

ФРАКТАЛЬНЫЕ ДИФфуЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ФИЗИКЕ ЧАСТИЦ

А. В. Моисеенко¹, Ф. М. Сергеев

Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Москва

Анализировались ряды последовательных измерений кинематических переменных для реакций дифракционного рождения пионов пионами при начальных импульсах около 4 ГэВ/с: $\pi p^+ + p \rightarrow p + 2\pi p^+ + \pi p^-$ и $\pi p^- + p \rightarrow p + 2\pi p^- + \pi p^+$. Анализ методом Херста показал наличие эффекта памяти для обоих массивов данных. Оказалось, что распределения плотности переходной вероятности стремятся к равновесному виду, характерному для фрактального броуновского движения (ФБД). Процесс может быть описан уравнением специальной диффузии вида уравнения Фоккера–Планка (УФП). Полученные значения показателя Херста $0,5 < H < 1$, входящего в УФП в качестве параметра, означают, что исследованные процессы осуществляются во фрактальном обобщенном фазовом пространстве с дробной размерностью.

The rows of consistent measurements of kinematic variables for diffraction pi-meson by pi-meson birth reactions with an initial momentum about 4 GeV/c were analyzed: $\pi p^+ + p \rightarrow p + 2\pi p^+ + \pi p^-$ and $\pi p^- + p \rightarrow p + 2\pi p^- + \pi p^+$. The Hursts method analysis discovered the presence of the memory effect for both data arrays. It appeared that the distributions of the transitional probability density limit to some equilibrium shape, characteristic for the fractal Brownian motion (FBM). The process can be defined by the special diffusion Fokker–Planck equation (FPE). The obtained values of Hursts coefficient $0.5 < H < 1$, which is a parameter of FPE, mean the processes explored are realized in fractal phase space with fractional dimension.

PACS: 30.60.Le
64.60.Ak

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно обсуждается вопрос о принципиально стохастическом характере динамики микроскопических взаимодействий. Появляются новые экспериментальные и теоретические данные, указывающие на такую возможность. В частности, важным свидетельством в этом отношении являются фрактальные структуры, обнаруживаемые в обобщенном фазовом пространстве конкретных процессов [1–4]. В данной работе получены новые результаты, относящиеся к области сильных взаимодействий промежуточных энергий.

Ранее нами [5–7] было обнаружено, что в экспериментальных рядах измерений кинематических переменных некоторых адрон-адронных и адрон-ядерных реакций присутствуют корреляции последующих измерений с предыдущими. Последующие проверки

¹E-mail: alexander1981@bk.ru

и уточнения на расширенном статистическом материале подтвердили предварительные выводы.

Ниже приводятся данные исследований реакций дифракционного неупругого рассеяния π^\pm -мезонов на протонах при промежуточных энергиях:



и



Экспериментальный материал был получен на пузырьковых камерах ИТЭФ и ЦЕРН, экспонированных в пучках π^+ - и π^- -мезонов с импульсами 4,2 и 3,91 ГэВ/с соответственно.

В качестве характеристики каждого события (функции его порядкового номера) были выбраны следующие величины, которые, как представляется, наилучшим образом отражают динамику процесса:

1. Разность наибольшего и наименьшего значений кумулятивного числа для частиц определенного сорта в событии $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$; в данном случае $\alpha = \frac{E - p_{\parallel}}{m_p}$, где E , p_{\parallel} — энергия, продольный импульс частицы; m_p — масса протона.

2. Максимальное значение поперечного импульса для частиц данного сорта в событии P_t^{\max} .

3. Квадрат разности наибольшего и наименьшего значений четырехмерных скоростей $U = P/m$ частиц в событии $b_{\min}^{\max} = -(U_{\max} - U_{\min})^2$.

4. Разность наибольшего и наименьшего значений быстрот для частиц определенного сорта в событии: $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$, $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}} \right)$.

Статистика последовательно нумеровалась и полученные числовые ряды исследовались методом нормированного размаха [8], проводился расчет постоянной Херста H . В табл. 1 приведены результаты.

