Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 4(181). С. 478–485

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НА КОСМОЛОГИЧЕСКОМ ФОНЕ В РТГ. I. ТЕОРИЯ

К. А. Модестов [1], *Ю. В. Чугреев* [2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих развитие малых возмущений гравитационного поля и характеристик вещества на космологическом фоне в РТГ. Показано, что эти уравнения допускают эффективную калибровочную инвариантность, поскольку в большинстве интересующих нас случаев массой гравитона можно пренебречь. Произведено стандартное разложение на скалярные, векторные и тензорные компоненты. Для каждой составляющей выведены уравнения.

The system of ordinary differential equations of the second order describing evolution of small perturbations of gravitational field and matter characteristics in RTG have been obtained, with cosmological solution being a background. It was shown also that these equations admit effective gauge invariance, because one can neglect the mass of the graviton in most cases of interest. The standard expansion on scalar, vector and tensor components has been performed. The equations of each component have been derived.

PACS: 04.50.Kd; 95.30.Sf

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа является продолжением исследования [1] вопроса устойчивости однородной и изотропной Вселенной относительно малых возмущений гравитационного поля и вещества в релятивистской теории гравитации [2]. В [1] рассматривались возмущения, зависящие только от времени. Теперь мы изучим более общий случай возмущений, зависящих от всех координат пространства-времени. В рамках ОТО эта задача впервые изучалась в известных работах Е. М. Лифшица [3, 4] и впоследствии изложена в обзорных курсах [5, 6].

В работах [1, 7, 8] был представлен стандартный космологический сценарий периодического развития фридмановской Вселенной на пяти этапах ее эволюции:

1) отскок на максимальной плотности,
2) радиационно-доминирующая стадия,
3) барионная стадия,
4) квинтэссенция (ускорение),
5) точка поворота на минимальной плотности вещества.

[1] E-mail: modestov@goa.bog.msu.ru
[2] E-mail: chugreev@goa.bog.msu.ru

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО 1-ГО ПОРЯДКА

Поскольку, как известно, в конформном времени $d\eta \equiv d\tau/\alpha$ все космологические вычисления упрощаются, уравнения фридмановской Вселенной ((2.12)–(2.14) [1]) запишем именно в нем (попутно это позволит облегчить сравнение полученных результатов с результатами ОТО, так как в большинстве источников [3–5] используется именно это время):

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' = \frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} = -\frac{\kappa\alpha^2}{6}\left(\varepsilon + 3p\right) - \frac{m^2\alpha^2}{6}\left(1 - \frac{\alpha^4_{\max}}{\alpha^6}\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\alpha'^2}{\alpha^2} = \frac{\kappa\alpha^2}{3}\varepsilon - \frac{m^2\alpha^2}{6}\left(1 - \frac{3}{2\alpha^2} + \frac{\alpha^4_{\max}}{2\alpha^6}\right), \tag{1.2}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\varepsilon'}{3\left(\varepsilon + p\right)}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее штрихи будут обозначать производные по η.

Как и в предыдущей работе, будем рассматривать уравнения состояния вещества вида

$$p = w\varepsilon, \tag{1.4}$$

где w — параметр уравнения состояния. Введем вспомогательный параметр

$$\beta \equiv \frac{1-w}{w+1/3}. \tag{1.5}$$

Радиационно-доминирующей стадии соответствует $w = 1/3$, $\beta = 1$, нерелятивистской — $w = 0$, $\beta = 3$, квинтэссенции — -1 (вакуум) $< w < 0$ (равномерное расширение), $-\infty$ (равномерное расширение) $< \beta < -3$ (вакуум).

