

## ОБЛАСТЬ КОНСТАНТЫ КХД НИЖЕ 1 ГэВ В ПУАНКАРЕ-КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ

*В. В. Андреев*

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Белоруссия

В рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели на основе феноменологической параметризации бегущей константы сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  рассмотрено ее поведение в области  $Q < 1$  ГэВ для различных режимов. Анализ выполнен для псевдоскалярных и векторных мезонов исходя из требования соответствия модельных расчетов масс и лептонных констант распадов экспериментальным значениям. Проведенный анализ указывает на возможное поведение константы  $\alpha_s$  с  $\alpha_{\text{crit}} = \alpha_s(Q^2 = 0) \sim 0,667-0,821$  для режимов с «заморозкой» и для кривых с пиком  $\alpha_{\text{crit}} = 0,300-0,692$ .

In the framework of Poincare covariant quark model and with the help of the phenomenological parameterization of running coupling constant  $\alpha_s(Q^2)$  the behavior of running coupling constant is considered in region  $Q < 1$  GeV for different regimes. Analysis has been done for pseudoscalar and vector mesons in accordance with requirement that model lepton decay constant and masses calculation agree with experimental data. Possible behavior of  $\alpha_s$  with  $\alpha_{\text{crit}} = \alpha_s(Q^2 = 0) \sim 0.667-0.821$  for freezing regime and  $\alpha_{\text{crit}} = 0.300-0.692$  for curved line with peak, which follows from experimental values of lepton decay constant and masses, is discussed.

PACS: 12.39.Pn; 11.10.Hi; 11.10.St

### ВВЕДЕНИЕ

Бегущая константа сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  является одной из центральных характеристик квантовой хромодинамики. Эта константа в качестве параметра входит в модели адронов, основанных на КХД. Одним из важных вопросов при описании  $\alpha_s(Q^2)$  является ее поведение в непертурбативной области ( $Q < 1$  ГэВ).

В рамках КХД поведение  $\alpha_s(Q^2)$  получают из решения ренормгрупповых уравнений. Так, рассчитанное вплоть до трехпетлевых поправок в рамках  $\overline{\text{MS}}$ -схемы значение  $\alpha_s(Q^2)$  описывается соотношением

$$\alpha_{\text{QCD}}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln z_Q} \left[ 1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln z_Q]}{\ln z_Q} + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2 z_Q} \left( (\ln[\ln z_Q] - 1/2)^2 + \frac{\beta_2\beta_0}{8\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right], \quad (1)$$

где  $\beta$ -функции определяются уравнениями

$$z_Q = \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad \beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f, \quad \beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2,$$

а  $n_f$  — число кварков с массами, меньшими, чем значение величины  $Q$ . Наличие полюса Ландау в (1) приводит к резкому росту  $\alpha_{\text{QCD}}$  при малых  $Q^2$ .

Однако существуют многочисленные подходы [1–10] (и др.), в которых поведение константы взаимодействия в непертурбативной области существенно отличается от общепринятого поведения (1).

В рамках струнной модели (см. [11]) сделан вывод, что наиболее предпочтительным поведением является «заморозка» константы  $\alpha_s$ , приводящая к  $\alpha_{\text{crit}} = \alpha_s(Q^2 = 0) \leq 0,59–0,78$  [4, 12]. Для такого описания предложена пертурбативная фоновая модель поведения, в которой

$$\alpha_{\text{ВРТ}}^{(2)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 t_B} \left[ 1 - \frac{2\beta_1 \ln t_B}{\beta_0^2 t_B} \right], \quad t_B = \ln \left[ \frac{Q^2 + M_B^2}{\Lambda^2} \right]. \quad (2)$$

Элегантный метод устранения полюса Ландау представляет собой аналитическая пертурбативная теория [8] (см. также [9, 13–16]), где вместо константы (1), взятой в однопетлевом приближении, предложено использовать выражение

$$\alpha_{\text{ан}}^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left( \frac{1}{\ln z_Q} + \frac{1}{1 - z_Q} \right), \quad (3)$$

называемое в настоящее время аналитической константой Ширкова–Соловцова (см. [17]).

Аналитическая пертурбативная теория позволяет восстановить свойство аналитичности (и др. свойства), которое отсутствует в стандартном подходе. Важной особенностью константы (3) является то, что при  $Q^2 \rightarrow 0$  константа принимает конечное значение:  $\alpha_{\text{crit}} = \alpha_s(0) = 4\pi/\beta_0 \approx 1,4–1,5$ , — и не зависит от схем перенормировок в отличие от (1).

На основе аналитической теории возмущений в [10] (см. также [18]) построена глобальная дробно-аналитическая теория возмущений в КХД, где зависимость  $\alpha_s$  от  $Q^2$  отлична от (1).

В работе [3] для объяснения экспериментальных данных по адронным струям, инициированным тяжелыми кварками, предложен набор эффективных констант, названных  $G_p$ -моделями. Так, в случае учета двухпетлевых диаграмм константа сильного взаимодействия представляет собой выражение

$$\alpha_D^{(2)}(Q^2) = \left[ \frac{Q^{2p}}{Q^{2p} + C_p \Lambda^{2p}} \right] \frac{2\pi p}{\beta_0 L_p} \left[ 1 - \frac{2\beta_1 \ln L_p}{\beta_0^2 L_p} \right], \quad (4)$$

где

$$L_p = \frac{1}{p} \ln \left[ \frac{Q^{2p}}{\Lambda^2} + C_p \right], \quad C_p \geq 1.$$

В [7] предложена константа вида

$$\alpha_W^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left( \frac{1}{\ln z_Q} + \frac{1}{1 - z_Q} \frac{z_Q + b}{1 + b} \left( \frac{1 + c}{z_Q + c} \right)^p \right) \quad (5)$$

с параметрами  $b = 1/4$  и  $p = c = 4$  для объяснения КХД-поправок.

В работе [2] поведение эффективной константы сильного взаимодействия описывается феноменологическим выражением

$$\alpha_{GI}(Q^2) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \exp\left(-\frac{Q^2}{4\gamma_k^2}\right) \quad (6)$$

с коэффициентами  $\alpha_1 = 0,25$ ,  $\alpha_2 = 0,15$ ,  $\alpha_3 = 0,2$  и  $\gamma_1^2 = 1/4$ ,  $\gamma_2^2 = 5/2$ ,  $\gamma_3^2 = 250$ .

