Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 4(216). С. 334–340

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ

М. Ю. Малышев [а, б, 1], *Е. В. Прохватилов* [б], *Р. А. Зубов* [б], *В. А. Франке* [б]

[а] Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Гатчина, Россия

[б] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

В работе предлагается полуфеноменологический способ описания квантовой хромодинамики в непертурбативной области с использованием нулевой моды глюонного поля на световом фронте. Этот способ применяется к связанному состоянию кварка и антикварка.

The semiphenomenological way to describe nonperturbative quantum chromodynamics using light front gluon zero mode is proposed and applied to quark–antiquark bound state.

PACS: 03.65.Ge; 11.15.Tk; 12.38.Aw; 12.40.Yx

ВВЕДЕНИЕ

Квантование теории поля на световом фронте (СФ) — это квантование в координатах СФ [1]: $x^{\pm} = \dfrac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}$, $x^{\perp}$, где x^+ играет роль «времени», а $x^+ = 0$ — плоскость СФ, на которой происходит квантование. Такое квантование применимо не только к физике высоких энергий, но также и к проблеме связанных состояний в квантовой теории поля, такой как квантовая хромодинамика (КХД) [2].

Основным преимуществом квантования на СФ является возможность определения физического вакуума как состояния $|0\rangle$ с минимальным собственным значением оператора импульса $P_- \geqslant 0$ (играющего роль пространственной компоненты импульса и являющегося кинематическим на СФ, т. е. независимым от константы связи): $P_-|0\rangle = 0$.

Можно определить «физическое» пространство Фока над этим вакуумом. В качестве примера для скалярного поля $\varphi(x)$ (в представлении Гейзенберга) можно записать разложение Фурье в координатах СФ:

$$\varphi(x) = \int d^2p_{\perp} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dp_-}{\sqrt{2p_-}} (a(p_-, p_{\perp}; x^+) \exp{(-ip_-x^- - ip_{\perp}x^{\perp})} + \text{э. с.}).$$

[1] E-mail: malyshev_my@pnpi.nrcki.ru; m.malyshev@spbu.ru; mimalysh@yandex.ru

Действие принимает каноническую форму:

$$S = \int d^4x \, (\partial_+\varphi\partial_-\varphi - \mathcal{H}) =$$
$$= \int dx^+ \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dp_- \int d^2p_\perp \left(ia^+(p_-, p_\perp; x^+)\partial_+ a(p_-, p_\perp; x^+) - \mathcal{H}\right).$$

Из канонической формы этого действия следует, что $a(p_-, p_\perp; 0)$ и $a^+(p'_-, p'_\perp; 0)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям операторов рождения и уничтожения:

$$[a(p_-, p_\perp; 0), a^+(p'_-, p'_\perp; 0)] = \delta(p_- - p'_-)\delta^{(2)}(p_\perp - p'_\perp).$$

Для операторов импульса получаем

$$P_- = \frac{P_0 - P_3}{\sqrt{2}} = \int d^2p_\perp \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dp_- p_- a^+(p_-, p_\perp; 0)\, a(p_-, p_\perp; 0),$$

$$a(p_-, p_\perp; 0)|0\rangle = 0, \quad P_-|0\rangle = 0,$$

$$P_+ = \frac{P_0 + P_3}{\sqrt{2}} = \int d^2p_\perp \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dp_- \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p_-} a^+(p_-, p_\perp; 0) a(p_-, p_\perp; 0) + \ldots$$

В этом пространстве Фока можно сформулировать задачу нахождения спектра масс:

$$P_+|p_-, p_\perp\rangle = \frac{m^2 + p_\perp^2}{2p_-}|p_-, p_\perp\rangle. \tag{1}$$

Обычно квантование на СФ сталкивается с трудностями, связанными с так называемой проблемой «нулевой моды», т. е. с особенностями при $p_- = 0$ [3], и соответствующими трудностями описания вакуумных эффектов и конфайнмента [4–6].

