

МЕТОД АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

И. В. Попов, И. В. Фрязинов

Институт математического моделирования РАН, Москва

Предлагается конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики — однородная, монотонная разностная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространственной переменной вне областей разрывов и волн сжатия. Предлагается новый способ введения адаптивной искусственной вязкости (АИВ) для решения двумерных задач. Приводятся тестовые расчеты движения контактных разрывов, ударных волн и распада разрывов.

A new finite-difference method for numerical decision of gas dynamics equations is proposed. This method is a uniform monotonous finite-difference scheme of a second order approximation on time and space outside the domains of shock and compression waves. This method is based on introducing the adaptive artificial viscosity into the gas dynamics equations. In the paper this method is analysed for 2D geometry. The testing computations of moving of contact discontinuities and shock waves and break-up of discontinuities are demonstrated.

PACS: 47.45.-n; 47.70.Nd

ВВЕДЕНИЕ

В работе предлагается явная, однородная, практически монотонная разностная схема для двумерных задач газовой динамики на девятиточечном шаблоне, слабо размывающая разрывы решения. Предложенная схема имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$ в областях гладкости решения и вне волн сжатия (τ — шаг по времени, h_x и h_y — шаги по пространственным переменным).

В предлагаемой разностной схеме наряду с поправками Лакса–Вендроффа вводится монотонизирующая схему искусственная вязкость μ . Искусственная вязкость вводится в областях немонотонности решения, вне контактного разрыва и волн разрежения.

В работах [1] и [2] подробно описан метод АИВ в одномерном случае. В данной работе приведены расчеты тестов из работы [3] по предложенному методу АИВ в двумерном случае и приведено сравнение этих результатов с результатами методик, представленных в [3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются двумерные уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U) + \frac{\partial}{\partial x}F(U) + \frac{\partial}{\partial y}G(U) = 0,$$

$$\text{где } U = \begin{pmatrix} \rho \\ I_x \\ I_y \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ I_x u \\ I_y u \\ (E+p)u \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ I_x v \\ I_y v \\ (E+p)v \end{pmatrix},$$

ρ — плотность; $\mathbf{v} = (u, v)^T$ — вектор скорости; $I = \mathbf{v}\rho$ — импульс; $E = e + \rho \frac{u^2 + v^2}{2}$ — полная энергия; $e = \rho\varepsilon$ — внутренняя энергия. Эти уравнения решаются в области $0 < x < l_x$, $0 < y < l_y$, $t > 0$. Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)e$.

На границе области и в начальный момент времени задаются функции ρ , \mathbf{v} и E (или e). На твердой стенке задаются равные нулю потоки плотности, импульса и равенство нулю одной из компонент скорости.

2. АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В области $0 < x < l_x$, $0 < y < l_y$ введем для простоты изложения равномерную сетку с шагами $h_x = \frac{l_x}{N_x - 1}$, $h_y = \frac{l_y}{N_y - 1}$, где N_x , N_y — число точек разбиения по соответствующим направлениям. Введем шаг по времени τ , величину которого определим позже.

Для построения аппроксимации используем разложение

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \tau \frac{\partial \rho^n}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \rho^n}{\partial t^2} + \dots$$

Первую производную по времени выразим из уравнения неразрывности, заменяя ее на $-\left(\frac{\partial(\rho u)^n}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)^n}{\partial y}\right)$. Чтобы найти вторую производную по времени, продифференцируем уравнение неразрывности по времени и используем уравнение для импульса. Получим для третьего слагаемого следующее представление

$$\frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^2 + p)^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\rho v^2 + p)^n + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\rho uv)^n \right\}.$$

В итоге имеем следующее дифференциально-разностное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u)^n + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v)^n - \\ - \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^2 + p)^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\rho v^2 + p)^n + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\rho uv)^n \right\} = 0. \end{aligned}$$

В полученном уравнении последнее слагаемое есть поправка Лакса–Вендроффа. Перепишем уравнение в потоковой форме:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (W_\rho^x)^n + \frac{\partial}{\partial y} (W_\rho^y)^n = 0,$$

где

$$W_{\rho}^x = \rho u - \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p)^n + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv)^n \right\},$$

$$W_{\rho}^y = \rho v - \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv)^n + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p)^n \right\}$$

— потоки массы.

