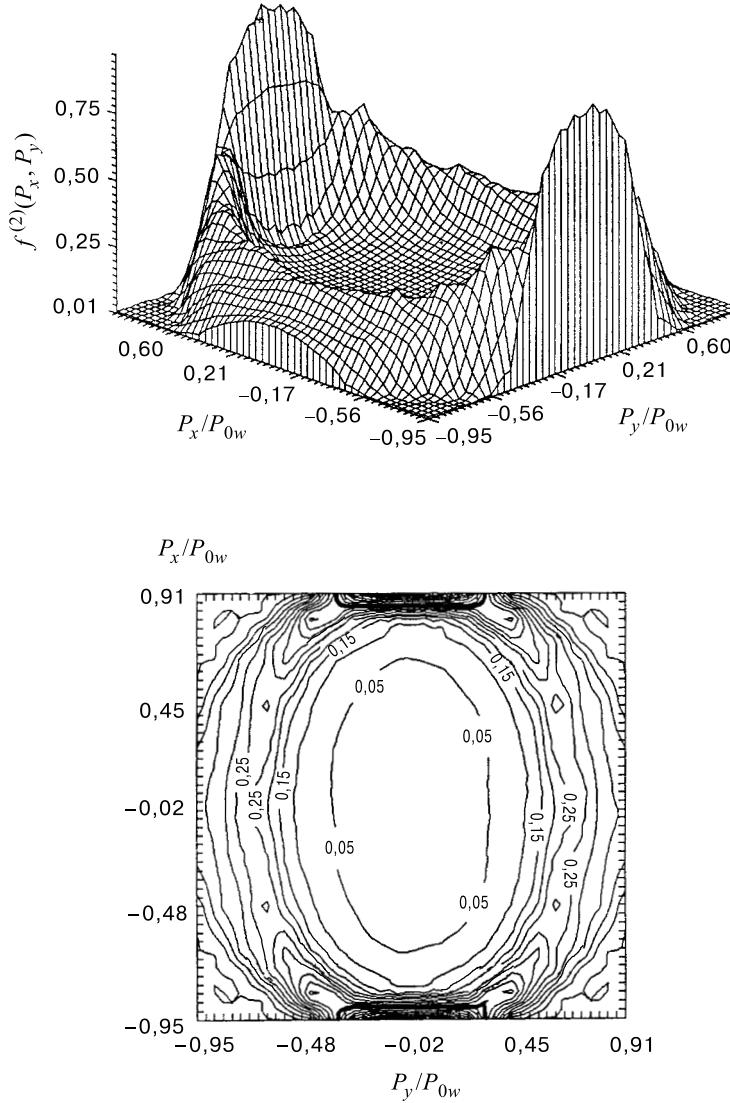


Рис. 13. Трехмерное представление нормированного собственного $f^{(2)}(P_x, P_y)$ -распределения электронов и его топограмма при двухфотонной околопороговой обдирке ионов H^- с $\alpha = 0$, $\eta = \pi/4$. Жирной кривой на топограмме выделен уровень 0,5 от амплитуды распределения

Рис. 14. То же, что на рис. 13, для $\alpha = \pi/4$, $\eta = \pi/4$

ионов H^- на мишениях различной поляризации, частоты и мощности излучения. В пространстве поперечных импульсов в лабораторной системе отсчета (P_x, P_y) эти распределения определяются выражением

$$f(P_x, P_y)_{|\alpha, \eta} = f_{|\alpha, \eta}^{(1)}(P_x, P_y) \frac{W_\alpha^{(1)}}{P_0^2 V_{\alpha, \eta}^{(1)}} + f_{|\alpha, \eta}^{(2)}(P_x, P_y) \frac{W_\alpha^{(2)}}{P_{0w}^2 V_{\alpha, \eta}^{(2)}}, \quad (3.20)$$

Рис. 15. То же, что на рис. 13, для $\eta = \pi/4$, неполяризованное излучение

где $f_{|\alpha,\eta}^{(1,2)}(P_x, P_y)$ — нормированные парциальные собственные распределения однофотонного и двухфотонного каналов для выбранного угла η в мишени с соответствующей поляризацией α ; $f_{|\alpha,\eta}^{(1)}(P_x, P_y) \equiv 0$ при $P_x^2 + P_y^2 \geq P_0^2$; $f_{|\alpha,\eta}^{(2)}(P_x, P_y) \equiv 0$ при $P_x^2 + P_y^2 \geq P_{0w}^2$; $V_{\alpha,\eta}^{(1,2)}$ — подповерхностный объем

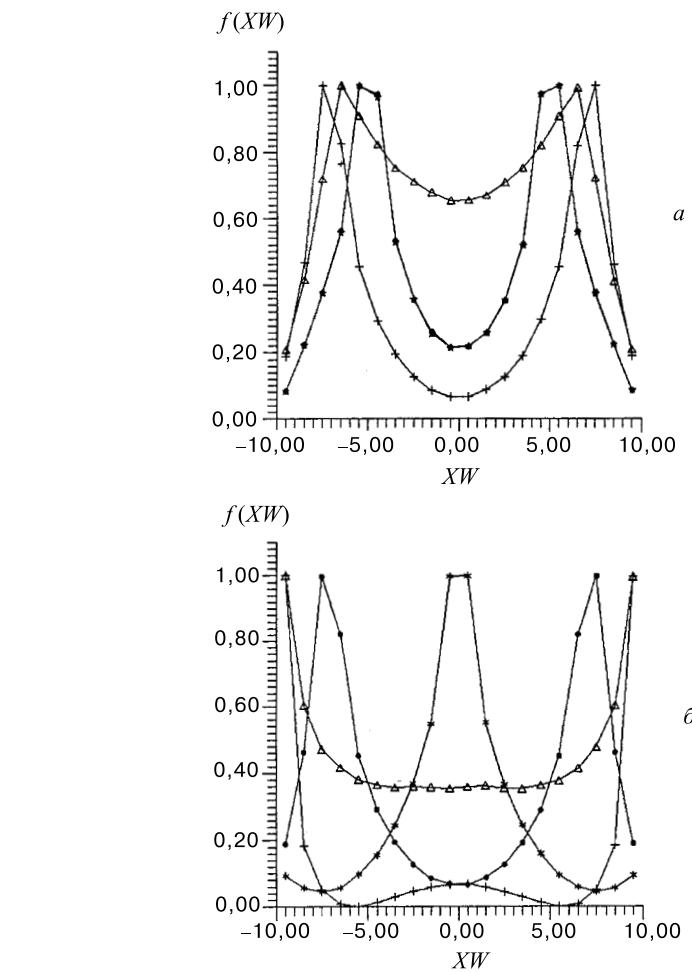


Рис. 16. Нормированное собственное распределение электронов по энергии при двухфотонной околопороговой обдирке ионов H^- с $\eta = \pi/4, 3\pi/4$ (*a*) и $\eta = \pi/2$ (*б*) для различной поляризации излучения: $\alpha = \pi/4$ (\bullet), $\alpha = 0$ (+), неполяризованные фотоны (\triangle); $\alpha = \pi/2$, произвольное η (*), $\alpha = \pi/4, \eta = 3\pi/4$ (\star)

нормированных парциальных распределений. В выражении (3.20) учтена нормировка $f_{|\alpha,\eta}^{(1,2)}(P_x, P_y)$ -распределений по амплитуде, их представление в пространстве безразмерных поперечных импульсов (см. рис. 1–6, 13–15), а интеграл распределения по энергии полагается равным единице. Соответствующее выражение для результирующего собственного распределения электронов по

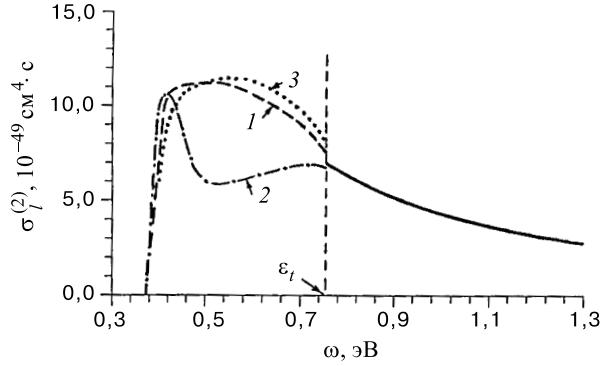


Рис. 17. Зависимость парциального сечения двухфотонной обтирки иона H^- в линейно поляризованной мишени ($\sigma_l^{(2)}$) от энергии фотона (ω). Кривые 1, 2, 3 — теоретические результаты работ [84, 94, 95] соответственно

энергии имеет вид

$$f_{|\alpha,\eta}(E_e) = f_{|\alpha,\eta}(XS) \frac{10W_\alpha^{(1)}}{\gamma\beta CS_{\alpha,\eta}^{(1)}P_0} + f_{|\alpha,\eta}(XW) \frac{10W_\alpha^{(2)}}{\gamma\beta CS_{\alpha,\eta}^{(2)}P_{0w}}, \quad (3.21)$$

где $S_{\alpha,\eta}^{(1,2)}$ — площади нормированных по амплитуде парциальных $f_{|\alpha,\eta}(XS, XW)$ -распределений, и используется единичная нормировка интеграла парциальных распределений в пространстве поперечных импульсов.

Следует отметить, что из-за малой поляризуемости атомного остова H^- при изучении околопороговой фотообтирки иона в рассмотренной модели не учитывалось послестолкновительное взаимодействие продуктов раз渲ла (электрон, атом водорода), которое для других отрицательных ионов может играть важную роль (см., например, [88, 96, 97]).

