

УДК 517.9

## СПЕКТР И КОЛЛАПС ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ КВАДРАТУ СЕКАНСА РАССТОЯНИЯ

*В. В. Пупышев*<sup>1</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Исследуемая задача — одномерное уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом, пропорциональным квадрату секанса аргумента, и нулевыми граничными условиями на концах отрезка  $[0, \pi/2]$ . Для такой задачи дан анализ зависимости приближенного спектра больших по модулю действительных собственных значений и отвечающих им собственных функций от величины действительного параметра потенциала. Особое внимание уделено коллапсу частицы.

The investigated problem is the one-dimensional Schrödinger equation with the potential proportional to squared secant of the argument and the zero boundary conditions at the ends of the segment  $[0, \pi/2]$ . For this problem the dependence of the spectrum of real eigenvalues large in absolute values and the corresponding eigenfunctions on the real potential parameter is analyzed. Special attention is paid to the particle collapse.

### ВВЕДЕНИЕ

Начнем с постановки исследуемой однородной краевой задачи и плана ее решения. Пусть квантовая частица движется в действительном силовом поле

$$V(\varphi; c) = c (\sec \varphi)^2, \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad c = \operatorname{Re} c. \quad (1)$$

Пусть  $p^2$  и  $b = 0$  — полная энергия и угловой момент этой частицы, а ее волновая функция  $\Phi$  подчиняется стационарному уравнению Шредингера

$$[\partial_\varphi^2 + p^2 - V(\varphi; c)] \Phi(\varphi; p^2) = 0, \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad (2)$$

и условиям

$$\Phi(0; p^2) = 0, \quad \Phi(\pi/2; p^2) = 0, \quad \Phi(\varphi; p^2) \in C_{[0, \pi/2]}^2 \cap C_{[0, \pi/2]}^0. \quad (3)$$

Последнее из этих условий означает, что искомая волновая функция  $\Phi(\varphi; p^2)$  должна быть непрерывной на всем отрезке  $[0, \pi/2]$  изменения ее аргумента  $\varphi$ , но может не иметь производных первого и второго порядков только в точке  $\varphi = \pi/2$ . Связанное состояние частицы описывается действительной энергией  $p^2$  и соответствующей ее волновой функцией  $\Phi$ , нормированной условием

$$\|\Phi\|^2 \equiv \int_0^{\pi/2} d\varphi |\Phi(\varphi; p^2)|^2 = 1. \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

При таком условии величина  $|\Phi(\varphi; p^2)|^2$  имеет смысл плотности вероятности [1], а произведение  $|\Phi(\varphi; p^2)|^2 d\varphi$  есть вероятность обнаружить частицу на отрезке  $[\varphi, \varphi + d\varphi]$  бесконечно малой длины  $d\varphi$ .

Главная цель настоящей работы — качественный анализ больших по модулю действительных собственных значений  $p^2 = p^2(c)$  и соответствующих собственных функций  $\Phi(\varphi; p^2(c))$  в зависимости от величины действительного параметра  $c$ , сингулярного в точке  $\varphi = \pi/2$  поля (1), и попутная иллюстрация коллапса.

В квантовой механике [1] под коллапсом (захватом, стягиванием) частицы в силовом поле подразумевается локализация ее волновой функции в бесконечно малой окрестности центра этого поля. Локализация физически интерпретируется как падение частицы в этот центр.

Предлагаемый анализ является новым исследованием и представляется интересным, во-первых, для обобщения спектральной теории гамильтоновых операторов [2] на случай сингулярного поля (1), во-вторых, потому что знание действительного спектра, т. е. совокупности  $\{p^2, \Phi\}$  всех действительных собственных значений ( $p^2 = \text{Re } p^2$ ) и отвечающих им действительных собственных функций ( $\Phi = \text{Re } \Phi$ ), является ключевым для расширения дифференциальной формулировки проблемы трех частиц [3] на случай парных взаимодействий центробежного типа.

Точным решениям и коллапсу в задаче нескольких частиц с такими взаимодействиями посвящены работы [4–10]. Представление точного и, вообще говоря, комплексного спектра  $\{p^2, \Phi\}$  задачи (1)–(3) через ряды Гаусса [11] типа  ${}_2F_1$  предложено и исследовано в оригинальном разд. 4 обзорной работы [10]. Ряды  ${}_2F_1$  содержат  $p$  в качестве слагаемого их двух параметров. Поэтому в случае большого по модулю собственного значения  $p^2$  представление волновой функции  $\Phi(\varphi; p^2)$  через эти ряды не столь удобно, а их суммирование становится довольно сложной вычислительной проблемой. Ее решению, а именно выводу асимптотических представлений волновой функции  $\Phi(\varphi; p^2)$  в пределе большой по модулю энергии  $p^2$ , посвящена настоящая работа. В ней только для определенности полагается, что  $\sqrt{p^2} = p \geq 0$ , если  $p^2 \geq 0$ , и  $\sqrt{p^2} = i|p|$ , если  $p^2 < 0$ ; символами  $P_n^{(a,b)}$ ,  $\Gamma$  и  $\Theta$  обозначаются полином Якоби, гамма- и тета-функция; а выполненные исследования излагаются по следующему плану.

В разд. 1 сначала выводятся асимптотики фундаментальных систем решений (ФСР)  $\{\Phi_0^\pm\}$  и  $\{\Phi^\pm\}$  уравнения (2) при  $\varphi \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , а затем с помощью этих асимптотик формулируются правила представления волновой функции  $\Phi$  как линейной комбинации фундаментальных решений.

В разд. 2 найденные в разд. 1 асимптотики точной волновой функции  $\Phi$  используются для качественного исследования действительного спектра  $\{p^2, \Phi\}$  больших ( $|p/c| \gg 1$ ) собственных значений и соответствующих им собственных функций. С этой целью применяется известная и физически прозрачная версия [1] метода Венцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [12]. В итоге приближенные действительные собственные функции выражаются через элементарные, что позволяет дать анализ физически интересных особенностей таких собственных функций, не прибегая к каким-либо вычислениям.

В разд. 3 для волновой функции выводятся довольно простые асимптотические в пределе большой по модулю энергии представления.

В разд. 4 представляется простой способ вычисления спектра, основанный на аппроксимации искомой волновой функции  $\Phi$  конечной подсуммой ее фурье-разложения

по базисным для исследуемой однородной краевой задачи (1)–(3) функциям  $\sin 2n\varphi$ ,  $n = 1, 2, \dots$

В разд. 5 исследуется действительный спектр с физической точки зрения более реалистической задачи, получаемой из исходной задачи (1)–(3) заменой сингулярного поля (1) «обрезанным» в некоторой точке  $\varphi_b$ , близкой к точке  $\pi/2$ , несингулярным полем  $\Theta(\varphi_b - \varphi) c (\sec \varphi)^2$ .

В заключении суммируются основные результаты настоящей работы.

