Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 442–449



# УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ КВАНТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В МЕТОДЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ТРАЕКТОРИЯМ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

*А. А. Бирюков* [1]

Самарский государственный университет путей сообщения, Самара, Россия

Эволюция системы описывается как стохастический процесс в пространстве случайных совместных событий, в котором вводятся как симметричная разность, так и симметричная сумма событий. Вероятность перехода системы между состояниями представляется рядом двукратных, трехкратных и т. д. интегралов от действительных функционалов траекторий совместных событий. Выражение совпадает с вероятностью перехода в квантовой теории, если в модели учесть только попарно совместные случайные траектории.

The evolution of the system is described as a stochastic process in the space of random joint events, in which both symmetric difference and symmetric sum of events are introduced. The probability of a system transition between states is represented by a number of two-fold, three-fold, etc. integrals from the actual functionals of the trajectories of joint events. The expression coincides with the probability of transition in quantum theory if only pairwise joint random trajectories are taken into account in the model.

PACS: 02.50.Cw; 02.50.Ey; 03.65.Ta; 03.65.Ud

## ВВЕДЕНИЕ

Современные инновационные технологии, основанные на квантовой теории, стимулируют дальнейшее развитие ее математического аппарата, в частности, с точки зрения теории вероятностей. Например, в [1–4] представлены оригинальные исследования и обзоры работ по развитию методов теории вероятностей в квантовой механике.

Стохастические процессы в классической физике успешно описываются теорией вероятностей в пространстве несовместных событий [5]. Для описания квантовых процессов было предложено моделировать их в пространстве совместных случайных событий [6–10]. В соответствии с аксиоматикой Колмогорова, в пространстве совместных событий существует симметричная разность событий. Однако для адекватного описания квантовых процессов классический принцип совместности случайных

[1] E-mail: biryukov_1@mail.ru

событий дополняется принципом о совместности квантовых событий. Для квантовых случайных совместных событий существует симметричная сумма.

В данной работе предлагается построение выражения для вероятности переходов в квантовой системе в представлении функционального интегрирования с помощью моделирования ее эволюции в пространстве квантовых совместных случайных событий.

## ВЕРОЯТНОСТЬ КВАНТОВОГО ПЕРЕХОДА СИСТЕМЫ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

Эволюция квантовой системы описывается вероятностью $P(b|a)$ перехода системы из состояния $|a\rangle$ в момент времени $t = 0$ в состояние $|b\rangle$ в момент $t > 0$. Явный вид вероятности определяется через статистический оператор $\hat{\rho}(t)$ системы: $P(b|a) = \langle b|\hat{\rho}(t)|a\rangle$. Эволюция $\hat{\rho}(t)$ определяется оператором эволюции системы $\hat{U}(t)$ ($\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^{+}(t)$), поэтому

$$P(b|a) = \langle b|\hat{U}(t)|a\rangle\langle a|\hat{U}^{+}(t)|b\rangle, \tag{1}$$

где определили $\hat{\rho}(0) = |a\rangle\langle a|$.

Для построения явного вида $\langle b|\hat{U}(t)|a\rangle$ требуется конкретизация модели квантовой системы.

Рассмотрим систему, которая имеет дискретный спектр энергий: $\hat{H}_{\mathrm{syst}}|n\rangle = n|n\rangle$. Под действием поля, характеризуемого оператором $\hat{V}_{\mathrm{int}}(\tau)$, она совершает квантовые переходы между состояниями. В работе [11] показано, что амплитуда перехода между состояниями представляется в виде суммы функционалов вдоль случайных траекторий переходов

$$\langle b|\hat{U}(t)|a\rangle = \sum_{n_1=1}^{N}\int_0^1 \sqrt{P_0}\exp\left[iS[n_f;\ldots n_1,\xi_1;n_{\mathrm{in}}]\right]d\xi_1, \tag{2}$$

