Р5-2002-73

В. В. Пупышев*

СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕХЧАСТИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПАРНОГО УДАРА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с основных определений. Используем систему единиц, в которой заряд e электрона e^- и константа Планка $\hbar$ равны единице. В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ фиксируем декартову систему координат S с ортами $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$ и начальной точкой O, совпадающей с центром масс исследуемой системы (p_1, p_2, p_3) трех частиц p_1, p_2 и p_3 с массами m_1, m_2, m_3 и зарядами z_1, z_2, z_3. Пусть в этой системе $\mathbf{a}_{ij}$ – разность радиусов-векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ частиц p_i и p_j, а $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ – приведенные векторы Якоби [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{ij}}\,(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)\,, \quad \mu_{ij} \equiv \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\,, \\ \mathbf{y}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{k,ij}}\left(\frac{m_i\mathbf{a}_i + m_j\mathbf{a}_j}{m_i + m_j} - \mathbf{a}_k\right), \qquad \mu_{k,ij} \equiv \frac{m_k\,(m_i + m_j)}{m_1 + m_2 + m_3}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где индексы i, j, k образуют циклическую перестановку триады индексов $(1, 2, 3)$: индекс i переходит в k, j – в i, а k – в j. В шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$ векторам $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ сопоставим вектор $\mathbf{r}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$. Выберем пару (p_j, p_k) частиц p_j и p_k. Пусть R – расстояние между ними, $\mathbf{R} \equiv \mathbf{a}_{jk} \uparrow\uparrow \mathbf{x}_i$, а ρ – расстояние от оставшейся частицы p_i до центра масс этой пары, $\rho \uparrow\uparrow -\mathbf{y}_i$. В $\mathcal{R}^6$ под окрестностью точки парного удара частиц p_j и p_k подразумевается шестимерная область $\mathcal{G}$, в которой эти частицы близки друг к другу, но отделены от частицы p_i:

$$\mathcal{G} \equiv \{\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i : R \ll 1, \rho > 0\} = \{\mathbf{r} : x \equiv x_i \ll 1, y \equiv y_i > 0\}\,.$$

Пусть Ψ – общее регулярное $(|\Psi(\mathbf{r})| < \infty, \forall\mathbf{r})$ решение уравнения Шредингера для системы (p_1, p_2, p_3) в $\mathcal{R}^6$:

$$(H - E)\,\Psi = 0\,, \quad H = H_0 + V\,, \quad V \equiv \sum_{k=1}^{3} V_k\,, \tag{2}$$

где H_0 – свободный гамильтониан, E – полная энергия, а V_k – взаимодействие между частицами p_i и p_j. Явный вид решения Ψ, как правило, неизвестен. Поэтому судить о его поведении (строении) в физически интересных областях пространства $\mathcal{R}^6$ можно лишь по асимптотическим разложениям.

Вывод и анализ асимптотических разложений общего регулярного решения Ψ представляется теоретически важным и интересным, потому что, зная такие разложения, можно легко построить разложения любого регулярного частного решения. Например, трехчастичной волновой функции Ψ^ε, обладающей, в отличие от Ψ, полным набором ε сохраняющихся квантовых чисел. Построение разложения для Ψ^ε сводится к проектированию найденного разложения для Ψ на базис из собственных функций всех операторов, коммутирующих с полным гамильтонианом H.

Стоит отметить, что замена функции Ψ^ε в уравнениях Фаддеева [2],

$$(H_0 - E)\,\Psi_k^\varepsilon = -V_k\,\Psi^\varepsilon\,, \quad \Psi^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^\varepsilon + \Psi_3\,, \tag{3}$$

ее построенным разложением, открывает отличный от предложенного в [3] способ построения разложений фаддеевских компонент Ψ_k^ε.

В случае центральных парных взаимодействий, например кулоновских

$$V_k(x_k(a_{ij})) = z_i z_j/a_{ij},\; V_k(x_k) = q_k/x_k,\; q_k \equiv z_i z_j\sqrt{2\mu_{ij}},\; k = 1,2,3, \tag{4}$$

или взаимодействий более общего вида

$$V_k(x_k) = q_k/x_k + \bar{V}_k(x_k),\; \bar{V}_k(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n\,\bar{V}_{kn},\;\; \bar{V}_{kn} = \mathrm{const},\; k = 1,2,3, \tag{5}$$

с гамильтонианом H коммутируют сам H, квадрат оператора полного углового момента $\mathbf{l}$, его компонента l_3 и оператор P_r инверсии $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$. Набор $\varepsilon = (E, \ell, m, \sigma)$ состоит из собственных чисел этих операторов. В качестве соответствующих собственных функций часто используются определенные линейные комбинации сферических функций [4, 5],

$$Y_{fe}(\hat{a}) = (1/\sqrt{2\pi})\, \exp(-ie\varphi_a)\, \Theta_{fe}(\cos\theta_a)\,, \quad \hat{a} \equiv (\theta_a, \varphi_a)\,, \quad \hat{a} = \hat{x}, \hat{y}\,, \tag{6}$$

и коэффициентов Клебша-Гордана $C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}$ – бисферические гармоники:

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) \equiv \sum_{\alpha=-a}^{a} C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}\, Y_{a\alpha}(\hat{y})\, Y_{b\beta}(\hat{x})\,, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}\,, (-1)^{a+b} = \sigma\,, \tag{7}$$

и комбинации D-функций Вигнера $D^{\ell}_{mm'}$ – симметризованные D-функции [6]:

$$D^{\ell\sigma}_{mm'}(\omega^t) = \left[\frac{2\ell+1}{16\pi^2(1+\delta_{m'0})}\right]^{1/2} \left[D^{\ell}_{mm'}(\omega^t) + \sigma(-1)^{\ell-m'} D^{\ell}_{m,-m'}(\omega^t)\right]\,, \tag{8}$$

где $\omega^t = (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)$ – набор углов Эйлера, определяющих ориентацию выбранной "подвижной" системы координат S^t относительно системы S. Например, в [7, 8] использовалась система S^t, $t = R$, с ортом $\hat{\mathbf{e}}^R_3$, коллинеарным вектору $\mathbf{R}$, соединяющему частицы p_1 и p_2, и ортом $\hat{\mathbf{e}}^R_1$, расположенным в плоскости трех частиц и направленным к частице p_3.

Знание асимптотических разложений волновой функции Ψ^ε необходимо для вычисления с высокой точностью ее приближения $\tilde{\Psi}^\varepsilon$ и, следовательно, для последующего достоверного определения всех наблюдаемых величин. Дело в том, что учет всех особенностей поведения искомого решения дифференциального уравнения (в нашем случае Ψ^ε) улучшает поточечную сходимость любого численного метода [9]. В [7, 8] было отмечено, что такой учет поведения Ψ^ε в $\mathcal{G}$ особенно важен и эффективен при реализации метода Ритца [9, 10], когда координатную зависимость опорных функций F^ε_n вариационного анзаца $\tilde{\Psi}^\varepsilon \approx F^\varepsilon_1 + F^\varepsilon_2 + \ldots$ приходится определять заранее и всюду в $\mathcal{R}^6$.

С другой стороны, оценки многих трехчастичных наблюдаемых, например, релятивистских поправок, γ-факторов, коэффициентов рекомбинации и сечений астрофизических ядерных процессов [11], сводятся к вычислению интегралов, содержащих найденную волновую функцию $\tilde{\Psi}^\varepsilon$ в области $\mathcal{G}$. Чтобы такие оценки были правдоподобными, в $\mathcal{G}$ аппроксимация $\Psi^\varepsilon \approx \Psi$ должна быть наиболее точной.

В подходе Ритца, в вариационно-разностных и проекционно-сеточных схемах [9] и в методе сплайн-коллокаций [10, 12], задачу такого приближения можно решить, подчинив частные производные искомой функции $\tilde{\Psi}^\varepsilon$ или ее проекций на базисы (6)–(8)

тем же линейным граничным условиям (связям при $x = 0$, $y > 0$), которым удовлетворяют частные производные точного решения Ψ^ε уравнения Шредингера (2) или же соответствующие проекции этого решения. Пример такой связи – соотношение

$$\sum_{n=0}^{n'<\infty} A_n(\hat{x}, \mathbf{y})\, \partial_x^n \Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\,, \quad x = 0\,, \quad y > 0\,, \tag{9}$$

где A_n – известные функции или линейные комбинации известных функций и операторов частных производных по аргументам $\hat{x}$ и $\mathbf{y}$. Знание связей типа (9) позволяет решить и обратную задачу: по величине невязки χ,

$$\chi = \sum_{n=0}^{n'<\infty} A_n(\hat{x}, \mathbf{y})\, \partial_x^n \tilde{\Psi}^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,, \quad x = 0\,, \quad y > 0\,,$$

оценить насколько приближенное решение $\tilde{\Psi}^\varepsilon$, полученное каким-то способом, близко к точному решению Ψ в окрестности точки парного удара.

Для примера выведем связи из известных асимптотик функции Ψ^ε. Под проекцией $\langle f(\xi)|g\rangle$ функции g на функцию $f(\xi)$ подразумеваем интеграл от произведения $f^*(\xi)g$ по всей области изменения аргументов ξ.