Оценим максимальную плотность мощности фотонной мишени $I_{\gamma|\Delta}$, при которой динамический рост порога фотообтирки $\Delta\varepsilon_t$ еще не оказывает заметного влияния на представленные выше результаты. С учетом [74] и величин штарковских сдвигов основного состояния электрона и границы непрерывного спектра в лазерном поле F это имеет место при $\Delta\varepsilon_t \approx \tau_0 F^2/4 + F^2/4\omega^2 \approx 1(\omega - \varepsilon_t)$, где τ_0 — динамическая поляризуемость уровня на частоте поля ω (для иона H^- вблизи порога фотообтирки $\tau_0 \approx 10^3$ а.е. [98]). Отсюда получаем

$$I_{\gamma|\Delta} \approx 5 \cdot 10^{-2} \frac{C}{\pi} \frac{\omega - \varepsilon_t}{\tau_0 + 1/\varepsilon_t^2}. \quad (3.22)$$

Отношение этой величины и $I_{\gamma|1,2}$, при которой $W_l^{(1)}/W_l^{(2)} \approx 1$, дает

$$I_{\gamma|1,2}/I_{\gamma|\Delta} \approx 0,37(\omega - \varepsilon_t)^{0,5}(\tau_0 + 1/\varepsilon_t^2) \approx 8 \cdot 10^2(\omega - \varepsilon_t)^{0,5}. \quad (3.23)$$

Для достаточно мощных мишеней влияние сдвига порога однофотонной обтирки на полученные выше результаты можно учесть при замене ε_t на $\overline{\varepsilon_t} = \varepsilon_t + \Delta\varepsilon_t$ и сохранении функциональных зависимостей.

Приведенные результаты детального изучения распределений фотоэлектронов в лабораторной системе отсчета указывают на возможность эффективного управления процессом фотообтирки быстрых ионов H^- в лазерном излучении. Для задач диагностики путем подбора мощности излучения, пространственной ориентации импульса и поляризации фотонов можно реализовать условия передачи необходимой информации о пучке быстрым электронам с максимальной точностью.

4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДИАГНОСТИКИ ПУЧКА ИОНОВ H^- ПО ЭЛЕКТРОНАМ ИХ ОБДИРКИ НА РАЗЛИЧНЫХ МИШЕНЯХ

Точности соответствия распределений ионов H^- и электронов в пучке по углу и энергии (импульсу) определяются величиной и характером возмущения, приобретаемого электронами в элементарных актах своего рождения, и зависят от типа используемой зондирующей мишени. Сравнительный анализ этих точностей может быть проведен с помощью представленных на рис. 18 зависимостей [99]. Для корпускулярных мишеней приведены ширины на полувысоте соответствующих распределений при рождении электронов с учетом известных экспериментальных [30–35] и теоретических [36] результатов. Для фотонных мишеней использованы представленные в разд. 2 данные. При этом сплошные кривые соответствуют теоретическим значениям максимального углового и энергетического разбросов электронов в результате однофотонной обтирки ионов H^- при заданной длине волны фотонов в системе покоя ионов. Штрихпунктирными кривыми отмечены ширины на полувысоте распределений при той же длине волны фотонов, но оптимальном направлении их импульса (угол η) и плоскости поляризации (α).

Из представленных на рис. 18 зависимостей видно, что выбор материала корпускулярной мишени практически не влияет на максимальную точность соответствия распределений ионов H^- и электронов. В связи с этим для задач диагностики можно использовать наиболее удобные с точки зрения формирования зондирующей мишени газовую ячейку, тип газа или фольги. Существенное улучшение точностей соответствия распределений может быть достигнуто при переходе к фотонным мишеням. При зондировании пучков лазерным излучением можно формировать мишени с достаточно малыми пространственно-временными размерами. Таким образом, открывается возможность диагностики с помощью компактных устройств при регистрации

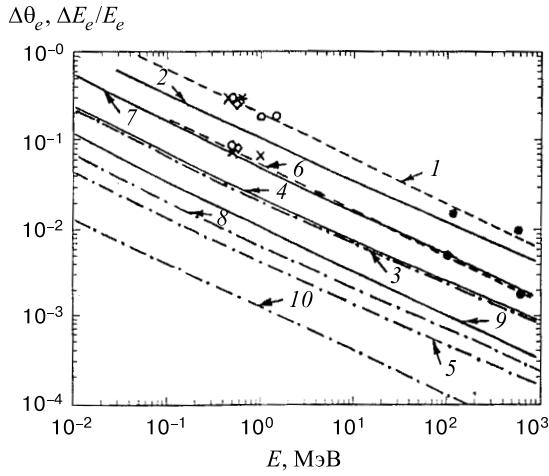


Рис. 18. Максимальная точность соответствия распределений ионов H^- и электронов по относительной энергии ($\Delta E_e/E_e$, кривые 1–5) и углу ($\Delta\theta_e$, кривые 6–10) для различных корпускулярных (1, 6 → (\diamond) — Kr [34], $(*)$ — Ne, CH_3Cl [35], (\circ) — He [31, 33, 35], (\times) — Ar [30, 32], (\bullet) — C [36]) и фотонных ($\lambda = 10600 \text{ \AA} \rightarrow 2, 3, 7, 8$; $\lambda = 16300 \text{ \AA} \rightarrow 4, 5, 9, 10$ [62]) мишней в зависимости от энергии ионов

электронов, рождающихся в результате околопороговой однофотонной обтирки ионов H^- на этапе считывания информации о пучке.

5. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ ФОТОННОЙ МИШЕНИ

Плотность мощности мишени $I_{\gamma|_{\max}}$, при которой информация о параметрах пучка заметно искажается из-за двухфотонной обтирки отрицательных ионов, зависит от поведения сечений каналов $n = 1, 2$ вблизи порога ε_t , конкретного вида собственных распределений электронов в элементарных актах их рождения, а также от величин $\Delta\beta$ и $\Delta\theta_i$ ионов в пучке. Для рассмотренных выше наиболее оптимальных распределений с $\beta_0 = 2$ это имеет место при (см. рис. 1, 2, 7, 13, 16)

$$W_l^{(1)}/\Delta\theta_i \leq 10W_l^{(2)}/\sqrt{(\Delta X'_{cr})^2 + (\Delta\theta_i)^2} \quad (5.1)$$

и

$$W_l^{(1)}/\xi_i \leq 10W_l^{(2)}/\sqrt{(\xi_i)^2 + (\xi^{(2)})^2}, \quad (5.2)$$

в случае измерения распределений ионов в плоскости $X'X$ и по энергии соответственно. В приведенных выражениях $\xi_i = \beta\Delta\beta\gamma^3/(\gamma - 1)$, $\xi^{(2)} \approx$

$\approx (0,6\gamma\beta/(\gamma - 1))\sqrt{\varepsilon_t/m_e C^2}$ и $\Delta X'_{\text{cr}} \approx (0,25/\gamma\beta)\sqrt{2\varepsilon_t/m_e C^2}$. С учетом результатов, представленных в разд. 3 применительно к пучкам ионов H^- , нетрудно получить следующие выражения для $I_{\gamma|\text{max}}[\text{Вт}/\text{см}^2]$ в системе центра масс:

$$I_{\gamma|\text{max}} \approx 5,21 \cdot 10^{12} [\varepsilon_t (\hbar\omega - \varepsilon_t)]^{1,5} \begin{cases} \sqrt{1 + \left(\frac{0,35}{\gamma\beta\Delta\theta_i}\right)^2 \frac{\varepsilon_t}{m_e C^2}} \rightarrow (X'X) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{0,6}{\gamma^2\Delta\beta}\right)^2 \frac{\varepsilon_t}{m_e C^2}} \rightarrow (E_i), \end{cases} \quad (5.3)$$

где величины $\hbar\omega$ и ε_t выражены в электрон-вольтах. Критическая плотность мощности мишени $I_{\gamma|\text{cr}}[\text{Вт}/\text{см}^2]$, при которой собственные однофотонные распределения $\varphi^{(1)}(P_x)$ и $f(XS)$ электронов с $\beta_0 = 2$ полностью «стираются» аналогичными двухфотонными ($W_l^{(1)}/P_0 \approx W_l^{(2)}/P_{0w}$), определяется в данном случае выражением

$$I_{\gamma|\text{cr}} \approx 4,4 \cdot 10^{13} \varepsilon_t^2 (\hbar\omega - \varepsilon_t). \quad (5.4)$$

При такой мощности точность измерения параметров пучка ионов H^- ограничена величинами $\Delta X'_{\text{cr}}$ по углу и $\xi^{(2)}$ по относительной энергии.

6. МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ НЕВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФЭДП ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Для реализации рассмотренного выше метода невозмущающей диагностики пучка отрицательных ионов высокой энергии (например, в мезонных фабриках) предложено и разработано компактное многофункциональное устройство, схема которого представлена на рис. 19 [48,100]. Вывод электронов фотооббидки из пучка ионов и анализ переносимой ими информации осуществляется одним неподвижным магнитным элементом с однородным полем (MA). Для полной компенсации незначительных пространственных и угловых возмущений ионов до и после него расположены корректирующие магниты $M1$ и $M2$. Согласованное изменение анализирующего и корректирующих полей обеспечивается последовательным соединением обмоток магнитов и общим источником тока. Межполюсное расстояние L_m выбирается достаточным для беспрепятственного прохождения пучка в вакуумной камере между полюсами магнита и попадания на детекторы всех электронов, рождающихся на фотонных мишениях.

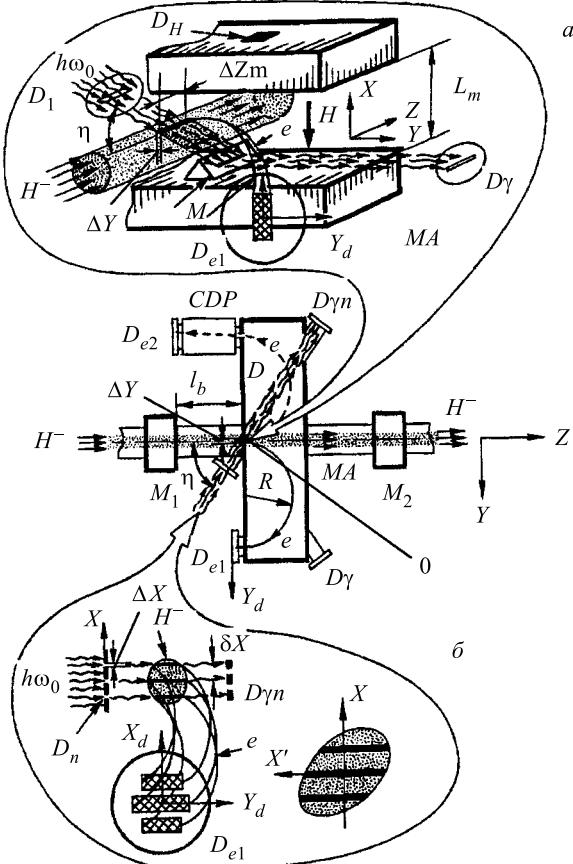


Рис. 19. Схема многофункционального устройства для невозмущающей фотоэлектронной диагностики пучка отрицательных ионов с высокой энергией

