Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т. 6, № 4(153). С. 449–471

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ВОПРОС УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ В РТГ

К. А. Модестов[1], *Ю. В. Чугреев*[2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В работе в рамках РТГ исследуется вопрос об устойчивости однородной и изотропной Вселенной относительно малых возмущений гравитационного поля и характеристик вещества. Получены в линейном приближении уравнения для малых возмущений метрического тензора $g_{\mu\nu}$, плотности энергии ρ и давления p. Найдены решения этих уравнений в случае, когда возмущения зависят только от времени. Проведен анализ физического характера полученных решений. Сравнение с результатами ОТО приводит к выводу, что все различия обусловлены массой гравитона.

In the paper the question of stability of homogeneous and isotropic Universe relative to small fluctuations of gravitational field and matter characteristics has been investigated in the framework of RTG. The equations for small perturbations of metric tensor $g_{\mu\nu}$, energy density ρ and pressure p are obtained in linear approximation. The solutions of these equations are found provided the perturbations depend on time only. The analysis of physical nature of derived solutions is carried out. The comparison with the results of GR leads to the conclusion that all the distinctions are caused by the mass of graviton.

PACS: 04.50.Kd, 95.30.Sf

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности (ОТО) и релятивистская теория гравитации (РТГ) — это разные теории. Основы РТГ подробно изложены в монографии [1]. Уравнения движения гравитационного поля в РТГ явно содержат метрический тензор пространства Минковского, и с необходимостью у гравитона возникает масса покоя. Именно поэтому, в отличие от ОТО, возможно рассмотрение гравитационного поля как физического поля в духе Фарадея–Максвелла.

Наличие массы покоя у гравитона существенно изменяет механизм коллапса массивных тел, а также процесс эволюции однородной и изотропной Вселенной. Эти вопросы подробно изложены в §§10, 11 монографии [1].

Цель настоящей работы — изучение в рамках РТГ вопроса об устойчивости однородной и изотропной Вселенной относительно малых возмущений гравитационного поля и характеристик вещества. В ОТО эта задача рассматривалась давно [2–6].

Интерес к малым возмущениям в однородной и изотропной модели Вселенной, помимо самостоятельного научного значения, обусловлен также тем, что оно, в принципе, может пролить свет на возникновение крупномасштабной структуры Вселенной [7].

[1]E-mail: modestov@goa.bog.msu.ru
[2]E-mail: chugreev@goa.bog.msu.ru

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В РТГ

Для гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ в РТГ уравнения движения удобно представить в форме [1, §§ 4, 5]

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}\right) = \varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{1.1}$$

$$D_\mu \widetilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{1.2}$$

В (1.1) $\gamma_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского, а $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор эффективного риманова пространства, возникающего из-за наличия гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ в пространстве Минковского. Связь между $\Phi^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ в РТГ устанавливается соотношением [1, §2]

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \equiv \widetilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu} + \sqrt{-\gamma}\Phi^{\mu\nu} \equiv \widetilde{\gamma}^{\mu\nu} + \widetilde{\Phi}^{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

где $g^{\mu\nu}$ — обратный к $g_{\mu\nu}$ тензор. В (1.3) $g = \det g_{\mu\nu}$, а $\gamma = \det \gamma_{\mu\nu}$. Постоянные $\varkappa$ и m^2 в (1.1) равны

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}, \tag{1.4}$$

$$m = \frac{m_g c}{\hbar}, \tag{1.5}$$

где m_g — масса покоя гравитона. $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, построенный с помощью тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ и имеющий вид

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}. \tag{1.6}$$

Здесь, как обычно,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right). \tag{1.7}$$

Наконец, в (1.1) $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса вещества. Нетрудно показать, что из (1.1) и (1.2) следует «уравнение вещества»

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \tag{1.8}$$

где ∇_μ — ковариантная производная в эффективном римановом пространстве[1].

В (1.2) через D_μ обозначена ковариантная производная в пространстве Минковского.

Заметим, что согласно РТГ в качестве x^ν могут быть выбраны любые допустимые в пространстве Минковского координаты, в том числе и галилеевы (т. е. инерциальные).

[1]Ниже для простоты будем писать «риманово пространство», опуская прилагательное «эффективное».

2. ЭВОЛЮЦИЯ ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

В настоящее время принято считать, что в ранней Вселенной вещество было распределено однородно и изотропно и что она и в дальнейшем сохранила эти свойства, но только уже в относительно больших масштабах. Поэтому можно ожидать, что модель однородной и изотропной Вселенной будет достаточно хорошим приближением для описания реального мира.

В данном параграфе мы, следуя [1, § 10] (см. также [8,9]), приведем основные факты, установленные в РТГ, для однородной и изотропной Вселенной. Интервал такой Вселенной имеет вид

$$ds^2 = a^6(t)\, dt^2 - a^4_{\max} a^2(t) \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2.1}$$

где t, x, y, z — галилеевы координаты пространства Минковского. В (2.1) $a\,(t)$ — масштабный фактор, и, согласно РТГ, его область изменения заключена между числами $a_{\min}$ и $a_{\max}$, где из-за наличия у гравитона массы покоя $a_{\min} > 0$, а $a_{\max} < \infty$. Переходя в (2.1) к «собственному времени»

$$d\tau = a^3\,(t)\, dt, \tag{2.2}$$

интервал (2.1) представим в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - \alpha^2(\tau) \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2.3}$$

а интервал пространства Минковского — в виде

$$d\sigma^2 = \frac{\alpha^4_{\max}}{\alpha^6} d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2.4}$$

Здесь мы для удобства ввели обозначение

$$\alpha = a^2_{\max} a, \quad \alpha_{\max} = a^3_{\max}. \tag{2.5}$$

Очевидно, область изменения $\alpha\,(\tau)$ будет

$$a^2_{\max} a_{\min} \equiv \alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}. \tag{2.6}$$

На основе (2.3) и (2.4) нетрудно установить, что отличные от нуля коэффициенты связности, соответственно, имеют вид

$$\Gamma^0_{ij} = \alpha\dot{\alpha}\delta_{ij}; \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta_{ij}; \tag{2.7}$$

$$\gamma^0_{00} = -3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \tag{2.8}$$

Здесь и далее точки над буквами будут обозначать производные по τ, латинские индексы будут принимать значения 1, 2, 3, а греческие — 0, 1, 2, 3.

В качестве тензора $T_{\mu\nu}$, как правило, выбирается тензор энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}\frac{p}{c^2}, \tag{2.9}$$

где ρ — плотность массы вещества; p — изотропное давление, а $u_\mu = g_{\mu\lambda}\dfrac{dx^\lambda}{ds}$ — 4-скорость элемента объема. Всюду в дальнейшем будем использовать систему единиц, в которой скорость света равна единице. Невозмущенные ρ и p зависят только от τ.

Подставляя (2.7) в (1.6), получим

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}; \quad R_{11} = R_{22} = R_{33} = 2\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha}; \quad R_{0i} = 0. \tag{2.10}$$

Так как $g_{0i} = 0$ и $R_{0i} = 0$, из уравнений (1.1) и (2.9) следует, что $u_i = 0$. Это означает, что в рассматриваемой модели вещество находится в покое относительно инерциальной системы отсчета. Согласно (2.9), для компонент $T_{\mu\nu}$, с учетом $u_i = 0$, имеем

$$T_{00} = \rho; \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = \alpha^2 p; \quad T_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10), (2.11) в (1.1), получим уравнения

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{\varkappa}{6}(\rho + 3p) - \frac{m^2}{6}\left(1 - \frac{\alpha_{\max}^4}{\alpha^6}\right), \tag{2.12}$$

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{\varkappa}{3}\rho - \frac{m^2}{6}\left(1 - \frac{3}{2\alpha^2} + \frac{\alpha_{\max}^4}{2\alpha^6}\right), \tag{2.13}$$

а из ковариантного закона (1.8) — уравнение

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{\dot{\rho}}{3(\rho + p)}. \tag{2.14}$$

Так как левая часть (2.13) неотрицательна, то расширение Вселенной должно начинаться с некоторого минимального значения $\alpha_{\min} = a_{\max}^2 a_{\min} \neq 0$ и останавливаться при $\alpha = \alpha_{\max}$, что отражено в (2.6). Эти значения α определяются из условия $\dot{\alpha} = 0$. Очевидно, плотность вещества ρ при $\alpha = \alpha_{\max}$ достигает своего, отличного от нуля, минимального значения

$$\rho_{\min} = \frac{m^2}{2\varkappa}\left(1 - \frac{1}{\alpha_{\max}^2}\right). \tag{2.15}$$

Заметим, что (2.14) следует из (2.12), (2.13), и поэтому на три искомые величины α, ρ и p реально имеем два уравнения, т. е. система (2.12)–(2.14) не полная. Пополнение этой системы достигается прибавлением к ним уравнения состояния для вещества, связывающего p с ρ.

