

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ИСТОЧНИКАХ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ЭМИТТЕРОМ

*В. В. Алцыбеев*¹

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

В работе обсуждается реализация численных методов моделирования динамики потоков заряженных частиц в импульсных источниках. Для расчетов используется итерационный метод с моделью «трубок тока». Для определения тока эмиссии в режиме ограничения тока пространственным зарядом в случае криволинейного эмиттера предлагается модель эмиссии, основанная на применении закона Гаусса. Приводятся результаты моделирования динамики потоков заряженных частиц в биполярном цилиндрическом диоде и в диоде с эллиптическим эмиттером.

Implementation of numerical methods for studying dynamics of particles flows which are produced by pulsed sources is discussed. A particle tracking method with so-called gun iteration for simulations of beam dynamics is used. For the space charge limited emission problem we suggest Gauss law emission model for precise current density calculation in the case of curvilinear emitter. The results of numerical simulations of particles flows formation for cylindrical bipolar diode and for diode with elliptical emitter are presented.

PACS: 29.27.Bd

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При изучении динамики потоков электронов и ионов в импульсных источниках заряженных частиц наибольший интерес представляет стационарная стадия работы источника, характеризующаяся независимостью распределения электрических полей и плотности пространственного заряда от времени. Также зачастую ток эмиссии при таком режиме работы ограничен пространственным зарядом. В таком случае для вычисления электрического потенциала U и напряженности электрического поля \mathbf{E} в области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — граница области) возможно использовать уравнение Пуассона [1]

$$\begin{aligned} \Delta U(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_a} \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega, & \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\text{grad} U(\mathbf{r}), \\ U(\mathbf{r}) &= g(\mathbf{r}) \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_1, & \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

¹E-mail: altsybeyev@gmail.com

Здесь \mathbf{r} — вектор фазовых координат; $\rho(\mathbf{r})$ — распределение плотности пространственного заряда; $g(\mathbf{r})$ — некоторая функция, описывающая потенциалы электродов; ε_a — диэлектрическая проницаемость материала расчетной области; \mathbf{n} — вектор нормали к границе Γ_2 . Плотность пространственного заряда $\rho(\mathbf{r})$ вносится потоками заряженных частиц, движение которых в релятивистском случае описывается следующими уравнениями [1]:

$$\frac{d\mathbf{p}_{i,\alpha}}{d\tau} = \frac{q_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}_{i,\alpha})}{m_{0,\alpha} c^2}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{i,\alpha}}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}_{i,\alpha}}{\gamma_{i,\alpha}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{i,\alpha}(0) \in \Gamma_{e_\alpha}, \quad \mathbf{p}_{i,\alpha}(0) = \mathbf{p}_{i,\alpha}^0.$$

Здесь $i = \overline{1 \dots N_{i_\alpha}}$ — номера частиц в потоке частиц с номером $\alpha = \overline{1 \dots N_\alpha}$; $\gamma_{i,\alpha}$ — фактор Лоренца; c — скорость света, $\tau = ct$; $\mathbf{p}_{i,\alpha} = \mathbf{v}_{i,\alpha} \gamma_{i,\alpha} / c$ — импульсы частиц ($\mathbf{v}_{i,\alpha}$ — скорости частиц); $\mathbf{r}_{i,\alpha}$ — положения частиц; $\mathbf{p}_{i,\alpha}$ — начальные импульсы частиц; $m_{0,\alpha}$ — масса покоя частиц потока с номером α ; q_α — заряд частиц потока с номером α ; Γ_{e_α} — поверхность эмиссии потока частиц с номером α . Для плотности тока частиц \mathbf{J} выполняется уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{av}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_{av}(\mathbf{r})$ — средняя скорость частиц. Модуль плотности тока частиц каждого потока на эмиттере $J_{em_\alpha}(\mathbf{r})$ подлжит определению из условия равенства нулю нормальной компоненты напряженности электрического поля E_{n_α} на эмиттерах [2, 3]

$$E_{n_\alpha}(\mathbf{r}) = 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_{e_\alpha}. \quad (4)$$

