

СТРУКТУРНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ s -СОСТОЯНИЙ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

*В. В. Андреев*¹

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Белоруссия

Произведен расчет структурных релятивистских поправок высших порядков для основных состояний водородоподобных систем, таких как атом водорода и мюонный атом водорода. Исследована зависимость поправок от параметризации протонных формфакторов. Полученные численные оценки показывают, что поправки лежат в пределах чувствительности современных экспериментов по измерению энергетических характеристик водородоподобных систем.

The calculation of structural relativistic corrections of higher orders for the ground states of hydrogen-like systems, such as a hydrogen atom and a muonic hydrogen atom, has been performed. The dependence of the corrections on the parameterization of proton form factors is investigated. The obtained numerical estimates show that the corrections are within the limits of sensitivity of modern experiments to measure the energy characteristics of hydrogen-like systems.

PACS: 12.20.-m; 13.40.Gp; 31.30.J; 36.10.Ee

ВВЕДЕНИЕ

Изучение характеристик связанных систем является важнейшим источником информации о свойствах взаимодействий элементарных частиц. В этой связи для объяснения экспериментальных данных в рамках квантово-полевых моделей необходимо учитывать как релятивистские эффекты, так и эффекты высших порядков по константе взаимодействия. Для вычислений такого рода требуются методики, позволяющие проводить численные расчеты этих эффектов с высокой точностью.

Вычисление различных поправок для энергетических характеристик s -состояний водородоподобных систем является актуальным по нескольким причинам. Во-первых, экспериментальные измерения s -состояний атома водорода проводятся с высокой точностью ($\delta \sim 10^{-15}$) [1]. Во-вторых, до сих пор нет окончательного решения проблемы разницы между значениями радиуса заряда протона, полученного в эксперименте с мюонным водородом [2], и обычным атомом водорода. Эта ситуация стимулировала многочисленные теоретические исследования различных поправок, которые могут улучшить точность теоретического вычисления [3–6].

Эта работа посвящена вычислению структурных релятивистских эффектов высших порядков для s -состояний водородоподобных систем. Для расчетов используется

¹E-mail: vik.andreev@rambler.ru

методика вычислений, основанная на импульсном представлении потенциала взаимодействия и точном вычислении радиального ядра уравнения состояния (без разложения по степеням скоростей), проведенном в работах [7,8]. С помощью этой методики рассчитаны релятивистские вклады высших порядков для мюонного и обычного атомов водорода, связанные состояния которых описываются калибровочно-инвариантной пуанкаре-ковариантной моделью. Эта модель основана на точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механики (ПИКМ).

1. ОПИСАНИЕ СВЯЗАННОЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ПУАНКАРЕ-КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ

Главным требованием ПИКМ является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. В случае системы двух частиц с массами m_1 и m_2 и, соответственно, с 4-импульсами $p_1 = (\omega_{m_1}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_2}(p_2), \mathbf{p}_2)$ это требование, в рамках мгновенной и точечной форм ПИКМ, приводит к уравнению для связанного состояния с волновой функцией $\Phi_{\ell,S}^J(\mathbf{k})$ и массой M :

$$\sum_{\ell',S'} \int_0^\infty V_{\ell,S;\ell',S'}^J(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Phi_{\ell',S'}^{J\mu}(\mathbf{k}') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{\ell,S}^J(\mathbf{k}), \quad (1)$$

где $M_0 = \omega_{m_1}(\mathbf{k}) + \omega_{m_2}(\mathbf{k})$ — эффективная масса системы невзаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|, \omega_m(\mathbf{k}) = \sqrt{k^2 + m^2}$).

Ядро фермион-фермионной системы в $\ell - S$ базисе для произвольного полного углового момента J , после точного вычисления спинорной части методом базисных спиноров [11], запишется в виде

$$V_{\ell',S';\ell,S}^J(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_{k_1,2}, \lambda_{p_1,2}=-1}^1 \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ \lambda_{k_1}/2, & -\lambda_{k_2}/2, & \lambda \end{matrix} \right\} \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & S & J \\ 0, & \lambda, & \lambda \end{matrix} \right\} \times \\ \times \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell' & S' & J' \\ 0, & \lambda', & \lambda' \end{matrix} \right\} \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ \lambda_{p_1}/2, & -\lambda_{p_2}/2, & \lambda \end{matrix} \right\} \frac{Z\alpha}{4\pi} \sum_{i=I-V} V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^i, \quad (2)$$