Като [13] впервые показал, что S-волновая ($\ell = 0$) функция $\Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12})$ двух электронов p_1 и p_2 в кулоновском поле бесконечно тяжелого ($m_3 = \infty$) ядра p_3 подчиняется нелокальному граничному условию:

$$\partial_a < \Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12}) >_\delta = \lambda\, \Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12})\,, \quad a = 0\,, \tag{10}$$

где $< \Psi^\varepsilon >_\delta$ – среднее по сфере бесконечно малого радиуса δ с центром в точке $a = 0$; $\lambda = m_1 z_3$ при $a = a_i$, $i = 1, 2$ и $\lambda = \mu_{12} = m_1/2$ при $a = a_{12}$.

Позже в [14] для той же волновой функции была получена асимптотика

$$\Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12}) = \Big[1 + m_1 z_3 a_1\Big]\, \Psi^\varepsilon(0, a_2, a_2) + (\mathbf{a}_1 \mathbf{A}) + O(a_1^2)\,, \quad a_1 \to 0\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{A}$ – неопределенный вектор из $\mathcal{R}^3$. Проекция $\Psi^\varepsilon_{00} \equiv \langle Y_{00}(\hat{a}_1)|\Psi^\varepsilon\rangle$ на сферическую функцию $Y_{00}(\hat{a}_1)$ не содержит $\mathbf{A}$ и удовлетворяет связи типа (9):

$$(\partial_{a_1} - m_1 z_3)\, \Psi^\varepsilon_{00}(a_1, a_2, a_{12}) = 0\,, \quad a_1 = 0\,, \quad a_2 > 0\,.$$

Авторы работы [15] записали N-частичное уравнение Шредингера с кулоновскими взаимодействиями в асимптотическом виде:

$$\Big[-\triangle_R/(2\mu_{12}) + z_1 z_2/R + O(1)\Big]\, \Psi = 0\,, \quad R = a_{12} \to 0\,,$$

что позволило им определить асимптотику общего решения Ψ, но лишь с точностью порядка $O(R^2)$. В случае $N = 3$ такая асимптотика имеет вид:

$$\Psi = f^0_{00}\, Y_{00}(\hat{R})\ [1 + \mu_{12} z_1 z_2\, R] + R \sum_{\beta=-1}^{1} f^1_{1\beta} Y_{1\beta}(\hat{R}) + O(R^2)\,,\ R \to 0\,. \tag{12}$$

Если ее продифференцировать по R и результат спроектировать на функцию $Y_{00}(\hat{R})$, то для проекции $\Psi_{00} \equiv \langle Y_{00}(\hat{R})|\Psi\rangle$ получится связь, не содержащая не определенных и не зависящих от R множителей f^0_{00} и $f^1_{1\beta}$:

$$(\partial_R - \mu_{12} z_1 z_2)\,\Psi_{00} = 0\,, \quad R = 0\,.$$

В работе [7] для D-компонент $\Psi^{\varepsilon R}_{m'}$ трехчастичной волновой функции

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{R},\rho) = \sum_{m'=0}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^R)\,\Psi^{\varepsilon R}_{m'}(R,\rho,\theta),\ \cos\theta = (\mathbf{R}\rho)/(R\rho),\ \sigma = (-1)^\ell,$$

в случае кулоновских взаимодействий (4) были доказаны асимптотики:

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon_{m'}(R,\rho,\theta) \ &= \ f^0_{\ell m'}(\rho) Y_{\ell m'}(\theta,0)\Big[1 + \mu_{12} z_1 z_2 R\Big] + \\ &+ \ R \sum_{a=|\ell\pm1|} f^1_{am'}(\rho) Y_{am'}(\theta,0) + O(R^2)\,, \quad R \to 0, \quad \rho > 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Дифференцируя их по R и проектируя полученные равенства на функции $\Theta_{\ell m'}(\theta)$, исключаем все неизвестные функций $f^0_{\ell m'}$, $f^1_{am'}$ и приходим к связям:

$$(\partial_R - \mu_{12} z_1 z_2)\Psi^{\varepsilon R}_{\ell m'}(R,\rho) = 0,\ \Psi^{\varepsilon R}_{\ell m'}(R,\rho) \equiv \langle\Theta_{\ell m'}(\theta)|\Psi^{\varepsilon R}_{m'}\rangle,\ R = 0, \rho > 0.$$

Из асимптотик (11)–(13) нельзя получить никаких других связей типа (9), потому что явный вид слагаемых, убывающих как $O(R^2)$, не известен. Для вывода граничных условий, связывающих производные решений Ψ или Ψ^ε более высокого порядка необходимо знать в области $\mathcal{G}$ их полные асимптотические разложения (бесконечные ряды). Построение и анализ таких разложений в случае центральных взаимодействий более общего вида (5), чем кулоновские взаимодействия (4), составляет основное содержание настоящей работы. Решаемая задача, как пояснялось выше, представляется важной и интересной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

2. РЯДЫ ПАРНЫХ И ПОЛНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Пусть некулоновские слагаемые $\bar{V}_k$ парных взаимодействий (5) – аналитические функции. Всюду далее полагается

$$x \equiv x_i \to 0, \quad y \equiv y_i > 0\,, \quad u \equiv \cos\theta = (\mathbf{x}\mathbf{y})/(xy)\,, \quad k \neq i\,, \quad q \equiv q_i$$

и используется координатное представление $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}| \equiv \langle\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i|$.

Так как векторы Якоби (1) кинематически связаны [1]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} +c_{ki} & s_{ki} \\ -s_{ki} & c_{ki} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c_{ki} \\ s_{ki} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma_{ki} \\ \sin\gamma_{ki} \end{pmatrix},\ \gamma_{ki} \in [-\pi/2, /\pi/2],$$

где γ_{ki} – кинематический угол, то x_k – функция аргументов x, y, u:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}|x_k\rangle = x_k(x,y,u) = \frac{|s_{ki}|y}{g(v)},\ g(v) \equiv (1 - 2uv + v^2)^{-1/2},\ v \equiv -\frac{xc_{ki}}{ys_{ki}}, \tag{14}$$

а функция $1/x_k$ пропорциональна производящей функции $g(v)$ для полиномов Лежандра $P_n(u)$ [4]. Поэтому слагаемые q_k/x_k сумм (5) – ряды типа

$$\frac{q_k}{x_k} = \frac{q_k}{|s_{ki}|y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{c_{ki}\, x}{s_{ki}\, y} \right)^n P_n(u)\,, \quad k \neq i\,. \tag{15}$$

Далее, из (14) и (15) следует формула дифференцирования

$$\partial_x^n\, x_k\big|_{x=0} = c_{ki}\,\frac{s_{ki}}{|s_{ki}|}\,\frac{n!}{2n-1}\left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki}y}\right)^{n-1}[P_n(u) - P_{n-2}(u)]\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Благодаря ей каждый член T_p ряда Тейлора функции $\bar{V}_k(x_k(x,y,u))$ с центром в точке $x=0$ – сумма по полиномам $P_s(u)$ с индексом $s \leq p$:

$$T_p(y,u) = \frac{x^p}{p!}\,\partial_x^p \bar{V}_k(x_k(x,y,u))\bigg|_{x=0} = \frac{x^p}{p!}\sum_{s=0}^{p} \bar{V}_k^{ps}(|s_{ki}|y)\,P_s(u)\,.$$

Если P_x и P_u – операторы инверсии $x \to -x$ и $u \to -u$, то

$$P_u P_s(u) = (-1)^s P_s(u),\;\; P_x x^p = (-1)^p x^p,\;\; P_x P_u x_k = x_k,\;\; (1 - P_x P_u)V_k(x_k) = 0.$$

Из этих соотношений и линейной независимости функций $x^0, x^1, \ldots$ следует, что $P_x P_u T_p = T_p$ для всех p. Поэтому ряд Тейлора для $\bar{V}_k$ сводится к сумме по индексам p и s, таким, что $p+s$ – четное число:

$$\bar{V}_k(x_k(x,y,u)) = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^{p} \bar{V}_k^{ps}(|s_{ki}|y)\,P_s(u)\,, \quad (-1)^{p+s} = 1\,. \tag{16}$$

Вследствие представления (5) для $\bar{V}_i$ и представлений (15), (16) полное взаимодействие $V = V_1 + V_2 + V_3$ раскладывается в двойной ряд:

$$\begin{aligned} V(x,y,u) &= \frac{q}{x} + V^{00}(y) + \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^{p} V^{ps}(y)\,P_s(u)\,, \quad q \equiv q_i\,, \\ V^{ps}(y) &\equiv \bar{V}_{ip}\,\delta_{s0} + \delta_{ps}\sum_{k\neq i}\frac{q_k}{|s_{ki}|y}\left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki}y}\right)^p + \sum_{k\neq i}\bar{V}_k^{ps}(y)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

где отличны от нуля только константы $V^{p0} = \bar{V}_{ip}$ с нечетным p и функции $V^{ps}(y)$ с четной суммой $p+s$. При $p \leq 2$ их можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} V^{00}(y) &= \bar{V}_{i0} + \sum_{k\neq i}\Big[q_k/(|s_{ki}|\,y) + \bar{V}_k(|s_{ki}|y)\Big]\,, \quad V^{10}(y) = \bar{V}_{i1}\,, \\ V^{11}(y) &= \sum_{k\neq i} c_{ki}(s_{ki}/|s_{ki}|)\,\Big[\bar{V}_k'(|s_{ki}|y) - q_k/(s_{ki}\,y)^2\Big]\,, \\ V^{20}(y) &= \bar{V}_{i2} + g^-(y)\,, \quad V^{22}(y) = \sum_{k\neq i}[q_k c_{ki}^2/(|s_{ki}|y)^3] + g^+(y)\,, \\ g^{\pm}(y) &\equiv (1/6)\sum_{k\neq i} c_{ki}^2\,\Big[\bar{V}_k''(|s_{ki}|y) \pm 2\,\bar{V}_k'(|s_{ki}|y)/(|s_{ki}|y)\Big]\,, \end{aligned}$$

где $\bar{V}'_k$ и $\bar{V}''_k$ – первая и вторая производные функции $\bar{V}_k(x_k)$ по аргументу x_k в точке $x_k = |s_{ki}|y$, т.е. при $x = 0$.

