Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 434–440

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ФУНКЦИЯ ПАРТОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭЛЕКТРОНА

А. Б. Арбузов [а, б, 1], *У. Е. Возная* [а, б, 2]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[б] Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

Обсуждается метод решения уравнения эволюции партонных распределений в электроне. В рамках пертурбативной КЭД учитываются вклады партонов типа электрон, фотон и позитрон. Методом итераций получено решение для функции партонных распределений типа «электрон в электроне». Приведены результаты трех итераций в следующем за ведущим логарифмическом приближении.

A method of solving evolution equation for electron parton distribution functions is discussed. Contributions of electron, positron and photon parton types are taken into account within perturbative QED. The iterative solution for the parton distribution of electrons inside an electron is shown. The results to the third iteration are given in the next-to-leading logarithmic approximation.

PACS: 12.20.–m; 13.40.–f

Высокоточный расчет поправок к сечениям процессов взаимодействия частиц необходим для анализа данных современных и будущих экспериментов в области физики высоких энергий. Знание КЭД-поправок особо важно [1] для построения теоретических предсказаний сечений процессов на будущих линейных и кольцевых электрон-позитронных коллайдерах. К проектам линейных электрон-позитронных коллайдеров относятся ILC с энергией 91 ГэВ и 250 ГэВ – 1 ТэВ и CLIC с энергией 500 ГэВ – 3 ТэВ. К проектам кольцевых коллайдеров относятся FCC-ee [2], TLEP, CEPC [3], а также $\mu^+\mu^-$-коллайдер μTRISTAN [4].

Учесть наиболее значительные по величине радиационные поправки к сечениям различных процессов в КЭД можно, используя подход структурных функций. Он был разработан по аналогии с подходом партонных распределений в КХД Э. А. Кураевым и В. С. Фадиным [5] в 1980-х гг. как один из этапов подготовки к экспериментам при высоких энергиях на коллайдере LEP и широко используется для расчетов радиационных поправок в КЭД в физике высоких энергий. Уравнения эволюции партонных распределений в КЭД представляют собой редукцию уравнений ДГЛАП (уравнений Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи), хорошо известных в КХД [6–8]. Эти уравнения основаны на ренормгруппе и масштабной инвариантности. Они позволяют эффективно учитывать логарифмическую зависимость от масштаба факторизации.

[1] E-mail: arbuzov@theor.jinr.ru
[2] E-mail: voznaya@theor.jinr.ru

Мы будем рассматривать не зависящие от конкретного процесса функции партонных распределений, которые описывают плотность вероятности найти безмассовые партоны в электроне с заданной долей энергии. В квантовой электродинамике в качестве партонов выступают фотоны, а также безмассовые электроны и позитроны. Универсальные функции партонных распределений можно использовать для оценки радиационных поправок в КЭД для столкновений частиц при высоких энергиях.

Сечение некоторого высокоэнергетического процесса $ab \to cd$ с заряженными частицами в начальном и конечном состоянии в следующем за ведущим порядке можно представить формулой [9]:

$$\begin{aligned} d\sigma^{\text{NLO}}_{ab\to cd} = \sum_{i,j,k,l} \int\limits_{\bar{z}_1}^{1} dz_1 \int\limits_{\bar{z}_2}^{1} dz_2\, D^{\text{str}}_{ia}\left(z_1, \frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right) D^{\text{str}}_{jb}\left(z_2, \frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right) \times \\ \times \left(d\sigma^{\text{Born}}_{ij\to kl}(z_1,z_2) + d\bar{\sigma}^{(1)}_{ij\to kl}(z_1,z_2) + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0)\right) \times \\ \times \int\limits_{\bar{y}_1}^{1} \frac{dy_1}{Y_1} \int\limits_{\bar{y}_2}^{1} \frac{dy_2}{Y_2} D^{\text{frg}}_{ck}\left(\frac{y_1}{Y_1}, \frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right) D^{\text{frg}}_{dl}\left(\frac{y_2}{Y_2}, \frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{z}_i$ и $\bar{y}_i$ — некоторые (обычно малые) доли энергии, определяемые условиями эксперимента; z_i — доли энергии входящих партонов; Y_i — доли энергии выходящих партонов; $d\bar{\sigma}^{(0)}_{ij\to kl}(z_1,z_2)$ и $d\bar{\sigma}^{(1)}_{ij\to kl}(z_1,z_2)$ — борновское сечение подпроцесса для безмассовых партонов и добавка к нему порядка $\mathcal{O}(\alpha)$. Черта над $d\bar{\sigma}^{(1)}_{ij\to kl}(z_1,z_2)$ обозначает применение схемы вычитания для исключения массовых сингулярностей в радиационной поправке. Мы используем стандартную схему $\overline{\text{MS}}$. Пространственноподобные функции (обозначены «str», т. е. структурные) и времениподобные (обозначены «frg», т. е. фрагментации) D_{ij} зависят от долей энергии и отношения μ_0^2/μ^2, являющегося аргументом так называемого большого логарифма $L = \ln(\mu^2/\mu_0^2)$, где μ и μ_0 — масштабы факторизации и перенормировки соответственно. В КЭД масштаб перенормировки обычно выбирается равным массе электрона, а масштаб факторизации равным характерной энергии жесткого подпроцесса.

Таким образом, сечение в следующем за ведущим логарифмическом приближении учитывает усиленные большим логарифмом радиационные поправки и имеет вид

$$d\sigma^{\text{NLO}}_{ab\to cd} = d\sigma^{(0)}_{ab\to cd}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^k \sum_{l=k-1}^{k} c_{k,l} L^l + \mathcal{O}(\alpha^k L^{k-2})\right\}, \tag{2}$$

где $c_{k,l}$ — некоторые коэффициенты, которые могут быть вычислены по теории возмущений. Слагаемые типа $\alpha^k L^k$ относятся к ведущему порядку (LO), слагаемые типа $\alpha^k L^{k-1}$ — к следующему за ведущим порядку (NLO).

Уравнения эволюции являются по сути уравнениями ренормгруппы и имеют следующий вид, приведенный, например, в работе [10]:

$$D_{ba}(x,\mu^2,\mu_0^2) = \delta(1-x)\delta_{ba} + \sum_{i=e,\bar{e},\gamma} \int\limits_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{dt\alpha(t)}{2\pi t} \int\limits_{x}^{1} \frac{dy}{y} D_{ia}(y,t,\mu_0) P_{bi}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{3}$$

Функции $P_{ji}(x)$ называются функциями расщепления и описывают пертурбативный процесс превращения партона типа i в партон типа j, имеющий долю энергии x относительно энергии исходного партона. Эти функции также можно разложить в ряд по постоянной тонкой структуры α:

$$P_{ji}(x) = P_{ji}^{(0)}(x) + \frac{\alpha}{2\pi} P_{ji}^{(1)}(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{4}$$

Выражение для бегущей константы связи в КЭД в нужной нам схеме $\overline{\mathrm{MS}}$ приведено, например, в работе [11],

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 + \overline{\Pi}(\mu, \mu_0, \alpha(0))}, \tag{5}$$

где

$$\overline{\Pi}(\mu, \mu_0, \alpha(0)) = \frac{\alpha(0)}{\pi}\left(\frac{5}{9} - \frac{L}{3}\right) + \left(\frac{\alpha(0)}{\pi}\right)^2\left(\frac{55}{48} - \zeta_3 - \frac{L}{4}\right) + \\ + \left(\frac{\alpha(0)}{\pi}\right)^3\left(\frac{-L^2}{24}\right) + \ldots \tag{6}$$

и $L = \ln(\mu^2/\mu_0^2)$ — большой логарифм; $\zeta_n \equiv \zeta(n)$ — дзета-функция Римана. После разложения в ряд мы полагаем $\mu_0 = m_e$ и считаем, что $\alpha(\mu_0^2) \approx \alpha(0) \equiv \alpha$.

