Письма в ЭЧАЯ. 2022. Т. 19, № 6(245). С. 499–508

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

К СТРУКТУРЕ КУБИЧНОЙ ВЕРШИНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ ЦЕЛЫХ СПИНОВ

А. А. Решетняк [1]

Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

Уточнена структура кубичной лагранжевой вершины взаимодействия неприводимых полей целых спиральностей s_1, s_2, s_3 в d-мерном пространстве Минковского. Получено явное представление для оператора $\mathcal{Z}_j$, немультипликативно входящего в вершину (при $j = 1$ рассмотренного ранее). Решение получено в рамках БРСТ-подхода с полными БРСТ-операторами, содержащими все связи, соответствующие условиям, выделяющим поля неприводимых представлений, включая следовые операторы.

The structure of the cubic Lagrangian vertex corresponding to the irreducible fields with helicities s_1, s_2, s_3 in the d-dimensional Minkowski space is clarified. The explicit form of operator $\mathcal{Z}_j$ entering the vertex in a nonmultiplicative way (for $j = 1$ considered earlier) is obtained. The solution has been derived within the BRST approach with complete BRST operators, which contain all constraints corresponding to the conditions that extract the irreducible fields, including trace operators.

PACS: 11.30.–j; 11.30.Cp; 11.10.Ef; 11.10.Kk; 11.15.–q

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория взаимодействующих полей высших спинов (ПВС) является одним из актуальных направлений теоретической и математической физики высоких энергий (для обзора рекомендуем, например, [1–5]). Ожидается, что взаимодействующие ПВС откроют новые возможности в поиске элементарных частиц за рамками Стандартной модели и поспособствуют формированию пионерских подходов к объединению фундаментальных взаимодействий.

В нашей недавней работе [6] была получена общая лагранжева кубичная вершина взаимодействующих неограниченных полей целых спиральностей на пространстве

[1] E-mail: reshet@tspu.edu.ru

Минковского (см. [7–15] о результатах исследований по кубичным вершинам в разных подходах). В отличие от известных ранее результатов для кубичных вершин в работе [6] на взаимодействующие поля не накладываются какие-либо алгебраические связи, не следующие из принципа наименьшего действия. Вершина была выведена как результат БРСТ-замкнутого решения операторного уравнения, возникающего из требования сохранения калибровочной инвариантности для деформированного свободного действия относительно деформированных калибровочных преобразований, в свою очередь следующих из применения неограниченного БРСТ-подхода (развитого, например, в [3, 16–19]; об эквивалентности ограниченного [13] и неограниченного БРСТ-подходов см. [20]) к лагранжеву описанию моделей свободных полей высших спинов в пространствах Минковского и анти-де Ситтера. Найденная вершина соответствует кубичной вершине [11], полученной в формализме светового конуса в терминах физических степеней свободы, и сохраняет неприводимость представления взаимодействующих полей, в частности, число физических степеней свободы при деформации свободной лагранжевой формулировки.

Полученная в [6] вершина $|V^{(3)}\rangle_{(s)_3}$ (ее определение приведено в (24), (25)) содержит операторные величины, среди которых есть входящие мультипликативно следовые $U^{(s_i)}_{j_i}$, дифференциальные $\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}$ операторы, отвечающие спину s_i, $i = 1,2,3$, и операторы $\mathcal{Z}_j$, характеризующиеся сразу тремя наборами спинов s_1, s_2, s_3. В [6] найдено выражение для оператора $\mathcal{Z}_1$. Цель настоящей работы состоит в получении явного представления для оператора $\mathcal{Z}_j$, при $j = 2,3,\ldots$, немультипликативно входящего в вершину.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 изложены результаты применения БРСТ-конструкции с полным БРСТ-оператором к выводу кубичной вершины для неограниченных полей целых спиральностей s_1, s_2, s_3. В разд. 2 мы выводим операторы $\mathcal{Z}_j$ при $j > 1$. В заключении подведены итоги.

Мы используем соглашения работы [6]: $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+,-,\ldots,-)$ для метрического тензора с лоренцевскими индексами $\mu,\nu = 0,1,\ldots,d-1$, обозначения $\epsilon(F)$, $\mathrm{gh}(F)$, $[F, G\}$, $[x]$ для значений грассмановой четности, гостовского числа однородной величины F, суперкоммутатора величин F, G и целой части числа x.

1. БРСТ-ПОДХОД К КУБИЧНОЙ ВЕРШИНЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Лагранжева формулировка с кубичной вершиной в БРСТ-подходе для взаимодействующих вещественнозначных полностью симметричных безмассовых полей $\phi^{(i)}_{\mu(s_i)} \equiv \phi^{(i)}_{\mu_1\ldots\mu_{s_i}}(x)$, $i = 1,2,3$, высших целых спиральностей s_1, s_2, s_3 на d-мерном пространстве Минковского определяет калибровочную теорию первой стадии приводимости на конфигурационном пространстве $\mathcal{M}^{(s)_3}_{\mathrm{cl}}$ [6] с функционалом действия

$$S_{[1]|(s)_3}[\chi] = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{S}_{0|s_i}[\chi^{(i)}_{s_i}] + g\int \prod_{e=1}^{3} d\eta_0^{(e)} \Big({}_{s_e}\langle \chi^{(e)} K^{(e)} \big| V^{(3)}\rangle_{(s)_3} + \mathrm{h.\,c.}\Big), \qquad (1)$$

$$\mathcal{S}_{0|s_i}[\chi^{(i)}_{s_i}] = \mathcal{S}_{0|s_i}[\phi^{(i)}, \phi^{(i)}_1, \ldots] = \int d\eta_0^{(i)}\, {}_{s_i}\langle \chi^{(i)} | K^{(i)} Q^{(i)} | \chi^{(i)}\rangle_{s_i}, \qquad (2)$$