Ниже мы будем рассматривать три вида уравнений состояния:

Радиационно-доминирующая стадия. В радиационно-доминирующем состоянии вещества

$$p = \frac{1}{3}\rho. \tag{2.16}$$

С учетом (2.16) из (2.14) легко получить

$$\rho_r = \frac{A_r}{\alpha^4}, \tag{2.17}$$

где A_r — постоянная интегрирования. Область изменения α для этой фазы начинается с $\alpha = \alpha_{\min}$ и кончается при $\alpha = \alpha_r = a_{\max}^2 a_r$, где a_r — значение масштабного фактора a, при котором во Вселенной происходит рекомбинация. a_r — достаточно большое число, и поэтому $\alpha_r \gg \alpha_{\min}$. Таким образом, интервал

$$\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_r \tag{2.18}$$

является областью доминирования излучения.

Нерелятивистская (барионная) стадия. В состоянии, когда во Вселенной преобладает барионное вещество,

$$p = 0, \tag{2.19}$$

и из (2.14) находим

$$\rho_m = \frac{A_m}{\alpha^3}. \tag{2.20}$$

Область изменения α для этой фазы развития дается неравенством

$$\alpha_r \leqslant \alpha \leqslant \alpha_m, \tag{2.21}$$

где α_m — верхняя граница для α, при которых во Вселенной доминирует барионное вещество.

Стадия квинтэссенции. Наблюдательные данные [10–12] указывают на то, что при $\alpha = \alpha_0 \equiv a_{\max}^2 a_0$, где a_0 — значение масштабного фактора, соответствующего возрасту Вселенной, в ней доля барионного вещества не превышает 10 %, а 90 % приходится на долю «квинтэссенции», т. е. на материю небарионного происхождения. По этой причине, очевидно, α_m должно быть намного меньше, чем α_0.

Предполагается, что для квинтэссенции уравнение состояния имеет вид

$$p = -(1-\nu)\,\rho, \tag{2.22}$$

а плотность ее массы, согласно (2.14), будет

$$\rho_q = \frac{A_q}{\alpha^{3\nu}}. \tag{2.23}$$

Как было установлено в работе [9], значение параметра ν может находиться между числами 0,05 и 0,3.

Когда во Вселенной доминирует квинтэссенция, интервал изменения α задается неравенствами

$$\alpha_m \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}. \tag{2.24}$$

Следует отметить, что, в то время как уравнения состояния для радиации (2.16) и барионного вещества (2.19) имеют достаточно осмысленные физические основы, квинтэссенция как особый вид материи с уравнением состояния (2.22) является гипотетической, и ее «введение» было продиктовано стремлением объяснить обнаруженное ускоренное расширение Вселенной.

Очевидно, полная плотность массы ρ во Вселенной будет

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_q, \tag{2.25}$$

а полное давление —

$$p = p_r + p_q. \tag{2.26}$$

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РТГ

В разд. 2 мы привели основные результаты РТГ для однородной и изотропной Вселенной. Далее нас будет интересовать вопрос об устойчивости эволюции Вселенной относительно малых возмущений метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и характеристик вещества. Поэтому нашей ближайшей задачей будет получение из (1.1), (1.2) и (1.8) уравнения для малых возмущений в линейном приближении.

Будем называть величины

$$g_{(0)\mu\nu} = \left(1, -\alpha^2, -\alpha^2, -\alpha^2\right), \quad \rho_0, \quad p_0 \quad \text{и} \quad u_{(0)\mu} = (1, 0, 0, 0) \tag{3.1}$$

невозмущенными или фоновыми. Малые отклонения от метрики $g_{(0)\mu\nu}$ обозначим через $h_{\mu\nu}$, от скорости — через $u_{(1)\mu}$, а от ρ_0 и p_0 — через ρ_1 и p_1 соответственно.

В первом приближении по возмущениям из (1.1) находим

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} h_{\mu\nu} = \varkappa\delta\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \tag{3.2}$$

где $\delta R_{\mu\nu}$ — линейная по возмущениям часть разности $R_{\mu\nu} - R_{(0)\mu\nu}$. Здесь $R_{(0)\mu\nu}$ заданы формулами (2.10), а $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, построенный на метрике

$$g_{\mu\nu} = g_{(0)\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Из условия $g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ с учетом (3.3) нетрудно установить, что в первом порядке малости

$$g^{00} = g^{00}_{(0)} - h_{00}, \quad g^{0i} = g^{0i}_{(0)} + \frac{1}{\alpha^2} h_{0i}, \quad g^{ij} = g^{ij}_{(0)} - \frac{1}{\alpha^4} h_{ij}, \tag{3.4}$$

где $g^{00}_{(0)} = 1,\ g^{11}_{(0)} = g^{22}_{(0)} = g^{33}_{(0)} = -\dfrac{1}{\alpha^2},\ g^{\mu\nu}_{(0)} = 0$ при $\mu \neq \nu$.

Аналогично, в силу равенства $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$, находим

$$u^\mu_{(1)} = \left(-\frac{1}{2} h_{00}, u^1_{(1)}, u^2_{(1)}, u^3_{(1)}\right). \tag{3.5}$$

Так как $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = g_{\mu\nu}\left(u^\nu_{(0)} + u^\nu_{(1)}\right)$, в первом порядке малости получим

$$u_{(1)\mu} = \left(\frac{1}{2} h_{00}, -\alpha^2 u^1_{(1)} + h_{01}, -\alpha^2 u^2_{(1)} + h_{02}, -\alpha^2 u^3_{(1)} + h_{03}\right). \tag{3.6}$$

Предположим, что и в возмущенном состоянии вещество описывается тензором энергии-импульса идеальной жидкости. Тогда

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\rho - p), \tag{3.7}$$

и поэтому для компонент $\delta S_{\mu\nu} = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) - \left(T_{(0)\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{(0)\mu\nu}T_{(0)}\right)$ в низшем порядке малости получим

$$\delta S_{00} = \frac{1}{2}(\rho_1 + 3p_1) + \frac{1}{2}(\rho_0 + 3p_0)\, h_{00}, \tag{3.8}$$

$$\delta S_{0k} = (\rho_0 + p_0)\, u_{(1)k} - \frac{1}{2}(\rho_0 - p_0)\, h_{0k}, \tag{3.9}$$

$$\delta S_{ik} = \frac{1}{2}\alpha^2 (\rho_1 - p_1)\,\delta_{ik} - \alpha^2 (\rho_0 - p_0)\,\sigma_{ik}, \tag{3.10}$$

где

$$\sigma_{ik} \equiv \frac{1}{2\alpha^2} h_{ik}. \tag{3.11}$$

Прежде чем найти $\delta R_{\mu\nu}$, займемся уравнением (1.2). Как будет видно ниже, учет полученных из (1.2) соотношений существенно упростит выражения для $\delta R_{\mu\nu}$ и, следовательно, вид уравнений (3.2). Из (1.3) нетрудно показать, что в линейном приближении по $h_{\mu\nu}$

$$\sqrt{-g} \simeq \alpha^3 \left(1 + \frac{1}{2}h_{00} - \sigma\right), \tag{3.12}$$

где $\sigma \equiv \sigma_{ll}$.

Так как по определению $\widetilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, в силу (3.4) и (3.12) в первом порядке по возмущениям находим

$$\begin{aligned} \widetilde{g}^{00} &= \alpha^3 \left(1 - \frac{1}{2}h_{00} - \sigma\right), \\ \widetilde{g}^{0i} &= \alpha h_{0i}, \\ \widetilde{g}^{ik} &= -\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{2}h_{00} - \sigma\right)\delta_{ik} + 2\sigma_{ik}\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Запишем (1.2) в виде

$$D_\mu \widetilde{g}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \widetilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\alpha\beta}\widetilde{g}^{\alpha\beta} = 0. \tag{3.14}$$

Отсюда для $\nu = 0$ с учетом (2.8) и (3.13) в линейном приближении по $h_{\mu\nu}$ получим уравнение

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{2}h_{00} + \sigma\right)_{,0} = h_{0i,i}, \tag{3.15}$$

а для $\nu = k$ — уравнение

$$(\alpha h_{0k})_{,0} - \alpha\left(\frac{1}{2}h_{00} - \sigma\right)_{,k} - 2\alpha\sigma_{ik,i} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{3.16}$$

Приведем в низшем порядке по возмущениям выражения для $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{(0)\alpha\beta}$, где $\Gamma^{\lambda}_{(0)\alpha\beta}$ заданы формулами (2.7), а $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ вычисляется на (3.3) согласно (1.7).

