

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАССУ ГРАВИТОНА В РТГ

*Ю. В. Чугреев*¹

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В работе анализируется фридмановский космологический сценарий в РТГ (без инфляции). Совместное использование данных по сверхновым SNIa, по параметру сдвига микроволнового излучения и по барионным акустическим осцилляциям из слоуновского каталога красных галактик в методе максимизации функции правдоподобия позволило установить жесткие ограничения при фитировании массы гравитона в РТГ и пространственной кривизны в ОТО. Отмечается, что при стремящемся к нулю параметре квинтэссенции доверительный интервал для массы гравитона неограниченно расширяется. Эти выводы относятся к случаю, когда современное значение масштабного фактора $a_0 > (2)^{-1/6} \cong 0,89$. Если же $a_0 < (2)^{-1/6}$, то из этих наблюдательных данных установлено жесткое ограничение на массу гравитона $m < 10^{-83}$ г, означающее, что в широком диапазоне красных смещений $0 < z < 10^{15}$ членами с массой гравитона в уравнениях гравитационного поля можно пренебречь (кроме решений типа черных дыр).

In the paper the FRWL cosmological scenario has been searched in the framework of RTG with no inflation. Tight fit constraints on the mass of the graviton and on the curvature are derived by performing a joint likelihood analysis involving the recent supernovae type Ia data, the Cosmic Microwave Background (CMB) shift parameter and the Baryonic Acoustic Oscillations (BAOs) as traced by the SLOAN Digital Sky Survey (SDSS) red luminous galaxies. It is found that the mass-of-the-graviton-c.l.-domain gets indefinitely enlarged as the quintessence parameter goes to zero. All the above results are valid when the present value of the scale factor is big: $a_0 > (2)^{-1/6} \cong 0.89$. For small a_0 the observational data put strong upper limit on the graviton rest mass $m < 10^{-83}$ g, allowing one to neglect all the m^2 terms in the field equations on the vast interval of redshifts $0 < z < 10^{15}$ (excepts the blackhole-type solutions).

PACS: 04.50.Kd; 95.30.Sf

ВВЕДЕНИЕ

Ровно 30 лет назад в работе [1] был предложен осциллирующий сценарий развития фридмановской Вселенной в релятивистской теории гравитации (РТГ), в которой тензорное гравитационное поле $\varphi^{\mu\nu}$ является массивным и описывается известными уравнениями:

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (1)$$

¹E-mail: chugreev@physics.msu.ru

$$D_\beta (\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}) = 0, \quad (2)$$

где m — масса гравитона; $\gamma_{\mu\nu}$ — метрика Минковского с ковариантной производной D_β ; $g_{\mu\nu}$ — метрика эффективного риманова пространства-времени:

$$\sqrt{\frac{\det(g_{\mu\nu})}{\det(\gamma_{\mu\nu})}}g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + \varphi^{\alpha\beta}; \quad (3)$$

$R_{\mu\nu}(g)$ — тензор Риччи; $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи; $G = M_{\text{Pl}}^{-2}$ — гравитационная постоянная; c — скорость света. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — 1, 2, 3. В дальнейшем мы будем использовать систему единиц $G = c = \hbar = k = 1$. При $m = 0$ уравнения (1), (2) формально совпадают с уравнениями ОТО в гармонических координатах. Добавление к ним членов с массой гравитона изменяет характер фридмановского однородного и изотропного решения ОТО. Для плоской Вселенной¹ с метриками

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a(t)^6 dt^2 - \beta a(t)^2 d\mathbf{r}^2, \quad (4)$$

$$d\sigma^2 \equiv \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dt^2 - d\mathbf{r}^2, \quad (5)$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, β — константа интегрирования уравнения (2), получаются следующие космологические уравнения:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{m^2}{12} \left[2 - \frac{3}{\beta a^2} + \frac{1}{a^6}\right], \quad (6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) - \frac{m^2}{6} \left[2 - \frac{1}{a^6}\right]. \quad (7)$$

Как обычно, $(\dot{}) \equiv d/d\tau$ — производная по собственному времени ($a^3 d/dt = d/d\tau$); $\rho(\tau)$, $p(\tau)$ — плотность и давление вещества Вселенной.

Из закона сохранения энергии вещества

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (8)$$

следует, что при простейшем выборе уравнения состояния $p = \omega\rho$, $\omega = \text{const}$, плотность ρ зависит от масштабного фактора так же, как в ОТО ($A_\omega = \text{const}$),

$$\rho = \frac{A_\omega}{a^{3(1+\omega)}}. \quad (9)$$

Появление новых m^2 -членов в основном космологическом уравнении (6) с точки зрения ОТО можно интерпретировать как композицию трех компонент [2]: отрицательного космологического члена $\Lambda = -m^2/6$, члена с положительной пространственной кривизной $1/4\beta$ и духа с предельно жестким уравнением состояния $\omega = 1$ ($\rho \sim -a^{-6}$).

¹Вообще говоря, уравнения (1) и (2) допускают и фридмановские решения с отрицательной пространственной кривизной [2], но они не удовлетворяют принципу причинности.

До открытия космологического ускорения плотность вещества (9) считалась двухкомпонентной, состоящей из вещества и излучения:

$$\rho = \frac{A_M}{a^3} + \frac{A_r}{a^4}, \quad (10)$$

поэтому возникали две разворотные точки — при высоких плотностях ($a \ll 1$) дух «догонял» преобладающую в этой фазе радиацию, а при малых ($a \gg 1$) плотность материи при достаточно больших a неизбежно должна была сравняться с $m^2/16\pi$, где и происходил отскок ($a = a_{\max}$) с последующим развитием коллапса Вселенной к a_{\min} . Период развития определялся только массой гравитона:

$$T = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{m}, \quad (11)$$

поэтому из условия, что время жизни Вселенной от a_{\min} до настоящего момента времени (a_0) должно быть меньше полупериода ее полного цикла, следовало ограничение на массу гравитона:

$$m < \sqrt{\frac{3}{2}} \pi m_H = 3,85 m_H, \quad (12)$$

где $m_H \equiv \frac{\hbar H_0}{c^2} = 2,66 \cdot 10^{-66}$ г — «масса Хаббла»; $H_0 = 70$ км/с/Мпк — постоянная Хаббла. Масса гравитона проявляла себя только вблизи точек разворота, в остальном фридмановский сценарий ОТО не менялся. В работе [3] было показано, что при $\beta \geq a_{\max}^4$ такое решение удовлетворяет принципу причинности, поэтому a^{-2} — член в (6), хотя и спадает медленнее, чем ρ (10), но не может участвовать в фиксации a_{\max} .

