Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 4(216). С. 308–315

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИОННОГО БАРИОСИНТЕЗА

Е. В. Арбузова [1]

Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Дан критический обзор гравитационного бариосинтеза. Показано, что неминимальная связь скаляра кривизны с барионным током приводит к модификации гравитационных уравнений, которые становятся более высокого (четвертого) порядка. Найдено, что эти уравнения имеют неустойчивые решения, противоречащие стандартной космологической модели.

Gravitational baryogenesis is reviewed. It is shown that the non-minimal coupling of the curvature scalar to baryonic current leads to a modification of the gravitational equations, which become of higher order. It is found that these equations have unstable solutions contradicting the Standard Cosmological Model.

PACS: 04.25.-g; 04.50.Kd

ВВЕДЕНИЕ

Теории гравитационного бариосинтеза [1] приобрели заметную популярность в последние годы (для обзора см. [2]). В этих моделях сценарий спонтанного бариосинтеза [3] был модифицирован путем введения связи барионного тока J_B^μ с производной скаляра кривизны R:

$$\mathcal{L}_{\rm GBG} = \frac{f}{m_0^2}(\partial_\mu R) J_B^\mu, \tag{1}$$

где m_0 — постоянный параметр размерности массы, а f — безразмерная константа связи, введенная для возможного изменения знака в выражении выше.

Сценарии гравитационного бариосинтеза обладают такими же интересными и привлекательными свойствами, как и теория спонтанного бариосинтеза, а именно, генерация космологической асимметрии может протекать в тепловом равновесии без необходимости нарушения C и CP в физике частиц. Однако введение производной скаляра кривизны в лагранжиан теории приводит к гравитационным уравнениям высокого порядка, являющимся сильно неустойчивыми. Эффекты этой неустойчивости могут коренным образом изменить не только обычную космологическую историю, но также и стандартную ньютоновскую гравитационную динамику. Нами обнаружена такая неустойчивость для скалярных барионов [4] и найден подобный эффект для более реалистичных барионов со спином 1/2 (кварков) [5].

[1] E-mail: arbuzova@uni-dubna.ru

1. ГРАВИТАЦИОННЫЙ БАРИОСИНТЕЗ С БОЗОНАМИ

Начнем с модели, в которой барионное число переносится скалярным полем ϕ с потенциалом $U(\phi,\phi^*)$. Действие скалярной модели имеет вид

$$A = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{m_{\rm Pl}^2}{16\pi}R + \frac{1}{m_0^2}(\partial_\mu R)J^\mu - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi^* + U(\phi,\phi^*)\right] - A_m, \qquad (2)$$

где $m_{\rm Pl} = 1{,}22\cdot 10^{19}$ ГэВ — масса Планка; A_m — действие материи, $J^\mu = g^{\mu\nu}J_\nu$ и $g^{\mu\nu}$ есть метрический тензор фонового пространства-времени. Мы предполагаем, что начальная метрика имеет обычную для общей теории относительности (ОТО) форму, и изучаем поправки, возникающие вследствие неустойчивости, описанной ниже.

Если потенциал $U(\phi)$ не является инвариантом относительно $U(1)$-вращений, $\phi\to\exp{(i\beta)}\phi$, то определенный обычным образом барионный ток

$$J_\mu = iq(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*) \qquad (3)$$

не сохраняется. Здесь q — барионное число поля ϕ, индекс B в токе J_μ опущен для краткости.

С таким током и лагранжианом (2) уравнение для скаляра кривизны R принимает вид

$$\frac{m_{\rm Pl}^2}{16\pi}\,R + \frac{1}{m_0^2}\left[(R+3D^2)D_\alpha J^\alpha + J^\alpha\,D_\alpha R\right] - D_\alpha\phi\,D^\alpha\phi^* + 2U(\phi) = -\frac{1}{2}\,T^\mu_\mu, \qquad (4)$$

где D_μ — ковариантная производная в метрике $g_{\mu\nu}$ (очевидно, для скаляров $D_\mu = \partial_\mu$); $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи, полученный из действия A_m.