где

$$V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^I = 2 \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 W_{-\sigma\lambda_{k_1}, -\rho\lambda_{k_2}}(\mathbf{k}) W_{-\sigma\lambda_{p_1}, -\rho\lambda_{p_2}}(\mathbf{k}') \left[\delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \rho\sigma \times \right. \\ \left. \times G_{-\lambda_{k_1}, \lambda_{k_1}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{R}_\ell^{(I)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \right] + \delta_{\rho\lambda_{k_1}, \sigma\lambda_{k_2}} G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{R}_\ell^{(I)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \right] \right], \quad (3)$$

$$V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{II} = -\frac{1}{2m_1} \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 W_{-\sigma\lambda_{k_1}, -\rho\lambda_{k_2}}(\mathbf{k}) W_{\sigma\lambda_{p_1}, -\rho\lambda_{p_2}}(\mathbf{k}') \times \\ \times \left[k' \rho \lambda_{k_2} \left(3G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{Z}^{(II)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right] - 2G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 3/2} \left[\tilde{R}_\ell^{(II)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right] \right) + \right. \\ \left. + G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{R}_\ell^{(II)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right] \left\{ \rho(3\lambda_{k_2}k - 2\lambda_{p_2}k') - 3(\omega_{m_1}(\mathbf{k}) + \omega_{m_1}(\mathbf{k}')) \right\} \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\text{III}} &= -\frac{1}{2m_2} \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 W_{-\sigma\lambda_{k_1}, -\rho\lambda_{k_2}}(k) W_{-\sigma\lambda_{p_1}, \rho\lambda_{p_2}}(k') \times \\
&\times \left[k' \sigma \lambda_{k_1} \left(3G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{Z}^{\text{III}}(k', k) \right] - 2G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 3/2, 1/2} \left[\tilde{R}^{\text{III}}(k', k) \right] \right) + \right. \\
&\left. + G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{R}^{\text{III}}(k', k) \right] \left\{ \sigma (3\lambda_{k_1} k - 2\lambda_{p_1} k') - 3(\omega_{m_2}(k) + \omega_{m_2}(k')) \right\} \right], \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\text{IV}} &= \frac{1}{4m_1 m_2} \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 W_{-\sigma\lambda_{k_1}, -\rho\lambda_{k_2}}(k) W_{\sigma\lambda_{p_1}, \rho\lambda_{p_2}}(k') \times \\
&\times \left[(k'^2 + k^2 + (\omega_{m_1}(k) + \omega_{m_1}(k'))(\omega_{m_2}(k) + \omega_{m_2}(k'))) \times \right. \\
&\left. \times G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{R}^{\text{IV}}(k', k) \right] + 2kk' G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{Z}^{\text{IV}}(k', k) \right] \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Для сокращения записи введены дополнительные функции:

$$\begin{aligned}
G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, s_1, s_2} [\Phi(x)] &= \\
&= \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{\ell=|J-s|}^{J+s} \frac{(2\ell+1)}{(2J+1)} \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s \\ \lambda_{k_1}/2, & -\lambda_{k_2}/2, & \lambda \end{matrix} \right\} \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ 0, & \lambda, & \lambda \end{matrix} \right\} \times \\
&\times \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s \\ \lambda_{p_1}/2, & -\lambda_{p_2}/2, & \lambda' \end{matrix} \right\} \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ 0, & \lambda', & \lambda' \end{matrix} \right\} \Phi_\ell(x), \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_\ell(k', k) &= \frac{1}{2\ell+1} \left[(\ell+1) \tilde{R}_{\ell+1}(k', k) + \ell \tilde{R}_{\ell-1}(k', k) \right], \quad (8) \\
W_{\lambda, \rho}(k) &= \sqrt{1 + \lambda v_{k_1}} \sqrt{1 + \rho v_{k_2}}, \quad W_{\lambda, \rho}(k') = \sqrt{1 + \lambda v_{p_1}} \sqrt{1 + \rho v_{p_2}}
\end{aligned}$$

с

$$v_{k_1} = \frac{k}{\omega_{m_1}(k)}, \quad v_{p_1} = \frac{k'}{\omega_{m_1}(k')}, \quad v_{k_2} = \frac{k}{\omega_{m_2}(k)}, \quad v_{p_2} = \frac{k'}{\omega_{m_2}(k')}. \quad (9)$$

