

P4-2002-26

О. О. Воскресенская

**ПЕРТУРБАТИВНЫЙ АНАЛИЗ  
ВЛИЯНИЯ СИЛЬНОГО  $\pi^+\pi^-$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
НА СООТНОШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
ОБРАЗОВАНИЯ  $A_{2\pi}$ -АТОМОВ В  $nS$ -СОСТОЯНИЯХ**

## Введение

Изучение элементарных адронных атомов (водородоподобных атомов, образованных двумя противоположно заряженными адронами) привлекает в последнее время внимание всё большего числа физиков — как теоретиков, так и экспериментаторов [1].

Измерение сдвигов уровней этих атомов, обусловленных сильным взаимодействием, и их времени жизни в основном состоянии позволяет определить значения длин адрон-адронного рассеяния с точностью, намного превышающей точность, достижимую в прямых экспериментах по исследованию низкоэнергетического адрон-адронного рассеяния, и тем самым проверить предсказания КХД-инспирированной модели киральной симметрии [2, 3]. В настоящее время проводятся или планируются эксперименты по изучению свойств атомов  $A_{\pi^-p}$ ,  $A_{\pi^-d}$  [4];  $A_{K^-p}$  [5],  $A_{K^-d}$  [6];  $A_{\pi^-K^+}$  и  $A_{\pi^-K^0}$  [7].

Теоретической основой экспериментального определения длин адрон-адронного рассеяния путём изучения свойств адронных атомов являются “формулы Дезера” [8] (см. также [9]), выведенные в рамках нерелятивистского квантово-механического подхода:

$$\Delta E_{ns}^s = -\frac{2\pi}{\mu} a_s |\psi_{ns}^c(0)|^2, \quad (1)$$

$$\Gamma_{1s} = \tau_{1s}^{-1} = \frac{16\pi}{9} \left(\frac{p^*}{\mu}\right) |a_{ce}|^2 |\psi_{1s}^c(0)|^2. \quad (2)$$

Здесь  $\mu$  — приведённая масса адронного атома;  $p^*$  — импульс продуктов аннигиляции атома в пару нейтральных адронов;  $\psi_{ns}^c(0)$  — значение кулоновской волновой функции адронного атома при совпадающих значениях радиус-векторов составляющих его адронов.

Длины рассеяния (scattering)  $a_s$  и перезарядки (charge exchange)  $a_{ce}$  связаны с длинами рассеяния в определённых изотопических состояниях адрон-адронной системы  $a_I$  соотношениями:  $a_s = (2a_{1/2} + a_{3/2})/3$ ,  $a_{ce} = (a_{1/2} - a_{3/2})$  — для  $\pi^-p$ ,  $\pi^-K$ -атомов и  $a_s = (2a_0 + a_2)/3$ ,  $a_{ce} = (a_0 - a_2)$  — для  $\pi^+\pi^-$ -атомов.

Характерным свойством уравнений (1), (2) является факторизация вкладов сильного (представленного длинами рассеяния) и электромагнитного (представленного кулоновскими волновыми функциями) взаимодействий, что является следствием приближений, использованных при их выводе.

Оценке точности соотношений (1), (2) и вычислению к ним релятивистских, электромагнитных и других поправок в рамках различных теоретико-полевых подходов [10] (нерелятивистского подхода эффективных лагранжианов [11], киральной пертурбативной теории [12] на основе формализма уравнений Бете—Солпитера [13]) посвящены многочисленные исследования.

Наиболее детально исследованы поправки к формуле для времени жизни атомов пиония в основном состоянии, экспериментальное измерение которого проводится в ЦЕРНе коллаборацией DIRAC [7].

Показано, что для основного канала распада пиония  $\Gamma = \Gamma^{2\pi^0} + \Gamma^{2\gamma} + \dots \approx \Gamma^{2\pi^0}$  ( $\Gamma^{2\gamma} \approx 0,36\Gamma^{2\pi^0}$ ) релятивистская поправка к ширине распада  $\Gamma_0 \equiv \Gamma_{1s}$  в первом порядке теории возмущений составляет  $-0,55\%$ , электромагнитная  $\sim 1,7\%$ , суммарная поправка, рассчитанная с учётом всех возможных эффектов,  $\sum_i \delta_i = (6,1 \pm 3,1)\% \approx \delta_\Gamma = (5,8 \pm 1,2)\%$  [13]. С их учётом ширина распада из основного состояния оценивается величиной

$$\Gamma = \Gamma_0(1 + \delta_\Gamma). \quad (3)$$

Согласно оценкам работ [7], теоретическая неопределённость выражения, связывающего время жизни атомов пиония с длинами  $\pi\pi$ -рассеяния, составляет величину порядка 1%. Эта неопределённость привела бы всего к 0,5%-й ошибке в определении комбинации  $a_0 - a_2$  длин  $\pi\pi$ -рассеяния, если бы в эксперименте DIRAC время жизни атомов пиония удалось измерить абсолютно точно, что, разумеется, невозможно.

Метод определения времени жизни атомов пиония в этом эксперименте основан на сопоставлении величины вероятности ионизации атомов пиония, измеряемой экспериментально, с результатом теоретического расчёта этой величины, содержащим  $\tau_{1s}$ , в качестве подгоночного параметра. Поэтому точность измерения  $\tau_{1s}$  определяется не только погрешностями самого эксперимента, но и степенью точности приближений, используемых при теоретическом описании процессов образования атомов пиония в мишени и дальнейшего их прохождения через вещество.

Ниже обсуждается точность основных соотношений теории образования димезоатомов [14], используемых при интерпретации эксперимента DIRAC. Важную роль в этой теории играет соотношение

$$\left| \frac{\psi_{n_1s}(r)}{\psi_{n_2s}(r)} \right|_{r \rightarrow 0}^2 = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^3 + O\left( \frac{\langle r^2 \rangle_p}{r_B^2} \right) \quad (4)$$

между значениями квадратов волновых функций в  $ns$ -состояниях при малых ( $r \ll r_B$ ) значениях аргумента ( $r_B$  — боровский радиус атома).

Это соотношение является строгим, если между частицами, составляющими димезоатом, действуют только кулоновские силы, и в принципе могло бы быть нарушенным при учете сильного взаимодействия между ними.

Далее, в первом порядке теории возмущений по интенсивности сильного взаимодействия, будет показано, что это соотношение остается справедливым с точностью до величин порядка  $(r_s/r_B) \sim 10^{-3}$  и при учете сильного взаимодействия между мезонами ( $r_s$  — характерный радиус сильных взаимодействий).

Мы переформулируем также формулу Дезера (1) в терминах эффективного радиуса сильного взаимодействия и относительной поправки к кулоновской волновой функции пиония в нуле  $c_n = \Delta\psi_{ns}(0)/\psi_{ns}^c(0)$ , обусловленной сильным взаимодействием, и покажем, что, наряду с  $s$ -волновыми длинами рассеяния  $a_{I_1}$  и  $a_{I_2}$ , величины  $c_n$  и  $r_s$  в принципе могли бы быть экспериментально определены.

## 1 Элементы теории образования элементарных адронных атомов

Задача об образовании элементарных адронных атомов в процессах высокоэнергетического адрон-адронного (или адрон-ядерного) взаимодействия впервые была рассмотрена в работе Л.Л.Немёнова [14], по существу положившей начало систематическим исследованиям в области физики релятивистских адронных атомов и заложившей теоретический фундамент проводимого в настоящее время в ЦЕРНе эксперимента по измерению времени жизни  $\pi^+\pi^-$ -атома (2) с точностью порядка 10% [7]. Поэтому при проведении дальнейшего анализа мы будем прежде всего следовать логике этой работы.