Были рассмотрены два пути преодоления этих трудностей: 1) исправить канонический гамильтониан на СФ таким образом, чтобы он порождал теорию возмущений, которая после перенормировки была бы во всех порядках эквивалентна обычной ковариантной теории возмущений в лоренцевых координатах в пределе снятия регуляризации [3, 7], и 2) исследовать предельный переход к квантованию на СФ, начиная с гамильтонианов на пространственноподобных гиперплоскостях, приближающихся к СФ [8–10]. Этот способ позволяет рассматривать непертурбативные эффекты полуфеноменологически, вводя динамическую нулевую моду на СФ. Здесь описывается только подход 2), и в рамках этого подхода формулируется кварк-антикварковая модель для КХД на СФ. Мы используем калибровку светового фронта и вводим решеточную регуляризацию по x^1, x^2. Также мы вводим обрезание по x^- ($|x^-| \leqslant L$) и соответствующие периодические граничные условия для полей. Далее мы пренебрегаем всеми ненулевыми модами поперечного глюонного поля по координате x^-. Кроме того, мы ограничиваем фермионное пространство

Фока, оставляя только кварк и антикварк, связанные калибровочно-инвариантно посредством нулевой моды глюонного поля. Таким образом возникает возможность получить спектральное уравнение для связанного состояния кварка и антикварка. Это уравнение исследуется в пределе снятия регуляризации. При этом обнаруживается полуфеноменологическая возможность избежать ультрафиолетовых (УФ) расходимостей. Такая процедура дает спектр масс, близкий к экспериментальному мезонному спектру.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К ГАМИЛЬТОНИАНУ НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ, ВКЛАД НУЛЕВОЙ МОДЫ И КВАРК-АНТИКВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ

Введем вместо координат СФ координаты y^μ, близкие к СФ («η-координаты»):

$$y^0 = x^+ + \frac{\eta^2}{2}x^-, \quad y^3 = x^-, \quad y^\perp = x^\perp,$$

и соответствующие импульсы:

$$q_0 = p_+, \quad q_3 = p_- - \frac{\eta^2}{2}p_+, \quad q_\perp = p_\perp,$$

где $\eta > 0$ — малый параметр.

Рассмотрим КХД с калибровочной группой $SU(N)$ в η-координатах. Мы выбираем калибровку $A_3(y) = 0$ как аналог калибровки СФ $A_-(x) = 0$ ($A_3(y)$ и $A_-(x)$ — соответствующие компоненты глюонного поля). Далее полагаем $|y^3| \leqslant L$ и требуем соответствующие периодические граничные условия. При этом $q_3 = \pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$. Теперь имеем два параметра, L и η. Мы выполняем предельный переход на СФ в два шага. На первом шаге фиксируем параметр L и рассматриваем предельный переход на СФ ($\eta \to 0$) для той части гамильтониана в η-координатах, которая содержит ненулевые моды, а для части этого гамильтониана, содержащей только нулевые моды, мы фиксируем значение $\eta = \eta_0 > 0$, тем самым сохраняя нулевую моду как независимую динамическую переменную. Далее на первом шаге вводим эффективный оператор квадрата массы $M^2_{\text{eff}}(\eta_0)$ как сумму возможных вкладов обеих этих разделенных частей гамильтониана и записываем спектральное уравнение для собственных значений такого оператора. На втором шаге выполняется предел $L \to \infty$, $\eta_0 \to 0$ таким образом, чтобы спектр оставался УФ-конечным. Эту процедуру можно рассматривать как полуфеноменологический способ введения динамики нулевой моды на СФ.

Обозначим через $H_{(0)}$ зависящую от η_0 часть гамильтониана, содержащую только нулевые моды, и $H_{(\emptyset)}$ — часть гамильтониана на СФ, содержащая ненулевые моды. Чтобы написать выражение для эффективного квадрата массы, мы используем релятивистские выражения для M^2 в координатах СФ и в η_0-координатах:

$$M^2 = 2P_+P_- - P_\perp^2 \qquad \text{в координатах СФ,}$$

$$M^2 = 2Q_0Q_3 + \eta_0^2 Q_0^2 - P_\perp^2 \qquad \text{в } \eta_0\text{-координатах,}$$

и предлагаем следующее выражение для эффективного оператора квадрата массы при $P_\perp = 0$:

$$M^2_{\text{eff}} = \eta_0^2 H^2_{(0)} + 2P_- H_{(\emptyset)}.$$

Введем УФ-регуляризацию с использованием поперечной пространственной решетки [11], где унитарные матрицы $U_1(x)$, $U_2(x)$ на ребрах решетки описывают глюонные нулевые моды, а $\pi_k^a(x)$ — аналог сопряженных к ним импульсов [11]:

$$[\pi_k^a(x), U_{k'}(x')] = -\delta_{kk'}\delta_{x^\perp x^{\perp\prime}}\frac{\lambda^a}{2}U_k(x), \qquad [\pi_k^a(x), \pi_{k'}^b(x')] = i\,\delta_{kk'}\delta_{x^\perp x^{\perp\prime}}f^{abc}\pi_k^c(x).$$

