

## О ПОТЕНЦИАЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С РАВНОМЕРНЫМ ПО СЕЧЕНИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

*В. А. Сыровой*<sup>1</sup>

Всероссийский электротехнический институт, Москва

Обсуждается вопрос о поле интенсивного пучка заряженных частиц в виде цилиндра с эллиптическим сечением.

The problems of electric field of intense charged particle beams with elliptic cross section are discussed.

PACS: 41.85.Lc

В монографии [1] приведено выражение для потенциала внутри эллиптического цилиндра, равномерно заполненного пространственным зарядом плотности  $\rho$ ,

$$\varphi_i = \frac{1}{4}\rho \left[ (x^2 + y^2) - \frac{a-b}{a+b}(x^2 - y^2) \right], \quad (1)$$

где  $x, y$  — декартовы координаты;  $a, b$  — полуоси эллиптического сечения. Формула (1) и последующие выражения записаны в нормировках, устраняющих из уравнений пучка физические постоянные, связанные с используемой системой единиц. Квадрупольный член в (1) получился в результате требования логарифмической асимптотики потенциала  $\varphi_e$  вне цилиндра на бесконечности. В эллиптических координатах  $\xi, \eta$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (2)$$

поле  $\varphi_e$  описывается выражением

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \varphi_i + \frac{1}{8}\rho(a^2 - b^2) \{ 2 \operatorname{sh} 2\xi_0 (\xi - \xi_0) - (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\xi_0) + \cos 2\eta [\operatorname{ch} (2\xi - 2\xi_0) - 1] \}, \\ \varphi_i &= \frac{1}{8}\rho(a^2 - b^2) [\operatorname{ch} 2\xi + (1 - e^{-2\xi_0} \operatorname{ch} 2\xi) \cos 2\eta], \\ e^{-2\xi_0} &= \frac{a-b}{a+b}, \end{aligned} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>E-mail: olga1606@rambler.ru

где  $\xi = \xi_0$  — уравнение поверхности цилиндра. При  $\xi \rightarrow \infty$  потенциал внешнего поля имеет вид

$$\varphi_e \rightarrow \frac{1}{2} \rho ab \xi = \frac{1}{2} \rho ab \ln \frac{2R}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (4)$$

Формула (1) в точном смысле справедлива для неподвижных зарядов, а в параксиальном приближении — при постоянной продольной скорости, значительно превышающей скорость поперечного расплывания пучка. В монографии [2], где рассмотрен случай произвольного распределения плотности  $\rho = \rho(\xi)$  по сечению, при  $\rho = \text{const}$  также заложена логарифмическая асимптотика в выражении для функции  $\varphi_e$ .

В литературе приводится параксиальное приближение для потенциала  $\varphi_i$  при ускоренном движении частиц эллиптического цилиндра в  $z$ -направлении [3]

$$\varphi_i = U(z) + \frac{1}{4}(\rho - U'') \left[ (x^2 + y^2) - \frac{a-b}{a+b}(x^2 - y^2) \right], \quad (5)$$

где  $U(z)$  — потенциал на оси пучка.

Заметим, однако, что реальные пучки не существуют в бесконечном пространстве, а либо распространяются в тракте транспортировки, либо формируются оптической системой, поперечные размеры которой в несколько раз (даже не на порядок) превосходят поперечные размеры потока. При произвольном задании формы канала (например, канал технологичного прямоугольного сечения) необходимо решать краевую задачу с выполнением условия эквипотенциальности стенок, при синтезе поперечного сечения канала, сохраняющего форму пучка, или расчете формирующих электродов решается задача Коши. В приборах СВЧ коэффициент  $k$  заполнения канала желательно иметь близким к единице. Ко всем перечисленным ситуациям асимптотика (4) не имеет отношения, а введение квадруполь из (1) существенно снижает значение  $k$  для сильно вытянутых эллипсов.

Логарифмическая асимптотика не всегда имеет смысл и для осесимметричных пучков. Так, потенциал для кругового цилиндра  $R = R_0$ , вырезанного из плоского диода при эмиссии в  $\rho$ -режиме, описывается точным выражением [4]

$$\varphi(R, z) = \left( \frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \left\{ \text{Re} V(w) + \int_{R_0}^R \left[ \frac{1}{2R_0} F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e \right) - \frac{R^2 - 2R_0\sigma + 2R_0\sigma - \sigma^2}{16RR_0^2} F \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) \right] \text{Re} V(\zeta) d\sigma \right\}, \quad (6)$$

$$V(z) = z^{4/3}, \quad \lambda_e = \frac{(\sigma - R)(\sigma + R - 2R_0)}{4R_0R},$$

$$\zeta = z + i(\sigma - R_0), \quad w = z + i(R - R_0),$$

где  $F(a, b; c; \lambda)$  — гипергеометрические функции Гаусса.