Для решения уравнения эволюции для функции D_{ee} (3) методом итераций необходимы начальные условия. В следующем за ведущим порядке в схеме $\overline{\mathrm{MS}}$ они имеют вид [12, 13]:

$$D_{ee}^{(0)}(x, \mu^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_{ee}^{(1)}(x), \tag{7}$$

где

$$d_{ee}^{(1)}(x) = \left[\frac{1+x^2}{1-x}\left(\ln\frac{\mu_0^2}{m_e^2} - 1 - 2\ln(1-x)\right)\right]_+. \tag{8}$$

Здесь, как и для параметризации бегущей константы связи, мы выбираем масштаб перенормировки КЭД $\mu_0 = m_e$. Далее методом итераций решается уравнение

$$D_{ee}^{(k)} = D_{ee}^{(0)} + \frac{\alpha}{2\pi}\left(P_{ee} \otimes D_{ee}^{(k-1)} + P_{e\gamma} \otimes D_{\gamma e}^{(k-1)} + P_{e\bar{e}} \otimes D_{\bar{e}e}^{(k-1)}\right). \tag{9}$$

На первом шаге вместо $D_{ee}^{(0)}$ и $D_{ee}^{(k-1)}$ подставляются начальные условия.

Уравнения эволюции включают операцию свертки [10]:

$$\big(f \otimes g\big)(x) \equiv \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dy\, f(z)\, g(y) \delta(x - yz) = \int\limits_x^1 \frac{dz}{z} f(z) g\left(\frac{x}{z}\right). \tag{10}$$

Многие функции имеют полюс при $x \to 1$ и могут быть представлены как сумма Θ- и Δ-частей:

$$f(x) = \lim_{\Delta \to 0}\Big(f_\Theta(x)\Theta(1 - x - \Delta) + f_\Delta \delta(1-x)\Big), \tag{11}$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда. Во многих случаях такие функции можно регуляризовать с помощью плюс-прескрипции, которая действует следующим образом:

$$\int\limits_z^1 dx[f(x)]_+ g(x) = \int\limits_0^1 dx f(x)\Big[g(x)\Theta(x-z) - g(1)\Big]. \tag{12}$$

Если функция $f(x)$ регуляризуется с помощью плюс-прескрипции, она удовлетворяет правилу сумм:

$$f_\Delta = -\int\limits_0^{1-\Delta} f_\Theta(z)\,dz. \tag{13}$$

Для двух функций с Δ-частями получим Θ-часть их свертки:

$$\Big(f\otimes g\Big)_\Theta(z) = \lim_{\Delta\to 0}\left\{\int\limits_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} \frac{dx}{x} f_\Theta(x) g_\Theta\left(\frac{z}{x}\right) + f_\Delta g_\Theta(z) + f_\Theta(z) g_\Delta\right\}. \tag{14}$$

Для функций, удовлетворяющих правилу сумм (13), Δ-часть легко восстанавливается. Если правило сумм неприменимо, Δ-часть свертки можно найти следующим образом:

$$(f\otimes g)_\Delta = f_\Delta g_\Delta - \int\limits_{1-\Delta}^{1} dy f(y) \int\limits_{1-\Delta}^{(1-\Delta)/y} g(x)\,dx, \tag{15}$$

что следует из определений (10) и (11).

Ниже представлены результаты расчета функции партонных распределений D_{ee} до третьей итерации (номера итераций обозначены римскими цифрами):