Флуктуации снова будем считать адиабатическими. Ввиду их малости можно записать

$$p_1 = \frac{dp}{d\varepsilon}\varepsilon_1 = w\varepsilon_1. \tag{1.6}$$

С учетом перехода к новой временной переменной имеем следующую связь между компонентами возмущений скорости и метрики ((3.5), (3.6) [1]):

$$u^0_{(1)} = -\frac{1}{\alpha}\frac{h^0_0}{2}, \tag{1.7}$$

$$u_0^{(1)} = \alpha\frac{h^0_0}{2}, \tag{1.8}$$

$$u^\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}h^0_\alpha - \frac{1}{\alpha^2}u^1_\alpha. \tag{1.9}$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения $1, 2, 3$ и соответствуют трехмерной галилеевой метрике, а латинские — $0, 1, 2, 3$ и соответствуют метрике четырехмерного риманова пространства g_{ij}; очевидно, для первых нет различия, писать их сверху или снизу.

Также в работе [1] были получены уравнения для малых линейных возмущений в РТГ. Эти уравнения ((3.22)–(3.24) [1]) в переменных η, x, y, z примут вид

$$\Delta h_0^0 - \alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} h_0^{0'}\right)' - m^2\alpha^2 h_0^0 = \kappa\left(\varepsilon_1 + 3p_1\right)\alpha^2 + \kappa\left(\varepsilon + 3p\right)\alpha^2 h_0^0 = \\ = \kappa\varepsilon\alpha^2\left(3w+1\right)\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} + h_0^0\right], \quad (1.10)$$

$$\Delta h_\beta^\alpha - \frac{\left(\alpha^2 h_\beta^{\alpha'}\right)'}{\alpha^2} - m^2 h_\beta^\alpha = -2\left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha''}{\alpha}\right] h_0^0\delta_\beta^\alpha - \kappa\left(\varepsilon_1 - p_1\right)\alpha^2\delta_\beta^\alpha = \\ = -\left[\kappa\left(\varepsilon - p\right)\alpha^2 - m^2\left(\alpha^2 - 1\right)\right] h_0^0\delta_\beta^\alpha - \kappa\left(\varepsilon_1 - p_1\right)\alpha^2\delta_\beta^\alpha = \\ = m^2\left(\alpha^2 - 1\right) h_0^0\delta_\beta^\alpha + \kappa\varepsilon\alpha^2\left(w - 1\right)\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} + h_0^0\right]\delta_\beta^\alpha, \quad (1.11)$$

$$\frac{u_\alpha^1}{\alpha} = \frac{\Delta h_\alpha^0 - h_\alpha^{0''} - 2\frac{\alpha'}{\alpha} h_\alpha^{0'} - 4\frac{\alpha''}{\alpha} h_\alpha^0 - m^2\alpha^2 h_\alpha^0 + \kappa\left(\varepsilon - p\right)\alpha^2 h_\alpha^0 + 2\frac{\alpha'}{\alpha} h_{0,\alpha}^0}{2\kappa\left(\varepsilon + p\right)\alpha^2} = \\ = \frac{\Delta h_\alpha^0 - \left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha^2 h_\alpha^0\right)'\right]' - m^2 h_\alpha^0 + 2\frac{\alpha'}{\alpha} h_{0,\alpha}^0}{2\kappa\left(\varepsilon + p\right)\alpha^2}, \quad (1.12)$$

где $\Delta \equiv \partial_\alpha\partial_\alpha$.

Второе уравнение РТГ ((3.15), (3.16) [1]) в новых переменных можно записать так:

$$h_0^{0'} - h' = 2h_{\alpha,\alpha}^0, \quad (1.13)$$

$$h_{0,\alpha}^0 + h_{,\alpha} = 2h_{\alpha,\beta}^\beta + \frac{2}{\alpha^2}\left(\alpha^2 h_\alpha^0\right)', \quad (1.14)$$

где $h \equiv h_\alpha^\alpha$.