Таблица 1. Значения постоянных Херста H , $2H$, а также размерностей Минковского D и коэффициентов автокорреляции для оригинальной (C) и перемешанной (C') статистики для реакции (1) — 13412 события и (2) — 35972 события

Реакция	Величина	$\Delta\alpha$	P_t^{\max}	b_{\min}^{\max}	Δy
(1)	$H \pm \Delta H$	$0,580 \pm 0,002$	$0,575 \pm 0,001$	$0,585 \pm 0,002$	$0,600 \pm 0,003$
(2)	$H \pm \Delta H$	$0,657 \pm 0,007$	$0,708 \pm 0,009$	$0,621 \pm 0,003$	$0,670 \pm 0,007$
(1)	$D \pm \Delta D$	$1,41 \pm 0,04$	$1,42 \pm 0,05$	$1,42 \pm 0,05$	$1,40 \pm 0,04$
(2)	$D \pm \Delta D$	$1,29 \pm 0,05$	$1,27 \pm 0,05$	$1,35 \pm 0,04$	$1,37 \pm 0,05$
(1)	$2 - H$	$1,420 \pm 0,002$	$1,425 \pm 0,001$	$1,415 \pm 0,002$	$1,400 \pm 0,003$
(2)	$2 - H$	$1,343 \pm 0,007$	$1,292 \pm 0,009$	$1,379 \pm 0,003$	$1,330 \pm 0,007$
(1)	$C \pm \Delta C$	$0,010 \pm 0,002$	$0,011 \pm 0,003$	$0,012 \pm 0,004$	$0,012 \pm 0,003$
(2)	$C \pm \Delta C$	$0,011 \pm 0,003$	$0,018 \pm 0,005$	$0,015 \pm 0,004$	$0,011 \pm 0,003$
(1)	$C' \pm \Delta C'$	$0,004 \pm 0,002$	$0,001 \pm 0,002$	$0,002 \pm 0,003$	$0,005 \pm 0,003$
(2)	$C' \pm \Delta C'$	$0,003 \pm 0,002$	$0,006 \pm 0,004$	$0,005 \pm 0,003$	$0,003 \pm 0,002$

Значительное отклонение H от 0,5 свидетельствует о наличии корреляций, эффекта памяти в исследуемой статистике [8, 9]. Это подтверждается рассчитанными значениями фрактальной размерности Минковского D для графиков накопленного отклонения — во всех случаях она оказывается меньше чем 1,5 и в пределах погрешностей $D = 2 - H$. Кроме того, расчет стандартного коэффициента автокорреляции C (между оригинальным рядом и смещенным на одну позицию) подтверждает наличие корреляции в статистике. Если данные перемешать случайным образом, то он (C') оказывается значительно меньше.

Важным шагом на пути поиска способа теоретического описания обнаруженного эффекта очевидно может послужить определение вида стохастических дифференциальных уравнений для распределений вероятности ρ , описывающих исследуемые процессы. Для произвольного «истинного» ρ естественным способом решения этой задачи может послужить обращение к обобщенной центральной предельной теореме. Согласно ей [8], распределение суммы независимых, но коррелированных случайных величин со временем приближается к распределению для фрактального броуновского движения (ФБД).

Как известно, в случае одномерного ФБД единичные приращения обобщенной координаты частицы (Δx_i) распределены по Гауссу. Тогда плотность распределения приращения координаты ($X = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_N$) за промежуток времени $(t - t_0)$ имеет вид нормального распределения с дисперсией $D = \sigma^2(t - t_0)^{2H}$, где параметр H совпадает с постоянной Херста, характеризующей степень корреляций, а σ — постоянная.

Задача, рассматриваемая в данной работе, по существу относится к статистическим задачам теории случайных процессов. По определению — это раздел математической статистики, позволяющий извлекать вероятностные, статистические выводы из наблюдений, представленных в виде случайного процесса. Таким образом, используемый в нашей работе подход к ряду результатов последовательных измерений, как к случайному процессу, является вполне корректным с математической точки зрения.

Представляется, что такой подход имеет право на существование и при исследовании микроскопических процессов наряду с «привычным анализом» на основе физических теорий, идущих от физического механизма явления, и даже имеет всеобщий характер [10]. И вообще, как это является обычным в физических исследованиях, будем считать все требования математической строгости выполненными.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе приводятся результаты исследования сходимости рядов данных для реакций (1) и (2) (для которых ранее определенные постоянные H оказались выше 0,5) к фрактальному броуновскому движению (ФБД). Рассмотрена динамика распределения сумм переменных $\Delta\alpha$, P_t^{\max} , b_{\min}^{\max} , Δy [5] для N следующих друг за другом независимых событий, например $P_{t1}^{\max} + P_{t2}^{\max} + \dots + P_{tN}^{\max}$. Очевидно, что N пропорционально времени, прошедшему с начала проведения эксперимента. Таким образом, каждое отдельное значение каждой исследуемой переменной мы представляем как приращение некоторой обобщенной координаты.