В работе [5] показано, что асимптотика функции  $\varphi(R, z)$  на больших расстояниях от пучка описывается формулой

$$\varphi = r^{4/3} P_{4/3}(\cos \theta). \quad (7)$$

Здесь  $r, \theta$  — сферические координаты;  $P_{4/3}$  — функция Лежандра.

Потенциал для эллиптической вырезки из плоского диода определен формулой [4]

$$\alpha = \frac{dx_e}{d\eta}, \quad \beta = \frac{dy_e}{d\eta},$$

$$\varphi(x, y, z) = z^{4/3} - \frac{2}{9} \operatorname{Re} \int_0^v \frac{(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha}{(z^2 + r_e^2)^{1/3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}; 2; \frac{r_e^2}{z^2 + r_e^2}\right) dt,$$

$$x_e = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta, \quad y_e = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta, \quad v = \xi - \xi_0, \quad \zeta = \eta + it, \quad (8)$$

$$(x_e - x)\beta - (y_e - y)\alpha = (a^2 - b^2) [(\operatorname{sh} \xi_0 - \operatorname{sh} \xi) \operatorname{ch} \xi_0 + \operatorname{sh} v \cos^2 \zeta],$$

$$r_e^2 = (x_e - x)^2 + (y_e - y)^2 = (a^2 - b^2) [(\operatorname{sh} \xi_0 - \operatorname{sh} \xi)^2 + 2(1 - \operatorname{h} v) \cos^2 \zeta].$$

Здесь  $x_e = x_e(\eta)$ ,  $y_e = y_e(\eta)$ , — параметрические уравнения эллиптического контура. На рис. 1 представлена зависимость  $\alpha/\alpha_0$ ,  $\alpha = a/b$  для эллипсоидальных овалов, получающихся в поперечных сечениях  $z = \text{const}$  для нулевой эквипотенциали при отношении полуосей эллиптического контура  $\alpha_0 = 1,5$  и  $10$ . Результаты свидетельствуют об отсутствии логарифмической особенности при удалении от границы пучка.

Приведенные примеры относились к ускоряемому потоку частиц с прямолинейными траекториями. Распределение потенциала в эллиптическом пучке может зависеть и от движения зарядов в плоскости  $x, y$  при  $\rho = \text{const}$ . В обобщенном бриллюэновском потоке частицы движутся по эллиптическим орбитам в однородном продольном магнитном поле  $H_0$  под действием сил пространственного заряда и внешнего электрического квадруполья [7]

$$\varphi_i = \frac{1}{4} \rho (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \Omega H_0 (x^2 - y^2), \quad \frac{H_0}{2} > \Omega, \quad \Omega = \text{const}, \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{H_0/2 - \Omega}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{H_0/2 + \Omega}}, \quad \rho = 2\Omega^2 + \frac{1}{2} H_0^2, \quad \alpha = \frac{a}{b}.$$

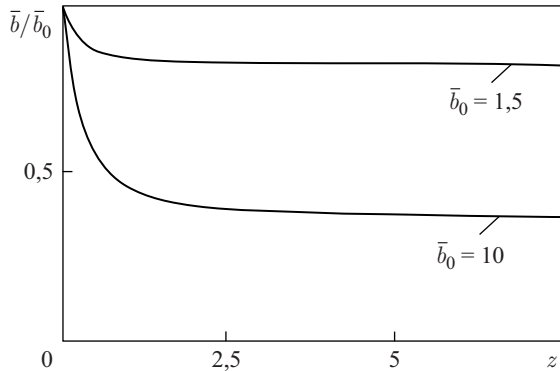


Рис. 1.

В лапласовской области решению (9) соответствует выражение

$$b^2 \varphi_e = \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} + \frac{\alpha^4 + 1}{2\alpha^3} (\xi - \xi_0) - \left[ \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \operatorname{ch}(2\xi - 2\xi_0) + \frac{\alpha^4 - 1}{4\alpha^3} \operatorname{sh}(2\xi - 2\xi_0) \right] \cos 2\eta. \quad (10)$$

При  $\xi \rightarrow \infty$  лапласовский фрагмент в (9) сохраняет свой вид

$$\varphi_L = \frac{\alpha^4 - 1}{4a^4} (x^2 - y^2) \quad (11)$$

и, будучи объединен с фрагментом, порожденным пространственным зарядом

$$\varphi_p \rightarrow \frac{\alpha^4 + 1}{4a^4} \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} (x^2 - y^2), \quad (12)$$

определяет асимптотику обобщенного бриллюэновского потока на бесконечности:

$$\varphi_e \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\alpha^3 - 1}{\alpha^3(\alpha + 1)} \frac{x^2 - y^2}{b^4}. \quad (13)$$

Качественная картина эквипотенциалей вне пучка при  $\alpha < \alpha_*$  и  $\alpha > \alpha_*$ ,  $\alpha_* \approx 1,249$ , дана на рис. 2.