инвариантным с точностью до первого порядка по константе взаимодействия g относительно неабелевых калибровочных преобразований с параметрами нулевого уровня $\big|\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i}$

$$\delta_{[1]}\big|\chi^{(i)}\rangle_{s_i} = Q^{(i)}\big|\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i} - g\int\prod_{e=1}^{2}d\eta_0^{(i+e)}\Big({}_{s_{i+1}}\langle\Lambda^{(i+1)}K^{(i+1)}\big|\otimes \otimes {}_{s_{i+2}}\langle\chi^{(i+2)}K^{(i+2)}\big| + (i+1\leftrightarrow i+2)\Big)\big|V^{(3)}\rangle_{(s)_3}, \quad (3)$$

в свою очередь инвариантными с той же точностью относительно калибровочных преобразований с независимыми параметрами $\big|\Lambda^{(i)1}\rangle_{s_i}$:

$$\delta_{[1]}\big|\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i} = Q^{(i)}\big|\Lambda^{(i)1}\rangle_{s_i} - g\int\prod_{e=1}^{2}d\eta_0^{(i+e)}\Big({}_{s_{i+1}}\langle\Lambda^{(i+1)1}K^{(i+1)}\big|\otimes \otimes {}_{s_{i+2}}\langle\chi^{(i+2)}K^{(i+2)}\big| + (i+1\leftrightarrow i+2)\Big)\big|V^{(3)}\rangle_{(s)_3}. \quad (4)$$

В (1), (3) (4) использованы соглашения $(s)_3 \equiv (s_1, s_2, s_3)$, $[i+3 \simeq i]$, $S_{[1]} = \sum_{i=1}^{3}\mathcal{S}_{0|s_i} + S_1$, и $\delta_{[1]} = \delta_0 + \delta_1$ для деформированных действий и калибровочных преобразований. Функционал $\mathcal{S}_{0|s_i}$ (2) является квадратичным по полям действием i-й копии набора полей $|\chi^{(i)}\rangle_{s_i}$. Пространство $\mathcal{M}_{\mathrm{cl}}^{(s)_3}$ параметризовано основными полями $\phi^{(i)}_{\mu(s)_i}$ и наборами вспомогательных полей $\phi^{(i)}_{1\mu(s_i-1)}, \ldots$ меньших рангов, вложенными в векторы $|\chi^{(i)}\rangle_{s_i}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}^{(i)}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{H}^{(i)}\otimes\mathcal{H}^{(i)\prime}\otimes\mathcal{H}^{(i)}_{\mathrm{gh}}$, $i = 1, 2, 3$,

$$|\chi^{(i)}\rangle_{s_i} = |\Phi^{(i)}\rangle_{s_i} + \eta_1^{(i)+}\Big(\mathcal{P}_1^{(i)+}|\phi_2^{(i)}\rangle_{s_i-2} + \eta_{11}^{(i)+}\mathcal{P}_1^{(i)+}\mathcal{P}_{11}^{(i)+}|\phi_{22}^{(i)}\rangle_{s_i-6} + \mathcal{P}_{11}^{(i)+}|\phi_{21}^{(i)}\rangle_{s_i-3}\Big) + \eta_{11}^{(i)+}\Big(\mathcal{P}_1^{(i)+}|\phi_{31}^{(i)}\rangle_{s_i-3} + \mathcal{P}_{11}^{(i)+}|\phi_{32}^{(i)}\rangle_{s_i-4}\Big) + \eta_0^{(i)}\Big(\mathcal{P}_1^{(i)+}\times \times|\phi_1^{(i)}\rangle_{s-1} + \mathcal{P}_{11}^{(i)+}|\phi_{11}^{(i)}\rangle_{s-2} + \mathcal{P}_1^{(i)+}\mathcal{P}_{11}^{(i)+}\Big[\eta_1^{(i)+}|\phi_{12}^{(i)}\rangle_{s_i-4} + \eta_{11}^{(i)+}|\phi_{13}^{(i)}\rangle_{s_i-5}\Big]\Big). \quad (5)$$

Величины $\eta_0^{(i)}$, $\eta_1^{(i)+}$, $\eta_{11}^{(i)+}$, $\mathcal{P}_1^{(i)+}$, $\mathcal{P}_{11}^{(i)+}$ являются гостовскими операторами, порождающими гильбертовы пространства $\mathcal{H}^{(i)}_{\mathrm{gh}}$, с независящими от них векторами $|\phi^{(i)}_{\ldots}\rangle_{s-\ldots}$. $Q^{(i)}$ и $K^{(i)}$ в (1)–(4) являются БРСТ-оператором и оператором, определяющим скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}^{(i)}_{\mathrm{tot}}$, индекс s_i фиксирует значение спина у соответствующего вектора. Векторы калибровочных параметров нулевого, $|\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i}$, и первого, $|\Lambda^{1(i)}\rangle_{s_i}$, уровней

$$|\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i} = \mathcal{P}_1^{(i)+}|\xi^{(i)}\rangle_{s_i-1} + \mathcal{P}_{11}^{(i)+}|\xi_1^{(i)}\rangle_{s_i-2} + \mathcal{P}_1^{(i)+}\mathcal{P}_{11}^{(i)+}\Big(\eta_1^{(i)+}|\xi_{11}^{(i)}\rangle_{s_i-4} + \eta_{11}^{(i)+}|\xi_{12}^{(i)}\rangle_{s_i-5} + \eta_0^{(i)}|\xi_{01}^{(i)}\rangle_{s_i-3}\Big), \quad (6)$$

$$|\Lambda^{1(i)}\rangle_{s_i} = \mathcal{P}_1^{(i)+}\mathcal{P}_{11}^{(i)+}|\xi^{1(i)}\rangle_{s_i-3} \quad (7)$$

как элементы соответствующих $Q^{(i)}$-комплексов (см., например, [17, 18]) задают распределение грассмановых четностей и гостовских чисел для $|\chi^{(i)}\rangle_{s_i}$, $|\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i}$, $|\Lambda^{1(i)}\rangle_{s_i}$ соответственно $(0,0)$, $(1,-1)$, $(0,-2)$.