Из (1.10) получим формулу для вычисления флуктуации плотности по известной компоненте h_0^0 флуктуации метрики

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\Delta h_0^0 - \alpha^2\left(\frac{1}{\alpha^2} h_0^{0'}\right)' - m^2\alpha^2 h_0^0}{\kappa\alpha^2\left(\varepsilon + 3p\right)} - h_0^0. \quad (1.15)$$

Ковариантный закон сохранения энергии-импульса вещества ((3.30), (3.31) [1]) в новых переменных

$$\frac{1}{\alpha} u_{\alpha,\alpha}^1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon + p}\right)' + \frac{h_0^{0'}}{2} \quad (1.16)$$

и

$$\frac{\left[\alpha^3\left(\varepsilon + p\right) u_\alpha^1\right]'}{\alpha^4} = \left(\varepsilon + p\right)\frac{h_{0,\alpha}^0}{2} + p_{1,\alpha}. \quad (1.17)$$

Эти уравнения следуют из (1.10)–(1.14), поскольку ковариантный закон сохранения энергии-импульса вещества ((1.8) [1]) вытекает из уравнений РТГ ((1.1), (1.2) [1]).

Мы будем использовать все эти результаты и в этой работе.

Для нахождения уравнения для следа пространственной части возмущений метрики h свернем (1.11)

$$\Delta h - \frac{\left(\alpha^2 h'\right)'}{\alpha^2} - m^2 h - 3m^2\left(\alpha^2 - 1\right) h_0^0 = 3\kappa\varepsilon\alpha^2\left(w-1\right)\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} + h_0^0\right]. \tag{1.18}$$

Объединяя (1.10) и (1.18), получим

$$\Delta h - \frac{\left(\alpha^2 h'\right)'}{\alpha^2} - m^2 h - 3m^2\left(\alpha^2 - 1\right) h_0^0 = -\beta\left\{\Delta h_0^0 - \alpha^2\left(\frac{1}{\alpha^2} h_0^{0'}\right)' - m^2\alpha^2 h_0^0\right\}. \tag{1.19}$$

Теперь объединим (1.13) и дивергенцию (1.14):

$$\Delta\left(h_0^0 + h\right) = 2h^{\beta}_{\alpha,\alpha\beta} + \frac{\left(\alpha^2 (h_0^0 - h)'\right)'}{\alpha^2}. \tag{1.20}$$

Далее вплоть до разд. 5 части II (приложения) мы будем производить вычисления, пренебрегая массой покоя гравитона.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Не все решения уравнений (1.10)–(1.14) будут иметь физический смысл. В действительности, в силу малой величины массы гравитона в рассматриваемом линейном приближении на некоторых этапах эволюции Вселенной членами с массой гравитона в уравнениях РТГ можно будет пренебречь. В этом случае они эффективно сводятся к уравнениям поля безмассовой РТГ, содержащей, как известно [2], калибровочный произвол. А именно: для любого инфинитезимального вектора ξ^k, удовлетворяющего уравнению

$$g^{ij} D_i D_j \xi^k = 0, \tag{2.1}$$

решением также будут являться другие функции, связанные с исходными порождаемыми вектором ξ^k калибровочными преобразованиями [2].

Подмножеством этих преобразований будут преобразования группы Пуанкаре, являющиеся решениями уравнения Киллинга

$$D_i\xi_j + D_j\xi_i = 0.$$

Однако они не дают волновых решений, а лишь постоянные или линейно растущие с координатами. Первые обсуждены в части I [1], а вторые невозможно сделать малыми одновременно во всех точках трехмерного пространства, так как они стремятся к бесконечности при $r \to \infty$.

В координатах $\{\eta, x, y, z\}$ (1.1) примет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\left[\alpha^2\left(\dfrac{\xi^0}{\alpha^2}\right)'\right]'}{\alpha^2} - \Delta\left(\frac{\xi^0}{\alpha^2}\right) = \left(\frac{\xi^0}{\alpha^2}\right)'' + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\left(\frac{\xi^0}{\alpha^2}\right)' - \Delta\left(\frac{\xi^0}{\alpha^2}\right) = 0, \\
\frac{\left[\alpha^2 \xi^{\alpha'}\right]'}{\alpha^2} - \Delta\xi^\alpha = \xi^{\alpha''} + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\xi^{\alpha'} - \Delta\xi^\alpha = 0.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для рассматриваемого случая эти уравнения принимают вид