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{2}h_{00}, \\
\delta\Gamma^{0}_{0k} &= \frac{1}{2}h_{00,k} - \frac{\dot\alpha}{\alpha}h_{0k}, \\
\delta\Gamma^{k}_{00} &= \frac{1}{2\alpha^2}\left(h_{00,k} - 2\dot h_{0k}\right), \\
\delta\Gamma^{0}_{ik} &= -\alpha\dot\alpha h_{00}\delta_{ik} - \frac{1}{2}\dot h_{ik} + \frac{1}{2}\left(h_{0k,i} + h_{0i,k}\right), \\
\delta\Gamma^{i}_{0k} &= \frac{1}{2\alpha^2}\left(h_{0k,i} - h_{0i,k}\right) - \dot\sigma_{ik}, \\
\delta\Gamma^{j}_{ik} &= \frac{\dot\alpha}{\alpha}h_{0j}\delta_{ik} - \sigma_{kj,i} - \sigma_{ij,k} + \sigma_{ik,j}, \\
\delta\Gamma^{\nu}_{0\nu} &= \frac{1}{2}\dot h_{00} - \dot\sigma, \\
\delta\Gamma^{\nu}_{k\nu} &= \left(\frac{1}{2}h_{00} - \sigma\right)_{,k}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Нетрудно установить в линейном приближении по $h_{\mu\nu}$ вид компонент $\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R_{(0)\mu\nu}$, используя (3.17), а также выражения (2.10) для $R_{(0)\mu\nu}$.

$$\delta R_{00} = \ddot\sigma + 2\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot\sigma + \frac{3}{2}\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot h_{00} + \frac{1}{2\alpha^2}\left(\triangle h_{00} - \dot h_{0k,k}\right).$$

Учитывая здесь (3.15), получим

$$\delta R_{00} = \frac{1}{2\alpha^2}\triangle h_{00} - \frac{1}{2}\ddot h_{00} + \frac{1}{2}\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot h_{00}. \tag{3.18}$$

Для δR_{0k} имеем

$$\delta R_{0k} = \frac{\dot\alpha}{\alpha}h_{00,k} - \dot\sigma_{lk,l} + \dot\sigma_{,k} - \left(\frac{\ddot\alpha}{\alpha} + 2\frac{\dot\alpha^2}{\alpha^2}\right)h_{0k} + \frac{1}{2\alpha^2}\left(\triangle h_{0k} - h_{0l,kl}\right).$$

Согласно (2.12), (2.13)

$$\frac{\ddot\alpha}{\alpha} + 2\frac{\dot\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\varkappa}{2}\left(\rho_0 - p_0\right) - \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right), \tag{3.19}$$

и поэтому δR_{0k} примет вид

$$\begin{aligned}
\delta R_{0k} = \frac{\dot\alpha}{\alpha}h_{00,k} - \dot\sigma_{lk,l} + \dot\sigma_{,k} - \frac{\varkappa}{2}\left(\rho_0 - p_0\right)h_{0k} &+ \\
+ \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)h_{0k} + \frac{1}{2\alpha^2}\left(\triangle h_{0k} - h_{0l,kl}\right)&.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Наконец, для δR_{ik} находим

$$\delta R_{ik}=\left[-\frac{1}{2}\alpha\dot{\alpha}\dot{h}_{00}-\alpha\dot{\alpha}\dot{\sigma}-\left(2\dot{\alpha}^2+\alpha\ddot{\alpha}\right)h_{00}+\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}h_{0l,l}\right]\delta_{ik}+ \\ +\frac{1}{2}\left(\dot{h}_{0k,i}+\dot{h}_{0i,k}\right)-\left(\frac{1}{2}h_{00}-\sigma\right)_{,ik}+\frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\left(h_{0k,i}+h_{0i,k}\right)+ \\ +\triangle\sigma_{ik}-\sigma_{kl,il}-\sigma_{il,kl}-2\sigma_{ik}\left(2\dot{\alpha}^2+\alpha\ddot{\alpha}\right)-3\alpha\dot{\alpha}\dot{\sigma}_{ik}-\alpha^2\ddot{\sigma}_{ik}.$$

Это выражение с учетом (3.15), (3.16) и (3.19) можно привести к виду

$$\delta R_{ik}=-\alpha^2\left[\frac{\varkappa}{2}\left(\rho_0-p_0\right)-\frac{m^2}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]h_{00}\delta_{ik}-\alpha^2\ddot{\sigma}_{ik}+ \\ +\triangle\sigma_{ik}-3\alpha\dot{\alpha}\dot{\sigma}_{ik}-m^2\sigma_{ik}+\frac{m^2}{2}h_{ik}-\alpha^2\varkappa\left(\rho_0-p_0\right)\sigma_{ik}. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.8)–(3.10), (3.18), (3.20) и (3.21) в (3.2), найдем

$$\frac{1}{\alpha^2}\triangle h_{00}-\ddot{h}_{00}+\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{h}_{00}-m^2h_{00}=\varkappa\left(\rho_1+3p_1\right)+\varkappa\left(\rho_0+3p_0\right)h_{00}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}h_{00,k}-\dot{\sigma}_{lk,l}+\dot{\sigma}_{,k}-\frac{m^2}{2\alpha^2}h_{0k}+\frac{1}{2\alpha^2}\left(\triangle h_{0k}-h_{0l,kl}\right)=\varkappa\left(\rho_0+p_0\right)u_{(1)k}, \quad (3.23)$$

$$\ddot{\sigma}_{ik}-\frac{1}{\alpha^2}\triangle\sigma_{ik}+3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\sigma}_{ik}+\frac{m^2}{\alpha^2}\sigma_{ik}+\left[\frac{\varkappa}{2}\left(\rho_0-p_0\right)-\frac{m^2}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]h_{00}\delta_{ik}= \\ =-\frac{\varkappa}{2}\left(\rho_1-p_1\right)\delta_{ik}. \quad (3.24)$$

Теперь обратимся к «уравнению вещества» (1.8) и запишем его в линейном по возмущениям приближении. Так как

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}\equiv\partial_\mu T^{\mu\nu}+\Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}+\Gamma^\nu_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}=0, \quad (3.25)$$

где, как обычно,

$$T^{\mu\nu}=\left(\rho+p\right)u^\mu u^\nu-g^{\mu\nu}p, \quad (3.26)$$

имеем

$$\partial_\mu\delta T^{\mu\nu}+\delta\Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}+\Gamma^\mu_{\mu\lambda}\delta T^{\lambda\nu}+\delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\delta T^{\mu\lambda}=0. \quad (3.27)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} T^{00}&=T^{(0)00}+\rho_1-\rho_0h_{00},\\ T^{0i}&=\frac{1}{\alpha^2}\rho_0h_{0i}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\rho_0+p_0\right)u_{(1)i},\\ T^{ij}&=T^{(0)ij}+\frac{1}{\alpha^2}\left(p_1\delta_{ij}+\frac{1}{\alpha^2}p_0h_{ij}\right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $T^{(0)\mu\nu}$ заданы формулами (2.11), для $\delta T^{\mu\nu}$ получим выражения

$$\begin{aligned}
&\delta T^{00} = \rho_1 - \rho_0 h_{00}, \\
&\delta T^{0i} = \frac{1}{\alpha^2}\rho_0 h_{0i} - \frac{1}{\alpha^2}\left(\rho_0 + p_0\right) u_{(1)i}, \\
&\delta T^{ij} = \frac{1}{\alpha^2}\left(p_1\delta_{ij} + \frac{1}{\alpha^2}p_0 h_{ij}\right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Учитывая в (3.27) (2.7), (3.17), (3.28) и (3.29), найдем

$$\frac{\dot\rho_1}{\rho_0 + p_0} + \frac{1}{\alpha^2}h_{0k,k} - \frac{1}{\alpha^2}u_{(1)k,k} + 3\frac{\dot\alpha}{\alpha}\frac{\rho_1 + p_1}{\rho_0 + p_0} - \dot\sigma = 0 \tag{3.30}$$

и

$$p_{1,k} + \frac{1}{2}\left(\rho_0 + p_0\right) h_{00,k} - \dot p_0 u_{(1)k} - \left(\rho_0 + p_0\right)\dot u_{(1)k} = 0. \tag{3.31}$$

Обратим внимание на то, что из полученных выше 18 уравнений (3.15), (3.16), (3.22)–(3.24) и (3.30), (3.31) не все независимы. По крайней мере четыре из них являются следствиями остальных, поскольку, как было отмечено выше, (1.8) вытекает из (1.1) и (1.2). Таким образом, для 15 величин возмущения: $h_{\mu\nu}$, $u_{(1)k}$, ρ_1 и p_1 — имеем 14 уравнений, т. е. система неполна. Как обычно, пополнение системы осуществляется добавлением уравнения, связывающего между собой давление и плотность. Исследование этой пополненной системы уравнений и даст ответ на поставленный вопрос об устойчивости однородной и изотропной модели и, возможно, объяснит возникновение крупномасштабной структуры Вселенной.