Если отвлечься от несущественных для дальнейшего рассмотрения физических деталей, то основной результат работы [14] для вероятности образования атома пиония в

некотором состоянии  $f$  ( $f$  — совокупность квантовых чисел, описывающих это состояние) можно представить в виде

$$w_f = \left| \int M(\vec{p}) \psi_f(\vec{p}) d^3 p \right|^2. \quad (5)$$

Здесь  $\psi_f(\vec{p})$  — волновая функция атома пиония в состоянии  $f$ , представляющая собой фурье-преобразование

$$\psi_f(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi_f(\vec{r}) e^{i\vec{p}\vec{r}} d^3 r \quad (6)$$

волновой функции атома пиония в координатном представлении;  $M(\vec{p})$  — амплитуда образования пары  $\pi^+\pi^-$  с относительным импульсом  $\vec{p}$  в процессе взаимодействия протонного пучка с мишенью, нормированная условием

$$\sum_f w_f = \int |M(\vec{p})|^2 d^3 p = 1. \quad (7)$$

Волновые функции  $\psi_f(\vec{r})$  являются решениями уравнения Шредингера

$$\left[ -\frac{\Delta}{2\mu} + V(r) \right] \psi_f(\vec{r}) = E_f \psi_f(\vec{r}), \quad (8)$$

где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса,  $V(r)$  — сумма потенциальных энергий электромагнитного (кулоновского) и сильного взаимодействий

$$V(r) = V_c(r) + V_s(r). \quad (9)$$

Вид кулоновского потенциала хорошо известен:

$$V_c(r) = -\alpha/r, \quad \alpha = 1/137, \quad r = |\vec{r}|.$$

Вид потенциала сильного взаимодействия в принципе мог бы быть восстановлен методами обратной задачи рассеяния при наличии исчерпывающей экспериментальной информации об энергетической зависимости фазовых сдвигов упругого  $\pi^+\pi^-$ -рассеяния в  $s$ -состоянии. (Здесь и в дальнейшем спектроскопический символ  $s$  используется для обозначения квантово-механических состояний с нулевыми значениями орбитального ( $l$ ) и, соответственно, магнитного ( $m$ ) квантовых чисел.) Однако объем этой информации весьма ограничен и точность её, как правило, невысока, что не позволило до сих пор восстановить функцию  $V_s(r)$ . Поэтому для оценки порядка величин различных эффектов, обусловленных сильным  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействием, обычно используются выражения для  $V_s(r)$ , получаемые в рамках определенных теоретических моделей.

Поскольку различные модели приводят к довольно сильно различающимся выражениям для  $V_s(r)$ , возникает заметная модельная зависимость результатов, что приводит к неопределенности теоретических предсказаний на уровне нескольких процентов, а иногда и десятков процентов.

Как будет показано далее, неопределенности именно такого порядка возникают при вычислении абсолютных значений вероятностей (5). Но в отношениях вида  $w_{f_1}/w_{f_2}$  (относительных вероятностях) они в значительной мере сокращаются, так что точность расчёта последних оказывается достаточно высокой.

Прежде чем переходить к обсуждению влияния сильного  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия на величины (5) и относительные вероятности, изложим результаты рассмотрения этой задачи, полученные в пренебрежении им.

## 1.1 Образование “кулоновских” димезоатомов точечным источником

Если бы сильное взаимодействие между пионами отсутствовало или по каким-то причинам слабо влияло на значения волновых функций атома пиония [15, 16], так что величиной  $V_s(r)$  в уравнении Шрёдингера можно было бы пренебречь, то волновые функции атома пиония были бы решениями квантово-механической кеплеровой задачи и с точностью до масштабного преобразования совпадали бы с волновыми функциями атома водорода [17]. Для простоты атомы пиония, описываемые такими волновыми функциями, будем называть “кулоновскими” атомами пиония.

Распределение по относительному импульсу в “кулоновских” атомах сконцентрировано в узкой области  $|\vec{p}| \sim p_B = \mu\alpha$ , где  $\mu$  — приведённая масса, равная в рассматриваемом случае половине массы пиона  $\mu = m_\pi/2 \approx 70$  МэВ, так что  $p_B \sim 0,5$  МэВ (в работе всюду принята система единиц  $\hbar = c = 1$ ).

Поскольку величина  $M(\vec{p})$  меняется гораздо медленнее, чем  $\psi(\vec{p})$  (для нее характерен импульс  $|\vec{p}| \sim p_s \sim 100$  МэВ), то в используемом приближении ее можно вынести из-под знака интеграла в точке  $\vec{p} = 0$ , в результате чего получим:

$$w_f = \left| M(p=0) \int \psi_f(\vec{p}) d^3p \right|^2 = (2\pi)^3 \left| M(p=0) \psi_f(\vec{r}=0) \right|^2. \quad (10)$$

Отсюда следует, что в сильных взаимодействиях могут образовываться атомы пиония лишь в тех состояниях  $f$ , волновые функции которых не обращаются в нуль при  $\vec{r} = 0$ , то есть в  $s$ -состояниях. Различаются такие состояния между собой лишь значением главного квантового числа  $n$ .

Но для  $ns$ -состояний “кулоновских” димезоатомов, согласно [14],

$$|\psi_f(\vec{r}=0)|^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(\mu\alpha)^3}{\pi}, \quad (11)$$

откуда получаем

$$\frac{w_{n_{1s}}}{w_{n_{2s}}} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^3. \quad (12)$$

Если ввести величину

$$M(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int M(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{r}} d^3p, \quad (13)$$

которую можно интерпретировать как амплитуду образования  $\pi^+\pi^-$ -пары с относительным расстоянием  $\vec{r}$ , и переписать (5) в виде

$$w_f = \left| \int M(\vec{r}) \psi_f(\vec{r}) d^3r \right|^2, \quad (14)$$

то использование приближения, приведшего к результату (12), эквивалентно предположению о том, что в сильных взаимодействиях  $\pi^+\pi^-$ -пары образуются практически с нулевым относительным расстоянием, т.е.

$$M(\vec{r}) = M(\vec{p} = 0)\delta(\vec{r}), \quad (15)$$

где  $\delta(\vec{r})$  — дельта-функция Дирака.

## 1.2 Образование “кулоновских димезоатомов” протяженным источником

В действительности размеры области, в которой происходит образование  $\pi^+\pi^-$ -пар, конечны, хотя и малы в сравнении с размерами атомов пиония, в которые часть этих пар превращается в результате кулоновского притяжения. По различным оценкам [18], среднеквадратичный радиус этой области порядка  $\langle \vec{r}^2 \rangle^{1/2} \sim 3 \div 10$  фм, в то время как боровский радиус основного состояния пиония равен  $r_B = 367$  фм. Поэтому поправки порядка  $r_p/r_B$ , где  $r_p \sim \langle \vec{r}^2 \rangle^{1/2}$ , к результату нулевого приближения могут составлять несколько процентов.

Действительно, нетрудно видеть [19], что с точностью до величин порядка  $r_p/r_B$  результат для вероятности образования атома пиония в  $ns$ -состоянии может быть записан в виде

$$w_n = |M(p=0)|^2 |\psi_f(\vec{r}=0)|^2 \left[ 1 + 2 \langle r \rangle_p \frac{\psi'_n(r=0)}{\psi_n(r=0)} \right], \quad (16)$$

где

$$\langle r \rangle_p = \frac{\int M(\vec{r})r d^3\vec{r}}{\int M(\vec{r})d^3\vec{r}} \sim \langle r^2 \rangle_p^{1/2}. \quad (17)$$

Поскольку известен лишь порядок величины размера области образования  $\pi^+\pi^-$ -пар и, соответственно, величины  $\langle r \rangle_p$ , а не ее точное значение, то это вносит неопределенность в значение величины  $w_n$ .

Но если снова ограничиться лишь рассмотрением относительных вероятностей, которые только и важны, то, учитывая, что отношение

$$\frac{\psi'_n(r=0)}{\psi_n(r=0)} = \mu\alpha = \frac{1}{r_B} \quad (18)$$

не зависит от  $n$ , получаем

$$\frac{w_{n_1s}}{w_{n_2s}} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^3 + O\left( \frac{\langle r^2 \rangle_p}{r_B^2} \right), \quad (19)$$

где

$$\frac{\langle r^2 \rangle_p}{r_B^2} \sim 10^{-3}.$$

Итак, мы приходим к выводу, что если бы сильное взаимодействие между  $\pi^+$  и  $\pi^-$  в атоме пиония отсутствовало, то результат (12), полученный в работе [14], был бы справедлив с высокой степенью точности. Это обеспечивается малостью величины  $\langle r^2 \rangle_p / r_B^2$  и независимостью величины  $\psi'_n(0)/\psi_n(0)$  от  $n$ .