## 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для построения фундаментальной системы решений ФСР  $\{\Phi_0^\pm\}$  уравнения (2) в малой полукрестности регулярной точки  $\varphi = 0$  положим в нем  $\Phi(\varphi) = \varphi^\sigma(1 + o(1))$ . Устремив  $\varphi$  к нулю, получим характеристическое уравнение  $\sigma(\sigma - 1) = 0$ . Его решениям  $\sigma = 1$  и  $\sigma = 0$  отвечают искомые функции  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_0^-$  с асимптотиками

$$\Phi_0^+(\varphi; p^2) \sim \varphi, \quad \Phi_0^-(\varphi; p^2) \sim \text{const} \neq 0, \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (5)$$

Чтобы найти ФСР  $\{\Phi^\pm\}$  исследуемого уравнения (2) в малой полукрестности его особой регулярной точки  $\varphi = \pi/2$ , удобно сначала положить  $s \equiv (\pi/2 - \varphi)$  и  $\Phi(\varphi) = v(s) = s^\sigma(1 + o(1))$ . Тогда получится характеристическое уравнение  $\sigma(\sigma - 1) = c$ . Его корням  $\sigma = 1/2 \pm \nu$ , где  $\nu \equiv \sqrt{c + 1/4}$ , соответствуют искомые решения  $\Phi^\pm$  с асимптотиками

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(\varphi; p^2) &\sim s^{1/2 \pm \nu}, \quad c \neq -1/4, \quad s \equiv (\pi/2 - \varphi) \rightarrow 0; \\ \Phi^+(\varphi; p^2) &\sim s^{1/2}, \quad \Phi^-(\varphi; p^2) \sim s^{1/2} \ln s, \quad c = -1/4, \quad s \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что обе ФСР  $\{\Phi_0^\pm\}$  и  $\{\Phi^\pm\}$  существуют не только вблизи точек  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ , но и на всем отрезке  $[0, \pi/2]$ . Тогда любое решение уравнения (2) можно представить на этом отрезке в виде линейных комбинаций с некоторыми коэффициентами  $A_0, B_0$  и  $A, B$ :

$$\Phi(\varphi; p^2) = A_0 \Phi_0^+(\varphi; p^2) - B_0 \Phi_0^-(\varphi; p^2) = A \Phi^+(\varphi; p^2) - B \Phi^-(\varphi; p^2). \quad (7)$$

Используя асимптотики (5) и (6), выберем из всех возможных решений (7) только решения, подчиненные условиям (3), т. е. равные нулю при  $\varphi = 0$  и при  $\varphi = \pi/2$ . Чтобы удовлетворить первому из них, в формуле  $\Phi = A_0 \Phi_0^+ - B_0 \Phi_0^-$  придется положить  $B_0 = 0$  и без потери общности можно выбрать  $A_0 = 1$ . Тогда получим  $\Phi = \Phi_0^+$  и  $\Phi \sim \varphi$  при  $\varphi \rightarrow 0$ . Второе из условий (3) порождает спектральное уравнение  $\Phi_0^+(\pi/2; p^2) = 0$ , определяющее допустимые собственные значения  $p^2$ . При использовании формулы  $\Phi = A \Phi^+ - B \Phi^-$  возможны два случая: при  $\varphi = \pi/2$  в нуль обращается только функция  $\Phi^+$  или же обе функции  $\Phi^\pm$ . В силу (6) первый случай имеет место при  $c \geq 0$ , когда  $\nu \geq 1/2$ , а второй при  $-1/4 < c < 0$ , когда  $\nu = \text{Re } \nu < 1/2$  и при  $c < -1/4$ , когда  $\nu = \text{Im } \nu = i|\nu|$ . Поэтому при  $c \geq 0$  следует положить  $A = 1$  и  $B = 0$ , тогда функция  $\Phi = \Phi^+$  будет равной нулю при  $\varphi = \pi/2$ , а спектр  $\{p^2\}$  определится уравнением  $\Phi^+(0; p^2) = 0$ .

Пусть теперь  $c < 0$ . Тогда любому наперед заданному  $p^2$  отвечает единственная собственная функция  $\Phi = A\Phi^+ - B\Phi^-$  с коэффициентами  $A = \Phi^-(0; p^2)$  и  $B = \Phi^+(0; p^2)$ . Функция  $\Phi = A\Phi^+ - B\Phi^-$  с наперед заданными  $A$  и  $B$  будет собственной тогда и только тогда, когда  $p^2$  является корнем уравнения  $\Phi^-(0; p^2)/\Phi^+(0; p^2) = A/B$ . В частности решение  $\Phi$  может совпадать с функцией  $\Phi^+$ , если  $A = 1, B = 0$ , и  $p^2$  — корень уравнения  $\Phi^+(0; p^2) = 0$ , или совпадать с функцией  $\Phi^-$ , если  $A = 0, B = -1$  и  $\Phi^-(0; p^2) = 0$ .

Как было показано, если фундаментальные решения  $\Phi_0^\pm$  и  $\Phi^\pm$  уравнения (2) существуют на всем отрезке  $[0, \pi/2]$ , то любое решение  $\Phi$  исследуемой задачи (1)–(3) имеет асимптотику  $\Phi \sim \varphi, \varphi \rightarrow 0$ , а все ее возможные и, вообще говоря, комплексные спектры  $\{p^2; \Phi\}$  определяются следующим образом. Если  $c \geq 0$ , то

$$\Phi^+(0; p^2) = 0, \quad \Phi(\varphi; p^2) = \Phi_0^+(\varphi; p^2) = A\Phi^+(\varphi; p^2) \quad (8)$$

и в силу (6) вблизи точки  $\varphi = \pi/2$  решение  $\Phi$  не осциллирует:

$$\Phi(\varphi) \sim s^{1/2+\nu}, \quad s \equiv (\pi/2 - \varphi) \rightarrow 0. \quad (9)$$

Если  $c < 0$ , то при любом заданном  $p^2$  имеется единственное решение

$$\Phi(\varphi; p^2) = A\Phi^+(\varphi; p^2) - B\Phi^-(\varphi; p^2), \quad A \equiv \Phi^-(0; p^2), \quad B \equiv \Phi^+(0; p^2). \quad (10)$$

В случае  $-1/4 \leq c < 0$  это решение имеет неосциллирующую асимптотику

$$\Phi(\varphi; p^2) \sim s^{1/2+\nu}(A - Bs^{-2\nu}), \quad \varphi \rightarrow \pi/2, \quad (11)$$

и неограниченные в точке  $\varphi = \pi/2$  производные, а в случае  $c < -1/4$ , когда  $\nu = i|\nu|$ , его асимптотика в пределе  $\varphi \rightarrow \pi/2$  быстро осциллирует:

$$\Phi(\varphi; p^2) \sim s^{1/2} [(A - B) \cos(|\nu| \ln s) + i(A + B) \sin(|\nu| \ln s)], \quad (12)$$

а производные не имеют определенных пределов при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ .

Продолжить анализ задачи (1)–(3) можно двумя способами: сначала найти точную или приближенную ФСР  $\{\Phi^\pm\}$  на всем отрезке  $[0, \pi/2]$ , а затем получить спектр по уже доказанным формулам (8)–(10), или же найти спектр, не прибегая к построению ФСР.

Первым способом в работе [10] сначала ФСР выражалась через ряды Гаусса  ${}_2F_1$ , а затем доказывалась следующая теорема существования.