Вариант классического бриллюэновского потока  $\alpha \rightarrow 1$  требует специального рассмотрения, и только в этом случае потенциал при  $\xi \rightarrow \infty$  ведет себя как  $\ln R$ .

Трехмерная параксиальная теория В. Н. Данилова, изложение которой можно найти в монографии [4], описывает релятивистские пучки с гладкой пространственной осью и произвольным поперечным сечением, испытывающим однородную деформацию

$$x = \alpha(l)\xi + \beta(l)\eta, \quad y = \mu(l)\xi + \nu(l)\eta, \quad (14)$$

где  $l$  — длина дуги оси;  $x, y$  — координаты в поперечном сечении пучка;  $\xi, \eta$  — их начальные значения. В случае прямой оси потенциал в пучке определен формулами

$$\varphi_i = U + \frac{1}{4}(\rho - U'')(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}A(x^2 - y^2) + Bxy, \quad U' \equiv \frac{dU}{dz},$$

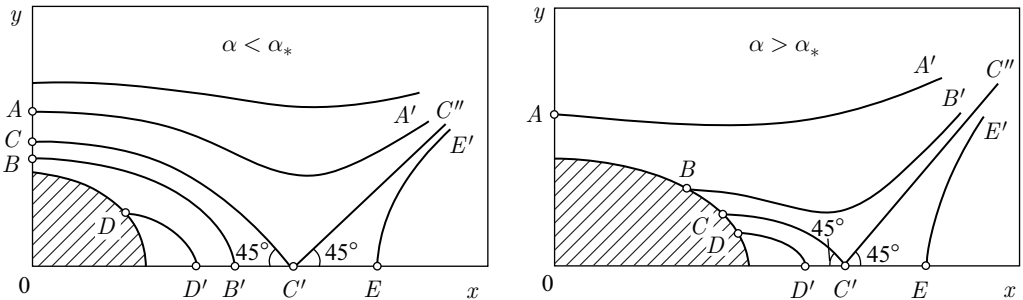


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
2A &= \frac{1}{1+\tilde{U}} \frac{1}{D} \left[ \ddot{\alpha}\nu - \ddot{\nu}\alpha + \ddot{\mu}\beta - \ddot{\beta}\mu - \Omega_l(\dot{\mu}\nu - \dot{\nu}\mu + \dot{\beta}\alpha - \dot{\alpha}\beta) \right] - VC_{21}, \\
B &= \frac{1}{1+\tilde{U}} \frac{1}{D} \left[ \ddot{\beta}\alpha - \ddot{\alpha}\beta - \Omega_l(\dot{\nu}\alpha - \dot{\mu}\beta) \right] - \frac{1}{2}V(C_{22} - \Omega_l'); \\
H_x &= -\frac{1}{2}(C_{22} + \Omega_l')x - \frac{1}{2}C_{21}y, \quad H_y = \frac{1}{2}(C_{22} - \Omega_l')y - \frac{1}{2}C_{21}x; \\
U' &\equiv \frac{dU}{dz}, \quad \dot{\alpha} \equiv (1 + \tilde{U})V\alpha', \quad D = \alpha\nu - \beta\mu.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $V$  — скорость на оси;  $\Omega_l$  — продольное магнитное поле;  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  — интенсивности магнитных квадрупольей; тильдой отмечены члены, исчезающие в нерелятивистском пределе.

При рассмотрении упоминавшихся выше задач формирования и транспортировки интенсивных пучков заряженных частиц естественно, по-видимому, ориентироваться на эту модель, где квадрупольи в выражении для  $\varphi_i$  связаны с изменением формы пучка и внешним магнитным полем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капчинский И. М.* Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Муратов М. З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976.
3. *Bhatt R. J.* Inverse Problems in Elliptic Charged-Particle Beams. Massachusetts Inst. of Technology. 2006.
4. *Сыровой В. А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
5. *Daykin P. N.* // Brit. J. Appl. Phys. 1955. V. 6, No 7. P. 248.
6. *Kirstein P. T.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 4, No 5. P. 425.
7. *Сыровой В. А.* Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
8. *Данилов В. Н.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. №5. С. 3.

Получено 28 сентября 2017 г.