

## ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДАМИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

*В. Г. Куракин*<sup>а, 1</sup>, *П. В. Куракин*<sup>б, 2</sup>

<sup>а</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

<sup>б</sup> Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

Множественное кулоновское рассеяние движущихся зарядов в среде является тем механизмом, который позволяет объяснить процессы преломления и частичного отражения пучка заряженных частиц при пересечении установленной под углом на его пути мишени. Поскольку коэффициент отражения зависит от энергии частиц, его измеренное значение можно использовать для последующего вычисления энергии пучка.

Multiple Coulomb scattering is the mechanism that makes it possible to explain charged particles beam refraction and partial reflection phenomena while traversing an incline target installed on the beam path. Since reflection coefficient is energy-dependent its measured value may be used for beam energy calculation.

PACS: 41.90.+e

### ВВЕДЕНИЕ

Стохастическая электронная оптика (стохастическая оптика пучков заряженных частиц) — раздел физики, изучающий распространение пучков (поток) заряженных частиц в однородных и неоднородных рассеивающих средах. Данный термин был введен авторами настоящей работы в [1]. В исследовании динамики зарядов учитывается только процесс множественного кулоновского рассеяния движущихся зарядов на атомах и ядрах среды. Наиболее полно случайный процесс, каковым является множественное кулоновское рассеяние, описывается функцией распределения, и для данного вида динамики заряженной частицы в безграничной однородной рассеивающей среде она была получена в первой половине XX в. на основе решения уравнения второго порядка в частных производных. Нахождение аналитического решения данного уравнения для рассеивающей среды, граничащей с вакуумом, представляет значительные математические трудности кроме случая нормального падения заряда на границу раздела. Вместе с тем модельные представления, развитые в упомянутой

---

<sup>1</sup>E-mail: vgkurakin@mail.ru

<sup>2</sup>E-mail: erich.honeck@gmail.com

работе, позволили установить закономерности отражения и преломления движущегося заряда, пересекающего границу раздела, представленные в виде формул первого приближения для средних величин.

Уже из общих физических соображений ясно, что данные эффекты должны зависеть не только от параметров среды, но и от импульса движущегося заряда, а полученные в работе [1] формулы среднего угла преломления свидетельствуют, что эта зависимость выражается через универсальный параметр, описывающий радиационные эффекты движущегося заряда в среде.

В данной работе рассматривается по существу обратная задача — как из измерений параметров пучка, пересекающего установленную под углом к траектории движущихся частиц тонкую мишень, извлечь информацию об энергии и импульсе пучка.

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОЙ БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Двигаясь в среде, заряженная частица рассеивается на ядрах и электронах среды и теряет свою энергию. Будем пренебрегать потерями энергии (на ионизацию и излучение) частицы, несущей элементарный заряд, и принимать во внимание только многократное кулоновское рассеяние на малые углы. В этом случае в однородной безграничной среде на расстоянии  $x$  от точки старта в каждой из двух взаимно перпендикулярных координатных плоскостей, пересекающихся по линии начальной скорости заряда, имеет место следующее распределение вероятностей для поперечного смещения заряда  $y$  и направления его скорости  $\theta$  [2]:

$$P(x, y, \theta) dy d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x^2} \exp \left[ -\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left( \theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] dy d\theta. \quad (1)$$

Здесь  $P(x, y, \theta) dy d\theta$  — вероятность обнаружить частицу с продольной координатой  $x$  в интервалах  $(y, y + dy)$ ,  $(\theta, \theta + d\theta)$  поперечного смещения и угла, составляемого движущейся частицей с осью  $x$ , а величину  $\Theta_s$  удобно выразить через параметры, описывающие радиационные процессы в веществе,

$$\Theta_s^2 = \left( \frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left( \frac{4\pi}{\alpha} \right)^{1/2} m_e c^2 = 21 \text{ МэВ}, \quad (2)$$

где  $\beta, p, c$  — соответственно относительная скорость заряда, его импульс и скорость света;  $X_0$  — радиационная длина;  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры;  $e, m_e$  — заряд электрона и его масса;  $\hbar$  — постоянная Планка. Функция (1) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\Theta_s^2}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