где явный вид безразмерного действия вдоль траектории $S[n_f;\ldots n_1,\xi_1;n_{\mathrm{in}}]$ определяется на основании модели системы, $P_0$ — нормировочная постоянная, $a = n_{\mathrm{in}}, b = n_f$. Выражение для вероятности (1), с учетом (2), принимает вид

$$P(b|a) = \sum_{n,m=1}^{N}\int_0^1 P_0\exp\left[i(S[n_f;n,\xi_1;n_{\mathrm{in}}] - S[n_f;m,\zeta_1;n_{\mathrm{in}}])\right]d\xi_1\,d\zeta_1. \tag{3}$$

Для ряда квантовых систем амплитуду квантовых переходов удобно представить в виде интеграла по виртуальным траекториям в реальном пространстве [12]

$$\langle b|\hat{U}(t)|a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{P_0}\exp\left[\imath S[b,\mathbf{r},a]\right]\mathcal{D}\mathbf{r}(t), \tag{4}$$

где $S[b,\mathbf{r},a]$ — безразмерное действие частицы вдоль траектории, проходящей через точки $a, \mathbf{r}, b$; интегрирование проводится по всем виртуальным траекториям. Вероятность перехода определяется формулой

$$P(b|a) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_0\exp\left[\imath(S[b,\mathbf{r},a] - S[b,\mathbf{r}',a])\right]\mathcal{D}\mathbf{r}(t)\mathcal{D}\mathbf{r}'(t). \tag{5}$$

В формулах (4), (5) представим: $\exp[\imath(S[b,n,a] - S[b,m,a])] = \cos[(S[b,n,a] - S[b,m,a])] + \imath\sin[(S[b,n,a] - S[b,m,a])]$. Интегралы (4), (5) от $\sin[(S[b,n,a] - S[b,m,a])]$ равны нулю, так как функционал антисимметричный. Выражения (4), (5) символично представим одной формулой

$$P(b|a) = \sum_{n,m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_{nm} P(S[b,n,a], S[b,m,a]), \tag{6}$$

где

$$P(S[b,n,a], S[b,m,a]) = P_o \mid \cos[b,n,a] - S[b,m,a]] \mid,$$
$$g_{nm} = \cos[S[b,n,a] - S[b,m,a]] | \cos[S[b,n,a] - S[b,m,a]] \mid^{-1},$$

т. е. $g_{n,m} = +1, -1, 0,\ n \neq m$; $g_{n,n} = +1,\ n = m$. Используя суммирование или интегрирование по траекториям в (6), мы переходим к (3) или (5).

Уравнение (6) показывает, что вероятность $P(b|a)$ представляется суммированием (или интегрированием) вероятностей $P(S[b,n,a], S[b,m,a])$ пары совместных виртуальных случайных траекторий по всем виртуальным парам этих траекторий.

Мы рассмотрим определение вероятности переходов системы, моделируя эволюцию системы, как стохастический процесс в пространстве совместных событий.

## МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА СЛУЧАЙНЫХ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим пространство $N$ случайных событий: $S_n^{kl}$, где $n = 1, 2, \ldots, N$, символ $kl$ означает, что события и их вероятности подчиняются аксиомам Колмогорова [13].

Для случая, когда события $S_n^{kl}, n = 1, 2, \ldots, N$, несовместные, вероятность их объединения определяется формулой [13] $P(\cup_{n=1}^{N} S_n^{kl}) = \sum\limits_{n=1}^{N} P(S_n^{kl})$.

Вероятность объединения совместных событий определяется формулой [14]

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} S_n^{kl}\right) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}) - \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}\big) + \\ + \sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}\big) - \ldots + (-1)^{N-1} P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \ldots \cap S_N^{kl}), \tag{7}$$

где вероятности пересечения этих событий отличны от нуля:

$$P(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}) \neq 0,\ \ P(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}) \neq 0, \ldots\ \ P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \ldots \cap S_N^{kl}) \neq 0, \tag{8}$$

все индексы $k, n, m, \ldots$ принимают целочисленные значения от 1 до $N$.