**Теорема 1.** *Задача (1)–(3) при любом  $c \geq 0$  имеет только действительный, причем дискретный спектр:*

$$p_n^2(c) = \left(2n - \frac{1}{2} + \nu\right)^2, \quad \nu \equiv \sqrt{c + 1/4}, \quad (13)$$

$$\Phi(\varphi; p_n^2) = \sin \varphi (\cos \varphi)^{1/2+\nu} P_{n-1}^{(1/2, \nu)}(\cos 2\varphi), \quad n = 1, 2, \dots,$$

при любом  $c < 0$  и любом комплексном  $p^2$  существует единственная собственная функция  $\Phi(\varphi; p^2)$ , вычисляемая по формулам (10), в которых при  $c \neq m^2 - 1/4, m = 0, 1, \dots$ ,

$$\Phi^\pm(\varphi; p^2) = \sin \varphi (\cos \varphi)^{1/2\pm\nu} {}_2F_1(\alpha^\pm, \beta^\pm, 1 \pm \nu; \cos^2 \varphi), \quad (14)$$

$$\alpha^\pm \equiv \frac{3}{4} \pm \frac{\nu}{2} + \frac{p}{2}, \quad \beta^\pm \equiv \alpha^\pm - p;$$

$$\Phi^{\pm}(0; p^2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 \pm \nu)}{\Gamma(\alpha^{\pm}) \Gamma(\beta^{\pm})}. \quad (15)$$

Второй способ применяется в разд. 2, но только для определения действительного спектра  $\{p^2, \Phi\}$  при  $|p^2| \gg |c|$  и согласующихся с точными асимптотиками (5), (11) и (12) условиях

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi; p^2) &\sim \varphi, \quad \varphi \rightarrow 0; \\ \Phi(\varphi; p^2) &\sim s^{1/2} \operatorname{Re} [As^{\nu} + Bs^{-\nu}(1 + \delta_{4c, -1} \ln s)], \quad \varphi \rightarrow \pi/2. \end{aligned} \quad (16)$$

Этот же способ реализуется в разд. 3 и 4, но уже, вообще говоря, для приближенного вычисления собственной функции  $\Phi(\varphi; p^2)$ , отвечающей заранее заданному собственному значению  $p^2$ .

## 2. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ВКБ

Приступим к исследованию действительного спектра  $\{p^2, \Phi\}$  в пределе  $|p^2/c| \rightarrow \infty$ . Для этого применим известную версию [1] метода ВКБ [12], но, чтобы ВКБ-решение  $\Phi = \operatorname{Re} \Phi$  обладало правильной асимптотикой (16) при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , предварительно сделаем допустимую в рамках метода ВКБ замену  $c$  на  $\nu^2 \equiv c + 1/4$ .

Пусть  $\varphi_b$  — точка поворота, определяемая как действительный нуль модуля квазиимпульса  $q \equiv q(\varphi) = 0$ , а  $I(\varphi_b, \varphi)$  — интеграл от этого модуля:

$$q(\varphi) \equiv \left| p^2 - (\nu \sec \varphi)^2 \right|^{1/2}, \quad \varphi_b \equiv \arccos(\nu/p), \quad I(\varphi_b, \varphi) \equiv \int_{\varphi_b}^{\varphi} q(\varphi') d\varphi'. \quad (17)$$

Область изменения аргумента  $\varphi$ , где полная энергия  $p^2$  больше потенциальной энергии  $(\nu \sec \varphi)^2$ , называется классически разрешенной, оставшаяся область — классически запрещенной. Непрерывное на всем отрезке  $[0, \pi/2]$  ВКБ-решение, определенное в разрешенной области формулами

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \left( |I(\varphi_b, \varphi)| - \frac{\pi}{4} \right), \quad p^2 > (\nu \sec \varphi)^2, \quad (18)$$

при непрерывно дифференцируемом продолжении в запрещенную область принимает вид

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \exp(-|I(\varphi_b, \varphi)|), \quad p^2 < (\nu \sec \varphi)^2. \quad (19)$$

Так как интеграл  $I(\varphi, \varphi_b)$  сводится к табличному ([13, с. 219]) при любых  $\nu^2$  и  $p^2$ , то ВКБ-решение не трудно найти в явном виде. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай  $c \geq -1/4$  и  $p > 0$ . В этом случае  $\nu \geq 0$ . Разрешенная область — полуинтервал  $0 \leq \varphi < \varphi_b$ . В этой области

$$I(\varphi, \varphi_b) = \frac{\pi}{2}(p - \nu) + \nu \operatorname{arctg} \left( \frac{\nu}{q} \operatorname{tg} \varphi \right) - p \operatorname{arcsin} \frac{p \sin \varphi}{\sqrt{p^2 - \nu^2}},$$

а функция (18) равна нулю при  $\varphi = 0$  тогда и только тогда, когда параметр  $p$  совпадает с положительным корнем  $p_n$  соответствующего уравнения

$$I(0, \varphi_b) - \frac{\pi}{4} = \pi n - \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Согласно формулам (17)–(19) квадрату  $p^2 = p_n^2$  каждого такого корня

$$p_n^2 = p_n^2(c) = \left( 2n - \frac{1}{2} + \nu \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

в соответствующей разрешенной области  $0 \leq \varphi < \varphi_{bn} \equiv \arccos(\nu/p_n)$  отвечает единственная собственная функция

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{q}} \sin \left[ \nu \operatorname{arctg} \left( \frac{\nu}{q} \operatorname{tg} \varphi \right) - p \arcsin \frac{p \sin \varphi}{\sqrt{p^2 - \nu^2}} \right], \quad (21)$$

которая в запрещенной области  $\varphi_{bn} < \varphi \leq \pi/2$  становится функцией

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{Q(\varphi)}{2\sqrt{q}} \left( \frac{\sqrt{p^2 - \nu^2}}{p \sin \varphi + q \cos \varphi} \right)^p; \quad \Phi(\varphi; p^2) \sim (\cos \varphi)^{1/2+\nu}, \quad \varphi \rightarrow \pi/2. \quad (22)$$

Здесь и далее для сокращения записи используется функция  $Q$  такая, что

$$Q(\varphi) \equiv \left| \frac{|\nu| \operatorname{tg} \varphi - q}{|\nu| \operatorname{tg} \varphi + q} \right|^{|\nu|/2} < \infty, \quad \varphi \in [0, \pi/2]; \quad Q(\varphi) \sim (\cos \varphi)^{|\nu|}, \quad \varphi \rightarrow \pi/2, \quad (23)$$

а собственные значения (20) считаются элементами бесконечной и возрастающей по номеру  $n$  последовательности монотонно растущих функций аргумента  $c \geq -1/4$

$$\{p_n^2(c)\}_{n=1}^{\infty} : p_{n+1}^2(c) > p_n^2(c) > 4n^2, \quad p_n^2(c) > p_n^2(c'), \quad c > c', \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

*Случай*  $c \geq -1/4$ ,  $\nu \geq 0$ , но  $p^2 < 0$ . Этот случай классически запрещен: задача (1)–(3) не имеет ВКБ-решения, отличного от тривиального ( $\Phi \equiv 0$ ).

