Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, № 3(173). С. 353–358

АНАЛОГ ВЕЙЛЕВСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ КАНОНИЧЕСКИХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕФИЗИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Ю. С. Вернов [а], *М. Н. Мнацаканова* [б], *С. Г. Салынский* [в]

[а] Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва

[б] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

[в] Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

В настоящей работе доказано существование аналога вейлевского представления алгебры канонических коммутационных соотношений (ККС) в антифоковском случае, реализуемом в пространстве Крейна.

In the present work the existence of an analog of the Weyl representation of the canonical commutation relations (CCR) algebra was proved for the anti-Fock case of a Krein space.

PACS: 03.65.Ta

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в калибровочных теориях, для того чтобы использовать ковариантную калибровку, необходимо вводить нефизические частицы [1], например, в квантовой хромодинамике это духи Фаддеева–Попова.

В чистом состоянии скалярное произведение соответствующих полей определяет вероятность наблюдения некоторой частицы, которая должна быть положительной для реальных частиц. Очевидно, что если частица является нефизической, соответствующее скалярное произведение не может быть положительным. Данное обстоятельство приводит к необходимости перехода от гильбертова пространства к пространству с индефинитной метрикой [1, 2].

В основе любой квантовой теории лежит алгебра канонических коммутационных соотношений (ККС), которая в простейшем случае имеет вид

$$[p, q] = -i\, I, \tag{1}$$

где p и q — самосопряженные операторы, в квантовой механике это операторы импульса и координаты соответственно. Отметим, что если соотношение (1) заменено более общим:

$$[p_i, q_k] = -i\, \delta_{ik} I, \quad 1 \leqslant i, \quad k \leqslant n,$$

то основные теоремы для ККС могут быть непосредственно обобщены [3]. Подчеркнем, что операторы p и q являются неограниченными [3]. Поэтому соотношение (1) может быть выполнено не во всем пространстве, а только в области D, где $D = D_{pq-qp} = D_{pq} \bigcap D_{qp}$. Эту трудность можно обойти для тех представлений ККС, которые могут быть заданы в форме Вейля:

$$\mathrm{e}^{itp}\,\mathrm{e}^{isq} = \mathrm{e}^{ist}\,\mathrm{e}^{isq}\,\mathrm{e}^{itp}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Действительно, поскольку p и q — самосопряженные операторы [4], то, согласно теореме Стоуна, операторы e^{itp} и e^{isq} в пространстве Гильберта являются ограниченными и поэтому заданы во всем рассматриваемом пространстве. Отметим, что представление Вейля широко использовалось в квантовой теории [5].

Однако соотношение (2) выполнено только для определенного класса представлений, называемых регулярными [6, 7]. Наиболее известным регулярным представлением является представление Шредингера, в котором операторы p и q задаются следующим образом:

$$qf(x) = xf(x), \quad pf(x) = -i\frac{\partial}{\partial x}f(x), \quad f(x) \in L_2(-\infty, +\infty). \tag{3}$$

По определению, все представления, унитарно эквивалентные шредингеровскому, называются регулярными.

Отметим, что соотношение (1) удобно переписать в виде

$$[a, a^*] = I. \tag{4}$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip). \tag{5}$$

Легко видеть, что в шредингеровском представлении существует «вакуумный» вектор ψ_0, удовлетворяющий условию

$$a\psi_0 = 0. \tag{6}$$

Действительно, $\psi_0 = C\,\exp{(-x^2/2)}$, где C — константа, обычно фиксируемая условием нормировки $(\psi_0, \psi_0) = 1$.

Можно доказать, что все фоковские представления, т. е. представления, в которых выполнено соотношение (6), унитарно эквивалентны. В частности, произвольное фоковское представление унитарно эквивалентно шредингеровскому и, следовательно, регулярно.

До настоящего времени представления ККС в форме Вейля рассматривались в гильбертовом пространстве, однако в случае пространства с индефинитной метрикой мы можем получить аналоги вейлевских соотношений, что и составляет предмет настоящей работы.

1. ПРОСТРАНСТВО КРЕЙНА

Кратко напомним некоторые свойства пространства Крейна. Подробный обзор можно посмотреть, например, в [8–10].