В приведенных ниже таблицах даны значения полученных коэффициентов достоверности (χ^2/n) для проверки соответствия экспериментальных распределений с N от 2 до

16 нормальным распределением, обладающим дисперсией и математическим ожиданием, равными экспериментальным, а также математические ожидания распределений M .

Таблица 2. Реакция (1). χ^2/n — значения коэффициентов достоверности для проверки соответствия экспериментальных распределений нормальному, M — величина математических ожиданий

N	Величина	$\Delta\alpha$	P_t^{\max}	b_{\min}^{\max}	Δy
2	χ^2/n	22 ± 2	10 ± 1	38 ± 3	$8,0 \pm 0,8$
	M	0,28	0,87	320	2,8
4	χ^2/n	$5,2 \pm 0,8$	$2,0 \pm 0,5$	$5,3 \pm 0,7$	$2,1 \pm 0,4$
	M	0,57	1,7	640	5,7
8	χ^2/n	$2,8 \pm 0,7$	$1,7 \pm 0,3$	$2,1 \pm 0,6$	$1,5 \pm 0,5$
	M	1,1	3,5	1280	11,4
16	χ^2/n	$1,6 \pm 0,4$	$1,4 \pm 0,5$	$1,4 \pm 0,5$	$1,0 \pm 0,4$
	M	2,3	7,0	2560	23

Представление о динамике распределения сумм переменных $\Delta\alpha$, P_t^{\max} , b_{\min}^{\max} , Δy можно получить из рис. 1, 2.

Таблица 3. Реакция (2). χ^2/n — значения коэффициентов достоверности для проверки соответствия экспериментальных распределений нормальному, M — величина математических ожиданий

N	Величина	$\Delta\alpha$	P_t^{\max}	b_{\min}^{\max}	Δy
2	χ^2/n	63 ± 7	13 ± 1	113 ± 12	26 ± 2
	M	0,27	0,90	251	2,6
4	χ^2/n	17 ± 2	$3,0 \pm 0,6$	19 ± 2	$6,0 \pm 1,0$
	M	0,54	1,8	50	5,1
8	χ^2/n	$3,6 \pm 0,5$	$1,5 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,8$	$2,3 \pm 0,5$
	M	1,1	3,6	100	10,3
16	χ^2/n	$1,3 \pm 0,5$	$2,0 \pm 0,5$	$1,7 \pm 0,4$	$1,7 \pm 0,3$
	M	2,1	7,1	2005	20,6

Представление о динамике распределения сумм переменных $\Delta\alpha$, P_t^{\max} , b_{\min}^{\max} , Δy можно получить из рис. 3, 4.

Из приведенных таблиц и рисунков хорошо видна сходимость экспериментальных распределений к распределению Гаусса, среднее которого сдвигается («сносится») с ростом времени.

Исследовалась также зависимость дисперсии для экспериментальных распределений от времени. Ее экспериментальное значение сравнивалось с помощью метода наименьших

квадратов с дисперсией для фрактального броуновского движения, которая определяется следующей формулой:

$$D = \sigma^2(t - t_0)^{2H},$$

и соответственно

$$\ln(D) = a + b \ln(t - t_0),$$

где $a = 2 \ln(\sigma)$ и $b = 2H$. Ниже в табл. 4 приведены значения коэффициентов a и b , полученные с помощью линейного МНК, примененного к логарифмам дисперсий иссле-