Требуется найти стационарное решение задачи (1)–(4): распределение электрического поля, траектории частиц и распределения плотностей токов эмиссии для каждого потока.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Итерационный метод решения задачи (1)–(4) является наиболее широко используемым в силу его быстродействия [4–8]. Концепция данного метода подробно изложена в [8]. Для каждой эмитируемой траектории мы должны поставить в соответствие некоторый ток согласно распределению плотности тока эмиссии. Таким образом, суммарный ток, сопоставленный всем траекториям, будет равен току эмиссии. При этом пространственный заряд, вносимый каждой траекторией, может быть вычислен и просуммирован. После этого мы можем рассчитать электрические поля с учетом внесенного частицами заряда, рассчитать ток эмиссии каждого потока частиц, используя какую-либо модель эмиссии, и пересчитать траектории частиц, используя новые распределения полей [8]. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. В качестве критерия остановки итераций метода используется следующее условие:

$$\max_{s=1 \dots N_h} \left| \frac{U_s^n - U_s^{n-1}}{U_s^n} \right| < \varepsilon_{iter}.$$

Здесь U_s^n — электрический потенциал на n -й итерации в s -м узле расчетной сетки; N_h — число узлов сетки; $\varepsilon_{\text{iter}}$ — заранее определенная точность.

Погрешность, связанная с дискретизацией задачи, и вычислительные ошибки будут приводить к флуктуациям пространственного заряда и распределений поля, что может привести к расходимости итераций метода. Наиболее широко используемый метод подавления колебаний численного решения заключается в проведении процесса релаксации. Значения плотности пространственного заряда ρ в сеточных узлах для решения уравнения Пуассона (1) на каждой итерации будут определяться с помощью выражения [8]

$$\rho_n = (1 - \omega)\rho_{n-1} + \omega\bar{\rho}_n.$$

Здесь ω — коэффициент релаксации; $\bar{\rho}_n$ — плотность пространственного заряда, вносимая частицами на n -й итерации.

МОДЕЛЬ ЭМИССИИ

Для расчета плотности тока эмиссии вблизи каждого эмиттера строится дополнительная сетка, состоящая из прямоугольных (для двумерных задач) эмиссионных ячеек равного размера L_{em} на H_{em} , прилегающих одной гранью к эмиттеру (рис. 1). Для каждой из них выполняется закон Гаусса [9, 10]

$$\int_{\partial C_i} E_n dS = \frac{Q_i}{\varepsilon_a}. \quad (5)$$

Здесь ∂C_i — поверхность ячейки C_i ; E_n — нормальная компонента электрического поля к поверхности ячейки; Q_i — пространственный заряд, находящийся в ячейке C_i . Для

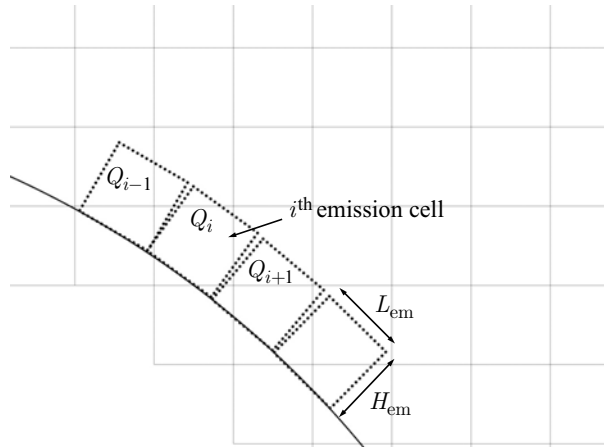


Рис. 1. К модели эмиссии частиц. Пунктирными линиями обозначены эмиссионные ячейки, сплошной жирной линией обозначена поверхность эмиссии, сплошными тонкими линиями обозначены ячейки расчетной сетки

задач с током, ограниченным пространственным зарядом, поток вектора напряженности через прилегающую к эмиттеру грань ячейки будет равен нулю [9, 10].

Общий заряд, вносимый частицами в каждую эмитирующую ячейку, может быть представлен в виде линейной комбинации суммарных токов I_{C_i} частиц, выпускаемых внутри эмитирующей ячейки C_i

$$Q_i = \sum_{j=1}^{j=N_C} a_{ij} I_{C_j}, \quad j = \overline{1, \dots, N_C}.$$

Здесь a_{ij} — коэффициент, определяющий вклад тока I_{C_j} в суммарный заряд ячейки C_i . Таким образом, вычислив на каждой итерации коэффициенты a_{ij} и потоки вектора напряженности через границы каждой эмитирующей ячейки, используя (5), можно рассчитать вектор I токов, переносимых через каждую эмитирующую ячейку, решив систему линейных уравнений

$$AI = \varepsilon_a F.$$

Здесь A — матрица коэффициентов a_{ij} ; F — вектор, содержащий суммарные потоки вектора напряженности электрического поля через расположенные в вакууме части поверхностей эмитирующих ячеек.