Выведенное уравнение в разностном виде принимает следующий вид:

$$\rho_{ij}^{n+1} = \rho_{ij}^n - \tau \left\{ \frac{(W_{\rho}^x)_{i+1/2,j}^n - (W_{\rho}^x)_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \frac{(W_{\rho}^y)_{i,j+1/2}^n - (W_{\rho}^y)_{i,j-1/2}^n}{h_y} \right\},$$

где потоки аппроксимируются естественным образом. По аналогии, с использованием соответствующих поправок Лакса–Вендроффа записываются в потоковой форме уравнения для импульса и энергии:

$$I_{ij}^{n+1} = I_{ij}^n - \tau \left\{ \frac{(W_I^x)_{i+1/2,j}^n - (W_I^x)_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \frac{(W_I^y)_{i,j+1/2}^n - (W_I^y)_{i,j-1/2}^n}{h_y} \right\},$$

$$E_{ij}^{n+1} = E_{ij}^n - \tau \left\{ \frac{(W_E^x)_{i+1/2,j}^n - (W_E^x)_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \frac{(W_E^y)_{i,j+1/2}^n - (W_E^y)_{i,j-1/2}^n}{h_y} \right\}.$$

Поправки Лакса–Вендроффа приводят к аппроксимации второго порядка: $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$. Они недостаточны для монотонности схемы. Необходимо вводить дополнительную диссипацию в разностную схему (искусственную вязкость), которую удалось найти и ввести в разностную схему. Искусственная вязкость находится из условия выполнения принципа максимума для разностной схемы. Области ее введения в разностную схему определяются по «предикторному» решению — схеме Лакса–Вендроффа. По предикторному решению с помощью неравенств определяются области контактного разрыва (КР) и волны разрежения (ВР), на которых искусственная вязкость не вводится, области ударной волны (УВ) и осцилляции решения, где искусственная вязкость вводится (на этапе «корректора»).

Дифференциально-разностное уравнение для плотности с искусственной вязкостью имеет вид

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (W_{\rho})^n + \frac{\partial}{\partial y} (W_{\rho})^n - \frac{\partial}{\partial x} (W_{\mu\rho})^n - \frac{\partial}{\partial y} (W_{\mu\rho})^n = 0.$$

Более подробное описание изложенного выше метода решения уравнений газовой динамики приводится в работе [2] (для одномерного случая).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве первого теста рассматривалась задача о сверхзвуковом течении в канале с уступом. Длина канала в безразмерных переменных была выбрана равной 3, а ширина — 1. Ступенька располагалась на расстоянии 0,6 от входа в канал и имела выступ 0,2.

Рассматривался газ невязкий, нетеплопроводный с $\gamma = 1,4$; $\rho = 1$; $p = 1/\gamma$. Скорости на входе $u = 3$ и $v = 0$. На выходе задавались условия свободной границы. Это приводило к образованию сильных ударных волн. Результаты расчета приведены на рис. 1. Также для этой задачи приведены рисунки, где вводится искусственная вязкость (рис. 2).