К отличному от поведения константы (1) в области малых  $Q^2$  приводит выражение

$$\alpha_N^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left( \frac{z_Q - 1}{z_Q \ln z_Q} \right), \quad (7)$$

полученное из требования правильных аналитических свойств константы взаимодействия (см., например, [9]).

Основным отличием от (1) всех вышеупомянутых констант КХД является более замедленный рост значения эффективных констант при малых  $Q^2$  (рис. 1). Из результатов расчетов следует, что основное отличие предлагаемых в работах [2–4, 7–9, 12, 15] сильных констант связи приходится на непертурбативную область с  $Q < 1$  ГэВ. В области с  $Q > 1$  ГэВ поведение всех этих констант практически совпадает с поведением стандартной константы КХД (1).

Таким образом, имеется достаточно большое многообразие моделей поведения бегущей константы  $\alpha_s$  с разной долей феноменологической и теоретической мотивации. Поэтому одна из основных задач в данном направлении состоит в разработке и совершенствовании методик, позволяющих определить поведение константы КХД (особенно в непертурбативной области).

Одна из методик изучения поведения  $\alpha_s$  при малых  $Q^2$  состоит в использовании моделей связанных состояний при описании различных характеристик адронов. Соответствие теоретических расчетов экспериментальным величинам должно приводить к определенному ограничению поведения бегущей константы, которая является одним из параметров модели.

В работах так называемой миланской группы [17, 19] (см. также [20]), в рамках предлагаемой ими модели мезонов [21, 22] проведено исследование возможного поведения

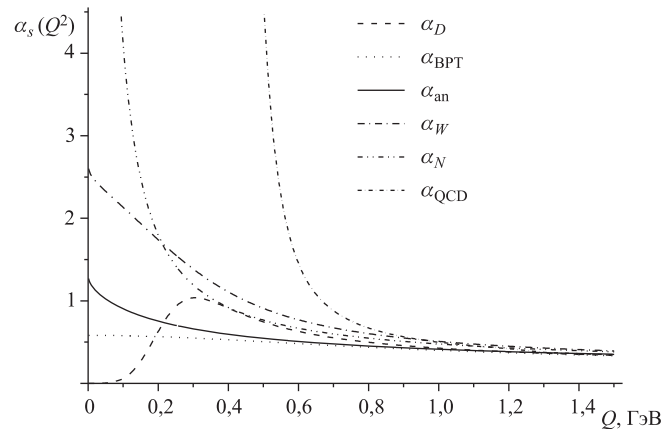


Рис. 1. Различные эффективные бегущие константы сильного взаимодействия (см. (1)–(5), (7))

$\alpha_s(Q^2)$  исходя из соответствия модельных расчетов масс мезонов экспериментальным данным.

В работах [3, 6, 7, 23, 24] для описания возможного поведения была использована другая экспериментальная информация. Так, например, в [23, 24] на основе правила сумм и данных Лаб было исследовано  $Q^2$ -поведение в области 0,4–1 ГэВ.

В данной работе предлагается методика изучения поведения  $\alpha_s(Q^2)$  в непертурбативной области в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на принципах релятивистской гамильтоновой динамики (РГД). Принципы РГД и ее возможные приложения можно найти в работах [25–27].

Основным требованием, ограничивающим возможное поведение  $\alpha_s(Q^2)$  в данной методике, является условие соответствия модельных расчетов экспериментальным значениям лептонных констант распадов и масс псевдоскалярных и векторных мезонов.

Требование совпадения поведения моделируемой константы с поведением стандартной константы (1) при  $Q > 1$  ГэВ является дополнительным условием. При этом поведение бегущей константы моделируется с помощью улучшенной феноменологической параметризации (6) для разных наборов  $\alpha_k, \gamma_k$  ( $k = 1, \dots, 7$ ).

## 1. ПУАНКАРЕ-КОВАРИАНТНАЯ КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОНОВ

В основе пуанкаре-ковариантных моделей связанных систем лежит РГД, разработанная в [28]. Основным требованием РГД является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. РГД также называют пуанкаре-инвариантной квантовой механикой (см., например, [27]).

В случае системы двух не взаимодействующих частиц с массами  $m_q$  и  $m_Q$  и соответственно с 4-импульсами  $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$  и  $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$  это требование в рамках мгновенной и точечной форм РГД приводит к радиальному уравнению для двухчастичного связанного состояния с волновой функцией  $\Phi_{L,S}^{J\mu}(k)$  и массой  $M$ :

$$\sum_{L',S'} \int_0^\infty V_{L,S;L',S'}^J(k, k') \Phi_{L',S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{L,S}^{J\mu}(k), \quad (8)$$

где  $M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k)$  — эффективная масса системы не взаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения  $\mathbf{k}$  ( $k = |\mathbf{k}|$ ):

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{M_0} \left( \frac{m_Q^2 - m_q^2 - M_0 [\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)]}{\omega_{M_0}(P) + M_0} \right).$$

Для описания конкретных связанных систем необходимо определить потенциал взаимодействия между частицами. При этом для описания одной и той же по составу связанной системы могут использоваться различные потенциалы. Такой выбор потенциалов автоматически определяет различные пуанкаре-ковариантные модели. В нашем случае используем межкварковый потенциал работы [2], который в случае псевдоскалярных и векторных мезонов представляет сумму кулоновской, запирающей и спин-спиновой

частей:

$$\begin{aligned}
 \hat{V}(r) &= \hat{V}_{\text{Coul}}(r) + \hat{V}_{\text{lin}}(r) + \hat{V}_{SS}(r), \\
 \hat{V}_{\text{Coul}}(r) &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} = -\frac{4}{3r} \sum_{k=1}^7 \alpha_k \operatorname{erf}(\tau_k r), \\
 \hat{V}_{\text{lin}}(r) &= \sigma r \left[ \frac{\exp(-b^2 r^2)}{\sqrt{\pi} b r} + \left(1 + \frac{1}{2b^2 r^2}\right) \operatorname{erf}(br) \right] + w_0, \\
 \hat{V}_{SS}(r) &= -\frac{32(\mathbf{S}_q \mathbf{S}_Q)}{9\sqrt{\pi} m_q m_Q} \sum_{k=1}^7 \alpha_k \tau_k^3 \exp(-\tau_k^2 r^2),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где параметр  $\tau_k$  определяется из соотношения  $1/\tau_k^2 = 1/\gamma_k^2 + 1/b^2$ ,  $\operatorname{erf}(x)$  — функция ошибок, а  $\mathbf{S}_{q,Q}$  — операторы спинов кварков.