Аналитическое выражение последней части потенциала записывается в виде

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\text{V}} &= \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 W_{-\sigma\lambda_{k_1}, -\rho\lambda_{k_2}}(k) \left[G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{U}^{\text{I}}(k', k) \right] \times \right. \\
&\times W_{-\sigma\lambda_{p_1}, -\rho\lambda_{p_2}}(k') - \frac{1}{2m_2} G_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}; \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{J, 1/2, 1/2} \left[\tilde{U}^{\text{II}}(k', k) \right] \times \\
&\left. \times W_{-\sigma\lambda_{p_1}, \rho\lambda_{p_2}}(k') (\omega_{m_2}(k') + \omega_{m_2}(k)) \right]. \quad (10)
\end{aligned}$$

Для коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$ используем обозначение вида

$$\mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_{p_1}, & \lambda_{p_2}, & \lambda \end{matrix} \right\}.$$

Составные части $V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^z(k, k')$ являются линейными комбинациями функций

$$K^{(I,II)}(q^2) = \Pi(\alpha, q^2) G_M^p(q^2) \{G_M^e(\alpha, q^2), F_2^e(\alpha, q^2)\}, \quad (11)$$

$$K^{(III,IV)}(q^2) = \Pi(\alpha, q^2) F_2^p(q^2) \{G_M^e(q^2), F_2^e(\alpha, q^2)\}, \quad (12)$$

где формфактор $\Pi(\alpha, q^2)$ — результат поляризации вакуума, а $G_M^{e,p}(q^2)$ и $F_2^{e,p}(q^2)$ — формфакторы фермионов.

В уравнениях (3)–(10) функции $\tilde{R}_\ell(k', k)$ и $\tilde{U}_\ell(k', k)$ определяются интегралами вида

$$\tilde{R}_\ell(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K(q^2) P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad (13)$$

$$\tilde{U}_\ell(k', k) = \varrho_{12}(k', k) \int_{-1}^1 \frac{K(q^2) P_\ell(x)}{q^4} dx, \quad (14)$$

где

$$\varrho_{12}(k', k) = (\omega_{m_1}(k') - \omega_{m_1}(k)) (\omega_{m_2}(k) - \omega_{m_2}(k')) \quad (15)$$

и

$$q^2 = -2kk'(y - x), \quad (16)$$

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2kk'}. \quad (17)$$

Радиальная часть потенциала получена на основе амплитуды рассеяния фермионов, в которой учитывались диаграммы однобозонного обмена, структура протона, диаграммы, связанные с поляризацией вакуума, а также электромагнитные поправки для электронной линии [7, 8]. В данной работе исследуются поправки, связанные только со структурой протона.

2. ОЦЕНКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВКЛАДОВ

Как правило, при вычислении энергетических поправок водородоподобных систем используется разложение потенциала $\sim k^2/m^2$ (см. обзор [9]). Включение слагаемых более высокого порядка, чем $\mathcal{O} \sim k^2/m^2$, при разложении по скоростям фермионов приводит к сложностям. Так, при вычислениях релятивистских поправок возникают расходящиеся интегралы за счет появления высоких степеней $(k/m)^n$. Поэтому для исследования релятивистских вкладов более высокого порядка воспользуемся точным выражением для ядра интегрального уравнения (1). Ядро потенциала (2) было получено в [7] без всяких допущений относительно скоростей фермионов и величины q^2 , а следовательно, является адекватным способом анализа релятивистских вкладов более высокого порядка, чем k^2/m^2 .

Для численных расчетов используем значения фундаментальных физических констант, взятые из [10]. Для нахождения энергетических поправок релятивистской водородоподобной системы с $J = S$ используем выражение

$$\Delta E = \int_0^\infty \int_0^\infty R_{n\ell=0}^C(k) \Delta V^{J=S}(k, k') R_{n\ell=0}^C(k') k'^2 k^2 dk' dk, \quad (18)$$

где $\Delta V^{J=S}(k, k')$ — добавка к потенциалу с точечными фермионами и $R_{n\ell}^C(k)$ — кулоновские волновые функции:

$$R_{n\ell}^C(k) = \sqrt{\frac{2(n-\ell-1)!}{\pi(n+\ell)!}} \frac{n^2 2^{2(\ell+1)} \ell! n^\ell (k/\beta)^\ell}{\beta^{3/2} (n^2 (k/\beta)^2 + 1)^{\ell+2}} \mathcal{G}_{n-\ell-1}^{\ell-1} \left(\frac{n^2 (k/\beta)^2 + 1}{n^2 (k/\beta)^2 + 1} \right) \quad (19)$$

с полиномами Гегенбауэра $\mathcal{G}_n^\ell(x)$.

3. ОЦЕНКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВКЛАДОВ

Проведем оценку релятивистских поправок высших порядков, связанных с движением фермионов, а также эффектов высоких переданных импульсов для структурных вкладов в 1s- и 2s-состояния водородоподобных систем. Для выделения слагаемых, связанных с конечными размерами протона, саксовские формфакторы протона представим в виде сумм:

$$G_M^p(q^2) = \mu_p + \Delta G_M^p(q^2), \quad G_E^p(q^2) = 1 + \Delta G_E^p(q^2),$$

где $\Delta G_{M,E}^p(q^2) \sim \langle r_p^2 \rangle$ при малых q^2 .

Далее произведем вычисления трех видов поправок: ΔE_{NR} , ΔE_{LC} и ΔE_{rel} , используя различные приближения:

— нерелятивистское приближение ΔE_{NR} ($k^2/m_{1,p}^2, k'^2/m_{1,p}^2 \ll 1$ и $q^2 \ll m_p^2$);
 — лидирующий вклад ΔE_{LC} (используется только приближение $k^2/m_{1,p}^2, k'^2/m_{1,p}^2 \ll 1$);

— точное вычисление ΔE_{rel} (без разложения по параметрам $k^2, k'^2/m_{1,p}^2$ и q^2/m_p^2).
 Поправка ΔE_{rel} с потенциалом (2) даст результат с учетом релятивистского движения фермионов системы. Для оценки релятивистских вкладов высших порядков используем величину

$$\Delta_{\text{HO}} = \Delta E_{\text{rel}} - \Delta E_{\text{LC}}.$$

Явный вид слагаемых потенциала, которые содержат интегралы вида (функции (13) и (14))

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\ell^p(k', k) &= \int_{-1}^1 \frac{\Delta G^p(q^2)}{q^2} P_\ell(x) dx, \\ \tilde{F}_\ell^p(k', k) &= \int_{-1}^1 \frac{\Delta G^p(q^2)}{q^2(1 - q^2/(4m_p^2))} P_\ell(x) dx, \end{aligned}$$

будет зависеть от явного вида формфакторов протона.

Для расчета поправок используем различные параметризации протонных форм-факторов:

- стандартную дипольную параметризацию

$$\begin{aligned} G_E^p(Q^2) &= G_D(Q^2), & G_M^p(Q^2) &= \mu_p G_D(Q^2), \\ G_D(Q^2) &= \left(1 + \frac{Q^2}{m_D^2}\right)^{-2}, & Q^2 &= -q^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $m_D^2 = 0,71 \text{ ГэВ}^2$. Данный вариант параметризации будем называть *фитом I*;

- вариант параметризации [12], который будем называть *фитом II*:

$$G_{E,M}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{a_{E,M}}\right)^{-2}, \quad \langle r_{E,M}^2 \rangle = \frac{12}{a_{E,M}}, \quad (21)$$

где

$$\langle r_M^2 \rangle^{1/2} = (0,777 \pm 0,013_{\text{stat}} \pm 0,009_{\text{syst}} \pm 0,005_{\text{model}} \pm 0,002_{\text{group}}) \Phi_M,$$

$$\langle r_E^2 \rangle^{1/2} = (0,879 \pm 0,005_{\text{stat}} \pm 0,004_{\text{syst}} \pm 0,002_{\text{model}} \pm 0,004_{\text{group}}) \Phi_M;$$

- параметризацию [13]

$$\begin{aligned} G_M^p(Q^2) &= \mu_p \frac{1 + a_{p,1}^M \tau_p}{1 + b_{p,1}^M \tau_p + b_{p,2}^M \tau_p^2 + b_{p,3}^M \tau_p^3}, \quad \tau_p = Q^2 / (4m_p^2), \\ G_E^p(Q^2) &= \frac{G_M^p(Q^2)}{\mu_p} (c_0 + c_1 Q^2), \end{aligned}$$

которая была применена в [14] для описания поведения формфакторов протона с параметрами:

$$a_{p,1}^M = 1,53 \pm 0,01, \quad b_{p,1}^M = 12,87 \pm 0,07, \quad c_0 = 1,02 \pm 0,01,$$

$$b_{p,2}^M = 29,16 \pm 0,25, \quad b_{p,3}^M = 41,40 \pm 0,33, \quad c_1 = -0,13 \pm 0,01.$$

Этот вариант параметризации обозначим как *фит III*.