$$\begin{aligned} D_{ee}^{(\mathrm{I})}(x,\mu) &= D_{ee}^{(0)} + \frac{\alpha}{2\pi}\left(P_{ee}\otimes D_{ee}^{(0)} + P_{e\gamma}\otimes D_{\gamma e}^{(0)} + P_{e\bar e}\otimes D_{\bar e e}^{(0)}\right) = \\ &= \delta(1-x) + d_{ee}^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{2\pi}\left(P_{ee}^{(0)} + \frac{\alpha}{2\pi}P_{ee}^{(1)}\right)\otimes\Big(\delta(1-x) + d_{ee}^{(1)}(x)\Big), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} D_{ee}^{(\mathrm{II})}(x,\mu) &= \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi}d_{ee}^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{2\pi}LP_{ee}^{(0)} + \\ &+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L\left(d_{\gamma e}^{(1)}(x)\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + P_{ee}^{(1)} - \frac{10}{9}P_{ee}^{(0)} + P_{ee}^{(0)}\otimes d_{ee}^{(1)}(x)\right) + \\ &+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2\left(\frac{1}{2}P_{\gamma e}^{(0)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3}P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{2}P_{ee}^{(0)}\otimes P_{ee}^{(0)}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} D_{ee}^{(\mathrm{III})}(x,\mu) &= 1 + \frac{\alpha}{2\pi}d_{ee}^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi}LP_{ee}^{(0)} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L\left(d_{\gamma e}^{(1)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + P_{ee}^{(1)} - \right. \\ &\left. - \frac{10}{9}P_{ee}^{(0)} + P_{ee}^{(0)}\otimes d_{ee}^{(1)}\right) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2\left(\frac{1}{2}P_{\gamma e}^{(0)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3}P_{ee}^{(0)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}P_{ee}^{(0)}\otimes P_{ee}^{(0)}\right) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^2\left(\frac{1}{2}P_{\gamma e}^{(1)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2}P_{\bar e e}^{(0)}\otimes P_{e\bar e}^{(1)} + \right. \\ &+ \frac{1}{3}d_{\gamma e}^{(1)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2}d_{\gamma e}^{(1)}\otimes P_{\gamma\gamma}^{(0)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2}P_{\gamma e}^{(0)}\otimes P_{e\gamma}^{(1)} - \frac{10}{9}P_{\gamma e}^{(0)}\otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{3}P_{ee}^{(1)} + \frac{1}{2}d_{ee}^{(1)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} - \frac{13}{54}P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{2}P_{ee}^{(0)} \otimes d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} +$$
$$+P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(1)} + \frac{1}{3}P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)} - \frac{10}{9}P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{2}P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)}\Bigg) +$$
$$+\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^3 \left(\frac{1}{6}P_{\gamma\bar{e}}^{(0)} \otimes P_{\bar{e}e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3}P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{6}P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{\gamma\gamma}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} +\right.$$
$$\left.+\frac{4}{27}P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{3}P_{ee}^{(0)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3}P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{6}P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)}\right). \quad (18)$$

Окончательный ответ для результата третьей итерации в виде функции доли энергии z имеет вид