Цель последующего анализа — показать, что результат (19) остается справедливым и при включении в рассмотрение эффектов сильного  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия.

## 2.1 Оценка влияния сильного взаимодействия на волновые функции адронных атомов в первом порядке теории возмущений Рэлея—Шрёдингера

Соотношения вероятностей образования адронных атомов в различных  $ns$ -состояниях (12), (19) получены в предположении, что волновые функции этих состояний являются чисто кулоновскими, то есть удовлетворяют уравнению Шрёдингера

$$\left[ -\frac{\Delta}{2\mu} + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (20)$$

$$V(r) = V_c(r).$$

Тем самым пренебрегалось влиянием сильного взаимодействия как на величины собственных значений энергии связанных (атомных) состояний адронов, так и на пространственное распределение адронов в атомах, описываемое их волновыми функциями.

В дальнейшем мы снимем это ограничение и будем полагать, что волновые функции адронных атомов являются решениями уравнения Шрёдингера (20), в котором потенциальная энергия взаимодействия, а точнее потенциал  $V(r)$ , является суммой кулоновского потенциала и потенциала сильного взаимодействия

$$V(r) = V_c(r) + V_s(r). \quad (21)$$

Специфическим свойством сильного взаимодействия является его короткодействие: потенциал сильного взаимодействия намного больше кулоновского только в очень узкой области  $r \leq r_s$  и становится пренебрежимо малым по сравнению с ним в области  $r_s \ll r \ll r_B$ .

По этой причине эффекты сильного взаимодействия зачастую являются поправочными по отношению к эффектам кулоновского взаимодействия. Например, они очень незначительно (не более, чем на десятые доли процентов) изменяют собственные значения оператора Гамильтона рассматриваемой задачи, и этот результат является более или менее модельно-независимым. На этом основании можно пытаться трактовать их как возмущение и исследовать хорошо известными методами теории возмущений.

Известно несколько вариантов теории возмущений, описание которых можно найти, например, в книге [20]. Выбор конкретного варианта определяется спецификой исследуемой проблемы. Наиболее общий метод теории возмущений, именуемый “методом Рэлея—Шрёдингера” и излагаемый во всех курсах квантовой механики, применим к произвольным квантово-механическим системам. Суть его состоит в разложении вектора состояния (волновой функции) “возмущённой задачи”

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad (22)$$

$$H = H_0 + V, \quad V = V_s, \quad H_0 = -\frac{\Delta}{2\mu} + V_c,$$

в ряд по полной системе векторов состояний  $\psi_n^{(0)}$  “невозмущённой задачи”

$$H_0\psi_n^{(0)} = E_n\psi_n^{(0)}, \quad (23)$$

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \Delta\psi_n,$$

$$\Delta\psi_n = \sum_{k \neq n} c_{nk} \psi_k^{(0)}. \quad (24)$$

В первом порядке теории возмущений коэффициенты этого разложения имеют вид

$$c_{nk}^{(1)} = \frac{V_{nk}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \quad (25)$$

где  $V_{nk} = \langle \psi_n^{(0)} | V | \psi_k^{(0)} \rangle$  — матричный элемент для состояний  $\psi_n^{(0)}$  и  $\psi_k^{(0)}$  невозмущённой системы оператора возмущения  $V$ , а  $E_n^{(0)}$ ,  $E_k^{(0)}$  — собственные значения “невозмущённого” гамильтониана  $H_0$ .

В работах [15, 16] теория возмущений Рэлея—Шрёдингера была применена для оценки влияния сильного мезон-мезонного взаимодействия на значения волновых функций основных состояний димезоатомов ( $\pi^+\pi^-$  и  $\pi^\pm K^\mp$ ) в начале координат.

В [15] эффективный потенциал  $V_s(r)$   $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия подбирался таким образом, чтобы с его помощью воспроизводились результаты расчёта амплитуды низкоэнергетического рассеяния в рамках виртон-кварковой модели.

Поправка к значению волновой функции основного состояния  $A_{2\pi^-}$ ,  $A_{\pi K}$ -атома оценивалась в [15] с помощью соотношений

$$\Delta\psi_{1s}(0) = c_{12} \psi_{2s}^{(0)}(0), \quad (26)$$

$$c_{12}^{(1)} = \frac{\int \psi_{2s}^{(0)}(r) V_s(r) \psi_{1s}^{(0)}(r) d^3r}{E_{2s}^{(0)} - E_{1s}^{(0)}}. \quad (27)$$

Здесь  $\psi_{1s}^{(0)}$  и  $\psi_{2s}^{(0)}$  — невозмущённые (“кулоновские”) волновые функции 1s- и 2s-состояний. Анализ проводился в сферическом базисе, состояния индексировались значениями главного ( $n$ ), орбитального ( $l$ ) и магнитного ( $m$ ) квантовых чисел, так что, например,  $|2s\rangle \equiv |200\rangle$ .

Результат этой оценки соответственно для  $A_{2\pi^-}$ ,  $A_{\pi K}$ -атомов следующий:

$$\frac{\Delta\psi_{1s}(0)}{\psi_{1s}^{(0)}(0)} = 3,3 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\Delta\psi_{1s}(0)}{\psi_{1s}^{(0)}(0)} = 4,2 \cdot 10^{-4}. \quad (28)$$

Авторы работы [16], опираясь на результаты анализа  $\pi\pi^-$ - и  $\pi K$ -рассеяния в рамках киральных моделей, аппроксимировали потенциалы  $\pi^+\pi^-$ - и  $\pi^\pm K^\mp$ -сильных взаимодействий выражением

$$V_s(r) = g\delta(\vec{r}), \quad g = \frac{a_s}{4\pi}, \quad (29)$$

где  $a_s$  — длина  $\pi^+\pi^-$ - и  $\pi^\pm K^\mp$ -рассеяний “в отсутствие” кулоновского взаимодействия.

В этой работе поправка к значению волновой функции основного состояния ( $|1s\rangle \equiv |100\rangle$ ) оценивалась по формулам

$$\Delta\psi_{1s}(0) = \sum_{k=2}^{\infty} c_{1k} \psi_{ks}^{(0)}(0), \quad (30)$$

$$c_{1k}^{(1)} = \frac{\int \psi_{ks}^{(0)}(r) V_s(r) \psi_{1s}^{(0)}(r) d^3r}{E_{ks}^{(0)} - E_{1s}^{(0)}}, \quad (31)$$

$$\psi_{ns}(r) \equiv \psi_{n00}(r).$$



Результаты расчётов [16] для  $A_{2\pi}$ - и  $A_{\pi K}$ -атомов незначительно отличаются от оценок работ [15]:

$$\frac{\Delta\psi_{1s}(0)}{\psi_{1s}^{(0)}(0)} = 2,5 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\Delta\psi_{1s}(0)}{\psi_{1s}^{(0)}(0)} = 1,1 \cdot 10^{-3}. \quad (32)$$

Таким образом, согласно оценкам работ [15, 16], влияние сильного адрон-адронного взаимодействия на поведение волновых функций димезоатомов на малых расстояниях ничтожно мало — и при анализе вероятностей образования этих атомов в процессах взаимодействия частиц высоких энергий с ядерными мишенями волновые функции адронных атомов можно считать чисто кулоновскими.

Качественно результаты работ [15, 16] представимы в виде

$$\frac{\Delta\psi(0)}{\psi^{(0)}(0)} \sim \frac{a_s}{r_B}, \quad (33)$$

где  $a_s$  — длина мезон-мезонного рассеяния,  $r_B$  — боровский радиус соответствующего димезоатома.

Однако в [21] было показано, что в расчётах вышеуказанных работ недооценивается влияние сильного взаимодействия на значение волновых функций  $\pi^+\pi^-$ - и  $\pi^\pm K^\mp$ -атомов.