Измерение энергетического спектра и продольного эмиттанса пучка ионов осуществляется по известной для магнитных анализаторов схеме (рис. 19, а), в которой вместо диафрагмирующей щели с помощью лазерного излучения формируется в плоскости XZ ленточная фотонная мишень O с требуемой пространственной локализацией ΔY по оси Y . Спектр ионов по энергии или импульсу восстанавливается по измеренному на детекторе D_{e1} пространственному распределению плотности потока электронов вдоль оси Y_d с учетом пространственного разрешения (d) детектора. Электроны с требуемыми для фазового анализа импульсами достаточно оперативно выделяются диафрагмой D при изменении знака и величины магнитного поля. После предварительной юстировки диафрагмирующей системы D_1 и щеле-

вого детектора фотонов D_γ относительно анализатора контроль мощности и угловой ориентации мишени осуществляется по сигналу детектора от прошедшего через область взаимодействия излучения. Для этого оно переводится в плоскость YZ с помощью клиновидного зеркала M , расположенного в вакуумной камере на одном из магнитных полюсов анализатора. Продольный эмиттанс пучка ионов определяется по совокупности пространственных распределений выделенных электронов на детекторе D_{e2} после устройства фазовой развертки (CDP), например, аналогичного предложенному в работе [101]. Основным его элементом является цилиндрический резонатор, нагруженный дисками, в котором возбуждаются электромагнитные колебания EH_{11n} с круговой поляризацией. При равенстве частоты вращения плоскости поляризации в CDP и рабочей частоты ВЧ-поля ускорителя распределение плотности потока электронов по длине кольца на детекторе определяет фазовый спектр соответствующих ионов в пучке. При этом степень соответствия фазовой структуры потоков ионов и электронов фотообтирки ($\delta\Psi$) определяется в основном проекцией ΔZ_m области фотонной мишени, с которой выделенные диафрагмой электроны собираются на детектор, а также разностью длин траекторий этих электронов в магнитном анализаторе из-за их углового разброса.

При работе устройства по схеме, представленной на рис. 19,*б*, в плоскостях, параллельных YZ , с помощью диафрагмирующих щелей D_n формируется одна, перемещаемая вдоль оси X , или несколько неподвижных ленточных фотонных мишней с требуемой для измерений пространственной локализацией ΔX . В последнем случае допустимое расстояние δX между мишнями определяется условием перекрытия распределений электронов от них на детекторе D_{e1} . Данное расположение мишней в пространстве сводит к минимуму взаимное влияние углового и энергетического спектров электронов на их распределение вдоль оси X_d в фокальной плоскости анализатора. Численное моделирование влияния его геометрии, юстировки и краевых полей по оптимизированной программе TRANSPORT (TURTLE) показало, что в этом случае распределение электронов на детекторе D_{e1} вдоль оси X_d описывается выражением

$$X_d = AX + BX', \quad (6.1)$$

где параметры A и B определяются только характеристиками выбранного анализатора. Распределение ионов в $(X'X)$ -фазовой плоскости, X -профиль пучка и его поперечный эмиттанс могут быть определены по измеренным вдоль оси X_d пространственным распределениям потоков электронов при контролируемых характеристиках фотонных мишней (определяющих вероятность рождения электрона), их угловой ориентации и положения в пространстве по оси X . Данный контроль осуществляется n -канальным щелевым детектором $D_{\gamma n}$, где n — число формирующих диафрагм.

По результатам численного моделирования определены оптимальные характеристики устройства, при которых обеспечивается достаточная точность измерения параметров пучка. В частности, для невозмущающей диагностики пучка ионов H^- с энергией $E_{H^-} = 600$ МэВ, $\Delta\beta/\beta \approx \pm 10^{-3}$ и $\Delta\theta_i \approx \approx \pm 10^{-3}$ рад разработано устройство с $R = 200$ мм, $L_m = 60$ мм, $d \approx \approx \Delta X \approx \Delta Y \approx 0,1$ мм, $\delta X \approx 1,5$ мм, расчетными параметрами $A = 1$ и $B = 0,072$ см/мрад, $\Delta Z_m \leq 1$ мм для фазового анализа с $\delta\Psi \approx \pm 1^0$ и $\Delta Z_m \leq 10$ мм для измерения распределений в $(X'X)$ -фазовом пространстве и по энергии. Величина магнитного поля анализатора электронов ($E_e = = 327$ кэВ) при этом составляет $H = 110$ Э. Неточности юстировки и изготовления анализатора приводят к отклонению параметров A , B и дисперсии от расчетных и могут быть учтены при его калибровке тестовым электронным пучком. Точность соответствия распределений ионов и электронов фотообдирки $\Delta X' \approx 5 \cdot 10^{-5}$ рад и $\Delta E_e/E_e \approx 3 \cdot 10^{-2}\%$ достигается на оптимально поляризованных фотонных мишнях при $\eta = (41 \pm 0,5)^{\circ}$, которые формируются диафрагмированием излучения Nd : ИАГ-лазера ($\hbar\omega_0 = 1,17$ эВ) со средней импульсной плотностью мощности $I_{\gamma|L} \leq 30$ кВт/см² в лабораторной системе отсчета. Следует отметить, что данный угол между импульсами ионов и фотонов близок к величине $\eta_b = \arccos(\beta) \approx 38^{\circ}$, при которой происходит фотообдирка в минимальном фазовом интервале (лазерный луч перпендикулярен пучку ионов в системе центра масс). Разработанный лазер излучает в удобном для диагностики квазинепрерывном режиме генерации с длительностью равномерной части импульса $\tau_\gamma \approx 250 \div 500$ мкс, частотой $f_\gamma \approx 1/5$ Гц и угловой расходимостью излучения $\alpha_\gamma \approx 2 \cdot 10^{-4}$ рад, а специальное электронное устройство включает лазер согласованно с пучком ионов ($\tau_i \approx 100$ мкс, $f_i = 1, 100$ Гц) во времени и обеспечивает перекрытие импульсов на участке практически постоянной мощности излучения [102]. Оптимальное согласование импульсов лазера во времени осуществляется путем регулировки опережения поджига. Излучение синхронизируется с любым источником, имеющим сервисный таймер с произвольной частотой $f \leq 2 \cdot 10^5$ Гц и длительностью импульсов, кратной 10 мкс. Частота повторения импульсов лазера определяется временем релаксации наведенных остаточных тепловых деформаций кристалла граната, приводящих к расфокусировке и падению интенсивности излучения в зоне взаимодействия [103]. Для уменьшения радиационного воздействия на активный элемент лазера предусмотрен вариант его размещения в подвальном помещении под ускорителем и транспортировки излучения до диагностического устройства с помощью зеркал. Это также упрощает доступ к отдельным элементам лазера в случае его эксплуатации при работающем ускорителе. В зависимости от выбранного режима работы устройства при дистанционном механическом вращении зеркал поляризованное излучение выборочно подается на одну из двух диафрагмирующих систем (D_1 или D_n) для формирования мишени с нужной

пространственной ориентацией. Практически 100% поляризация достигается при помощи стопы клиновидных стеклянных пластинок, расположенной в плоском резонаторе лазера под углом Брюстера к его оси. Поворот плоскости поляризации на угол $\pi/2$ (при изменении режима работы устройства) производится путем введения кварцевой полуволновой пластины, расположенной на выходе лазера. Направление и степень поляризации излучения могут периодически контролироваться анализатором и фотодиодом с осциллографом. Для более оперативной работы устройства в разных режимах (рис. 19,*a* или *b*) могут использоваться два поочередно включаемых лазера с требуемыми пространственными ориентациями излучения и его поляризации.

Необходимая для измерений величина мощности одной ленточной мишени $P_{\gamma|L}$ [Вт] в лабораторной системе отсчета определяется условием выделения электронов от однофотонной обтирки ионов из потока фоновых электронов, имеющих такую же среднюю энергию. Они рождаются при взаимодействии ионов H^- с компонентами остаточного газа (см. рис. 18), а также в результате двухфотонной обтирки (см. разд. 3) и лоренцевской диссоциации ионов в магнитном поле диполей. Влиянием остаточного газа можно пренебречь при выполнении условия

$$\frac{P_{\gamma|L}\sigma(\omega)(1 - \beta \cos \eta)}{4,8 \cdot 10^{-9} \hbar \omega_0 \sin \eta \cdot \beta \Delta l} \geq 3 \cdot 10^{16} \nu_e \nu_r \sigma_{-1b} P_b l_b, \quad (6.2)$$

где ν_e — кратность превышения плотности потока информационных электронов над фоновыми на детекторе; ν_r — коэффициент линейного уширения изображения фотонной мишени в фокальной плоскости анализатора из-за разброса электронов по углу и импульсу (зависит от типа анализатора); $\sigma_{-1b} = \sigma_{-10|b} + \sigma_{-11|b}$ — среднее сечение обтирки ионов H^- на компонентах остаточного газа [см^2]; P_b — давление остаточного газа [торр]; l_b — эффективная длина, с которой фоновые электроны попадают на детектор; Δl — поперечный к плоскости пересечения потоков фотонов и ионов H^- размер мишени (ΔX или ΔY) [см]; $\sigma^{(1)}(\omega) = 2 \cdot 10^{-16} (\hbar \omega - \varepsilon_t)^{3/2} / (\hbar \omega)^{-3}$ [см^2] — сечение однофотонной обтирки иона H^- вблизи порога [91–93]. При $\nu_e \nu_r \approx 10^2$, $\sigma_{-1b} \approx 6 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$, $l_b \approx 25 \text{ см}$ (расстояние между магнитом *M1* и анализатором *MA*), $\Delta l \approx 10^{-2} \text{ см}$ и $P_b \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ торр}$ получаем $P_{\gamma|L} \geq 130 \text{ Вт}$. Это соответствует необходимой плотности мощности излучения лазера $I_{\gamma|L} \geq 20 \text{ кВт/см}^2$ при измерении профиля, поперечного эмиттанса и спектра ионов по энергии с помощью ленточных фотонных мишеней длиной $l_\gamma \approx 6 \text{ мм}$.