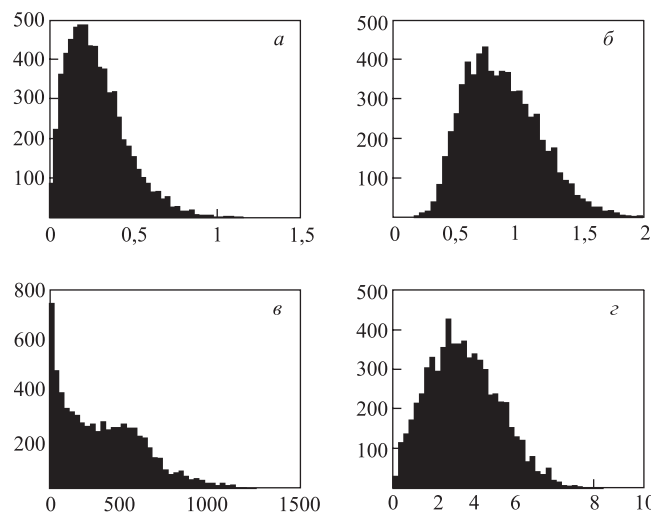


Рис. 1. Гистограммы для сумм переменных по порядку табл. 2. $N = 2$

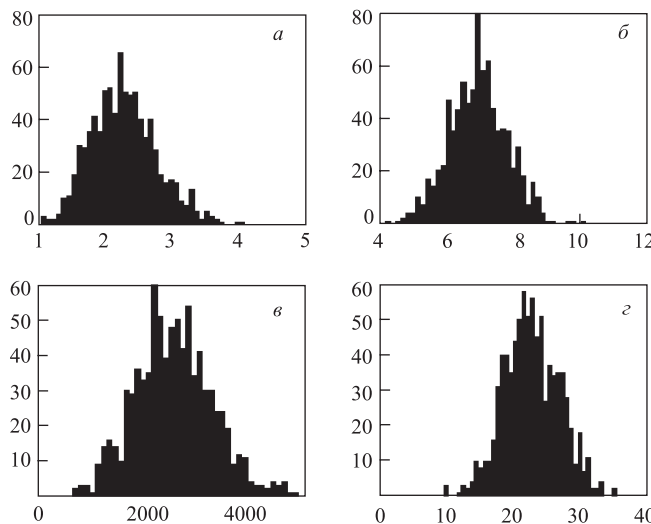


Рис. 2. Гистограммы для сумм переменных по порядку табл. 2. $N = 16$

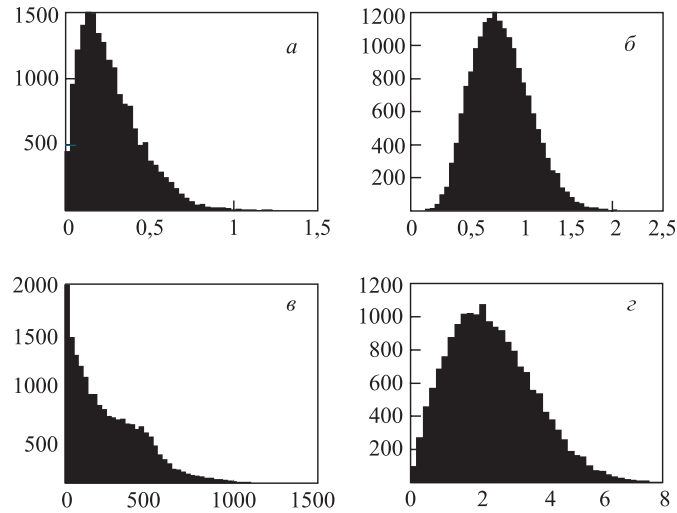


Рис. 3. Гистограммы для сумм переменных по порядку табл. 3. $N = 2$

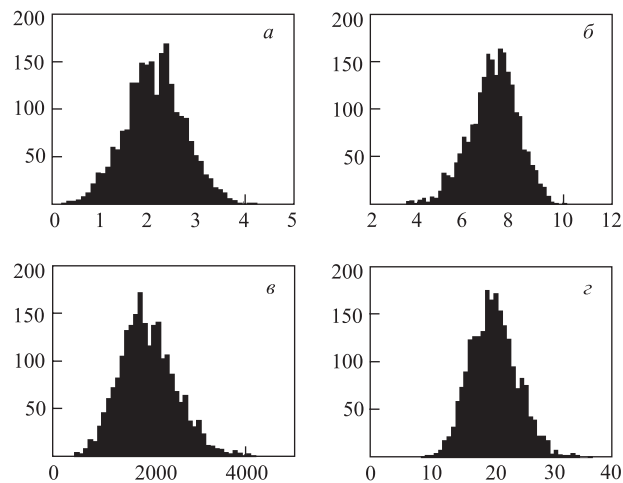


Рис. 4. Гистограммы для сумм переменных по порядку табл. 3. $N = 16$

двух рядов сумм, содержащих $n = 1 \div N$, $N = 1000$, слагаемых. Чтобы значения b можно было сразу сравнить со значениями $2H$, последние приведены в той же таблице.