Известно следующее каноническое разложение для довольно широкого класса невырожденных пространств с индефинитной метрикой [8]:

$$K = K_+ + K_-, \quad K_+ \perp K_-,$$

где K_+ — пространство с положительной метрикой; K_- — пространство с отрицательной метрикой. Если к тому же $K_\pm$ — замкнутые пространства, тогда K будет пространством Крейна. Напомним, что под невырожденным пространством подразумевается такое, в котором отсутствуют изотропные векторы, т. е. если из условия $\langle x, y\rangle = 0 \, \forall y \in K$ следует, что $x = 0$.

По определению, каждый вектор в пространстве Крейна допускает следующее разложение:

$$x = x_+ + x_-, \quad x_\pm \in K_\pm, \quad y = y_+ + y_-, \quad y_\pm \in K_\pm,$$
$$\langle x, y\rangle = \langle x_+, y_+\rangle + \langle x_-, y_-\rangle.$$

Если определить оператор J канонической симметрии:

$$J(x_+ + x_-) = x_+ - x_-,$$

то в пространстве Крейна, помимо индефинитного, можно ввести и положительное скалярное произведение. Легко видеть, что

$$(x, y) = \langle x, Jy\rangle = \langle x_+, y_+\rangle - \langle x_-, y_-\rangle$$

есть положительное скалярное произведение. Действительно,

$$(x, x) = (\langle x_+, x_+\rangle - \langle x_-, x_-\rangle) > 0.$$

Легко проверить следующие свойства оператора J:

1. $J^2 = 1$, следовательно, $J = J^{-1}$.

2. J — самосопряженный оператор: $J = J^+ = J^*$ относительно и индефинитного, и положительного скалярных произведений.

Понятия унитарного, эрмитова и самосопряженного операторов, определенные для пространства с положительной метрикой, естественным образом обобщаются по отношению к индефинитному скалярному произведению $\langle x, y\rangle$ на соответственно J-унитарный, J-эрмитов и J-самосопряженный.

Легко показать, как связаны между собой операторы A^* и A^+. Действительно, по определению имеем

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax, Jy) = (x, A^* Jy) = \langle x, JA^* Jy\rangle.$$

Откуда следует, что

$$A^+ = JA^* J,$$

где символ «+» обозначает сопряжение в пространстве Крейна, т. е. оператор A^+ является J-сопряженным для оператора A.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ККС В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Отметим, что для регулярности представления ККС в гильбертовом пространстве достаточно потребовать существования собственного вектора у оператора $N = a^*a$, где a^* и a задаются формулой (5):

$$N\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha. \tag{7}$$

Докажем сначала, что в гильбертовом пространстве $\alpha \geqslant 0$. Действительно, если $\alpha = -\beta, \beta > 0$, то, с одной стороны,

$$(N\psi_{-\beta}, \psi_{-\beta}) = -\beta(\psi_{-\beta}, \psi_{-\beta}) \leqslant 0,$$

а с другой стороны,

$$(N\psi_{-\beta}, \psi_{-\beta}) = (a\psi_{-\beta}, a\psi_{-\beta}) \geqslant 0.$$

Из этих неравенств следует, что $\psi_{-\beta} = 0$. Поскольку $a\psi_\alpha \sim \psi_{\alpha-1}$, то условие неотрицательности α приводит к тому, что выполнено условие (6), т. е. что соответствующее представление является фоковским и, следовательно, регулярным.

Оказывается, что если отказаться от требования положительности метрики, то условие (7) определяет регулярные представления в пространстве с индефинитной метрикой, которое оказывается пространством Крейна. Следующая теорема позволяет классифицировать регулярные представления в пространстве Крейна [11].

Теорема 1. *Каждое регулярное неприводимое представление алгебры Гейзенберга в пространстве Крейна попадает в один из трех подклассов:*
1. *Фоковский случай:* $\operatorname{Sp} N = \mathbb{Z}_+$,
2. *Антифоковский случай:* $\operatorname{Sp} N = \mathbb{Z}_-$,
3. *λ-случай:* $\operatorname{Sp} N = \lambda + \mathbb{Z}, \quad -1 < \lambda < 0$.

Фоковское представление в пространстве Крейна эквивалентно фоковскому представлению в пространстве Гильберта. Для этого случая существование представления Вейля алгебры ККС было доказано в работах [6, 7]. Теперь нас будет интересовать антифоковский случай, так как именно в нем и существуют нефизические частицы, возникающие в современных калибровочных теориях.

