Письма в ЭЧАЯ. 2014. Т. 11, № 6(190). С. 1118–1121

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ И МАГНИТНАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ТОЧЕЧНОПОДОБНЫХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

А. Я. Силенко[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск

Электрическая и магнитная поляризуемости точечноподобных частиц со спином 1/2, имеющих аномальный магнитный момент, рассчитаны путем преобразования исходного гамильтониана к представлению Фолди–Ваутхойзена. Произведено сравнение соответствующих результатов для частиц со спинами 1/2 и 1.

Electric and magnetic polarizabilities of pointlike spin-1/2 particles possessing an anomalous magnetic moment are calculated with the transformation of an initial Hamiltonian to the Foldy–Wouthuysen representation. Comparison of corresponding results for spin-1/2 and spin-1 particles is performed.

PACS: 03.65.Pm; 11.10.Ef; 12.20.Ds

В настоящей работе мы определяем электрическую и магнитную поляризуемости точечноподобных частиц со спином 1/2, имеющих аномальный магнитный момент (АММ), путем использования преобразования Фолди–Ваутхойзена (ФВ).

Уникальные свойства представления ФВ [1] делают его весьма удобным для перехода к квазиклассическому приближению и нахождения классического предела релятивистской квантовой механики. Даже для релятивистских частиц во внешнем поле операторы в данном представлении полностью аналогичны соответствующим операторам нерелятивистской квантовой механики. В частности, операторы положения (Ньютона–Вигнера) [2] и импульса равны $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, а оператор поляризации для частиц со спином 1/2 выражается дираковской матрицей $\mathbf{\Pi}$. В других представлениях эти операторы определяются значительно более громоздкими формулами (см. [1, 3]). Помимо простого и однозначного вида операторов, соответствующих классическим наблюдаемым, важнейшим достоинством представления ФВ является восстановление вероятностной интерпретации волновой функции. Поскольку, как указано выше, именно в представлении ФВ оператор Ньютона–Вигнера, характеризующий положение геометрического центра частицы, равен радиус-вектору $\mathbf{r}$, то квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности нахождения частицы в точке с данным радиус-вектором. Отметим, что

[1] E-mail: silenko@inp.minsk.by

в представлении ФВ гамильтониан и все операторы диагональны по двум спинорам (блок-диагональны). Использование этого представления устраняет возможность появления неоднозначностей при решении задачи нахождения классического предела релятивистской квантовой механики [1, 4].

К наиболее важным периметрам, характеризующим частицы и ядра, принадлежат скалярные электрическая и магнитная поляризуемости. Их вклад в гамильтониан в представлении ФВ определяется выражением

$$\Delta\mathcal{H}_{\rm FW} = -\frac{1}{2}\alpha_s E^2 - \frac{1}{2}\beta_s B^2. \tag{1}$$

Мы рассматриваем случай стационарных и однородных электрического ($\mathbf{E}$) и магнитного ($\mathbf{B}$) полей и используем систему единиц $\hbar = 1$, $c = 1$.

Если в классической физике частица может иметь ненулевые поляризуемости только при наличии у нее внутренней структуры, то в квантовой механике они появляются даже у точечноподобных объектов. Определить эти параметры позволяет преобразование ФВ исходного уравнения Дирака–Паули [5] для частиц с АММ с последующим переходом к классическому пределу. Однако для решения данной задачи необходимо вычисление слагаемых, квадратичных по внешнему полю. Эта процедура требует определенной осторожности, поскольку разные методы приводят к различным результатам (см. обзор [6] и ссылки там). К правильным результатам приводит использование метода Эриксена [7]. Исходный гамильтониан Дирака–Паули [5] удобно разделить на четные и нечетные слагаемые, коммутирующие и антикоммутирующие с дираковской матрицей β соответственно:

$$\mathcal{H}_D = \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \quad \beta\mathcal{E} = \mathcal{E}\beta, \quad \beta\mathcal{O} = -\mathcal{O}\beta. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathcal{E} = e\Phi - \mu'\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{B}, \quad \mathcal{O} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + i\mu'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}, \tag{3}$$

где μ' — АММ. Мы используем обычные обозначения [8] для дираковских матриц.