Для получения потенциала (9) была применена процедура «размазки» по следующему правилу [2, 29]:

$$\tilde{f}(r) = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(r'),$$

где функция «размазки» с параметром  $b$  выбрана в виде

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \exp[-b(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2],$$

а также феноменологическое описание поведения бегущей константы, удобное для аналитических расчетов:

$$\alpha_s(Q^2) = \sum_{k=1}^{n=7} \alpha_k \exp\left(-\frac{Q^2}{4\gamma_k^2}\right). \tag{10}$$

Поскольку ограничение поведения бегущей константы основано на использовании соответствия экспериментальных и модельных значений характеристик псевдоскалярных и векторных мезонов, в которых константа  $\alpha_s(Q^2 = \mathbf{k}^2)$  интегрируется, то методика, вообще говоря, будет «чувствительна» к той площади, которая находится под кривой, задающей поведение  $\alpha_s(\mathbf{k}^2)$ .

По этой причине не обязательно использовать функцию типа (1), а достаточно использовать ее аппроксимацию (10), которая должна воспроизводить хорошо изученную область  $Q > 1,5$  ГэВ.

Для моделирования различного поведения константы в непертурбативной области с помощью процедуры фитирования константы (1) выражением (10) нами получены наборы параметров, отличающихся значением  $\alpha_{\text{crit}}$  и значением интеграла

$$\bar{A}(\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} dk \frac{\alpha_s(k)}{\pi} \tag{11}$$

для  $\mu = 2$  ГэВ, оценка которого сделана в работе [3] (табл. 1, 2).

Нами моделируется два вида режимов: первый представляет собой «заморозку» бегущей константы, начиная с некоторого значения  $Q_0$  (см. табл. 1), а второй имитирует поведение с пиком в непертурбативной области (см. табл. 2).

Таблица 1. Наборы константы (10) с различными  $\alpha_{\text{crit}}$  для режимов вида «заморозка» (см. рис. 2)

№ набора	$\alpha_{\text{crit}}$	$\bar{A}$ (2 ГэВ)
1-a	$8,809 \pm 1,058$	$0,593 \pm 0,070$
2-a	$3,394 \pm 0,324$	$0,333 \pm 0,033$
3-a	$1,307 \pm 0,037$	$0,207 \pm 0,007$
4-a	$1,078 \pm 0,028$	$0,190 \pm 0,006$
5-a	$0,937 \pm 0,041$	$0,177 \pm 0,008$
6-a	$0,821 \pm 0,040$	$0,166 \pm 0,008$
7-a	$0,667 \pm 0,029$	$0,150 \pm 0,006$

Таблица 2. Наборы константы (10) с различными  $\alpha_{\text{crit}}$  для режимов с пиком в непертурбативной области (см. рис. 3)

№ набора	$\alpha_{\text{crit}}$	$\bar{A}$ (2 ГэВ)
1-b	$2,197 \pm 0,091$	$0,289 \pm 0,012$
2-b	$0,000 \pm 0,087$	$0,244 \pm 0,011$
3-b	$0,585 \pm 0,047$	$0,212 \pm 0,007$
4-b	$0,434 \pm 0,047$	$0,198 \pm 0,007$
5-b	$0,797 \pm 0,035$	$0,182 \pm 0,006$
6-b	$0,187 \pm 0,040$	$0,165 \pm 0,008$
7-b	$0,692 \pm 0,040$	$0,155 \pm 0,009$
8-b	$0,300 \pm 0,023$	$0,140 \pm 0,007$

Значения КХД-константы (1) и ее ошибки, которые используются для вычисления весовых коэффициентов, получены посредством программы, представленной на <http://www-theory.lbl.gov/~ianh/alpha/alpha.html>. Объем точек фитирования изменяется в пределах 125–300 в зависимости от размера области соответствия константе КХД (1).

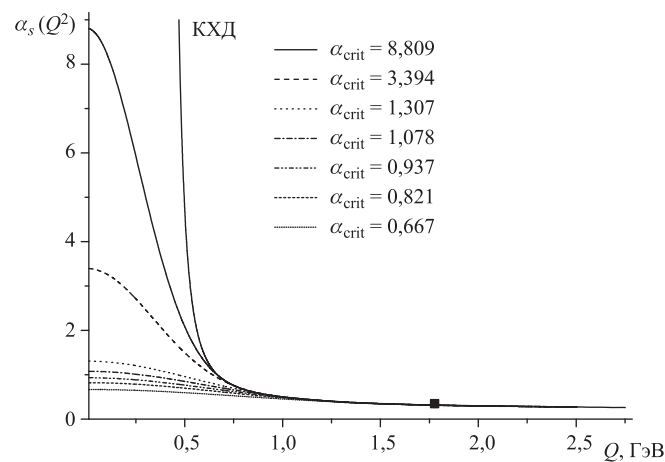


Рис. 2. Зависимость бегущей константы сильного взаимодействия для параметризаций (1) и (10) (см. табл. 1). Квадратиком отображено экспериментальное значение бегущей константы связи

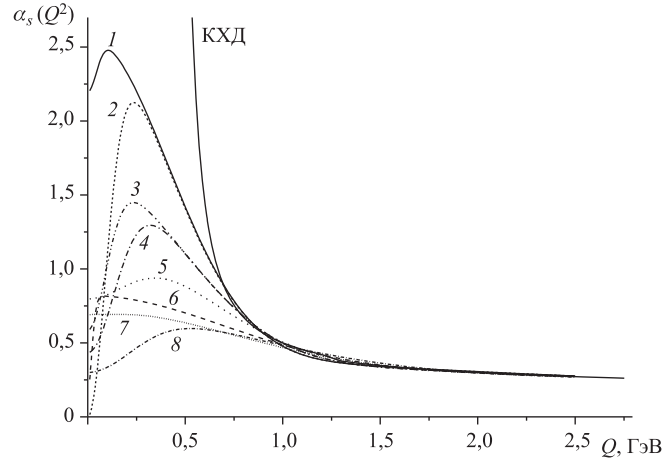


Рис. 3. Зависимость бегущей константы сильного взаимодействия для параметризаций (1) и (10). Номера графиков соответствуют номерам режимов поведения в табл. 2

Сравнительное поведение констант связи, определяемых уравнениями (1) и различными режимами поведения эффективной константы (10), отображено на рис. 2 и 3.