На основных полях в свободном приближении ($g=0$) реализованы унитарные безмассовые неприводимые представления группы Пуанкаре $\mathrm{ISO}(1,d-1)$ с целыми спиральностями $(s)_3$, описываемыми уравнениями д'Аламбера, бездивергентности и бесследовости [21], эквивалентно представленные операторными нелагранжевыми условиями на вектор $|\phi^{(i)}\rangle \in \mathcal{H}^{(i)}$, $i=1,2,3$,

$$\big(l_0^{(i)},\, l_1^{(i)},\, l_{11}^{(i)}, g_0^{(i)} - d/2\big)|\phi^{(i)}\rangle = (0,0,0,s_i)|\phi^{(i)}\rangle, \tag{8}$$

$$|\phi^{(i)}\rangle = \sum_{s_i \geqslant 0} \frac{\imath^{s_i}}{s_i!}\phi^{(i)\mu(s_i)} \prod_{j=1}^{s_i} a^{(i)+}_{\mu_j}|0\rangle,$$
$$\big(l_0^{(i)},\, l_1^{(i)},\, l_{11}^{(i)}, g_0^{(i)}\big) = \Big(\partial^{(i)\nu}\partial^{(i)}_{\nu},\, -\imath a^{(i)\nu}\partial^{(i)}_{\nu},\, \frac{1}{2}a^{(i)\mu}a^{(i)}_{\mu}, -\frac{1}{2}\big\{a^{(i)+}_{\mu},\, a^{(i)\mu}\big\}\Big). \tag{9}$$

Операторы $l_0^{(i)}$, $l_1^{(i)}$, $l_{11}^{(i)}, g_0^{(i)}$ и основной вектор $|\phi^{(i)}\rangle$ определены в пространстве Фока $\mathcal{H}^{(i)}$, порожденном бозонными осцилляторами $a^{(i)}_{\mu}, a^{(i)+}_{\nu}$ – ($[a^{(i)}_{\mu}, a^{(i)+}_{\nu}] = -\eta_{\mu\nu}$). Основной вектор $|\phi^{(i)}\rangle_{s_i}$ вложен в вектор $|\Phi^{(i)}\rangle_{s_i}$, зависящий вместе с остальными $|\phi^{(i)}_{..}\rangle_{s-\ldots}$ и от вспомогательных бозонных осцилляторов $b^{(i)+}$ ($[b^{(i)}, b^{(j)+}] = \delta^{ij}$, образующих базис пространства Фока $\mathcal{H}^{(i)\prime}$.

Каждый из БРСТ-операторов $Q^{(i)}$ ($(\epsilon,\mathrm{gh})Q^{(i)} = (1,1)$) построен по соответствующей системе связей $l_0^{(i)}$, $l_1^{(i)}$, $l_1^{(i)+}$, $l_{11}^{(i)}$, $l_{11}^{(i)+} = (1/2)a^{(i)+\nu}a^{(i)+}_{\nu}$ и содержит антикоммутирующие гостовские операторы $\eta_0^{(i)}$, $\eta_1^{(i)+}$, $\eta_1^{(i)}$, $\eta_{11}^{(i)+}$, $\eta_{11}^{(i)}$, $\mathcal{P}_0^{(i)}$, $\mathcal{P}_1^{(i)}$, $\mathcal{P}_1^{(i)+}$, $\mathcal{P}_{11}^{(i)}$, $\mathcal{P}_{11}^{(i)+}$,

$$Q^{(i)} = \eta_0^{(i)}l_0^{(i)} + \eta_1^{(i)+}l_1^{(i)} + l_1^{(i)+}\eta_1^{(i)} + \eta_{11}^{(i)+}\widehat{L}_{11}^{(i)} + \widehat{L}_{11}^{(i)+}\eta_{11}^{(i)} + \imath\eta_1^{(i)+}\eta_1^{(i)}\mathcal{P}_0^{(i)}, \tag{10}$$

где БРСТ-расширенные бесследовые связи имеют вид

$$\big(\widehat{L}_{11}^{(i)},\, \widehat{L}_{11}^{(i)+}\big) = \big(L_{11}^{(i)} + \eta_1^{(i)}\mathcal{P}_1^{(i)},\, L_{11}^{(i)+} + \mathcal{P}_1^{(i)+}\eta_1^{(i)+}\big). \tag{11}$$

Здесь операторы

$$L_{11}^{(i)} = l_{11}^{(i)} + (b^{(i)+}b^{(i)} + h^{(i)})b^{(i)}, \quad L_{11}^{(i)+} = l_{11}^{(i)+} + b^{(i)+} \tag{12}$$

зависят от параметров $h^{(i)} = h^{(i)}(s_i) = -s_i - ((d-6)/2)$. Три копии наборов операторов $l_0^{(i)}$, $l_1^{(i)}$, $l_1^{(i)+}$; $L_{11}^{(i)}$, $L_{11}^{(i)+}$, $G_0^{(i)}$, коммутируя друг с другом при $i \neq j$, образуют 3 подалгебры изометрии пространства Минковского и 3 подалгебры $so(1,2)$

$$[l_0^{(i)}, l_1^{(i)(+)}] = 0,\ [l_1^{(i)}, l_1^{(i)+}] = l_0^{(i)};\quad [L_{11}^{(i)}, L_{11}^{(i)+}] = G_0^{(i)},\ [G_0^{(i)}, L_{11}^{(i)+}] = 2L_{11}^{(i)} \tag{13}$$

с их независимыми ненулевыми кросс-коммутаторами: $[l_1^{(i)}, G_0^{(i)}] = l_1^{(i)}$, $[l_1^{(i)}, L_{11}^{(i)+}] = -l_1^{(i)+}$.