Среди решений уравнений малых возмущений есть такие, которые могут быть исключены простым переходом к физически эквивалентной системе отсчета и поэтому не представляют собой реального физического изменения метрики Минковского. Именно такие решения мы будем называть нефизическими возмущениями в РТГ. Метрика Минковского допускает десятипараметрическую группу преобразований, именуемую группой Пуанкаре, которая оставляет интервал пространства Минковского (2.4) форминвариантным. В координатах $\{x'^\mu\} = \{t, x, y, z\}$ эти преобразования имеют вид

$$x'^\mu \to x'^\mu - \xi'^\mu, \quad \text{причем} \quad \xi'^0 = \omega_{0i}x^i + a^0, \quad \xi'^i = \omega_{ji}x^j + \omega_{0i}t + a^i,$$

где $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$, a^α — константы. Для малости ξ^μ во всем пространстве необходимо положить $\omega_{\alpha\beta} = 0$. В используемых нами координатах $\{x^\mu\} = \{\tau, x, y, z\}$ величины ξ^μ примут вид

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \frac{d\tau}{dt}\xi'^0 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2_{\max}}a^0, \quad \xi^i = \xi'^i = a^i, \\
&\xi_0 = \xi^0 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2_{\max}}a^0, \quad \xi_i = -\alpha^2\xi^i = -\alpha^2 a^i.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Найдем все величины, соответствующие данной трансляции

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{coord}} = \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu = \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi_\rho + \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\xi_\rho =$$
$$= \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi_\rho, \quad h_{00}^{\mathrm{coord}} = 6\frac{\alpha^2}{\alpha^2_{\max}}\dot{\alpha} a^0,$$
$$h_{0i}^{\mathrm{coord}} = 0,\; h_{ij}^{\mathrm{coord}} = -2\frac{\alpha^4}{\alpha^2_{\max}}\dot{\alpha} a^0 \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{\mathrm{coord}} = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2_{\max}}\dot{\alpha} a^0 \delta_{ij}, \tag{3.33}$$
$$\sigma^{\mathrm{coord}} = -3\frac{\alpha^2}{\alpha^2_{\max}}\dot{\alpha} a^0, \quad u_{(1)i}^{\mathrm{coord}} = u_\beta \nabla_i \xi^\beta + \xi^\beta \nabla_\beta u_i = 0,$$
$$\delta^{\mathrm{coord}} \equiv \frac{\rho_1^{\mathrm{coord}}}{p+\rho} = \frac{\xi^\alpha \rho_{,\alpha}}{p+\rho} = \frac{\xi^0 \dot{\rho}}{p+\rho} = -3\xi^0\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -3\frac{a^0}{\alpha^2_{\max}}\alpha^2\dot{\alpha}.$$

Таким образом, отличны от нуля величины h_{00}^{coord}, $\sigma_{11}^{\mathrm{coord}} = \sigma_{22}^{\mathrm{coord}} = \sigma_{33}^{\mathrm{coord}} = -h_{00}^{\mathrm{coord}}/6$, $\sigma^{\mathrm{coord}} = -h_{00}^{\mathrm{coord}}/2$, $\delta^{\mathrm{coord}} = -h_{00}^{\mathrm{coord}}/2$. С учетом (2.2) нефизическое возмущение имеет вид

$$h_{00}^{\mathrm{coord}} \sim \alpha^2\dot{\alpha} \sim \frac{\frac{d\tau}{dt}\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{\partial_t \alpha}{\alpha}. \tag{3.34}$$

В области $\alpha_{\min} \ll \alpha \ll \alpha_{\max}$, когда зависимость α от времени носит степенной характер, последнее выражение спадает как t^{-1}.

4. ВОЗМУЩЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ТОЛЬКО ОТ ВРЕМЕНИ

В этом разделе мы рассмотрим простейший случай, когда $h_{\mu\nu}$, $u_{(1)k}$, ρ_1 и p_1 не зависят от пространственных координат, и будем сравнивать полученные здесь результаты с аналогичными результатами, установленными в ОТО.

Система уравнений (3.15), (3.16), (3.22)–(3.24) и (3.30), (3.31) в предположении, что $h_{\mu\nu}$, $u_{(1)k}$, ρ_1 и p_1 зависят только от τ, примет вид

$$\left(\frac{1}{2}h_{00} + \sigma\right)_{,0} = 0, \tag{4.1}$$

$$\left(\alpha h_{0k}\right)_{,0} = 0, \tag{4.2}$$

$$\ddot{h}_{00} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{h}_{00} + m^2 h_{00} = -\varkappa\left(\rho_1 + 3p_1\right) - \varkappa\left(\rho_0 + 3p_0\right)h_{00}, \tag{4.3}$$

$$\frac{m^2}{2\alpha^2}h_{0k} = -\varkappa\left(\rho_0 + p_0\right)u_{(1)k}, \tag{4.4}$$

$$\ddot{\sigma}_{ik} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\sigma}_{ik} + \frac{m^2}{\alpha^2}\sigma_{ik} + \left[\frac{\varkappa}{2}\left(\rho_0 - p_0\right) - \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right]h_{00}\delta_{ik} = -\frac{\varkappa}{2}\left(\rho_1 - p_1\right)\delta_{ik}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_0 + p_0} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\frac{\rho_1 + p_1}{\rho_0 + p_0} - \dot{\sigma} = 0, \tag{4.6}$$

$$\dot{p}_0 u_{(1)k} + \left(\rho_0 + p_0\right)\dot{u}_{(1)k} = 0. \tag{4.7}$$

В уравнения (4.1) и (4.2) не входят характеристики вещества ρ_0, p_0, ρ_1 и p_1, и поэтому их решения будут одинаковы для всех фаз независимо от уравнений состояния. Из (4.1) и (4.2) имеем

$$\sigma = -\frac{h_{00}}{2} + F, \tag{4.8}$$

$$h_{0k} = \frac{H_k}{\alpha} \quad (k = 1, 2, 3)\,, \tag{4.9}$$

где F и $H_k\,(k = 1, 2, 3)$ — постоянные интегрирования.

Согласно (4.4) и (4.9) находим

$$u_{(1)k} = -H_k \frac{m^2}{2\varkappa\alpha^3\,(\rho_0 + p_0)}. \tag{4.10}$$

Из (4.5), расписав его покомпонентно, нетрудно увидеть, что для σ_{12}, σ_{13} и σ_{23} имеем одинаковые уравнения

$$\ddot{\sigma}_{12} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\sigma}_{12} + \frac{m^2}{\alpha^2}\sigma_{12} = 0, \tag{4.11}$$

и поэтому решения для σ_{12}, σ_{13} и σ_{23} имеют один и тот же вид.

Оставшуюся часть уравнений из (4.5) с учетом (4.8) удобно записать в виде

$$\ddot{\sigma}_{11} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\sigma}_{11} + \frac{m^2}{\alpha^2}\sigma_{11} - \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)h_{00} = -\frac{\varkappa}{2}\,(\rho_1 - p_1) - \frac{\varkappa}{2}\,(\rho_0 - p_0)\,h_{00} \tag{4.12}$$

и

$$\ddot{\sigma} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\sigma} + \frac{m^2}{\alpha^2}\sigma - \frac{3m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)h_{00} = -\frac{3\varkappa}{2}\,(\rho_1 - p_1) - \frac{3\varkappa}{2}\,(\rho_0 - p_0)\,h_{00}. \tag{4.13}$$

Нетрудно заметить, что уравнения для σ_{22} и σ_{33} полностью совпадают с (4.12), и поэтому мы их не привели. Следовательно, их решения имеют тот же вид.

Уравнения (4.6) и (4.7) получаются из ковариантного закона сохранения (1.8), который является следствием уравнений РТГ (1.1) и (1.2). Поэтому они выводятся из уравнений (4.1)–(4.5). Легко убедиться, что полученное выражение для скорости (4.10) удовлетворяет (4.7).

Для нахождения величин $h_{00}, \sigma, p_1, \rho_1$ будем пользоваться уравнениями (4.8), (4.3) и (4.13). Для этих четырех неизвестных имеем три уравнения. Пополнение этой системы, как обычно, следует осуществить добавлением к ним уравнения состояния $p_1 = f(\rho_1)$.

Как было отмечено в разд. 3 (см. также [9]), можно считать, что модель однородной и изотропной Вселенной с тремя состояниями вещества: радиацией, барионным веществом и квинтэссенцией — является достаточно хорошим приближением реального мира. Поэтому ниже мы и будем изучать вопрос устойчивости Вселенной именно для этих состояний.