Возвращаясь к формулам (24), (25) для первого порядка теории возмущений

$$\Delta\psi_n^{(1)} = \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} \psi_k^{(0)}, \quad c_{nk}^{(1)} = \frac{V_{nk}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}},$$

определяющим поправку к значению волновой функции  $n$ -го состояния, обусловленную возмущающим потенциалом  $V_s$ , заметим, что знак суммы  $\sum_{k \neq n}$  предполагает не только суммирование по состояниям дискретного спектра, но и интегрирование по состояниям непрерывного спектра:

$$\Delta\psi_n^{(1)}(\vec{r}) = \sum_{k \neq n} \frac{V_{nk} \psi_k^{(0)}(\vec{r})}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \int \frac{d\vec{p} V_{pk} \psi_p^{(0)}(\vec{r})}{(2\pi)^3 (E_n^{(0)} + p^2/2\mu)}. \quad (34)$$

Именно это последнее (интегрирование по непрерывному спектру) и было опущено в расчётах авторов работ [15, 16].

Оценим вклад неучтённого в [15, 16] слагаемого в формуле (24), отвечающего интегрированию по непрерывному спектру, следуя главным образом работе [21].

В соответствии с работой [21]

$$\Delta\psi_{1s}^{\text{непр}}(\vec{r}) = - \int \frac{V_{1s,\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{r}) d^3p}{(2\pi)^3 [\mu\alpha^2/2 + p^2/2\mu]}, \quad (35)$$

$$V_{1s,\vec{p}} = \int \psi_{1s}^{(0)}(\vec{r}') V_s(r') \psi_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{r}') d^3r',$$

$$\psi_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{r}) = e^{\frac{\pi}{2}\xi} \Gamma(1 - i\xi) \cdot e^{i\vec{p}\vec{r}} \cdot F(i\xi, 1; i\vec{p}\vec{r} - pr),$$

$$\xi = \frac{\mu\alpha}{p}.$$

Поскольку основной вклад в этот интеграл вносят значения  $p \gg \mu\alpha$ , мы приближенно можем положить  $\xi = 0$  в выражении для волновых функций непрерывного спектра, в результате чего они превращаются в обычные плоские волны.

С помощью несложных вычислений получаем в этом приближении

$$\Delta\psi_{1s}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int U_s(r') \psi_{1s}^{(0)}(\vec{r}') \frac{e^{-\mu\alpha|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r', \quad (36)$$

$$U_s = 2\mu V_s.$$

Отсюда для значения  $\Delta\psi_{1s}(0)$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{1s}(0) &= \Delta\psi_{1s}(\vec{r})|_{r \rightarrow 0} = -\int_0^\infty U_s(r') \psi_{1s}^{(0)}(r') \frac{e^{-\mu\alpha r'}}{r'} r'^2 dr' \\ &= -\psi_{1s}^{(0)}(0) \int_0^\infty \frac{U_s(r') r'^2 dr'}{r'} = \psi_{1s}^{(0)}(0) a_s < r^{-1} >_s \approx \psi_{1s}^{(0)}(0) \frac{a_s}{r_s}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $a_s = -\int_0^\infty U_s(r') r'^2 dr'$  — длина  $\pi^+\pi^-$ -рассеяния,  $\langle r^{-1} \rangle_s^{-1} \approx 1/r_s$  — среднее значение обратного расстояния по области действия сильного взаимодействия.

Таким образом, если вклад дискретного спектра в относительные поправки к волновым функциям основного состояния ничтожно мал:

$$\frac{\Delta\psi_{1s}^{\text{дискр}}(0)}{\psi_{1s}^{(0)}(0)} \sim \frac{a_s}{r_B} \sim 10^{-3}, \quad (38)$$

то вклад непрерывного спектра

$$\frac{\Delta\psi_{1s}^{\text{непр}}(0)}{\psi_{1s}^{(0)}(0)} \sim \frac{a_s}{r_s} \sim 1 \quad (39)$$

может достигать 100%.

Поскольку точное выражение для потенциала сильного взаимодействия неизвестно, то полученный результат означает, что неопределённость в нашем знании волновых функций адронных атомов на малых расстояниях практически составляет 100%.

На первый взгляд относительные вероятности образования адронных атомов в различных  $ns$ -состояниях, определяемые в основном поведением волновых функций этих атомов на малых расстояниях, не могут быть рассчитаны с точностью, лучшей 1%.

Но если, наряду с поправками к значениям волновых функций основного  $1s$ -состояния, рассмотреть в рамках используемого приближения (плосковолнового приближения для волновых функций непрерывного спектра) также поправки к волновым функциям  $ns$ -состояний, то нетрудно убедиться, что они имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{ns}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int \psi_{ns}^{(0)}(\vec{r}') \frac{e^{-\mu\alpha|\vec{r}-\vec{r}'|/n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} U_s(r') d^3r' \\ &\approx -\psi_{ns}^{(0)}(0) \int \frac{U_s(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' + O\left(\frac{r_s}{r_B}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Отсюда непосредственно следует, что соотношение

$$c_n = \frac{\Delta\psi_{ns}(0)}{\psi_{ns}^{(0)}(0)} = \int U_s(r') r' dr' + O(10^{-3}) \quad (41)$$

практически (с точностью до величин порядка  $a_s/r_B \sim 10^{-3}$ ) не зависит от значения главного квантового числа  $n$ .

Тогда из (10) для случая “точечного” источника получаем

$$\begin{aligned} \frac{w_{n_1 s}}{w_{n_2 s}} &= \left| \frac{\psi_{n_1 s}(0)}{\psi_{n_2 s}(0)} \right|^2 = \left| \frac{\psi_{n_1 s}^{(0)}(0)(1 + c_{n_1})}{\psi_{n_2 s}^{(0)}(0)(1 + c_{n_2})} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\psi_{n_1 s}^{(0)}(0)}{\psi_{n_2 s}^{(0)}(0)} \right|^2 + O\left(\frac{a_s}{r_B}\right) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 + O(10^{-3}). \end{aligned} \quad (42)$$

Учёт эффектов конечности размеров источника приводит, как и в [22], к поправкам порядка  $\langle r^2 \rangle_p / r_B^2$  к этому результату.

Наконец, для целей интерпретации результатов эксперимента DIRAC важны также отношения  $w_{ps}/w_{ns}$  при  $p \sim \mu\alpha$ , где  $w_{ps}$  — вероятность образования свободных  $\pi^+\pi^-$ -пар в состоянии с нулевым значением орбитального момента и величиной относительного импульса, равной  $p$ .

Поправки к волновым функциям непрерывного спектра, полученные в работе [22] в тех же приближениях, имеют вид

$$\Delta\psi_{ps}(0) = - \int_0^\infty U_s(r') \psi_{ps}^{(0)}(\vec{r}') \frac{e^{ipr'}}{r'} r'^2 dr'. \quad (43)$$

При  $p \sim \mu\alpha \ll m_\rho$

$$\Delta\psi_{ps}(0) = -\psi_{ps}^{(0)}(0) \int_0^\infty U_s(r') r' dr' = \psi_{ps}^{(0)}(0) \frac{\Delta\psi_{ns}(0)}{\psi_{ns}^{(0)}(0)} + O\left(\frac{p}{m_\rho}\right). \quad (44)$$

Поэтому в этих приближениях соотношение

$$\frac{w_{ps}}{w_{ns}} = \left| \frac{\psi_{ps}^{(0)}(0)}{\psi_{ns}^{(0)}(0)} \right|^2, \quad (45)$$

полученное в работе [22], остаётся справедливым с точностью порядка  $10^{-3}$ .

Но столь простые выражения (40), (41) для поправок к волновым функциям  $ns$ -состояний удалось получить благодаря использованию плосковолнового приближения для волновых функций непрерывного спектра, оценка точности которого требует дополнительного исследования. Как показано ниже, в этом приближении игнорируются вклады порядка  $(a_s/r_B) \ln(r_B/r_s) \sim 10^{-2}$ . Для их учёта в рамках теории возмущений Рэля—Шрёдингера, рассмотренной выше, следовало бы провести последовательные расчёты выражений (35) с кулоновскими волновыми функциями непрерывного спектра, что сопряжено с довольно громоздкими вычислениями.