Гостовские операторы удовлетворяют ненулевым антикоммутационным соотношениям

$$-\imath\{\eta_0^{(i)}, \mathcal{P}_0^{(j)}\} = \{\eta_1^{(i)}, \mathcal{P}_1^{(j)+}\} = \{\eta_1^{(i)+}, \mathcal{P}_1^{(j)}\} = \{\eta_{11}^{(i)}, \mathcal{P}_{11}^{(j)+}\} = \{\eta_{11}^{(i)+}, \mathcal{P}_{11}^{(j)}\} = \delta^{ij}. \tag{14}$$

Рассматриваемая теория характеризуется операторами спина $\sigma^{(i)}$,

$$\sigma^{(i)} = G_0^{(i)} + \eta_1^{(i)+}\mathcal{P}_1^{(i)} - \eta_1^{(i)}\mathcal{P}_1^{(i)+} + 2(\eta_{11}^{(i)+}\mathcal{P}_{11}^{(i)+} - \eta_{11}^{(i)+}\mathcal{P}_{11}^{(i)+}). \tag{15}$$

Здесь $G_0^{(i)} = g_0^{(i)} + 2b^{(i)+}b^{(i)} + h^{(i)}$ — конвертированный оператор числа частиц в пространстве Фока $\mathcal{H}^{(i)} \otimes \mathcal{H}^{(i)\prime}$. Оператор $\sigma^{(i)}$ выбирает собственные векторы с определенным значением спина s_i в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}^{(i)}$

$$\sigma^{(i)}\big(|\chi^{(i)}\rangle_{s_i},\, |\Lambda^{(i)}\rangle_{s_i},\, |\Lambda^{1(i)}\rangle_{s_i}\big) = (0,0,0). \tag{16}$$

Все вышеуказанные операторы действуют в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}} = \otimes_{i=1}^{3}\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}^{(i)}$ со скалярным произведением векторов, зависящих от всех осцилляторов и гостов, $(a^{(i)}, b^{(i)}; \eta_0^{(i)}, \eta_1^{(i)}, \mathcal{P}_1^{(i)}, \eta_{11}^{(i)}, \mathcal{P}_{11}^{(i)}) \equiv (\mathcal{A}^{(i)};\, \mathcal{C}^{(i)},\, \mathcal{P}^{(i)})$ [6]:

$$\langle\chi^{(i)}|\psi^{(j)}\rangle = \delta^{ij}\int d^dx\langle 0|\chi^{(i)*}\big(\mathcal{A}^{(i)};\mathcal{C}^{(i)},\mathcal{P}^{(i)}\big)\psi^{(j)}\big(\mathcal{A}^{(i)+};\mathcal{C}^{(i)+},\mathcal{P}^{(i)+}\big)|0\rangle. \tag{17}$$

Полный БРСТ-оператор $Q^{\mathrm{tot}} = \sum\limits_{j=1}^{3} Q^{(j)}$ суперкоммутирует с любым из $\sigma^{(i)}$, нильпотентен на подпространстве с нулевыми собственными векторами для операторов спина $\sigma^{(i)}$ (16) и эрмитов вместе с оператором $K = \otimes_{j=1}^{3}K^{(j)}$ относительно скалярного произведения (17):

$$(Q^{\mathrm{tot}})^2 = \sum_{i=1}^{3}\eta_{11}^{(i)+}\eta_{11}^{(i)}\sigma^{(i)}, \qquad Q^{\mathrm{tot}+}K = KQ^{\mathrm{tot}}; \tag{18}$$

$$K = \otimes_{j=1}^{3}\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{1}{n_j!}(b^{(j)+})^{n_j}|0\rangle\langle 0|(b^{(j)})^{n}\prod_{i_j=0}^{n_j-1}(i_j + h^{(j)}(s_j)). \tag{19}$$

Вершина $\big|V^{(3)}\big\rangle_{(s)_3}$ имеет локальное представление

$$\big|V^{(3)}\big\rangle_{(s)_3} = \prod_{i=2}^{3}\delta^{(d)}\big(x_1 - x_i\big)V^{(3)}\prod_{j=1}^{3}\eta_0^{(j)}|0\rangle, \quad |0\rangle \equiv \otimes_{e=1}^{3}|0\rangle^{e}. \tag{20}$$

Вершина является БРСТ-замкнутым решением уравнений [6]:

$$Q^{\mathrm{tot}}\big|V^{(3)}\big\rangle_{(s)_3} = 0, \quad \sigma^{(i)}\big|V^{(3)}\big\rangle_{(s)_3} = 0, \tag{21}$$

(со свойствами $(\epsilon,\mathrm{gh})\big|V^{(3)}\big\rangle = (1,3)$) как следствие полноты скалярного произведения и уравнений для спина (16). Произвол в решении системы (21) задается добавлением БРСТ-точных слагаемых со спинами $(s)_3$

$$\big|\overline{V}^{(3)}\big\rangle_{(s)_3} = \big|V^{(3)}\big\rangle_{(s)_3} + Q^{\mathrm{tot}}\big|X^{(3)}\big\rangle_{(s)_3}, \quad \sigma^{(i)}\big|X^{(3)}\big\rangle_{(s)_3} = 0, \tag{22}$$

$((\epsilon,\mathrm{gh})\big|X^{(3)}\big\rangle = (0,2))$, не меняющих уравнений движения взаимодействующей модели.