Таким образом, будем рассматривать только состояния вида (2.22), где ν — константа. Легко видеть, что $\nu = 4/3$ для радиационно-доминирующей стадии, $\nu = 1$ для барионной стадии, $0 < \nu < 2/3$ для стадии квинтэссенции. Легко видеть, что все формулы, полученные нами в разд. 2 для квинтэссенции, справедливы и для остальных стадий, если подставить в них соответствующие значения ν.

Флуктуации будем считать адиабатическими. Ввиду малости p_1 и ρ_1 можно написать

$$p_1 = \frac{dp}{d\rho}\rho_1 = (\nu - 1)\rho_1.$$

Тогда согласно (2.23) (4.10) примет вид

$$u_{(1)k} = -H_k \frac{m^2}{2\nu\varkappa A_\nu}\alpha^{3(\nu-1)}, \tag{4.10$'$}$$

а левая часть (4.6) с учетом (2.14) преобразуется к виду

$$\frac{\dot\rho_1}{\rho_0 + p_0} + 3\frac{\dot\alpha}{\alpha}\frac{\rho_1 + p_1}{\rho_0 + p_0} = \frac{\dot\rho_1}{\rho_0 + p_0} - \frac{\dot\rho\,(\rho_1 + p_1)}{(\rho_0 + p_0)^2} =$$
$$= \frac{\dot\rho_1}{\rho_0 + p_0} - \frac{\nu\dot\rho\rho_1}{(\rho_0 + p_0)^2} = \frac{\dot\rho_1}{\rho_0 + p_0} - \frac{(\rho_0 + p_0)_{,0}\,\rho_1}{(\rho_0 + p_0)^2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0 + p_0}\right)_{,0} = \dot\delta.$$

Теперь (4.6) принимает простой вид

$$(\delta - \sigma)_{,0} = 0, \tag{4.6$'$}$$

откуда с учетом (4.8) имеем

$$\delta = \sigma + \mathrm{const} \quad \text{и} \quad \delta = -\frac{h_{00}}{2} + \mathrm{const}. \tag{4.14}$$

Для уравнений состояния (2.22) (4.3) и (4.13) примут вид

$$\ddot h_{00} - \frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot h_{00} + m^2 h_{00} = -\varkappa\,(3\nu - 2)\,\rho_1 - \varkappa\,(3\nu - 2)\,\rho h_{00} = -\varkappa\,(3\nu - 2)\,(\rho_1 + \rho_0 h_{00}) \tag{4.3$'$}$$

и

$$\ddot\sigma + 3\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot\sigma + \frac{m^2}{\alpha^2}\sigma + \frac{3}{2}m^2\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)h_{00} = -\frac{3\varkappa}{2}\,(2 - \nu)\,(\rho_1 + \rho_0 h_{00})\,. \tag{4.13$'$}$$

Правые части этих уравнений пропорциональны друг другу. Исключим из обоих уравнений переменную ρ_1. Для этого выразим $\rho_1 + \rho_0 h_{00}$ из (4.13$'$) и подставим в (4.3$'$).

$$\ddot h_{00} - \frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot h_{00} + m^2 h_{00} = \frac{2\,(3\nu - 2)}{3\,(2 - \nu)}\left(\ddot\sigma + 3\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot\sigma + \frac{m^2}{\alpha^2}\sigma - \frac{3m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)h_{00}\right). \tag{4.15}$$

Теперь подставим в это уравнение соотношение (4.8)

$$\ddot h_{00} + 3\,(\nu - 1)\,\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot h_{00} + \frac{m^2}{2}\left(3\nu - \frac{3\nu - 2}{\alpha^2}\right)h_{00} = \frac{m^2}{2\alpha^2}\,(3\nu - 2)\,F. \tag{4.16}$$

Одно решение данного уравнения нам известно — это нефизическое решение (3.33) $\alpha^2\dot\alpha$, которое соответствует $F = 0$. Это решение позволит нам найти второе решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения (4.16)

$$h_{00} = \alpha^2 \dot{\alpha} \int \zeta d\tau,$$
$$\dot{h}_{00} = \left(\alpha^2 \dot{\alpha}\right)_{,0} \int \zeta d\tau + \alpha^2 \dot{\alpha} \zeta, \tag{4.17}$$
$$\ddot{h}_{00} = \left(\alpha^2 \dot{\alpha}\right)_{,00} \int \zeta d\tau + 2 \left(\alpha^2 \dot{\alpha}\right)_{,0} \zeta + \alpha^2 \dot{\alpha} \dot{\zeta}.$$

Подставляя (4.17) в (4.16) и сокращая члены с $\int \zeta d\tau$, получим

$$\alpha^2 \dot{\alpha} \dot{\zeta} + 2 \left(\alpha^2 \dot{\alpha}\right)_{,0} \zeta + 3 (\nu - 1) \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \alpha^2 \dot{\alpha} \zeta = \frac{m^2}{2\alpha^2} (3\nu - 2) F.$$

Умножая последнее на $\alpha^2 \dot{\alpha}$, получим

$$\left(\alpha^4 \dot{\alpha}^2 \zeta\right)_{,0} + 3 (\nu - 1) \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \alpha^4 \dot{\alpha}^2 \zeta = \frac{m^2 \dot{\alpha}}{2} (3\nu - 2) F.$$

Умножая на $\alpha^{3(\nu-1)}$, получим

$$\left(\alpha^{3(\nu-1)} \alpha^4 \dot{\alpha}^2 \zeta\right)_{,0} = \frac{m^2}{2} (3\nu - 2) \alpha^{3(\nu-1)} \dot{\alpha} F,$$

$$\alpha^{3\nu+1} \dot{\alpha}^2 \zeta = \frac{m^2 (3\nu - 2)}{2} F \int \alpha^{3(\nu-1)} \dot{\alpha} d\tau,$$

$$\alpha^{3\nu+1} \dot{\alpha}^2 \zeta = \nu A_\nu G + \frac{m^2}{2} F \alpha^{3\nu-2},$$

$$\zeta = \nu A_\nu G \frac{1}{\alpha^{3\nu+1} \dot{\alpha}^2} + \frac{m^2}{2} \frac{F \alpha^{3\nu-2}}{\alpha^{3\nu+1} \dot{\alpha}^2} = G \varkappa (\rho_0 + p_0) \frac{1}{\alpha \dot{\alpha}^2} + \frac{m^2}{2\alpha^2} \frac{F}{\alpha \dot{\alpha}^2}.$$

Подставляя найденное решение для ζ в (4.17), получим для второго решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения (4.16)

$$h_{00} = \alpha^2 \dot{\alpha} \left(G \int \varkappa (\rho_0 + p_0) \frac{d\tau}{\alpha \dot{\alpha}^2} + F \int \frac{m^2}{2\alpha^2} \frac{d\tau}{\alpha \dot{\alpha}^2} \right).$$

Для общего решения (4.16) имеем

$$h_{00} = \alpha^2 \dot{\alpha} \left(C \sqrt{\frac{3}{\varkappa A_\nu}} + G \int \varkappa (\rho_0 + p_0) \frac{d\tau}{\alpha \dot{\alpha}^2} + F \int \frac{m^2}{2\alpha^2} \frac{d\tau}{\alpha \dot{\alpha}^2} \right), \tag{4.18}$$

где константа C соответствует нефизическому решению (3.33). σ находится согласно (4.8).

Решения в виде квадратур автоматически сшиты внутри фаз и по обычной процедуре могут быть сшиты между фазами.

Найдем теперь δ. Для этого выразим правую часть (4.3) через δ:

$$-\varkappa(3\nu-2)(\rho_1+\rho_0 h_{00}) = -\varkappa(3\nu-2)((p_0+\rho_0)\delta+\rho_0 h_{00}) = \\ = -\varkappa(3\nu-2)\rho_0(\nu\delta+h_{00}).$$

Вычитая (4.3) из (4.16), находим

$$\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot h_{00}+\frac{m^2}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)h_{00}=\frac{m^2}{2\alpha^2}F+\varkappa\rho_0(\nu\delta+h_{00}).$$

Учитывая, что

$$\frac{m^2}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)=-\left(2\frac{\dot\alpha^2}{\alpha^2}+\frac{\ddot\alpha}{\alpha}\right)+\frac{\varkappa}{2}(\rho_0-p_0)=-\frac{(\alpha^2\dot\alpha)_{,0}}{\alpha^3}+\frac{\varkappa}{2}(2-\nu)\rho_0,$$

получаем

$$\left(\frac{h_{00}}{\alpha^2\dot\alpha}\right)_{,0}\alpha^2\dot\alpha+\frac{\varkappa}{2}(2-\nu)\rho_0 h_{00}=\frac{m^2}{2\alpha^2}F+\varkappa\rho_0(\nu\delta+h_{00}),$$

$$\left(\frac{h_{00}}{\alpha^2\dot\alpha}\right)_{,0}\alpha^2\dot\alpha=\frac{m^2}{2\alpha^2}F+\varkappa\rho_0\nu\left(\delta+\frac{h_{00}}{2}\right).$$

Отсюда, подставляя (4.18), находим

$$G\varkappa(p_0+\rho_0)+\frac{m^2}{2\alpha^2}F=\frac{m^2}{2\alpha^2}F+\varkappa\rho_0\nu\left(\delta+\frac{h_{00}}{2}\right),$$

$$G\varkappa\rho_0\nu=\varkappa\rho_0\nu\left(\delta+\frac{h_{00}}{2}\right).$$

В итоге получаем

$$\delta=-\frac{h_{00}}{2}+G \tag{4.19}$$

в полном соответствии с выводом (4.14) из закона сохранения энергии (4.6).