Более простой и изящный способ решения обсуждаемой проблемы оказывается возможным в рамках варианта теории возмущений, предложенного Я.Б. Зельдовичем [20] и позволяющего поправки к волновой функции произвольного дискретного состояния выразить в терминах “невозмущённой” волновой функции этого же состояния, не прибегая к разложению (24).

Краткое изложение основных идей метода Я.Б. Зельдовича и применение его к оценке влияния сильных взаимодействий на поведение волновых функций элементарных адронных атомов на малых расстояниях составляет содержание следующего раздела статьи.

## 2.2 Применение теории возмущений Я.Б. Зельдовича к оценке эффектов сильного взаимодействия

Популярность теории возмущений в форме Рэлея—Шрёдингера объясняется её универсальностью, т.е. применимостью к описанию возмущений любых квантово-механических систем — от простейших одномерных (линейный (ан)гармонический осциллятор) до бесконечномерных (квантованные поля). Однако за эту универсальность приходится платить ценой достаточно громоздких вычислений.

При рассмотрении одномерных потенциальных задач квантовой механики иногда удобно применять альтернативный метод теории возмущений, предложенный Я.Б. Зельдовичем [20]. В основе этого метода лежат известные результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [23].

Продемонстрируем достоинства этого метода на примере рассматриваемой нами задачи о влиянии сильного  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия на поведение волновых функций  $A_{2\pi}$ -атомов на малых расстояниях. Потенциал сильного взаимодействия  $V_s(r)$  является сферически-симметричным:

$$V_s(r) = V_s(|r|) \equiv V_s(r), \quad r = |\vec{r}|.$$

В этом случае, как известно [24], переменные в уравнении Шрёдингера (8) разделяются, и оно сводится к уравнению для радиальных волновых функций  $R_{nl}(r)$ :

$$-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r R_{nl}(r) + U(r) R_{nl}(r) = -\kappa_{nl}^2 R_{nl}(r), \quad (46)$$

$$U(r) = 2\mu V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad V(r) = V_c(r) + V_s(r),$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{nlm}(\vec{r}) = Y_{lm}(\Theta, \Phi) R_{nl}(r),$$

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r) r^2 dr = \int |\psi_{nlm}(\vec{r})|^2 d^3r = 1,$$

$$\kappa_{nl}^2 = -2\mu E, \quad E < 0.$$

Здесь  $Y_{lm}(\Theta, \Phi)$  — обычные сферические гармоники [24], а  $\Theta, \Phi$  — полярный и азимутальный углы, определяемые из соотношений

$$x = r \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Phi, \quad y = r \cdot \sin \Theta \cdot \sin \Phi, \quad z = r \cdot \cos \Theta.$$

Вводя “приведённые” радиальные волновые функции  $\chi_{nl}(r) = r R_{nl}(r)$ , нормированные условием

$$\int_0^\infty |\chi_{nl}(r)|^2 dr = 1,$$

перепишем уравнение (46) в виде

$$\begin{aligned}
 -\chi_{nl}''(r) + [U_0(r) + U_s(r)]\chi_{nl}(r) + \kappa_{nl}^2\chi_{nl}(r) &= 0, \\
 U_0(r) &= 2\mu U_c(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}, \\
 \chi_{nl}''(r) &\equiv \frac{d^2}{dr^2}\chi_{nl}(r).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Решения невозмущённой (кулоновской) задачи обозначим через  $\chi_{nl}^{(0)}$ , а соответствующие собственные значения — через  $\kappa_{nl}^{(0)2}$ , так что

$$-\chi_{nl}^{(0)''}(r) + U_0(r)\chi_{nl}^{(0)}(r) + \kappa_{nl}^{(0)2}\chi_{nl}^{(0)}(r) = 0. \tag{48}$$

Сильное взаимодействие изменяет как волновые функции  $\chi_{nl}$ , так и собственные значения  $\kappa_{nl}^2$ .

Вводя обозначения

$$\Delta\chi_{nl}(r) = \chi_{nl}(r) - \chi_{nl}^{(0)}(r), \quad \Delta\kappa_{nl}^2 = \kappa_{nl}^2 - (\kappa_{nl}^{(0)})^2,$$

для величины  $\Delta\chi_{nl}(r)$  получим уравнения

$$-(\Delta\chi_{nl})''(r) - w_{nl}^{(0)}(r)\Delta\chi_{nl}(r) = w_{nl}(r)\left(\chi_{nl}^{(0)} + \Delta\chi_{nl}(r)\right), \tag{49}$$

где

$$w_{nl}(r) = U_s(r) + \Delta\kappa_{nl}^2, \quad w_{nl}^{(0)}(r) = U_0(r) + \kappa_{nl}^2.$$

Разлагая величины  $\Delta\chi_{nl}$  и  $\Delta\kappa_{nl}^2$  в ряд по степеням возмущения

$$\begin{aligned}
 \Delta\chi_{nl} &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta\chi_{nl})^{(k)}, \quad (\Delta\chi_{nl})^{(k)} \sim (U_s)^k, \\
 \Delta\kappa_{nl}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta\kappa_{nl}^2)^{(k)}, \quad (\Delta\kappa_{nl}^2)^{(k)} \sim (U_s)^k,
 \end{aligned}$$

получим в первом порядке теории возмущений

$$-(\Delta\chi_{nl})^{(1)''}(r) - w_{nl}^{(0)}(r)(\Delta\chi_{nl}(r))^{(1)} = w_{nl}^{(1)}(r)\chi_{nl}^{(0)}, \tag{50}$$

$$w_{nl}^{(1)}(r) = U_s(r) + (\Delta\kappa_{nl}^2)^{(1)},$$

где

$$(\Delta\kappa_{nl}^2)^{(1)} = -\int_0^{\infty} U_s(r)\left(\chi_{nl}^{(0)}\right)^2 dr, \tag{51}$$

согласно [24], так что

$$\int_0^{\infty} w_{nl}^{(1)}(r)\left(\chi_{nl}^{(0)}\right)^2 dr = 0. \tag{52}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [23] известно, что решение неоднородного уравнения (50) может быть выражено в терминах двух линейно независимых решений  $(\chi_{nl}^{(0)}, \phi_{nl}^{(0)})$  соответствующего однородного уравнения (48).

Их вронскиан

$$W(r) = \chi_{nl}^{(0)}(r) \left( \phi_{nl}^{(0)}(r) \right)' - \left( \chi_{nl}^{(0)}(r) \right)' \phi_{nl}^{(0)}(r),$$

в силу (47) удовлетворяющий уравнению  $W(r)' = 0$ , является постоянной величиной  $W(r) = \text{const}$ , которая без ограничения общности может быть положена равной единице.

Следовательно, решение неоднородного уравнения (50) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta \chi_{nl}^{(1)}(r) = & C \chi_{nl}^{(0)}(r) - \phi_{nl}^{(0)}(r) \int_0^r dr' w_{nl}^{(1)}(r') \left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2 \\ & + \chi_{nl}^{(0)}(r) \int_0^r dr' w_{nl}^{(1)}(r') \chi_{nl}^{(0)}(r') \phi_{nl}^{(0)}(r'). \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная, значение которой фиксируется условием

$$\int_0^\infty \chi_{nl}^{(0)}(r) \Delta \chi_{nl}^{(1)}(r) dr = 0 \quad (54)$$

(поправка первого порядка к волновой функции должна быть ортогональна невозмущённой волновой функции [24]).

В работе [20] доказывается, что

$$\left( \frac{\phi_{nl}^{(0)}(r)}{\chi_{nl}^{(0)}(r)} \right)' = - \frac{1}{\left( \chi_{nl}^{(0)}(r) \right)^2}, \quad (55)$$

откуда

$$\phi_{nl}^{(0)}(r) = -\chi_{nl}^{(0)}(r) \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2}. \quad (56)$$

Подставляя (56) в (53), в результате несложных вычислений получим

$$\Delta \chi_{nl}^{(1)}(r) = \chi_{nl}^{(0)}(r) \left\{ C + \int_0^r \frac{dr''}{\left( \chi_{nl}^{(0)}(r'') \right)^2} \int_0^{r''} dr' w_{nl}^{(1)}(r') \left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2 \right\}. \quad (57)$$

Итак, результат для поправки  $\Delta \psi_{nl}^{(1)}(r)$  к волновой функции произвольного дискретного состояния выражается в терминах невозмущённой волновой функции этого состояния и, в отличие от теории возмущений Рэлея—Шрёдингера, не требует знания всего спектра невозмущённой задачи.