Для фазового анализа и измерения продольного эмиттанса при поперечном сечении зондирующей мишени $0,1 \times 0,5 \text{ мм}$, соответственно, получаем $I_{\gamma|L} \geq 260 \text{ кВт/см}^2$. Такое увеличение плотности мощности излучения используемого лазера может быть достигнуто с помощью телескопа, уменьшающего в 3–4 раза поперечный размер пучка фотонов. При этом увеличивается

угловая расходимость излучения, однако она остается в несколько раз меньше величины $\Delta\theta_i$.

Для выбранного угла η с помощью выражений (5.3) и (5.4) нетрудно оценить значения максимальной и критической плотности мощности лазерного излучения в системе покоя ионов $I_{\gamma|\text{max}} \approx 10^{10} \text{ Вт/см}^2$, $I_{\gamma|\text{cr}} \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ Вт/см}^2$. Следует отметить что при доминирующей роли двухфотонной обдики ионов на диагностической мишени ($I_{\gamma} \geq I_{\gamma|\text{cr}}$) точность измерения параметров пучка ухудшится до значений $\Delta X'_{|\text{cr}} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ рад и $\Delta E_e/E_{e|\text{cr}} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ отн.ед.

Характерное время жизни ионов H^- в собственной системе отсчета при их движении через магнитное поле \vec{H} можно оценить с помощью выражения [104,105]:

$$\tau(F)[c] \approx (8 \cdot 10^{-14}/F) \exp(42, 6/F), \quad (6.3)$$

где $F[\text{МВ/см}] = 0,3\gamma |[\vec{\beta} \times \vec{H}]|$, а H выражено в кЭ. Нетрудно показать, что поля элементов $M1$, $M2$ и MA данного устройства весьма малы, чтобы вызвать лоренцевскую диссоциацию пучка. Тем не менее через индуцируемое движением электрическое поле F они влияют на процесс фотообдики ионов H^- высокой энергии [106]. В частности, это влияние проявляется в изменении околопорогового поведения сечения однофотонной обдики $\sigma^{(1)}(\omega, F)$, его величины при $\hbar\omega = \varepsilon_t$ и появлении осцилляций в функциональной зависимости от энергии фотонов, превышающей порог [106–109]. Величина данных эффектов максимальна при поляризации излучения, параллельной электрическому полю (π -поляризация), и может быть оценена с помощью выражения [108]

$$\sigma^{(1)}(\omega, F) \approx \begin{cases} 0,16 \cdot 10^{-17} \frac{F}{(\hbar\omega)^3} \exp[-68, 3(\varepsilon_t - \hbar\omega)^{3/2}/F] \\ \text{при } \hbar\omega < \varepsilon_t, \\ \frac{21,5 \cdot 10^{-17}}{(\hbar\omega)^3} \{(\hbar\omega - \varepsilon_t)^{3/2} + 0,015F \cos[68, 3(\hbar\omega - \varepsilon_t)^{3/2}/F]\} \\ \text{при } \hbar\omega > \varepsilon_t, \end{cases} \quad (6.4)$$

где $\hbar\omega$ и ε_t выражены в электрон-вольтах, а F — в МВ/см. Плавный переход между приведенными зависимостями и более точное поведение сечения $\sigma^{(1)}(\omega, F)$ в области $\hbar\omega \sim \varepsilon_t$ описывается табулированной функцией, которая дает промежуточный результат между значениями (6.4) при $\hbar\omega = \varepsilon_t \pm 0$. Формируемая диагностическая мишень является π -поляризованной в варианте измерений по схеме рис. 19,*a* и имеет соответствующую проекцию вектора поляризации на поле \vec{F} в режиме работы устройства, представленном на рис. 19,*b*. В соответствии с (6.4) для выбранных η и H сечение увеличивается на $\approx 20\%$. Если в качестве нового порога фотообдики ионов H^- в поле

F принять энергию фотонов $\hbar\omega_F = \varepsilon_t - \Delta\varepsilon_{t|F}$, при которой $\sigma^{(1)}(\omega_F, F) \approx 0,1\sigma^{(1)}(\varepsilon_t/\hbar, F)$, то получим значение $\Delta\varepsilon_{t|F}$ [эВ] $\approx 0,1(F$ [МВ/см]) $^{3/2}$. С учетом значений $W_\theta \approx 1/8$, $W_e \approx 1/5$ (см. разд. 2) и фотообдики пучка в краевом поле анализатора (см. рис. 19) уменьшение порога на эту величину приведет к ухудшению точности измерений на $\leq 25\%$. При необходимости отмеченные изменения можно устраниить соответствующей коррекцией угла η . В настоящее время отсутствует информация о влиянии внешних электрического и магнитного полей на угловые и энергетические распределения электронов при однофотонной обдики ионов H^- в лабораторной системе отсчета. Это связано со сложностью описания этого процесса в системе покоя иона при различной пространственной ориентации полей и вектора поляризации фотонов. Однако в нашем случае направление поля \vec{F} относительно плоскости взаимодействия ионов и фотонов совпадает с условием оптимальной поляризации последних. В связи с этим можно рассчитывать, что влияние краевого поля анализатора не ухудшит распределения электронов $f(XS)$ и $\varphi^{(1)}(P_x/P_0)$ (см. разд. 2), определяющих предельные возможности диагностики.

Таким образом, формируемая в устройстве фотонная мишень с $I_\gamma/I_{\gamma|L} = (\omega/\omega_o)^2 \approx 0,44$ позволяет надежно выделять информационные электроны от однофотонной обдики ионов H^- из фона. При этом также обеспечивается достаточно высокая точность передачи информации о пучке электронам. Относительные потери части ионов, пролетающих через область мишени при измерениях, оцениваются величиной $\approx 2 \cdot 10^{-6}$.

Для прецизионной работы устройства необходимо обеспечить контроль пространственного положения ленточных фотонных мишеней относительно осей X и Y с точностями $\delta_x \approx \delta_y \leq 0,1$ мм, $\alpha_x \approx \alpha_y \leq 3$ мрад, а также хорошую экранировку фоновых магнитных полей (H_b) и высокую точность (δH) установки необходимого магнитного поля в анализаторе $H_b \approx \delta H \leq 3 \cdot 10^{-4}H$. Контроль магнитного поля с требуемой точностью может быть осуществлен, например, с помощью датчика на аморфных МИ-элементах типа генератора Колпитса [110].

Оперативность диагностики зависит от измеряемого параметра пучка и мощности сформированных фотонных мишеней. В частности, невозмущающее измерение спектра ионов по энергии (импульсу) или распределения в $(X'X)$ -фазовой плоскости может быть реализовано за время импульса пучка ($\tau_i \approx 100$ мкс, $I_i \approx 50$ мА) при $I_{\gamma|L} \approx 20$ кВт/см 2 . Большой импульсный поток электронов фотообдики ($\sim 10^9 \div 10^{10}$ е/с с одной ленточной фотонной мишени) позволяет считывать данную информацию за время ≤ 10 мкс. Включение детектора на данное время при последовательных измерениях, например, с дискретностью сдвига во времени ≈ 10 мкс относительно начала импульса пучка, дает возможность прослеживать изменение данных па-

раметров вдоль импульса за время порядка минуты (10 импульсов мишени). В то же время информация о распределении ионов в $(\Delta P_i/P_i, \Psi)$ -фазовом пространстве или продольном эмиттансе пучка не столь оперативна и при $I_{\gamma|L} \approx 300$ кВт/см² может быть получена за время ~ 8 мин (~ 100 импульсов лазера). При этом потоком фоновых электронов можно пренебречь только при включении детектора на время существования фотонной мишени. В условиях ожидаемого радиационного фона это можно реализовать, например, при использовании предложенного и детально описанного в работе [111] управляемого радиационно стойкого детектора пространственного распределения импульсного потока релятивистских электронов. Значительное уменьшение времени измерения распределений ионов H⁻ в продольном фазовом пространстве рассмотренного выше пучка связано с поиском и разработкой других активных элементов лазера, допускающих его работу с повышенной частотой и генерацией излучения в нужном диапазоне длин волн, мощностей, длительности импульсов, а также с требуемой для формирования мишени угловой расходимостью.

7. ВЛИЯНИЕ ТОКА ПУЧКА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ НА ЕГО ДИАГНОСТИКУ ПО ЭЛЕКТРОНАМ ОБДИРКИ

Как отмечалось выше, достаточно высокая точность диагностики пучка отрицательных ионов по электронам обтирки достигается при его зондировании лазерным излучением оптимальной поляризации. Однако передаваемая электронам информация может искажаться в диагностическом устройстве на этапе вывода из пучка. Величина и характер искажения зависят от типа устройства и обусловлены двумя причинами. Первая связана с несовершенством устройства и может быть учтена при его калибровке тестовым электронным пучком. Другая обусловлена влиянием электромагнитного поля пучка ионов на измеряемые анализатором характеристики потока электронов. В данном разделе на основе работы [112] проведен анализ этого эффекта для 180° магнитного анализатора с однородным полем различной величины. При формировании зондирующей мишени на границе поля данный анализатор обеспечивает необходимые измерения и минимальное время нахождения носителей информации в области эффективного поля пучка (см. разд. 6).