Оценка дисперсий проводилась по стандартным формулам: $D = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\xi_i - M)^2$,

$M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i$, где $\{\xi_1 \dots \xi_m\}$ — ряд сумм, длина которого m определяется отношением полного объема исследуемой статистики к числу слагаемых в одной сумме n , которое, очевидно, пропорционально времени.

Таблица 4. Значения коэффициентов a и b . Реакции (1) и (2)

Реакция	Величина	$\Delta\alpha$	P_t^{\max}	b_{\min}^{\max}	Δy
(1)	a	$-4,8 \pm 0,2$	$-3,4 \pm 0,1$	$9,7 \pm 0,1$	$-0,8 \pm 0,2$
	b	$1,17 \pm 0,03$	$1,12 \pm 0,02$	$1,20 \pm 0,03$	$1,24 \pm 0,04$
	$2H$	$1,16 \pm 0,01$	$1,5 \pm 0,01$	$1,7 \pm 0,01$	$1,20 \pm 0,01$
(2)	a	$-4,5 \pm 0,2$	$-3,6 \pm 0,1$	$9,85 \pm 0,05$	$-0,14 \pm 0,03$
	b	$1,35 \pm 0,05$	$0,50 \pm 0,10$	$1,28 \pm 0,06$	$1,31 \pm 0,04$
	$2H$	$1,31 \pm 0,01$	$1,42 \pm 0,02$	$1,24 \pm 0,01$	$1,34 \pm 0,01$

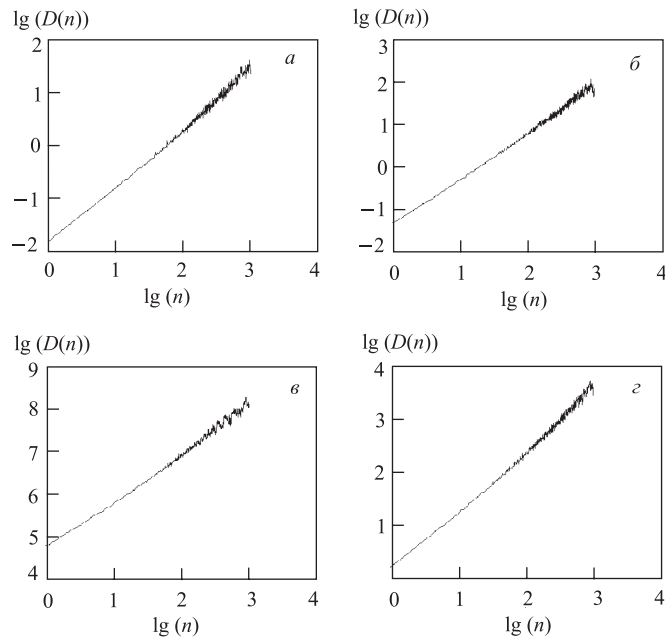


Рис. 5. Логарифмические графики зависимости дисперсии от времени переменных по порядку табл. 4. Реакция (1). $N = 100$

Снос экспериментальных распределений представлен зависимостью математического ожидания M экспериментальных распределений от времени (табл. 5, рис. 7 и 8).

Таблица 5. Смещение распределений за единицу времени ($N = 1$). Реакции (1) и (2)

Реакция	Величина	$\Delta\alpha$	P_t^{\max}	b_{\min}^{\max}	Δy
(1)	M	0,14	0,43	160	1,4
(2)	M	0,13	0,45	125	1,3

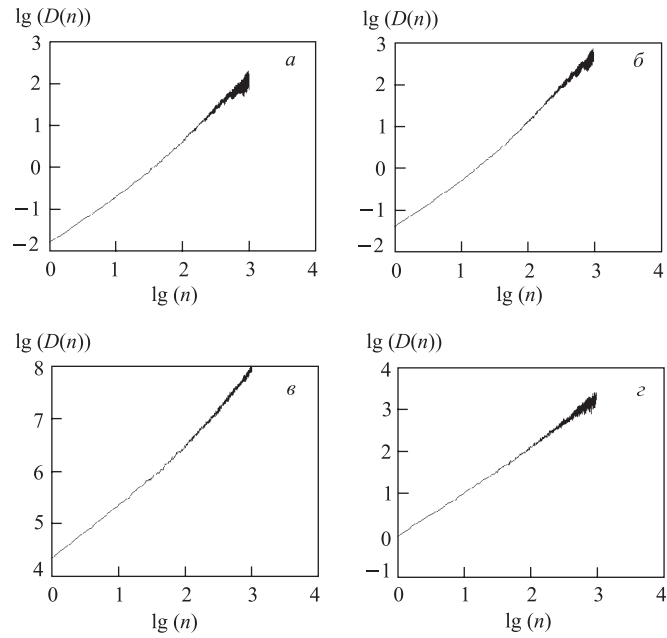


Рис. 6. Логарифмические графики зависимости дисперсии от времени переменных по порядку табл. 4. Реакция (2). $N = 1000$