$$\frac{\left[\eta^{\beta+1}\left(\frac{\xi^0}{\eta^{\beta+1}}\right)'\right]'}{\eta^{\beta+1}} + n^2\left(\frac{\xi^0}{\eta^{\beta+1}}\right) = \left(\frac{\xi^0}{\eta^{\beta+1}}\right)'' + \frac{\beta+1}{\eta}\left(\frac{\xi^0}{\eta^{\beta+1}}\right)' + n^2\left(\frac{\xi^0}{\eta^{\beta+1}}\right) = 0,$$
$$\frac{\left[\eta^{\beta+1}\xi^{\alpha\prime}\right]'}{\eta^{\beta+1}} + n^2\xi^\alpha = \xi^{\alpha\prime\prime} + \frac{\beta+1}{\eta}\xi^{\alpha\prime} + n^2\xi^\alpha = 0. \tag{2.3}$$

Возмущения метрики и характеристик вещества, соответствующие данным преобразованиям:

$$h_0^0 = \frac{2}{\alpha}\left(\alpha\xi^0\right)', \quad h_\alpha^0 = \xi^0_{,\alpha} - \xi^{\alpha\prime}, \quad h_\alpha^\beta = \xi^\alpha_{,\beta} + \xi^\beta_{,\alpha} + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\delta_\alpha^\beta\xi^0,$$
$$h = 2\xi^\alpha_{,\alpha} + 6\frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0, \quad \frac{u^1_\alpha}{\alpha} = \xi^0_{,\alpha}, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = -3\nu\frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0. \tag{2.4}$$

Для дальнейшего рассмотрения произведем преобразование Фурье по плоским волнам e^{inr}, где n_α — волновой вектор; в уравнениях произойдет замена $\partial_\alpha \to in_\alpha$. Имеются три типа возмущений, независимых друг от друга: скалярные возмущения гравитационного поля, плотности вещества и дивергенции скорости вещества; векторные возмущения гравитационного поля и вихревой компоненты скорости; чисто гравитационные тензорные возмущения. Рассмотрим все эти три типа возмущений по отдельности.

3. ВОЗМУЩЕНИЯ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИИ (СКАЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

С помощью скалярной функции $Q = \mathrm{e}^{inr}$ можно составить тензоры и вектор

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q,$$
$$P_\alpha^\beta = \left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta - \frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right)Q, \tag{3.1}$$
$$P_\alpha = \frac{n_\alpha}{n}Q.$$

В данном случае инфинитезимальный калибровочный вектор ξ^k имеет и временную ξ^0, и пространственную ξ^α части. Разложим все векторные и тензорные величины по поляризациям:

$$\xi^0 = \Omega(\eta)Q, \quad \xi^\alpha = -ia(\eta)P^\alpha, \quad h_0^0 = \omega(\eta)Q, \quad h_\alpha^0 = -i\rho(\eta)P_\alpha,$$
$$h_\alpha^\beta = \mu(\eta)Q_\alpha^\beta + \lambda(\eta)P_\alpha^\beta, \quad h = \mu(\eta)Q, \quad \frac{u^1_\alpha}{\alpha} = iv(\eta)P_\alpha, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \delta(\eta)Q. \tag{3.2}$$

Из (2.4) вытекают следующие формулы для возмущений метрики и характеристик вещества, порождаемых калибровочными преобразованиями,

$$\omega = \frac{2}{\alpha}\left(\alpha\Omega\right)', \quad \rho = -n\Omega - a', \quad \lambda = -2na, \quad \mu = 6\frac{\alpha'}{\alpha}\Omega + 2na, \quad \widetilde{\mu} \equiv \mu + \lambda = 6\frac{\alpha'}{\alpha}\Omega,$$
$$v = n\Omega, \quad \delta = -3(w+1)\frac{\alpha'}{\alpha}\Omega. \tag{3.3}$$