ПРИМЕР 1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ДИОД В ДЕКАРТОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим задачу моделирования динамики биполярного потока в бесконечно длинном цилиндрическом диоде в случае декартовой геометрии. Данный пример хорошо иллюстрирует работу модели эмиссии, основанной на применении закона Гаусса, поскольку для этой задачи известно аналитическое решение Ленгмюра [3]. Диод имеет внешний катод с радиусом $R_c = 0,2$ м, анод с радиусом $R_a = 0,05$ м. Напряжение $U_a = 12000$ В приложено к аноду с заземленным катодом. Расчет производился итерационным методом на прямоугольной сетке с шагами $h_x = 2$ мм, $h_y = 2$ мм. По отношению к размерам ячеек расчетной сетки длина и ширина эмитирующих ячеек выбрана следующей: $L_{em} = 4h_x$, $H_{em} = h_x$. Выбор достаточно длинных эмитирующих ячеек позволяет дополнительно

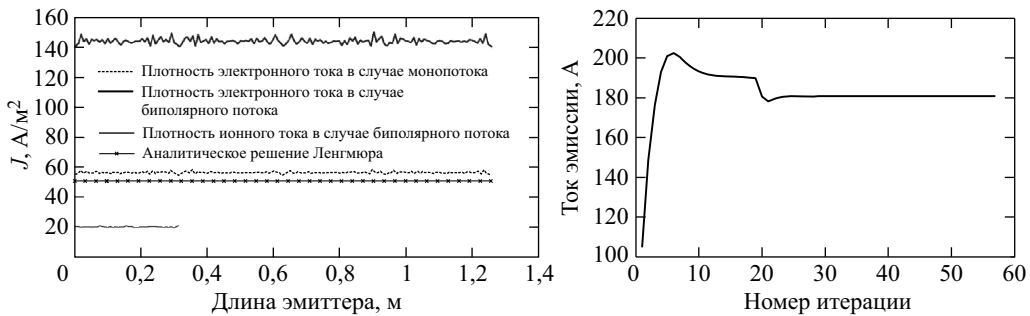


Рис. 2. Результаты моделирования цилиндрического диода. а) Распределения плотностей токов эмиссии; б) сходимость итераций метода

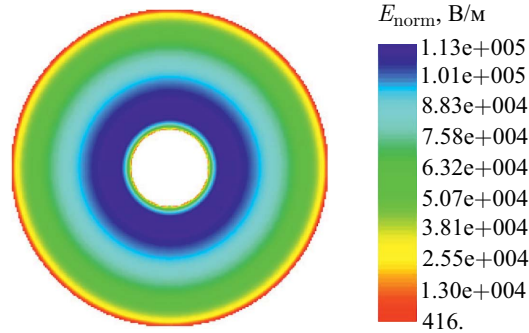


Рис. 3. Распределение модуля напряженности электрического поля в цилиндрическом диоде в случае биполярного потока

сгладить распределение плотности тока эмиссии. Производились расчеты для электронного монопотока, стартующего с катода, и для биполярного потока (ионы H^+ стартуют с анода). Начальная энергия частиц 10 эВ, число рассчитываемых траекторий для электронов 3000, для ионов 2000. Результаты расчета представлены на рис. 2, 3. Численное решение в случае электронного монопотока согласуется с аналитическим решением Ленгмюра. В случае биполярного потока, как и ожидается, ток эмиссии электронов значительно растет. В процессе расчета значение силы тока устанавливается уже за 30 итераций.

ПРИМЕР 2. ДИОД С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ЭМИТТЕРОМ

Также будем рассматривать задачу моделирования динамики пучка в диоде с эмиттером в виде полуэллипсоида. Осевое сечение геометрии диода представлено на рис. 4. Малая и большая полуоси эллипсоида $b = 0,01$ м, $a = 0,02$ м, полуширина диода $d = 0,15$ м, расстояние $L = 0,07$ м, высота цилиндрического основания эмиттера $h = 0,02$ м. Напряжение $U_a = 10000$ В приложено к аноду с заземленным катодом. В силу наличия аксиальной и центральной симметрии мы можем рассмотреть двумерную геометрию в RZ -координатах на половине диода (см. рис. 4). С торцевых концов диода при $Z = 0$ м и $Z = 0,15$ м используются граничные условия Неймана. Расчет проводился на прямоугольной сетке с шагами $h_z = 0,5$ мм и $h_r = 0,5$ мм. Начальная энергия электронов