В соответствии с определением (3) дивергенция тока равна

$$D_\mu J^\mu = \frac{2q^2}{m_0^2}\left[D_\mu R\,(\phi^* D^\mu\phi + \phi D^\mu\phi^*) + |\phi|^2 D^2 R\right] + iq\left(\phi\frac{\partial U}{\partial\phi} - \phi^*\frac{\partial U}{\partial\phi^*}\right). \qquad (5)$$

Если потенциал U инвариантен относительно фазового вращения поля ϕ, т. е. $U = U(|\phi|)$, последний член в этом выражении исчезнет.

Рассмотрим решение приведенного выше уравнения движения в космологии. Метрика пространственно-плоского космологического фона (FRW-метрика) может быть выбрана в форме

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,d\mathbf{r}^2. \qquad (6)$$

В однородном случае уравнение (4) для скаляра кривизны принимает вид

$$\frac{m_{\rm Pl}^2}{16\pi}\,R + \frac{1}{m_0^2}\left[(R + 3\partial_t^2 + 9H\partial_t)D_\alpha J^\alpha + \dot R\,J^0\right], \qquad (7)$$

где J^0 — плотность барионного числа ϕ-поля; $H = \dot a/a$ — параметр Хаббла; $T^{\rm (tot)}$ — след тензора энергии импульса материи, включающий вклад от поля ϕ. В однородной и изотропной космологической плазме

$$T^{\rm (tot)} = \rho - 3P, \qquad (8)$$

где ρ и P являются соответственно плотностью энергии и давлением плазмы. Для релятивистской плазмы $\rho = \pi^2 g_* T^4/30$, где T и g_* — температура и число типов частиц в плазме. Параметр Хаббла выражается через ρ как $H^2 = 8\pi\rho/(3m_{\mathrm{Pl}}^2) \sim T^4/m_{\mathrm{Pl}}^2$.

Ковариантная дивергенция тока дается выражением (5). В рассматриваемом нами однородном случае она принимает вид

$$D_\alpha J^\alpha = \frac{2q^2}{m_0^2}\left[\dot{R}\left(\phi^*\dot{\phi} + \phi\dot{\phi}^*\right) + (\ddot{R} + 3H\dot{R})\,\phi^*\phi\right] + iq\left(\phi\frac{\partial U}{\partial \phi} - \phi^*\frac{\partial U}{\partial \phi^*}\right). \tag{9}$$

Чтобы получить уравнение движения для классического поля R в космологической плазме, нужно знать значения вакуумных ожиданий для произведений квантовых операторов ϕ, ϕ^* и их производных. Проводя усреднение по температуре, найдем

$$\langle\phi^*\phi\rangle = \frac{T^2}{12}, \quad \langle\phi^*\dot{\phi} + \dot{\phi}^*\phi\rangle = 0. \tag{10}$$

Подставляя эти средние значения в уравнение (7) и пренебрегая последним членом в выражении (9), приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\frac{m_{\mathrm{Pl}}^2}{16\pi}\,R + \frac{q^2}{6m_0^4}\left(R + 3\partial_t^2 + 9H\partial_t\right)\left[\left(\ddot{R} + 3H\dot{R}\right)T^2\right] + \frac{1}{m_0^2}\dot{R}\,\langle J^0\rangle = -\frac{T^{(\mathrm{tot})}}{2}. \tag{11}$$

Здесь $\langle J^0\rangle$ является тепловым средним значением плотности барионного числа поля ϕ. Предполагается, что, равное нулю начально, оно генерируется в результате гравитационного бариосинтеза. Мы пренебрегаем этим членом, поскольку он не влияет на экспоненциальный рост R при развитии неустойчивости.