*Случай*  $c < -1/4$ ,  $\nu^2 < 0$  и  $p^2 > 0$ . Классически доступная область — весь отрезок  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Поэтому можно положить  $\varphi_b = 0$ , а вместо формул (18) и (19) на всем отрезке  $[0, \pi/2]$  использовать представление

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin [I(0, \varphi)], \quad I(0, \varphi) = -\ln Q(\varphi) + p \arcsin \frac{p \sin \varphi}{\sqrt{p^2 + |\nu|^2}}, \quad (25)$$

которое при любом  $p^2$  обеспечивает выполнение условий (3). Действительно,  $\Phi(0; p^2) = 0$ , и хотя из-за функции (23) интеграл  $I(0, \varphi)$  расходится при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , само решение  $\Phi$  в этом пределе, осциллируя, сходится к нулю:

$$\Phi(\varphi; p^2) \sim (\cos \varphi)^{1/2} \sin \left( |\nu| \ln \cos \varphi - |\nu| \ln \frac{2|\nu|}{\sqrt{p^2 + |\nu|^2}} - p \operatorname{arctg} \frac{p}{|\nu|} \right). \quad (26)$$

Случай  $c < -1/4$ ,  $\nu^2 < 0$  и  $p^2 < 0$ . В этом последнем из всех возможных случаев классически доступна область  $0 < \varphi_b < \varphi \leq \pi/2$ . В ней интеграл  $I(\varphi_b, \varphi)$  неограничен лишь при  $\varphi = \pi/2$ , но решение (18), вычисляемое как

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \left[ \ln Q(\varphi) + |p| \operatorname{arctg} \left( \frac{|p|}{q} \operatorname{tg} \varphi \right) + |p| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (27)$$

при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , осциллируя, сходится к нулю:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi; p^2) &\sim (\cos \varphi)^{1/2} \cos (|\nu| \ln \cos \varphi + \delta), \\ \delta &\equiv -|\nu| \ln \frac{2|\nu|}{\sqrt{|p^2| - |\nu^2|}} + |p| \operatorname{arctg} \frac{|p|}{|\nu|} + |p| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (28)$$

В запрещенной области  $0 \leq \varphi < \varphi_b$  интеграл  $I(\varphi_b, \varphi)$  и решение (19), т. е.

$$\Phi(\varphi; p^2) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \exp \left[ |\nu| \operatorname{arctg} \left( \frac{q}{|\nu|} \operatorname{ctg} \varphi \right) + |p| \operatorname{arctg} \left( \frac{q}{|p|} \operatorname{ctg} \varphi \right) \right], \quad (29)$$

ограничены, но, к сожалению, при  $\varphi = 0$  это решение отлично от нуля:

$$\Phi(\varphi; p^2) \sim \exp \left[ -\frac{|p|^2 + |\nu^2|}{\sqrt{|p^2| - |\nu^2|}} \varphi \right], \quad \varphi \rightarrow 0, \quad (30)$$

что наверно является следствием пренебрежения в использованной версии метода ВКБ слагаемыми порядка  $O(|p^{-3/2}|)$ .

*Выводы и физические следствия.* Как видно из формул (17)–(30), при  $|p^2/c| \ll 1$  действительный ВКБ-спектр  $\{p^2, \Phi\}$  задачи (1)–(3) обладает следующими качественными особенностями.

В случае  $c \geq -1/4$  имеется только дискретный спектр положительных собственных значений (20) со свойством (24). Отвечающие этому спектру собственные функции вычисляются по формулам (21), (22), имеют конечное число нулей на соответствующих полуинтервалах  $0 \leq \varphi < \varphi_{bn}$ , монотонно убывают при  $\varphi \rightarrow \pi/2$  на полуинтервалах  $\varphi_{bn} < \varphi \leq \pi/2$  и обладают требуемыми асимптотиками (16) с нулевым коэффициентом  $B$ . Стоит отметить, что при  $c \geq -1/4$  полученный в рамках приближения ВКБ спектр собственных значений (20) совпадает с точным действительным спектром собственных значений, вычисляемых по формулам (13) не только при  $c \geq 0$ , но и при  $c \in [-1/4, 0)$ .

В случае  $c < -1/4$ , когда  $\nu = i|\nu|$ , имеется сплошной положительный спектр: при любом ( $p^2 \gg |c|$ ) заданном  $p^2$  существует единственное решение (25), обладающее согласно (26) бесконечным счетным числом нулей, сгущающихся к точке  $\varphi = \pi/2$ , и точными асимптотиками (16).

В том же случае ( $c < -1/4$ ), но при любом  $p^2 < 0$  уравнение (2) имеет решение (27), (29), обладающее асимптотиками (28) и (30) и близкое к нулю при  $\varphi = 0$  в пределах точности использованной версии метода ВКБ. Это решение физически особо интересно, потому что при  $p^2 \rightarrow -\infty$  оно экспоненциально убывает в запрещенной области и, быстро осциллируя, локализуется в бесконечно малой окрестности  $\varphi_b < \varphi < \pi/2$  точки  $\varphi = \pi/2$ .

Из-за осцилляций вблизи точки  $\varphi = \pi/2$  плотность вероятности  $|\Phi|^2$ , кроме главного максимума, имеет справа от него бесконечно много убывающих при  $\varphi \rightarrow \pi/2$  максимумов. Положение главного максимума  $\varphi_0$  смещается при  $p^2 \rightarrow -\infty$  к точке  $\varphi = \pi/2$ , и плотность вероятности локализуется вблизи этой точки. Локализация плотности вероятности означает коллапс, т. е. падение или стягивание частицы в точку  $\varphi = \pi/2$  при  $p^2 = -\infty$ . Коллапс является особым состоянием, так как в нем энергия связи ( $-p^2$ ) частицы бесконечно велика и поэтому среднее расстояние между частицей и сингулярной точкой  $\varphi = \pi/2$  поля  $c(\sec \varphi)^2$  бесконечно мало. Рис. 1 иллюстрирует коллапс в случае  $c = -25/4 < -1/4$ .

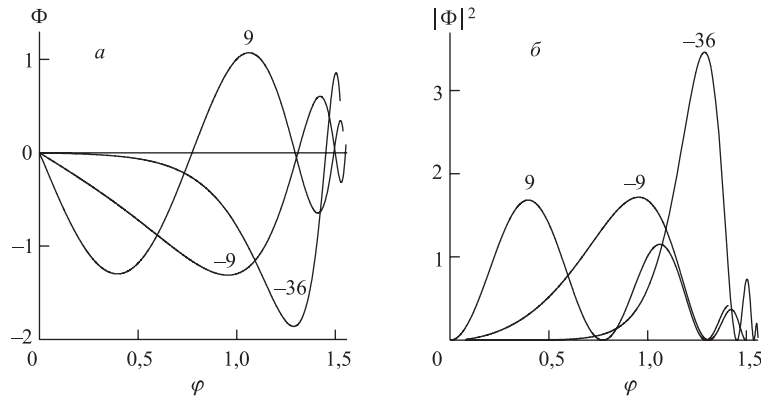


Рис. 1. Волновые функции  $\Phi(\varphi; p^2)$ , вычисленные по формулам (27), (29) и нормированные условием (4) (а), и соответствующие плотности вероятности  $|\Phi(\varphi; p^2)|^2$  (б) при  $c = -25/4$  и значениях энергии  $p^2$ , указанных цифрами над кривыми

### 3. АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШОЙ ПО МОДУЛЮ ЭНЕРГИИ

Ограничимся анализом физически наиболее интересного случая притягивающего ( $c < 0$ ) поля (1), когда при любом значении энергии  $p^2$  имеется соответствующая, причем единственная, волновая функция (10). Выведем для такой функции более простое асимптотическое при  $p^2 \rightarrow \pm\infty$  представление, чем исследованное выше ВКБ-приближение.

