Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 5(250). С. 1267–1271

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

МАЙОРАНОВСКИЙ ФЕРМИОН КАК ВЕЩЕСТВЕННОЕ СПИНОРНОЕ ПОЛЕ

Ю. М. Письмак [а, 1], *О. Ю. Шахова* [б, 2]

[а] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[б] Военно-морской политехнический институт, Военный учебно-научный центр Военно-Морского Флота «Военно-морская академия», Санкт-Петербург, Россия

Проведен анализ возможности обобщений теории Майораны на основе предположения о вещественности этого спинорного поля при использовании общих принципов релятивистской физики. Для него построен функционал действия, в котором содержатся два параметра: один имеет размерность массы, другой — безразмерный. Найдены полные решения уравнений Эйлера–Лагранжа. Получен явный вид собственных спиноров оператора спиральности, которые могут использоваться в качестве базисных элементов при описании состояний системы. В ней в соответствии с результатами, полученными Майораной, обычный электрический ток равен нулю. Аксиальный ток нетривиален. Изучены его основные особенности, и в рамках построенной модификации теории Майораны обсуждается возможность участия вещественного спинорного фермионного поля в электромагнитных взаимодействиях.

An analysis of the possibility of generalizations of the Majorana theory based on the assumption of the realness of this spinor field has been carried out using the general principles of relativistic physics. For it the action functional is constructed, which contains two parameters: one has the dimension of mass, the second is dimensionless. The complete solutions of the Euler–Lagrange equations are found. An explicit form of the eigenspinors of the helicity operator is obtained, which can be used as basis elements in describing the states of the system. In it, in agreement with the results obtained by Majorana, the ordinary electric current is zero. The axial current is nontrivial. Its basic features have been studied and, within the framework of the constructed modification of Majorana theory, the possibility of participation of the real spinor fermion field in electromagnetic interactions is discussed.

PACS: 04.50.–h; 14.80.Va

Предложенная Майораной [1] релятивистская квантовополевая модель элементарной частицы со спином $1/2$ сразу же привлекла внимание многих исследователей в области теоретической и экспериментальной физики, и оно не ослабевает на протяжении всего прошедшего с момента ее создания времени [2, 3]. Хотя прямых экспериментальных подтверждений существования фермионов Майораны нет до сих пор, в последнее время заметно повысился интерес к его теории. Активно обсуждаются возможности проявления воздействий этих частиц в различных трудно объяснимых иным способом эффектах в области физики элементарных частиц, ядерной физики,

[1] E-mail: y.pismak@spbu.ru
[2] E-mail: shahova_olga@outlook.com

физики твердого тела, космологии [3–6]. Мы рассматриваем теорию вещественного спинорного поля без каких-либо сопоставлений ее с теорией Дирака и использования вытекающих из этого следствий и аналогий, представленных в статье [1] и работах многих авторов [2, 3]. Используя в качестве основных предположений только вещественность фермионного поля и основные положения релятивистской теории, проведем в той мере, в которой это удастся, наиболее полный анализ физических свойств этого поля и рассмотрим возможность обобщения уже известных для майорановских фермионов результатов.

В предложенном в [1] представлении гамма-матриц

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1 = i\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma_3 = i\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где 0 обозначает 2×2-матрицу с нулевыми элементами, σ_1, σ_2, σ_3 — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

все матрицы (1) и $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ чисто мнимые. Нам будут более удобны вещественные $\bar{\gamma}^\mu = i\gamma^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\bar{\gamma}^5 = i\gamma^5$. Мы предполагаем, что действие модели в координатном представлении должно содержать только вещественные спинорные поля, операцию дифференцирования не выше первого порядка и вещественные параметры. Оно должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца и иметь вид $\psi M_v^\mu \partial_\mu \psi + \psi M_{\rm sc} \psi$. Здесь M_v^μ — матрицы, для которых $\psi M_v^\mu \psi$ преобразуется как вектор при лоренц-преобразовании спинорных полей ψ, что обеспечивает инвариантность действия при соответствующих преобразованиях всех входящих в него величин. В силу фермионности спинора ψ отличный от нуля вклад дает только симметричная по спинорным значкам часть матрицы M_v^μ.

