Письма в ЭЧАЯ. 2020. Т. 17, № 3(228). С. 266–270

КВАНТОВАЯ ЗАДАЧА О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В СОБСТВЕННОМ ПОЛЕ

А. С. Чихачев [1]

Всероссийский электротехнический институт — филиал ФГУП «Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. Е. И. Забабахина», Москва

В работе изучается динамика заряда, взаимодействующего с собственным полем в одномерном и сферически-симметричном случае. Для описания использовано уравнение Шредингера с нестационарным гамильтонианом. При этом решена нестационарная задача, сведенная к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

The dynamics of the charge interacting with the eigenfield in a one-dimensional and spherical symmetric case is studied. To describe it, the Schrödinger equation with a non-stationary Hamiltonian is used. At the same time, a non-stationary problem reduced to a non-linear system of ordinary differential equations has been solved.

PACS: 03.65.-w

ВВЕДЕНИЕ

Для ряда физических задач представляется актуальной проблема учета взаимодействия электрических зарядов с собственным полем, это взаимодействие может приводить к увеличению размеров системы и ее распаду. Для моделирования поведения таких систем оказывается удобным использование нестационарного интеграла движения — «интеграла Мещерского». В квантово-механических работах этот интеграл исследовался, например, в работах [1, 2]. В настоящей работе приведено решение уравнения Шредингера с нестационарным потенциалом. Учтено воздействие собственного поля. Точное решение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

1. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрим сначала одномерную систему. Модельный нестационарный гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{\xi(t)^2} U\left(\frac{x}{\xi(t)}\right). \tag{1}$$

[1] E-mail: churchev@mail.ru

Здесь x — координата; $U(x/\xi(t))$ — потенциал, явно зависящий от времени. Вспомогательная функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению $d^2\xi(t)/dt^2 = \lambda/\xi(t)^3$. Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\xi^2}U\left(\frac{x}{\xi}\right)\Psi. \qquad (2)$$

Если ввести новые переменные $x_* = x/\xi(t)$, $\tau = \int dt'/\xi(t')^2$, а искомую функцию представить в виде

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\xi^2}\exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar\xi^2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)\Psi_1(x_*,\tau)$$

(здесь $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$), то для $\Psi_1(x_*,\tau)$ можно получить уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1(x_*,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\Psi_1(x_*,\tau)}{\partial x_*^2}\Big) + \Big(U(x_*) + \frac{3i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi} + \frac{mx_*^2}{2}\lambda\Big)\Psi_1(x_*,\tau). \qquad (3)$$

Далее будет рассматриваться случай, когда $\dot{\xi}/\xi \equiv \mathrm{const}$. При этом $\xi(t) = \sqrt{\xi_0^2 + t/\tau_0}$, а $\lambda = -1/(4\tau_0^2)$.

Представляя Ψ_1 в виде произведения $\Psi_1 = T(\tau)X(x_*)$, можно получить

$$i\hbar\Big(\frac{\dot{T}}{T}\Big) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X''}{X} + V(x_*) - \frac{mx_*^2}{8\tau_0^2} + \frac{3i\hbar}{4\tau_0}. \qquad (4)$$

Если далее положить $\dot{T}/T = -iE/\hbar$, где E — действительное число, то плотность заряда, определяемая $|\Psi|^2$, будет зависеть от ξ как $1/\xi^4$. Это обстоятельство позволяет написать самосогласованную систему для заряда, взаимодействующего с собственным полем.

Введем переменные $s = x_*/\sqrt{2\hbar\tau_0/m\xi_0}$, $W = 4\tau_0/\hbar(V - E)$. Положим также $X(s) = R(s)\exp\left(i\theta(s)\right)$, где R, θ — действительные функции. Приравнивая действительные и мнимые части и используя уравнение Пуассона, получим систему уравнений

$$R'' - R\theta'^2 - \big(W - s^2\big)R = 0, \quad 2R'\theta' + R\theta'' - 3R = 0, \quad W'' = -\frac{8\pi q^2\hbar\tau_0}{m}R^2. \qquad (5)$$

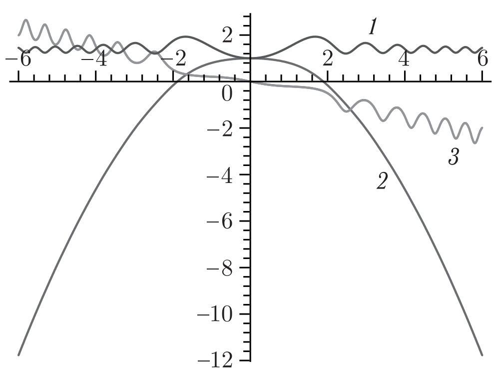

Рис. 1. Поведение амплитуды плотности (*1*), потенциала (*2*) и функции $y(s)$ (*3*) в одномерной задаче

Третье уравнение системы (5) представляет собой уравнение Пуассона; здесь q — элементарный заряд, R^2 — плотность заряда. Обозначим $\varkappa_0 = 8\pi q^2\hbar\tau_0/m$, $\theta'(s) = y(s)$ из второго и третьего уравнений системы следует интеграл $W' + (\varkappa_0/3)R^2\theta' = \text{const}$. В результате получим систему

$$\begin{gathered} R''(s) - R(s)y(s)^2 - \bigl(W(s) - s^2\bigr)R(s) = 0, \\ 2R'(s)y(s) + R(s)y'(s) - 3R(s) = 0, \\ W'(s) + \frac{\varkappa_0}{3}R(s)^2y(s) = \text{const}. \end{gathered} \tag{6}$$

На рис. 1 приведены частные решения системы (6) для амплитуды плотности и потенциала. В качестве начальных условий положено $y(0) = W(0) = R'(0) = 0$, $R(0) = 1$, $\varkappa = 1$. Амплитуда плотности (кривая *1*) имеет осциллирующий характер, тогда как потенциальная функция (кривая *2*) имеет максимум в нуле и убывает с увеличением $|s|$. Кривая *3* показывает поведение вспомогательной функции $y(s) = \theta'(s)$.

2. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

При наличии сферической симметрии и при нулевом орбитальном моменте гамильтониан такой системы мало отличается от (1):

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r})^2 + \frac{1}{\xi(t)^2}U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right). \tag{7}$$

Здесь r — расстояние от центра системы.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\xi^2}U\left(\frac{r}{\xi}\right)\Psi. \tag{8}$$

Если ввести новые независимые переменные $\rho = r/\xi(t)$, $\tau = \int dt'/\xi(t')^2$, а искомую функцию представить в виде

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{\xi^2}\exp\left(\frac{imr^2}{2\hbar\xi^2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)\Psi_1(\rho,\tau)$$

(здесь $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$), то для $\Psi_1(\rho,\tau)$ можно получить уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1(\rho,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Bigl(\frac{\partial^2\Psi_1(\rho,\tau)}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\Psi_1(\rho,\tau)}{\partial\rho}\Bigr) + \left(U(\rho) + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi} + \frac{m\rho^2}{2}\lambda\right)\Psi_1(\rho,\tau). \tag{9}$$

Возможно, далее, разделение переменных ρ, τ. Положим $\Psi_1(\rho,\tau) = T(\tau)S(\rho)$. Можно получить

$$i\hbar\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(\rho S)''}{\rho S} + U(\rho) + \frac{m\rho^2}{2}\lambda + \frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}. \tag{10}$$

В этом равенстве точка означает производную по τ, а штрих — по ρ. Следует далее положить $i\hbar(\dot{T}/T) = E$, где E — действительная величина, в этом случае зависимость плотности заряда от ξ будет иметь вид $1/\xi^4$. Положим $\xi(t) = \sqrt{\xi_0^2 - t/\tau_0}$, т. е., в отличие от предыдущего раздела, мы рассматриваем случай, когда $\xi(t)$ является убывающей функцией. При этом также $\lambda = -1/(4\tau_0^2)$, $\dot{\xi}/\xi = -1/(2\tau_0)$. Будем искать решение в виде $S = \sqrt{(2\hbar\tau_0)/m} R \exp(i\theta)$, где R и θ — вещественные функции. Вместо ρ введем переменную x: $\rho = x\sqrt{(2\hbar\tau_0)/m}$. Из уравнения (10) следуют соотношения

$$\frac{\hbar}{4\tau_0}\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{x}\frac{R'}{R} - \theta'^2\right) = (U - E) - \frac{\hbar}{4\tau_0}x^2, \qquad (11)$$
$$2R'x\theta' + 2R\theta' + Rx\theta'' + Rx = 0.$$

Эти уравнения должны быть дополнены уравнением Пуассона. Плотность заряда имеет вид $en_*|\Psi|^2 = e(R^2/\xi^4)n_*$, где n_* — характерная плотность частиц. При наличии сферической симметрии получим уравнение

$$\frac{d}{dx}x^2\frac{d}{dx}U(x) = -4\pi e^2 R^2 n_* \frac{2\hbar\tau_0}{m}. \qquad (12)$$

Введем безразмерные величины: $W(x) = 4(U(x) - E)\tau_0/\hbar$, $\kappa_0 = 8\pi e^2\tau_0^2 n_*/m$, обозначим $\theta' = y(x)$. Система может быть записана как

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{x}\frac{R'}{R} = W(x) + y^2 - x^2, \quad W' = \kappa_0 R^2 y + \mathrm{const}, \quad (R^2x^2y)' = -R^2x^2. \qquad (13)$$

На рис. 2 приведены результаты решения системы (13) при начальных условиях $R(0) = 10$, $R'(0) = W(0) = y(0) = 0$. Кривая *1* показывает поведение плотности заряда $R^2(x)$ как функции автомодельной переменной x, кривая *2* — поведение потенциальной функции $W(x)$, кривая *3* — вспомогательной функции $\theta'(x)$.

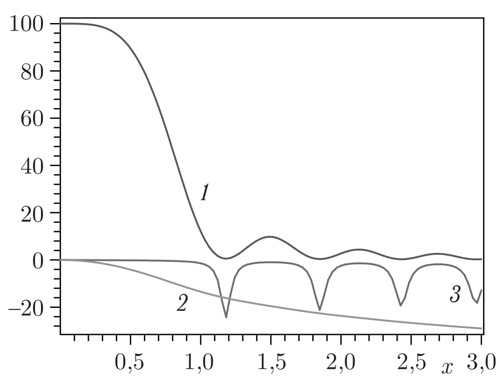

Рис. 2. Поведение плотности заряда (*1*), потенциальной функции (*2*) и функции $y(x)$ (*3*) в трехмерной сферически-симметричной задаче

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе найдены частные решения для нелинейной нестационарной системы, взаимодействующей с собственным полем в одномерном и трехмерном сферически-симметричном случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dodonov V. V., Man'ko V. I., Nikonov D. E.* Exact Propagators for Time-Dependent Coulomb, Delta and Other Potentials // Phys. Lett. A. 1992. V. 162. P. 359–364.
2. *Chikhachev A. S.* Nonstationary Self-Consistent Model for an Ensemble in the Self-Field // Tech. Phys. 2014. V. 59, No. 4. P. 487–493.

Получено 15 декабря 2019 г.