для неограниченной рассеивающей среды для частицы с элементарным зарядом, начинающим движение из начала координат в направлении оси  $x$  [2]. Соотношение (1) описывает двумерное гауссово распределение, а наличие перекрестного члена  $\theta y$  указывает на то, что поперечное смещение и направление скорости рассеиваемого заряда

не являются статистически независимыми величинами. Из соотношения (1) следует также [3], что события  $(y, \theta)$  равной вероятности на глубине  $x$  в безразмерной системе координат  $\eta = y/x, \theta$  расположены на эллипсах

$$3\eta^2 - 3\eta\theta + \theta^2 = f = \text{const.} \quad (4)$$

### МОДЕЛЬ ТРУБОК И ЛИНИЙ ТОКА ДЛЯ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Аналитические решения уравнений в частных производных второго порядка задач математической физики, описывающих физические процессы, известны лишь для ограниченного круга границ. По этой причине в большинстве случаев о характере решений можно судить лишь качественно, для нахождения точного решения приходится использовать численные методы. Для нахождения приближенных средних значений для уравнения (3) мы использовали математическую модель трубок тока некой условной жидкости, которая следует из точного решения указанного уравнения для безграничной рассеивающей среды [1].

Можно показать, что среднее значение угла рассеяния в любой точке неограниченной рассеивающей среды совпадает с направлением касательной к кривой равной вероятности, проходящей через данную точку. Действительно, как следует из функции распределения (1), распределение по поперечной координате рассеиваемого заряда определяется соотношением

$$S(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \exp\left(-\frac{3y^2}{\Theta_s^2 x^3}\right), \quad (5)$$

из которого следует формула для вероятности обнаружить заряд в интервале поперечных смещений  $(0, y)$  на глубине  $x$

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \int_0^y S(x, \xi) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \int_0^y \exp\left(-\frac{3\xi^2}{\Theta_s^2 x^3}\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{3}y/\Theta_s x^{3/2}} \exp(-t^2) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Из последнего выражения следует, что данная вероятность постоянна вдоль кривой, описываемой соотношением (кривая равной вероятности)

$$y(x) = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2}. \quad (7)$$

Здесь

$$\kappa = \text{erf}^{-1}(2W) \quad (8)$$

— функция, обратная интегралу ошибок

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (9)$$

Согласно (7), тангенс угла наклона касательной, совпадающий с самим углом при малых значениях последнего, равен  $3y/2x$ . К этому же значению приходим, вычисляя среднее значение угла рассеяния из функции распределения (1). Это дает нам основание интерпретировать усредненное движение рассеянных зарядов как ламинарный поток некой условной жидкости, линии тока которой совпадают с линиями равной вероятности (7). Можно также говорить о трубках тока как о расширяющихся областях, ограниченных двумя линиями тока. Их ширина меняется от нуля в месте вхождения заряда в рассеивающую среду до значения

$$dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2} d\kappa \quad (10)$$

на глубине  $x$  рассеивающей среды.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПУЧКА МЕТОДОМ ИЗМЕРЕНИЯ ТОКА ПУЧКА ДО И ПОСЛЕ МИШЕНИ

Модель линий и трубок тока для описания усредненного движения рассеянных зарядов не дает новой информации в случае безграничной рассеивающей среды. Описание с помощью функции распределения является наиболее полным для стохастического процесса, и все необходимые характеристики могут быть получены с помощью функции распределения. В случае неоднородной среды, включающей вакуум и собственно рассеивающую среду, модель линий и трубок тока позволяет выявить новые закономерности, сопровождающие процесс рассеяния на границах, а именно преломление и отражение пучка заряженных частиц, пересекающего границу раздела вакуума и рассеивающей среды, что продемонстрировано в работе [1]. Согласно данной работе, относительное число зарядов, прошедших через установленную под углом на пути пучка рассеивающую пластину толщиной  $t$ , определяется соотношением

$$N = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\kappa \max} n \exp(-\kappa^2) d\kappa, \quad (11)$$