Поэтому в качестве четырех матриц, M_v^μ, мы будем использовать только симметричные $M_v^\mu = M_v^{\mu\,T}$. Непосредственно набор матриц $\bar{\gamma}^\mu$ в качестве M_v^μ непригоден из-за антисимметрии $\bar{\gamma}_0$ и $\bar{\gamma}_2$. Однако матрицы $\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^\mu$ всем необходимым требованиям удовлетворяют: они вещественны, симметричны, и $\psi M_v^\mu \psi = \psi \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^\mu \psi$ преобразуется как вектор при лоренц-преобразованиях спиноров ψ. Все матрицы $\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^\mu$ антисимметричны, и для построения кинетического вклада в действие этот набор матриц не подходит.

Таким образом, часть действия фермиона майорано, содержащая производные, имеет вид $(\psi\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\psi\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^\mu\psi)/2 = \psi\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi$. Для построения вклада в действие без производных необходимы антисимметричные вещественные матрицы $M_{\rm sc}$, для которых $\psi M_{\rm sc}\psi$ инвариантно при преобразованиях Лоренца поля ψ. В самом общем случае $M_{\rm sc}$ может быть представлена в виде $M_{\rm sc} = m(\bar{\gamma}^0\cos(\zeta) + \bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^5\sin(\zeta)) = M_{\rm sc}(m, \zeta)$. Таким образом, действие для майорановского поля при сделанных нами предположениях записывается в виде

$$S(\psi) = \psi(\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu + M_{\rm sc}(m,\zeta))\psi = \psi(\bar{\gamma}^0(\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu + m(\mathbf{1}\cos(\zeta) + \bar{\gamma}^5\sin(\zeta))\psi. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{1}$ — единичная 4×4-матрица, m — параметр размерности массы и $0 \leqslant \zeta < 2\pi$. Уравнение стационарности для действия $S(\psi)$ (2) имеет вид

$$\bar{\gamma}^0(\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu + m(\mathbf{1}\cos(\zeta) + \bar{\gamma}^5\sin(\zeta))\psi = 0. \quad (3)$$

Это линейное однородное уравнение для поля ψ. Условием его разрешимости является равенство нулю детерминанта матричного дифференциального оператора $L = \bar{\gamma}^0(\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu + m(\mathbf{1}\cos(\zeta) + \bar{\gamma}^5 \sin(\zeta))$: $\det(L) = (\partial^2 + m^2)^2 = 0$, где $\partial^2 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$. Это означает, что каждая компонента спинора ψ удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 + m^2)\psi = 0. \tag{4}$$

Ранг системы уравнений (3) равен двум. Поэтому, решив два из них, мы получаем общее решение. Из первых двух уравнений (3) находятся два линейно независимых решения в виде

$$\psi_1 = \{(\partial_1 - m\sin(\zeta))\varphi_1, (m\cos(\zeta) - \partial_3)\varphi_1, (\partial_0 + \partial_2)\varphi_1, 0\}, \tag{5}$$

$$\psi_2 = \{(\partial_3 + m\cos(\zeta))\varphi_2, (\partial_1 + m\sin(\zeta))\varphi_2, 0, -(\partial_0 + \partial_2)\varphi_2\}. \tag{6}$$

Здесь в фигурных скобках — четыре компоненты спиноров ψ_1 и ψ_2, выраженные в терминах независимых вещественных фермионных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, удовлетворяющих уравнениям (4) $L\varphi_1(x) = 0$, $L\varphi_2(x) = 0$. При подстановке ψ_1, ψ_2 в (4) мы получаем $\{0, 0, L\varphi_1, 0\} = 0$, а также $\{0, 0, 0, L\varphi_2\} = 0$.