## 2. ЛЕПТОННЫЕ КОНСТАНТЫ РАСПАДОВ МЕЗОНОВ В ПУАНКАРЕ-КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ

Постоянная  $f_P$  лептонного распада  $P(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \nu_\ell$  для псевдоскалярного мезона  $P(Q\bar{q})$  после удаления элемента матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы  $V_{Qq}$  обычно определяется следующим соотношением:

$$j_P^\mu \equiv \langle 0 | \hat{J}_A^\mu(0) | \mathbf{P}, M_P \rangle_{\text{in}} = i \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{P^\mu f_P}{\sqrt{2} \omega_{M_P}(P)}, \quad (12)$$

где электрослабый аксиальный ток  $\hat{J}_A^\mu(0)$  и вектор состояния мезона с массой  $M_P$  берутся в представлении Гейзенберга [31]. Векторы состояний в этом выражении имеют нормировку  $\langle \mathbf{P}, M_P | \mathbf{P}', M_P \rangle = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}')$ .

Соответственно ширина распада  $P(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \nu_\ell$  задается выражением

$$\Gamma_P = \frac{G_F^2 |V_{Qq}|^2 m_\ell^2 M_P f_P^2}{8\pi} \left( 1 - \frac{m_\ell^2}{M_P^2} \right)^2, \quad (13)$$

где  $m_\ell$  — масса лептона  $\ell$ , а  $G_F$  — константа Ферми.

В случае лептонных распадов векторных мезонов  $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$  соотношения, аналогичные выражениям (12) и (13), примут вид

$$j_V^\mu \equiv \langle 0 | \hat{J}_V^\mu(0) | \mathbf{P}, M_V, \lambda \rangle_{\text{in}} = i \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{\varepsilon_\lambda^\mu M_V f_V}{\sqrt{2} \omega_{M_V}(P)}$$

с вектором поляризации  $\varepsilon_\lambda^\mu$  векторного мезона массы  $M_V$ . Соответственно ширина распада  $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$  задается выражением

$$\Gamma_V = \frac{4\pi\alpha^2}{3 M_V} f_V^2 \left(1 + \frac{2 m_\ell^2}{M_V^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4 m_\ell^2}{M_V^2}}, \quad (14)$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

В работах [32–35] получены совпадающие интегральные представления для лептонных констант распадов псевдоскалярных и векторных мезонов  $f_P$ ,  $f_V$  в рамках пуанкаре-ковариантных моделей, основанных на точечной и мгновенных формах РГД:

$$f_P(m_q, m_Q) = \frac{N_c}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty dk k^2 \psi^P(k) \sqrt{\frac{M_0^2 - (m_q - m_Q)^2}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \frac{(m_q + m_Q)}{M_0^{3/2}}, \quad (15)$$

$$f_V(m_q, m_Q) = \frac{N_c}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty dk k^2 \psi^V(k) \frac{\sqrt{(\omega_{m_q}(k) + m_q)(\omega_{m_Q}(k) + m_Q)}}{\sqrt{\omega_{m_q}(k) + \omega_{m_Q}(k)} \omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)} \times \\ \times \left(1 + \frac{k^2}{3(\omega_{m_q}(k) + m_q)(\omega_{m_Q}(k) + m_Q)}\right), \quad (16)$$

где  $N_c$  — число цветов кварков.

Аналогичное интегральное представление для  $f_P$  получено и в [36] в пуанкаре-ковариантной модели, основанной на динамике светового фронта. Представления (15) и (16) в нерелятивистском случае переходят в классические выражения, в которых константы прямо пропорциональны волновой функции мезона в координатном пространстве в точке  $r = 0$ .

### 3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Решение задачи на собственные значения (8) с потенциалом (9) произведем вариационным методом с использованием волновых функций осцилляторного и кулоновского (для  $B$ -мезонов) типов. При использовании вариационного метода требуется нахождение минимума функционала

$$M(m_q, m_Q, \beta, w_0, b, \sigma) = \langle \psi(\beta) | \hat{M} | \psi(\beta) \rangle = \langle \psi | \hat{M}_0 | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{V} | \psi \rangle,$$

где  $\psi(\beta)$  — пробная волновая функция.

Потенциал модели (9) имеет следующие свободные параметры: параметр натяжения глюонной струны  $\sigma$ , параметр размазки  $b$  и параметр  $w_0$ . Также параметрами являются массы кварков  $m_{q,Q}$  и наборы констант  $\alpha_k$ ,  $\gamma_k$ , характеризующие поведение эффективной константы сильного взаимодействия. Отметим, что значения параметров  $\beta$ ,  $w_0$ ,  $\sigma$  зависят от ароматов кварков.



Рассмотрим процедуру фиксации численных значений параметров потенциала. Параметр линейной части потенциала в большом количестве моделей лежит в пределах  $\sigma = 0,18-0,20$  ГэВ<sup>2</sup> [2, 11, 37, 38], поэтому в наших расчетах будем полагать, что

$$\sigma = \bar{\sigma} \pm \Delta\sigma = (0,19 \pm 0,01) \text{ ГэВ}^2. \quad (17)$$

Определение параметра волновой функции  $\beta$  и остальных параметров потенциала произведем путем решения системы уравнений:

$$\left. \frac{\partial M_{P,V}(\beta, \sigma)}{\partial \beta} \right|_{\beta_{\min}, \bar{\sigma}} = 0, \quad M_P(w_0, \beta_{\min}, \bar{\sigma}) = M_P \pm \Delta M_P, \quad (18)$$

$$M_V^{S=1}(\beta, \sigma) - M_P^{S=0}(\beta, \sigma) |_{\beta_{\min}, \bar{\sigma}} = M_V - M_P \pm \delta M_{VP}, \quad (19)$$

$$f_P(m_q, m_Q, \beta_{\min}) = f_{\text{exp}}^P \pm \Delta f_{\text{exp}}^P, \quad (20)$$

$$f_V(m_q, m_Q, \beta_{\min}) = f_{\text{exp}}^V \pm \Delta f_{\text{exp}}^V, \quad (21)$$

где уравнения (18), (19) являются условием минимума и требованием того, чтобы модельные значения масс мезонов соответствовали экспериментальным значениям. Величины  $M_{P,V}$  — экспериментальные значения массы псевдоскалярного и векторного мезонов, а  $\Delta M_{P,V}$  — экспериментальная ошибка измерения этих масс. Последние два уравнения (20), (21) означают, что значения лептонной константы связи для псевдоскалярных и векторных мезонов, полученные в рамках пуанкаре-ковариантной модели, совпадали (см. (15), (16)) в пределах ошибки с экспериментальными значениями  $f_{\text{exp}}$ .