В пространстве случайных совместных событий построим события $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_N^-$, каждое из которых значит, что если произойдет событие с соответствующим номером, то не произойдет ни одно другое событие пространства. Из определения следует, что события $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_N^-$ не совместны. Доказывается уравнение симметричной разности событий [14]:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} S_n^-\right) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}) - 2 \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}\big) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}\big) - \ldots + 2^{N-1}(-1)^{N-1} P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \ldots \cap S_N^{kl}). \quad (9)$$

Анализ экспериментов показывает, что уравнения (7)–(9) успешно описывают совместные события и большой класс событий в физике микромира. Однако в физике микромира существуют случайные совместные события (например, в опытах по дифракции электронов), описание которых на базе уравнений (7)–(9) невозможно. Для их описания требуются дополнительные положения о совместности событий.

Мы постулируем, что в физике микромира, наряду с событиями $S_n^{kl}$, существуют совместные события $S_n^{qv}$, вероятность объединения которых $P(S_1^{qv} \cup S_2^{qv} \cup \ldots \cup S_N^{qv})$ описывается уравнением

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} S_n^{qv}\right) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{qv}) + \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv}\big) - \\ - \sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv} \cap S_k^{qv}\big) + \ldots + (-1)^{N'} P(S_1^{qv} \cap S_2^{qv} \cap \ldots \cap S_N^{qv}), \quad (10)$$

где символ $qv$ означает, что случайное событие относится к физике микромира (к процессам в квантовой механике); знак перед первым слагаемым «+», перед остальными слагаемыми знаки определяются множителями $(-1)^{N'}$, где $N'$ — порядковый номер слагаемого.

В пространстве случайных совместных событий $S_1^{qv}, S_2^{qv}, \ldots, S_N^{qv}$ построим события $S_1^+, S_2^+, \ldots, S_N^+$, каждое из которых значит, что при реализации этого события реализуются все события $S_n^{qv}$ с соответствующими вероятностями.

Для пространства двух совместных событий $S_1^{qv}, S_2^{qv}$ события $S_1^+, S_2^+$ определяются выражениями

$$S_1^+ = S_1^{qv} \cup (S_1^{qv} \cap S_2^{qv}), \quad S_2^+ = S_2^{qv} \cup (S_1^{qv} \cap S_2^{qv}).$$

Из данных определений следует:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{2} S_n^+\right) = \sum_{n=1}^{2} P(S_n^{qv}) + 2P\big(S_1^{qv} \cap S_2^{qv}\big). \quad (11)$$

Выражение (11) естественно называть симметричной суммой двух событий.

Вероятность объединения событий $P(S_1^+ \cup S_2^+ \cup \ldots \cup S_N^+)$ выражается через вероятности событий $S_n^{qv}, n = 1, 2, \ldots, N$, и вероятности их пересечений уравнением

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} S_n^+\right) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n) + 2\sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{qv}\cap S_m^{qv}\big) -$$
$$- 4\sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{qv}\cap S_m^{qv}\cap S_k^{qv}\big) + \ldots + 2^{N-1}(-1)^{N'} P(S_1^{qv}\cap S_2^{qv}\cap\ldots\cap S_N^{qv}), \quad (12)$$

где знак перед слагаемым определяется так же, как и в формуле (10). Уравнение (12) доказывается методом математической индукции с помощью формулы (11). Выражение (12) является симметричной суммой $N$ случайных совместных событий. Заметим, что интерпретация событий в уравнениях (10)–(12) множествами, как это предусмотрено аксиоматикой Колмогорова, недопустимо, она приводит к противоречию.