Для описания состояния поля ψ можно использовать оператор спиральности

$$\Sigma = \frac{\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3\partial_1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\partial_2 + \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\partial_3}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \Delta = -\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2,$$

а также проекторы $P_{\Sigma\pm} = \mathbf{1}/2 \pm \Sigma$ на подпространство с положительной и отрицательной спиральностью. Линейные комбинации $\psi_\pm = a_\pm\psi_1 + b_\pm\psi_2$ спиноров ψ_1, ψ_2 при

$$a_+ = \partial_0\partial_1 - \partial_2 m\sin(\zeta) - \sqrt{\Delta}(\partial_3 + m\cos(\zeta)),$$

$$b_+ = \partial_0\partial_3 + \partial_2 m\cos(\zeta) + \sqrt{\Delta}(\partial_1 - m\sin(\zeta)),$$

$$a_- = \partial_0\partial_1 - \partial_2 m\sin(\zeta) + \sqrt{\Delta}(\partial_3 + m\cos(\zeta)),$$

$$b_- = \partial_0\partial_3 + \partial_2 m\cos(\zeta) + \sqrt{\Delta}(m\sin(\zeta) - \partial_1)$$

являются собственными спинорами оператора спиральности: $\Sigma\psi_\pm = (\pm 1/2)\psi_\pm$.

Заметим, что Δ — положительно определенный дифференциальный оператор, и спиноры $\psi_1, \psi_2, \psi_+, \psi_-$ в координатном представлении, а также оператор спиральности Σ являются вещественными. В рамках проведенного нами анализа наличие в действии $S(\psi)$ кроме массы m дополнительного безразмерного параметра $0 \leqslant \zeta < 2\pi$ не привело к противоречию с нашими основными предположениями.

Хорошо известно, что вектор электрического тока $\psi\gamma^0\gamma^\mu\psi$ равен нулю вследствие симметрии всех матриц $\gamma^0\gamma^\mu = (\gamma^0\gamma^\mu)^T$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, в майорановском представлении (1) и фермионной статистики полей ψ. Воспользовавшись (1), нетрудно также убедиться, что матрицы $M_a^\mu = \gamma^0\gamma^5\gamma^\mu$ антисимметричны: $M_a^{\mu\,T} = -M_a^\mu$, аксиальный ток $J_a^\mu(x) = \psi(x)M_a^\mu\psi(x)$ является псевдовектором с точки зрения преобразований Лоренца и в нуль тривиальным образом не обращается.

Вследствие фермионной статистики поля ψ $\partial_\mu J_a^\mu(x) = 2\psi(x)M_a^\mu\partial_\mu\psi(x)$. Поэтому функционал $\int\psi(x)M_a^\mu\partial_\mu\psi(x)dx = 1/2\int\partial_\mu J_a^\mu(x)dx$ поля ψ равен нулю, если пренебречь вкладом границ области интегрирования. Обычно такие функционалы в качестве действия в моделях физических систем не используются. Мы также эту возможность модификации кинетической части действия поля Майораны рассматривать не будем. Таким образом, из сделанных нами предположений следует, что свободная теория вещественного спинорного фермиона определяется действием вида (2).

Теперь мы рассмотрим возможности построения функционала, описывающего взаимодействия поля ψ. Если наложить требование локальности и перенормируемости модели в пространстве-времени размерности $d = 3 + 1$, то действие взаимодействия не может быть полиномом, содержащим ψ в степени $n > 2$. Тогда, если взаимодействие не нарушает лоренц-инвариантность, оно может включать поля, используемые в релятивистской теории элементарных частиц. Если предположить, что действие взаимодействия должно быть эрмитовым, то непосредственное взаимодействие майорановского фермиона с другими спинорными полями Стандартной модели оказывается недопустимым.

В результате остаются в качестве возможных партнеров только скалярные поля Хиггса и калибровочные векторные бозоны. Все они имеют одинаковую с массой и производной размерность и по этому критерию могут быть участниками взаимодействия. Трудности реализации этой возможности возникают из-за основополагающего для Стандартной модели калибровочного принципа взаимодействий. Его хотелось бы не нарушить, внедряя в нее спинорное фермионное поле ψ без добавки ему некоторых дополнительных свойств, например цвета и аромата, в результате чего ψ потеряло бы свою стерильность.