**3.1. Массы  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков.** Предполагая, что конститuentные массы  $u$ -,  $d$ -кварков приблизительно равны [2]:

$$m_d - m_u \equiv \Delta m_{ud} = (4 \pm 1) \text{ МэВ}, \quad (22)$$

получим из (18)–(21) систему уравнений на основе лептонных констант распадов:

$$\begin{cases} f_V(m_u, m_d, \beta) = f_{\text{exp}}^{\rho^0} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{\rho^0}, \\ f_P(m_u, m_d, \beta) = f_{\text{exp}}^{\pi^\pm} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{\pi^\pm}. \end{cases}$$

Используя экспериментальные данные для  $\pi^\pm$ - и  $\rho^0$ -мезонов [30]

$$f_{\pi^\pm}^P = (130,4 \pm 0,04 \pm 0,2) \text{ МэВ}, \quad f_{\rho^0}^V = (156,2 \pm 1,2) \text{ МэВ},$$

где последнее соотношение получено из выражения (14) и экспериментального значения ширины  $\Gamma_{\rho^0} = (7,02 \pm 0,11)$  кэВ для распада  $\rho^0 \rightarrow e^+e^-$  [30], приходим к следующим значениям масс  $u$ -,  $d$ -кварков:

$$m_u = (239,8 \pm 2,3) \text{ МэВ}, \quad m_d = (243,8 \pm 2,3) \text{ МэВ}. \quad (23)$$

В зависимости от поведения бегущей константы сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial M_V(\beta, \dots)}{\partial \beta} = 0, \quad M_{K^\pm}(\beta, \dots) = M_{K^\pm} \pm \Delta M_{K^\pm}, \\ M_V^{S=1}(\beta, \dots) - M_P^{S=0}(\beta, \dots) = M_{K^*} - M_{K^\pm} \pm \delta M_{K^*-K^\pm}, \\ f_P(m_u, m_s, \beta) = f_{\text{exp}}^{K^\pm} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{K^\pm} \end{cases} \quad (24)$$

Таблица 3. Разрешенные значения масс  $s$ -кварка для режимов поведения  $\alpha_s$  (с различными  $\alpha_{\text{crit}}$  и  $\bar{A}(\mu)$ ) (11)

№	$\alpha_{\text{crit}}$	$m_s$ , МэВ	№	$\alpha_{\text{crit}}$	$m_s$ , МэВ
1-a	$8,809 \pm 1,058$	$500,1 \pm 34,7$	1-b	$2,197 \pm 0,091$	$465,2 \pm 27,9$
2-a	$3,394 \pm 0,324$	$468,3 \pm 32,0$	2-b	$0,000 \pm 0,087$	$464,6 \pm 27,9$
3-a	$1,307 \pm 0,037$	$457,4 \pm 28,7$	3-b	$0,585 \pm 0,047$	$459,0 \pm 28,1$
4-a	$1,078 \pm 0,028$	$457,4 \pm 29,2$	4-b	$0,434 \pm 0,047$	$459,3 \pm 28,3$
5-a	$0,937 \pm 0,041$	$457,5 \pm 30,1$	5-b	$0,797 \pm 0,035$	$458,5 \pm 29,4$
6-a	$0,821 \pm 0,040$	$458,0 \pm 30,7$	6-b	$0,187 \pm 0,040$	$458,6 \pm 30,8$
7-a	$0,667 \pm 0,029$	$459,9 \pm 31,7$	7-b	$0,692 \pm 0,040$	$459,4 \pm 31,5$
			8-b	$0,300 \pm 0,023$	$465,4 \pm 33,0$

с учетом экспериментальных данных [30]

$$M_{K^+} = (493,677 \pm 0,016) \text{ МэВ}, \quad f_{K^\pm}^P = (155,5 \pm 0,2 \pm 0,8 \pm 0,2) \text{ МэВ},$$

$$\Delta M_{\text{exp}} = M_{K^*} - M_{K^\pm} = (397,983 \pm 0,261) \text{ МэВ}$$

и значений массы  $u$ -кварка (23) приводит к результатам, представленным в табл. 3 с учетом экспериментальных и теоретических погрешностей.

**3.2. Массы  $c$ - и  $b$ -кварков.** Для вычисления лептонных констант тяжелых мезонов нам необходимы массы  $c$ -,  $b$ -кварков. Для расчета ограничений масс тяжелых  $c$ -,  $b$ -кварков используем данные для  $c\bar{c}$  ( $\eta_c$ - и  $J/\psi$ -мезоны) и  $b\bar{b}$  ( $\eta_b$ - и  $\gamma(1S)$ -мезоны) систем:

$$M_{\eta} = (2980,3 \pm 1,2) \text{ МэВ}, \quad M_{J/\psi} = (3096,916 \pm 0,011) \text{ МэВ},$$

$$M_{\eta_b} = (9390,9 \pm 2,8) \text{ МэВ}, \quad M_{\gamma(1S)} = (9460,30 \pm 0,26) \text{ МэВ}. \quad (25)$$

Поскольку эти системы состоят из частиц одинаковой массы, то для фиксации масс кварков достаточно использовать экспериментальные данные только для лептонных распадов векторных состояний:

$$f_{\gamma(1S)}^V = (238,4 \pm 1,6) \text{ МэВ}, \quad f_{J/\psi}^V = (277,6 \pm 4) \text{ МэВ}. \quad (26)$$

Решение систем уравнений, аналогичных уравнениям (24), приводит к ограничениям масс  $c$ -,  $b$ -кварков, представленных в табл. 4. Проверки в табл. 4 для массы  $b$ -кварка

Таблица 4. Разрешенные значения масс  $c$ -,  $b$ -кварков для режимов поведения  $\alpha_s$  (с различными  $\alpha_{\text{crit}}$  и  $\bar{A}(\mu)$ )