Уравнение для нахождения λ выводится из (1.11) при $\alpha \neq \beta$

$$\lambda'' + \frac{\beta+1}{\eta}\lambda' + n^2\lambda = 0. \tag{3.4}$$

Система уравнений для нахождения $\widetilde{\mu}$ и ω (первое получается из (1.19), второе — из (1.20)):

$$\widetilde{\mu}'' + \frac{\beta+1}{\eta}\widetilde{\mu}' + n^2\widetilde{\mu} = -\beta\left[\omega'' - \frac{\beta+1}{\eta}\omega' + n^2\omega\right],$$
$$\widetilde{\mu}'' + \frac{\beta+1}{\eta}\widetilde{\mu}' - \frac{n^2}{3}\widetilde{\mu} = \omega'' + \frac{\beta+1}{\eta}\omega' + n^2\omega. \tag{3.5}$$

Из них получаем уравнения четвертого порядка на $\widetilde{\mu}$ или ω:

$$\widetilde{\mu}^{\mathrm{IV}} + \frac{4}{\eta}\widetilde{\mu}''' + \frac{1-\beta^2}{\eta^2}\widetilde{\mu}'' + \frac{\beta^2-1}{\eta^3}\widetilde{\mu}' + n^2\frac{2}{3(\beta+1)}\Bigg\{(\beta+3)\widetilde{\mu}'' + \frac{2(\beta^2+2\beta+3)}{\eta}\widetilde{\mu}'\Bigg\} + n^4\frac{3-\beta}{3(\beta+1)}\widetilde{\mu} = 0,$$
$$\omega^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{\eta}\omega''' - \frac{(\beta-1)^2}{\eta^2}\omega'' + \frac{(\beta-1)^2}{\eta^3}\omega' + n^2\frac{2}{3}\left\{\frac{\beta+3}{\beta+1}\omega'' + \frac{2\beta+3}{\eta}\omega'\right\} + n^4\frac{3-\beta}{3(\beta+1)}\omega = 0. \tag{3.6}$$

δ удобнее всего получить из (1.15).

4. ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ (ВЕКТОРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

С помощью поперечной векторной волны $S_\alpha = s_\alpha\, \mathrm{e}^{inr}$, $s_\alpha n^\alpha = 0$ можно составить тензор

$$S_\alpha^\beta = S_\alpha\frac{n^\beta}{n} + \frac{n_\alpha}{n}S^\beta. \tag{4.1}$$

В данном случае инфинитезимальный калибровочный вектор ξ^k имеет только пространственную часть ξ^α, так как отсутствуют какие бы то ни было скаляры. Разложим ненулевые векторные и тензорные величины по поляризациям:

$$\xi^\alpha = -iA(\eta)S^\alpha, \quad h_\alpha^0 = -iP(\eta)S_\alpha, \quad h_\alpha^\beta = \sigma(\eta)S_\alpha^\beta, \quad \frac{u_\alpha^1}{\alpha} = iV(\eta)S_\alpha. \tag{4.2}$$

Из (2.4) вытекают следующие формулы для возмущений метрики и характеристик вещества, порождаемых калибровочными преобразованиями

$$P = -A', \quad \sigma = nA, \quad V = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение для нахождения σ следует из (1.11)

$$\sigma'' + \frac{\beta+1}{\eta}\sigma' + n^2\sigma = 0. \tag{4.4}$$

Из (1.15) получаем для смешанных пространственно-временных компонент метрики

$$\left[\eta^{\beta+1}P\right]' = n\eta^{\beta+1}\sigma. \tag{4.5}$$

Для скорости, учитывая в (1.12) производную от (1.14), имеем

$$V = \frac{(\sigma' + nP)n}{2\kappa\alpha^2(\varepsilon+p)}. \tag{4.6}$$

5. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ (ТЕНЗОРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