Условием (54) фиксируется значение постоянной  $C$ :

$$C = - \int_0^\infty dr \left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2 \int_0^r \frac{dr''}{\left( \chi_{nl}^{(0)}(r'') \right)^2} \int_0^{r''} dr' w_{nl}^{(1)}(r') \left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2. \quad (58)$$

Соотношения (51), (57), (58) и составляют основу теории возмущений Я.Б.Зельдовича [20].

В дальнейшем обсуждаются поправки лишь к значениям волновых функций  $n$ -состояний ( $|ns\rangle \equiv |n00\rangle$ ).

Поскольку, согласно (57), поправка к значению волновой функции любого состояния пропорциональна значению невозмущённой волновой функции, удобно ввести величину относительной поправки

$$R_{n0}(r) = \frac{\Delta\psi_{n0}(r)}{\psi_{n0}^{(0)}(r)} = \frac{\Delta\chi_{n0}^{(1)}(r)}{\chi_{n0}^{(0)}(r)} = C + \int_0^r \left( \frac{dr''}{\chi_{n0}^{(0)}(r'')} \right)^2 \int_0^{r''} dr' w_{n0}^{(1)}(r') \left( \chi_{n0}^{(0)}(r') \right)^2, \quad (59)$$

где  $C$  даётся соотношением (58).

Максимального значения эта величина достигает при  $r = 0$ :

$$\max R_{n0}(r) = R_{n0}(0) = C \quad (60)$$

$$= - \left\{ \int_0^\infty dr \left| \chi_{nl}^{(0)}(r) \right|^2 \int_0^\infty dr \left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2 \int_{r_0}^r \left( \frac{dr''}{\chi_{nl}^{(0)}(r'')} \right)^2 \int_0^{r''} dr' w_{nl}^{(1)}(r') \left( \chi_{nl}^{(0)}(r') \right)^2 \right\}.$$

Вычисления приводят к следующему результату:

$$R_{n0}(0) = \frac{\Delta\psi_{n0}(0)}{\psi_{n0}^{(0)}(0)} = - \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2\nu}{n}r} U_s(r) \left[ \frac{1}{r} - 2\nu \ln(\nu r) + P_{2n}(\nu r) \right] dr, \quad (61)$$

где  $P_{2n}(t)$  — полином степени  $2n$ .

Нетрудно видеть, что зависящий от  $n$  вклад в отношение  $\Delta\psi_{n0}(0)/\psi_{n0}^{(0)}(0)$  является величиной порядка  $a_s/r_B \sim 10^{-3}$ . Вклады же порядка  $a_s/r_s$  и  $(a_s/r_B) \ln(r_B/a_s)$  не зависят от  $n$ .

Этот результат является следствием соотношения

$$\frac{|d\psi_{n0}(r)/dr|_{r=0}}{\psi_{n0}^{(0)}(r)|_{r=0}} = -\nu = -\mu\alpha = \text{const}(n), \quad (62)$$

уже использовавшегося нами ранее (см. (18)).

И, наконец, приведем выражение для величины  $R_{n0}(r)$ , справедливое при значениях  $r \ll r_B$ :

$$R_{n0}(r) = - \int_r^\infty r^2 U_s(r) \left[ \frac{1}{r} - 2\nu \ln \nu r \right] dr + \left[ \frac{1}{r} - 2\nu \ln \nu r \right] \int_0^r r^2 U_s(r) dr + O\left(\frac{r_s}{r_B}\right). \quad (63)$$

Из (63) видно, что учёт эффектов сильного  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия в первом порядке теории возмущений сводится к домножению невозмущенных волновых функций атомов пиония на практически не зависящие от  $n$  функции  $R_n(r)$ :

$$\psi_{n0}(r) = R_n(r) \psi_{n0}^{(0)}(r), \quad (64)$$

$$R_n(r) = 1 + R_{n0}(r),$$

и это соотношение справедливо для любой формы потенциала  $U_s$ .

Можно дать следующее объяснение независимости функций  $R_n(r)$  от значения  $n$ . Запишем явные выражения для нескольких первых приведённых кулоновских радиальных функций  $\chi_{n0}(\rho)$ ,  $\rho = r/r_B$ , для удобства умноженных на  $n^{3/2}$ :

$$\chi_{10}(\rho) = 2\rho \exp(-\rho) = 2 \left( \rho - \rho^2 + \frac{\rho^3}{2} \right) + O(\rho^4), \quad (65)$$

$$2\sqrt{2}\chi_{20}(\rho) = 2\rho \left( 1 - \frac{\rho}{2} \right) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) = 2 \left( \rho - \rho^2 + \frac{\rho^3}{8} \right) + O(\rho^4),$$

$$3\sqrt{3}\chi_{30}(\rho) = 2\rho \left( 1 - \frac{2\rho}{3} + \frac{2\rho^2}{27} \right) \exp\left(-\frac{\rho}{3}\right) = 2 \left( \rho - \rho^2 + \frac{19\rho^3}{54} \right) + O(\rho^4),$$

$$4\sqrt{4}\chi_{40}(\rho) = 2\rho \left( 1 - \frac{3\rho}{4} + \frac{\rho^2}{8} - \frac{\rho^3}{192} \right) \exp\left(-\frac{\rho}{4}\right) = 2 \left( \rho - \rho^2 + \frac{11\rho^3}{32} \right) + O(\rho^4).$$

Легко видеть, что коэффициенты первых двух членов разложения совпадают для всех значений  $n$  и различие начинается только в величинах  $O(10^{-3})$ . Именно это совпадение и обеспечивает то, что комбинации  $U_s(r)r^2 [1/r - 2\nu \ln \nu r]$  под знаком интеграла, определяющего величину  $R_n(\rho)$  (63), различаются между собой на величину  $O(r_s/r_B \sim 10^{-3})$ . Если бы оно отсутствовало, точность могла бы быть на порядок хуже:  $O(10^{-2}) = (r_s/r_B) \ln(r_B/a_s)$ . Указанная независимость функций  $R_n(\rho)$  от значения  $n$  с точностью  $O(10^{-3})$  подтверждается численными расчётами [25].

Численные расчёты относительной поправки волновой функции в нуле во всех порядках теории возмущений для первых четырех значений главного квантового числа и потенциала  $U_s$  типа юкавского приводят к её значению  $R_{n0}(0) = R_{10}(0) + O(10^{-3}) \sim 0,77$  (в первом порядке теории возмущений  $R_{10}^{(1)}(0) \sim 0,55$ ) [25] и для экспоненциально убывающего потенциала — к значению  $R_{n0}(0) \sim 0,40$  ( $R_{10}^{(1)}(0) \sim 0,28$ ) [25, 26].

Высокая чувствительность значения поправки  $R_{n0}(0)$  к виду потенциала  $U_s$  делает желательным (и в случае измерения  $|\psi_{n0}(0)|^2$  возможным) экспериментальное определение её значения.