Для проектирования ряда (17) потребуются матричные элементы полинома P_s в базисах (6) и (7). Если использовать известные формулы [4]:

$$\begin{aligned} P_s(u) &= [4\pi/(2s+1)] \sum_{\alpha=-s}^{s} Y^*_{s\alpha}(\hat{y})\, Y_{s\alpha}(\hat{x}), \\ \langle Y_{c\gamma}(\hat{x})|Y_{a\alpha}(\hat{x})Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle &= (-1)^a\,[(2a+1)/(4\pi)]^{1/2}\, C^{b0}_{a0c0}\, C^{c\gamma}_{a\alpha b\beta} \end{aligned}$$

и представление (6), то нетрудно получить искомые выражения:

$$\langle Y_{b\beta}(\hat{x})|P_s(u)|Y_{b'\beta'}(\hat{x})\rangle = (-1)^s\,[\,4\pi/(2s+1)\,]^{1/2}\, C^{b'0}_{s0b0}\, C^{b\beta}_{s\alpha b\beta'}\, Y^*_{s\alpha}(\hat{y}), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})|P_s(u)|\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}(\hat{x},\hat{y})\rangle &= (-1)^{a+b-\ell+s}\, C^{a0}_{s0a'0}\, C^{b0}_{s0b'0}\, \times \\ &\times\ [\,(2a'+1)(2b'+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} a & a' & s \\ b' & b & \ell \end{Bmatrix}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\langle \Theta_{b\beta}(u)|P_s(u)|\Theta_{b'\beta'}(u)\rangle = \delta_{\beta\beta'}\,(-1)^s\,[(2s+1)/2]^{1/2}\, C^{b'0}_{s0b0}\, C^{b\beta}_{s0b'\beta}, \tag{20}$$

и убедиться в том, что их правые части равны нулю, если не выполнено условие треугольника $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{s}$ или если $(b + s - b')$ – нечетное число.

3. СТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ

Докажем, что общее регулярное решение Ψ уравнения Шредингера (2) с взаимодействиями (5) – асимптотический ряд по целым степеням x:

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi^n(\hat{x},\mathbf{y}), \tag{21}$$

а каждая компонента Ψ^n этого ряда ортогональна любой сферической гармонике $Y_{b\beta}(\hat{x})$ с $b > n$, т.е. представима в виде конечного сферического ряда с, вообще говоря, не нулевыми сферическими компонентами $\Psi^n_{b\beta}$, $b \le n$:

$$\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y}) = \sum_{b=0}^{n}\sum_{\beta=-b}^{b} \Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y})\, Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad \Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y}) \equiv \langle Y_{b\beta}(\hat{x})|\Psi(\hat{x},\mathbf{y})\rangle. \tag{22}$$

Вследствие разложения (17) для оператора H верно представление

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\partial^2_x - \frac{2}{x}\,\partial_x + \frac{\mathbf{l}^2_x}{x^2} + \frac{q}{x} + \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^{p} V^{ps}(y)\, P_s(u) + h(\mathbf{y}) + E, \tag{23}$$

$$h(\mathbf{y}) \equiv -\partial^2_y - \frac{2}{y}\,\partial_y + \frac{\mathbf{l}^2_y}{y^2} + V^{00}(y) - E, \quad \mathbf{l}_x \equiv -i\,\mathbf{x}\times\nabla_x,\ \mathbf{l}_y \equiv -i\,\mathbf{y}\times\nabla_y, \tag{24}$$

а уравнение Шредингера (2) подстановкой анзаца (21) сводится к рекуррентной по индексу n цепочке уравнений:

$$\mathbf{l}^2_x\,\Psi^0(\hat{x},\mathbf{y}) = 0, \tag{25}$$

$$\left(\mathbf{l}_x^2 - 2\right)\,\Psi^1(\hat{x},\mathbf{y}) = -q\,\Psi^0(\hat{x},\mathbf{y})\,, \tag{26}$$

$$\left[\mathbf{l}_x^2 - (n+2)(n+3)\right]\,\Psi^{n+2}(\hat{x},\mathbf{y}) = -q\,\Psi^{n+1}(\hat{x},\mathbf{y}) - \tag{27}$$
$$-h(\mathbf{y})\,\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y}) - \sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p} V^{ps}(y)\,P_s(u)\,\Psi^{n-p}(\hat{x},\mathbf{y})\,, \quad n=0,1,\ldots$$

Поэтому доказательство существования представления (21) сводится к доказательству разрешимости такой цепочки. Как известно из теории дифференциальных уравнений [16], уравнение для Ψ^{n+2}, $n \geq -2$, разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна общему решению соответствующего однородного уравнения, т.е. всем гармоникам $Y_{n+2,\beta}(\hat{x})$ с $|\beta| \leq n+2$. Докажем такую ортогональность по индукции.

Общее регулярное решение уравнения (25) – произведение гармоники $Y_{00}(\hat{x})$ и, вообще говоря, произвольной функции Ψ^0_{00} аргумента $\mathbf{y}$:

$$\Psi^0(\hat{x},\mathbf{y}) = \Psi^0_{00}(\mathbf{y})\,Y_{00}(\hat{x})\,. \tag{28}$$

Поэтому правая часть уравнения (26) для неизвестной функции Ψ^1 ортогональна гармоникам $Y_{1\beta}(\hat{x})$, $\beta = 0, \pm 1$. Следовательно, решение Ψ^1 существует и равно сумме частного решения $q\Psi^0/2$ исследуемого неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$\Psi^1(\hat{x},\mathbf{y}) = (q/2)\,\Psi^0_{00}(\mathbf{y})\,Y_{00}(\hat{x}) + \sum_{\beta=0,\pm1} \Psi^1_{1\beta}(\mathbf{y})\,Y_{1\beta}(\hat{x})\,. \tag{29}$$

Итак, Ψ^0 и Ψ^1 – ряды (22) с произвольными компонентами Ψ^0_{00} и $\Psi^1_{1\beta}$. Следовательно, первый этап доказательства по индукции выполнен. Перейдем ко второму этапу. Предположим, что при некотором n все функции $\Psi^{n'}$ с $n' \leq n+1$ – известные конечные суммы (22), но искомое решение Ψ^{n+2}, вообще говоря, бесконечный сферический ряд. В уравнении (27) заменим все функции $\Psi^{n'}$ с $n' \leq n+2$ их рядами. С помощью (18) спроектируем получившееся уравнение на сферический базис (6). В итоге для искомых проекций $\Psi^{n+2}_{b\beta}(\mathbf{y})$ получатся алгебраические и незацепляющиеся ни по индексу $b = 0, 1, \ldots$, ни по индексу $\beta = -b, \ldots, b$ уравнения:

$$\left[\,b(b+1) - (n+2)(n+3)\,\right]\,\Psi^{n+2}_{b\beta}(\mathbf{y}) = -q\,\Psi^{n+1}_{b\beta}(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y})\,\Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y}) - \tag{30}$$
$$-\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}(-1)^s[4\pi/(2s+1)]^{1/2}\,V^{ps}(y)\sum_{b'=0}^{n-p}\sum_{\beta'=-b'}^{b'} C^{b'0}_{s0b0}\,C^{b\beta}_{s\alpha b\beta'}\,Y^*_{s\alpha}(\hat{y})\,\Psi^{n-p}_{b'\beta'}(\mathbf{y})\,.$$

В этих уравнениях $b' \leq n-p$, а $s \leq p$, следовательно, $b'+s \leq n$, и поэтому при $b > n$ все коэффициенты $C^{b'0}_{s0b0}$, а значит и сумма по индексам b', β', обращаются в нуль. Следовательно, при $b > n+2$, когда по предположению индукции $\Psi^{n+1}_{b\beta}, \Psi^n_{b\beta} = 0$, уравнения (30) становятся однородными и имеют только тривиальные решения: $\Psi^{n+2}_{b\beta} \equiv 0$, $|\beta| \leq b$. При $b = n+2$ и любом $\beta = -b, \ldots, b$ эти уравнения – тождества типа $0\,\Psi^{n+2}_{n+2,\beta} = 0$. Им подчиняются произвольные функции $\Psi^{n+2}_{n+2,\beta}(\mathbf{y})$. Так как при $b \leq n+1$ исследуемые уравнения (30) всегда имеют нетривиальные решения $\Psi^{n+2}_{b\beta}$, $|\beta| \leq b$, то Ψ^{n+2} – конечная сумма типа (22). Следовательно, вся цепочка исходных уравнения (25)–(27) разрешима, а для всех ее решений Ψ^n верны представления (22), что и требовалось доказать. Попутно было показано, что все сферические компоненты $\Psi^n_{b\beta}$, $|\beta| \le b$, с максимально возможным при данном n значении $b = n$ – произвольные функции переменной $\mathbf{y}$, через которые однозначно выражаются все остальные компоненты $\Psi^n_{b\beta}$ с $b < n$. Вывод таких представлений не сложен и заключается в решении уравнений (30) в порядке возрастания индекса n и убывания индекса b при данном n.