В этой регуляризации зависящая от η_0 часть гамильтониана, содержащая только нулевые моды, имеет следующий вид [11, 12]:

$$H_{(0)} = \sum_{x^\perp}\left(\frac{g^2}{4L\,\eta_0^2}\,\pi_k^a\pi_k^a\right). \tag{2}$$

Часть гамильтониана на решетке, содержащая ненулевые моды, может быть получена в результате предельного перехода на СФ при фиксированном L [11]. Эта часть зависит от фермионного поля $\chi(x)$ в терминах операторов рождения и уничтожения кварка и антикварка на СФ, $b^{\,i}_{nr}(x^\perp)$, $b^{\,i+}_{nr}(x^\perp)$, $d^{\,i}_{nr}(x^\perp)$, $d^{\,i+}_{nr}(x^\perp)$, $n \in \mathbb{Z} + 1/2$:

$$\chi_r^i(x) = \frac{1}{a\sqrt{2L}}\sum_{n>0}\left(b^{\,i}_{nr}(x^\perp)\,\exp\left(-ip_n x^-\right) + d^{\,i+}_{nr}(x^\perp)\,\exp\left(ip_n x^-\right)\right). \tag{3}$$

Рассмотрим состояния с кварком и антикварком, связанные калибровочно-инвариантным образом посредством глюонных нулевых мод, преимущественно вдоль кратчайшего пути в поперечной плоскости:

$$\left\{\sum_{x^\perp} b^\dagger(x^\perp, p_- = \pi m/L)U^{\mathcal{S}}_{x,x+\Delta x}d^\dagger(x^\perp + \Delta x, p_- = (n-m)\pi/L)|0\rangle\right\}.$$

Здесь $U^{\mathcal{S}}_{x,x'}$ обозначает цепочки матриц $U_k^\dagger$ и U_k ($k = 1, 2$), которые соединяют точки x и x' двумерного поперечного пространства вдоль пути $\mathcal{S}$; $b^\dagger$ и $d^\dagger$ — операторы рождения кварка и антикварка соответственно.

Следующее предположение связано с формой четырехфермионного члена в гамильтониане [12–14]:

$$\sum_{x^\perp}\int dx^- dx'^- \left(\chi^\dagger(x^-, x^\perp)\frac{\lambda^a}{2}\chi(x^-, x^\perp)\right)|x^- - x'^-|\left(\chi^\dagger(x'^-, x^\perp)\frac{\lambda^a}{2}\chi(x'^-, x^\perp)\right).$$

Этот член является результатом подстановки решения калибровочной связи на СФ в гамильтониан.

В $(1+1)$-мерной КХД при $N \to \infty$ (модель 'т Хоофта [15]) такой член приводит к конфайнменту кварков на СФ из-за нелокального множителя $|x^- - x'^-|$. Однако в $(3+1)$-мерном пространстве действие этого оператора на наши кварк-антикварковые состояния дает ноль для всех состояний, кроме того, в котором кварк и антикварк не разделены по $x^\perp$. Это происходит из-за локальности этого оператора по $x^\perp$ и сокращения пространства Фока до состояний только с одним кварком и только одним антикварком. Поэтому локальный по $x^\perp$ четырехфермионный оператор не может действовать нетривиально на состояниях с кварком и антикварком, разделенными по $x^\perp$.

Чтобы преодолеть эту трудность, мы предлагаем нелокальную по $x^\perp$ модификацию этого четырехфермионного оператора, такую чтобы его действие на наши состояния стало для разделенных по $x^\perp$ кварков и антикварков таким же, как и для неразделенных. Введем нелокальность калибровочно-инвариантным образом:

$$\frac{a^2}{L_{\rm had}^2}\sum_{x^\perp,\Delta x,b}\int dx^- dx'^- \left(\chi^\dagger(x^-,x^\perp)U^{\mathcal{S}}_{x,x'}\frac{\lambda^b}{2}U^{\mathcal{S}}_{x',x}\chi(x^-,x^\perp)\right)\times$$
$$\times\,|x^- - x'^-|\left(\chi^\dagger(x'^-,x^\perp+\Delta x)U^{\mathcal{S}'}_{x+\Delta x,x'}\frac{\lambda^b}{2}U^{\mathcal{S}'}_{x',x+\Delta x}\chi(x'^-,x^\perp+\Delta x)\right),$$

где $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ — кратчайшие пути, ведущие к точке x' из точек x и $x+\Delta x$ соответственно, а сама точка x' лежит на прямой, соединяющей точки x и $x+\Delta x$. Множитель $a^2/L_{\rm had}^2$ соответствует усреднению по путям внутри области $|\Delta x| \leqslant L_{\rm had}$ ($L_{\rm had}$ является величиной порядка $\Lambda_{\rm QCD}^{-1}$). На лагранжевом уровне эта модификация соответствует введению нелокального взаимодействия компоненты глюонного поля A_+ с фермионным током.