Уравнение (11) еще больше упрощается, если $R(t)$ меняется значительно быстрее, чем темп расширения Вселенной, другими словами, если $\ddot{R}/\dot{R} \gg H$. Соответственно, температуру можно считать адиабатически постоянной. Справедливость этих предположений проверяется *a posteriori*, после того как решение для $R(t)$ найдено.

Удерживая только линейные по R члены и пренебрегая более высокими степенями R, такими как R^2 или HR, получаем линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4R}{dt^4} + \mu^4 R = -\frac{1}{2}\,T^{(\mathrm{tot})}, \quad \mu^4 = \frac{m_{\mathrm{Pl}}^2 m_0^4}{8\pi q^2 T^2}. \tag{12}$$

Однородная часть этого уравнения имеет экспоненциальное решение $R \sim \exp(\lambda t)$ с

$$\lambda = |\mu| \exp(i\pi/4 + i\pi n/2), \quad n = 0, 1, 2, 3. \tag{13}$$

Существует два решения с положительной действительной частью λ. Это означает, что скаляр кривизны экспоненциально неустойчив по отношению к малым возмущениям, т. е. R будет экспоненциально расти со временем и быстро осциллировать вокруг этой растущей функции.

Теперь следует проверить, действительно ли характерная скорость роста возмущений значительно превышает темп расширения Вселенной, т. е.

$$(\mathrm{Re}\,\lambda)^4 > H^4 = \left(\frac{8\pi\rho}{3m_{\mathrm{Pl}}^2}\right)^2 = \frac{16\pi^6 g_*^2}{2025}\,\frac{T^8}{m_{\mathrm{Pl}}^4}, \tag{14}$$

где $\rho = \pi^2 g_* T^4/30$ есть плотность энергии первичной плазмы при температуре T с числом $g_* \sim 10$–100 релятивистских степеней свободы в плазме. Это условие выполняется, если

$$\frac{2025}{2^9 \pi^7 q^2 g_*^2} \frac{m_{\rm Pl}^6 m_0^4}{T^{10}} > 1, \tag{15}$$

или, грубо, если $T \leqslant m_{\rm Pl}^{3/5} m_0^{2/5}$. Подчеркнем, что при таких температурах неустойчивость быстро развивается и стандартная космология будет разрушена.

Если мы захотим сохранить успешные результаты первичного нуклеосинтеза (BBN) и наложим условие, что время развития неустойчивости больше времени Хаббла в эпоху BBN при температурах $T \sim 1$ МэВ, то получим, что константа m_0 должна быть экстремально мала, $m_0 < 10^{-32}$ МэВ. Желание сохранить стандартную космологию при еще меньших температурах потребует еще меньшей m_0. Крошечная m_0 приводит к огромной силе связи (1). Это, очевидно, должно вести к заметным эффектам в астрофизике.

2. ГРАВИТАЦИОННЫЙ БАРИОСИНТЕЗ С ФЕРМИОНАМИ

Обобщим теперь результаты, полученные для скалярных барионов, на случай реалистичных фермионов. Начнем с действия в виде

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_{\rm Pl}^2}{16\pi} R - \mathcal{L}_m \right] \tag{16}$$

с

$$\mathcal{L}_m = \frac{i}{2}(\bar{Q}\gamma^\mu \nabla_\mu Q - \nabla_\mu \bar{Q}\,\gamma^\mu Q) - m_Q \bar{Q}\,Q + \frac{i}{2}(\bar{L}\gamma^\mu \nabla_\mu L - \nabla_\mu \bar{L}\gamma^\mu L) - m_L \bar{L}\,L] + \\ + \frac{g}{m_X^2}\left[(\bar{Q}\,Q^c)(\bar{Q}L) + (\bar{Q}^c Q)(\bar{L}Q)\right] + \frac{f}{m_0^2}(\partial_\mu R) J^\mu + \mathcal{L}_{\rm other}, \tag{17}$$