Мы обсудим связанные с этим технические трудности на примере задач, которые требуется решить при построении взаимодействия электромагнитного поля с майорановским. Они связаны с вещественностью и калибровочной инвариантностью поля ψ. Оно не может компенсировать калибровочное преобразование вектор-потенциала A_μ электромагнитного поля по аналогии с заряженными полями Дирака в квантовой электродинамике. Следует найти заменяющий эти поля механизм сокращения нетривиального аддитивного вклада калибровочного преобразования, линейно входящего в действие взаимодействия поля A_μ.

Единственно возможный локальный лоренц-инвариантный функционал от полей A_μ и ψ, который можно рассматривать в качестве модели их взаимодействия, записывается в виде $S_{\rm int}(A,\psi) = \lambda A_\mu J^\mu_a(\psi)$, где λ — безразмерный параметр. Если для поля ψ выполняется уравнение непрерывности $\partial_\mu J^\mu_a(\psi) = 0$ аксиального тока, то при калибровочном преобразовании $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \rho$ действие взаимодействия не меняется, так как $S_{\rm int}(A',\psi) = S_{\rm int}(A,\psi) - \rho\lambda\partial_\mu J^\mu_a = S_{\rm int}(A,\psi)$.

Можно попробовать построить пример удовлетворяющего таким требованиям поля ψ, используя решение в виде плоской волны для классического уравнения (3). Подставим в (5), (6) $\varphi_1(x,p) = \cos(px + a)u$, $\varphi_2(x,p) = \cos(px + b)v$, где $px = p_\mu x^\mu$, p_1, p_2, p_3 — компоненты импульса волны; $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ — ее энергия; u, v — не зависящие от координат x фермионы; a, b — два произвольных параметра.

В результате получим общее решение $\psi = \psi_1 + \psi_2$ уравнения (3), заданное волновым вектором $\mathbf{p}$ и энергией p_0. Для него электрический ток $V^\mu = \psi\bar\gamma^0\bar\gamma^\mu\psi$ равен нулю вследствие $\bar\gamma^0\bar\gamma^\mu = (\bar\gamma^0\bar\gamma^\mu)^T$ и удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu V^\mu = 0$

тривиальным образом. Таким образом, из-за $V_\mu = 0$ обычный механизм взаимодействия фермионного поля с электромагнитным оказывается нереализуемым. Однако $\partial_\mu J_a^\mu = 0$ для аксиального тока $J_a^\mu = -\psi\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^\mu\psi$ возможно только при $m = 0$.

Если массивное поле Майораны ψ не является решением уравнения стационарности (3), но $\partial_\mu J_a^\mu(\psi) = 0$, то такие поля ψ могут в качестве виртуальных квантовых взаимодействовать с электромагнитным полем A_μ без нарушения калибровочной инваринтности. Если имеется два майорановских поля: безмассовое ψ, непосредственно взаимодействующее с массивным ψ', и фотонное поле A_μ, которое калибровочно инвариантно взаимодействует только с ψ, то в такой системе массивное поле ψ' может оказывать влияние на электромагнитные процессы.

Так же как и поле Дирака, поле Майораны может взаимодействовать с материальной средой. Применяя методы, аналогичные использованым в [7], можно построить соответствующие функционалы взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Majorana E.* Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 171–184.
2. *Bilenky S. M.* Neutrino Majorana. arXiv:hep-ph/0605172v1.
3. *Vissani F.* What Is Matter According to Particle Physics and Why Try to Observe Its Creation in Lab // Universe. 2021. V. 7, Iss. 3. P. 61.
4. *Varma C. M.* Majoranas in Mixed-Valence Insulators // Phys. Rev. B. 2020. V. 102, No. 15. Article id.155145.
5. *Zahiri Abyanth M., Farhoudi M.* Current Density of Majorana Bound States // Phys. Lett. A. 2022. V. 453. P. 128475.
6. *Gomes M., Gomes P. R. S., Raimundo K., Santos R. C. B., da Silva A. J.* Topological Superconductor from the Quantum Hall Phase: Effective Field Theory Description // Phys. Rev. B. 2022. V. 106. P. 195111.
7. *Pismak Yu. M., Shakhova O. Yu.* Singular Background in a Model of Material Plane Interacting with Dirac Particles // Phys. Part. Nucl. 2022. V. 53, No. 2. P. 326–334.

Получено 31 января 2023 г.