Далее строится выражение для оператора $M_{\rm eff}^2$ на нашем ограниченном пространстве состояний. Это позволяет написать уравнение для волновой функции кварк-антикваркового связанного состояния $f(r,l)$:

$$m_{\rm eff}^2 f(r,l) = \left[\left(\frac{g^2}{8L\eta_0 a}\left(N-\frac{1}{N}\right)\right)^2 r^2 + \left(\frac{p_n}{p_l}+\frac{p_n}{p_{n-l}}\right)\left(-\nabla^2+m_q^2\right)\right]\times$$
$$\times\, f(r,l) + \frac{g^2 p_n}{2L_{\rm had}^2}\frac{1}{L}\left(N-\frac{1}{N}\right)\sum_{k=1/2,k\neq l}^{n-1/2}\frac{f(r,l)-f(r,k)}{(p_l-p_k)^2},$$

где $m_{\rm eff}$ — масса связанного состояния; ∇^2 — решеточный аналог оператора Лапласа в поперечных координатах; r — поперечное расстояние между кварком и антикварком; m_q — масса кварка; $p_- = p_n = \pi n/L$ — импульс состояния.

Введем безразмерные переменные и оператор $\overline{\nabla}$:

$$\mu = m_{\rm eff}L_{\rm had},\quad \rho=\frac{r}{L_{\rm had}},\quad \overline{m}_q = m_q L_{\rm had},\quad \xi=\frac{p_l}{p_n},\quad \alpha=\frac{L\eta_0 a}{L_{\rm had}^2},$$

где ξ — относительный импульс кварка.

В пределе снятия регуляризации сначала $L\to\infty$, $\eta_0\to 0$ при фиксированном a, а затем $a\to 0$, получаем УФ конечный результат, если взять параметр $\alpha = L\eta_0 a/L_{\rm had}^2$ конечным, например, порядка единицы. В этом пределе спектральное уравнение имеет вид

$$\mu^2 f(\rho,\xi) = \left[\left(\frac{g^2}{8\alpha}\left(N-\frac{1}{N}\right)\right)^2\rho^2 + \left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{1-\xi}\right)\left(-\overline{\nabla}^2+\overline{m}_q^2\right)\right]\times$$
$$\times\, f(\rho,\xi) + \frac{g^2}{2\pi}\left(N-\frac{1}{N}\right)P\int_0^1 d\xi'\,\frac{f(\rho,\xi)-f(\rho,\xi')}{(\xi-\xi')^2},$$

где $f(\rho, \xi)$ — волновая функция связанного состояния кварка и антикварка, а интеграл берется в смысле главного значения Коши. В этом пределе переменная ξ становится непрерывной и принимает значения в интервале $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Первое слагаемое в уравнении, пропорциональное ρ^2, обусловлено вкладом нулевой моды, а последнее имеет такой же вид, как и в уравнении ’т Хоофта в двумерной КХД. Собственные значения и волновые функции нашего спектрального уравнения не могут быть описаны аналитически, но они могут быть получены численно.

Качественно спектр напоминает спектр гармонического осциллятора в трех измерениях. Примечательной особенностью нашей модели служит появление вырожденных эквидистантных уровней энергии, соответствующих линейным траекториям Редже. Это важный результат, поскольку существенное вырождение действительно наблюдается в экспериментальном спектре мезонов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье содержится краткий обзор одного из используемых нами подходов к проблеме описания непертурбативных эффектов в рамках гамильтонова подхода к КХД на СФ. Исследуется предельный переход к гамильтониану на СФ от гамильтонианов на пространственноподобных гиперплоскостях, приближающихся к СФ. Таким образом мы приходим к полуфеноменологической динамике нулевой моды, которая дает конфайнмент по поперечным координатам $x^{\perp}$ для состояний с кварком и антикварком, калибровочно-инвариантно соединенных посредством глюонных нулевых мод. Свойство конфайнмента по продольной координате x^{-} получается модификацией четырехфермионного члена в гамильтониане на СФ по аналогии с уравнением ’т Хоофта в $(1+1)$-мерной КХД. Это требует введения нелокальности по поперечным координатам $x^{\perp}$ для четырехфермионного члена в гамильтониане на СФ. В результате получаем этот член эффективно перенормированным так, что он не приводит к УФ-расходимости в спектральном уравнении.