Принцип причинности в РТГ накладывает существенные ограничения на космологические решения, поэтому остановимся на нем немного подробнее. РТГ построена в рамках полевого подхода в теории гравитации, а именно — это теория массивного тензорного гравитационного поля на фоне пространства Минковского. Полевые уравнения (1), (2) явным и неустранимым образом содержат метрику пространства Минковского. Риманово же пространство, согласно (3), возникает как эффективное, причем свободное движение частиц по геодезическим риманова пространства-времени должно представляться как движение этих частиц под действием тензорной силы гравитации в допустимой, в общем случае неинерциальной, системе отсчета пространства Минковского, связанной с этой частицей. Этого можно добиться, если конус эффективного риманова пространства-времени не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. В противном случае это означало бы, что для такого «гравитационного поля» в пространстве Минковского не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это «силовое поле» при действии на материальную точку можно было бы скомпенсировать. Иными словами, такие тахионные гравитационные поля должны исключаться. Наиболее подробное обсуждение самого принципа причинности содержится в монографии [4], а его применение для различных космологических приложений — в [2–13].

Осциллирующий характер развития Вселенной позволяет разрешить такие известные проблемы стандартного космологического сценария ОТО, как проблемы сингулярности, плоскостности, горизонта и концентрации реликтовых монополей без дофридмановской инфляционной стадии [5]. Вместе с тем вопрос происхождения возмущений,

обеспечивающих к моменту рекомбинации спектр Гэрисона–Зельдовича с амплитудой $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$, в нашем сценарии пока остается открытым. Напомним, что в ОТО нужный спектр дают прошедшие через инфляционную стадию квантовые возмущения скалярного поля [14].

После открытия на рубеже веков космологического ускорения и изменения знака параметра замедления появилась необходимость добавления к традиционному составу вещества (10) либо космологического члена (с положительным знаком), либо квинтэссенции с отрицательным давлением [15, 16]. Вариант с космологическим членом был отвергнут, так как на поздних временах он приводил к инфляционному разлету с неизбежным нарушением принципа причинности. Поэтому оставалась только одна возможность — квинтэссенция с медленно меняющейся плотностью:

$$\rho = \frac{A_M}{a^3} + \frac{A_r}{a^4} + \frac{A_\nu}{a^{3\nu}}, \quad (13)$$

$$p_\nu = -(1 - \nu)\rho_\nu, \quad 0 < \nu < \frac{2}{3}. \quad (14)$$

Позднее в работе [8] был предложен лагранжиан скалярного поля, реализующего эту модель. При этом точка разворота при малых плотностях стала определяться уже не веществом темной материи A_M/a^3 , а намного более медленной темной энергией. Вследствие этого период циклического развития стал зависеть от двух параметров [17]:

$$T = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{m\nu}. \quad (15)$$

Поэтому возник вопрос о том, можно ли теперь установить оценку на массу гравитона? О принципиальной возможности сделать это было сказано в работе [15] на основании формального сходства космологического уравнения РТГ (6), записанного в стандартных обозначениях, и в предположении $a_0 \gg 1$

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_r}{x^4} + \frac{\Omega_M}{x^3} + \frac{\Omega_\nu}{x^{3\nu}} - \frac{m^2}{6H_0^2} \right] \quad (16)$$

с космологическим уравнением ОТО с пространственной кривизной Ω_K

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_r}{x^4} + \frac{\Omega_m}{x^3} + \frac{\Omega_\nu}{x^{3\nu}} + \frac{\Omega_K}{x^2} \right], \quad (17)$$

где

$$\Omega_K = \frac{A_K}{a_0^2 \rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{A_r}{a_0^4 \rho_c}, \quad \Omega_m = \frac{A_M}{a_0^3 \rho_c}, \quad \Omega_\nu = \frac{A_\nu}{a_0^{3\nu} \rho_c},$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \rho_c = \frac{3}{8\pi} H_0^2, \quad H_0 = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)_0, \quad x = \frac{a}{a_0}.$$

Индекс 0 относится к настоящему моменту времени.

При $a = a_0$ ($x = 1$) получаем долевой баланс энергий в современную эпоху:

$$\text{в РТГ} \quad \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\nu = 1 + \frac{m^2}{6H_0^2}, \quad (18)$$

$$\text{в ОТО} \quad \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\nu = 1 - \Omega_K. \quad (19)$$

Физический смысл величин в левых частях (18) и (19) — сумма всех удельных составляющих полной плотности (энергии) вещества (Ω_{tot}), каждая из которых положительна. На момент публикации работ [15, 16] фитирование в ОТО формул (17) и (19) в рамках модели Λ CDM ($\nu = 0$) на базе данных по 1) спектру однолетних наблюдений реликтового излучения на спутнике WMAP [18]; 2) барионным акустическим осцилляциям в корреляционной функции галактик из обзора Sloan Digital Sky Survey [19] и по 3) сверхновым SNIa давало с точностью 1σ оценку [20]

$$\Omega_K = -0,018_{-0,013}^{+0,022}, \quad (20)$$

что доказывало плоскостность фридмановской Вселенной в ОТО. В работах [15, 16] и последующих результат фитирования члена с пространственной кривизной в ОТО (20) был интерпретирован, повторюсь, на основе формального сходства (18) и (19), как установление верхнего предела на массу гравитона в РТГ:

$$m < 0,42 m_H \quad (21)$$

и, соответственно, на плотность полной энергии вещества в единицах критической плотности

$$\Omega_{\text{tot}} = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\nu = 1,018_{-0,022}^{+0,013}. \quad (22)$$

Однако, как следует из (17), оценка (20) получена для амплитуды компоненты, убывающей как $1/x^2$, в то время как зависимость Ω_ν - и m^2 -членов от x в (16) совершенно другая. В ОТО измерялась не непосредственно Ω_{tot} , а величина пространственной кривизны. Для того чтобы найти ограничения на m и ν в РТГ, необходимо провести аналогичную процедуру фитирования с перечисленными выше данными астрономических наблюдений. Это будет сделано в настоящей работе.

