Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 7(170). С. 1309–1312

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УНИТАРНОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ КОНУСА НА ГРУППЕ $SO(2,1)$

А. К. Едемская[1], *И. А. Перевалова*[2],
А. Ю. Сидоренков[3], *О. Н. Солдатенко*[4]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

Известный механизм описания пространственных характеристик упругих и квазиупругих процессов в терминах неприводимых представлений группы $SO(2,1)$ модифицируется в переменных конуса в области, где поперечный импульс мал по сравнению с полным импульсом. В результате этого ядро преобразования от пространства поперечного импульса к пространству параметра «вылета» (функция Шапиро) значительно упрощается, принимая экспоненциальную форму. При этом, несмотря на определенные приближения, полностью сохраняется физическая интерпретация коэффициентов разложения амплитуды и геометрическая интерпретация пространства параметра «вылета». Все это позволяет в простой аналитической форме решить уравнение унитарности в форме, близкой к эйкональной, но выйти за рамки ограничения областью больших прицельных параметров, характерной для эйконального приближения.

Known mechanism of description of spatial characteristics of elastic and quasi-elastic processes in the terms of irreducible representations of the $SO(2,1)$ group is modified in cone variables. It takes place in the region where transverse momentum is small in comparison with the total momentum. The transformation kernel from the transverse momentum space to the escape parameter space is a Shapiro function. In the mentioned case, this kernel is essentially simplified, assuming exponential form. In spite of some approximations, physical interpretation of amplitude expansion coefficients and geometrical interpretation of the escape parameter space are completely retained. It allows one to solve the unitarity equation in a simple analytical form. At that we do not confine our solution by the region of large impact parameters which is typical for the eiconal approximation.

PACS: 11.55.-m; 03.65.Nk; 11.30.-j

Рассмотрим упругий процесс $A+B \to A+B$ в системе центра масс сталкивающихся частиц. Основным требованием к амплитуде такого процесса является выполнение условия унитарности S-матрицы $S^+S = I$:

$$i(F^+ - F) = F^+F, \quad iF = S - I. \tag{1}$$

Схематически это условие изображено на рис. 1.

[1]E-mail: AEdemsk@gmail.com
[2]E-mail: IrenAdler1@rambler.ru
[3]E-mail: andreass7@mail.ru
[4]E-mail: o_castor@mail.ru

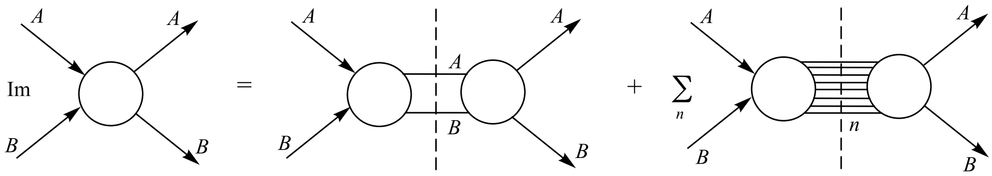

Рис. 1. Условие унитарности

В терминах матричных элементов это эквивалентно следующему нелинейному уравнению (уравнению унитарности):

$$2\mathrm{Im} f^{(+)}(\mathbf{q}_\perp;\mathbf{p}) = p^2\lambda(p)\sum_{\epsilon=\pm1}\int \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}} \bar{f}^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_\perp;\mathbf{q}) f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_\perp;\mathbf{p}) + G_{\mathrm{inel}}(\mathbf{q}_\perp;\mathbf{p}), \qquad (2)$$

где $G_{\mathrm{inel}}(\mathbf{q}_\perp;\mathbf{p})$ описывает неупругие вклады в амплитуду:

$$G_{\mathrm{inel}}(\mathbf{q}_\perp;\mathbf{p}) = \sum_s \int \prod_{i=1}^{s} d\mathbf{k}_i \delta^4\Big(P_{\mathrm{in}} - \sum_i k_i\Big) \langle\{\mathbf{k}_i\}|A|\mathbf{q};-\mathbf{q}\rangle^* \ \langle\{\mathbf{k}_i\}|A|\mathbf{p};-\mathbf{p}\rangle. \qquad (3)$$