В табл. 1 представлены результаты вычислений для атома водорода.

Таблица 1. Поправки для варианта «фит II», связанные с внутренней структурой протона, вклады ΔE_{NR} , ΔE_{LC} и релятивистские поправки высоких порядков ΔE_{rel} для атома водорода (в кГц)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{rel}	Δ_{HO}
1	1208,31	1208,30	1202,52	-5,78
2	151,04	151,04	150,31	0,72

Как следует из данных табл. 1, учет высоких q^2 посредством параметризации (21) не вносит существенного изменения по сравнению с линейным поведением. А вот поправки, связанные с релятивистским движением фермионов, в данной ситуации дают видимый, хотя и относительно малый в процентном выражении ($\approx 0,48\%$) эффект.

Расчеты с использованием стандартной дипольной параметризации (20) (фит I) и параметризации фит II отличаются вследствие различного поведения функций (20) и (21) при малых q^2 . Так, для $1s$ - и $2s$ -состояний для параметризации фит I имеем, что $\Delta E_{\text{rel}} = 1024,33$ кГц и $\Delta E_{\text{rel}} = 150,32$ кГц соответственно.

Для более полного представления о зависимости структурных поправок для водородоподобных атомов от вида параметризации рассмотрим численный расчет для варианта фит III (табл. 2).

Таблица 2. Поправки для варианта параметризации «фит III» (в кГц)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{rel}	Δ_{HO}
1	$1223,15 \pm 22,36$	$1200,10 \pm 34,86$	$1194,43 \pm 33,67$	$-5,67$
2	$152,89 \pm 2,39$	$150,01 \pm 4,23$	$149,30 \pm 4,21$	$0,71$

Релятивистские поправки высших порядков Δ_{HO} : $-5,67$ и $0,71$ кГц составляют $\approx 0,47\%$ для $1s$ - и $2s$ -состояний и практически не отличаются от параметризации фит II, в то время как сами вклады отличаются за счет различного поведения при малых q^2 . Однако интервальные оценки обоих фитов практически совпадают.

В данном подходе имеется возможность вычислить вклад Δ_{lab} , связанный с эффектом «Jlab» [15] (разница между двумя случаями $\mathcal{R}(q^2) = 1$ и $\mathcal{R}(q^2) = c_0 + c_1 q^2$, $c_1 = 0,13$ ГэВ $^{-2}$): $\Delta_{\text{lab}} = \{-23,42$ кГц, $-2,93$ кГц} для $1s$ - и $2s$ -состояний.

Проведем аналогичные приведенным выше вычисления для мюонного атома водорода. Интерес к этой системе связан с необычными следствиями, вытекающими из эксперимента [2].

Вычисления для мюонного атома водорода для ситуации «фит II» представлены в табл. 3.

Таблица 3. Поправки для варианта «фит II», связанные с внутренней структурой протона (ΔE_{NR} и ΔE_{LC}) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков (ΔE_{rel}) для мюонного атома водорода ($\mu^- p$ -система) (в мэВ)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{rel}	Δ_{HO} , мэВ
1	32,1261	31,9498	32,0591	0,1093
2	4,0158	3,9937	4,0065	0,0128

Из табл. 3 следует, что в отличие от атома водорода $\mu - p$ -система более чувствительна к поведению формфактора протона и менее чувствительна к релятивистским эффектам высоких порядков. Это объясняется тем, что первая боровская орбита этой системы ближе к ядру, чем в атоме водорода. Поэтому при вычислении структурных вкладов мюонного атома водорода важную роль играет поведение формфакторов от переданного импульса. В этом случае зависимость от параметризации более сильная, чем для атома водорода.

Численные оценки показывают, что релятивистские эффекты ($\approx 0,38\%$) больше необходимой точности $\sim 10^{-4}$ мэВ, и поэтому их также необходимо учитывать.

Как и в случае атома водорода, расчеты с использованием стандартной дипольной параметризации (20) (фит I) отличаются от данных табл. 3. Данный эффект становится более значительным по сравнению с атомом водорода, относительное отклонение вычислений составляет почти 14,7%.

Расчеты для варианта «фит III» представлены в табл. 4.