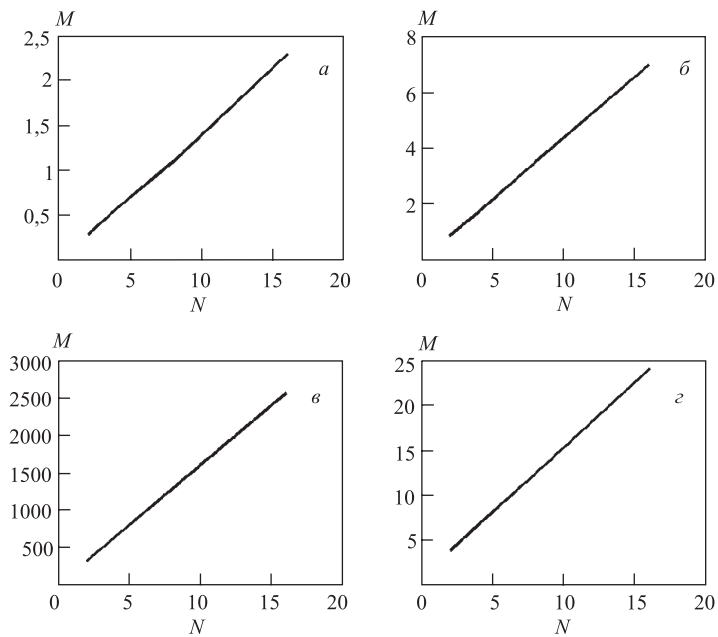


Рис. 7. Графики зависимости математического ожидания от времени для переменных по порядку табл. 4. Реакция (1)

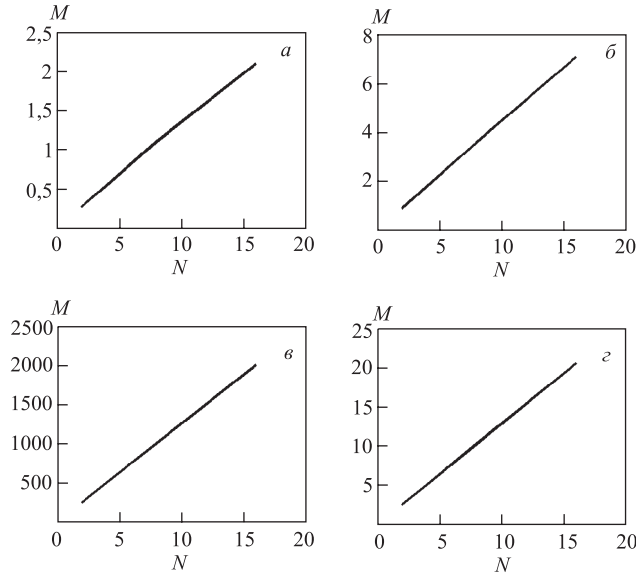


Рис. 8. Графики зависимости математического ожидания от времени для переменных по порядку табл. 4. Реакция (2)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенных исследований получены следующие результаты:

Для дифракционно-подобных реакций (1) и (2) в рядах измеренных переменных $\Delta\alpha$, P_t^{\max} , b_{\min}^{\max} , Δy (см. текст) установлен факт наличия корреляций последующих измерений с предыдущими, о чем свидетельствуют значения показателя Херста H , заметно большие величины 0,5 (см. табл. 1).

Установлено, что с ростом времени, т. е. по мере увеличения числа слагаемых в суммах последовательных членов временных рядов исследуемой статистики, распределения плотности вероятности этих сумм приближаются к определенной асимптотической форме, которую можно интерпретировать как равновесную.

Асимптотическая (равновесная) форма распределений согласуется с формой, описывающей обобщенное фрактальное броуновское движение (ФБД) [9]:

$$\rho(x_0, x, t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t - t_0)^H}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - M)^2}{2\sigma^2(t - t_0)^{2H}}\right).$$

Действительно, для дисперсий экспериментальных распределений как функций от времени справедливо соотношение $\ln(D) = a + b \ln(t - t_0)$. Погрешность МНК коэффициентов a и b очень мала ($\sim 1\%$).