В амплитуде $f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_\perp;\mathbf{q})$ второй аргумент соответствует импульсу начального состояния, первый аргумент — импульсу конечного состояния, а индекс $\epsilon = \pm1$ соответствует рассеянию в переднюю или заднюю полусферу. Нормировка этой амплитуды выбрана таким образом, что упругое сечение имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{el}}^{(\pm)}(p) = (2\pi)^2 p^2 \lambda^2(p) \int d\Omega_{\mathbf{k}} \ |f^{(\pm)}(\mathbf{k}_\perp;\mathbf{p})|^2. \qquad (4)$$

Амплитуда $f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_\perp;\mathbf{q})$ связана с матричным элементом оператора A соотношением

$$f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_\perp;\mathbf{q}) \equiv \left\langle \mathbf{k}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2-k_\perp^2}; -\mathbf{k}\,|A|\,\mathbf{q};-\mathbf{q} \right\rangle,$$

а матричный элемент оператора A связан с матричным элементом оператора F следующим образом:

$$\langle f|F|\mathrm{in}\rangle = \delta^{(4)}(P_{\mathrm{in}} - P_f)\langle f|A|\mathrm{in}\rangle.$$

В (4) определены

$$\lambda(p) = \frac{E_A E_B}{p(E_A+E_B)} \quad \text{и} \quad d\Omega_{\mathbf{q}} = \frac{1}{q\sqrt{q^2-q_\perp^2}} d\mathbf{q}_\perp.$$

Решение уравнения (2) известно в терминах парциальных волн a_l и в терминах профильных функций на группе $SO(2,1)$ с ядром Шапиро [1]. Цель настоящей работы — нахождение решения этого уравнения в терминах коэффициентов разложения на группе $SO(2,1)$, но с модифицированным ядром. Эта модификация имеет экспоненциальный характер и существенно упрощает ядро, что позволяет провести многие расчеты в аналитическом виде. В то же время она сохраняет физическую интерпретацию коэффициентов разложения амплитуды и геометрическую интерпретацию пространства параметра «вылета». Это становится возможным при переходе к переменным конуса.

В уравнении унитарности (2) фигурируют три импульса — $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$ (рис. 2). Переход к переменным конуса соответствует преобразованиям

$$\mathbf{q} \to u = \left(u_0 = \frac{q}{q_3},\ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}_\perp}{q_3}\right),$$

$$\mathbf{k} \to v = \left(v_0 = \frac{k}{k_3},\ \mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}_\perp}{k_3}\right),$$

$$\mathbf{p} \to \xi = \left(\xi_0 = \frac{p}{p_3},\ \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{p}_\perp}{p_3}\right).$$

Для этих переменных выполняется соотношение

$$u^2 = v^2 = \xi^2 = 1,$$

где $u^2 = u_0^2 - \mathbf{u}^2$ есть скалярное произведение на конусе.

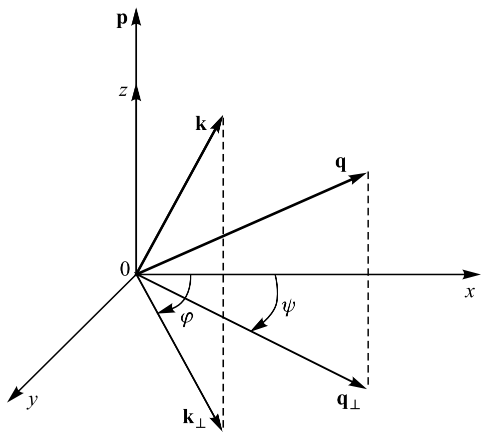

Рис. 2. Определение направлений импульсов $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$

В системе центра масс для рассматриваемого упругого процесса $|\mathbf{q}| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}| = p$, поэтому третьи компоненты соответствующих импульсов равны

$$q_3 = \sqrt{p^2 - \mathbf{q}_\perp^2}, \quad k_3 = \sqrt{p^2 - \mathbf{k}_\perp^2}, \quad p_3 = \sqrt{p^2 - \mathbf{p}_\perp^2}.$$