№	$m_c$ , ГэВ	$m_b$ , ГэВ	№	$m_c$ , ГэВ	$m_b$ , ГэВ
1-a	$1,558 \pm 0,094$	$3,506 \pm 0,072$	1-b	$1,466 \pm 0,078$	—
2-a	$1,481 \pm 0,094$	$3,724 \pm 0,069$	2-b	$1,462 \pm 0,077$	$4,000 \pm 0,439$
3-a	$1,418 \pm 0,077$	$3,917 \pm 0,125$	3-b	$1,433 \pm 0,076$	$3,873 \pm 0,135$
4-a	$1,405 \pm 0,076$	$3,960 \pm 0,129$	4-b	$1,429 \pm 0,076$	$3,883 \pm 0,134$
5-a	$1,392 \pm 0,081$	$4,005 \pm 0,110$	5-b	$1,407 \pm 0,077$	$3,953 \pm 0,131$
6-a	$1,379 \pm 0,082$	$4,049 \pm 0,103$	6-b	$1,383 \pm 0,082$	—
7-a	$1,358 \pm 0,081$	$4,127 \pm 0,105$	7-b	$1,367 \pm 0,085$	$4,089 \pm 0,093$
			8-b	$1,368 \pm 0,082$	$4,072 \pm 0,082$

означают, что не удалось найти решения системы уравнений, соответствующих экспериментальным данным (25), (26).

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «ОПТИМАЛЬНОГО» $\alpha_{\text{crit}}$

Выбор «оптимального» значения  $\alpha_{\text{crit}}$  и соответственно возможного режима поведения  $\alpha_s$  проделаем с помощью экспериментальных данных для констант лептонных распадов псевдоскалярных тяжелых мезонов ( $D$ -,  $D_s$ -мезоны). В качестве основного критерия выбора используем критерий  $\chi^2$ . Для этого вычислим величину

$$\chi^2(\alpha_{\text{crit}}) = \sum_{i=1}^k \frac{(f_{i, \text{exp}}^P - f_i^P(m_q, m_Q, \beta))^2}{(\delta f_{i, \text{exp}}^P)^2 + (\delta f_{i, \text{teor}}^P)^2} \quad (27)$$

для различных режимов поведения константы сильного взаимодействия и найдем минимальное значение. Величина  $\delta f_{\text{teor}}^P$  включает все неопределенности, связанные как с теоретическими неопределенностями, возникающими в результате расчетов, так и экспериментальными ошибками масс мезонов, по значениям которых находились параметры модели. Величина  $\chi^2(\alpha_{\text{crit}})$  в асимптотическом пределе будет иметь распределение  $\chi^2$  с  $k$  степенями свободы (см., например, [39]).

Используя экспериментальные значения из PDG-2010 [30]

$$f_D^P = (205,8 \pm 8,5 \pm 2,5) \text{ МэВ}, \quad f_{D_s}^P = (273 \pm 10) \text{ МэВ}$$

и вычисления лептонных констант псевдоскалярных мезонов в рамках пуанкаре-ковариантной модели, находим зависимость  $\chi^2(\alpha_{\text{crit}})$  от режимов поведения  $\alpha_s$ , которая представлена в табл. 5 вместе с вероятностями принятия модели  $P$  (в %).

Анализ данных табл. 5 показывает, что минимальный  $\chi^2$  и соответственно максимальную вероятность принятия  $P$  из режимов с пиком в непертурбативной области имеет модель с № 8-b (см. рис. 3, табл. 2), а режимов с «заморозкой» константы набор с № 7-a (см. рис. 2, табл. 1).

Однако необходимо отметить, что модели с номерами № 5-a, 6-a и № 5-b, 6-b, 7-b имеют также относительно других большие вероятности и не могут быть однозначно отброшены, так как их  $\chi^2/n \leq 1$ .

Таблица 5. Значения  $\chi^2(\alpha_{\text{crit}})$  (27) и вероятности принятия модели  $P$  для режимов поведения  $\alpha_s$

№	$\chi^2(\alpha_{\text{crit}})$	$P$ , %	№	$\chi^2(\alpha_{\text{crit}})$	$P$ , %
1-a	8,3	1,6	1-b	5,1	7,9
2-a	4,4	10,8	2-b	4,8	9,1
3-a	2,6	26,9	3-b	3,3	19,0
4-a	2,2	35,4	4-b	3,1	21,7
5-a	1,6	45,4	5-b	2,0	36,0
6-a	1,3	52,9	6-b	1,3	52,7
7-a	0,9	63,3	7-b	1,0	60,7
			8-b	0,8	67,6

Для дальнейших ограничений необходима дополнительная информация. Таким источником могут быть данные по распадам  $B$ -мезонов. В настоящее время, с нашей точки зрения, существует значительный разброс в определении лептонной константы заряженного  $B$ -мезона. Экспериментальное значение величины (см. [40–44])

$$f_B^P |V_{ub}| = (7,2-10,1) \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}$$

с современным ограничением для  $|V_{ub}| = 3,93 \pm 0,36$  [30] приводит к значительным разбросам  $f_B^P$ :

$$f_B^P = (183,2-257,0) \text{ МэВ}$$

с ошибками, достигающими 40 МэВ. Существует также значительный разброс в теоретических предсказаниях лептонных констант распадов  $B^\pm$ -мезонов: от  $f_B^P = 147_{-38}^{+34}$  МэВ в [45] до  $f_B^P = (230 \pm 23)$  МэВ в работе [46].

В нашем случае для оптимального режима с «заморозкой» № 7-а константа лептонного распада равна

$$f_B^P = (226,3 \pm 4,7) \text{ МэВ}, \quad (28)$$

а для режима с пиком № 8-b имеем, что

$$f_B^P = (217,0 \pm 4,7) \text{ МэВ}. \quad (29)$$

Значение (29) хорошо согласуется с данными теоретического СМ-предсказания [47]:

$$f_B^P = (216,0 \pm 22,0) \text{ МэВ},$$

но достаточно далеко от данных групп BaBar и Belle [40,42,44], находящихся в пределах  $f_{B,\text{exp}}^P = (246,8 \pm 45,6)$  МэВ. К данным групп BaBar и Belle ближе значение (28).

Таким образом, с учетом существующих неопределенностей и экспериментальных данных по лептонным константам тяжелых мезонов можно предположить, что возможным поведением константы  $\alpha_s$  являются режимы с № 7-а и  $\alpha_{\text{crit}} = (0,667-0,821) \pm 0,040$ , а также режимы с № 7-b, 8-b, где  $\alpha_{\text{crit}} = (0,300-0,692) \pm 0,040$ .

Наши результаты вполне согласуются с расчетами в [2, 4, 49] (см. табл. 6) и существенно отличаются от данных [24, 50].