В отличие от Ω_{tot} , доли излучения и вещества можно установить независимо от трех вышеперечисленных тестов: $\Omega_r = 5 \cdot 10^{-5}$ и $\Omega_M = 0,27$ [21]. Тогда из (18) можно получить

$$\Omega_\nu \cong 0,73 + \frac{m^2}{6m_H^2}. \quad (23)$$

Все три теста, как мы увидим, определяются областью от момента рекомбинации ($x \sim 10^{-3}$) до $x = 1$ (настоящее время), и исключительно зависимостью $H = H(x)$. Как следует из (16) и (23), при достаточно малом значении ν квинтэссенция неотличима от константы (Λ -члена): например, для $\nu = 0,001$ величина $\Omega_\nu/x^{3\nu}$ меняется лишь на 2% при изменении x на три порядка, в то время как вклад от Ω_M/x^3 — на девять порядков. При $\nu \rightarrow 0$ изменение квинтэссенции будет стремиться к нулю и последние два члена в (16) фактически сведутся к разности двух констант (23). Поэтому при достаточно малых ν для *любого* значения m найдется Ω_ν , близкое к значению (23). Чем меньше ν , тем шире будет диапазон допустимых значений m : $0 < m < m(\nu)$, причем при $\nu \rightarrow 0$ $m(\nu) \rightarrow \infty$. Эту зависимость мы явно получим в этой работе в результате фитирования РТГ по современным данным трех указанных выше тестов. Таким образом, ограничение сверху на массу гравитона будет возможно лишь тогда, когда в результате повышения точности астрономических наблюдений в ОТО будет сделан выбор в пользу квинтэссенции: $\nu \geq \nu_{\text{min}}$. Тогда и можно будет установить ограничение на массу гравитона в РТГ:

$m < m(\nu_{\min})$. Напомним, что все эти выводы относятся к случаю $a_0 \gg 1$. Если $a_0 \ll 1$, то, как будет показано в разд. 2, ограничение сверху на массу гравитона возможно (24).

Содержание работы включает три раздела. Во введении изложена история вопроса и кратко обсуждается необходимость уточнения стандартного космологического сценария в РТГ. В разд. 1 приводятся необходимые для фитирования последние данные со спутника HST по Union 2.1 компиляции 580 сверхновых типа SNIa [22], по барионным акустическим осцилляциям (BAO) из спектроскопического набора 46 748 красных галактик каталога SDSS [19] и параметру сдвига (CMB shift), определяющему главный максимум в спектре анизотропии реликтового излучения, полученный из данных семи-летних наблюдений со спутника WMAP [23].

При выбранном из независимых источников значении $\Omega_M = 0,27$ для m/m_H построена область допустимых значений с точностью 1σ при фиксированных значениях параметра квинтэссенции ν от $2/3$ до $0,001$. Для корректного сравнения с ОТО на этих же наблюдательных данных выполнено фитирование параметра Ω_K в ОТО в диапазоне ν от $0,5$ до $0,005$. Для фитирования использовалась функция правдоподобия, которая объединяла данные всех трех тестов (SN + BAO + CMB). Результаты представлены как графически, так и в виде таблиц. Сделан вывод о невозможности установления ограничения сверху на массу гравитона в РТГ на основе этих тестов при $a_0 > (2)^{-1/6}$, в отличие от параметра квинтэссенции, для которого получена оценка $\nu \leq 0,05 (1\sigma)$.

В разд. 2 анализируется уточненный фридмановский космологический сценарий РТГ с учетом результатов фитирования. Показано, что следует различать два случая: 1) $a_0 < (2)^{-1/6}$ и 2) $a_0 > (2)^{-1/6}$ (инфляции нет).

Если $a_0 < (2)^{-1/6}$, то отрицательная плотность энергии членов с массой гравитона в (6) в настоящее время меньше критической, как минимум, на 36 порядков. На массу гравитона в этом случае можно установить ограничение сверху:

$$\frac{m}{m_H} < 10^{-18}, \quad \frac{m}{m_H} < 10^{-83} \text{ г}, \quad (24)$$

а период эволюции Вселенной оказывается огромным,

$$T > 10^{21} \text{ млрд лет}. \quad (25)$$

Столь большое значение периода обусловлено, прежде всего, выбором модели квинтэссенции с медленно меняющейся плотностью энергии.

Для случая $a_0 > (2)^{-1/6}$ получена оценка на массу гравитона, которая зависит от значения масштабного фактора в настоящее время:

$$a_0^3 \cdot 10^{-31} < \frac{m}{m_H} < a_0^3 \cdot 10^{-18}.$$

1. ФИТИРОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РТГ И ОТО НА СТАНДАРТНОМ НАБОРЕ ДАННЫХ (SN + BAO + CMB)

Мы будем фитировать формулу (16), отвечающую выбору $a_0 \gg 1$.

Выберем вначале свободные параметры, которые необходимо фитировать. Примем, как обычно [21],

$$H_0 = 70 \text{ км/с/Мпк}, \quad \Omega_r = 5 \cdot 10^{-5}. \quad (26)$$

Величина Ω_M состоит из вклада барионов $\Omega_B = 0,045$, который зависит от постоянного значения отношения числа барионов к числу фотонов ($\sim 10^{-10}$), и вклада темной материи, который независимо определяется различными методами, включая [24]: 1) фитирование небарионной кластеризации при формировании структуры во Вселенной, 2) распределение масс и скоростей галактик в их скоплениях, 3) гравитационное линзирование галактик скоплениями галактик, 4) кривые вращения звезд в галактиках и газовых облаков вокруг них и др. Все эти методы, учитывая и малый вклад от нейтрино, дают суммарное значение

$$\Omega_M = \Omega_B + \Omega_{\text{CDM}} + \Omega_{\text{neut}} = 0,27. \quad (27)$$

Небольшое изменение этой величины принципиально не скажется на результатах фитирования. Для нас важно фиксировать Ω_M . В принципе возможно и полное фитирование, например, методом (цепочек) Монте-Карло, когда мы оставляем свободными и Ω_M , и H_0 , и параметр квинтэссенции ν и m/m_H в РТГ, а в ОТО — Ω_M , H_0 , Ω_K . Генерируя случайным образом эти свободные параметры и вычисляя каждый раз функцию правдоподобия, можно найти такие их значения, которые ее максимизируют, и определить на основе этой статистики соответствующие доверительные интервалы. Это технически более сложная задача. Для наших целей достаточно рассмотреть двумерное сечение такой многомерной поверхности (функции правдоподобия) значений параметров, фиксировав Ω_M и Ω_r , а затем для различных допустимых (и тоже фиксированных) значений ν найти с погрешностью 1σ диапазон допустимых значений для величины $f \equiv (m/m_H)^2/6$ в РТГ и Ω_K в ОТО. Таким образом, в каждом случае свободным будет только один параметр.