Поперечная тензорная волна:

$$G^\beta_\alpha = g^\beta_\alpha\,\mathrm{e}^{inr}, \quad g^\beta_\alpha n_\beta = 0. \tag{5.1}$$

В данном случае инфинитезимальный калибровочный вектор ξ^k не имеет ни временной, ни пространственной части, так как отсутствуют какие бы то ни было скаляры и векторы. Разложим ненулевые компоненты метрики по поляризациям:

$$h^\beta_\alpha = \nu(\eta)G^\beta_\alpha. \tag{5.2}$$

Уравнение для нахождения $\nu(\eta)$ вытекает из (1.11)

$$\upsilon'' + \frac{\beta+1}{\eta}\upsilon' + n^2\upsilon = 0. \tag{5.3}$$

Это уравнение мы уже встречали в предыдущих двух разделах. Оно полностью совпадает с уравнением для тензорных возмущений в ОТО.

Таким образом, в итоге все векторные и тензорные величины имеют следующие разложения по поляризациям:

$$\begin{gathered}
\xi^0 = \Omega(\eta)Q, \quad \xi^\alpha = -i\left(a(\eta)P^\alpha + A(\eta)S^\alpha\right), \\
h^0_0 = \omega(\eta)Q, \quad h^0_\alpha = -i\left(\rho(\eta)P_\alpha + P(\eta)S_\alpha\right), \\
h^\beta_\alpha = \mu(\eta)Q^\beta_\alpha + \lambda(\eta)P^\beta_\alpha + \sigma(\eta)S^\beta_\alpha + \upsilon(\eta)G^\beta_\alpha, \quad h = \mu(\eta)Q, \\
\frac{u^1_\alpha}{\alpha} = i\left(v(\eta)P_\alpha + V(\eta)S_\alpha\right), \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \delta(\eta)Q.
\end{gathered}$$

В части II (приложении) мы будем искать решение полученных общих уравнений на нескольких характерных этапах, составляющих эволюцию Вселенной в РТГ с ненулевой массой гравитона: на первом полупериоде разобьем ее на пять этапов: нижний ($\alpha \sim \mathrm{const} + \eta^2$), радиационно-доминированный ($\alpha \sim \eta$), пылевой ($\alpha \sim \eta^2$), доминирования квинтэссенции ($\alpha \sim \eta^{\frac{\beta+1}{2}}$) и верхний ($\alpha \sim \mathrm{const} - \eta^2$). Решения уравнений для возмущений на втором полупериоде могут быть получены из решений на первом полупериоде. Эти уравнения симметричны относительно замены $\eta \to -\eta$ (с учетом того, что $\alpha(\eta) = \alpha(-\eta)$), поэтому решения при $-\infty < \eta < 0$ получаются из решений при $0 < \eta < \infty$ такой же заменой переменной η. Развитие возмущений на втором полупериоде описывается этими полученными решениями при $\eta \to 0$ ($\eta = 0$ соответствует $\alpha_{\min}$). На каждом этапе будут найдены калибровочные векторы и будет показано, какие именно из полученных общих решений не имеют физического смысла и могут быть устранены подходящим калибровочным преобразованием.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Модестов К. А., Чугреев Ю. В.* Вопрос устойчивости однородной и изотропной Вселенной в РТГ // Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т. 6, вып. 4. С. 449–471.
2. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006. 253 с.
3. *Лифшиц Е. М.* О гравитационной устойчивости расширяющегося мира // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 587–602.
4. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.* Проблемы релятивистской космологии // УФН. 1963. Т. LXXX, вып. 3. С. 391–438.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
6. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.;
   Weinberg S. Gravitation and Cosmology. N. Y.: Wiley, 1972.
7. *Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* Фридмановская модель эволюции Вселенной в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 80, № 2. С. 305–312.
8. *Герштейн С. С. и др.* Эволюция Вселенной в полевой теории гравитации // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 5. С. 1003–1050.

Получено 17 октября 2012 г.