Движение электрона в электромагнитном (\vec{F}_t, \vec{H}_t) -поле описывается дифференциальным уравнением для импульса во времени t :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{F}_t + \frac{e}{C}[\vec{V} \times \vec{H}_t], \quad (7.1)$$

где e , \vec{P} и \vec{V} — заряд, импульс и скорость электрона в единицах СГСЭ. Последние величины связаны друг с другом через его массу известными соот-

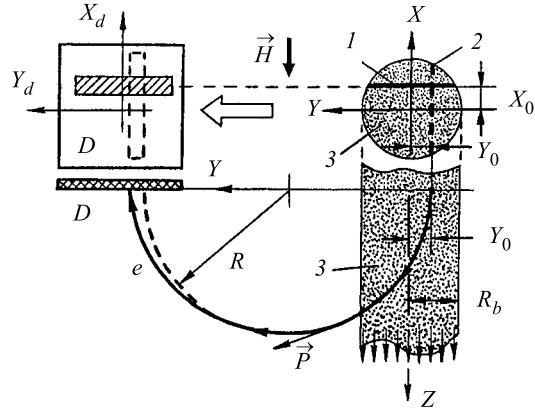


Рис. 20. Схема измерений параметров пучка отрицательных ионов по электронам обтирки

ношениями: $\vec{P} = \gamma m_e \vec{V}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-0.5}$ и $\beta = |\vec{V}| / C$. Для анализируемой ситуации величины β и γ совпадают с релятивистскими параметрами пучка. Вывод и анализ электронов для двух вариантов положения мишени (1 и 2) схематически представлены на рис. 20. В модели бесконечного равномерно заряженного цилиндра с радиусом R_b на участке диагностики пучка (3) с током I_i существуют только радиальная F_{br} и аксиальная $H_{b\theta}$ -компоненты его электрического и магнитного полей:

$$F_{br}(r) = \frac{2I_i}{\beta CR_b^2} \begin{cases} r, & \text{при } r \leq R_b \\ R_b^2/r, & \text{при } r > R_b, \end{cases}$$

$$H_{b\theta}(r) = \beta F_{br}(r), \quad (7.2)$$

где r — расстояние от оси пучка. Будем полагать, что магнитное поле \vec{H} анализатора направлено параллельно оси X . Тогда для представляющих интерес проекций импульса P_x и P_y с первоначальными координатами X_0 и Y_0 получаются следующие уравнения:

$$\frac{dP_x}{dY} = FO(Y)X_0; \quad \frac{dP_y}{dY} = FO(Y)Y - \frac{eH(R - Y + Y_0)}{C\sqrt{2R(Y - Y_0) - (Y - Y_0)^2}}; \quad (7.3)$$

$$FO(Y) = \frac{2eRT_i}{C^2\sqrt{2R(Y - Y_0) - (Y - Y_0)^2}} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{R - Y + Y_0}{R} \right) \times$$

$$\times \begin{cases} 1, & \text{при } |Y| \leq \sqrt{1 - X_0^2} \\ (X_0^2 + Y^2)^{-1}, & \text{при } |Y| > \sqrt{1 - X_0^2}, \end{cases}$$

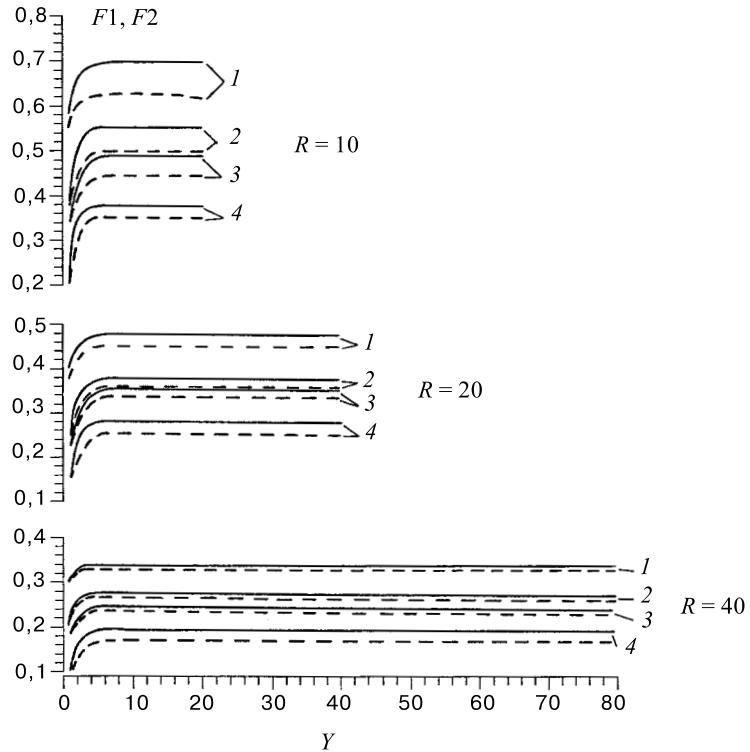


Рис. 21. Функции $F1(Y)$ (сплошные линии) и $F2(Y)$ (пунктирные линии) для различных значений R , X_0 и Y_0 : 1 — $X_0 = \pm 0,7$, $Y_0 = -0,7$; 2 — $X_0 = \pm 0,25$, $Y_0 = 0,25$; 3 — $X_0 = \pm 0,7$, $Y_0 = 0,25$; 4 — $X_0 = \pm 0,7$, $Y_0 = 0,7$

где учтена связь между t , Y и β на не возмущенной пучком полукруговой траектории электронов радиусом $R = \gamma\beta m_e C/eHR_b$. При этом величины R , Y , X_0 и Y_0 выражены в относительных единицах к радиусу пучка. Численные решения этих уравнений для составляющих импульса электрона, обусловленных действием тока пучка, имеют вид

$$P_x(Y) = \frac{2eI_i}{C^2} X_0 R [F1(Y)/\beta^2 - F2(Y)] \quad (7.4)$$

и

$$P_{yb}(Y) = \frac{2eI_i}{C^2} R [F3(Y)/\beta^2 - F4(Y)]. \quad (7.5)$$

Функции $F1(Y)$, $F2(Y)$, $F3(Y)$ и $F4(Y)$ для $Y \geq 1$ и некоторых значений R , X_0 и Y_0 представлены на рис. 21, 22.

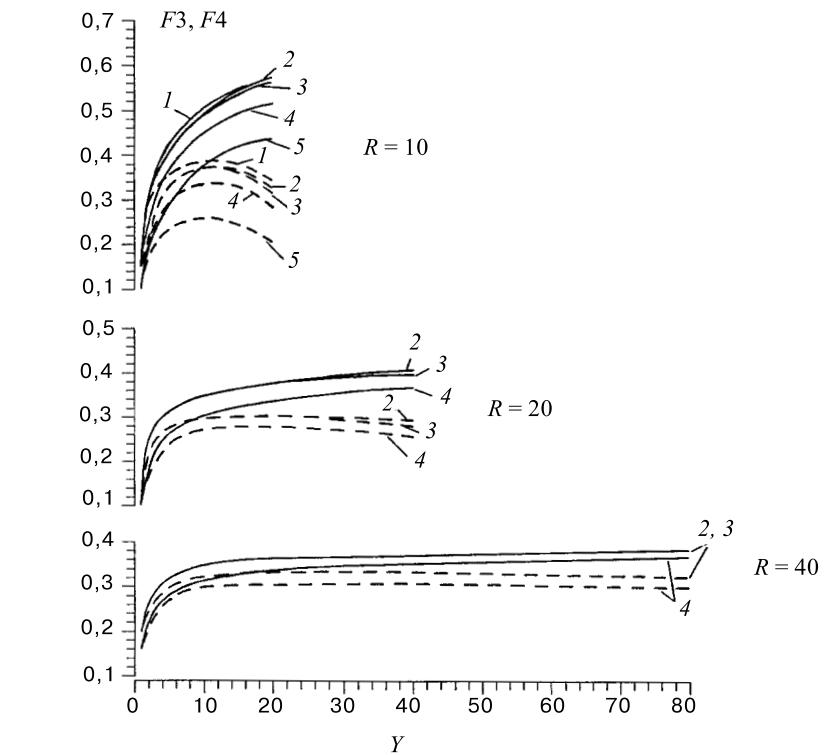


Рис. 22. Функции $F3(Y)$ (сплошные линии) и $F4(Y)$ (пунктирные линии) для различных значений R , X_0 и Y_0 : 1 — $X_0 = \pm 0,7$, $Y_0 = 0,25$; 2 — $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$; 3 — $X_0 = \pm 0,25$, $Y_0 = 0$; 4 — $X_0 = \pm 0,7$, $Y_0 = 0$; 5 — $X_0 = \pm 0,7$, $Y_0 = -0,25$

В рассматриваемом устройстве характеристики пучка в $(X'X)$ -фазовой плоскости определяются по распределениям плотности электронов вдоль оси X_d на детекторе D при различных координатах X_0 зондирующей мишени I . В связи с тем, что зависимости $F1(Y)$ и $F2(Y)$ быстро выходят на асимптотику, влияние пучка на эти измерения характеризуется величиной $\delta X'_b = P_{x|_{\max}}(X_0, Y_0)/\gamma\beta m_e C$. Максимальное значение $P_{x|_{\max}}/I_i$ для данного R выбирается среди нормированных на ток асимптотик выражения (7.4) для различных координат электронов X_0 и Y_0 по сечению пучка. При допустимых возмущениях $\delta X'_b \approx 2 \cdot 10^{-4}$ рад и $\beta = 0,79$ ($E_{H^-} = 600$ МэВ) это соответствует максимальным токам $I_i \approx 400$ мА при $R = 40$ и $I_i \approx 550$ мА при $R = 20$. Для нерелятивистских ионов влияние пучка проявляется быстрее и вызывает возмущение $\delta X'_b \approx 10^{-3}$ рад уже при токах $I_i \approx 3$ мА для $\beta = 0,12$ ($E_{H^-} = 7$ МэВ) и $R = 10$.

Возмущение импульса P_{yb} из-за воздействия поля пучка проявляется в дополнительном смещении координаты Y_d электрона на детекторе при фиксированном положении мишени 2. В случае малого отклонения траектории электронов от полуокружности радиуса R это приводит к следующей погрешности в определении величины импульса:

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{eRI_i}{\beta\gamma m_e C^3} \int_{Y_0}^{2R+Y_0} \frac{F3(Y)/\beta^2 - F4(Y)}{\sqrt{2R(Y-Y_0)-(Y-Y_0)^2}} dY. \quad (7.6)$$

Численное интегрирование этого выражения, например, для мишени с $Y_0 = 0$ и различных X_0 приводит к максимальным токам пучка $I_i \approx 200$ мА ($R = 40$) и $I_i \approx 300$ мА ($R = 20$) при $\beta = 0,79$ и допустимом возмущении $\delta P/P \approx \approx 2 \cdot 10^{-4}$. В нерелятивистском случае с $\beta = 0,12$ получаем $I_i \approx 5$ мА при $R = 10$ и $\delta P/P \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

Следует отметить, что более детальное изучение рассмотренных эффектов для других радиальных зависимостей плотности тока ионов, с учетом начальных распределений электронов по углу и импульсу, требует сложного численного моделирования из-за различной симметрии полей пучка и анализатора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты и проведенный выше анализ показывают, что метод невозмущающей диагностики пучка отрицательных ионов по электронам от околопороговой однофотонной обтирки и рассмотренное многофункциональное устройство для его реализации могут быть с успехом использованы для достаточно интенсивных релятивистских пучков H^- , например, в существующих мезонных фабриках или в проектируемых ускорителях для электроядерного способа получения энергии и трансмутации радиоактивных отходов [7–10].