Как показано в [10], нормированная условием (4) волновая функция (10), но только на подмножестве  $[0, \varphi_b]$ ,  $\forall \varphi_b < \pi/2$ , всего отрезка  $[0, \pi/2]$  изменения ее аргумента, имеет асимптотику

$$\Phi(\varphi; p^2) = \Phi_{<}(\varphi; p^2) [1 + O(|p|^{-1})],$$

$$\Phi_{<}(\varphi; p^2) \equiv \begin{cases} (2/\sqrt{\pi}) \sin p\varphi, & p^2 \rightarrow +\infty, \\ 2|p| \exp[-|p|(\pi/2 - \varphi)], & p^2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi/2]. \quad (31)$$

Непрерывно дифференцируемое продолжение этой асимптотики на оставшийся отрезок  $[\varphi_b, \pi/2]$  — сумма  $\Phi_{>} = A\Phi^+ + B\Phi^-$ , коэффициенты которой  $A$  и  $B$  удовлетворяют



системе двух ( $n = 0, 1$ ) уравнений:

$$\partial_\varphi^n [\Phi_<(\varphi; p^2) - \Phi_>(\varphi; p^2)] = 0, \quad n = 0, 1, \quad \varphi = \varphi_b. \quad (32)$$

Эта система согласно принятой в квантовой механике [1] терминологии обычно называется условиями «сшивки» в точке  $\varphi = \varphi_b$  или условием непрерывности логарифмической производной ( $\partial_\varphi \Phi$ ) искомой функции  $\Phi$  в этой же точке. Если для функций  $\Phi^\pm$  использовать их точные представления (14), то для коэффициентов  $A$  и  $B$  получатся явные, но не столь простые для вычисления выражения через тригонометрические функции и ряды Гаусса.

Чтобы выразить коэффициенты  $A$  и  $B$  через элементарные функции, поступим следующим образом. Сначала выберем точку  $\varphi_b$  настолько близкой к точке  $\varphi = \pi/2$ , чтобы на отрезке  $[\varphi_b, \pi/2]$  функции  $\Phi^\pm$  можно было бы аппроксимировать старшими слагаемыми их асимптотик (6) при  $\varphi \rightarrow \pi/2$  с относительной точностью  $O(|p|^{-1})$  при  $|p| \rightarrow \infty$ . Затем, используя такое приближение, найдем  $A$  и  $B$  из условий «сшивки» и выпишем получившиеся представления искомой асимптотики  $\Phi_>$  функции  $\Phi$  на отрезке  $[\varphi_b, \pi/2]$ .

Для реализации намеченного плана положим

$$s \equiv \pi/2 - \varphi, \quad s_b \equiv \pi/2 - \varphi_b = g|p|^{-3/2},$$

где  $g$  — некоторая ненулевая действительная константа. Тогда согласно (14) при  $s < s_b$ , т. е. при  $\varphi > \varphi_b = \pi/2 - g|p|^{-3/2}$ , будут верны искомые аппроксимации

$$\Phi^\pm(\varphi; p^2) = s^{1/2 \pm \nu} [1 + O(|sp|^2)] = s^{1/2 \pm \nu} [1 + O(|p|^{-1})],$$

а асимптотики функции  $\Phi = \Phi_>$  на отрезке  $[\varphi_b, \pi/2]$  при  $p^2 \rightarrow \pm\infty$  представляются довольно простыми формулами. Приведем их.

Если  $p^2 \rightarrow \infty$ , то при  $c \in (-1/4, 0)$

$$\Phi_>(\varphi; p^2) = -\frac{\sin p\varphi_b}{2\nu\sqrt{\pi}} \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2+\nu} \left\{ [1 - 2\nu + \chi_b] - [1 + 2\nu + \chi_b] \left(\frac{s}{s_b}\right)^{-2\nu} \right\},$$

при  $c = -1/4$

$$\Phi_>(\varphi; p^2) = \frac{\sin p\varphi_b}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2} \left[ 2 - (1 + \chi_b/2) \ln \left(\frac{s}{s_b}\right) \right],$$

а при  $c < -1/4$

$$\Phi_>(\varphi; p^2) = -\frac{2 \sin p\varphi_b}{\sqrt{\pi} \sin \tau_b} \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2} \sin \left[ |\nu| \ln \left(\frac{s}{s_b}\right) - \text{arctg } \tau_b \right],$$

где  $\chi_b \equiv 2ps_b \text{ctg } p s_b$  и  $\tau_b \equiv 2|\nu|/(1 + \chi_b)$ .

Если же  $p^2 \rightarrow -\infty$ , то при  $c \in (-1/4, 0)$

$$\Phi_>(\varphi; p^2) = -\frac{|p|}{2\nu} \exp(-|p|\varphi_b) \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2+\nu} \left\{ [1 - 2\nu + \chi_b] - [1 + 2\nu + \chi_b] \left(\frac{s}{s_b}\right)^{-2\nu} \right\},$$

в случае  $c = -1/4$

$$\Phi_{>}(\varphi; p^2) = |p| \exp(-|p|\varphi_b) \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2} \left[ 2 - (1 + \chi_b/2) \ln\left(\frac{s}{s_b}\right) \right],$$

и, наконец, при  $c < -1/4$

$$\Phi_{>}(\varphi; p^2) = -\frac{2|p| \exp(-|p|\varphi_b)}{\sin \tau_b} \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2} \sin \left[ |\nu| \ln\left(\frac{s}{s_b}\right) - \arctg \tau_b \right],$$

где  $\chi_b \equiv 2|p|s_b$  и  $\tau_b \equiv 2|\nu|/(1 + \chi_b)$ .

#### 4. ФУРЬЕ-РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** Любое решение  $\Phi$  задачи (1)–(3) при  $c = b(b+1)$  и четном  $b$  представимо конечным ( $N < \infty$ ) рядом Фурье с коэффициентами  $X_n$ :

$$\Phi(\varphi; p^2) = \sum_{n=1}^N \alpha(n, p^2) X_n \sin 2n\varphi, \quad \alpha(n, p^2) \equiv \begin{cases} 1, & p^2 \neq 4n^2, \\ (n^2 - p^2/4)^{-1}, & p^2 = 4n^2, \end{cases} \quad (33)$$

а во всех остальных случаях — бесконечным ( $N = \infty$ ).

Приступим к доказательству. По теореме 1 функция  $\Phi$ , удовлетворяющая задаче (1)–(3), непрерывна на отрезке  $[0, \pi/2]$  и, следовательно, представима на этом отрезке рядом (33).

Пусть  $c = b(b+1)$ , где  $b = 2k$ , а  $k$  — выбранное целое число. Тогда по теореме 1 задача (1)–(3) при каждом  $n = 1, 2, \dots$  имеет единственное собственное значение  $p^2 = p_n^2 = (2n + b)^2 = 4m^2$ , где  $m$  — целое, и соответствующую ему собственную функцию  $\Phi(\varphi; p^2 = 4m^2)$ , выражающуюся через полином Якоби с полуцелыми верхними индексами:

$$\Phi(\varphi; p^2 = 4m^2) = \sin \varphi (\cos \varphi)^{b+1} P_{m-b/2-1}^{(1/2, b+1/2)}(\cos 2\varphi).$$

Заменив этот полином известной конечной суммой [11] по целым степеням его аргумента  $\cos 2\varphi$ , нетрудно показать, что  $\Phi(\varphi; p^2 = 4m^2)$  — конечная ( $N = m - 1 < \infty$ ) сумма Фурье (33):

$$\Phi(\varphi; p^2 = 4m^2) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{X_n}{n^2 - m^2} \sin 2n\varphi + X_m \sin 2m\varphi. \quad (34)$$

Пусть теперь  $c \neq b(b+1)$ , где  $b = 0, 2, 4, \dots$ . Тогда предположим, что разложение (33) функции  $\Phi$  — конечная ( $N < \infty$ ) сумма. Дифференцируя ее, имеем  $|\partial_\varphi^{2n} \Phi| = 0$  при  $\varphi = \pi/2$  и любом  $n = 0, 1, \dots$ . С другой стороны, из асимптотик (9) или (11), (12) следует, что  $|\partial_\varphi^{2n} \Phi(\varphi; p^2)| = \infty$ ,  $\varphi = \pi/2$ , в случае  $c \geq 0$  и  $2n > \nu + 1/2$  или в случае  $c < 0$  и  $n \geq 1$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть  $c$  и  $p^2$  заданы в соответствии с теоремой 1, т. е. при таких  $c$  и  $p^2$  решение  $\Phi$  существует. Тогда по теореме 1 оно единственное, а по теореме 2 представимо рядом Фурье (33). Выведем самые простые уравнения для вычисления коэффициентов  $X_n$ .