Калибровочные преобразования образуют замкнутую алгебру с коммутатором преобразований, пропорциональным калибровочному преобразованию

$$\big[\delta_{[1]}^{\Lambda_1}, \delta_{[1]}^{\Lambda_2}\big\}|\chi^{(i)}\rangle \;=\; -g\delta_{[1]}^{\Lambda_3}|\chi^{(i)}\rangle, \tag{23}$$

с грассманово-нечетным калибровочным параметром Λ_3, функционально выраженным через Λ_1 и Λ_2: $\Lambda_3^{(i)} = \Lambda_3^{(i)}(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Отметим, что выполнение тождества Якоби для алгебры калибровочных преобразований накладывает дополнительные ограничения на вершину $\big|V^{(3)}\rangle_{(s)_3}$.

Уравнения (21) определяют кубичные вершины взаимодействия для неприводимых безмассовых полностью симметричных полей высших целых спинов.

Следует подчеркнуть, что лагранжева формулировка без вершины взаимодействия $\big|V^{(3)}\rangle_{(s)_3}$ эквивалентна трем копиям формулировок Фронсдала [22] в терминах полностью симметричных дважды бесследовых полей $\phi^{(i)}_{\mu(s_i)}$ и бесследовых калибровочных параметров $\xi^{(i)}_{\mu(s_i-1)}$, $i = 1, 2, 3$.

2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КУБИЧНОЙ ВЕРШИНЫ: ВИД ОПЕРАТОРА $\mathcal{Z}_j$

Общее решение уравнений (21) для кубичной вершины было получено в [6] в виде модифицированных произведений специфических операторов, однородных по степеням осцилляторов (с учетом закона сохранения импульсов, связанных с вершиной):

$$|V^{(3)}\rangle_{(s)_3} = |V^{M(3)}\rangle_{(s)_3} + \sum_{(j_1,j_2,j_3)>0}^{([s_1/2],[s_2/2],[s_3/2])} U^{(s_1)}_{j_1} U^{(s_2)}_{j_2} U^{(s_3)}_{j_3} |V^{M(3)}\rangle_{(s)_3-2(j)_3}, \tag{24}$$

$$|V^{M(3)}\rangle_{(s)_3-2(j)_3} = \sum_k \mathcal{Z}_{1/2\{(s-2J)-k\}} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{s_i-2j_i-1/2(s-2J-k)}, \tag{25}$$

$$(s, J) = \Big(\sum_i s_i,\ \sum_i j_i\Big).$$

Вершина $\big|V^{M(3)}\rangle_{(s)_3-2(j)_3}$ определена в работе [13] в терминах степеней операторов линейных $(L^{(i)})^{k_i}$ и кубичных Z^j по степеням осцилляторов

$$L^{(i)} = (p^{(i+1)}_\mu - p^{(i+2)}_\mu) a^{(i)\mu+} - \imath\big(\mathcal{P}^{(i+1)}_0 - \mathcal{P}^{(i+2)}_0\big)\eta^{(i)+}_1, \tag{26}$$

$$Z = L^{(12)+}_{11} L^{(3)} + L^{(23)+}_{11} L^{(1)} + L^{(31)+}_{11} L^{(2)}, \tag{27}$$

$$L^{(ii+1)+}_{11} = a^{(i)\mu+} a^{(i+1)+}_\mu - \frac{1}{2}\mathcal{P}^{(i)+}_1 \eta^{(i+1)+}_1 - \frac{1}{2}\mathcal{P}^{(i+1)+}_1 \eta^{(i)+}_1, \tag{28}$$

с заменой их на БРСТ Q^{tot}-замкнутые формы $\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}$, $k_i = 1, \ldots, s_i$, и операторы $\mathcal{Z}_j$. Здесь $p^{(i)}_\mu = -i\partial^{(i)}_\mu$, а величины $\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}$ определены по правилу

$$\mathcal{L}^{(i)}_{k_i} = (L^{(i)})^{k_i-2}\left((L^{(i)})^2 - \frac{\imath k_i!}{2(k_i-2)!}\,\eta^{(i)+}_{11}\big[2\mathcal{P}^{(i+1)}_0 + 2\mathcal{P}^{(i+2)}_0 - \mathcal{P}^{(i)}_0\big]\right). \tag{29}$$

Набор Q^{tot}-замкнутых операторов включает также новые две-, четыре- , ..., $[s_i/2]$ формы по степеням осцилляторов, соответствующие следовым операторам при $i = 1, 2, 3$:

$$U^{(s_i)}_{j_i}\big(\eta^{(i)+}_{11}, \mathcal{P}^{(i)+}_{11}\big) := (\widehat{L}^{(i)+}_{11})^{(j_i-2)}\big\{(\widehat{L}^{+(i)}_{11})^2 - j_i(j_i-1)\eta^{(i)+}_{11}\mathcal{P}^{(i)+}_{11}\big\}. \tag{30}$$

Разные представители вершин нумеруются натуральным параметром k, ограниченным неравенствами

$$s - 2J - 2s_{\min} \leqslant k \leqslant s - 2J, \quad k = s - 2J - 2p,\ p \in \mathbb{N}_0, \tag{31}$$

так что порядок производных уменьшается в соответствующих представителях на 2 при изменении $k \to k+1$. Отметим, что вершина $|V^{(3)}\rangle$ (24) может содержать члены без производных для четных спиральностей s_i, а также члены с одной, двумя и тремя производными, если, соответственно, одна, две и все спиральности s_i нечетны [6].