Поскольку в антифоковском случае $\operatorname{Sp} N = \mathbb{Z}_-$, то

$$a^+\psi_{-1} = 0. \tag{8}$$

Легко видеть, что вследствие этого

$$\langle\psi_{-n}, \psi_{-n}\rangle = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad \psi_{-n} = a^{n-1}\psi_{-1}. \tag{9}$$

Действительно,

$$\langle\psi_{-n}, \psi_{-n}\rangle = \langle a\psi_{-n+1}, a\psi_{-n+1}\rangle = \langle\psi_{-n+1}, a^+a\psi_{-n+1}\rangle = \\ = (-n+1)\langle\psi_{-n+1}, \psi_{-n+1}\rangle = \ldots = (-1)^{n-1}(n-1)!\langle\psi_{-1}, \psi_{-1}\rangle.$$

где мы всегда можем положить $\langle\psi_{-1}, \psi_{-1}\rangle = 1$.

Докажем, что

$$\{a, J\} = \{a^+, J\} = 0. \quad \{x, y\} = xy + yx. \tag{10}$$

Пусть $n = 2m$. Тогда поскольку $a\psi_{-2m} = \psi_{-2m-1}$, то, вследствие (9),

$$Ja\psi_{-2m} = J\psi_{-2m-1} = \psi_{-2m-1}.$$

С другой стороны,

$$aJ\psi_{-2m} = -a\psi_{-2m} = -\psi_{-2m-1}.$$

Отсюда следует, что $\{a, J\} = 0$. При $n = 2m+1$ доказательство проводится аналогично. Следовательно, $\{a, J\}\psi_{-n} = 0\,\forall n$. Но тогда и

$$\{a, J\}\psi^k = 0, \quad \psi^k = \sum_{-k}^{-1} c_n \psi_n.$$

Легко видеть, что полученное соотношение остается справедливым и при $k \to \infty$, так как последовательность векторов ψ^k должна быть сходящейся при $k \to \infty$. Поскольку $J^+ = J$, то выполнено и равенство $\{a^+, J\} = 0$. Равенства (10) доказаны.

3. СВЯЗЬ ФОКОВСКОГО И АНТИФОКОВСКОГО СЛУЧАЕВ

В этом разделе мы докажем, что существует фоковское представление, связанное с антифоковским.

Сделаем следующую замену: $a = b^+, \quad a^+ = b$. Тогда в терминах операторов b и b^+ мы имеем, что

$$[b, b^+] = -1, \ \tilde{N} = -N - 1, \quad \operatorname{Sp}\tilde{N} = \mathbb{N}, \quad \psi_{-n} = \tilde{\psi}_{n-1}.$$

В териминах новых переменных выражения (8) и (10) принимают вид

$$b\tilde{\psi}_0 = 0, \quad \{b, J\} = \{b^+, J\} = 0.$$

Откуда следует, что $b^* = Jb^+J = -b^+$. Причем для операторов b и b^* выполняется стандартное коммутационное соотношение вида (4):

$$[b, b^*] = I. \tag{11}$$

Таким образом, исходя из антифоковского представления ККС, мы получили фоковское представление, т. е. регулярное представление, для которого существует представление Вейля. Операторы b и b^* связаны с операторами $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$, входящими в соотношение (1), равенствами (5). Учитывая, что $b^* = -b^+, \quad b^+ = a, \quad b = a^*$, получаем, что операторы $\tilde{q} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$ и $\tilde{p} = \dfrac{1}{i\sqrt{2}}(a^+ + a)$ удовлетворяют ККС в форме Вейля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе доказано существование аналога представления Вейля алгебры ККС для антифоковского случая, т. е. для случая, в котором существуют нефизические частицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kugo T., Ojima I.* // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1979. V. 66. P. 1.
2. *Morchio G., Strocchi F.* // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1980. V. 33. P. 251.
3. *Putnam C. R.* Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1967. Ch. IV. P. 63.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
5. *Bratteli O., Robinson D. W.* Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. V. 2. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1979.
6. *Foias C., Geher L. L., Sz.-Nagy B.* // Acta Sec. Math. (Szeged). 1960. V. 21. P. 78.
7. *Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н., Салынский С. Г.* Новое определение регулярности представления аглгебры канонических коммутационных соотношений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2010. № 6. С. 113.
8. *Bognar J.* Indefinite Inner Product Spaces. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1974.
9. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
10. *Krein M. G.* // Am. Math. Soc. Transl. 1970. V. 93. P. 103.
11. *Mnatsakanova M. et al.* // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2969.

Получено 2 сентября 2011 г.