Элемент фазового объема $d\Omega_{\mathbf{k}}$ в терминах конических переменных имеет вид

$$d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{v_0^3}\, d\mathbf{v}, \quad v_0 = \sqrt{1 + \mathbf{v}^2}.$$

Переходя в уравнении (2) к переменным u, v и ξ, получаем

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Im}\left[(\xi_0 u_0)^{-3/2} f^{(+)}(\mathbf{u};\boldsymbol{\xi})\right] = \\ &= p^2\lambda(p) \sum_{\epsilon=\pm1} \int d\mathbf{v} \left[(u_0 v_0)^{-3/2} \bar{f}^{(\epsilon)}(\mathbf{v};\mathbf{u})\right] \cdot \left[(v_0\xi_0)^{-3/2} f^{(\epsilon)}(\mathbf{v};\boldsymbol{\xi})\right] + G_{\mathrm{inel}}(\mathbf{u};\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{5}$$

Положим в (5) $G_{\mathrm{inel}}(\mathbf{u};\boldsymbol{\xi}) = 0$, поскольку основная трудность решения этого уравнения связана с упругими вкладами.

Перейдем от амплитуды $f(\mathbf{v};\mathbf{u})$ к амплитуде $F(\mathbf{v};\mathbf{u}) = (u_0 v_0)^{-3/2} f(\mathbf{v};\mathbf{u})$. Тогда уравнение унитарности примет вид

$$\mathrm{Im}\, F^{(+)}(\mathbf{u};\boldsymbol{\xi}) = \frac{p^2}{2}\lambda(p) \sum_{\epsilon=\pm1} \int \mathrm{d}\mathbf{v}\ \bar{F}^{(\epsilon)}(\mathbf{v};\mathbf{u}) \cdot F^{(\epsilon)}(\mathbf{v};\boldsymbol{\xi}). \tag{6}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$F^{(\pm)}(\mathbf{v};\mathbf{u}) = \int d\boldsymbol{\mu}\ \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}-\mathbf{u})} u^{(\pm)}(\boldsymbol{\mu}), \tag{7}$$

где двумерный вектор $\boldsymbol{\mu} = \mu(\sin\psi, \cos\psi)$, $0 \leqslant \mu < \infty$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$. Ядро этого представления $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\mu}\mathbf{u}}$ проанализировано в работе [2], где показано, что в приближении малых поперечных импульсов оно соответствует функции Шапиро. Это определяет физическую интерпретацию параметра $\boldsymbol{\mu}$ как параметра «вылета». Покажем, что такое представление есть следствие уравнения унитарности. Действительно, подставляя это представление в (6), получаем

$$\mathrm{Im} \int d\boldsymbol{\mu}\ \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi})} u^{(+)}(\boldsymbol{\mu}) = K(p) \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}\ |u^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu})|^2\ \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi})}, \tag{8}$$

где $K(p) = (p^2/2)(2\pi)^2\lambda(p)$. В силу линейной независимости экспонент получаем локальное по μ соотношение на профильную функцию $u^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu})$:

$$\mathrm{Im}\ u^{(+)}(\boldsymbol{\mu}) = K(p) \sum_{\epsilon=\pm 1} |u^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu})|^2. \tag{9}$$

Решение этого уравнения хорошо известно из разложения амплитуды на парциальные волны.

Замечательным фактом является то, что представление (7) внешне имеет форму эйконального представления, однако физическая область значений конусной переменной $\mathbf{v}$ существенно иная. Именно этот факт позволил получить локальное соотношение на профильную функцию (9).

Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н. профессору Валлу Александру Николаевичу за постоянный интерес к работе и консультации. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ-3810.2010.2, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы»: проекты РНП.2.2.1.1/1483, 2.1.1/1539; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.: ГК 02.740.11.5154, ГК П1197, ГК 16.740.11.0154.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Soldatenko O. N., Vall A. N., Vladimirov A. A.* Unitarization of the Elastic Amplitude on the $SO(2{,}1)$ Group // Eur. Phys. J. A. 2008. V. 38. P. 71–76.
2. *Perevalova I. A. et al.* The Description of Special Characteristics of Elastic Processes in the Wigner Function Formalism. hep-ph/1008.1169v1. 2010. 16 p.