где

$$n = \operatorname{erf} \left[ \frac{2}{\Theta_s \sqrt{t\sqrt{1+k^2}(1+k\eta)}} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(k) + \frac{3}{2} \frac{\eta}{(1+k\eta)} \right) \right] + \\ + \operatorname{erf} \left[ \frac{2}{\Theta_s \sqrt{t\sqrt{1+k^2}(1+k\eta)}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(k) - \frac{3}{2} \frac{\eta}{(1+k\eta)} \right) \right]. \quad (12)$$

Здесь  $\eta$  — корень уравнения

$$x = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \Theta_s \sqrt{t\sqrt{1+k^2}(1+kx)^{3/2}}. \quad (13)$$

$\kappa_{\max}$  определяется выражением

$$\kappa_{\max} = \frac{2}{3} \frac{1}{\Theta_s \sqrt{t\sqrt{1+k^2}k}}. \quad (14)$$

На рис. 1 представлено семейство зависимостей коэффициента прохождения пучка через установленную на его пути пластину от ее наклона к траектории при различных энергиях пучка. Здесь  $k = \tan \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между траекторией пучка и нормалью к пластине. Соседние кривые соответствуют энергиям пучка, отличающимся в два раза, верхняя кривая соответствует максимальной энергии пучка. Хорошее разделение кривых при небольших значениях  $k$  свидетельствует о неплохой чувствительности тока пучка к изменению его энергии при фиксированном положении пластины.

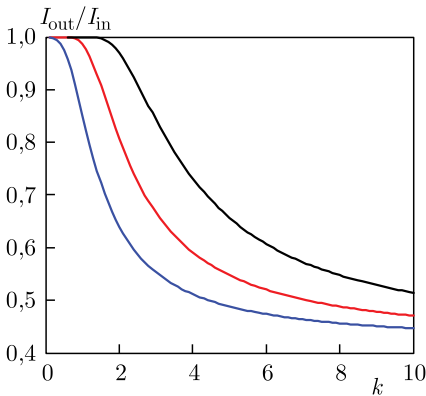


Рис. 1. Зависимость коэффициента прохождения пучка через мишень от ее наклона при различных энергиях пучка. Верхняя кривая  $\Omega_s = 0,5 \text{ см}^{-1/2}$ , средняя  $\Omega_s = 1 \text{ см}^{-1/2}$ , нижняя  $\Omega_s = 2 \text{ см}^{-1/2}$

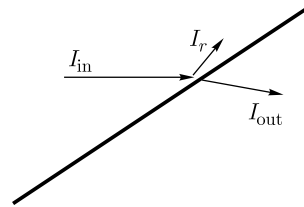


Рис. 2. Распределение токов на наклонной мишени

На рис. 2 представлена схема измерения энергии пучка. Измеряется ток пучка до мишени и после нее и вычисляется отношение прошедшего сквозь мишень тока к падающему току (коэффициент прохождения). Можно также измерять коэффициент отражения. Коэффициент отражения и коэффициент прохождения при фиксированных материале мишени, ее толщине и угле наклона однозначно определяют величину  $\Theta_s$ , через значение которой и вычисляется энергия пучка.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен простой способ измерения энергии пучка заряженных частиц. Метод основан на закономерностях прохождения и частичного отражения пучка частиц от установленной под углом на его пути мишени. Поскольку коэффициенты прохождения и отражения зависят от энергии (импульса) пучка, их измерение позволяет вычислить энергию (импульс) пучка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куракин В. Г., Куракин П. В. О теоретических основах стохастической оптики пучков заряженных частиц // Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 7(219). С. 719–725 (Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15, No. 7. P. 776–779).
2. Росси Б. Частицы больших энергий: Пер. с англ. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 536 с. (Rosi B. High Energy Particles. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1952).
3. Куракин В. Г., Куракин П. В. Фазовый портрет рассеянного сгустка заряженных частиц // ЖТФ. 2018. Т. 85, вып. 5. С. 795–798 (Techn. Phys. 2018. V. 63, No. 5. P. 772–775).