$n = 1, 2, \dots$ , этого ряда и опишем оптимальную последовательность решения таких уравнений в трех возможных случаях. Ключевыми для вывода будут исходное уравнение (2), умноженное на  $(\cos \varphi)^2$ , т. е. уравнение

$$[(\cos \varphi)^2 (\partial_\varphi^2 + p^2) - c] \Phi(\varphi; p^2) = 0, \quad (35)$$

и справедливые при любых  $\varphi$  и целых  $n$  тригонометрические тождества

$$4(\cos \varphi)^2 \sin 2n\varphi = \sin 2(n-1)\varphi + 2 \sin 2n\varphi + \sin 2(n+1)\varphi. \quad (36)$$

Случай  $c = b(b+1)$ ,  $b = 0, 2, \dots$ ,  $p^2 = 4m^2 = (2n+b)^2$ . По теореме 2 в этом случае  $\Phi$  — конечная сумма (34). Заменим  $\Phi$  в уравнении (35) этой суммой. Используя тождества (36), спроектируем полученное соотношение на все базисные функции  $\sin 2n\varphi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Выведенные таким образом линейные уравнения для искомых коэффициентов  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$ , представим совокупностью однородного матричного уравнения  $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  для столбца  $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, \dots, X_{m-1})^T$  и равенства  $X_m = -X_{m-1}/(4)$ , определяющего коэффициент  $X_m$  через коэффициент  $X_{m-1}$ . Так как матрица  $\mathbf{A}$  трехдиагональная, а все ее ненулевые элементы вычисляются по элементарным формулам

$$A_{n,n\pm 1} = 1, \quad A_{nn} = 2 + c/(n^2 - p^2/4), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

то все коэффициенты  $X_2, \dots, X_{m-1}$ , а затем и  $X_m$  можно последовательно и однозначно выразить через один коэффициент  $X_1$ , который для упрощения вычислений удобно принять равным единице.

Случай  $c \neq b(b+1)$ ,  $p^2 \neq 4m^2$ , где  $b = 0, 2, 4, \dots$ , а  $m = 1, 2, \dots$ . По теореме 2 искомым ряд (33) бесконечный ( $N = \infty$ ). Уравнение (35) тем же способом, что и в рассмотренном выше случае, сведем к одному матричному уравнению  $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ , но теперь для бесконечного столбца  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)^T$ . В этом уравнении  $\mathbf{A}$  — трехдиагональная матрица с ненулевыми элементами (37). Поэтому все коэффициенты  $X_n$  с  $n \geq 2$  можно последовательно выразить через один коэффициент  $X_1$ .

Случай  $c < 0$ ,  $p^2 = 4m^2$ , где  $m = 1, 2, \dots$ . По теореме 2 искомым ряд (33) — бесконечный ( $N = \infty$ ). Поэтому, как и в предыдущем случае, матричный аналог уравнения (35) — уравнение  $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  для бесконечного столбца  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)^T$ , но теперь из-за равенства  $p^2 = 4m^2$  элементы  $A_{m\pm 1, m}$  матрицы  $\mathbf{A}$  равны нулю. Поэтому уравнение  $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  расщепляется на два матричных уравнения  $\mathbf{A}^- \mathbf{X}^- = 0$  и  $\mathbf{A}^+ \mathbf{X}^+ = 0$  для конечного и бесконечного столбцов  $\mathbf{X}^- = (X_1, \dots, X_{m-1})^T$  и  $\mathbf{X}^+ = (X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)^T$  и соотношение  $X_{m+1} = -4cX_m - X_{m-1}$ . Элементы трехдиагональных матриц  $\mathbf{A}^\pm$  связаны с элементами (37) матрицы  $\mathbf{A}$  формулами  $A_{nn'}^- = A_{nn'}$ ,  $n \leq m$  и  $A_{n-m, n'-m}^+ = A_{nn'}$ ,  $n \geq m+1$ , в которых  $n' = n, n \pm 1$ . Все коэффициенты  $X_n$ ,  $n = 2, 3, \dots, m-1$ , в том числе и коэффициент  $X_{m-1}$ , последовательно выражаются из уравнения  $\mathbf{A}^- \mathbf{X}^- = 0$  через один заданный коэффициент  $X_1$ . Затем коэффициент  $X_m$  считается известным и только потом коэффициент  $X_{m+1}$  определяется равенством  $X_{m+1} = -(X_{m-1} + 4cX_m)$ . Далее все коэффициенты  $X_n$  с  $n > m+1$  последовательно выражаются из уравнения  $\mathbf{A}^+ \mathbf{X}^+ = 0$  через коэффициент  $X_{m+1}$ .

Как было показано, если  $c$  и  $p^2$  заданы, то за исключением последнего и особого случая ( $c < 0$ ,  $p^2 = 4m^2$ ) все коэффициенты фурье-разложения (33) волновой функции  $\Phi$  однозначно выражаются через коэффициент  $X_1$ , а в этом особом случае — через коэффициенты  $X_1$  и  $X_m$ .

Пусть теперь задано некоторое положительное значение параметра  $c$  и требуется найти приближенное значение  $\tilde{p}_n^2(c)$  собственного числа  $p_n^2(c)$  и соответствующее приближение  $\tilde{\Phi}(\varphi; \tilde{p}_n^2)$  точной собственной функции  $\Phi(\varphi; p_n^2)$ . Рассмотрим наиболее общий случай  $c \neq b(b+1)$ ,  $b = 0, 2, 4 \dots$ , когда искомая функция  $\Phi$  представляется бесконечным ( $N = \infty$ ) рядом Фурье (33). Ее приближение  $\tilde{\Phi}$  будем искать в виде конечной суммы

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{X}_n}{n^2 - p^2/4} \sin 2n\varphi, \quad N < \infty. \quad (38)$$

Заменяем функцию  $\tilde{\Phi}$  этой суммой в уравнении (35). Полученное уравнение сведем к матричному и однородному уравнению  $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}} = 0$ , в котором  $\mathbf{A}$  — трехдиагональная матрица с зависящими от  $p^2$  ненулевыми элементами (37), а  $\tilde{\mathbf{X}} \equiv (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_N)^T$  — столбец искомых коэффициентов. Исследуемое уравнение  $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}} = 0$  имеет нетривиальное решение  $\tilde{\mathbf{X}}$  тогда и только тогда, когда  $p^2$  — нуль  $\tilde{p}_k^2$  детерминанта ( $\det \mathbf{A}$ ) матрицы  $\mathbf{A}$ . Так как  $\mathbf{A}$  — матрица Якоби [14], то все такие нули  $\tilde{p}_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , простые, и каждому из них отвечает только один вектор-столбец  $\tilde{\mathbf{X}}^k$ . Поэтому, подставив в уравнение  $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{X}} = 0$  вместо  $p^2$  найденное значение  $\tilde{p}_k^2$  нуля детерминанта  $\det \mathbf{A}$  и положив  $\tilde{X}_1 = 1$ , можно последовательно и однозначно вычислить все остальные коэффициенты  $\tilde{X}_n$ ,  $n \geq 2$ , а затем, используя эти значения, найти и соответствующую приближенную функцию  $\tilde{\Phi}(\varphi; \tilde{p}_k^2)$  как сумму (38), в которой  $p^2 = \tilde{p}_k^2$ .