где Q — кварковое (или кваркоподобное) поле с ненулевым барионным числом; L — другое фермионное (лептонное) поле; ∇_μ — ковариантная производная дираковского фермиона в тетрадном формализме; $J^\mu = \bar{Q}\gamma^\mu Q$ — кварковый ток с γ-матрицами γ^μ, взятыми в искривленном пространстве. $\mathcal{L}_{\rm other}$ описывает все другие формы вещества. Четырехфермионное взаимодействие между кварками и лептонами введено, чтобы обеспечить необходимое несохранение барионного числа, где m_X – постоянный параметр размерности массы, а g — безразмерная константа связи. В теориях Великого объединения m_X может быть порядка 10^{14}–10^{15} ГэВ.

Варьируя действие (16) по метрике $g^{\mu\nu}$ и вычисляя след по индексам μ и ν, получим следующее уравнение движения для скаляра кривизны:

$$-\frac{m_{\rm Pl}^2}{8\pi} R = m_Q \bar{Q} Q + m_L \bar{L} L + \frac{2g}{m_X^2}\left[(\bar{Q}\,Q^c)(\bar{Q}L) + (\bar{Q}^c Q)(\bar{L}Q)\right] - \\ - \frac{2f}{m_0^2}(R + 3D^2) D_\alpha J^\alpha + T_{\rm other}. \tag{18}$$

Здесь $T_{\rm other}$ есть след тензора энергии-импульса всех остальных полей. На релятивистской стадии, когда все массы пренебрежимо малы, можно положить $T_{\rm matter}=0$. Вакуумное среднее члена взаимодействия, пропорционального g, также мало, поэтому вкладом всех полей материи можно пренебречь.

Как будет показано ниже, кинетическое уравнение приводит к явной зависимости от R дивергенции тока $D_\alpha J^\alpha$, если ток не сохраняется. В результате получается уравнение четвертого порядка для R.

В дальнейшем мы анализируем решения уравнения (18) в космологии, в однородном и изотропном случае, с фоновой FRW-метрикой $ds^2=dt^2-a^2(t)\,d\mathbf{r}^2$. Кривизна является функцией только времени и ковариантая производная, действующая на вектор V^α, зависящий только от времени и имеющий лишь одну компоненту, имеет вид

$$D_\alpha V^\alpha=(\partial_t+3H)V^t, \tag{19}$$

где $H=\dot a/a$ — параметр Хаббла.

Рассмотрим в качестве примера реакцию $q_1+q_2\leftrightarrow\bar q_3+l_4$, в которой q_1 и q_2 суть кварки с импульсами q_1 и q_2, в то время как $\bar q_3$ и l_4 обозначают антикварк и лептон с импульсами q_3 и l_4. Мы используем один и тот же символ для обозначения самой частицы и ее импульса. Кинетическое уравнение для вариации плотности барионного числа $n_B\equiv J^t$, записанное для такой реакции в FRW-метрике, имеет вид

$$(\partial_t+3H)n_B=I_B^{\rm coll}. \tag{20}$$

Интеграл столкновений для взаимодействия, не зависящего от времени и пространства, равен

$$\begin{aligned}I_B^{\rm coll}=-3B_q(2\pi)^4\int d\nu_{q_1,q_2}\,d\nu_{\bar q_3,l_4}\delta^4(q_1+q_2-q_3-l_4)\times\\ \times\left[|A(q_1+q_2\to\bar q_3+l_4)|^2f_{q_1}f_{q_2}-|A(\bar q_3+l_4\to q_1+q_2)|^2f_{\bar q_3}f_{l_4}\right],\end{aligned} \tag{21}$$

где $A(a\to b)$ есть амплитуда перехода из состояния a в состояние b; B_q — барионное число кварков; f_a — распределение в фазовом пространстве (число заполнения);

$$d\nu_{q_1,q_2}=\frac{d^3q_1}{2E_{q_1}(2\pi)^3}\,\frac{d^3q_2}{2E_{q_2}(2\pi)^3}. \tag{22}$$

$E_q=\sqrt{q^2+m^2}$ есть энергия частицы с трехимпульсом q и массой m. Элемент фазового пространства конечных частиц, $d\nu_{\bar q_3,l_4}$, определяется аналогично.