Используя данные таблицы, где приведены расчетные значения коэффициентов b , и сравнивая их с полученными нами значениями коэффициента Херста H , можно видеть, что в пределах погрешностей выполняется равенство $b = 2H$. Таким образом, имеет место формула $D = \sigma^2(t - t_0)^{2H}$. Более того, из экспериментальных данных следует, что данное соотношение будет выполняться в широком диапазоне n , эквивалентного $(t - t_0)$, т. е. дополнительно не зависит от времени.

Установлен факт сдвига среднего M от распределения плотности вероятности, который оказался прямо пропорционален ширине временного интервала.

Из приведенных фактов может быть сделан вывод, что ряды последовательных измерений выбранных переменных для реакций (1) и (2) могут рассматриваться как случайный процесс в обобщенном пространстве этих переменных. В этом процессе одновременно происходят диффузия и движение (поток) плотности вероятности как единого целого (снос).

Как известно, такие специальные виды диффузии описываются уравнением Фоккера–Планка [11].

В математической теории случайных процессов оно возникает как прямое уравнение Колмогорова для распределения плотности переходной вероятности. Его решение содержит так называемый «эффект памяти», т. е. корреляцию последующих состояний процесса с предыдущими.

В нашем случае оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma^2 H(t - t_0)^{2H-1} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - M \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

где M — коэффициент сноса, приведенный для реакций (1) и (2) в табл. 5, а $\sigma^2 H(t - t_0)^{2H-1}$ имеет смысл коэффициента диффузии по соответствующей переменной. Прямой подстановкой можно убедиться, что действительно функция распределения плотности переходной вероятности одномерного ФБД является решением этого уравнения.

В заключение отметим, что, как представляется, общий вывод из проделанной работы состоит в следующем:

Показана возможность рассмотрения исследованных стохастических процессов в качестве случайных блужданий в обобщенном фазовом пространстве. Это свойство проявляется, если рассматривать последовательность измеренных переменных как временной ряд, являющийся числовым отображением некоторого фиктивного случайного процесса. Следует обратить внимание на то, что реальный процесс изменения состояний сохраняющейся во времени системы в нашем случае отсутствует.

Найден асимптотический вид уравнения, описывающего приготовленный случайный процесс, который может быть представлен как особый вид диффузии в среде с движущимся потоком. Процесс имеет фрактальный характер.

Уравнение, кроме того, что описывает фрактальный характер процесса, реализует новый, *статистический*, подход к описанию динамики процессов в микроскопической физике [10]. Полученные значения показателя Херста $0,5 < H < 1$, входящего в УФП в качестве параметра, означают, что исследованные процессы осуществляются во фрактальном обобщенном фазовом пространстве с дробной размерностью. Развитие этого факта может позволить построить стохастическую динамику микроскопических взаимодействий и последовательно ввести необратимость в их описание [12–14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де Вольф Э. А., Дремин И. М., Киттель В. // УФН. 1991. Т. 163. С. 3.
2. De Wolf E. A., Dremin I. M., Kittel W. // Phys. Rep. 1996. V. 270. P. 1–141.

3. *Dremin I. M.* // Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 2747.
4. *Bjorken J. D.* // Phys. Rev. D. 1992. V. 45, No. 11. P. 4077.
5. *Демидов В. С. и др.* Препринт ИТЭФ 27-99. М., 1999. 28 с.
6. *Михайличенко В. И. и др.* Препринт ИТЭФ 21-99. М., 1999. 20 с.
7. *Огороков В. А. и др.* // Инженерная физика. 2000. №2. С. 2–8.
8. *Bershadskii A.* Some Generalization of Self-Similarity // Europhys. Lett. A. 1997. V. 39, No. 6. P. 587–592.
9. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
10. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: УРСС, 2003.
11. *Risken H.* The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Application. N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
12. *Hilfer R. et al.* Applications of Fractional Calculus in Physics. River Edge, NJ.: World Sci., 2000.
13. *Zaslavsky G. M.* // Chaos. 1994. V. 4. P. 25.
14. *Nottale L.* Fractal Space-Time and Microphysics. River Edge, NJ.: World Sci., 1996.

Получено 24 апреля 2006 г.