Уравнения (9), (12) можно записать в виде одного уравнения. С этой целью введем случайные события $\tilde{S}_n$, каждое из которых принимает значение или $S_n^-$, или $S_n^+$. Вероятность объединения событий $\tilde{S}_n$ представляется формулой, которая является объединением уравнений (10), (12):

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} \tilde{S}_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n) + 2\sum_{n<m=1}^{N} g_{nm}P(S_n\cap S_m) +$$
$$+ 4\sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk}P(S_n\cap S_m\cap S_k) + \ldots + 2^{N-1}g_{12\ldots N}P(S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_N), \quad (13)$$

где множители $g_{nm}$, $g_{nkm}$ и др. принимают одно из значений $+1$, $-1$ в зависимости от событий $S_n$ (например, $g_{nkm} = -g_{nm}$). Индексы $kl, qv$ у событий $S_n^{kl}, S_n^{qv}$ в уравнении (8) опущены, так как они учитываются знаками коэффициентов $g_{nm}, g_{nkm}, \ldots$ Заметим, что если в выражении (13) взять события, которые несовместны, то все коэффициенты равны нулю: $g_{nm} = 0$, $g_{nkm} = 0\ldots$

В построенном пространстве случайных совместных событий реализуются как симметричная разность, так и симметричная сумма событий. Пространство описывает более широкий круг систем и стохастических процессов, нежели пространства, в которых реализуется только симметричная разность событий. Число слагаемых $N$ в рядах не ограничено и может быть бесконечным, так как они сходятся.

## СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС В ПРОСТРАНСТВЕ СЛУЧАЙНЫХ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ И УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА СИСТЕМЫ МЕЖДУ СОСТОЯНИЯМИ

Рассмотрим систему в пространстве случайных совместных событий $S_n, n = 1, 2, \ldots, N$, представленном в предыдущей части данной статьи. Эволюция системы представляется ее переходом в пространстве случайных событий с некой вероятностью $P(b|a)$ из состояния, характеризуемого определенным событием $a$ в момент времени $t = 0$, в состояние, характеризуемое событием $b$ в момент $t > 0$.

Для нахождения явного вида вероятности перехода $P(b|a)$ построим стохастическую модель движения системы в пространстве случайных совместных событий.

Будем полагать

$$b \cap a = \bigcup_{n=1}^{N} (b \cap \tilde{S}_n \cap a) = \bigcup_{n=1}^{N} \tilde{S}[b, n, a], \tag{14}$$

где $(b \cap \tilde{S}_n \cap a) = \tilde{S}[b, n, a]$, события $a$ и $b$ в данном уравнении фиксированные, мы представляем их как индексы. Уравнение (14) означает, что переход системы от определенного начального события $a$ к другому определенному событию $b$ осуществляется через промежуточные события $\tilde{S}_n$ пространства событий.

Искомая вероятность $P(b|a)$ перехода с учетом (13), (14) определяется формулой

$$\begin{aligned} P(b|a) = \sum_{n=1}^{N} P(S[b,n,a]) + 2 \sum_{n<m=1}^{N} g_{nm} P(S[b,n,a] \cap S[b,m,a]) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P(S[b,n,a] \cap S[b,m,a] \cap S[b,k,a]) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P(S[b,1,a] \cap S[b,2,a] \cap \ldots \cap S[b,N,a]), \end{aligned} \tag{15}$$

где $g_{n,m} = +1, -1, 0, n \neq m$; $g_{n,n} = +1, n = m$; $g_{nmk} = +1, -1, 0$, или $g_{nmk} = -g_{n,m}; \ldots$, знаки коэффициентов определяются соотношениями между событиями с разными номерами $n, m, k, l, \ldots$ Для уравнения (15), описывающего стохастический процесс в пространстве случайных совместных событий, выполняется принцип соответствия: когда события несовместны, остается лишь первая сумма для $n = m$, т. е. оно переходит в уравнение марковских процессов.

Представим уравнение (15) в форме, более удобной для описания стохастических процессов. Объединим первые два слагаемых в соответствии с принципами теории вероятностей:

$$\begin{aligned} P(b|a) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P(S[b,n,a] \cap S[b,m,a]) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P(S[b,n,a] \cap S[b,m,a] \cap S[b,k,a]) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P(S[b,1,a] \cap S[b,2,a] \cap \ldots \cap S[b,N,a]). \end{aligned} \tag{16}$$