На радиационно-доминирующей стадии в уравнении эволюции (2.13) мы будем отбрасывать члены m^2 и m^2/α^2, на барионной стадии — все члены, содержащие массу гравитона, а на стадии квинтэссенции — члены $\dfrac{m^2\alpha^4_{\max}}{\alpha^6}$ и $\dfrac{m^2}{\alpha^2}$. Легко видеть, что член m^2/α^2 мы будем отбрасывать на всех стадиях эволюции, поэтому при выбранной точности вторым интегралом в (4.18) необходимо пренебречь. Тогда

$$h_{00}=\alpha^2\dot\alpha\left(C\sqrt{\frac{3}{\varkappa A_\nu}}+G\int\varkappa(\rho_0+p_0)\frac{d\tau}{\alpha\dot\alpha^2}\right). \tag{4.20}$$

Теперь найдем величины $\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{13}$. Сделаем подстановку $\sigma_{12}=\alpha y$ в (4.11) и разделим его на α

$$\ddot y+5\frac{\dot\alpha}{\alpha}\dot y+\left(\frac{\ddot\alpha}{\alpha}+3\frac{\dot\alpha^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\alpha^2}\right)y=0.$$

Согласно сделанным выше замечаниям, мы должны пренебречь слагаемым m^2/α^2 в множителе при y. Тогда, переходя обратно к σ_{12}, получим, что (4.11) при выбранной точности примет вид

$$\ddot{\sigma}_{12} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\sigma}_{12} = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$\sigma_{12} = K_{12}\sqrt{3\varkappa A_\nu}\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\int\frac{d\tau}{\alpha^3} + L_{12}. \tag{4.21}$$

Осталось найти величины $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$. Поскольку однородная часть (4.12) совпадает с (4.11), то общее решение однородного уравнения, соответствующего (4.12), имеет вид, аналогичный (4.20). Из сравнения (4.12) и (4.13) легко видеть, что частное решение (4.12) можно взять в виде $\sigma/3$. Тогда общее решение (4.12) получим в виде

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma}{3} + K_{11}\sqrt{3\varkappa A_\nu}\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\int\frac{d\tau}{\alpha^3} + L_{11} = -\frac{\alpha^2\dot{\alpha}}{6}\left(C\sqrt{\frac{3}{\varkappa A_\nu}} + \right.$$
$$\left. + G\int\varkappa\left(\rho_0 + p_0\right)\frac{d\tau}{\alpha\dot{\alpha}^2}\right) + \frac{F}{3} + K_{11}\sqrt{3\varkappa A_\nu}\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\int\frac{d\tau}{\alpha^3} + L_{11}. \tag{4.22}$$

Так как $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma$, то $K_{11} + K_{22} + K_{33} = 0$ и $L_{11} + L_{22} + L_{33} = 0$.

Радиационно-доминирующая стадия. На данной стадии с выбранной точностью (2.13) примет вид

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{\varkappa}{3}\rho - \frac{m^2}{12}\frac{\alpha^4_{\max}}{\alpha^6} = \frac{\varkappa A_r}{3\alpha^4} - \frac{m^2}{12}\frac{\alpha^4_{\max}}{\alpha^6} = \frac{\varkappa A_r}{3\alpha^6}\left(\alpha^2 - \alpha^2_{\min}\right), \tag{4.23}$$

откуда

$$\alpha^2\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\varkappa A_r}{3}}\sqrt{\alpha^2 - \alpha^2_{\min}},$$

причем

$$\alpha^2\dot{\alpha}\int\varkappa\left(\rho_0 - p_0\right)\frac{d\tau}{\alpha\dot{\alpha}^2} = -4.$$

Произвол в выборе константы интегрирования в данном интеграле соответствует произволу в выборе константы C для нефизического возмущения. В итоге получим согласно (4.20), (4.8), (4.19)

$$\begin{gathered} h_{00} = C\sqrt{\alpha^2 - \alpha^2_{\min}} - 4G, \quad \sigma = -\frac{C}{2}\sqrt{\alpha^2 - \alpha^2_{\min}} + 2G + F, \\ \delta = -\frac{C}{2}\sqrt{\alpha^2 - \alpha^2_{\min}} + 3G. \end{gathered} \tag{4.24}$$

При $\alpha \to \alpha_{\min}$ нефизическое решение стремится к нулю, а при $\alpha \gg \alpha_{\min}$ имеем

$$h_{00} = C\alpha - 4G, \quad \sigma = -\frac{C}{2}\alpha + 2G + F, \quad \delta = -\frac{C}{2}\alpha + 3G. \tag{4.25}$$

Для нахождения величин σ_{12} и σ_{11} по формулам (4.21) и (4.22) вычислим входящий в них интеграл
$$\int \frac{d\tau}{\alpha^3} = \sqrt{\frac{3}{\varkappa A_r}}\frac{1}{\alpha_{\min}}\left(\arccos\frac{\alpha_{\min}}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right).$$
Произвол в выборе константы интегрирования в этом интеграле соответствует произволу в выборе константы L. В итоге получим
$$\begin{aligned}
&\sigma_{12} = -K_{12}\frac{1}{\alpha_{\min}}\left(\arccos\frac{\alpha_{\min}}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right) + L_{12},\\
&\sigma_{11} = \frac{1}{3}\left(-\frac{C}{2}\sqrt{\alpha^2-\alpha_{\min}^2} + 2G + F\right) - K_{11}\frac{1}{\alpha_{\min}}\left(\arccos\frac{\alpha_{\min}}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right) + L_{11}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

При $\alpha \to \alpha_{\min}$
$$\sigma_{12} \to \frac{\pi K_{12}}{2\alpha_{\min}} + L_{12}, \quad \sigma_{11} \to \frac{1}{3}(2G+F) + \frac{\pi K_{11}}{2\alpha_{\min}} + L_{11},$$
а при $\alpha \gg \alpha_{\min}$ имеем
$$\sigma_{12} = K_{12}\alpha^{-1} + L_{12}, \quad \sigma_{11} = \frac{1}{3}\left(-\frac{C}{2}\alpha + 2G + F\right) + K_{11}\alpha^{-1} + L_{11}. \tag{4.27}$$

Нерелятивистская (барионная) стадия. На данной стадии с выбранной точностью (2.13) примет вид
$$\frac{\dot\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\varkappa}{3}\rho = \frac{\varkappa A_b}{3\alpha^3}, \tag{4.28}$$
откуда
$$\alpha^2\dot\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa A_b}{3}}\alpha^{3/2},$$
причем
$$\alpha^2\dot\alpha\int \varkappa(\rho_0 - p_0)\frac{d\tau}{\alpha\dot\alpha^2} = -2.$$
Произвол в выборе константы интегрирования в данном интеграле соответствует произволу в выборе константы C для нефизического возмущения. В итоге получим согласно (4.20), (4.8), (4.19)
$$h_{00} = C\alpha^{3/2} - 2G, \quad \sigma = -\frac{C}{2}\alpha^{3/2} + G + F, \quad \delta = -\frac{C}{2}\alpha^{3/2} + 2G. \tag{4.29}$$

Для нахождения величин σ_{12} и σ_{11} по формулам (4.21) и (4.22) вычислим входящий в них интеграл
$$\int\frac{d\tau}{\alpha^3} = -\frac{2}{\sqrt{3\varkappa A_b}}\alpha^{-3/2}.$$
Произвол в выборе константы интегрирования в этом интеграле соответствует произволу в выборе константы L. В итоге получим
$$\sigma_{12} = K_{12}\alpha^{-3/2} + L_{12}, \quad \sigma_{11} = \frac{1}{3}\left(-\frac{C}{2}\alpha^{3/2} + G + F\right) + K_{11}\alpha^{-3/2} + L_{11}. \tag{4.30}$$

Стадия квинтэссенции. На данной стадии с выбранной точностью (2.13) примет вид

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{\varkappa}{3}\rho - \frac{m^2}{6} = \frac{\varkappa A_q}{3}\left(\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}\right), \tag{4.31}$$

откуда

$$\alpha^2\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\varkappa A_q}{3}}\alpha^3\sqrt{\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}},$$

причем

$$\alpha^2\dot{\alpha}\int \varkappa\left(\rho_0 + p_0\right)\frac{d\tau}{\alpha\dot{\alpha}^2} = -2\left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right)^3 {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{\alpha_{\max}^{3\nu}}{\alpha^{3\nu}}\right).$$

Произвол в выборе константы интегрирования в данном интеграле соответствует произволу в выборе константы C для нефизического возмущения. В итоге получим согласно (4.20)

$$h_{00} = C\alpha^3\sqrt{\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}} + 2G\frac{\alpha^{3\nu}}{\alpha_{\max}^{3\nu}}{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{\alpha_{\max}^{3\nu}}{\alpha^{3\nu}}\right), \tag{4.32}$$

σ и δ даются соотношениями (4.8) и (4.19) соответственно.