Величина $\mathcal{Z}_j$ в (25) была определена в [6] для $j=1$ соотношением

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1 \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i} = Z \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i} - \sum_{l=1}^{3} k_l \frac{b^{(l)+}}{h^{(l)}} \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}} + \\ + \sum_{l\neq e}^{3} k_l k_e \frac{b^{(l)+} b^{(e)+}}{h^{(l)} h^{(e)}} \Big[\widehat{L}^{(e)}_{11}, \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} L^{(e)}\Big\} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}-\delta_{ei}} - \\ - \sum_{l\neq e\neq o}^{3} k_l k_e k_o \frac{b^{(l)+} b^{(e)+} b^{(o)+}}{h^{(l)} h^{(e)} h^{(o)}} \Big[\widehat{L}^{(o)}_{11}, \Big[\widehat{L}^{(e)}_{11}, \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} L^{(e)}\Big\} L^{(0)}\Big\} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-1}.\end{aligned} \tag{32}$$

$Q^{\rm tot}$-замкнутость $\mathcal{Z}_1 \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i}$ следует из $Q^{\rm tot}$-замкнутости $\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}$ и того, что следовая часть БРСТ-оператора $\eta^{(l)+}_{11} \widehat{L}^{(l)}_{11}$ как единственный источник не БРСТ-замкнутости оператора Z (27) переводит исходный оператор в произведение величины $\Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\}$, не зависящей от осцилляторов с индексом l и $Q^{\rm tot}$-замкнутой формы $\prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}}$. При аддитивном вычитании указанного произведения, умноженного на $k_l(b^{(l)+}/h^{(l)})$ соответственно для каждого $l=1,2,3$ из исходной величины, получим

$$\begin{aligned}Q^{\rm tot}\Big(Z \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i} - \sum_{l=1}^{3} k_l \frac{b^{(l)+}}{h^{(l)}} \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}}\Big) = \\ = \sum_{l=1}^{3} \eta^{(l)+}_{11} k_l \Big\{ \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} - \\ - \Big(h^{(l)} b^{(l)} + \sum_{e\neq l}^{3} \eta^{(e)+}_{11} \widehat{L}^{(e)}_{11}\Big) \frac{b^{(l)+}}{h^{(l)}} \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}} = \\ = - \sum_{l, e\neq l}^{3} \eta^{(e)+}_{11} k_l k_e \frac{b^{(l)+}}{h^{(l)}} \Big[\widehat{L}^{(e)}_{11}, \Big[\Big[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Big\}, L^{(l)}\Big\} L^{(e)}\Big\} \prod_{i=1}^{3} \mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}-\delta_{ei}}.\end{aligned} \tag{33}$$

В (33) учтено из (12), что лишь часть $h^{(l)} b^{(l)}$ оператора $L^{(l)}_{11}$ нетривиально действует на второе слагаемое. Вновь отмечая, что структура последнего выражения в (33) состоит из $Q^{\rm tot}$-замкнутой части и тройного суперкоммутатора, не зависящего от осцилляторов с индексами l, e при $l \neq e$, кроме обработанного осциллятора $b^{(l)+}$, добавим аддитивно указанное произведение для каждого $e \neq l$, $e = 1, 2, 3$, умноженное соответственно на $k_e(b^{(e)+}/h^{(e)})$, к первым двум слагаемым в (32).

В результате при действии Q^{tot} на дважды модифицированную величину получим

$$Q^{\text{tot}}\Biggl(Z\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i} - \sum_{l=1}^{3} k_l \frac{b^{(l)+}}{h^{(l)}}\Bigl[\Bigl[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Bigr\}, L^{(l)}\Bigr\}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}} + \\ + \sum_{l\neq e}^{3} k_l k_e \frac{b^{(l)+}b^{(e)+}}{h^{(l)}h^{(e)}}\Bigl[\widehat{L}^{(e)}_{11}, \Bigl[\Bigl[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Bigr\}, L^{(l)}\Bigr\}L^{(e)}\Bigr\}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i-\delta_{il}-\delta_{ei}}\Biggr) = \\ = \sum_{l\neq e\neq o}^{3} \eta^{(o)+}_{11} k_l k_e k_o \frac{b^{(l)+}b^{(e)+}}{h^{(l)}h^{(e)}}\Bigl[\widehat{L}^{(o)}_{11}, \Bigl[\widehat{L}^{(e)}_{11}, \Bigl[\Bigl[\widehat{L}^{(l)}_{11}, Z\Bigr\}, L^{(l)}\Bigr\}L^{(e)}\Bigr\}L^{(0)}\Bigr\}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i-1}. \quad (34)$$

Структура ненулевого выражения в (34) состоит вновь из Q^{tot}-замкнутой части и четверного суперкоммутатора, не зависящего от всех осцилляторов, кроме обработанных операторов $b^{(l)+}$, $b^{(e)+}$. Вычитание последнего слагаемого из первых трех в (32), построенного умножением соответственно на $k_o(b^{(o)+}/h^{(o)})$, доказывает БРСТ-замкнутость величины (32).