$$D_{ee}^{(\mathrm{III})}(z) = \delta(1-z) + \frac{\alpha}{2\pi}\left(-1 - 2\ln(1-z)\right)\frac{1+z^2}{1-z} + \frac{\alpha}{2\pi}L\frac{1+z^2}{1-z} +$$
$$+\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L\Bigg[-\frac{137}{18} - \frac{2}{z} - \frac{31}{9(1-z)} + \frac{271}{18}z - 2z^2 + 4\zeta_2\frac{1+z^2}{1-z} +$$
$$+\mathrm{Li}_2(1-z)(-2-2z) + \ln(1-z)\left(11 - \frac{14}{1-z} + 3z\right) - 6\ln^2(1-z)\frac{1+z^2}{1-z} +$$
$$+\ln z\left(-\frac{22}{3} - \frac{8}{3z} - \frac{1}{3(1-z)} - \frac{4z}{3} + \frac{8}{3}z^2\right) + 4\ln z\ln(1-z)\frac{z^2}{1-z} - \frac{7}{2}(1+z)\ln^2 z\Bigg] +$$
$$+\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2\Bigg[-\frac{7}{3} + \frac{2}{3z} + \frac{11}{3(1-z)} - \frac{4}{3}z - \frac{2}{3}z^2 + 2\ln(1-z)\frac{1+z^2}{1-z} +$$
$$+\ln z\left(-\frac{2}{1-z} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}z\right)\Bigg] + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^2\Bigg[\frac{679}{27} + \frac{59}{27z} - \frac{403}{54(1-z)} - \frac{847}{54}z - \frac{113}{27}z^2 +$$
$$+\zeta_2\left(\frac{18}{1-z} - 19 + z + \frac{8}{3}z^2 - \frac{8}{3z}\right) - 10\,\zeta_3\frac{1+z^2}{1-z} - (7+7z)\mathrm{S}_{1,2}(1-z) +$$
$$+\mathrm{Li}_2(1-z)\Big(-12 - 10z + \frac{4}{3}z^2 + \ln(1-z)(-12-12z) +$$
$$+\ln z(-9-9z)\Big) + 12(1+z)\mathrm{Li}_3(1-z) + \ln(1-z)\left(-\frac{49}{36} - \frac{2}{3z} - \frac{557}{18(1-z)} +\right.$$
$$\left.+\frac{1235}{36}z - \frac{4}{3}z^2 + 20\zeta_2\frac{1+z^2}{1-z}\right) + \ln^2(1-z)\left(\frac{53}{2} - \frac{2}{3z} - \frac{34}{1-z} + \frac{15}{2}z + \frac{2}{3}z^2\right) -$$
$$-8\ln^3(1-z)\,\frac{1+z^2}{1-z} + \ln z\left(\frac{65}{4} + \frac{17}{6(1-z)} - \frac{61}{4}z + \frac{28}{9}z^2 - 4\zeta_2\frac{1+z^2}{1-z}\right) +$$
$$+\ln z\ln(1-z)\left(-\frac{68}{3} - \frac{8}{3z} + \frac{28}{3(1-z)} - \frac{26}{3}z + 4z^2\right) + 12\ln z\ln^2(1-z)\frac{z^2}{1-z} +$$
$$+\ln^2 z\left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{3(1-z)} - \frac{7}{2}z - 4z^2\right) + \ln^2 z\ln(1-z)\left(-\frac{11}{2} - \frac{11}{2}z\right) +$$
$$+\ln^3 z\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}z\right)\Bigg] + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^3\Bigg[-\frac{971}{216} + \frac{8}{27z} + \frac{491}{108(1-z)} - 2\zeta_2\frac{1+z^2}{1-z} - \frac{11}{216}z -$$

$$- \frac{8}{27}z^2 + \mathrm{Li}_2(1-z)\left(\frac{7}{3}+\frac{7}{3}z\right) + \ln(1-z)\left(-\frac{17}{3}+\frac{8}{9z}+\frac{26}{3(1-z)}-3z-\frac{8}{9}z^2\right)+$$
$$+ 2\ln^2(1-z)\frac{1+z^2}{1-z} + 2\ln^2(1-z)\frac{1+z^2}{1-z} + \ln z\left(\frac{151}{36}-\frac{13}{3(1-z)}+\frac{103}{36}z+\frac{8}{9}z^2\right)+$$
$$+ \ln z\ln(1-z)\left(\frac{13}{3}-\frac{4}{1-z}+\frac{13}{3}z\right) + \ln^2 z\left(-\frac{11}{12}+\frac{2}{3(1-z)}-\frac{11}{12}z\right)\Bigg]. \quad (19)$$

Таким образом, мы нашли явное выражение для распределения безмассовых партонов электронного типа в массивном электроне. В порядках $\mathcal{O}(\alpha)$ и $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ оно полностью согласуется с известными результатами [5,14]. Также ведущие логарифмические слагаемые порядка $\mathcal{O}\left(\alpha^3 L^3\right)$ воспроизводят известный результат [15]. Полное выражение в порядке $\mathcal{O}\left(\alpha^3 L^2\right)$ является новым результатом. Количественно данный вклад будет важен для экспериментов на будущих электрон-позитронных коллайдерах. В работе [16] вычислялись (в частности) вклады порядка $\mathcal{O}\left(\alpha^3 L^2\right)$ в сечение электрон-позитронной аннигиляции, но прямое сравнение результатов затруднено тем, что используются разные схемы, по-разному выбираются масштабы факторизации и, более того, авторы [16] забыли учесть вклад позитронов в уравнение эволюции для партонных распределений в электроне.