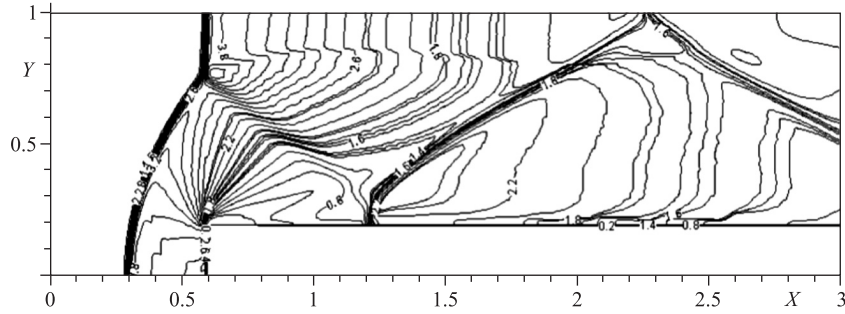


Рис. 1. Изолинии плотности в задаче 1

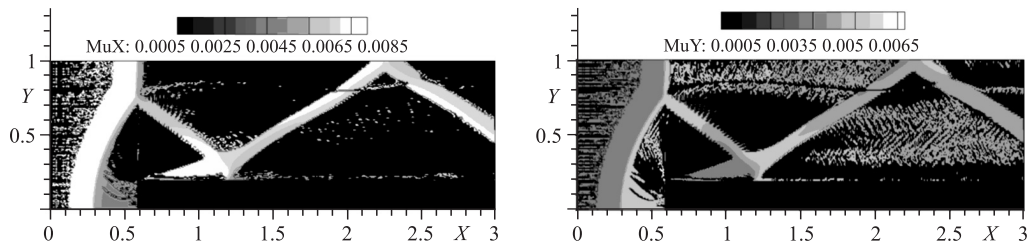


Рис. 2. Области задания искусственной вязкости μ_x и μ_y в задаче 1

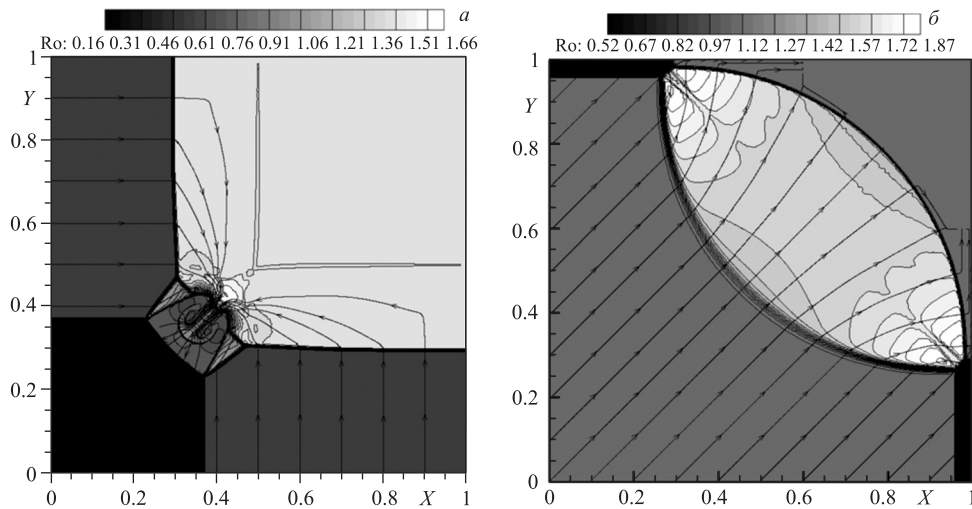


Рис. 3. Распределение плотности в тесте 3 (а) и в тесте 4 (б)

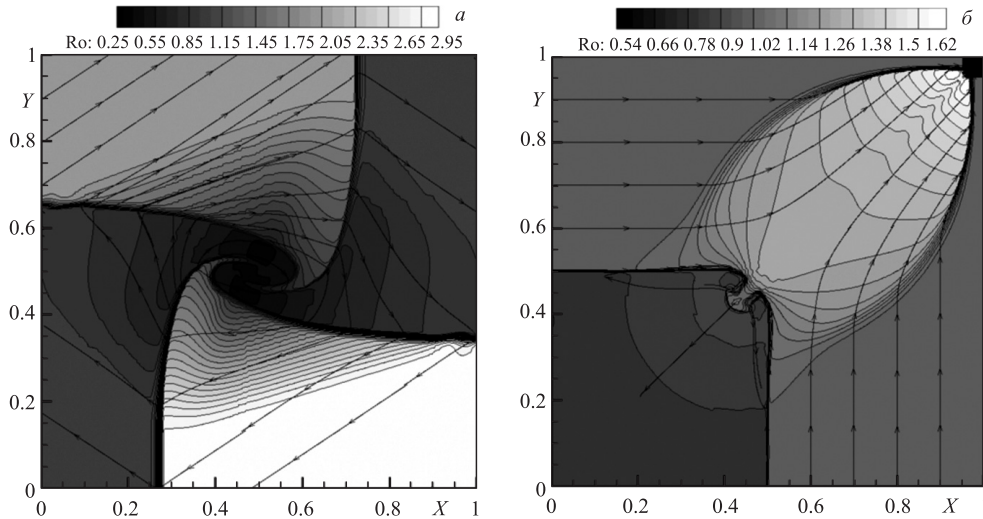


Рис. 4. Распределение плотности в тесте 6 (а) и в тесте 12 (б)

Также приводятся расчеты четырех тестовых задач, взятых из работы [3], тесты 3–4 — задачи о взаимодействии четырех ударных волн, тест 6 — задач расчета четырех контактных разрывов, тест 12 — задач расчета двух контактных разрывов и двух ударных волн. Расчеты проводились в области $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ с пространственным шагом $h_x = h_y = 0,0025$.

Эти же тесты использовались для исследования качества предложенной в данной статье методики. Все они были просчитаны, и результаты приводятся на рис. 3, 4. Из проведенных расчетов следует, что метод АИВ по качеству разностного решения близок к схеме WENO5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложена новая явная разностная схема и метод решения сеточных уравнений газовой динамики, допускающий распараллеливание вычислений.
2. Схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени на гладких участках решения задачи и вне волн сжатия.
3. Схема является однородной и не требует выделения разрывов.
4. Искусственная вязкость не вводится на ВР и КР, в связи с чем повышается точность и уменьшается размывание области КР.
5. Схема построена на девятиточечном шаблоне и может быть обобщена на случай трех измерений (на момент написания работы трехмерная методика была реализована).
6. Результаты расчетов модельных задач показывают, что предложенный метод АИВ конкурентоспособен по отношению к современным методам расчетов задач газовой динамики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-07-00458-а, 09-01-00448а, 09-01-12022-офи-м).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов И. В., Фрязинов И. В. Сеточный метод решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Седьмого Всерос. семинара, Казань, Россия, 21–24 сент. 2007 г. Казань, 2007. С. 223–230.
2. Попов И. В., Фрязинов И. В. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Матем. моделирование. 2008. Т. 20, № 8. С. 48–60.
3. Liska R., Wendroff B. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations // SIAM J. Sci. Comp. 2003. V.25, No.3. P.995–1017; <http://www.math.ntnu.no/conservation>