Поясним вывод примером. Подставим компоненты $\Psi^n_{b\beta}$, $n = 0, 1$, функций (28) и (29) в правые части уравнений (30) с $n = 0$ и найдем решения:

$$\Psi^2_{1\beta}(\mathbf{y}) = (q/4)\,\Psi^1_{1\beta}(\mathbf{y})\,, \quad \Psi^2_{00}(\mathbf{y}) = (1/12)\,\left[2h(\mathbf{y}) + q^2\right]\,\Psi^0_{00}(\mathbf{y})\,. \tag{31}$$

Далее, используя эти выражения, решим уравнения (30) с $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\Psi^3_{2\beta}(\mathbf{y}) &= (q/6)\,\Psi^2_{2\beta}(\mathbf{y})\,,\\
\Psi^3_{1\beta}(\mathbf{y}) &= (1/40)\,\left[4h(\mathbf{y}) + q^2\right]\,\Psi^1_{1\beta}(\mathbf{y}) + (\sqrt{\pi}/15)V^{11}(\mathbf{y})\Psi^0_{00}(\mathbf{y})\,Y^*_{1\beta}(\hat{y}),\\
\Psi^3_{00}(\mathbf{y}) &= (1/144)\,\left[q(8h(\mathbf{y}) + q^2) + 12V^{10}\right]\,\Psi^0_{00}(\mathbf{y})\,.
\end{aligned} \tag{32}$$

Увеличивая n от $n = 2$ можно построить функции $\Psi^{n+2}_{b\beta}$ с $b = n+1, n, \ldots, 0$:

$$\begin{aligned}
&\Psi^{n+2}_{n+1,\beta}(\mathbf{y}) = \frac{q}{2(n+2)}\,\Psi^{n+1}_{n+1,\beta}(\mathbf{y})\,,\\
&\Psi^{n+2}_{n\beta}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2(2n+3)}\left[h(\mathbf{y}) + \frac{q^2}{2(n+1)}\right]\Psi^n_{n\beta}(\mathbf{y}) + \\
&+\frac{\sqrt{4\pi}}{2(2n+3)}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{\sqrt{2p+1}}C^{n-p,0}_{n0p0}V^{pp}(\mathbf{y})\sum_{\beta'=p-n}^{n-p}C^{n\beta}_{p\alpha,n-p,\beta'}\Psi^{n-p}_{n-p,\beta'}(\mathbf{y})Y^*_{p\alpha}(\hat{y}), \ldots
\end{aligned}$$

Отметив, что асимптотика функции Ψ, полученная подстановкой (28) и (29) в (21), совпадает с асимптотикой (12), доказанной в [15], перейдем к проблеме построения связей (9) для Ψ. Каждый ($n = 0, 1, \ldots$) ряд (22) для функции Ψ^n содержит $n(n+2)$ неизвестных компонент $\Psi^{n'}_{b\beta}(\mathbf{y})$, $b = n' \le n$, $|\beta| \le b$. Поэтому не существует конечной линейной комбинации функций Ψ^n, не содержащей ни одной неизвестной компоненты и равной нулю при всех $\hat{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как $\partial^n_x\Psi|_{x=0} = (n!)\Psi^n$, то в исследуемом общем случае, когда среди частиц p_1, p_2, p_3 нет тождественных, такую линейную комбинацию, т.е. связь (9), нельзя построить и для частных производных функции Ψ. Докажем, что такие связи имеются, если p_j и p_k – тождественные частицы.

Пусть P_{jk} – оператор перестановки $p_j \longleftrightarrow p_k$. При ней $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. Вследствие равенства $HP_{jk} - P_{jk}H = 0$ уравнение Шредингера имеет решения $\Psi^\pm$ с определенной перестановочной симметрией: $P_{jk}\Psi^\pm = \pm\Psi^\pm$, причем знак $+$ или $-$ берется, если p_j и p_k – бозоны или фермионы. Так как [4]

$$P_{jk}Y_{b\beta}(\theta_x, \varphi_x) = Y_{b\beta}(\pi - \theta_x, \pi + \varphi_x) = (-1)^b\,Y_{b\beta}(\theta_x, \varphi_x)\,,$$

то $\Psi^\pm = P^\pm\Psi$, где Ψ – исследованное выше общее решение, а P^+ и P^- – ортогональные относительно интегрирования по углам $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ проекторы:

$$P^\pm = (1/2)(1 \pm P_{jk}) = (1/2)\sum_{b=0}^{\infty}\left[1 \pm (-1)^b\right]\sum_{\beta=-b}^{b}|Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle\langle Y_{b\beta}(\hat{x})|\,. \tag{33}$$

Для построения разложений Ψ^+ или Ψ^- достаточно подействовать проектором P^+ или P^- на ряды (21), (22) и уравнения (25)–(27). В итоге получатся ряды с компонентами $\Psi_{b\beta}$ общего решения Ψ с четным либо нечетным b:

$$\begin{aligned}
\Psi^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi^{n\pm}(\hat{x},\mathbf{y}), \qquad (34)\\
\Psi^{n+}(\hat{x},\mathbf{y}) &= \sum_{b=0,2,\ldots}^{n} \sum_{\beta=-b}^{b} \Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y})Y_{b\beta}(\hat{x}),\ \Psi^{n-}(\hat{x},\mathbf{y}) = \sum_{b=1,3,\ldots}^{n} \sum_{\beta=-b}^{b} \Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y})Y_{b\beta}(\hat{x}),
\end{aligned}$$

а компоненты $\Psi^n_{b\beta}$, $n \geq 2$, с четным (нечетным) b подчинятся системе (30), в которой b' только четное (нечетное), а s всегда четное.

Пусть p_j и p_k – тождественные бозоны. Тогда представление (34) и проекции $P^+\Psi^0$ и $P^+\Psi^1$ функций (28) и (29):

$$\Psi^+|_{x=0} = \Psi^{0+} = \Psi^0_{00}\, Y_{00}(\hat{x}), \quad \partial_x \Psi^+|_{x=0} = \Psi^{1+} = (q/2)\,\Psi^{0+}$$

порождают связь (9) решения Ψ^+ с его первой производной $\partial_x\Psi^+$ при $x = 0$:

$$(2\partial_x - q)\,\Psi^+(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, \quad x = 0, \quad \forall \hat{x},\mathbf{y} : y > 0. \qquad (35)$$

Проекции Ψ^{n+}, $n = 2, 3$, функций Ψ^n с компонентами (31) и (32) содержат одинаковое число неизвестных функций $\Psi^2_{2\beta}$ в виде суммы S:

$$\begin{aligned}
(1/2!)\partial_x^2\Psi^+|_{x=0} &= \Psi^{2+} = (1/12)(2h+q^2)\,\Psi^{0+} + S, \quad S \equiv \sum_{\beta=-2}^{2} \Psi^2_{2\beta}\, Y_{2\beta}(\hat{x}),\\
(1/3!)\partial_x^3\Psi^+|_{x=0} &= \Psi^{3+} = (1/144)\,\left[q(8h+q^2) + 12V^{10}\right]\,\Psi^{0+} + (q/6)S.
\end{aligned}$$

Поэтому выражение $6\Psi^{3+} - q\Psi^{2+}$ не содержит S и дает связь (9) при $x = 0$:

$$12\,\partial_x^2\,(2\partial_x - q\,)\,\Psi^+(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[q(4h(\mathbf{y}) - q^2) + 12V^{10}\right]\,\Psi^+(\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (36)$$

Если p_j и p_k – фермионы, то ряд (34) решения Ψ^- содержит функции

$$\begin{aligned}
\Psi^{0-} &\equiv 0, \quad \Psi^{1-} = \sum_{\beta=0,\pm1} \Psi^1_{1\beta}\, Y_{1\beta}(\hat{x}), \quad \Psi^{2-} = (q/4)\Psi^{1-},\\
\Psi^{3-} &= (1/40)\,\left(4h+q^2\right)\Psi^{1-} + S, \quad S \equiv \sum_{\beta=-3}^{3} \Psi^3_{3\beta}\, Y_{3\beta}(\hat{x}),\\
\Psi^{4-} &= (1/720)\,\left[q(14h+q^2) + 40V^{10}\right]\,\Psi^{1-} + (q/8)\,S.
\end{aligned}$$

Поэтому при $x = 0$ имеются следующие связи:

$$\begin{aligned}
\partial_x(2\partial_x - q)\Psi^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0, \qquad (37)\\
12\partial_x^3(2\partial_x - q)\Psi^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \left[q(4h(\mathbf{y}) - q^2) + 32V^{10}\right]\partial_x\Psi^-(\mathbf{x},\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Вернемся к случаю нетождественных частиц p_j и p_k и приступим к анализу строения частного решения Ψ^ε, $\varepsilon = (E,\ell,m,\sigma)$ уравнения Шредингера.

4. СТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В БИСФЕРИЧЕСКОМ БАЗИСЕ

В базисе (7) оператор P^ε, проектирующий Ψ на Ψ^ε, – сумма

$$\begin{aligned} P^\varepsilon &= (1/2) \sum_{\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{l}} \left[1+\sigma(-1)^{a+b}\right] |\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\rangle \langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})| = \\ &= \sum_{b=\mu(\sigma)}^{\infty} \sum_a |\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\rangle \langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})|, \quad \mu(\sigma) \equiv \left[1-(-1)^\ell \sigma\right]/2 . \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь и далее при данных b, ℓ и σ индекс a равен b, если $\ell = 0$, а при $\ell > 0$ вычисляется с помощью функций $\mu(\sigma)$ и $\chi(b) \equiv \left[1-(-1)^b\right]/2$ по формулам:

$$\begin{aligned} a &= a(c;\ell,b,\sigma) = |\ell-b| + 2c + (-1)^\ell \sigma\,\chi(b) + \mu(\sigma), \\ c &= 0,1,...,c_{max} = [\,\ell+b-|\ell-b|\,]/2 - (-1)^\ell \sigma\,\chi(b) - \mu(\sigma). \end{aligned}$$

Образ $\Psi^\varepsilon = P^\varepsilon \Psi$ ряда (21) – степенной ряд

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi^{n\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y}), \quad \Psi^{n\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y}) \equiv P^\varepsilon\,\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y}), \tag{39}$$

в котором вследствие (22) и (38) функции $\Psi^{n\varepsilon}$ – конечные суммы:

$$\Psi^{n\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y}) = \sum_{b=\mu(\sigma)}^{n} \sum_a \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}), \quad \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y) \equiv \langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})|\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y})\rangle, \tag{40}$$

а их компоненты выражаются через проекции функций $\Psi^n_{b\beta}$ и Ψ^n:

$$\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y) = \sum_{\alpha=-a}^{a} C^{\ell m}_{a\alpha b\beta} \langle Y_{a\alpha}(\hat{y})|\Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y})\rangle = \sum_{\alpha=-a}^{a} C^{\ell m}_{a\alpha b\beta} \langle Y_{a\alpha}(\hat{y}) Y_{b\beta}(\hat{x})|\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y})\rangle. \tag{41}$$

Этот же образ можно представить как разложение решения Ψ^ε по базису (7):

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{ab} \Psi^\varepsilon_{ab}(x,y) \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}), \\ \Psi^\varepsilon_{ab}(x,y) &\equiv \langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})|\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle = \sum_{n=b\geq\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y) \end{aligned} \tag{42}$$

и тем самым доказать, что бисферические компоненты Ψ^ε_{ab} такого разложения – степенные ряды с асимптотиками $\Psi^\varepsilon_{ab} = O(x^b)$, $b = \mu(\sigma)$, при $x \to 0$.

Как было показано, функции $\Psi^n_{b\beta}$ с $b = n = 0, 1, \ldots$ нельзя определить, но через них можно выразить все функции $\Psi^n_{b\beta}$ с $b \leq n$. Поэтому при $b = n$ и любом a суммы (41) – произвольные функции $\Psi^{n\varepsilon}_{an}$, через которые однозначно представляются все остальные функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ с $b \leq n$. Это утверждение можно доказать и другим способом, а именно, применив метод индукции к рекуррентной по индексу n цепочке алгебраических уравнений, полученной проектированием цепочки (25)–(27) с помощью формул (19) и (38):

$$\begin{aligned}&[\,b(b+1)-(n+2)(n+3)\,]\;\Psi^{n+2,\varepsilon}_{ab}(y)=-q\,\Psi^{n+1,\varepsilon}_{ab}(y)-h_a(y)\,\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)-\\&-(-1)^{a+b-\ell}\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}(-1)^sV^{ps}(y)\sum_{b'=\mu(\sigma)}^{n-p}(2b'+1)^{1/2}\sum_{a'}(2a'+1)^{1/2}\times\\&\times C^{a0}_{s0a'0}\,C^{b0}_{s0b'0}\left\{\begin{array}{ccc}a&a'&s\\b'&b&\ell\end{array}\right\}\Psi^{n-p,\varepsilon}_{a'b'}(y)\,,\quad n=-2,-1,\ldots;\,b=\mu(\sigma),1,\ldots,n\,,\end{aligned}\tag{43}$$

где h_a – диагональный матричный элемент оператора (24) в базисе (7):

$$\langle\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}|h(\mathbf{y})|\mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'}\rangle=\delta_{aa'}\delta_{bb'}h_a(y),\;h_a(y)\equiv-\partial^2_y-\frac{2}{y}\,\partial_y+\frac{a(a+1)}{y^2}+V^{00}(y)-E.\tag{44}$$

Доказательство разрешимости цепочки (43) принципиально не отличается от данного выше анализа системы (27) и поэтому опускается.

Компоненты $\Psi^{n\varepsilon}$ разложения (39) физического решения Ψ^{ε} можно найти, если известны компоненты Ψ^n или $\Psi^n_{b\beta}$ общего решения Ψ. Например, подействовав проектором (38) на функции (28) и (29) получаем:

$$\begin{aligned}\Psi^{0\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y})&=\Psi^{0\varepsilon}_{\ell0}(y)\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{\ell0}(\hat{x},\hat{y})\,,\\\Psi^{1\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y})&=\frac{q}{2}\,\Psi^{0\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y})+\sum_{a=|\ell\pm1|}\Psi^{1\varepsilon}_{a1}(y)\mathcal{Y}^{\ell m}_{a1}(\hat{x},\hat{y})\,,\qquad\sigma=(-1)^{\ell};\\\Psi^{0\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y})&=\Psi^{0\varepsilon}_{\ell0}(y)\equiv0\,,\quad\Psi^{1\varepsilon}(\hat{x},\mathbf{y})=\Psi^{1\varepsilon}_{\ell1}(y)\mathcal{Y}^{\ell m}_{\ell1}(\hat{x},\hat{y})\,,\quad\sigma=(-1)^{\ell+1}\,,\end{aligned}\tag{45}$$

а подставив сферические компоненты (31) и (32) в суммы (41) и затем упростив ряды (40), доказываем, что при любом σ

$$\begin{aligned}\Psi^{2\varepsilon}&=\frac{1}{12}\,(2h_\ell+q^2)\,\Psi^{0\varepsilon}+\frac{q}{4}\sum_a\Psi^{1\varepsilon}_{a1}\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a1}+\sum_a\Psi^{2\varepsilon}_{\ell2}\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a2}\,,\\\Psi^{3\varepsilon}&=\frac{1}{144}\left[q(8h_\ell+q^2)+12V^{10}\right]\Psi^{0\varepsilon}+\frac{1}{40}\sum_a(4h_a+q^2)\,\Psi^{1\varepsilon}_{a1}\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a1}-\\&-\frac{V^{11}}{10\sqrt{3}}\,\Psi^{0\varepsilon}_{\ell0}\sum_{a=|\ell\pm1|}C^{a0}_{\ell010}\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a1}+\frac{q}{6}\sum_a\Psi^{2\varepsilon}_{a2}\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a2}+\sum_a\Psi^{3\varepsilon}_{a3}\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{a3}\,.\end{aligned}\tag{46}$$

Третий способ построения функций $\Psi^{n\varepsilon}$ реализуется подстановкой решений $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ системы (43) в суммы (40). При этом компоненты Ψ^n или $\Psi^n_{b\beta}$ не требуются. Поэтому такой способ представляется оптимальным и для вывода асимптотики ряда (39) и асимптотик компонент Ψ^{ε}_{ab} разложения (42).

Выразив решения $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$, $n\le4$, цепочки (43) через неизвестные функции $\partial^n_x\Psi^{\varepsilon}_{ab}|_{x=0}=(n!)\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ с $b=n$, доказываем асимптотики компоненты $\Psi^{\varepsilon}_{\ell0}$:

$$\begin{aligned}\Psi^{\varepsilon}_{\ell0}(x,y)&=\left\{1+\frac{qx}{2}+\frac{x^2}{12}\,[2h_\ell(y)+q^2]+\frac{x^3}{144}\,[q(8h_\ell(y)+q^2)+12V^{10}]+\right.\\&\left.+\frac{x^4}{20}\left[\frac{1}{36}\,h_\ell(y)\,[6h_\ell(y)+5q^2]+\frac{q^4}{144}+V^{20}(y)+\frac{7q}{12}V^{10}\right]\right\}\Psi^{\varepsilon}_{\ell0}(0,y)-\\&-\frac{\sqrt{3}}{60}\,x^4\,V^{11}(y)\sum_{a'=|\ell\pm1|}C^{a'0}_{\ell010}\,\partial_x\Psi^{\varepsilon}_{a'1}(x,y)|_{x=0}+O(x^5)\,,\end{aligned}\tag{47}$$