Величина квинтэссенции в РТГ будет равна

$$\Omega_\nu = 0,73 + f, \quad (28)$$

а в ОТО

$$\Omega_\nu = 0,73 - \Omega_K. \quad (29)$$

Фитирование осуществляется по стандартной статистической процедуре поиска максимума функции правдоподобия, имеющей гауссову форму

$$L = \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \quad (30)$$

или, эквивалентно, минимума функции эstimатора χ^2 [25, 26].

Как отмечалось во введении, мы будем использовать три типа наблюдательных данных. Наиболее точные результаты дает фитирование сверхновых типа Ia с функцией χ_{SN}^2 :

$$\chi_{\text{SN}}^2 = \sum_{i=1}^{580} \frac{(\mu^{\text{th}}(z_i) - \mu_i^{\text{obs}})^2}{\sigma_i^2}, \quad (31)$$

где μ — разность видимой (m) и абсолютной (M) звездных величин:

$$\mu^{\text{th}} = m - M = 5 \log(d_L) + 25,$$

d_L — расстояние до сверхновой, находящейся на красном смещении z ,

$$d_L(z, \Omega) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad E(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad z = \frac{1}{x} - 1; \quad (32)$$

μ_i^{obs} — наблюдаемое значение сверхновой, находящейся на красном смещении z_i ; σ_i — ошибка определения величины μ_i^{obs} . В качестве набора $\{\mu_i^{\text{obs}}, \sigma_i\}$ мы использовали последние данные группы SuperNova Cosmology Project [22].

Для РТГ в (32) нужно подставить функцию

$$E(z) = [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\nu(1+z)^{3\nu} - f]^{1/2},$$

а для ОТО

$$E(z) = [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\nu(1+z)^{3\nu} + \Omega_K(1+z)^2]^{1/2}.$$

С учетом (26)–(28) свободным в РТГ остается параметр f :

$$E(z) = [5 \cdot 10^{-5}(1+z)^4 + 0,27(1+z)^3 + (0,72995 + f)(1+z)^{3\nu} - f]^{1/2}, \quad (33)$$

а для ОТО — пространственная кривизна Ω_K :

$$E(z) = [5 \cdot 10^{-5}(1+z)^4 + 0,27(1+z)^3 + (0,72995 - \Omega_K)(1+z)^{3\nu} + \Omega_K(1+z)^2]^{1/2}. \quad (34)$$

Фиксируя ν и подставляя (33), (34) в (31), будем изменять с маленьким шагом значения f и Ω_K соответственно, чтобы численно найти минимум функции χ_{SN}^2 . Эти значения f и Ω_K назовем принципиальными значениями параметров. Ошибку 1σ можно найти, численно определив то значение фитируемого параметра, при котором функция χ^2 увеличивается на единицу от минимального значения [25]. Два значения параметра, таким образом ограничивающие доверительный интервал 1σ , мы будем обозначать дополнительными индексами «+» и «-». Гауссова форма функции правдоподобия позволяет очевидным образом контролировать ошибку для больших доверительных интервалов 2σ , 3σ и т. п.

Измерения анизотропии реликтового излучения также дают возможность эффективно ограничить космологические параметры модели. Экспериментально определяемый параметр R микроволнового сдвига пропорционален световому расстоянию до сферы последнего рассеяния [27]:

$$R = \sqrt{\Omega_M} \int_0^{z_{\text{CMB}}} \frac{dz}{E(z)}. \quad (35)$$

Для пятилетних данных со спутника WMAP [28] $R = 1,71 \pm 0,019$, $z_{\text{CMB}} = 1090$, а для семилетних [23] $R = 1,7246 \pm 0,019$, $z_{\text{CMB}} = 1091,36^1$. Эстиматор χ^2 в этом случае

¹В 2012 г. опубликованы 9-летние результаты WMAP [29] с более сложным матричным эстиматором χ_{CMB}^2 . Вклад в суммарный эстиматор изменится незначительно, поэтому для простоты мы ограничились данными 7-WMAP. Для наших целей не столь существенна максимальная точность фитирования. По тем же причинам мы не использовали последние данные с европейского спутника Planck [30].

будет равен

$$\chi_{\text{СМВ}}^2 = \frac{(R - 1,729)^2}{0,019^2}. \quad (36)$$

Наконец, для характеристики барионных акустических осцилляций используют измеряемую на основе изучения 46 748 светящихся красных галактик каталога SDSS величину [19, 21]

$$A = \frac{\sqrt{\Omega_M}}{E(z_1)^{1/3}} \left(\frac{1}{z_1} \int_0^{z_1} \frac{dz}{E(z)} \right)^{2/3}, \quad (37)$$

равную $A = 0,469 \left(\frac{n_s}{0,98} \right)^{-0,35} \pm 0,017$, $z_1 = 0,35$, где n_s — наклон спектра мощности анизотропии реликтового излучения, равный $n_s = 0,96$ [14, 21]. Тогда эстиматор χ^2 можно представить в виде

$$\chi_{\text{ВАО}}^2 = \frac{(A - 0,472)^2}{0,01^2}. \quad (38)$$

Таким образом, совместное использование всех трех наборов данных приводит к необходимости минимизации функции χ^2 (31)–(38)

$$\chi^2 = \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_{\text{СМВ}}^2 + \chi_{\text{ВАО}}^2.$$

В работах [15, 16] и последующих использовались результаты совместного фитирования в рамках ОТО именно таких наблюдательных данных. Поэтому мы еще раз выполним определение параметра Ω_K , используя их последние обновления. Результат представим в виде табл. 1, взяв выборочно ряд характерных точек и на рисунке. В строке Ω_K отображаются принципиальные значения.