Вычисления сильно упрощаются, если кварки и лептоны находятся в равновесии относительно упругого рассеяния и аннигиляции. В этом случае их функции распределения имеют вид

$$f=\frac{1}{{\rm e}^{(E/T-\xi)}+1}\approx{\rm e}^{-E/T+\xi}, \tag{23}$$

где $\xi=\mu/T$ — безразмерный химический потенциал, разный для кварков, ξ_q, и лептонов, ξ_l.

Плотность барионного числа дается выражением

$$n_B = \int \frac{d^3q}{2E_q\,(2\pi)^3}(f_q - f_{\bar{q}}) = \frac{g_S B_q}{6}\left(\mu T^2 + \frac{\mu^3}{\pi^2}\right) = \frac{g_S B_q T^3}{6}\left(\xi + \frac{\xi^3}{\pi^2}\right),$$

где T — космологическая температура плазмы; g_S — число спиновых состояний.

В простейшем случае, который обычно рассматривается в гравитационном (и спонтанном) бариосинтезе, $\dot{R}$ считается медленно меняющимся, так что можно аппроксимировать $R(t) \approx \dot{R}(t)\,t$. Если безразмерные химические потенциалы ξ_q и ξ_l, так же как и член $f\dot{R}(t)/m_0^2/T$, малы, то интеграл столкновений можно записать в виде

$$I_B^{\mathrm{coll}} \approx \frac{C_I g^2 T^8}{m_X^4}\left[\frac{3f\dot{R}(t)}{m_0^2\,T} - 3\xi_q + \xi_l\right], \tag{24}$$

где C_I — положительная безразмерная постоянная. Фактор T^8 возникает для реакций с безмассовыми частицами, а степень 8 найдена из соображений размерностей. Так как сумма барионного и лептонного чисел сохраняется, то $\xi_l = -\xi_q/3$.

Случай существенного изменения $\dot{R}(t)$ аналогичен быстрому изменению $\dot{\theta}(t)$, исследованному в нашей работе [6]. Ясно, что это значительно сложнее технически. Здесь мы рассматриваем только простую ситуацию с квазистационарным фоном и откладываем более реалистичную зависимость $R(t)$ от времени до будущих работ.

Для малого химического потенциала плотность барионного числа (24) равна

$$n_B \approx \frac{g_s B_q}{6}\,\xi_q T^3, \tag{25}$$

и если температура медленно понижается в ходе космологического расширения, в соответствии с $\dot{T} = -HT$, то уравнение (20) переходит

$$\dot{\xi}_q = \Gamma\left[\frac{9f\dot{R}(t)}{10m_0^2\,T} - \xi_q\right], \tag{26}$$

где $\Gamma \sim g^2T^5/m_X^4$ является скоростью реакций с несохранением барионного числа.

Если Γ достаточно велико, это уравнение можно решить в приближении стационарной точки:

$$\xi_q = \xi_q^{\mathrm{eq}} - \frac{\dot{\xi}_q^{\mathrm{eq}}}{\Gamma}, \quad \xi_q^{\mathrm{eq}} = \frac{9}{10}\frac{f\dot{R}}{m_0^2 T}. \tag{27}$$

Если подставить ξ_q^{eq} в уравнение (18), получим уравнение четвертого порядка для R.

Как отмечено в комментарии ниже уравнения (18), вкладом частиц горячей космической плазмы можно пренебречь, и мы приходим к очень простому дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\frac{d^4R}{dt^4} = \lambda^4 R, \tag{28}$$

где $\lambda^4 = C_\lambda m_{\mathrm{Pl}}^2 m_0^4/T^2$ с $C_\lambda = 5/(36\pi f^2 g_s B_q)$. При выводе этого уравнения мы пренебрегли параметром Хаббла по сравнению с производной по времени от R. Справедливость этого устанавливается *a posteriori*, поскольку полученное λ оказывается значительно больше, чем H.