Для примера, подтверждающего сходимость описанного способа, сначала как нуль детерминанта  $\det \mathbf{A}$  определялось приближение  $\tilde{p}_1^2(c)$  первого точного собственного значения  $p_1^2(c) = (3/2 + \nu)^2$  при разных значениях параметра  $c$  и верхнего индекса  $N$  суммы (38), а затем вычислялась наиболее удобная для графической иллюстрации характеристика  $\chi(p_1^2(c), N)$  относительной точности приближения  $p_1^2(c) \approx \tilde{p}_1^2(c)$ , определенная как функция целого аргумента  $N$  и параметра  $c$ :

$$\chi(p_1^2(c), N) \equiv \log |\tilde{p}_1^2(c)/p_1^2(c) - 1|. \quad (39)$$

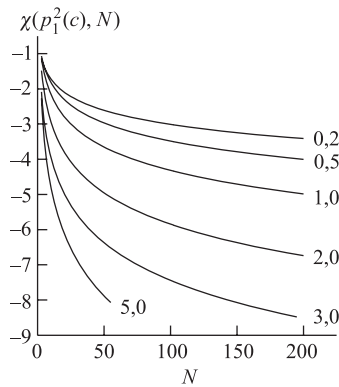


Рис. 2. Десятичный логарифм (39) относительной точности аппроксимации  $p_1^2(c) \approx \tilde{p}_1^2(c)$  собственного значения  $p_1^2(c)$  как функция верхнего индекса  $N$  суммы (38) при значениях параметра  $c$ , указанных цифрами у кривых

Графики этой функции при разных значениях параметра  $c$  изображены на рис. 2. Как видно, относительная точность приближения  $p_1^2(c) \approx \tilde{p}_1^2(c)$  быстро улучшается с ростом  $c$  и  $N$ .

## 5. СЛУЧАЙ «ОБРЕЗАННОГО» ПОЛЯ

В исследуемой задаче (1)–(3) об энергетическом спектре  $\{p^2(c)\}$  частицы в поле  $c(\sec \varphi)^2$  заменим это поле «обрезанным» в некоторой точке  $\varphi = \varphi_b$ , близкой к точке  $\varphi = \pi/2$ , полем  $\Theta(\varphi_b - \varphi)c(\sec \varphi)^2$ . Последнее из трех условий (3) ослабим, но только в точке  $\varphi = \varphi_b$ : в этой точке первая производная искомой функции  $\Phi(\varphi; p^2(c; \varphi_b))$  должна быть непрерывной, а вторая может иметь разрыв первого рода. Исследуем зависимость действительного спектра  $\{p^2(c; \varphi_b)\}$  сформулированной задачи от аргумента  $c$  и параметра  $\varphi_b$  при  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ , когда «обрезанное» поле сходится к исходному. Для сокращения записи полагаем  $s \equiv \pi/2 - \varphi$  и  $s_b \equiv \pi/2 - \varphi_b$ . При  $\varphi > \varphi_b$ , т. е. при  $s \leq s_b$ , используем точное решение  $\Phi = \Phi_> \equiv \sin ps/p$ , непрерывное по  $p$  в точке  $p = 0$  и равное  $s$  при  $p = 0$  и  $\text{sh } |p|s/|p|$  при  $p^2 < 0$ , когда  $p = i|p|$ . При  $\varphi \leq \varphi_b$ , т. е. при  $s \geq s_b$ , решение  $\Phi$  будем искать в общем виде  $\Phi = \Phi_< \equiv A\Phi^+ - B\Phi^-$ . При достаточно малых  $s$  и  $s_b$  и ограниченном  $|p|$ , используя асимптотики (6) и явные представления (14) функций  $\Phi^\pm$ , представим искомую функцию  $\Phi_<$  в асимптотическом виде

$$\Phi_<(\varphi; p^2) = s^{1/2} [1 + O((sp)^2)] \begin{cases} (As^\nu - Bs^{-\nu}), & c \neq -1/4, \\ (A - B \ln s), & c = -1/4. \end{cases} \quad (40)$$

Сначала из условий «сшивки» (32) определим отношение  $\alpha = B/A$  и коэффициенты  $A$  и  $B$  как функции аргумента  $p^2$  и параметра  $\varphi_b$ . Затем найдем те значения  $p^2$ , при которых функция  $\Phi = \Phi_<$  удовлетворяет первому из трех условий (3), т. е. обращается в нуль при  $\varphi = 0$ .

Пусть  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ , но  $|p| < \infty$ . Тогда  $s_b \rightarrow 0$ ,  $|p|s_b \rightarrow 0$  и поэтому искомую функцию  $\Phi_<$  можно заменить в условиях «сшивки» (32) ее асимптотикой (40). Разрешив полученные в результате такой замены уравнения относительно  $A$  и  $B$  и положив для краткости записи  $\chi_b \equiv 2ps_b \text{ctg } ps_b$ , находим

$$\alpha \sim \frac{\chi_b - 1 - 2\nu}{\chi_b + 2\nu - 1} s_b^{2\nu}, \quad c \neq -1/4; \quad \alpha \sim \frac{1 - \chi_b}{2 + (1 - \chi_b) \ln s_b}, \quad c = -1/4. \quad (41)$$

Рассмотрим два возможных случая.

*Случай*  $c \geq -1/4$ ,  $\nu \geq 0$ . Из (41) следует, что  $\alpha = B/A \rightarrow 0$  при  $s_b \rightarrow 0$ , т. е. при  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ . Поэтому функция  $\Phi_<$  сходится при любом  $\varphi \in [0, \pi/2]$  и  $p^2$  к фундаментальному решению  $A\Phi^+$ , которое равно нулю в точке  $\varphi = 0$ , только если  $p^2$  — корень уравнения  $\Phi^+(0; p^2) = 0$ . Как известно [10], это уравнение имеет только действительные корни  $p^2 = p_n^2(c)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определенные формулами (13). Значит при  $c \geq -1/4$  и  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$  спектр  $\{p^2(c; \varphi_b)\}$  является дискретным и сходится к точному дискретному спектру  $\{p_n^2(c)\}_{n=1}^\infty$ , а каждая собственная функция  $\Phi_<(\varphi; p_n^2(c; \varphi_b))$  сходится к соответствующей точной функции  $\Phi = \Phi^+(\varphi; p_n^2(c))$  на всем отрезке  $[0, \varphi_b]$ . Стоит отметить, что такой предельный действительный спектр  $\{p_n^2, \Phi(\varphi, p_n^2)\}_{n=1}^\infty$  вычисляется по формулам (13) не только при  $c > 0$ , но и при  $c \in [-1/4, 0]$ .