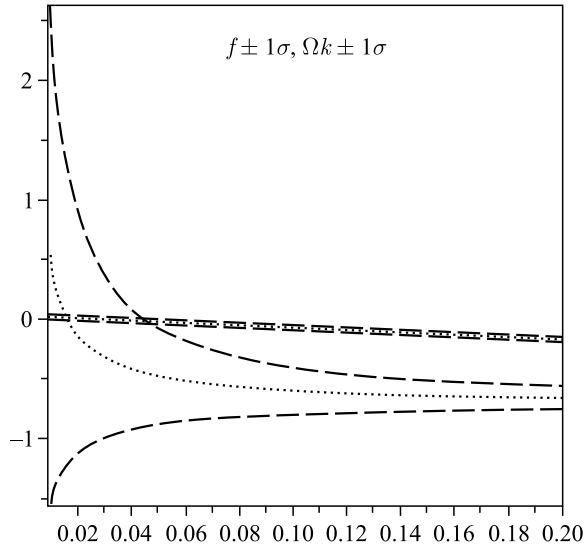
При $\nu < 0,02$ значения Ω_K , σ ($\Omega_K^\pm = \Omega_K \pm \sigma_K$) и χ^2 меняются крайне незначительно, а при $\nu < 0,005$ вообще не меняются. Однако с ростом ν , начиная от $\nu = 0,02$, минимум эстиматора χ^2 быстро возрастает, что говорит об ограничении сверху на параметр квинт-эссенции: $\nu < 0,02$. Отметим также, что ошибка определения Ω_K меняется в интервале (в зависимости от величины ν)

$$0,02 < \sigma_K < 0,05.$$

Для оценки параметра $f \equiv (m/m_H)^2/6$ в работах [15, 16] и последующих использовалось значение Ω_K^+ .

Таблица 1. Фитирование в рамках ОТО (с точностью 1σ величина Ω_K лежит в интервале $\Omega_K^- < \Omega_K < \Omega_K^+$)

Параметр	ν								
	0,5	0,3	0,15	0,08	0,05	0,02	0,015	0,01	0,005
Ω_K^-	-1,16	-0,36	-0,14	-0,072	-0,047	-0,024	-0,020	-0,017	-0,016
Ω_K	-1,11	-0,33	-0,116	-0,05	-0,025	-0,003	0,001	0,004	0,0041
Ω_K^+	-1,06	-0,3	-0,092	-0,028	-0,004	0,018	0,0215	0,025	0,025
$\chi^2 - 563$	59,3	13,35	2,155	0,48	0,222	0,194	0,192	0,19	0,189



Доверительные интервалы (1σ) и принципиальные значения для f (РТГ) и Ω_K (ОТО)

Таблица 2. Фитирование в рамках РТГ (с точностью 1σ величина $f \equiv (m/m_H)^2/6$ лежит в интервале $f^- < f < f^+$)

Параметр	ν								
	0,5	0,15	0,06	0,04	0,02	0,01	0,005	0,003	0,001
f^-	-0,74	-0,78	-0,86	-0,93	-1,13	-1,54	-2,35	-3,50	-8,8
f	-0,72	-0,65	-0,53	-0,42	-0,15	0,52	1,77	3,40	12,6
f^+	-0,70	-0,52	-0,19	0,09	0,93	2,60	5,94	10,40	32,7
$\chi^2 - 563$	0,271	0,20	0,1987	0,1979	0,1987	0,1968	0,1968	0,1966	0,1966

В РТГ результаты фитирования будут совершенно другими. Мы также приведем их как в табличном (выборочно), так и в графическом видах.

Анализ результатов фитирования в РТГ показывает, что минимум эстиматора функции правдоподобия χ^2 при $\nu < 0,3$ практически не меняется. Это означает, что все соответствующие значения f в пределах своих доверительных интервалов одинаково хорошо фитируют данные наблюдений, причем минимум χ^2 в РТГ практически (с точностью до $10^{-3}-10^{-4}$ %) совпадает с минимумом χ^2 в ОТО (при $\nu < 0,02$). С другой стороны, весь доверительный интервал f при $\nu > 0,05$ является отрицательным. Так как нас интересуют только положительные значения ($m = \sqrt{6f}m_H$), т.е. область $0 < f \leq f^+$, то отсюда можно сделать вывод, что с точностью 1σ параметр квинтэссенции ν ограничен сверху значением (при $\Omega_M = 0,27$):

$$0 < \nu \leq 0,05.$$

Эта оценка точно совпадает с мажорантой, полученной при рассмотрении в РТГ локального хаббловского потока галактик в местной группе [31].

Самым важным результатом фитирования является доказательство утверждения, сформулированного во введении: для срезов $\nu = \text{const} \rightarrow 0$ 1σ — доверительный интервал массы гравитона неограниченно расширяется, контрастируя с практически постоянной ошибкой при фитировании пространственной кривизны в ОТО. Аналогичная картина возникает и при отдельном фитировании данных по сверхновым, БАО и микроволновому сдвигу: при $\nu \rightarrow 0$ $f^+ \rightarrow \infty$. Мы не приводим детали этой процедуры, чтобы не загромождать изложение. Отметим лишь, что наименее точный из этих тестов — барионные акустические осцилляции.

2. ДВЕ СТАДИИ ФРИДМАНОВСКОГО КОСМОЛОГИЧЕСКОГО СЦЕНАРИЯ В РТГ

На основе данных по фитированию РТГ необходимо заново проанализировать сам космологический фридмановский сценарий. Результаты будут существенно зависеть от современного значения величины масштабного фактора a_0 : $a_0 < (2)^{-1/6}$ и $a_0 > (2)^{-1/6}$. Эти случаи не означают, что космологические сценарии различны. Это, конечно, один и тот же осциллирующий сценарий в РТГ. Но так как неизвестно, на какой из двух его стадий (разграниченных значением $a_0 = (2)^{-1/6}$) мы находимся, то необходимо рассматривать оба случая, весьма различных по своим следствиям.

2.1. Случай $a_0 < (2)^{-1/6}$. Подчеркнем, что мы рассматриваем сценарий без дофридмановской инфляционной стадии. В этом случае необходимо ограничить максимальную температуру величиной $kT = (T_{\text{max}})^{\text{max}} = 10^{16}$ ГэВ, при которой еще безопасна концентрация реликтовых монополей. Эта температура соответствует «максимальному значению максимальной плотности» $(\rho_{\text{max}})^{\text{max}} = 10^{81}$ г/см³. Минимальное же значение ρ_{max} не может быть ниже минимальной температуры постинфляционного разогрева в ОТО: $kT = (T_{\text{max}})^{\text{min}} = 10^3$ ГэВ, $(\rho_{\text{max}})^{\text{min}} = 10^{29}$ г/см³, для того чтобы при дальнейшем традиционном фридмановском разлете успели произойти все необходимые физические процессы во Вселенной: генерация темной материи и барионной асимметрии, первичный нуклеосинтез и т. п. [21, 24].