Одним из наиболее важных следствий (64) является тот факт, что закон  $w_n \sim n^{-3}$  для вероятностей образования димезоатомов в  $ns$ -состояниях, выведенный в предположении, что их волновые функции являются чисто кулоновскими, остаётся справедливым в общем случае. Действительно, подставляя (64) в (15) и проводя замену  $M(\vec{r}) \Rightarrow \widetilde{M}(\vec{r}) = M(\vec{r})R(r)$ , получаем

$$w_n \sim \left| \int \widetilde{M}(\vec{r}) \psi_n^{(0)} dr \right|^2 \sim \left| \psi_n^{(0)}(0) \right|^2 \left| \int \widetilde{M}(\vec{r}) dr \right|^2 \sim n^{-3}.$$

Таким образом, отношение вероятностей образования атомов пиония в различных  $ns$ -состояниях оказывается зависящим лишь от поведения на малых расстояниях невозмущенных ("кулоновских") волновых функций пиония и соотношения между размерами области образования  $\pi^+\pi^-$ -пар и размерами  $\pi^+\pi^-$ -атомов. В силу специфических свойств кулоновских волновых функций атомов пиония в  $ns$ -состояниях  $\psi_{ns}^c(0) \equiv \psi_{n0}^{(0)}(0)$ , отражаемых соотношениями (18), (65), эти соотношения с точностью порядка  $(r_s/r_B) \sim 10^{-3}$  оказываются не зависящими от недостаточно хорошо изученных деталей динамики сильного взаимодействия и равными

$$\frac{w_{n_{10}}}{w_{n_{20}}} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^3 + O(10^{-3}). \quad (66)$$



### 3 Формула Дезера для сдвига уровней в терминах эффективного радиуса сильного взаимодействия и поправки к кулоновской волновой функции в нуле

Полученные результаты значительно упрощают задачу теоретической интерпретации эксперимента DIRAC [7], для целей которой важны лишь значения отношений вероятностей  $w_{n_{10}}/w_{n_{20}}$  образования атомов пиония в различных  $n_s$ -состояниях.

Однако если бы удалось измерить абсолютное значение вероятности образования атомов пиония в основном состоянии, на возможность чего указано в работах [14 - 16], то вместе с измерением разности энергии уровней  $2s$ - и  $2p$ -состояний [7, 14, 27]

$$\Delta E_{2s-2p} = \Delta E_{2s-2p}^s + \Delta E_{2s-2p}^{vac} \quad (67)$$

это могло бы позволить оценить величину эффективного радиуса сильного  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия  $r_s \sim a_s/c_1$ , являющегося, наряду с длиной рассеяния  $a_s$ , важной характеристикой  $\pi^+\pi^-$ -рассеяния.

Покажем это. Возвращаясь к первому порядку теории возмущений Рэлея—Шрёдингера, запишем выражение для сдвига  $n_s$ -уровня адронного атома, обусловленного сильным взаимодействием, в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{n_0}^s &= \int |\psi_{n_0}^c(r)|^2 V_s(r) d^3r \\ &\approx |\psi_{n_0}^c(0)|^2 \int V_s(r) d^3r = 4\pi |\psi_{n_0}^c(0)|^2 \int V_s(r) r^2 dr, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$\int V_s(r) r^2 dr = -\frac{a_s}{2\mu}. \quad (69)$$

В результате получим формулу Дезера для сдвига  $n_s$ -уровней адронных атомов, совпадающую с формулой (1):

$$\Delta E_{n_0}^s = -\frac{2\pi}{\mu} a_s |\psi_{n_0}^c(0)|^2. \quad (70)$$

Применительно к  $\pi^+\pi^-$ -атомам формула имеет вид

$$\Delta E_{n_0}^s = -\frac{2\pi}{3\mu} (2a_0 + a_2) |\psi_{n_0}^c(0)|^2. \quad (71)$$

Оценим последнюю величину. При значениях длин рассеяния  $a_0(m_\pi = 1) = 0,22$ ,  $a_2(m_\pi = 1) = -0,044$  [27] получим

$$\Delta E_{10}^s = -\frac{4\pi}{3m_\pi} (2a_0 + a_2) |\psi_{10}^c(0)|^2 \approx -3,56 \text{ эВ}, \quad (72)$$

$$\Delta E_{2p-2s}^s = \Delta E_{20}^s = -\frac{4\pi}{3m_\pi} (2a_0 + a_2) |\psi_{20}^c(0)|^2 \approx -0,45 \text{ эВ}. \quad (73)$$

Возможность измерения величины  $\Delta E_{2p-2s}^s$  (73) связана с тем, что вклад вакуумной поляризации  $\Delta E_{2p-2s}^{vac}$  в  $\Delta E_{2p-2s}^s$  (67) точно вычисляется в рамках КЭД [28]. По данным, приведённым в работе [27], его значение составляет  $\Delta E_{2p-2s}^{vac} = -0,107$  эВ.

Теперь заметим, что соотношение

$$a_s/c_n = \frac{\int_0^\infty U_s(r)r^2 dr}{\int_0^\infty U_s(r)r dr} = \langle r \rangle_s, \quad (74)$$

позволяет переформулировать уравнение Дезера (70) в терминах среднего радиуса по области сильного взаимодействия  $\langle r \rangle_s \sim r_s \sim m_\rho^{-1}$  ( $m_\rho$  — масса  $\rho$ -мезона) и относительной поправки  $c_n = \Delta\psi_{n0}(0)/\psi_{n0}^c(0) = c_1 + O(10^{-3})$  к кулоновской волновой функции в нуле:

$$\Delta E_{n0}^s = -\frac{2\pi}{\mu} \langle r \rangle_s c_n |\psi_{n0}^c(0)|^2. \quad (75)$$

Отметим также, что, в отличие от (70), формула (75) допускает запись в терминах точной волновой функции  $\psi_{n0}(0)$  (сильно модифицированной в нуле [25]):

$$\Delta E_{n0}^s = -\frac{2\pi}{\mu} \langle r \rangle_s \frac{c_n}{(1+c_n)^2} |\psi(0)_{n0}|^2. \quad (76)$$

И обратим внимание на факторизационные свойства самой волновой функции

$$\psi_{n0}(0) = \psi_{n0}^c(0)(1+c_n),$$

аналогичные факторизационным свойствам уравнений (1), (2) и (75).

И, наконец, запишем в общем виде систему уравнений

$$\begin{aligned} (1+c_n)^2 &= a |\psi_{n0}(0)|^2, & a &= \pi(nr_B)^3, \\ \langle r \rangle_s &= -b \frac{\Delta E_{k0}^s}{c_k}, & b &= \mu(kr_B)^3/2, \end{aligned} \quad (77)$$

в частности позволяющую при условии измерения величины  $|\psi_{10}(0)|^2$  (или, что практически то же, величины относительной поправки  $c_1$ ) определить средний радиус области сильного взаимодействия по экспериментально измеряемой величине  $\Delta E_{2s-2p}$  (подобно тому, как совместное измерение величин  $\Delta E_{2s-2p}$  и  $\Gamma_{10}$  приводит к точному определению длин рассеяния  $a_0$  и  $a_2$  в их комбинациях  $a_s$ ,  $a_{se}$  в (1), (2)).

Указанная возможность представляет интерес в связи с уже проводимыми и планируемыми экспериментами по измерению сдвига  $1s$ -уровней атомов  $A_{\pi-p}$  [4],  $A_{K-p}$  [6] и разности энергий  $2s$ - и  $2p$ -уровней атомов  $A_{2\pi}$ ,  $A_{K+\pi-}$  [7, 27]. Её анализ составит содержание дальнейших исследований.

Автор благодарит Л.Л.Немёнова за стимулирующий интерес к работе, А.В.Тарасова за критические замечания, учтённые при написании данной статьи, Э.А.Кураева за обсуждение результатов.