Для описания физической системы на основании уравнения (16) необходимо случайным событиям сопоставить случайные числа, характеризующие систему. Рассмотрим систему, в которой каждому событию с номером $n$ соответствует случайное число с тем же номером (например, энергия $E_n$). Событиям $b, a$ соответствуют числа $n_f, n_{\text{in}}$. Переход системы из состояния $a$ в состояние $b$ осуществляется по некоторой случайной траектории (определяемой либо одним числом $n$, либо множеством чисел $n_1, n_2, \ldots$), поэтому событиям $S[b, n, a]$ сопоставляются безразмерные (т. е. в единицах $\hbar$) действия системы $S[b, n, a]$ вдоль этих случайных траекторий (числа $n$ нумеруют траектории и могут быть мультииндексами). Уравнение (16) можно расширить до любого значения $N$ и для непрерывных траекторий. В общем случае его можно представить в виде

$$P(b\,|\,a) = \sum_{n,m=1} \int\!\!\int g_{nm} P(S[b,n,a], S[b,m,a]) + 4 \sum_{n<m<k=1} \int\!\!\int\!\!\int g_{nmk} \times \\ \times P(S[b,n,a], S[b,m,a], S[b,k,a]) + 8 \sum_{n<m<k<l=1} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int g_{nmkl} \times \\ \times P(S[b,n,a], S[b,m,a], S[b,k,a], S[b,l,a]) + \ldots \quad (17)$$

Для случая, когда события только попарно совместны, уравнение (17) принимает вид (6), т. е. совпадает с выражением квантовой механики. Данный факт позволяет утверждать, что предложенная модель стохастических процессов в пространстве попарно совместных событий описывает квантовые процессы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена модель пространства случайных совместных событий с определенными симметричной разностью и симметричной суммой событий. В пространстве рассмотрен стохастический процесс системы. Вероятность перехода системы между состояниями определяется уравнением, учитывающим совместность событий. Для уравнения выполняется принцип соответствия, т. е. если события не совместные, оно переходит в уравнение марковского процесса. Для случая, когда события лишь попарно совместные, уравнение идентично уравнению квантовой механики.

Представляет интерес исследовать вероятность перехода системы между состояниями с учетом совместности трех, четырех и более событий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Skorobogatov G., Svertilov S.* Quantum Mechanics Can Be Formulated as a Non-Markovian Stochastic Process // Phys. Rev. A. 1998. V. 7. P. 3426.
2. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Ин-т комп. исслед., 2003. 410 с.
3. *Рязанов Г. В.* Квантовомеханические вероятности как суммы по путям // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 123–131.
4. *Славнов Д. А.* Алгебраические и статистические методы в квантовой и гравитационной физике // ЭЧАЯ. 2022. Т. 53, вып. 3. С. 753–889.
5. *Морозов А. Н., Скрипкин А. В.* Немарковские физические процессы. М.: Физматлит, 2018. 288 с.
6. *Бирюков А. А.* Цепи Маркова для совместных состояний и уравнения квантовой механики // ТМФ. 1971. Т. 7, вып. 1. С. 56–60.
7. *Бирюков А. А.* Марковские процессы для совместных событий и уравнения квантовой механики // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. «Естественные науки». 2010. Т. 7, вып. 78. С. 137–144.
8. *Biryukov A. A.* Equations of Quantum Theory in the Space of Randomly Joint Quantum Events // Eur. Phys. J. Web Conf. 2019. V. 222. P. 03005.

9. *Бирюков А. А.* Модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. «Физ.-мат. науки». 2021. Т. 25, вып. 4. С. 787–796.
10. *Biryukov A. A.* Stochastic Processes in the Space of Random Joint Events and Equations for Transition Probabilities of Quantum Systems // Intern. J. Mod. Phys. A. 2022. V. 37, No. 20, 21. 2243006 (9 p.).
11. *Бирюков А. А., Дегтярева Я. В., Шлеенков М. А.* Численное вычисление вероятностей квантовых переходов в атомах и молекулах методом функционального интегрирования // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82, вып. 12. С. 1728–1733.
12. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
13. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей М.: Наука, 1974. 120 с.
14. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятности М.: Наука, 1986. 328 с.


Получено 27 октября 2022 г.