При $a \ll 1$ плотность вещества определяется плотностью излучения

$$\rho = \frac{A_M}{a^3} + \frac{A_r}{a^4} + \frac{A_\nu}{a^{3\nu}} \cong \frac{A_r}{a^4} = \frac{\rho_0 a_0^4}{a^4},$$

где

$$\rho_0 = \Omega_r \rho_c = 5 \cdot 10^{-5} \rho_c, \quad \rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 = 10^{-29} \text{ г/см}^3,$$

рост которой при $a \rightarrow 0$ должна остановить отрицательная компонента $m^2/6a^6$ в допустимом энергетическом интервале

$$(\rho_{\text{max}})^{\text{min}} < \rho < (\rho_{\text{max}})^{\text{max}}.$$

В этом случае

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^4}{a^4} - \frac{m^2}{12a^6},$$

т. е. при $a_0 < (2)^{-1/6}$ и в настоящее время $a = a_0$ ведущим из всех m^2 -членов все еще остается третий:

$$\frac{m^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2\beta a_0^2} + \frac{1}{2a_0^6} \right) \cong \frac{m^2}{12a_0^6}.$$

В момент отскока при максимальной плотности и температуре эта плотность равна плотности излучения

$$\frac{m^2}{12a_{\min}^6} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^4}{a_{\min}^4} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\max}.$$

В дальнейшем с ростом a член с массой гравитона убывает (по абсолютной величине) в a^2 раз быстрее плотности излучения и, следовательно, в настоящий момент времени меньше нее в $(a_0/a_{\min})^2$ раз:

$$\frac{m^2}{12a_0^6} / \frac{8\pi G}{3} \rho_0 = \left(\frac{a_{\min}}{a_0} \right)^2. \quad (39)$$

Так как для микроволнового излучения температура обратно пропорциональна масштабному фактору $aT = \text{const}$, то

$$\frac{m^2}{12a_0^6} / \frac{8\pi G}{3} \rho_0 = \left(\frac{T_0}{T_{\max}} \right)^2. \quad (40)$$

Для этой величины можно получить допустимый диапазон, подставив текущую температуру реликтового излучения $T_0 = 2,3 \cdot 10^{-13}$ ГэВ (2,7 К):

$$10^{-58} \sim \left(\frac{T_0}{(T_{\max})_{\max}} \right)^2 < \left(\frac{T_0}{T_{\max}} \right)^2 < \left(\frac{T_0}{(T_{\max})_{\min}} \right)^2 \sim 10^{-32}. \quad (41)$$

Таким образом, если $a_0 < (2)^{-1/6}$, то в настоящее время величина членов с массой гравитона ничтожна и уравнение космологического баланса в РТГ будет совпадать с уравнением ОТО для плоского случая с квинтэссенцией в качестве темной энергии:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\nu = 1.$$

Малая величина отношения плотностей (40), (41) приводит к сильному ограничению на массу гравитона и к огромной величине периода эволюции Вселенной.

Действительно, из (39) следует, что

$$m^2 = 32\pi G a_0^6 \rho_0 \left(\frac{a_{\min}}{a_0} \right)^2.$$

Подставляя сюда выражение современного значения плотности реликтового излучения через критическую плотность

$$\rho_0 = \frac{3\Omega_r}{8\pi G} H_0^2,$$

получим

$$m^2 = 12\Omega_r a_0^6 m_H^2 \left(\frac{a_{\min}}{a_0} \right)^2 < 12\Omega_r m_H^2 \left(\frac{a_{\min}}{a_0} \right)^2,$$

откуда

$$\frac{m}{m_H} < \sqrt{12\Omega_r} \frac{T_0}{(T_{\max})_{\min}} \sim 10^{-18}. \quad (42)$$

Это чрезвычайно жесткая оценка:

$$m < 10^{-83} \text{ г},$$

на 18 порядков уменьшающая предыдущую $m < 10^{-65}$ г [4, 15, 16, 20].

Оценим период эволюции. Так как членами с массой гравитона можно пренебречь, то мы вправе воспользоваться результатами фитирования в ОТО. Так как в этом случае для квинтэссенции получена оценка $\nu < 0,02$ (см. табл. 1), то для полупериода (15) получаем оценку снизу:

$$T = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{m\nu} > \frac{128}{m} > \frac{10^{20}}{m_H} \sim 10^{21} \text{ млрд лет},$$

причем [17]

$$\frac{a_{\max}}{a_0} = \left(\frac{6\Omega_\nu H_0^2}{m^2} \right)^{1/3\nu} > 10^{12/\nu} > 10^{600}.$$

Рассмотрим теперь общую оценку членов, содержащих массу гравитона, по сравнению с остальными в уравнениях гравитационного поля (1) для случая $a_0 < (2)^{-1/6}$. Для этого запишем интервалы (4), (5)

$$ds^2 = a(t)^6 dt^2 - a_{\max}^4 a(t)^2 d\mathbf{r}^2, \quad (43)$$

$$d\sigma^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad (44)$$

в координатах, когда риманова метрика «нормирована на настоящее время»:

$$ds^2 = d\tau^2 - \left(\frac{a(\tau)}{a_0} \right)^2 d\mathbf{r}^2, \quad (45)$$

$$d\sigma^2 = \frac{d\tau^2}{a(\tau)^6} - \frac{1}{a_{\max}^4 a_0^2} d\mathbf{r}^2. \quad (46)$$

Космологическое гравитационное поле (3) очень велико:

$$\varphi^{\alpha\beta} = a^6 a_{\max}^6 \left\{ 1, - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \delta^{ij} \right\} \sim a_{\max}^6,$$

$$a^6 a_{\max}^6 > a_{\min}^6 a_{\max}^6 > (10^{571})^6, \quad a_{\min}^4 a_{\max}^6 > (10^{581})^6.$$

Чтобы оценить слагаемое $m^2 \gamma_{\mu\nu}$ в уравнениях поля (1), рассмотрим вначале 00-компоненту. Из (46) и (39)–(41) получаем неравенство

$$m^2 \gamma_{00} = \frac{m^2}{a^6} = \frac{m^2}{a_0^6} (1+z)^6 < 10^{-32} (1+z)^6 \rho_0 \sim 10^{-32} (1+z)^2 \rho_r,$$

означающее, что вплоть до $z \sim 10^{15}$ членом $m^2 \gamma_{00}$ в уравнениях (1) можно пренебречь.