## Литература

- [1] Proc. Int. Workshop *Hadronic Atoms and Positronium in the Standard Model*, Dubna, May 26-31, 1998 (E2-98-254, Dubna, 1998), Eds. M.A. Ivanov, A.B. Arbuzov and E.A. Kuraev, V.E. Lyubovitskij and A.G. Rusetsky; Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms "*HadAtom99*", Bern, Oktober 14-15, 1999 (BUTP-99/26, BUHE-99-08, Bern, 1999), "*HadAtom01*" Bern, Oktober 11-12, 2001 (BUTP-2001/23, BUHE-2001-07, Bern, 2001), Eds. J. Gasser, A. Rusetsky and J. Schacher.
- [2] S. Weinberg, *Physica A* 96 (1979) 327; J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* 158 (1984) 142, *Nucl. Phys. B* 250 (1985) 465; H. Leutwyler, in: J.R. Sanford (Eds.), *Proc. XXVI Int. Conf. on High Energy Physics*, Dallas, 1992; J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser, M.E. Sainio, *Phys. Lett. B* 374 (1996) 210.
- [3] N.H. Fuchs, H. Sazdjian and J. Stern, *Phys. Lett. B* 269 (1991) 183; *Phys. Rev. D* 47 (1993) 3814; M.Knecht, B. Moussallam, J.Stern, N.H. Fuchs, *Nucl. Phys. B* 457 (1995) 513; *ibid.* B 471 (1996) 445.
- [4] D. Sigg, A. Badertscher, P.F.A. Goudsmit, H.J. Leisi and G.C. Oades, *Nucl. Phys. A* 609 (1996) 269; D. Chatellard et al., *Nucl. Phys. A* 625 (1997) 855; H.-Ch. Schröder et al., *Phys. Lett. B* 469 (1999) 25, *Eur. Phys. J. C* 21 (2001) 433; Proposal R-98-01.1 at PSI.
- [5] M. Iwasaki et al., *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 3067; *Nucl. Phys. A* 639 (1998) 501.
- [6] The DEAR collaboration (S. Bianco et al.), *The DEAR case*, Preprint LNF-98/039(P) (1998); *Rivista del Nuovo Cimento*, November 1999.
- [7] B. Adeva et al., *Lifetime measurement of  $\pi^+\pi^-$  atoms to test low energy QCD predictions* (Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva, 1995).
- [8] S. Deser, M.L. Goldberger, K. Baumann and W. Thirring, *Phys. Rev.* 1 (1954) 774.
- [9] T.L. Truemann, *Nucl. Phys.* 26 (1961) 57; J.L. Uretsky and T.R. Palfrey, Jr., *Phys. Rev.*, 121 (1961) 1798; S.M. Bilenky, Nguen Van Hieu, L.L. Nemenov and F.G. Tkebuchava, *Yad. Fiz.*, 10 (1969) 812 [*Sov. J. Nucl. Phys.* 10 (1969) 469]; R. Staffin, *Phys. Rev.*, D 16 (1977) 726.
- [10] E.A. Kuraev, *Sov. J. Nucl. Phys.* 61 (1998) 239 [Preprint hep-ph/9702327]; Z. Silagadze, *JETP Lett.* 60 (1994) 689; M.K. Volkov, *Theor. Math. Phys.* 71 (1987) 606; U. Jentschura, G. Soff, V. Ivanov and E.G. Karshenboim, *Phys. Lett. A* 241 1998 351.
- [11] W.E. Caswell and G.P. Lepage, *Phys. Lett. B* 167 (1986) 437; A. Gall, J. Gasser, V.E. Lyubovitskij and A. Rusetsky, *Phys. Lett. B* 462 (1999) 335 [Preprint hep-ph/9905309]; J. Gasser, V.E. Lyubovitskij, A. Rusetsky and A. Gall, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 016008; V.E. Lyubovitskij and A. Rusetsky, *Phys. Lett. B* 494 (2001) 9; A. Rusetsky, Preprint hep-ph/0011039.

- [12] H. Jallouli and H. Sazdjian, Phys. Rev. D 58 (1998) 014011 [Preprint IPNO/TH 97-01 (1997)]; H. Sazdjian, Preprint hep-ph/0004226.
- [13] V.E. Lyubovitskij and A.G. Rusetsky, Phys. Lett. B 389 (1996) 181 [Preprint JINR, E2-96-359, Dubna, 1996]; V.E. Lyubovitskij, E.Z. Lipartia and A.G. Rusetsky, JETP Lett. 66 (1997) 783; M.A. Ivanov, V.E. Lyubovitskij, E.Z. Lipartia and A.G. Rusetsky, Phys. Rev. D 58 (1998) 094024, Preprint hep-ph/9810497.
- [14] L.L. Nemenov, Yad. Fiz. 41 (1985) 980 [Sov. J. Nucl. Phys. 41 (1985) 629].
- [15] G.V. Efimov, M.A. Ivanov, V.E. Lyubovitskij, Yad. Fiz. 44 (1986) 460 [Preprint JINR, P2-85-596, Dubna, 1985]; Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz., 45 (1987) 526.
- [16] A.A. Bel'kov, V.N. Pervushin, F.G. Tkebuchava, Yad. Fiz. 44 (1986) 466 [Preprint JINR, P2-85-596, Dubna, 1985]; A.A. Bel'kov, V.N. Pervushin, D. Ebert, Sov. J. Part. Nucl. 22 (1991) 5.
- [17] R.N. Faustov, Sov. J. Part. Nucl. 3 (1972) 119; R. Coombes et al., Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 249; S.H. Aronson et al., Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1078; J. Kapusta and A. Mosky, Preprint hep-th/9812013.
- [18] G. Baym, G. Friedman, R.J. Huges and B.V. Jacak, Phys. Rev. D 48 (1993) R3957; N. Kalinina and R. Lednitsky, private communication; T. Mizoguchi, M. Biyajima, I.V. Andreev and G. Wilk, Phys. Rev. C 59 (1999) 2209 [Preprint, nucl-th/9901045].
- [19] L.G. Afanasyev, O.O. Voskresenskaya and V.V. Yazkov, JINR Communication, P1-97-306, Dubna, 1997.
- [20] A.I. Baz', Ya.B. Zel'dovich, A.M. Perelomov, *Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics* (Jerusalem, 1969); Ya. B. Zeldovich, JETP 11 (1956) 1101.
- [21] E.A. Kuraev, Yad. Fiz. 61 (1998) 378 [Sov. J. Nucl. Phys. 61 (1998) 325].
- [22] L. Afanasyev and O. Voskresenskaya, Phys. Lett. B 453 (1999) 302 [Preprint hep-ph/9810248].
- [23] L.S. Pontryagin, *Ordinary differential equations* (Fizmatgiz Publication, Moscow, 1961); G. Korn and T. Korn, *Mathematical handbook for scientists and engineers* (Mc Graw-Hill Book Company, Inc. Publication, New York, Toronto, London, 1961).
- [24] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977).
- [25] I. Amirkhanov, I. Puzynin, A. Tarasov, O. Voskresenskaya and O. Zeinalova, Preprint hep-ph/9812293 [Preprint JINR, E4-98-386]; Phys. Lett. B 452 (1999) 155.
- [26] A.V. Tarasov, unpublished (1995).
- [27] L.L. Nemenov, V.D. Ovsiannikov, Phys. Lett. B 514 (2001) 247; in: J. Gasser et al. (Eds.), Proc. Int. Workshop "HadAtom01", arXiv:hep-ph/0112293.
- [28] A. Karimkhodzhaev and R.N. Faustov, Sov. J. Nucl. Phys. 29 (1979) 232; A. Gashi et al. Nucl. Phys. A 628 (1999) 101.

Воскресенская О. О.

P4-2002-26

Пертурбативный анализ влияния сильного  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия на соотношение вероятностей образования  $A_{2\pi}$ -атомов в  $nS$ -состояниях

Показано, что соотношения между вероятностями образования  $A_{2\pi}$ -атомов в  $nS$ -состояниях, полученные в пренебрежении сильным  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействием, остаются практически неизменными и при учете сильного взаимодействия в первом порядке теории возмущений. Дана формулировка уравнения Дезера для сдвига  $nS$ -уровней адронных атомов в терминах эффективного радиуса сильного взаимодействия и относительной поправки к кулоновской волновой функции в нуле, обусловленной сильным взаимодействием.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Voskresenskaya O. O.

P4-2002-26

Perturbative Analysis of the Influence of Strong Interaction on the Relations between  $A_{2\pi}$  Creation Probabilities in  $nS$ -States

It is shown that the relations between probabilities of  $A_{2\pi}$ -atoms creation in  $nS$ -states, derived with neglecting of strong interaction between pions, hold practically unchanged if the strong interaction is taken into account in the first order of perturbation theory. The formulation of Deser equation for the energy levels shift of the hadronic atoms (HA) is given in terms of effective range of strong interaction and relative correction to the coulombic wave function of HA at origin, caused by strong interaction.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Корректор *Е. В. Сабеева*

ЛР № 020579 от 23.06.97.

Подписано в печать 22.07.2002.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,19. Уч.-изд. л. 1,81. Тираж 360 экз. Заказ № 53438.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.