При $j = 2$ мы повторяем предложенный алгоритм, начиная с $Z\mathcal{Z}\prod\limits_{p=1}^{3}\mathcal{L}^{(p)}_{k_p}$, и окончательно получаем

$$\mathcal{Z}_2\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i} = Z\mathcal{Z}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i} - \sum_{i_1=1}^{3}\frac{b^{(i_1)+}}{h^{(i_1)}}\Biggl[\Bigl[\widehat{L}^{(i_1)}_{11}, Z\Bigr\}, \mathcal{Z}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}\Biggr\} + \\ + \sum_{i_1\neq e_1}^{3}\frac{b^{(i_1)+}b^{(e_1)+}}{h^{(i_1)}h^{(e_1)}}\Biggl[\widehat{L}^{(e_1)}_{11}, \Biggl[\Bigl[\widehat{L}^{(i_1)}_{11}, Z\Bigr\}, \mathcal{Z}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}\Biggr\}\Biggr\} - \\ - \sum_{i_1\neq e_1\neq o_1}^{3}\frac{b^{(i_1)+}b^{(e_1)+}b^{(o_1)+}}{h^{(i_1)}h^{(e_1)}h^{(o_1)}}\Biggl[\widehat{L}^{(o_1)}_{11}, \Biggl[\widehat{L}^{(e_1)}_{11}, \Biggl[\Bigl[\widehat{L}^{(i_1)}_{11}, Z\Bigr\}, \mathcal{Z}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}\Biggr\}\Biggr\}\Biggr\}. \quad (35)$$

В свою очередь, при $j + 1 \geqslant 1$ мы имеем по индукции

$$\mathcal{Z}_{j+1}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i} = Z\mathcal{Z}_j\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i} - \sum_{i_j=1}^{3}\frac{b^{(i_j)+}}{h^{(i_j)}}\Biggl[\Bigl[\widehat{L}^{(i_j)}_{11}, Z\Bigr\}, \mathcal{Z}_j\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}\Biggr\} + \\ + \sum_{i_j\neq e_j}^{3}\frac{b^{(i_j)+}b^{(e_j)+}}{h^{(i_j)}h^{(e_j)}}\Biggl[\widehat{L}^{(e_j)}_{11}, \Biggl[\Bigl[\widehat{L}^{(i_j)}_{11}, Z\Bigr\}, \mathcal{Z}_j\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}\Biggr\}\Biggr\} - \\ - \sum_{i_j\neq e_j\neq o_j}^{3}\frac{b^{(i_j)+}b^{(e_j)+}b^{(o_j)+}}{h^{(i_j)}h^{(e_j)}h^{(o_j)}}\Biggl[\widehat{L}^{(o_j)}_{11}, \Biggl[\widehat{L}^{(e_j)}_{11}, \Biggl[\Bigl[\widehat{L}^{(i_j)}_{11}, Z\Bigr\}, \mathcal{Z}_j\prod_{i=1}^{3}\mathcal{L}^{(i)}_{k_i}\Biggr\}\Biggr\}\Biggr\}. \quad (36)$$

Соотношения (32), (35), (36) определяют все величины $\mathcal{Z}_j$ в кубичной вершине (24), что является основным результатом настоящей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено точное представление для величин $\mathcal{Z}_j$ при $j \geqslant 1$, составляющих немультипликативную часть построенной в работе [6] общей кубичной вершины для безмассовых полностью симметричных полей с произвольными целыми спиральностями s_1, s_2, s_3 в d-мерном пространстве-времени Минковского.

Конструкция реализована в рамках неограниченного БРСТ-подхода к теории полей высшего спина, в котором каждое условие, определяющее неприводимое безмассовое представление высшего спина, учтено на равной основе в полном БРСТ-операторе, в отличие от всех предыдущих работ. Как следствие, оператор кубичной лагранжевой вершины (24) сохраняет свойство неприводимости представления для взаимодействующих полей спиральностей s_1, s_2, s_3.

Включение следовых ограничений в БРСТ-оператор привело к более широкому составу конфигурационного пространства лагранжевых формулировок для рассматриваемых взаимодействующих полей целых спиральностей (в сравнении с ограниченным БРСТ-подходом [13]), что допустило появление новых следовых операторных компонент $U^{(s_i)}_{j_i}$ (30) в кубичной вершине. В этой связи соответствие между полученной вершиной $|V^{(3)}\rangle$ и вершиной $|V^{M(3)}\rangle$ работы [13] не является однозначным ввиду неудовлетворения условиям бесследовости для последней: $L^{(i)}_{11}|V^{M(3)}\rangle \neq 0$. Обе вершины будут соответствовать друг другу, во-первых, после выделения неприводимых компонент $|V^{M(3)}_{\text{irrep}}\rangle$ из $|V^{M(3)}\rangle$, удовлетворяющих $L^{(i)}_{11}|V^{M(3)}_{\text{irrep}}\rangle = 0$. Во-вторых, после исключения вспомогательных полей калибровочных параметров посредством частичной фиксации калибровки и использования уравнений движения вершина $|V^{(3)}\rangle$ перейдет в $|\breve{V}^{(3)}\rangle$ в триплетной формулировке работы [13] так, что, с точностью до полных производных, вершины $|V^{M(3)}_{\text{irrep}}\rangle$ и $|\breve{V}^{(3)}\rangle$ должны совпасть.

Построение неприводимой кубичной вершины $|V^{M(3)}_{\text{irrep}}\rangle$ представляет собой интересную задачу. Предложенный подход может быть развит для неприводимых безмассовых полуцелых полей высших спинов на плоском фоне; для массивных целых и полуцелых полей высших спинов; для полей высших спинов со смешанной симметрией индексов; для суперсимметричных полей высших спинов, где вершины должны включать любые степени следов. Следует отметить задачи построения четвертичной и высших вершин в рамках БРСТ-подхода, а также квантование модели взаимодействующих полей высших спинов, следуя алгоритму построения квантового БРСТ–БВ действия [23]. Все упомянутые проблемы ожидают решения в наших предстоящих работах.