А. Б. Арбузов выражает благодарность фонду РФФИ за поддержку в виде гранта № 20-02-00441.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jadach S., Skrzypek M.* QED Challenges at FCC-ee Precision Measurements // Eur. Phys. J. C. 2019. V. 79, No. 9. P. 756; arXiv:1903.09895.
2. *Abada A. et al. (FCC Collab.).* FCC-ee: The Lepton Collider: Future Circular Collider Conceptual Design Report. V. 2 // Eur. Phys. J. ST. 2019. V. 228, No. 2. P. 261–623.
3. *Dong M. et al. (CEPC Study Group Collab.).* CEPC Conceptual Design Report. V. 2 // Physics & Detector. 2018. V. 11; arXiv:1811.10545.
4. *Gray H. M.* Future Colliders for the High-Energy Frontier // Rev. Phys. 2021. V. 6. P. 100053.
5. *Kuraev E. A., Fadin V. S.* On Radiative Corrections to e^+e^- Single Photon Annihilation at High-Energy // Sov. J. Nucl. Phys. 1985. V. 41. P. 466–472.
6. *Gribov V. N., Lipatov L. N.* Deep Inelastic ep Scattering in Perturbation Theory // Sov. J. Nucl. Phys. 1972. V. 15. P. 438–450.
7. *Altarelli G., Parisi G.* Asymptotic Freedom in Parton Language // Nucl. Phys. B. 1977. V. 126. P. 298–318.
8. *Dokshitzer Y. L.* Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics // Sov. Phys. JETP. 1977. V. 46. P. 641–653.
9. *Arbuzov A. B., Scherbakova E. S.* Next-to-Leading Order Corrections to Bhabha Scattering in Renormalization Group Approach. I. Soft and Virtual Photonic Contributions // JETP Lett. 2006. V. 83. P. 427–432; arXiv:hep-ph/0602119.
10. *Arbuzov A. B.* Leading and Next-to-Leading Logarithmic Approximations in Quantum Electrodynamics // Phys. Part. Nucl. 2019. V. 50, No. 6. P. 721–825.

11. *Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H., Sturm C.* The Relation between the QED Charge Renormalized in $\overline{\mathrm{MS}}$ and On-Shell Schemes at Four Loops, the QED On-Shell Beta-Function at Five Loops and Asymptotic Contributions to the Muon Anomaly at Five and Six Loops // Nucl. Phys. B. 2013. V. 867. P. 182–202; arXiv:1207.2199 [hep-ph].
12. *Arbuzov A.* Higher Order QED Corrections to Muon Decay Spectrum // JHEP. 2003. V. 03. P. 063; arXiv:hep-ph/0206036.
13. *Blumlein J., De Freitas A., van Neerven W.* Two-Loop QED Operator Matrix Elements with Massive External Fermion Lines // Nucl. Phys. B. 2012. V. 855. P. 508–569; arXiv:1107.4638 [hep-ph].
14. *Berends F. A., van Neerven W. L., Burgers G. J. H.* Higher Order Radiative Corrections at LEP Energies // Nucl. Phys. B. 1988. V. 297. P. 429; Erratum // Nucl. Phys. B. 1988. V. 304. P. 921.
15. *Skrzypek M.* Leading Logarithmic Calculations of QED Corrections at LEP // Acta Phys. Polon. B. 1992. V. 23. P. 135–172.
16. *Ablinger J., Blümlein J., De Freitas A., Schönwald K.* Subleading Logarithmic QED Initial State Corrections to $e^+e^- \to \gamma^*/Z^{0^*}$ to $O(\alpha^6 L^5)$ // Nucl. Phys. B. 2020. V. 955. P. 115045; arXiv:2004.04287.

Получено 27 октября 2022 г.