Отметим, что идентифицировать однозначно характер поведения в данной методике не удастся, поскольку основной параметр  $\bar{A}(\mu)$ , к которому чувствителен данный способ, связан с поведением  $\alpha_s$  косвенно, через интегрирование по переданному импульсу  $Q$ .

Таблица 6. Значения  $\alpha_{\text{crit}}$  в различных моделях и подходах

$\alpha_{\text{crit}}$	Работа
0,53–0,60	[4]
0,757	[49]
0,60	[2]
1,4–1,5	[8, 15]
3,14	[24, 50]
0,667–0,821	Эта работа (режим с «заморозкой»)
0,300–0,692	Эта работа (режим с пиком)

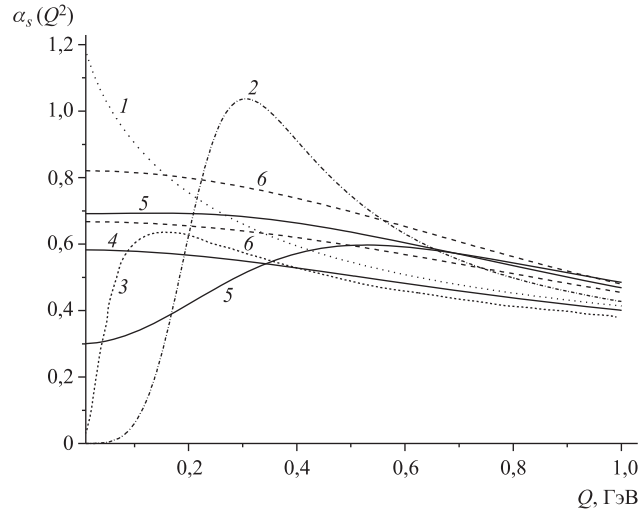


Рис. 4. Эффективные бегущие константы сильного взаимодействия в различных подходах и в пуанкаре-ковариантной модели (кривые 5, 6). 1 — аналитическая теория Ширкова–Соловцова (см. (3)); 2 —  $G_p$ -модель поведения  $\alpha_s$  (4) (детали см. [3]); 3 — эффективная константа  $\alpha_s$  (детали см. [20, 48]); 4 — пертурбативная фоновая модель поведения  $\alpha_s$  (см. [4, 12]); 5 — эта работа (режимы № 7-b, 8-b, см. табл. 2); 6 — эта работа (режимы № 6-a, 7-a, см. табл. 1)

Действительно, как следует из табл. 1 и 2, значения  $\bar{A}(\mu)$  для качественно различных режимов с «заморозкой» и пиком близки и лежат в пределах 0,140–0,166.

Как было отмечено в [4], значение  $\bar{A}_{\text{fit}}(\mu) = 0,18 \pm 0,01(\text{exp.}) \pm 0,02(\text{th.})$ , полученное путем фитирования экспериментальных данных в [3], связано с большим нормировочным значением  $\alpha_s(M_Z^2) = 0,125 \pm 0,003(\text{exp.}) \pm 0,004(\text{th.})$  по сравнению с современным  $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1184 \pm 0,0007$ . Поэтому полученные в данной работе значения  $\bar{A}(\mu) = 0,140\text{--}0,166$  вполне соответствуют экспериментальным данным из [3].

Из табл. 5 наиболее предпочтительным является поведение  $\alpha_s$  с пиком (кривая 5 на рис. 4). Для сравнения на рис. 4 представлены различные зависимости поведения эффективной константы  $\alpha_s$  в непертурбативной области в различных подходах и в пуанкаре-ковариантной модели (кривые 5, 6).

Для уточнения поведения эффективной константы желательно провести более широкий анализ различных экспериментальных данных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена методика, позволяющая оценить поведение бегущей константы КХД в непертурбативной области. В основе методики лежит требование соответствия расчетов, проводимых в рамках релятивистской кварковой модели (пуанкаре-ковариантная модель) с межкварковым потенциалом (9), и экспериментальных данных по массам и константам лептонных распадов псевдоскалярных и векторных мезонов. Для улучшения точности численных расчетов используется феноменологическая параметризация  $\alpha_s(Q^2)$ , предложенная в работе [2].

Для исследования предполагаемого поведения константы КХД было смоделировано 15 режимов с различным  $\alpha_{\text{crit}} = \alpha_s(0)$  и зависимостью от  $Q^2$  в непертурбативной области (см. табл. 1, 2).

Использование лептонных констант и масс тяжелых ( $B$ ,  $D$ ,  $D_s$ ) мезонов позволяет установить границы наиболее оптимального поведения с точки зрения экспериментальных данных:  $\alpha_{\text{crit}} = 0,667-0,821$  для режима «заморозки» и для кривых с пиком  $\alpha_{\text{crit}} = 0,300-0,692$ .

Автор благодарит О. П. Соловцову, А. Е. Дорохова и участников семинара Лаборатории теоретической физики ОИЯИ за стимулирующие обсуждения и консультации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Richardson J. L.* The Heavy Quark Potential and the  $\Upsilon$ ,  $J/\Psi$  Systems // *Phys. Lett. B.* 1979. V. 82, No. 2. P. 272–274.
2. *Godfrey S., Isgur N.* Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics // *Phys. Rev. D.* 1985. V. 32. P. 189–231.
3. *Dokshitzer Y. L., Khoze V. A., Troian S. I.* Specific Features of Heavy Quark Production. LPHD Approach to Heavy Particle Spectra // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 53. P. 89–119.
4. *Badalian A. M., Kuzmenko D. S.* Freezing of QCD Coupling Alpha(s) Affects the Short Distance Static Potential // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 016004.
5. *Alekseev A. I., Arbuzov B. A.* Analyticity and Minimality of Nonperturbative Contributions in Perturbative Region for Alpha(s)-bar // *Mod. Phys. Lett. A.* 1998. V. 13. P. 1747–1756.
6. *Boucaud P. et al.* Lattice Calculation of  $1/p^2$  Corrections to Alpha(s) and of Lambda(QCD) in the MOM Scheme // *JHEP.* 2000. V. 04. P. 006.
7. *Webber B. R.* QCD Power Corrections from a Simple Model for the Running Coupling // *JHEP.* 1998. V. 10. P. 012.
8. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal Alpha(s)-bar(0) Value // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1209–1212.
9. *Nesterenko A. V.* Analytic Invariant Charge in QCD // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2003. V. 18. P. 5475–5520.
10. *Бакулев А. П.* Глобальная дробно-аналитическая теория возмущений в КХД и ее некоторые приложения // *ЭЧАЯ.* 2009. Т. 40, № 5. С. 1351–1431.
11. *Kalashnikova Yu. S., Nefediev A. V., Simonov Yu. A.* QCD String in Light-Light and Heavy-Light Mesons // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 014037.
12. *Badalian A. M., Kuzmenko D. S.* A Short Distance Quark Antiquark Potential // *Phys. At. Nucl.* 2004. V. 67. P. 561–563.
13. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* An Analytic Method of Describing R-related Quantities in QCD // *Mod. Phys. Lett. A.* 2006. V. 21. P. 1355–1368.
14. *Milton K. A., Solovtsov I. L., Solovtsova O. P.* Remark on the Perturbative Component of Inclusive Tau Decay // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 076009.
15. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Ten Years of the Analytic Perturbation Theory in QCD // *Theor. Math. Phys.* 2007. V. 150. P. 132–152.
16. *Nesterenko A. V.* New Analytic Running Coupling in Spacelike and Timelike Regions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 116009.