Пространственные компоненты метрики Минковского малы по сравнению с римановыми:

$$\frac{\gamma_{ij}}{g_{ij}} = \frac{1}{a_{\max}^4 a^2} < \frac{1}{a_{\max}^4 a_{\min}^2} \sim \left(\frac{1}{10^{586}} \right)^4,$$

поэтому $m^2 \gamma_{ij} \ll m^2 g_{ij}$. Но и сам космологический член $m^2 g_{\mu\nu}$ намного меньше члена темной энергии (также пропорционального $g_{\mu\nu}$):

$$\frac{m^2}{m_H^2 \Omega_\nu (1+z)^{3\nu}} = \frac{1}{\Omega_\nu} \left(\frac{m}{m_H} \right)^2 (1+z)^{-3\nu} < 10^{-37}.$$

Суммируя сказанное, можно утверждать, что в случае $a_0 < (2)^{-1/6}$ всеми членами, содержащими массу гравитона, можно пренебречь при положительных z (прошлое) вплоть до $z \sim 10^{15}$ и для отрицательных z (будущее) вплоть до $z = -1 + 10^{-599}$. При этом уравнения поля в РТГ совпадают с уравнениями ОТО в ковариантных гармонических координатах с квинтэссенцией.

Перейдем теперь к анализу другой возможности, характеризующейся большим современным значением масштабного фактора $a_0 > (2)^{-1/6}$.

2.2. Случай $a_0 > (2)^{-1/6}$. Найдем соотношение параметров модели, приводящих к отскоку в интервале температур $10^3 < T_{\max} < 10^{16}$ ГэВ. Аналогично случаю малых a_0 получим

$$12\Omega_r \sqrt{\frac{\rho_0}{(\rho_{\max})_{\max}}} a_0^6 < \frac{m^2}{m_H^2} < 12\Omega_r \sqrt{\frac{\rho_0}{(\rho_{\max})_{\min}}} a_0^6, \quad (47)$$

или, в другой форме,

$$\sqrt{12\Omega_r} \frac{T_0}{(T_{\max})_{\max}} a_0^3 < \frac{m}{m_H} < \sqrt{12\Omega_r} \frac{T_0}{(T_{\max})_{\min}} a_0^3. \quad (48)$$

Отсюда

$$10^{-31} < \frac{m}{m_H a_0^3} < 10^{-18}. \quad (49)$$

Так как $\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 = \frac{3}{8\pi G} m_H^2$, то уравнение энергетического баланса (6) можно записать в общем виде:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\nu (1+z)^{3\nu} - \frac{m^2}{6H_0^2} \left(1 - \frac{3(1+z)^2}{2a_{\max}^4 a_0^2} + \frac{(1+z)^6}{2a_0^6} \right) \right].$$

Малая величина параметра m^2/a_0^6 (49) позволяет пренебречь последним слагаемым, которое намного меньше первого члена вплоть до температур, меньших T_{\max} всего на порядок. Предпоследнее слагаемое также всегда меньше последнего в

$$\frac{a_{\max}^4}{3(1+z)^2 a_0^4} = \frac{(1+z)^2}{3} \frac{a_{\max}^4}{a^4}$$

раз за исключением области $a \sim a_{\max}$, где им можно пренебречь уже по сравнению с единицей (первый член в круглых скобках), так как здесь

$$\frac{(1+z)^2}{a_{\max}^4 a_0^2} \sim \frac{1}{a_{\max}^6} \ll 1.$$

Таким образом, если $a_0 > (2)^{-1/6}$, то вплоть до $z \sim 10^{15}$ уравнение энергетического баланса (6) принимает вид

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_r}{x^4} + \frac{\Omega_M}{x^3} + \frac{\Omega_\nu}{x^{3\nu}} - \frac{m^2}{6H_0^2} \right],$$

обосновывая выбор (16) для фитирования РТГ. Для больших a_0 при каждом фиксированном параметре квинтэссенции ν существует ограничение сверху на массу гравитона

$$0 < m < \sqrt{6f^+(\nu)} m_H.$$

Тогда из (48) можно найти ограничение и на сам параметр a_0 :

$$\sqrt[6]{2} < a_0 < \left(\frac{f^+(\nu)}{2\Omega_r} \right)^{1/6} \left(\frac{(T_{\max})_{\max}}{T_0} \right)^{1/3} = 2 \cdot 10^{10} (f^+(\nu))^{1/6}.$$

Некоторые численные значения и график функции $f^+(\nu)$ приведены в табл. 2 и на рисунке. Так, например, при $\nu = 0,001$ $m < 14,0 m_H$, $a_0 < 3,6 \cdot 10^{10}$.

Покажем теперь, что малая величина параметра m^2/a_0^6 (49) позволяет, подобно случаю $a_0 < (2)^{-1/6}$, значительно упростить уравнения гравитационного поля РТГ. Действительно, в координатах (45), (46), когда при $a = a_0$ $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, гравитационное поле является очень большим:

$$\varphi^{\alpha\beta} = a^6 a_{\max}^6 \left\{ 1, - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \delta^{ij} \right\} \sim a^6 a_{\max}^6 > a_{\max}^6 \gg 1,$$

а член $m^2 \gamma_{\mu\nu}$ в уравнениях поля (1) можно записать в виде

$$m^2 \gamma_{\mu\nu} = \frac{m^2}{a_0^6} \left\{ (1+z)^6, - \left(\frac{a_0}{a_{\max}} \right)^4 \delta_{ij} \right\}.$$

Тогда с помощью (49) получаем

$$m^2 \gamma_{\mu\nu} < (1+z)^2 \cdot 10^{-36} \rho_r.$$

И, следовательно, в широком диапазоне $z < 10^{15}$ можно отбросить член $-m^2 \gamma_{\mu\nu}$ в уравнениях поля РТГ (1):

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

Они, таким образом, сводятся к уравнению ОТО в гармонических координатах с отрицательным Λ -членом, равным $\Lambda = -m^2/2$, и квинтэссенцией. В силу (28) в ближней

Вселенной этот единственный член, содержащий массу гравитона, полностью экранируется квинтэссенцией, и поэтому, в частности, статическое решение будет близким к деситтеровской метрике ($\nu = 0$) [31], а не к потенциалу Юкавы. Это означает, что использовать решение Юкавы для описания массивного гравитационного поля в звездных и галактических системах [32] с целью установления ограничения на массу гравитона в РТГ нельзя.