Следует отметить, что наше спектральное уравнение имеет сходство с аналогичными уравнениями, полученными с помощью голографического метода [16, 17]. В отличие от этого метода наш полуфеноменологический подход основан на гамильтониане КХД и может быть непосредственно применен для состояний более общей формы.

Авторы выражают благодарность организаторам 11-й совместной конференции АРСТР – ЛТФ ОИЯИ – ПИЯФ НИЦ КИ – СПбГУ «Современные проблемы ядерной физики и физики элементарных частиц».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P. A. M.* Forms of Relativistic Dynamics // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.
2. *Bakker B. L. G. et al.* Light-Front Quantum Chromodynamics: A Framework for the Analysis of Hadron Physics // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2014. V. 251. P. 165; arXiv:1309.6333 [hep-ph].
3. *Franke V. A., Novozhilov Yu. V., Paston S. A., Prokhvatilov E. V.* Focus on Quantum Field Theory. Ch. “Quantization of Field Theory on the Light Front”. New York: Nova Sci. Publ., 2005. P. 23–81; arXiv:hep-th/0404031.

4. *Пастон С. А., Прохватилов Е. В., Франке В. А.* Вычисление спектра масс КЭД-2 в координатах светового фронта // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 292; arXiv:hep-th/0501186.
5. *Paston S. A., Prokhvatilov E. V., Franke V. A.* On the Correspondence between a Light-Front Hamiltonian Approach and a Lorentz-Covariant Formulation for Quantum Gauge Theories // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2002. V. 108. P. 189; arXiv:hep-th/0111009v1.
6. *Malyshev M. Yu., Paston S. A., Prokhvatilov E. V., Zubov R. A.* Renormalized Light Front Hamiltonian in the Pauli–Villars Regularization // Intern. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 169; arXiv:1311.4381 [hep-th].
7. *Малышев М. Ю., Прохватилов Е. В., Зубов Р. А., Франке В. А.* Построение пертурбативно корректного гамильтониана на световом фронте для $(2+1)$-мерной калибровочной теории // ТМФ. 2017. Т. 190, № 3. С. 479; arXiv:1609.07507 [hep-th].
8. *Прохватилов Е. В., Франке В. А.* Приближенное описание КХД-конденсатов в светоподобных координатах // ЯФ. 1988. Т. 47. С. 882.
9. *Прохватилов Е. В., Франке В. А.* Предельный переход к светоподобным координатам в теории поля и КХД-гамильтониан // ЯФ. 1989. Т. 49. С. 1109.
10. *Prokhvatilov E. V., Naus H. W. L., Pirner H. J.* Effective Light-Front Quantization of Scalar Field Theories and Two-Dimensional Electrodynamics // Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2933.
11. *Малышев М. Ю., Прохватилов Е. В.* Квантовая хромодинамика на световом фронте с нулевыми модами, моделирующими вакуум // ТМФ. 2011. Т. 169, № 2. С. 272.
12. *Zubov R. A., Prokhvatilov E. V.* On Quark–Antiquark Approximation in Light Front QCD with Zero Gluon Modes // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1701. P. 040023.
13. *Зубов Р. А., Прохватилов Е. В., Малышев М. Ю.* Предельный переход к световому фронту в квантовой хромодинамике и кварк-антикварковое приближение // ТМФ. 2015. Т. 184, № 3. С. 456.
14. *Зубов Р. А., Прохватилов Е. В., Малышев М. Ю.* Модель кварк-антикваркового взаимодействия в квантовой хромодинамике на световом фронте // ТМФ. 2017. Т. 190, № 3. С. 440.
15. *'T Hooft G.* A Two-Dimensional Model for Mesons // Nucl. Phys. B. 1974. V. 75. P. 461.
16. *Brodsky S. J., de Teramond G. F., Dosch H. G., Erlich J.* Light-Front Holographic QCD and Emerging Confinement // Phys. Rep. 2015. V. 584. P. 1; arXiv:1407.8131 [hep-ph].
17. *Li Y., Maris P., Zhao X., Vary J. P.* Heavy Quarkonium in a Holographic Basis // Phys. Lett. B. 2016. V. 758. P. 118; arXiv:1509.07212.