асимптотики компонент Ψ^ε_{a1} с индексом $a = |\ell \pm (1-\mu(\sigma))|$:

$$\begin{aligned}\Psi^\varepsilon_{a1}(x,y) &= x\left\{1+\frac{qx}{4}+\frac{x^2}{40}[4h_\ell(y)+q^2]+\right.\\ &+ \left.\frac{x^3}{720}[q(14h_\ell(y)+q^2)+40V^{10}]\right\}\partial_x\Psi^\varepsilon_{a1}(x,y)|_{x=0} - \\ &- \frac{\sqrt{3}}{270}V^{11}(y)\,C^{a0}_{\ell 010}\,(9+2qx)\,x^3\,\Psi^\varepsilon_{\ell 0}(0,y)+O(x^5)\end{aligned} \tag{48}$$

и асимптотики компонент Ψ^ε_{a2} с индексом $a = |\ell \pm \mu(\sigma)|, |\ell \pm (2-\mu(\sigma))|$:

$$\begin{aligned}&\Psi^\varepsilon_{a2}(x,y) = \frac{x^2}{2}\left\{1+\frac{qx}{6}+\frac{x^2}{84}[6h_\ell(y)+q^2]\right\}\partial_x^2\Psi^\varepsilon_{a2}(x,y)|_{x=0} - \\ &-(-1)^{\ell+a}\frac{x^4}{7}V^{11}(y)\sum_{a'=|\ell\pm 1|}(2a'+1)^{1/2}C^{a0}_{a'010}\left\{\begin{matrix} a & a' & 1\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}\right\}\partial_x\Psi^\varepsilon_{a'1}(x,y)|_{x=0} + \\ &+\frac{x^4}{14\sqrt{5}}V^{22}(y)\,C^{a0}_{\ell 020}\,\Psi^\varepsilon_{\ell 0}(0,y)+O(x^5)\,.\end{aligned} \tag{49}$$

Вычисляя частные производные ∂_x^n, $n \le 4$, от этих асимптотик получаем следующие связи (9) при $x = 0$ и $y > 0$: для компоненты $\Psi^\varepsilon_{\ell 0}$ –

$$\begin{aligned}&(2\partial_x - q)\,\Psi^\varepsilon_{\ell 0} = 0\,, \quad (6\partial_x^2 - 2h_\ell - q^2)\,\Psi^\varepsilon_{\ell 0} = 0\,,\\ &\left[24\partial_x^3 - q(8h_\ell+q^2) - 12V^{10}\right]\Psi^\varepsilon_{\ell 0} = 0,\\ &\left[120(6V^{20}-\partial_x^4)+5h_\ell\left(6h_\ell+5q^2\right)+q^4+84qV^{10}\right]\Psi^\varepsilon_{\ell 0} = \\ &= 48\sqrt{3}\,V^{11}\sum_{a'=|\ell\pm 1|}C^{a'0}_{\ell 010}\,\partial_x\Psi^\varepsilon_{a'1}\,,\end{aligned} \tag{50}$$

для компонент Ψ^ε_{a1}, $a = |\ell \pm (1-\mu(\sigma))|$ –

$$\begin{aligned}\partial_x(2\partial_x - q)\,\Psi^\varepsilon_{a1} &= 0\,,\\ \left[20\,\partial_x^3 - 3(4h_a+q^2)\,\partial_x\right]\Psi^\varepsilon_{a1} &= -4\sqrt{3}\,V^{11}\,C^{a0}_{\ell 010}\Psi^\varepsilon_{\ell 0}\,,\\ \left\{30\partial_x^4 - \left[q(14h_a+q^2)+40V^{10}\right]\partial_x\right\}\Psi^\varepsilon_{a1} &= -(16/\sqrt{3})\,qV^{11}\,C^{a0}_{\ell 010}\,\Psi^\varepsilon_{\ell 0}\,,\end{aligned} \tag{51}$$

а для компонент Ψ^ε_{a2}, $a = |\ell \pm \mu(\sigma)|, |\ell \pm (2-\mu(\sigma))|$ –

$$\begin{aligned}&\partial_x^2(2\partial_x - q)\,\Psi^\varepsilon_{a2} = 0\,,\\ &7\sqrt{5}\,\partial_x^4\Psi^\varepsilon_{a2} = 12\,V^{22}\,C^{a0}_{\ell 020}\,\Psi^\varepsilon_{\ell 0} - \\ &-24\sqrt{5}\,(-1)^{\ell+a}\sum_{a'=|a\pm 1|}(2a'+1)^{1/2}C^{a0}_{a'010}\left\{\begin{matrix} a & a' & 1\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}\right\}\partial_x\Psi^\varepsilon_{a'1}\,.\end{aligned} \tag{52}$$

Чтобы воспроизвести соотношения (10) и (11), рассмотрим асимптотику $\Psi^\varepsilon \sim \Psi^{\varepsilon 0} + x\Psi^{\varepsilon 1}$ ряда (39) с компонентами (45) в частном случае $\ell = 0$, $m_3 = \infty$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2$, когда согласно (1) и (4) $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1\sqrt{2m_1}$ и $q = z_3\sqrt{2m_1}$. Представим второе слагаемое суммы $\Psi^{\varepsilon 1}$ (см. (45)) скалярным произведением $(\mathbf{a}_1\mathbf{A})$ с неопределенным вектором $\mathbf{A}$:

$$\Psi^{1\varepsilon}(y)\mathcal{Y}^{00}_{11}(\hat{x},\hat{y}) = -(\sqrt{3}/4\pi)\Psi^{1\varepsilon}_{11}(y)\,u = (\mathbf{a}_1\mathbf{A}),\ \mathbf{A} \equiv -(\sqrt{3}/4\pi)\Psi^{1\varepsilon}_{11}(y)\,\mathbf{y}/(a_1 y)\,.$$

Тогда исследуемая асимптотика сведется к равенству (11), доказанному в [14], а после ее интегрирования по всем углам $\hat{x}, \hat{y}$ получится условие Като [13] в его изначальной форме (10). Этим замечанием закончим анализ решения Ψ^ε в бисферическом базисе и перейдем к исследованию этого же решения, но в D-базисе (8).

5. СТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В D-БАЗИСЕ

Введем две "подвижные" системы координат $S^t = (\mathbf{e}_1^t, \mathbf{e}_2^t, \mathbf{e}_3^t)$, $t = x, y$. Пусть начальные точки O^x и O^y систем S^x и S^y совпадают с начальной точкой O фиксированной системы $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, а их реперы таковы, что:

$$(\mathbf{y}\mathbf{e}_1^x) > 0,\ (\mathbf{y}\mathbf{e}_2^x) = 0,\ (\mathbf{x}\mathbf{e}_3^x) = x, \quad (\mathbf{x}\mathbf{e}_1^y) < 0,\ (\mathbf{x}\mathbf{e}_2^y) = 0,\ (\mathbf{y}\mathbf{e}_3^y) = y\,.$$

Тогда орты $\mathbf{e}_2^x$ и $\mathbf{e}_2^y$ направлены вдоль нормали $\mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ к плоскости трех частиц, система S^x ориентирована так же, как и система S^R в [7, 8], и получается поворотом системы S^y вокруг орта $\mathbf{e}_2^y$ на угол θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как в системе S ориентация этих векторов задана углами $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ и $\hat{y} = (\theta_y, \varphi_y)$, а в системе S^t – углами $\hat{x}^t$ и $\hat{y}^t$:

$$\begin{aligned} \hat{x}^t &= (\theta_x^x, \varphi_x^x) = (0,0)\,, \quad \hat{y}^t = (\theta_y^x, \varphi_y^x) = (\theta, 0)\,, \quad t = x\,, \\ \hat{x}^t &= (\theta_x^y, \varphi_x^y) = (\theta, \pi)\,, \quad \hat{y}^t = (\theta_y^y, \varphi_y^y) = (0,0)\,, \quad t = y\,, \end{aligned} \tag{53}$$

то переход $S \to S^x$ определяется углами Эйлера $\omega^x = (\varphi_x, \theta_x, \gamma^x)$, а переход $S \to S^y$ – углами Эйлера $\omega^y = (\varphi_y, \theta_y, \gamma^y)$, где углы γ^t таковы, что

$$\cos\gamma^t = \operatorname{ctg}\theta\,\cos\theta_t - \operatorname{cosec}\theta\,\cos\theta_{t'}\,, \quad t \neq t' = x, y\,.$$

В D-базисе (8) оператор, проектирующий Ψ на Ψ^ε, – сумма

$$P^{\varepsilon t} = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} |D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega^t)\rangle\, \langle D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega^t)|\,, \quad t = x, y\,. \tag{54}$$

Для построения D-компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$ образа $\Psi^\varepsilon = P^{\varepsilon t}\Psi$,

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta)\, D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega^t)\,, \tag{55}$$

как проекций

$$\Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta) \equiv \langle D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega^t)|\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle$$

сферического и бисферического рядов (21), (22) и (40) решения Ψ потребуются разложения функций $Y_{a\alpha}(\hat{y})\, Y_{b\beta}(\hat{x})$ и $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})$ по функциям $D_{mm'}^{\ell\sigma *}$.