Случай  $c < -1/4$ . Так как теперь  $\nu = i|\nu|$ , то в силу (41) отношение  $\alpha = B/A$  не имеет определенного предела при  $s_b \rightarrow 0$ , т. е. при  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ . Поэтому, в отличие от рассмотренного выше случая, искомая функция  $\Phi_{<} = A\Phi^+ - B\Phi^-$  всегда содержит оба фундаментальных решения  $\Phi^\pm$  и в силу (40) и (41) имеет быстро осциллирующую асимптотику

$$\Phi_{<}(\varphi; p^2) = \frac{1}{p} \frac{\sin ps_b}{\sin(\operatorname{arctg} 2|\nu|)} \left(\frac{s}{s_b}\right)^{1/2} \sin(|\nu| \ln s - \delta) [1 + O((s|p|)^2)], \quad (42)$$

$$\delta \equiv |\nu| \ln s_b - \operatorname{arctg}[(\chi_b - 1)/(2|\nu|)], \quad \varphi \rightarrow \varphi_b - 0 \approx \pi/2.$$

Условие  $\Phi_{<}(\varphi = 0; p^2) = 0$  выполняется только, если

$$\alpha \equiv B/A = \Phi^-(0; p^2)/\Phi^+(0; p^2).$$

Заменив в этом соотношении  $\Phi^\pm(0; p^2)$  и  $\alpha$  их представлениями (15) и (41), получим уравнение

$$\arg \Gamma(3/4 + i|\nu|/2 + p/2) + \arg \Gamma(3/4 + i|\nu|/2 - p/2) + \operatorname{arctg}[(2ps_b \operatorname{ctg} ps_b - 1)/(2|\nu|)] = |\nu| \ln s_b - \arg \Gamma(1 - i|\nu|) + 2\pi n, \quad (43)$$

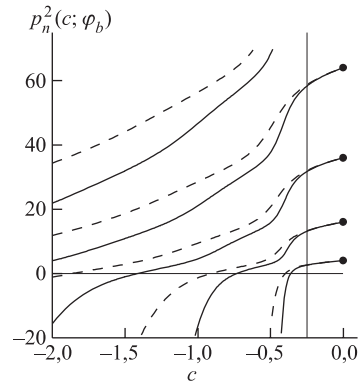
определяющее неявным образом  $p(c; \varphi_b)$  как функцию аргумента  $c$ , параметра  $\varphi_b$  и целого числа  $n$ . Если при данном  $n$  это уравнение разрешимо, то по известной теореме [15] о неявных функциях его решение  $p \equiv p_n(c; s_b)$  единственное и является функцией, непрерывной по  $c$  и  $\varphi_b$ . В силу известной формулы [11]

$$\arg \Gamma(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} [y/(x + n) - \operatorname{arctg}(y/x)]$$

при данном  $c$  и  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$  число действительных решений ( $p_n^2 > 0$ ) не ограничено сверху, но число чисто мнимых решений ( $p_n^2 < 0$ ) всегда конечно,  $p_{n+1}^2(c; \varphi_b) > p_n^2(c; \varphi_b)$ , квадрат  $p_n^2(c; \varphi_b)$  каждого решения имеет единственный нуль  $c_n(\varphi_b)$ , сходящийся к точке  $c = -1/4$  слева при  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ , по закону

$$c_n(\varphi_b) \approx -\frac{1}{4} + \frac{2\pi n}{\ln(\pi/2 - \varphi_b)}, \quad \varphi_b \rightarrow \pi/2.$$

Рис. 3. Собственные значения в «обрезанном» в точке  $\varphi_b = \pi/2 - s_b$  поле (1): сплошные кривые — при  $s_b = (\pi/2)/999$ ; штриховые — при  $s_b = (\pi/2)/300$ ; тонкие сплошные горизонтальная и вертикальная линии — прямые  $p^2 = 0$  и  $c = -1/4$ ; • обозначает точку с координатами  $c = 0$  и  $p_n^2 = (2n)^2$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$



Указанная закономерность поясняется рис. 3, на котором изображены вычисленные как корни уравнения (43) собственные значения  $p_n^2(c; \varphi_b)$  при  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $c \in [-2, 0]$  в случае  $s_b = (\pi/2)/300$  и в случае  $s_b = (\pi/2)/999$ . Рис. 3 иллюстрирует еще одну закономерность: при данных  $n$  и  $c$  полная энергия  $p_n^2(c; \varphi_b)$  частицы в «обрезанном» поле уменьшается при  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ .

Как было показано, при  $c < -1/4$  и любом  $\varphi_b \neq \pi/2$  в «обрезанном» поле частица имеет действительный, дискретный спектр энергий, а согласно (42) число нулей ее волновой функции  $\Phi = \Phi_>$ , расположенных слева от точки  $\varphi = \varphi_b$ , неограниченно возрастает при  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$ . По известной осцилляционной теореме [15] волновая функция основного состояния дискретного спектра, когда  $p^2$  минимальное, вовсе не имеет нулей, что возможно только в пределе  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$  и при ее энергии  $p^2 = -\infty$ . Частица с такой энергией локализована в точке  $\varphi = \pi/2$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты работы.

Поставленная во введении задача полностью решена: для любого действительного параметра  $c$  сингулярного поля  $c(\sec \varphi)^2$  предложены и проиллюстрированы три довольно простых способа вычисления приближенных действительных и больших по модулю собственных значений  $p^2$  и соответствующих собственных функций  $\Phi$  исходной однородной краевой задачи Шредингера (1)–(3). Первый способ — описанное в разд. 2 приближение ВКБ, второй способ основан на элементарных асимптотических формулах, приведенных в разд. 3, третий способ представлен в разд. 4 и реализуется решением систем линейных уравнений с трехдиагональными матрицами Якоби и последующим вычислением сумм Фурье.

Перечислим главные физические следствия выполненных исследований.

В рамках известной версии метода ВКБ в поле  $c(\sec \varphi)^2$  при  $c > -1/4$  частица имеет только действительный, дискретный, не ограниченный сверху и ограниченный снизу величиной  $p_1^2(c) = (3/2 + \nu)^2$  энергетический спектр, совпадающий с точным спектром, а условие  $c < -1/4$  является достаточным для коллапса частицы в сингулярную точку  $\varphi = \pi/2$  поля, при таком условии в пределе  $p^2 \rightarrow -\infty$  волновая функция частицы, быстро осциллируя, локализуется вблизи этой точки.

В любом «обрезанном» поле  $\Theta(\varphi_b - \varphi) c(\sec \varphi)^2$ ,  $\varphi_b \neq \pi/2$ , частица имеет действительный, дискретный, не ограниченный сверху и ограниченный снизу величиной  $p_1^2(c; \varphi_b)$  энергетический спектр, при  $c \geq -1/4$  и  $\varphi_b \rightarrow \pi/2$  этот спектр сходится к точному спектру в поле  $c(\sec \varphi)^2$ , ни при каких  $c$  и  $\varphi_b \neq \pi/2$  значение  $p^2 = -\infty$  не достижимо и коллапс частицы не возможен.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М: Наука, 1974.
2. Йоргенс К., Вайдман И. Спектральные свойства гамильтоновых операторов. М.: Мир, 1976.
3. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

4. *Avishai Y.* // J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1491.
5. *Puryshev V. V.* // Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 151.
6. *Пурышев В. В.* // ТМФ. 2001. Т. 128. С. 268.
7. *Пурышев В. В.* // ЯФ. 2003. Т. 66. С. 64.
8. *Puryshev V. V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. L13.
9. *Puryshev V. V.* // Book of Abstr. of Intern. Conf. «Kolmogorov and Contemporary Mathematics», Moscow, June 16–21, 2003. M., P. 222.
10. *Пурышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35. С. 257.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2.
12. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
14. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
15. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 3. Ч. 2.

Получено 18 ноября 2004 г.