При $\alpha \to \alpha_{\max}$

$$h_{00} \to 2G, \quad \sigma \to -G + F, \quad \delta \to 0,$$

а при $\alpha \ll \alpha_{\max}$ имеем

$$\begin{gathered} h_{00} = C\alpha^{3\left(1-\frac{\nu}{2}\right)} + \frac{2\nu}{\nu-2}G, \quad \sigma = -\frac{C}{2}\alpha^{3\left(1-\frac{\nu}{2}\right)} - \frac{\nu}{\nu-2}G + F, \\ \delta = -\frac{C}{2}\alpha^{3\left(1-\frac{\nu}{2}\right)} - \frac{2}{\nu-2}G. \end{gathered} \tag{4.33}$$

Для нахождения величин σ_{12} и σ_{11} по формулам (4.21) и (4.22) вычислим входящий в них интеграл

$$\int\frac{d\tau}{\alpha^3} = -\frac{2}{\sqrt{3\varkappa A_q}}\frac{\alpha_{\max}^{3(\nu-1)}}{\nu}\sqrt{\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}}\quad {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\nu}, \frac{3}{2}, 1 - \frac{\alpha_{\max}^{3\nu}}{\alpha^{3\nu}}\right).$$

Произвол в выборе константы интегрирования в этом интеграле соответствует произволу в выборе константы L. В итоге получим

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= K_{12}\left(\frac{2}{\nu} - 1\right)\alpha_{\max}^{3(\nu-1)}\sqrt{\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}}\ \ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\nu}, \frac{3}{2}, 1 - \frac{\alpha_{\max}^{3\nu}}{\alpha^{3\nu}}\right) + L_{12}, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{3}\left[-\frac{C}{2}\alpha^3\sqrt{\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}} - G\frac{\alpha^3}{\alpha_{\max}^3}\ \ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{\alpha_{\max}^{3\nu}}{\alpha^{3\nu}}\right) + F\right] + \\ &\quad + K_{11}\left(\frac{2}{\nu} - 1\right)\alpha_{\max}^{3(\nu-1)}\sqrt{\alpha^{-3\nu} - \alpha_{\max}^{-3\nu}}\ \ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\nu}, \frac{3}{2}, 1 - \frac{\alpha_{\max}^{3\nu}}{\alpha^{3\nu}}\right) + L_{11}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

При $\alpha \to \alpha_{\max}$

$$\sigma_{12} \to L_{12}, \quad \sigma_{11} \to \frac{1}{3}\left(-G + F\right) + L_{11},$$

а при $\alpha \ll \alpha_{\max}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sigma_{12} = K_{12}\alpha^{3\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} + L_{12},\\
&\sigma_{11} = \frac{1}{3}\left(-\frac{C}{2}\alpha^{3\left(1-\frac{\nu}{2}\right)} + \frac{\nu}{2-\nu}G + F\right) + K_{11}\alpha^{3\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} + L_{11}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

5. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ВОЗМУЩЕНИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ТОЛЬКО ОТ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим вопрос о калибровочных преобразованиях для возмущений, не зависящих от пространственных координат. Как известно [1, § 3], уравнение для калибровочных преобразований имеет вид

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \varepsilon^\sigma = 0. \tag{5.1}$$

Преобразования, даваемые группой Пуанкаре,

$$\gamma^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu + \gamma^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu = 0, \tag{5.2}$$

являются частным случаем этих преобразований.

Член с массой гравитона в первом уравнении РТГ (1.1) нарушает группу калибровочных преобразований до группы Пуанкаре, и потому преобразования, генерируемые первой, дают точное решение только в области, где массой гравитона можно пренебречь, т. е. при $\alpha_{\min} \ll \alpha \ll \alpha_{\max}$.

Для нашего случая уравнение (5.1) в координатах $\{x'^\mu\} = \{t, x, y, z\}$ примет вид

$$g'^{\mu\nu}\partial'_\mu\partial'_\nu\varepsilon'^\sigma = g'^{00}{\partial'}_0^2\varepsilon'^\sigma + g^{ij}\partial_i\partial_j\varepsilon'^\sigma = \frac{\alpha^4_{\max}}{\alpha^6}{\partial'}_0^2\varepsilon'^\sigma - \frac{1}{\alpha^2}\triangle\varepsilon'^\sigma = 0$$

или

$$\frac{\alpha^4_{\max}}{\alpha^4}{\partial'}_0^2\varepsilon'^\sigma = \triangle\varepsilon'^\sigma. \tag{5.3}$$

В случае не зависящих от пространственных координат возмущений имеем

$${\partial'}_0^2\varepsilon'^\sigma = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\varepsilon'^\sigma = C_1^\sigma + C_2^\sigma t,$$

где C_1^σ и C_2^σ — наборы постоянных. В координатах $\{x^\mu\} = \{\tau, x, y, z\}$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0 = \frac{d\tau}{dt}\varepsilon'^0 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2_{\max}}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right), \quad \varepsilon^i = \varepsilon'^i = C_1^i + C_2^i t,\\
&\varepsilon_0 = \varepsilon^0 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2_{\max}}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right), \qquad \varepsilon_i = -\alpha^2\varepsilon^i = -\alpha^2\left(C_1^i + C_2^i t\right).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь индексы опускаются с помощью метрики $g_{\mu\nu}$.

Как следует из (5.4), компоненты ε^σ состоят из двух частей, пропорциональных, соответственно, C_1^σ и C_2^σ. Слагаемые с C_1^σ удовлетворяют не только (5.1), но и (5.2) и являются точным решением всей системы уравнений для возмущений (3.15), (3.16), (3.22)–(3.24) во всей области $\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$. По форме они полностью совпадают с координатными преобразованиями (3.32) при $C_1^\sigma = a^\sigma$. Напротив, слагаемые с C_2^σ удовлетворяют только (5.1) и с хорошей точностью дают решение системы (3.15), (3.16), (3.22)–(3.24) в области, где массой гравитона можно пренебречь, т. е. $\alpha_{\min} \ll \alpha \ll \alpha_{\max}$.

Найдем теперь возмущения метрики, задаваемые калибровочным преобразованием (5.4). Формулы для калибровочных преобразований [1, §3] совпадают с соответствующими формулами для координатных преобразований, приведенными выше (3.33),

$$
\begin{aligned}
h_{00}^{\text{gauge}} &= 6\frac{\alpha^2\dot{\alpha}}{\alpha_{\max}^2}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right) + 2C_2^0,\\
h_{0i}^{\text{gauge}} &= -C_2^i\alpha^2\frac{dt}{d\tau} = -C_2^i\alpha_{\max}^2\frac{1}{\alpha},\\
h_{ij}^{\text{gauge}} &= -2\frac{\alpha^4\dot{\alpha}}{\alpha_{\max}^2}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right)\delta_{ij},\\
\sigma_{ij}^{\text{gauge}} &= -\frac{\alpha^2\dot{\alpha}}{\alpha_{\max}^2}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right)\delta_{ij},\\
\sigma^{\text{gauge}} &= -3\frac{\alpha^2\dot{\alpha}}{\alpha_{\max}^2}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right),\\
u_{(1)i}^{\text{gauge}} &= 0,\\
\delta^{\text{gauge}} &= -3\frac{\alpha^2\dot{\alpha}}{\alpha_{\max}^2}\left(C_1^0 + C_2^0 t\right).
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Таким образом, отличны от нуля величины h_{00}^{gauge}, σ^{gauge}, $\sigma_{11}^{\text{gauge}} = \sigma_{22}^{\text{gauge}} = \sigma_{33}^{\text{gauge}} = \sigma^{\text{gauge}}/3$, $\delta^{\text{gauge}} = \sigma^{\text{gauge}}$, h_{0i}^{gauge}.

Константа C_1^0 дает точное решение $\alpha^2\dot{\alpha}$, которое совпадает с нефизическим решением (3.33), и соответствует константе C в (4.33).