В заключение автор выражает глубокую благодарность всем коллегам из Сухумского физико-технического института, Института ядерных исследований РАН (Троицк) и Объединенного института ядерных исследований, которые своим творческим трудом и поддержкой способствовали получению приведенных результатов на различных этапах разработки описанного метода диагностики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Димов Г.И., Дудников В.Г. — Физика плазмы, 1978, т.4, с.692.
2. Post D.E. — In: Atomic and Molecular Physics of Controlled Thermonuclear Fusion (Eds. C.J. Joachain and D.E. Post). Plenum, New York, 1983.

3. **Bransden B.H.** — Nucl. Instr. and Meth., 1987, v.B24/25, p.377.
4. **Дьячков Б.А.** — В сб.: Труды 10-го Совещания по электростатическим ускорителям (Обнинск, 26–28 ноября 1991), Обнинск, 1992, с.162.
5. **Isler R.C.** — Plasma Phys. and Contr. Fusion, 1994, v.36, p.171.
6. **Burgerjon J.J.** — Nucl. Instr. and Meth., 1985, v.B10/11, p.951.
7. **Martin S., Planner C.W.** — In: Proc. of the Third Europ. Part. Accel. Conf. (Berlin, 24–28 March 1992), Berlin, 1992, v.1, p.435.
8. **Jason A.J., Woods R.** — In: Proc. of the Fourth Europ. Part. Accel. Conf. (London, 27 June - 1 July 1994), London, 1994, v.3, p.2684.
9. **Mizumoto M., Kusano J. et al.** — In: Proc. of the 18th Intern. Linear Accel. Conf. (Geneva, 26-30 August 1996), Geneva, 1996, v.2, p.592.
10. **Wangler T.P., Billen J. et al.** — In: Proc. of the 18th Intern. Linear Accel. Conf. (Geneva, 26-30 August 1996), Geneva, 1996, v.2, p.749.
11. **Ishikava J., Tsuji H. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1995, v.B96, p.7.
12. **Gullickson R.L.** — Nucl. Instr. and Meth., 1987, v.B24/25, p.730.
13. **Будтов А.А. и др.** — В кн.: Труды 12-го Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Москва, 3–5 октября 1990), Дубна, ОИЯИ, 1992, т.2, с.110.
14. **Mc Kenzie-Wilson R.B.** — Nucl. Instr. and Meth., 1991, v.B56/57, p.987.
15. **Горшков О.А., Коротеев А.С.** — В кн.: Двигатели и энергетические установки (научно-технический сборник), НИИТП, 1993, с.93.
16. **Ворогушин М.Ф., Гавриш Ю.Н., Сидоров А.В.** — В кн.: Труды 14-го Совещания по ускорителям заряженных частиц (Протвино, 25–27 октября 1994), Протвино, 1995, т.2, с.269.
17. **Clarke-Gayther M.A., Borden A.I., Allen G.M.** — In: Proc. of the Fourth Europ. Part. Accel. Conf. (London, 27 June - 1 July 1994), London, 1994, v.2, p.1634.
18. **Москалев В.А., Сергеев Г.И., Шестаков В.Г.** — Измерение параметров пучков заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1980.
19. **Cottingame W.B., Boicourt G.P. et al.** — IEEE Trans. on Nucl. Science, 1985, v.NS-32, p.1871.
20. **Connolly R.C., Johnson K.F., Sandoval D.P., Yuan V.W.** — Nucl. Instr. and Meth., 1992, v.A312, p.415.
21. **Stephen L., Kramer D., Read Moffett** — IEEE Trans. on Nucl. Science, 1981, v.NS-28, p.2174.
22. **Connolly R.C., Sandoval D.P.** — In: IEEE Part. Accel. Conf. (San Francisco, 6–9 May 1991), v.2, p.1237.
23. **Yuan V.W., Connolly R.C. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1993, v.A329, p.381.
24. **Ковалов Р.Л., Маргарян Ю.Л., Папян Г.А., Чубарян Г.Г.** — ВАНТ, сер: Общая и ядерная физика, 1988, вып.3(43), с.43.
25. **Feschenko A.V., Ostroumov P.N.** — In: Proc. of the 1986 Linac. Conf. (Stanford, 2–6 June), p.323.
26. **Mikhailov V.G., Iudin L.I. et al.** — In: Proc. of the Fourth Europ. Part. Accel. Conf. (London, 27 June - 1 July 1994), London, 1994, v.2, p.1743.

27. **Tron A.M.** — In: Proc. of the 2nd Europ. Workshop on Beam Diagnostics and Instr. for Part. Accel. (Travemunde, 28-31 May 1995), p.60.
28. **Birukov I.N., Mirzajan A.N., Ostroumov P.N., Petronevich S.A.** — In: Proc. of the Third Europ. Part. Accel. Conf., Berlin, 1992, v.2, p.1109.
29. **Васильев П.Б., Тронь А.М.** — В кн.: Линейные ускорители и физика пучков заряженных частиц. М.: МИФИ, 1991, с.63.
30. **Duncan M.M., Menendez M.G.** — Phys. Rev., 1977, v.A16, p.1799.
31. **Geballe R., Risley J.S.** — In: Electron. and Atom. Collis. Abstr. Pap. 8-ICPEAC, Beograd, 1973, v.2, p.834.
32. **Duncan M.M., Menendez M.G.** — Phys. Rev., 1979, v.A19, p.49.
33. **Menendez M.G., Duncan M.M.** — Phys. Rev., 1979, v.A20, p.2327.
34. **Duncan M.M., Menendez M.G.** — Phys. Rev., 1981, v.A23, p.1085.
35. **Macek J., Menendez M.G., Duncan M.M.** — Phys. Rev., 1984, v.A29, p.516.
36. **Kaminsky A.K., Meshcherov R.A., Popova M.I., Sazhin V.D.** — Nucl. Instr. and Meth., 1981, v.180, p.231.
37. **Menendez M.G., Duncan M.M.** — Phys. Rev. Lett., 1978, v.40, p.1642.
38. **Duncan M.M., Menendez M.G., Hopkins J.L.** — Phys. Rev., 1984, v.A30, p.655.
39. **Esaulov V.A., Greuard J.P. et al.** — J. Phys., 1984, v.B17, p.1855.
40. **Crawford O.H.** — Phys. Lett., 1984, v.A104, p.25.
41. **Alton C.D., Compton R.N., Regg D.J.** — Phys. Rev., 1985, v.A31, p.2129.
42. **Аваков Г.В., Блохинцев Л.Д., Крекотень С.П., Савин Д.А.** — В кн.: Тез. докл. 10-й Всесоюзной конф. по физике электр. и атомн. столкновений, Ужгород, 1988, т.2, с.114.
43. **Тронь А.М.** — В кн.: Труды 6-го Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 11–13 октября 1978), Дубна, ОИЯИ, 1979, т.2, с.105.
44. **Тронь А.М., Фещенко А.В.** — В кн.: Труды 7-го Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 14–16 октября 1980), Дубна, ОИЯИ, 1981, т.2, с.125.
45. **McCrory E.S., Schmidt C.W., Feschenko A.V.** — In: Proc. of the LINAC-92 (Ottawa, 24–28 August 1992), p.662.
46. **Артемов А.С., Геворков А.К.** — Отчет СФТИ, Сухуми, 1984.
47. **Артемов А.С., Геворков А.К.** — Авт. свид. №.263428 (CCCP, з.№.3143559/3143560), МКИ H05H7/00, 1986.
48. **Artiomov A.S., Vaganov N.G. et al.** — In: IEEE Part. Accel. Conf. (San Francisco, California, 6–9 May 1991), 1991, v.3, p.1573. In: Production and Neutralization of Negative Ions and Beams: Sixth Intern. Symposium (Upton, New York, 1992), 1992, p.592.
49. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Механика. М.: Наука, ГФМЛ, 1965.
50. **Dixit S.N., Lambropoulos P.** — Phys. Rev., 1983, v.A27, p.861.
51. **Cooper J., Zare R.N.** — J. Chem. Phys., 1968, v.48, p.942.
52. **Walker T.E.H., Waber J.T.** — J. Phys., 1973, v.B6, p.1165.
53. **Собельман И.И.** — Введение в теорию атомных спектров. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1963.
54. **Амусья М.Я.** — Атомный фотоэффект. М.: Наука, ГФМЛ, 1987.
55. **Manson S.T., Starace A.F.** — Rev. Mod. Phys., 1982, v.54, p.389.