С ростом точности астрономических наблюдений, возможно, будет сделан выбор в пользу квинтэссенции с $\nu \geq \nu_{\min}$ в рамках ОТО (доказать, основываясь только на трех обсуждавшихся тестах, что выполняется строгое равенство $\nu = 0$, очевидно, невозможно). В этом случае будет существовать предельное максимальное значение $f_{\max}^+ = f^+(\nu_{\min})$ и тогда уже можно будет ограничить массу гравитона в РТГ:

$$m < \sqrt{6f_{\max}^+} m_H.$$

В рамках описанного выше фридмановского сценария осциллирующего развития Вселенной в РТГ (без инфляции) остаются пока открытыми такие важные вопросы, как происхождение и величина возмущений плотности, позволяющих сформировать структуру во Вселенной, включая наблюдаемую анизотропию температуры реликтового излучения, а также анизотропное поведение решения РТГ на стадии сжатия при высоких плотностях. Как известно [33, 34], в ОТО изотропия коллапсирующей Вселенной разрушается, причем именно анизотропные члены управляют сжатием, так как при $a \rightarrow 0$ они растут как a^{-6} , и поэтому потенциально могут радикально изменить режим отскока в РТГ при высоких плотностях.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. С. Герштейну, В. И. Денисову, М. А. Мествиришвили и К. А. Модестову за ценные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* Масса гравитона и развитие фридмановской Вселенной. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 25 с.;
Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В. Масса гравитона и развитие фридмановской Вселенной // ТМФ. 1987. Т. 74. С. 3–15.
2. *Чугреев Ю. В.* Принцип Маха для космологических решений в релятивистской теории гравитации // Письма в ЭЧАЯ. 2015. Т. 12. С. 195–204.
3. *Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* Фридмановская модель эволюции Вселенной в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 80. С. 305–312.
4. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2012. 319 с.
5. *Чугреев Ю. В.* Космологические следствия релятивистской теории гравитации с массивными гравитонами // ТМФ. 1989. Т. 75. С. 307–313.
6. *Карабут П. В., Чугреев Ю. В.* Условие физичности внешнего сферически-симметричного решения уравнений релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1990. Т. 84, № 3. С. 474–480.
7. *Чугреев Ю. В.* Релятивистский коллапс пылевого шара в релятивистской теории гравитации // ЭЧАЯ. 1990. Т. 21, № 3. С. 697–725.
8. *Чугреев Ю. В.* О принципе причинности в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1991. Т. 88, № 1. С. 459–466.

9. Емельянов Е. Ю., Чугреев Ю. В. Эволюция фридмановской Вселенной в релятивистской теории гравитации на основе пространств постоянной кривизны // ТМФ. 1993. Т. 97, № 3. С. 459–479.
10. Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Масса гравитона, квинтэссенция и осциллирующий характер эволюции Вселенной // ЯФ. 2004. Т. 67, № 8. С. 1618–1626.
11. Чугреев Ю. В. Нарушается ли принцип причинности для гравитационных волн? // ТМФ. 2004. Т. 138, № 2. С. 349–352.
12. Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Космологическая постоянная и пространство Минковского // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38, № 3. С. 569–586.
13. Чугреев Ю. В. Единственность вакуумного космологического решения в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 2009. Т. 161, № 1. С. 115–119.
14. Mukhanov V. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge Univ. Press, 2005. 420 p.
15. Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Масса гравитона и полная относительная плотность массы во Вселенной Ω_{tot} // Докл. РАН. 2003. Т. 390. С. 755–757.
16. Герштейн С. С. и др. Эволюция Вселенной в полевой теории гравитации // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, № 5. С. 1003–1050.
17. Мествиришвили М. А., Модестов К. А., Чугреев Ю. В. Скалярное поле квинтэссенции в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 2007. Т. 152. С. 551–560; arXiv:gr-qc/0612105.
18. *WMAP Collab.* First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters // *Astrophys. J. Suppl.* 2003. V. 148. P. 175–194; arXiv:astro-ph:0302209.
19. *SDSS Collab.* Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies // *Astrophys. J. Suppl.* 2005. V. 633. P. 560–574; arXiv:astro-ph:0501171.
20. Логунов А. А. *Релятивистская теория гравитации*. М.: Наука, 2006. 253 с.
21. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва*. М.: Ленанд, 2015. 614 с.
22. *SNfactory Collab.* The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: Improving the Dark Energy Constraints above $z > 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample // *Astrophys. J.* 2012. V. 746. P. 85–112; arXiv:astro-ph:1105.3470; supernova.lbl.gov/Union.
23. *WMAP Collab.* Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl.* 2011. V. 192. P. 330–387; arXiv:astro-ph:1001.4538.
24. Rubakov V. A. *Cosmology: CERN Yellow Report CERN-2014-003*. P. 151–196; arXiv:astro-ph:1504.03587.
25. Jetzer P., Tortora C. Constraints from CMB Temperature and Other Common Observational Data-Sets on Variable Dark Energy Models // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 84. P. 043517–043527; arXiv:astro-ph:1107.4610.
26. Basilaxos S. et al. Dynamics and Constraints of the Massive Gravitons Dark Matter Flat Cosmologies // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 103506–103517; arXiv:astro-ph:1103.1464.
27. *SNfactory Collab.* Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Data-Sets // *Astrophys. J.* 2008. V. 686. P. 745–778; arXiv:astro-ph:0804.4142.
28. *WMAP Collab.* Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl.* 2009. V. 180. P. 330–376; arXiv:astro-ph:0803.0547.
29. *WMAP Collab.* Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results // *Astrophys. J. Suppl.* 2013. V. 208. P. 19–51; arXiv:astro-ph:1212.5226.
30. *Planck Collab.* Planck 2013 Results. XVI. Cosmological Parameters. arXiv:astro-ph:1303.5076.

31. *Чугреев Ю. В.* Темная энергия и масса гравитона в ближней Вселенной // Письма в ЭЧАЯ. 2016. Т. 13. С. 38–45.
32. *Goldhaber A. S., Nieto M. M.* Photon and Graviton Mass Limits // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. P. 939–979; arXiv:hep-ph:0809.1003.
33. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.* Проблемы релятивистской космологии // УФН. 1963. Т. 80, вып. 3. С. 391–437.
34. *Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.* Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии // УФН. 1970. Т. 102, вып. 3. С. 463–500.

Получено 19 июля 2016 г.