Выведем такие разложения. Используя равенства (6), формулы (53) и известные [4] правила преобразования гармоник $Y_{fe}(\hat{a})$ при переходе $S \to S^t$, их значения при нулевых аргументах,

$$Y_{fe}(\hat{a}) = \sum_{e'=-f}^{f} D_{ee'}^{\ell *}(\omega^t)\, Y_{fe'}(\hat{a}^t),\ Y_{fe}(0,0) = [(2f+1)/4\pi]^{1/2}\,\delta_{e0}, \quad a, t, = x, y,$$

и, наконец, разложение произведения двух D-функций по функциям $D^{\ell\sigma *}_{mm'}$ получаем первое искомое разложение:

$$Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)|Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t), \tag{56}$$

$$\langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)|Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle = \left[\frac{1+\sigma(-1)^{a+b}}{1+\delta_{m'0}}\right]^{1/2} (-1)^{m+m'} \times$$
$$\times C^{\ell-m}_{a\alpha b\beta} \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^a\, C^{b0}_{a-m'\ell m'}\; \Theta_{am'}(u)\,, & t=x, \\ (-1)^{b+m'}\, C^{a0}_{b-m'\ell m'}\; \Theta_{bm'}(u)\,, & t=y. \end{array} \right.$$

Для вывода второго разложения умножим каждое ($\alpha = -a, \dots a; \beta = m - a$) равенство (56) на соответствующий коэффициент $C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}$ и просуммируем полученные равенства по всем α. Тогда вследствие определения (7) и свойства ортогональности коэффициентов Клебша-Гордана при $t = x$ получим известное разложение [17], а в случае $t = y$ – его аналог:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) &= \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)|\mathcal{Y}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\rangle\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)\,, \qquad (57)\\
\langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)|\mathcal{Y}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\rangle &= \left\{ \begin{array}{ll} T^{\ell m'}_{ab}\,\Theta_{am'}(u)\,, & t=x, \\ (-1)^{m'}\, T^{\ell m'}_{ba}\Theta_{bm'}(u)\,, & t=y, \end{array} \right.\\
T^{\ell m'}_{ab} &\equiv \left[\frac{1+\sigma(-1)^{a+b}}{1+\delta_{m'0}}\right]^{1/2} (-1)^{a+m'}\, C^{b0}_{a-m'\ell m'}\,.
\end{aligned}$$

Приступим к анализу строения D-компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$ ряда (55). Применяя (54) и (56), построим образ $\Psi^{\varepsilon} = P^{\varepsilon t}\Psi$ ряда (21) с компонентами (22) и таким образом докажем, что D-компоненты $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$ – ряды по целым степеням x и конечным суммам $\Psi^{n\varepsilon t}_{m'}$ проекций $\langle Y_{a\alpha}|\Psi^n_{b\beta}\rangle$ компонент $\Psi^n_{b\beta}$ общего решения:

$$\Psi^{\varepsilon t}_{m'}(x,y,\theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n\, \Psi^{n\varepsilon t}_{m'}(y,\theta)\,, \quad m' = \mu(\sigma),\dots,\ell\,, \quad t = x,y\,, \tag{58}$$

$$\Psi^{n\varepsilon t}_{m'}(y,\theta) = \sum_{b=\mu(\sigma)}^{n} \sum_{a} \langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)|Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle\, \langle Y_{a\alpha}(\hat{y})|\Psi^n_{b\beta}(\mathbf{y})\rangle\,. \tag{59}$$

Значит, асимптотики D-компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$, т.е. конечные ($n < \infty$) подсуммы рядов (58), можно найти, заменив функции $\Psi^n_{b\beta}$ в суммах (59) их явными выражениями, например при $n \le 3$ – правыми частями равенств (28), (29), (31) и (32).

Другой вывод представления (58) реализуем проектированием бисферического ряда (40) с помощью формул (54) и (57) на D-базис (8). В итоге при $t = x$ функция $\Psi^{n\varepsilon t}_{m'}$ представляется конечной суммой по индексу a:

$$\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}(y,\theta) = \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y)\,\Theta_{am'}(u)\,, \tag{60}$$

с Θ-компонентами

$$\Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y) \equiv \langle \Theta_{am'}(u)|\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}(y,\theta)\rangle = \sum_{b=m'}^{n} T^{\ell m'}_{ab}\, \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)\,, \tag{61}$$

а при $t = y$ – конечной суммой индексу b:

$$\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}(y,\theta) = \sum_{b=m'}^{n} \Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y)\,\Theta_{bm'}(u)\,, \tag{62}$$

с Θ-компонентами

$$\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y) \equiv \langle \Theta_{bm'}(u) | \Psi^{n\varepsilon y}_{m'}(\theta, y)\rangle = \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} (-1)^{m'} T^{\ell m'}_{ba}\, \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)\,. \tag{63}$$

В этих суммах $a \le \ell + n - \mu(\sigma)$, поскольку $\mathbf{a} = \mathbf{l} - \mathbf{b}$, $(-1)^{a+b} = \sigma$ и $b \le n$. Далее, $a \ge m'$ и $b \ge m'$, потому что, согласно (57), $T^{\ell m'}_{ab}$, $T^{\ell m'}_{ba} = 0$ при $a < m'$ или $b < m'$. По той же причине $\Psi^{n\varepsilon x}_{am'} \equiv 0$ при $m' > a$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'} \equiv 0$ при $m' > b$.

Так как $n \ge b \ge m'$, то $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'} \equiv 0$, если $m' > n$, но, вообще говоря, $\Psi^{n\varepsilon x}_{am'} \ne 0$ при $m' > n$. Поэтому ряд (60) устроен более сложно, чем ряд (62).

В отличие от системы функций $\Theta_{cm'}(u)$, $m' = -c, \dots c$, система функций $\Theta_{cm'}(u)$, $c = m', m'+1, \dots$, ортонормирована на отрезке $u \in [-1, 1]$:

$$\langle \Theta_{cm'}(u) | \Theta_{cm''}(u)\rangle \ne \delta_{m'm''}\,, \quad \langle \Theta_{cm'}(u) | \Theta_{c'm'}(u)\rangle = \delta_{cc'}\,.$$

Следовательно, формулы (60) и (62) означают, что компоненты $\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}$ разложимы в конечные суммы по ортонормированным системам функций $\Theta_{am'}(u)$ и $\Theta_{bm'}(u)$ с индексами $a, b \ge m'$. Благодаря конечности таких разложений асимптотики рядов (58), т.е. D-компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$, можно построить заменой в (61) или (63) бисферических компонент $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ их явными выражениями (например, (45) и (46)) через неопределенные бисферические компоненты $\Psi^{n'\varepsilon}_{ab}$, $b = n' \le n$. Согласно (61) и (63) при такой замене функции $\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}$ с данным n выразятся через произвольные функции $f^{n'x}_{am'}$ и $f^{n'y}_{m'}$:

$$\begin{aligned} f^{n'x}_{am'}(y) &= T^{\ell m'}_{ab}\, f^{n'x}_{a}(y)\,, \quad f^{n'x}_{a}(y) \equiv \Psi^{n'\varepsilon}_{ab}(y)\,, \\ f^{n'y}_{m'}(y) &= \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} (-1)^{m'} T^{\ell m'}_{ba}\, \Psi^{n'\varepsilon}_{ab}(y)\,, \quad b = n' \le n\,. \end{aligned} \tag{64}$$

Для полноты приведем равенства, связывающие все введенные компоненты друг с другом. Из (55) и определения систем S^x и S^y следует, что

$$\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(x,y,\theta) = \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{m'm''}(0,\theta,0)\,\Psi^{\varepsilon y}_{m''}(x,y,\theta)\,, \quad m' = \mu(\sigma), \dots, \ell. \tag{65}$$

Поэтому компоненты $\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}$ рядов (58) связаны аналогичным образом:

$$\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}(y,\theta) = \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{m'm''}(0,\theta,0)\,\Psi^{n\varepsilon y}_{m''}(y,\theta)\,, \quad m' = \mu(\sigma), \dots, \ell. \tag{66}$$

Умножим каждый $(m' = \mu(\sigma), \dots, \ell)$ ряд (61) или (63) на $T^{\ell m'}_{ab'}/(2 - \delta_{m'0})$ или на $T^{\ell m'}_{ba'}/(2 - \delta_{m'0})$. Суммируя получившиеся равенства по всем m', имеем

$$\begin{aligned} \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y) &= 2 \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{min\{a,\ell\}} \frac{(-1)^{a+m'}}{(2-\delta_{m'0})^{1/2}} C^{b0}_{a-m'\ell m'}\, \Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y) = \\ &= 2 \sum_{m'=m(\sigma)}^{min\{b,\ell\}} \frac{(-1)^{b}}{(2-\delta_{m'0})^{1/2}} C^{a0}_{b-m'\ell m'}\, \Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y)\,. \end{aligned} \tag{67}$$

Просуммировав по всем $b=\mu(\sigma),\ldots,n$ равенства (67), умноженные на соответствующие коэффициенты $C^{b0}_{a-m''\ell m''}$, доказываем, что при $(-1)^{a+b}=\sigma$

$$\Psi^{n\varepsilon x}_{am''}(y)=\sigma\,(-1)^{m''}\sum_{b=m'}^{n}C^{b0}_{a-m''\ell m''}\sum_{m'=\mu(\sigma)}^{min\{b,\ell\}}\sqrt{\frac{2-\delta_{m''0}}{2-\delta_{m'0}}}\,C^{a0}_{b-m'\ell m'}\,\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y)\,. \tag{68}$$

Третий способ построения асимптотик компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$ суммы (55) опишем более подробно. Этот способ представляется оптимальным, потому что в нем, в отличие от двух упомянутых выше способов, не нужны ни функции $\Psi^{n}_{b\beta}$, ни функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$, а ключевыми являются доказанные представления (58), (60) и (62). Благодаря им для решения (55) верны два разложения:

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty}x^{n}\sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell}D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^{x})\sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)}\Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y)\,\Theta_{am'}(u)\,, \tag{69}$$

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty}x^{n}\sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell}D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^{y})\sum_{b=m'}^{n}\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y)\,\Theta_{bm'}(u) \tag{70}$$

по трем системам линейно независимых функций:

$$(x^0,x^1,\ldots)\,,\quad (D^{\ell\sigma*}_{mm'},\ m'=\mu(\sigma),...,\ell)\ \text{и}\ (\Theta_{am'},a\geq m')\ \text{или}\ (\Theta_{bm'},b\geq m')\,.$$

Поэтому неизвестные функции $\Psi^{n\varepsilon t}_{am'}(y)$ удается подчинить линейным системам уравнений. Для сравнения выведем их в двух случаях $t=x$ и $t=y$.