56. Moores D.L., Norcross D.W. — Phys. Rev., 1974, v.A10, p.1646.
57. Kasdan A., Lineberger W.C. — Phys. Rev., 1974, v.A10, p.1658.
58. Gribakin G.F., Gribakina A.A., Gul'tsev B.V., Ivanov V.K. — J. Phys., 1992, v.B25, p.1757.
59. Saha H.P., Compton R.N. — Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.1510.
60. Hanstorp D., Bengtsson C., Larson D.J. — Phys. Rev., 1989, v.A40, p.670.
61. Артемов А.С., Авидзба А.А. — Препринт СФТИ-90-17, М.: ЦНИИатоминформ, 1990.
62. Артемов А.С., Авидзба А.А., Вартазарян А.С. — Препринт ОИЯИ, Р9-96-146, Дубна, 1996.
63. Анциферов В.В., Батурина В.А., Дремин Г.И. — ЖТФ, 1993, т.63, с.21.
64. Балдин А.М., Гольданский В.И., Максименко В.М., Розенталь И.Л. — Кинематика ядерных реакций. М.: Атомиздат, 1968.
65. Артемов А.С., Авидзба А.А. — Сообщение ОИЯИ, Р9-93-431, Дубна, 1993.
66. Radojevic' V., Kelly H.P., Johnson W.R. — Phys. Rev., 1987, v.A35, p.2117.
67. Bryant H.C., Donahue J.B. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1991, v.B56/57, p.205.
68. Казаков А.Е., Федоров М.В. — ЖЭТФ, 1982, т.83, с.2035.
69. Andrijushin A.I., Fedorov M.V., Kazakov A.E. — J. Phys., 1984, v.B17, p.3469.
70. Haan S.L., Cooper J. — J. Phys., 1984, v.B17, p.3481.
71. Войткив А.Б., Паздзерский В.А. — Оптика и спектроскопия, 1986, т.61, с.1184.
72. Kuklinski J.R., Lewenstein M. — J. Phys., 1987, v.B20, p.1387.
73. Киян И.Ю., Крайнов В.П. — ЖЭТФ, 1989, т.96, с.1606.
74. Головинский П.А., Киян И.Ю. — УФН, 1990, т.160, с.97.
75. Головинский П.А., Киян И.Ю. — Оптика и спектроскопия, 1985, т.59, с.988.
76. Bebb H.B., Gold A. — Phys. Rev., 1966, v.143, p.1.
77. Артемов А.С., Авидзба А.А., Вартазарян А.С. — В кн.: Труды 13-го совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 13-15 октября 1992), Дубна, ОИЯИ, Д9-92-455, 1993, т.2, с.256.
78. Artiomov A.S., Avidzba A.A., Vartazarian A.S. — Nucl. Instr. and Meth., 1993, v.A328, p.408.
79. Демков Ю.Н., Островский В.Н. — Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Из-во ЛГУ, 1975.
80. Hall J.L., Siegel M.W. — J. Chem. Phys., 1968, v.48, p.943.
81. Месси Г. — Отрицательные ионы. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
82. Adelman S.A. — J. Phys., 1973, v.B6, p.1986.
83. Crance M., Aymar M. — J. Phys., 1985, v.B18, p.3529.
84. Geltman S. — Phys. Rev., 1991, v.A43, p.4930.
85. van der Hart H.W. — Phys. Rev., 1994, v.A50, p.2508.
86. Манаков Н.Л., Преображенский М.А., Рапопорт Л.П. — ЖЭТФ, 1978, т.75, с.1243.
87. Reiss H.R. — Phys. Rev., 1980, v.A22, p.1786.
88. Головинский П.А., Зон Б.А. — Изв. АН СССР, сер: физическая, 1981, т.45, с.2305.
89. Becker W., Long S., McIver J.K. — Phys. Rev., 1990, v.A42, p.4416.

-
90. **Wigner E.P.** — Phys. Rev., 1948, v.73, p.1002.
 91. **Armstrong B.H.** — Phys. Rev., 1963, v.131, p.1132.
 92. **Bryant N.C., Butterfield K.B. et al.** — In.: Proc. of the 7th Intern. Conf. on Atom. Phys. (Cambridge, 4–8 August 1980), New York, London, 1981, p.29.
 93. **Lykke K.R., Murray K.K., Lineberger W.C.** — Phys. Rev., 1991, v.A43, p.6104.
 94. **Geltman S.** — Phys. Rev., 1990, v.A42, p.6958.
 95. **Laughlin C., Shin-I Chu** — Phys. Rev., 1993, v.A48, p.4654.
 96. **Кучин М.Ю., Шейнерман С.А.** — УФН, 1989, т.158, с.353.
 97. **Blondel C., Delsart C.** — Laser Phys., 1993, v.3, p.699.
 98. **Nicolaides C.A., Mercouris Th., Picingos N.A.** — J. Phys., 1990, v.B23, p.L669.
 99. **Artiomov A.S.** — Preprint JINR, E9-96-200, Dubna, 1996. In: Proc. of the 5th Europ. Part. Accel. Conf. (Sitges/Barcelona, 10-14 June 1996), 1996, v.2, p.1654.
 100. **Артемов А.С., Калягин В.А.** — Диагностическое устройство (техническая документация 1.248.00.000), СФТИ, Сухуми, 1991;
Артемов А.С., Анциферов В.В. — Препринт ОИЯИ, 39-99-182, Дубна, 1999.
 101. **Злуницын Э.С., Зыков А.И., Крамской Г.Д., Кушнир В.А.** — ВАНТ, сер. Техн. физ. экспер., 1986, с.37.
 102. **Анциферов В.В., Артемов А.С. и др.** — Лазер Nd:ИАГ (техническое описание и инструкция по эксплуатации), СФТИ, Сухуми, 1991.
 103. **Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И.** — Термооптика твердотельных лазеров. Л.: Машиностроение, 1986.
 104. **Stinson G.M., Olsen W.C. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1969, v.74, p.333.
 105. **Друкарев Г.Ф., Монозон Б.С.** — ЖЭТФ, 1971, т.61, с.956.
 106. **Fabrikant I.I.** — Phys. Rev., 1991, v.A43, p.258.
 107. **Stewart J.E., Bryant H.C. et al.** — Phys. Rev., 1988, v.A38, p.5628.
 108. **Du M.L., Delos J.B.** — Phys. Rev., 1988, v.A38, p.5609.
 109. **Bo Gao, Starace A.F.** — Phys. Rev., 1990, v.A42, p.5580.
 110. **Uchiyama T., Mohri K.** — J. Magn. Soc. Jap., 1995, v.19, p.469.
 111. **Артемов А.С.** — Сообщение ОИЯИ, Р13-97-247, Дубна, 1997.
 112. **Артемов А.С.** — Сообщение ОИЯИ, Р9-97-94, Дубна, 1997.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

Структура пиона в модели инстантонной жидкости. Аникин И.В., Дорохов А.Е., Томио Л. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.5, с.1023.

Дан обзор ковариантной кварковой модели пиона, основанной на эффективном нелокальном кварк-адронном лагранжиане с нелокальностью, индуцированной инстантонными флуктуациями вакуума КХД. Явно калибровочно-инвариантный формализм позволяет построить сохраняющиеся векторный и аксиальный токи и продемонстрировать их согласие с различными тождествами Уорда—Такахаши и низкоэнергетическими теоремами. В результате спонтанного нарушения киральной симметрии возникают зависящие от импульса динамическая масса кварка и вершина кварк-пионного взаимодействия. Параметры инстантного вакуума, средний размер инстантона и эффективная масса кварка выражены через величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов наименшей размерности и низкоэнергетических наблюдаемых пиона.

Подробно рассмотрен переходный формфактор пиона для процессов $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ и $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$. Кинематическая зависимость переходного формфактора при высоких импульсах передачи позволяет получить соотношение между амплитудой распределения кварков в пионе на световом конусе и кварк-пионной вершинной функцией. Его динамическая зависимость указывает на то, что переходный формфактор $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ при высоких импульсах передачи очень чувствителен к размеру нелокальности непертурбативных флуктуаций в КХД-вакууме. В рамках модели в лидирующем твисте вычислены амплитуда распределения и функция распределения валентных кварков в пионе в низкой точке нормировки порядка обратного среднего размера инстантона p_c . Результаты КХД проэволюционированы к более высоким импульсам передачи и находятся в разумном согласии с доступными экспериментальными данными о структуре пиона.

Табл.2. Ил.10. Библиогр.: 87.

УДК 539.1.01

Универсальные масштабные соотношения для констант связи мезонов, содержащих тяжелые кварки. Киселев В.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.5, с.1080.

Обсуждается формулировка и область применимости квазилокальных правил сумм для S -волновых уровней тяжелого кваркония, которые позволяют использовать регулярность спектра масс и получать масштабные соотношения для лептонных констант связи, находящиеся в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными для векторных состояний систем чармония и боттомония. Проведено обобщение предложенного метода на тяжелые мезоны с одним тяжелым кварком, для которых получено масштабное соотношение, согласующееся с эффективной теорией тяжелых кварков. Сделаны численные оценки параметров КХД в секторе тяжелых кварков: масс кварков, констант связи α_s , энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелого кварка в тяжелом мезоне. Рассмотрены правила сумм для мезонных токов, определяющих константу распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых

псевдоскалярных мезонов, где получено масштабное соотношение, связывающее константы распада кваркониев с различным кварковым составом. Проведено сравнение с экспериментальными данными, указывающими на хорошее согласие с теоретическими оценками. На основе выведенных масштабных соотношений сделаны предсказания свойств тяжелого кваркония ($\bar{b}c$).

Табл.7. Ил.2. Библиогр.: 75.

УДК 538.3; 621.38

Кооперативные электромагнитные эффекты. Юкалов В.И., Юкалова Е.П. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.5, с.1128.

Исследуются коллективные явления в сильнонеравновесных системах, взаимодействующих с электромагнитным полем. Такие системы описываются сложными нелинейными дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями. Цель данного обзора — показать, что многие нелинейные коллективные явления могут быть успешно описаны с помощью развитого недавно метода, названного методом разделения масштабов, основанного на идее выделения различных характерных пространственно-временных масштабов, существующих в неравновесных статистических системах. Этот подход обладает достаточной общностью и может быть применен к всевозможным неравновесным физическим проблемам, некоторые из которых рассматриваются в данном обзоре. Эти проблемы не только играют роль иллюстрации метода, но важны и сами по себе, представляя интересные физические эффекты, такие, как коллективное освобождение света, турбулентное фотонное нитеобразование, сверхизлучательная спиновая релаксация, отрицательный электрический ток и магнитный полуконфайнмент атомов.

Ил.30. Библиогр.: 230.

УДК 539.12.01

Многочастичная теория систем составных адронов. Крейн Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.5, с.1212.

Многочастичные системы составных адронов характеризуются процессами, которые включают в себя одновременно и адроны, и их составляющие. Кратко рассмотрены несколько методов, специально разработанных для изучения таких систем, и представлен новый метод, который основан на идее соответствия между физическим и идеальным пространствами Фока. Этот метод, известный как представление Фока—Тани, был разработан уже давно для решения задач атомной физики, а недавно был расширен и до адронной физики. Начиная с одночастичных адронных состояний в пространстве Фока, с помощью унитарного преобразования меняется представление так, что составляющие переписываются в терминах элементарных полевых операторов Бозе и Ферми в расширенном пространстве Фока. Когда это унитарное преобразование применяется к микроскопическому кварковому гамильтониану, получаются эффективные эрмитовы гамильтонианы с ясной физической интерпретацией. Обсуждается использование этого метода в связи с формализмом связанных кластеров для описания корреляций на малых расстояниях и эффектов кваркового деконфайнмента в ядерной материи. В качестве применения этого метода рассмотрены: вывод эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия из конституентной кварковой мо-

дели и получение уравнения состояния ядерной материи в приближении Хартри—Фока.

Ил.7. Библиогр.: 43.

УДК 539.17; 621.384.63

Фотоэлектронный метод невозмущающей диагностики пучка отрицательных ионов. Артемов А.С. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2000, том 31, вып.5, с.1242.