Таблица 4. Поправки для варианта «фит III», связанные с внутренней структурой протона (ΔE_{NR} и ΔE_{LC}) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков (ΔE_{rel}) для мюонного атома водорода ($\mu^- p$ -система) (в мэВ)

n	ΔE_{NR}	ΔE_{LC}	ΔE_{rel}	Δ_{HO} , мэВ
1	32,5205	31,7717	31,8929	0,1212
2	4,0651	3,9715	3,9866	0,0152

Данные из табл. 3 и 4 показывают, что в отличие от обычного атома водорода в мюонном атоме водорода эффекты высоких q^2 частично компенсируются релятивистскими эффектами, связанными с движением фермионов.

Также оценим дополнительный вклад, связанный с эффектом, обнаруженным на Jlab [15]. Поскольку он видоизменяет поведение зарядового формфактора протона, то следует ожидать большей чувствительности мюонного атома водорода к этим эффектам. Действительно, для $1s$ - и $2s$ -состояний атома водорода этот эффект дает дополнительные поправки, равные $-0,6158$ и $-0,0770$ мэВ соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как следует из расчетов, предлагаемая методика вычислений, использующая представление потенциала взаимодействия фермионов в виде (2), является инструментом, позволяющим оценить релятивистские вклады более высоких, чем k^2/m^2 , слагаемых, с ее помощью исследована зависимость поправок от параметризации протонных формфакторов и вычислены релятивистские вклады высших порядков. Расчеты показывают, что такие поправки лежат в пределах чувствительности современных экспериментов по измерению энергетических характеристик таких систем.

Автор благодарит кафедру общей и теоретической физики Самарского университета за плодотворные обсуждения этой работы, особенно профессоров А. А. Бирюкова, А. П. Мартыненко и А. Ф. Крутова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matveev A. et al.* Precision Measurement of the Hydrogen $1S - 2S$ Frequency via a 920-km Fiber Link // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. P. 230801.
2. *Pohl R., Antognini A., Nez F. et al.* The Size of the Proton // *Nature.* 2010. V. 466. P. 231–216.
3. *Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A.* Theory of Light Hydrogenic Bound States // *Springer Tracts Mod. Phys.* 2007. V. 222. 206 p.

4. Karshenboim S. G., Korzinin E. Yu., Shelyuto V. A., Ivanov V. G. Recoil Correction to the Proton Finite-Size Contribution to the Lamb Shift in Muonic Hydrogen // Phys. Rev. D. 2015. V. 91, No. 7. P. 073003.
5. Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Sorokin V. V. Nuclear Radiative Recoil Corrections to the Hyperfine Structure of S-States in Muonic Hydrogen // Phys. Part. Nucl. 2017. V. 48, No. 5. P. 819–821.
6. Dorokhov A. E., Krutov A. A., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Sukhorukova O. S. Hyperfine Structure of S-States in Muonic Ions of Lithium, Beryllium and Boron // Phys. Rev. A. 2018. V. 98, No. 4. P. 042501.
7. Андреев В. В. Вычисление ядра уравнения релятивистской двухфермионной системы // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 88–95.
8. Andreev V. V. Relativistic Potential of a Hydrogen-Like System in Poincarè Invariant Quantum Mechanics. arXiv: quant-ph 2012.06196. 2020.
9. Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 63–261.
10. Zyla P. A. et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics // Prog. Theor. Exp. Phys. 2020. V. 2020, No. 8. P. 083C01.
11. Andreev V. V. Analytic Calculation of Feynman Amplitudes // Phys. At. Nucl. 2003. V. 66. P. 383–393.
12. Bernauer J. et al. (A1 Collab.). High-Precision Determination of the Electric and Magnetic Form Factors of the Proton // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 242001.
13. Kelly J. J. Simple Parameterization of Nucleon Form Factors // Phys. Rev. C. 2004. V. 70. P. 068202.
14. Alberico W., Bilenky S., Giunti C., Graczyk K. Electromagnetic Form Factors of the Nucleon: New Fit and Analysis of Uncertainties // Phys. Rev. C. 2009. V. 79. P. 065204.
15. Gayou O. et al. (Jefferson Lab Hall A Collab.). Measurement of $G(Ep)/G(Mp)$ in Polarized- $ep \rightarrow e$ Polarized- $p \rightarrow Q^2 = 5.6 \text{ GeV}^2$ // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 092301.

Получено 1 января 2021 г.