Разложение гамильтониана в представлении ФВ по степеням $1/m$, полученное методом Эриксена, приведено в работах [6, 9, 10]. В анализируемом случае слагаемые, пропорциональные четвертой и более высоким степеням обратной массы, можно не учитывать. В этом случае гамильтониан в представлении ФВ определяется уравнением

$$\mathcal{H}_{\rm FW} = \beta\left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3}\right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{F}]] + \frac{\beta}{16m^3}\left\{\mathcal{O},[[\mathcal{O},\mathcal{F}],\mathcal{F}]\right\}, \tag{4}$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{E} - i\partial/\partial t$. Для рассматриваемой стационарной задачи $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

Расчет по формулам (3), (4) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\rm FW} = \beta\left(m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{\boldsymbol{\pi}^4}{8m^3}\right) + e\Phi + \frac{1}{2m}\left(\frac{\mu_0}{2} + \mu'\right)(2\mathbf{\Sigma}\cdot[\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E}] - \nabla\cdot\mathbf{E}) -\\ - (\mu_0 + \mu')\,\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{B} + \frac{\mu'}{4m^2}\left\{\mathbf{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{B}\right\} + \beta\frac{(\mu_0+\mu')\mu'}{2m}E^2 - \beta\frac{\mu_0^2}{2m}B^2,\end{aligned} \tag{5}$$

где $\mu_0 = e/(2m)$ — дираковский магнитный момент.

Отметим, что последнее слагаемое в уравнении (4) не вносит вклада в электрическую и магнитную поляризуемости. Расчет с помощью метода, предложенного в оригинальной работе Фолди и Ваутхойзена [1], и других итерационных методов (см. [10, 11] и ссылки там) приводит к иному виду этого слагаемого и, как следствие, не дает правильного выражения для электрической поляризуемости. Сравнение уравнений (1) и (5) показывает, что скалярные электрическая и магнитная поляризуемости точечноподобных частиц, обладающих АММ, имеют вид

$$\alpha_S = -\frac{(\mu_0 + \mu')\mu'}{m} = -\frac{e^2 g(g-2)}{16m^3}, \quad \beta_S = \frac{\mu_0^2}{m} = \frac{e^2}{4m^3}. \tag{6}$$

Матрицу β можно опустить, поскольку в представлении ФВ нижний спинор равен нулю.

Важным является сравнение поляризуемостей точечноподобных частиц со спинами 1/2 и 1. Частицы со спином 1 характеризуются не только скалярными, но и тензорными поляризуемостями, рассчитанными в [12]. Скалярные поляризуемости таких частиц определяются выражениями [12]:

$$\alpha_S = -\frac{e^2(g-1)^2}{m^3}, \quad \beta_S = 0. \tag{7}$$

Таким образом, скалярная магнитная поляризуемость частиц со спином 1 равна нулю, а скалярная электрическая поляризуемость отлична от нуля для частиц не только с аномальным, но и с нормальным $(g = 2)$ магнитным моментом. Эти свойства отличаются от соответствующих свойств частиц со спином 1/2.

Отметим, что скалярные поляризуемости точечноподобных частиц со спином 0 равны нулю (см. [13]).

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit // Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 29–36.
2. *Newton T. D., Wigner E. P.* Localized States for Elementary Systems // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400–406.
3. *Silenko A. J.* Foldy–Wouthuysen Transformation for Relativistic Particles in External Fields // J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 2952–2966.
4. *Costella J. P., McKellar B. H. J.* The Foldy–Wouthuysen Transformation // Am. J. Phys. 1995. V. 63. P. 1119–1121.
5. *Pauli W.* Relativistic Field Theories of Elementary Particles // Rev. Mod. Phys. 1941. V. 13. P. 203–232.
6. *de Vries E.* Foldy–Wouthuysen Transformations and Related Problems // Fortschr. Phys. 1970. V. 18. P. 149–182.
7. *Eriksen E.* Foldy–Wouthuysen Transformation. Exact Solution with Generalization to the Two-Particle Problem // Phys. Rev. 1958. V. 111. P. 1011–1016.
8. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 720 с.

9. *de Vries E., Jonker J. E.* Non-Relativistic Approximations of the Dirac Hamiltonian // Nucl. Phys. B. 1968. V. 6. P. 213–225.
10. *Силенко А. Я.* Сравнительный анализ методов прямого и «шаг за шагом» преобразования Фолди–Ваутхойзена // ТМФ. 2013. Т. 176. С. 189–204.
11. *Neznamov V. P., Silenko A. J.* Foldy–Wouthuysen Wave Functions and Conditions of Transformation between Dirac and Foldy–Wouthuysen Representations // J. Math. Phys. 2009. V. 50. P. 122302.
12. *Silenko A. J.* Quantum-Mechanical Description of Spin-1 Particles with Electric Dipole Moments // Phys. Rev. D. 2013. V. 87. P. 073015.
13. *Силенко А. Я.* Оператор Гамильтона и квазиклассический предел для скалярных частиц в электромагнитном поле // ТМФ. 2008. Т. 156. С. 398–411.

Получено 11 марта 2014 г.