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FEWF-2020-003). Автор благодарен И. Л. Бухбиндеру за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev M. A.* Higher Spin Gauge Theories in Various Dimensions // Fortsch. Phys. 2004. V. 52. P. 702–717; arXiv:hep-th/0401177.
2. *Bekaert X., Cnockaert S., Iazeolla C., Vasiliev M. A.* Nonlinear Higher Spin Theories in Various Dimensions // Higher Spin Gauge Theories: Proc. of the 1st Solvay Workshop: Brussels, Belgium, May 12–14, 2004. 2005. P. 132–197; arXiv:hep-th/0503128.

3. *Fotopoulos A., Tsulaia M.* Gauge-Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST Formulation // Intern. J. Mod. Phys. A. 2008. V. 24. P. 1–60; arXiv:0805.1346[hep-th].
4. *Bekaert X., Boulanger N., Sundell P.* How Higher Spin Gravity Surpasses the Spin Two Barrier: No-Go Theorems versus Yes-Go Examples // Rev. Mod. Phys. 2012. V. 84. P. 987–1009; arXiv:1007.0435[hep-th].
5. *Vasiliev M. A.* Higher Spin Theory and Space-Time Metamorphoses // Lect. Notes Phys. 2015. V. 892. P. 227–264; arXiv:1404.1948[hep-th].
6. *Buchbinder I. L., Reshetnyak A. A.* General Cubic Interacting Vertex for Massless Integer Higher Spin Fields // Phys. Lett. B. 2021. V. 820. P. 136470; arXiv:2105.12030[hep-th].
7. *Manvelyan R., Mkrtchyan K., Ruhl W.* General Trilinear Interaction for Arbitrary Even Higher Spin Gauge Fields // Nucl. Phys. B. 2010. V. 836. P. 204–221; arXiv:1003.2877[hep-th].
8. *Manvelyan R., Mkrtchyan K., Ruhl W.* A Generating Function for the Cubic Interactions of Higher Spin Fields // Phys. Lett. B. 2011. V. 696. P. 410–415; arXiv:1009.1054[hep-th].
9. *Joung E., Taronna M.* Cubic Interactions of Massless Higher Spins in (A)dS: Metric-Like Approach // Nucl. Phys. B. 2012. V. 861. P. 145–174; arXiv:1110.5918[hep-th].
10. *Vasiliev M.* Cubic Vertices for Symmetric Higher Spin Gauge Fields in (A)dS$_d$ // Ibid. V. 862. P. 341–408; arXiv:1108.5921[hep-th].
11. *Metsaev R. R.* Cubic Interaction Vertices for Massive and Massless Higher Spin Fields // Nucl. Phys. B. 2006. V. 759. P. 147–201; arXiv:hep-th/0512342.
12. *Metsaev R. R.* Cubic Interaction Vertices for Fermionic and Bosonic Arbitrary Spin Fields // Nucl. Phys. B. 2012. V. 859. P. 13–69; arXiv:0712.3526[hep-th].
13. *Metsaev R. R.* BRST-BV Approach to Cubic Interaction Vertices for Massive and Massless Higher Spin Fields // Phys. Lett. B. 2013. V. 720. P. 237; arXiv:1205.3131[hep-th].
14. *Khabarov M. V., Zinoviev Yu. M.* Cubic Interaction Vertices for Massless Higher Spin Supermultiplets in $d = 4$ // JHEP. 2021. V. 02. P. 167; arXiv:2012.00482[hep-th].
15. *Buchbinder I. L., Krykhtin V. A., Tsulaia M., Weissman D.* Cubic Vertices for $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetric Massless Higher Spin Fields in Various Dimensions // Nucl. Phys. B. 2021. V. 967. P. 115427; arXiv:2103.08231[hep-th].
16. *Pashnev A., Tsulaia M.* Description of the Higher Massless Irreducible Integer Spins in the BRST Approach // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1853–1864; arXiv:hep-th/9803207.
17. *Buchbinder I. L., Pashnev A., Tsulaia M.* Lagrangian Formulation of the Massless Higher Integer Spin Fields in the AdS Background // Phys. Lett. B. 2001. V. 523. P. 338–346; arXiv:hep-th/0109067.
18. *Buchbinder I. L., Reshetnyak A. A.* General Lagrangian Formulation for Higher Spin Fields with Arbitrary Index Symmetry. I. Bosonic Fields // Nucl. Phys. B. 2012. V. 862. P. 270–326; arXiv:1110.5044[hep-th].
19. *Buchbinder I. L., Fotopoulos A., Petkou A. C., Tsulaia M.* Constructing the Cubic Interaction Vertex of Higher Spin Gauge Fields // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 105018; arXiv:hep-th/0609082.
20. *Reshetnyak A. A.* Constrained BRST-BFV Lagrangian Formulations for Higher Spin Fields in Minkowski Spaces // JHEP. 2018. V. 1809. P. 104; arXiv:1803.04678[hep-th].
21. *Wigner E. P.* On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.
22. *Fronsdal C.* Massless Fields with Integer Spin // Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3624–3629.
23. *Burdik C., Reshetnyak A.* BRST-BV Quantum Actions for Constrained Totally-Symmetric Integer HS Fields // Nucl. Phys. B. 2021. V. 965. P. 115357; arXiv:2010.15741[hep-th].

Получено 5 марта 2022 г.