Несомненно, уравнение (28) имеет сильно неустойчивое решение, причем время развития неустойчивости заметно меньше космологического времени. Эта неустойчивость может привести к взрывному росту R, который, возможно, будет остановлен нелинейными членами, пропорциональными произведению H и низших производных R. Соответственно, можно ожидать стабилизацию, если $HR \sim \dot{R}$, т. е. $H \sim \lambda$. Поскольку

$$\dot{H} + 2H^2 = -R/6, \tag{29}$$

H будет расти экспоненциально вместе с R, $H \sim \exp(\lambda t)$ и $\lambda H \sim R$. Таким образом, стабилизация может иметь место при $R \sim \lambda^2 \sim m_{\mathrm{Pl}} m_0^2/T$. Этот результат следует сравнить с обычным значением скаляра кривизны в ОТО, $R_{\mathrm{GR}} \sim T_{\mathrm{matter}}/m_{\mathrm{Pl}}^2$, где T_{matter} — след тензора энергии-импульса вещества.

3. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для более аккуратного анализа необходимо численное решение, которое будет приведено в другой работе. Проблема усложняется, поскольку предположение о медленном изменении $\dot{R}$ быстро нарушается, а интеграл столкновений на зависящем от времени фоне вычисляется не так просто, как стационарный. Техника получения кинетического уравнения на нестационарном фоне представлена в работе [6]. Здесь мы описываем лишь основные характерные свойства нового эффекта неустойчивости в гравитационном бариосинтезе.

Нами показано, что гравитационный бариосинтез в простейших версиях, описанных в литературе, не является реалистичным, поскольку неустойчивость возникающих гравитационных уравнений разрушает стандартную космологию. Очень желателен какой-нибудь стабилизирующий механизм. Возможно, стабилизацию удастся получить в $F(R)$-теории.

Эта работа поддержана грантом РНФ № 16-12-10037.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davoudiasl H., Kitano R., Kribs G. D., Murayama H., Steinhardt P. J.* Gravitational Baryogenesis // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 201301; hep-ph/0403019.
2. *Lambiase G., Scarpetta G.* Baryogenesis in $f(R)$-Theories of Gravity // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 087504; arXiv:astro-ph/0610367;

   Lambiase G., Mohanty S. M, Prasanna A. R. Neutrino Coupling to Cosmological Background: A Review on Gravitational Baryo/Leptogenesis // Intern. J. Mod. Phys. D. 2013. V. 22. P. 1330030; arXiv:1310.8459;

   Fukushima M., Mizuno Sh., Maeda K.-I. Gravitational Baryogenesis after Anisotropic Inflation // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 103513; arXiv:1603.02403.
3. *Cohen A., Kaplan D.* Thermodynamic Generation of the Baryon Asymmetry // Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 251;

   Cohen A., Kaplan D. Spontaneous Baryogenesis // Nucl. Phys. B. 1988. V. 308. P. 913;

   Cohen A. G., Kaplan D. B., Nelson A. E. Diffusion Enhances Spontaneous Electroweak Baryogenesis // Phys. Lett. B. 1994. V. 336. P. 41; hep-ph/9406345.

4. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Intrinsic Problems of the Gravitational Baryogenesis // Phys. Lett. B. 2017. V. 769. P. 171; arXiv:1612.06206.
5. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Instability of Gravitational Baryogenesis with Fermions // JCAP. 2017. V. 1706. P. 001; arXiv:1702.07477.
6. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Novikov V. A.* General Properties and Kinetics of Spontaneous Baryogenesis // Phys. Rev. D. 2016. V. 94. P. 123501; arXiv:1607.01247.