В обзоре подробно рассмотрен предложенный автором метод невозмущающей фотоэлектронной диагностики пучка (ФЭДП) отрицательных ионов. В данном методе необходимая информация о пучке выводится посредством электронов, рождающихся в результате околопороговой однофотонной обтирки пренебрежимо малой части ионов на зондирующем пучок фотонной мишени, которая формируется с помощью лазерного излучения. Для различных отрицательных ионов детально рассмотрены предельные возможности такой диагностики и проведен анализ влияния пространственного заряда пучка на ФЭДП. При этом основное внимание уделено широко используемым в ускорительной технике релятивистским ионам водорода H^- . Детально описано разработанное многофункциональное устройство для реализации ФЭДП на линейном участке канала транспортировки. Данное устройство может быть с успехом использовано для невозмущающей диагностики пучка релятивистских ионов H^- с током до нескольких сотен миллиампер, например, в проектируемых в различных научных центрах источниках нейтронов на основе линейных ускорителей.

Ил.22. Библиогр.: 112.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L.</i>	
Структура пиона в модели инстантонной жидкости	1023
<i>Kiselev V.B.</i>	
Универсальные масштабные соотношения	
для констант связи мезонов, содержащих тяжелые кварки	1080
<i>Yukalov V.I., Yukalova E.P.</i>	
Кооперативные электромагнитные эффекты	1128
<i>Krein G.</i>	
Многочастичная теория систем составных адронов	1212
<i>Artiomov A.S.</i>	
Фотоэлектронный метод невозмущающей диагностики	
пучка отрицательных ионов	1242

CONTENTS

<i>Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L.</i>	
Pion Structure within the Instanton Liquid Model	1023
<i>Kiselev V.V.</i>	
Universal Scaling Relations for Coupling Constants of Mesons,	
Containing Heavy Quarks.	1080
<i>Yukalov V.I., Yukalova E.P.</i>	
Cooperative Electromagnetic Effects.	1128
<i>Krein G.</i>	
Many-Body Theory for Systems of Composite Hadrons	1212
<i>Artiomov A.S.</i>	
Photoelectron Method of Nonperturbative Diagnostics	
of a Negative Ion Beam	1242

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с одной стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения \downarrow , верхние — знаком повышения \uparrow ; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя \exp , дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v , U и u , W и w , O и o , K и k , S и s , C и c , P и p , Z и z), прописные подчеркиваются двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s , C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e , l , O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а нуль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, векторы — синим, либо знаком \downarrow снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малопотребимых журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например, — «дзета», — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами: не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год

издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

- 1.Лезнов А.Н., Савельев М.В.— Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
- 2.Годен М.— Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
- 3.Turbiner A.V.— Comm. Math. Phys., 1988, v.118, p.467.
- 4.Ушверидзе А.Г.— ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
- 5.Endo I., Kasai S., Harada M. et al.— Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посыпает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.

Художественный редактор А.Л.Вульфсон.

Корректор Т.Е.Попеко.

Сдано в набор 7.04.2000. Подписано в печать 30.06.2000. Формат 60 90/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,4. Уч.-изд.л. 21,20.

Тираж 400. Заказ 52118. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
2000. Том 31. Вып.5. 1019—1298.

СТРУКТУРА ПИОНА В МОДЕЛИ ИНСТАНТОННОЙ ЖИДКОСТИ

И.В.Аникин, А.Е.Дорохов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Л.Томио

Instituto de Física Teórica, UNESP,
Rua Pamplona, 145, 01405-900, São Paulo, Brazil

1. ВВЕДЕНИЕ	1024
2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННАЯ МОДЕЛЬ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ	1026
Эффективное калибровочно-инвариантное четырехфер- мационное действие	1026
Эффективный пропагатор кварка	1029
Сохраняющиеся токи, индуцированные нелокальным дей- ствием	1032
Пропагатор пиона и кварк-пионная вершина	1036
Эффективный киральный лагранжиан. Бозенизация мо- дели	1037
Физические токи	1039
Величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операто- ров	1040
Низкоэнергетические наблюдаемые пиона	1043
3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАЛЕНТНЫХ КВАРКОВ В ПИОНЕ В ИНСТАНТОННОЙ МОДЕЛИ	1044
Амплитуда распределения夸арков в пионе	1044
Пионная амплитуда распределения на низ- коэнергетическом масштабе	1046
Результаты для пионной амплитуды рас- пределения	1047
Переходный формфактор пиона для процессов $\pi\gamma^*\gamma^*$	1050
Пионный переходный формфактор в эф- фективной кварк-пионной модели	1052

Переходный формфактор пиона $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$	
при умеренно высоких Q^2	1055
Дискуссия по пионному переходному	
формфактору $\pi\gamma^*\gamma^*$	1061
Партоные распределения валентных夸克ов в пионе	1062
Моменты функции распределения夸克ов	
в пионе в ковариантной нелокальной мо-	
дели	1063
Функция распределения夸克ов в пионе	
в нелокальной ковариантной модели и ее	
КХД-эволюция	1067
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1072
Приложение А	1073
Приложение Б	1074
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1076

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАСШТАБНЫЕ
СООТНОШЕНИЯ
ДЛЯ КОНСТАНТ СВЯЗИ МЕЗОНОВ,
СОДЕРЖАЩИХ ТЯЖЕЛЫЕ КВАРКИ

B.B.Киселев

Государственный научный центр Российской Федерации
Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл.

ВВЕДЕНИЕ	1081
1. ЛЕПТОННЫЕ КОНСТАНТЫ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОНИЕВ В ПРАВИЛАХ СУММ	1088
1.1. Правила сумм для тяжелого кваркония	1089
1.2. Непертурбативный вклад	1093
1.3. Нерелятивистское движение夸рков	1093
1.4. Интегральное представление адронного вклада и квазилокальные правила сумм	1094
1.5. Масштабные соотношения	1098
1.6. Численный анализ масштабных соотношений	1101
1.7. Константа f_{B_c}	1102
1.8. Оценка α_s	1104
2. ЛЕПТОННЫЕ КОНСТАНТЫ ТЯЖЕЛЫХ МЕЗОНОВ В СТАТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ	1110
2.1. Спектроскопия и размерные параметры HQET	1113
3. КОНСТАНТЫ РАСПАДА ТЯЖЕЛОГО ВЕКТОРНОГО КВАРКОНИЯ НА ПАРУ ТЯЖЕЛЫХ МЕЗОНОВ	1118
3.1. Правила сумм	1119
3.2. Масштабное соотношение и численные оценки	1121
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1124

УДК 538.3; 621.38

COOPERATIVE ELECTROMAGNETIC EFFECTS

V.I. Yukalov, E.P. Yukalova

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna
and University of Western Ontario, London, Canada

1. INTRODUCTION	1128
2. SCALE SEPARATION APPROACH	1130
2.1. Short-Range Stochastic Quantization	1130
2.2. Classification of Function Variations	1132
2.3. Multifrequency Averaging Technique	1133
2.4. Generalized Asymptotic Expansion	1134
2.5. Selection of Space Structures	1136
3. REAL SPACE REPRESENTATION	1137
4. STOCHASTIC MEAN-FIELD APPROXIMATION	1143
5. DYNAMICAL CHARACTERISTICS OF COHERENCE	1146
6. COLLECTIVE LIBERATION OF LIGHT	1149
7. AMPLIFICATION BY NONRESONANT FIELDS	1154
8. MÖSSBAUER MAGNETIC ANOMALY	1157
9. PROBLEM OF PATTERN SELECTION	1163
10. TURBULENT PHOTON FILAMENTATION	1168
11. SUPERRADIANT SPIN RELAXATION	1176
12. NEGATIVE ELECTRIC CURRENT	1189
13. MAGNETIC SEMICONFINEMENT OF ATOMS	1194
14. NUCLEAR MATTER LASING	1199
15. CONCLUSION	1203
ACKNOWLEDGEMENT	1205
REFERENCES	1205

УДК 539.12.01

MANY-BODY THEORY FOR SYSTEMS OF COMPOSITE HADRONS

*G. Krein**

Institut für Kernphysik, Universität Mainz, D-55099 Mainz, Germany

1. INTRODUCTION	1213
2. QCD, CHIRAL SYMMETRY AND THE QUARK MODEL	1215
3. THE RESONATING GROUP, GREEN'S FUNCTIONS AND QUARK-BORN-DIAGRAMS	1219
4. THE FOCK-TANI REPRESENTATION AND EFFECTIVE HADRON HAMILTONIANS	1226
5. SHORT-RANGE PART OF THE NN INTERACTION FROM QUARK-PION EXCHANGE	1232
6. FOCK-TANI REPRESENTATION FOR NUCLEAR MATTER	1236
7. CONCLUSIONS AND FUTURE PERSPECTIVES	1238
ACKNOWLEDGMENTS	1239
REFERENCES	1239

*Alexander von Humboldt Research Fellow
Permanent address: Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista,
Rua Pamplona, 145, 01405-900, São Paulo, SP - Brazil

УДК 539.17:621.384.63

ФОТОЭЛЕКТРОННЫЙ МЕТОД
НЕВОЗМУЩАЮЩЕЙ ДИАГНОСТИКИ ПУЧКА
ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

A.C.Артёмов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1242
1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ФОТОЭЛЕКТРОННОЙ ДИАГНОСТИКИ ПУЧКА (ФЭДП) ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ	1245
2. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ МИШЕНИ ПРИ ОДНОФОТО- ННОМ РОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ПАРАМЕТРАМИ УГЛО- ВОЙ АСИММЕТРИИ $\beta_o = 2, 0, -1$	1246
3. ОСОБЕННОСТИ ФОТООБДИРКИ В ИНТЕНСИВНОМ ПО- ТОКЕ ФОТОНОВ НА ПРИМЕРЕ ИОНОВ H^-	1263
4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДИАГНОСТИКИ ПУЧКА ИОНОВ H^- ПО ЭЛЕКТРОНАМ ИХ ОБДИРКИ НА РАЗЛИЧ- НЫХ МИШЕНЯХ	1275
5. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ ФОТОН- НОЙ МИШЕНИ	1276
6. МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО для НЕВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФЭДП ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ	1277
7. ВЛИЯНИЕ ТОКА ПУЧКА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ НА ЕГО ДИАГНОСТИКУ ПО ЭЛЕКТРОНАМ ОБДИРКИ	1284
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1288
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1288