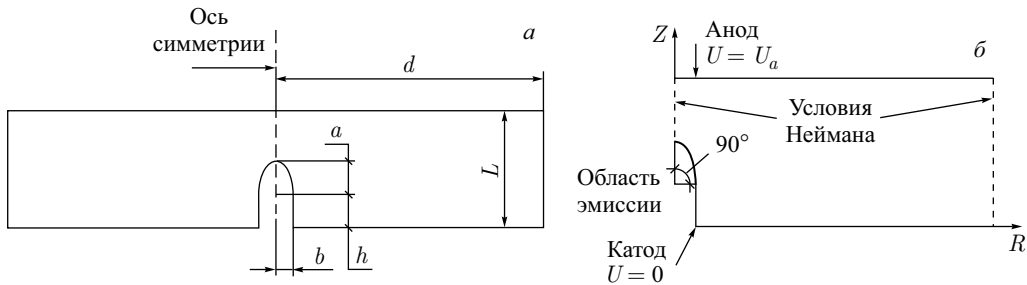


Рис. 4. Диод с эллиптическим эмиттером. Геометрия диода (а) и расчетная модель диода (б)

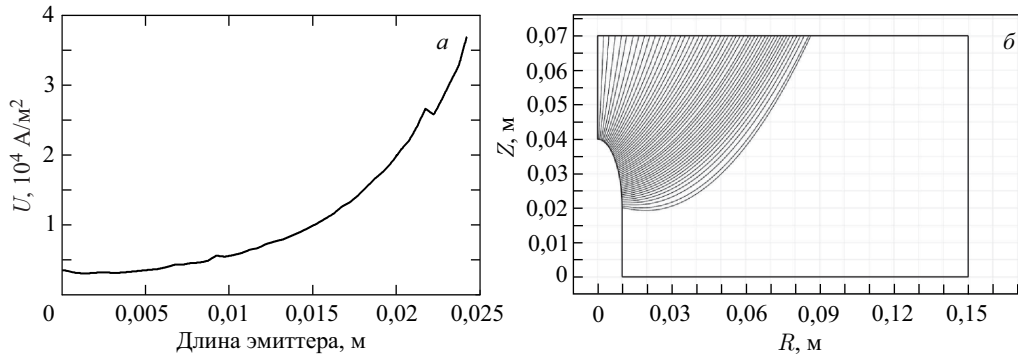


Рис. 5. Результаты моделирования диода с эллиптическим эмиттером. Распределение плотности тока эмиссии (а) и траектории частиц (б)

10 эВ, дискретизация потока по начальным скоростям не проводилась. Число рассчитываемых траекторий 1500. Результаты расчета представлены на рис. 5. Как и ожидалось, плотность тока эмиссии значительно возрастает в районе «острия» эмиттера, где напряженность внешнего поля максимальна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая в работе модель эмиссии для режима ограничения тока пространственным зарядом в совокупности с итерационным методом расчета электростатических задач адекватно работает в случае криволинейности эмитирующей поверхности, а также при наличии биполярного потока частиц. Также метод обладает хорошей сходимостью, что показано в приведенных примерах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (тема №9.38.673.2013). Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ» (<http://cc.spbu.ru>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hockney R., Eastwood J. Computer Simulation Using Particles. Francis, 1988. 540 p.
2. Child C.D. Discharge from Hot CaO // Phys. Rev. (Ser. I). 1911. V. 32, No. 5. P. 255–282.
3. Langmuir I., Blodgett K.B. Currents Limited by Space Charge between Coaxial Cylinders // Phys. Rev. 1923. V. 22. P. 347–356.
4. Altsybeyev V. et al. Numerical Simulations of the Radial Electron Flow Formation for the Triode Type Source // Proc. of the 10th Intern. Vacuum Electron Sources Conf. (IVESC 2014) and 2nd Intern. Conf. on Emission Electronics (ICEE 2014). 6891934.
5. Astrelin V. T. Features of Solving the Plasma Emission Electronics Problems in CAD POISSON-2 // Advances in Appl. Phys. 2013. V. 1, No. 5. P. 574–579.
6. CST Particle Studio. Computer Simulation Technologies. <https://www.cst.com/Products/CSTPS> (Last accessed on May 15, 2015).

7. *Головин Г. Т.* О точности и эффективности различных методов решения стационарных самосогласованных задач // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1985. Т. 25, № 8. С. 163–172.
8. *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.
9. *Mudiganti J. C.* An Emission Model for the Particle-in-Cell Method. Ph. D. Dissertation. TU Darmstadt, 2006.
10. *Watrous J. J., Lugisland J. W., Sasser G. E.* An Improved Space-Charge-Limited Emission Algorithm for Use in Particle-in-Cell Codes // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 289–296.