Поскольку калибровочные преобразования (5.1) дают решение только в области $\alpha_{\min} \ll \alpha \ll \alpha_{\max}$, необходимо положить

$$
t = \alpha_{\max}^2\int\frac{d\tau}{\alpha^3} = \alpha_{\max}^2\int\frac{d\alpha}{\alpha^3\dot{\alpha}} = \alpha_{\max}^2\int\frac{d\alpha}{\alpha^4\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}} \simeq
$$
$$
\simeq \alpha_{\max}^2\sqrt{\frac{3}{\varkappa A_\nu}}\int\alpha^{\frac{3\nu}{2}-4}d\alpha = \frac{\alpha_{\max}^2}{\sqrt{3\varkappa A_\nu}}\frac{\alpha^{3\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}}{\dfrac{\nu}{2}-1}.
$$

C_2^0 дает решение $\alpha^2\dot{\alpha}t \sim \alpha^{3\left(1-\frac{\nu}{2}\right)}\alpha^{3\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} = 1$, т. е. постоянную, которая в (4.33) соответствует константам F и G при условии $F = G$. Вклад константы C_1^i равен нулю в силу дифференцирования. C_2^i дает решение (4.9), (4.10) и соответствует константе H_k только в пренебрежении массой гравитона, но во всей области $\alpha_{\min} \ll \alpha \ll \alpha_{\max}$.

Таким образом, в случае отсутствия зависимости от пространственных координат калибровочные преобразования порождают три решения ($C, F = G, H_k$) из шести ($C, F, G, H_k, K_{ij}, L_{ij}$).

Для полноты анализа нужно еще найти решения для возмущений в ОТО в какой-нибудь другой калибровке, чтобы понять, насколько результаты зависят от этого выбора. Наибольший интерес, очевидно, представляют гармонические координаты Фока [13], поскольку формально уравнения ОТО в этих координатах получаются из уравнений РТГ путем отбрасывания членов с массой гравитона и трактовки второго уравнения РТГ как дополнительного координатного условия гармоничности[1] (при фиксированной метрике Минковского). Если же теперь в рамках ОТО в гармонических координатах искать координатные преобразования, не нарушающие выбранного координатного условия, то получим преобразования, совпадающие по форме с калибровочными преобразованиями РТГ (5.1). Таким образом, найденные нами в этом разделе решения (5.5), порождаемые калибровочными преобразованиями (5.4), являются нефизическими решениями ОТО в гармонических координатах.

Итак, ОТО в гармонических координатах имеет три нефизических решения, но в РТГ нефизическим является только одно — C.

6. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РТГ И ОТО

Фридмановская модель эволюции Вселенной в РТГ, как известно [1, $\S$ 10], имеет одно принципиальное отличие от соответствующей плоской модели в ОТО: наличие массы покоя гравитона приводит к циклическому развитию от некоторой максимальной плотности до минимальной и обратно. Поэтому имеет смысл сравнивать только тот участок эволюции, когда этой массой можно пренебречь, т. е. $\alpha_{\min} \ll \alpha \ll \alpha_{\max}$. В этой области невозмущенные решения полностью совпадают.

Поскольку уравнение состояния квинтэссенции (2.22) представляет собой общий вид уравнения состояния, для которого остальные являются частными случаями, то, учитывая сказанное выше, достаточно ограничиться результатами (4.33), (4.35), (4.9).

Различия выводов РТГ и ОТО для малых флуктуаций Вселенной вытекают из соответствующих различий между этими теориями. В РТГ для однозначности решений основные уравнения дополняют уравнениями (3.15), (3.16), которые являются следствиями дополнительного уравнения РТГ (1.2). В стандартной формулировке ОТО нет такого дополнительного уравнения, поэтому для однозначности решения в различных ситуациях добавляют разные координатные условия. В частности, для данной задачи Лифшиц [2–4] использует условие синхронности ($g_{00} = 1, g_{0i} = 0$), но можно ее рассматривать и в гармонических координатах.

Нефизическими возмущениями в ОТО являются те, которые могут быть исключены простым координатным преобразованием, совместимым с выбранным координатным условием, и поэтому, согласно идеологии ОТО, они не представляют собой реального физического изменения метрики. В РТГ гравитационное поле задается как физическое поле в базовом пространстве Минковского, и поэтому в ней нефизическими могут являться

[1] Заметим, что гармоническими являются декартовы координаты пространства Минковского, т. е. t, x, y, z. Однако связь (2.2) между используемыми нами координатами и гармоническими хорошо известна, и поэтому не представляет большого труда преобразовать к последним полученные результаты. Наши координаты более удобны для сравнения с соответствующими результатами, изложенными в работах по ОТО.

только возмущения, задаваемые преобразованиями координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, т. е. преобразованиями группы Пуанкаре.

Нефизическое возмущение в РТГ имеет вид $t^{-1} \sim \alpha^{3\left(1-\frac{\nu}{2}\right)} \sim \tau^{\frac{2}{\nu}-1}$, где t — время пространства Минковского, так как уравнения РТГ форминвариантны относительно трансляции t, а в ОТО аналогичное нефизическое возмущение имеет вид τ^{-1}, где τ — время риманова пространства, поскольку уравнения ОТО в синхронных координатах форминвариантны относительно трансляции τ.

Величины h_{00} и σ, помимо нефизического вклада, в РТГ содержат две независимые константы, а в ОТО константа лишь одна[1], так как дополнительные условия имеют первый и нулевой порядок соответственно.

Недиагональные пространственные компоненты метрики в РТГ и в ОТО содержат два члена: $\alpha^{3\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} \sim \tau^{1-\frac{2}{\nu}}$ и константу.

И, наконец, для смешанных пространственно-временных компонент в РТГ имеем зависимость $\alpha^{-1} \sim \tau^{-\frac{2}{3\nu}}$, в ОТО данные компоненты отсутствуют в силу выбранного условия синхронности.

Видно, что два различных выбора координат в ОТО приводят к одинаковым результатам с точностью до нефизической компоненты. А именно, в синхронной системе координат необходимо положить коэффициент при τ^{-1} $C' = 0$, а в гармонической — $C = 0, G = 0, H_k = 0$.

Таким образом, всего имеется шесть решений в РТГ и четыре в ОТО с условием синхронности. Физических же — пять в РТГ, три в ОТО в гармонических координатах и три в ОТО с условием синхронности. Эти результаты отражены в таблице.

Составляющая	ОТО с условием синхронности	ОТО в гармонических координатах	РТГ
Нефизическая	1 (C')	3 $(C, F = G, H_k)$	1 (C)
Физическая	3 (F, K_{ij}, L_{ij})	3 $(F \neq G, K_{ij}, L_{ij})$	5 $(F, G, H_k, K_{ij}, L_{ij})$

Теперь рассмотрим характеристики вещества.

Согласно (4.33) возмущение плотности δ в РТГ имеет только одну физическую составляющую — G, которая является нефизической в ОТО в гармонических координатах. В ОТО с условием синхронности δ не имеет физических составляющих, что еще раз свидетельствует о совпадении обеих систем координат в ОТО при $G = 0$.

Возмущение скорости $u_{(1)i}$ среди всех имеющихся случаев отлично от нуля только в РТГ и только с учетом массы гравитона, что лишний раз подтверждает тот факт, что различия между РТГ и ОТО обусловлены массой гравитона.

[1]Заметим, что в известной монографии Стивена Вейнберга [6, гл. 15, § 10] данные результаты ОТО изложены неточно. А именно, нефизическое решение τ^{-1} считается физическим, константа же, напротив, считается нефизической (что верно в случае пространственно-зависящих возмущений, но неверно в рассматриваемом случае). Кроме того, добавляется возмущение $\tau^{2\left(1-\frac{2}{3\nu}\right)}$, которое вообще не является решением системы уравнений ОТО для малых флуктуаций.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006. 253 с.
2. *Лифшиц Е. М.* О гравитационной устойчивости расширяющегося мира // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 587–602.
3. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.* Проблемы релятивистской космологии // УФН. 1963. Т. LXXX, вып. 3. С. 391–438.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
5. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975. 736 с.
6. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.;
   Weinberg S. Gravitation and Cosmology. N. Y.: Wiley, 1972.
7. Космология, теории и наблюдения / Под ред. Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова. М.: Мир, 1978.
8. *Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* Фридмановская модель эволюции Вселенной в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 80, № 2. С. 305–312.
9. *Герштейн С. С. и др.* Эволюция Вселенной в полевой теории гравитации // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 5. С. 1003–1050.
10. *Ries A. G. et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astron. J. 1988. V. 116. P. 1009–1038.
11. *Perlmutter S. et al.* Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe // Nature. 1998. V. 391. P. 51–54; Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565–586.
12. *Bennett C. L. et al.* Four Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations Maps and Basic Results // Astrophys. J. 1996. V. 64. P. L1–L4.
13. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961. 563 с.

Получено 25 июня 2008 г.