17. *Baldicchi M., Prosperi G.M.* Running Coupling Constant and Masses in QCD, the Meson Spectrum // AIP Conf. Proc. 2005. V. 756. P. 152–161.
18. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* Fractional Analytic Perturbation Theory in Minkowski Space and Application to Higgs Boson Decay into a  $b\bar{b}$  Pair // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. P. 056005.
19. *Baldicchi M., Prosperi G.M., Simolo C.* Extracting Infrared QCD Coupling from Meson Spectrum. <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0611087>
20. *Baldicchi M. et al.* Bound State Approach to the QCD Coupling at Low Energy Scales // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. 242001.
21. *Baldicchi M., Prosperi G.M.* Regge Trajectories and Quarkonium Spectrum from a First Principle Salpeter Equation // Phys. Lett. B. 1998. V. 436. P. 145–152.
22. *Prosperi G.M., Baldicchi M.* Bethe–Salpeter and Dyson–Schwinger Equations in a Wilson Loop Context in QCD, Effective Mass Operator,  $q$  anti- $q$  Spectrum // Fizika B. 1999. V. 8. P. 251–260.
23. *Deur A. et al.* Experimental Determination of the Effective Strong Coupling Constant // Phys. Lett. B. 2007. V. 650. P. 244–248.
24. *Deur A. et al.* Determination of the Effective Strong Coupling Constant  $\alpha_{s,g1}(Q^2)$  from CLAS Spin Structure Function Data // Phys. Lett. B. 2008. V. 665. P. 349–351.
25. *Coester F., Polyzou W.N.* Relativistic Quantum Mechanics of Particles with Direct Interactions // Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1348–1367.
26. *Keister B.D., Polyzou W.N.* Relativistic Hamiltonian Dynamics in Nuclear and Particle Physics // Adv. Nucl. Phys. 1991. V. 20. P. 225–479.
27. *Крутов А. Ф., Троицкий В. Е.* Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем // ЭЧАЯ. 2009. Т. 40, № 2. С. 268–318.
28. *Dirac P.A.M.* Forms of Relativistic Dynamics // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392–399.
29. *Gromes D.* Theoretical Understanding of Quark Forces. Heidelberg, 1989. 64 p. Preprint Inst. of Theor. Phys. No. HD-THEP-89-17.
30. *Nakamura K. et al.* The Review of Particle Physics // J. Phys. G. 2010. V. 37. P. 075021.
31. *Биленький С. М.* Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1990. 327 с.
32. *Андреев В. В.* Описание лептонных распадов в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 2. С. 93–98.
33. *Андреев В. В., Крутов А. Ф.* Комптоновская поляризуемость каонов в релятивистской гамильтоновой динамике // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естеств.-науч. сер. Спец. вып. 2004. С. 111–127.
34. *Крутов А. Ф.* Электрослабые свойства легких мезонов в релятивистской модели составных кварков // ЯФ. 1997. Т. 60, № 8. С. 1442–1450.
35. *Крутов А. Ф., Троицкий В. Е.* Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре // ТМФ. 2005. Т. 143, № 2. С. 258–277.
36. *Jaus W.* Relativistic Constituent Quark Model of Electroweak Properties of Light Mesons // Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 2851–2859.
37. *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O.* Quark-Antiquark Potential with Retardation and Radiative Contributions and the Heavy Quarkonium Mass Spectra // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 034014.
38. *Баландина Е. В. и др.* Полулептонные распады псевдоскалярных мезонов в мгновенной форме релятивистской гамильтоновой динамики // ЯФ. 2000. Т. 63, № 2. С. 301–311.
39. *Злоказов В. Б.* Математические методы анализа экспериментальных спектров и спектроподобных распределений // ЭЧАЯ. 1985. Т. 16, № 5. С. 1126–1163.

40. Aubert B. *et al.* A Search for  $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu$  with Hadronic  $B$  Tags // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 011107.
41. Aubert B. *et al.* A Search for  $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu$  // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 052002.
42. Adachi I. *et al.* Measurement of  $B \rightarrow \tau + \bar{\nu}_\tau$  Decay with a Semileptonic Tagging Method. <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/0809.3834>
43. Schwartz A. J.  $B^+$  and  $D_s^+$  Decay Constants from Belle and Babar // AIP Conf. Proc. 2009. V. 1182. P. 299–308.
44. Aubert B. *et al.* Search for the Rare Leptonic Decays  $B^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell (\ell = e, \mu)$  // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 091101.
45. Ali Khan A. *et al.*  $B$  Meson Decay Constants from NRQCD // Phys. Lett. B. 1998. V. 427. P. 132–140.
46. Penin A. A., Steinhäuser M. Heavy-Light Meson Decay Constant from QCD Sum Rules in Three-Loop Approximation // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 054006.
47. Gray A. *et al.* The  $B$  Meson Decay Constant from Unquenched Lattice QCD // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 212001.
48. Nesterenko A. V., Papavassiliou J. The Massive Analytic Invariant Charge in QCD // Phys. Rev. D. 2005. V. 71. P. 016009.
49. Ganbold G. QCD Running Coupling in Low-Energy Region // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 094008.
50. Deur A. The Strong Coupling Constant at Large Distances // AIP Conf. Proc. 2009. V. 1149. P. 281–284.

Получено 4 февраля 2010 г.