Пусть $t=x$, т.е. используется система S^{x}. Тогда действие проектора (54) с $t=x$ на цепочку (25)–(27) дает рекуррентную по индексу n цепочку систем уравнений для искомых компонент $\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}$ ряда (58):

$$\begin{aligned}&\Big[\ell(\ell+1)-2m'^2+Q_{m'm'}(\theta)-(n+2)(n+3)\Big]\ \Psi^{n+2,\varepsilon x}_{m'}(y,\theta)-\\&-\sum_{m''=m'\pm1}\gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\,Q_{m'm''}(\theta)\,\Psi^{n+2,\varepsilon x}_{m''}(y,\theta)=\\&-q\Psi^{n+1,\varepsilon x}_{m'}(y,\theta)-h^{x}_{m'}(y,\theta)\,\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}(y,\theta)-\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}V^{ps}(y)\,P_{s}(u)\,\Psi^{n-p,\varepsilon x}_{m'}(y,\theta)\,.\end{aligned} \tag{71}$$

Здесь $\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}\equiv0$ при $n<0$; $m'=\mu(\sigma),\ldots,\ell$ при каждом $n=-2,1,\ldots$;

$$\begin{aligned}\gamma^{\ell\sigma}_{m',m'+1}&\equiv\Big\{\Big[1+\delta_{m'0}\,\sigma\,(-1)^{\ell}\Big]\,[\ell(\ell+1)-m'(m'+1)]\Big\}^{1/2},\\ \gamma^{\ell\sigma}_{m',m'-1}&\equiv(1-\delta_{m'0})\,\Big\{\Big[1+\delta_{m'1}\,\sigma\,(-1)^{\ell}\Big]\,[\ell(\ell+1)-m'(m'-1)]\Big\}^{1/2};\end{aligned}$$

оператор $h^{x}_{m'}(y,\theta)$ порожден оператором (24):

$$\begin{aligned}h^{x}_{m'}(y,\theta)&\equiv\langle D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^{x})|h(\mathbf{y})|D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^{x})\rangle=\\&=-y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y)+y^{-2}Q_{m'm'}(\theta)+V^{00}(y)-E\,,\end{aligned} \tag{72}$$

а операторы $Q_{m'm''}(\theta)$ определены как

$$Q_{m'm'}(\theta)\equiv-\frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+\frac{m'^2}{\sin^2\theta},\ Q_{m',m'\pm1}(\theta)\equiv\mp\partial_\theta+(m'\mp1)\,\mathrm{ctg}\,\theta\,. \tag{73}$$

При действии на функцию $\Theta_{am'}$ оператор $Q_{m'm'}$ и оператор (20) умножения на $P_s(u)$ сохраняют индекс m', а образы $Q_{m',m'\pm1}\Theta_{a,m'\pm1}$ подобны функции $\Theta_{am'}$ [5]:

$$
\begin{aligned}
&[Q_{m'm'}(\theta) - a(a+1)]\Theta_{am'}(u) = 0\,, \quad Q_{m'm''}(\theta)\Theta_{am''}(u) = q^a_{m'm''}\Theta_{am'}(u), \\
&q^a_{m'm''} \equiv [\,a(a+1) - m'm''\,]^{1/2}\,, \quad m'' = m' \pm 1\,.
\end{aligned} \tag{74}
$$

Поэтому при данном n каждое $(m' = \mu(\sigma), \ldots, \ell)$ уравнение системы (71) заменой всех функций $\Psi^{n'\varepsilon x}_{m''}$, $n' = 0, \ldots, n+2$; $m'' = m', m' \pm 1$, их анзацами (60) сводится к уравнению, содержащему функции $\Theta_{am''}$ с разными a, но одним и тем же m'', равным m'. Так как такие функции линейно независимы, то рассматриваемое уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда "коэффициент" перед каждой из них равен нулю, т.е. когда для любого допустимого a

$$
\begin{aligned}
&\Big[\ell(\ell+1) - 2m'^2 - (n+2)(n+3)\Big]\,\Psi^{n+2,\varepsilon}_{am'}(y) - \\
&- \sum_{m''=m'\pm1} \gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\, q^a_{m'm''}\, \Psi^{n+2,\varepsilon x}_{am''}(y) = -q\Psi^{n+1,\varepsilon x}_{am'}(y) - h^x_{am'}(y)\,\Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y) - \\
&- \sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\, V^{ps}(y) \sum_{a'=m'}^{\ell+n-p-\mu(\sigma)} C^{a'0}_{s0a0}\, C^{am'}_{s0a'm'}\, \Psi^{n-p,\varepsilon x}_{a'm'}(y)\,,
\end{aligned} \tag{75}
$$

где $\Psi^{n\varepsilon x}_{am'} \equiv 0$ при $n < 0$ или $a < m'$ или же при $a > \ell + n - \mu(\sigma)$ и, как следует из (44), (72) и (74),

$$
h^x_{am'}(y) \equiv \langle\Theta_{am'}(u)|h^x_{m'}(y,\theta)|\Theta_{am'}(u)\rangle = h_a(y)\,.
$$

Таким образом цепочка дифференциальных уравнений (71) сводится к рекуррентной по индексу n цепочке систем линейных уравнений (75) для искомых Θ-компонент $\Psi^{n\varepsilon x}_{am'}$ рядов (60). Эти системы нумеруются индексами n и a. Система с данными n и a состоит из уравнений для неизвестных $\Psi^{n+2,\varepsilon x}_{am'}$, причем $m' = \mu(\sigma), \ldots, \ell$, если $a > \ell$ и $m' = a, \ldots, \ell$, если $a \le \ell$. Матрица такой системы – трехдиагональная, а ее неизвестные зацеплены по индексу m', что существенно затрудняет их нахождение в явном виде. Ключевыми для построения решения $F^{n+2,x}_{am'}$, $m \le a$, однородной системы с такой матрицей являются известные связи [4] для коэффициентов Клебша-Гордана с индексами проекций моментов, отличающихся на единицу, и следующий из представлений (61) и (64) анзац

$$
F^{n+2,x}_{am'}(y) = T^{\ell m'}_{a,n+2}\, f^{n+2,x}_a(y)\,, \quad f^{n+2,x}_a(y) \equiv \Psi^{n+2,\varepsilon}_{a,n+2}(y)\,, \quad m' \le a\,.
$$

Общие решения $\Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y)$, $n \le 3$, цепочки (75) выглядят не столь сложно, как уже при $n = 4$, что позволяет по формулам (60) выразить компоненты $\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}(y,\theta)$, $n = 0, 1, 2, 3$, рядов (58) с $m' = \mu(\sigma), \ldots, \ell$ через неопределенные функции $f^{nx}_a(y)$, известные операторы $h^x_{am'}(y)$ и функции $V^{ps}(y)$ и $\Theta_{am'}(u)$:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{0\varepsilon x}_{m'} &= T^{\ell m'}_{\ell 0}\, f^{0x}_\ell\, \Theta_{\ell m'}\,, \quad \Psi^{1\varepsilon x}_{m'} = \frac{q}{2}\,\Psi^{0\varepsilon x}_{m'} + \sum_{a=|\ell-1|}^{\ell+1} T^{\ell m'}_{a1}\, f^{1x}_a \Theta_{am'}\,, \\
\Psi^{2\varepsilon x}_{m'} &= \frac{1}{12}(2h^x_{\ell m'} + q^2)\;\Psi^{0\varepsilon x}_{m'} + \frac{q}{4}\sum_{a=|\ell-1|}^{\ell+1} T^{\ell m'}_{a1}\, f^{1x}_a\, \Theta_{am'} + \sum_{a=|\ell-2|}^{\ell+2} T^{\ell m'}_{a2}\, f^{2x}_a\, \Theta_{am'}\,, \\
\Psi^{3\varepsilon x}_{m'} &= \frac{1}{144}\left[q(8h^x_{\ell m'} + q^2) + 12V^{10}\right]\,\Psi^{0\varepsilon x}_{m'} +
\end{aligned}
$$

$$+\ \frac{1}{40}\sum_{a=|\ell-1|}^{\ell+1}(4h^x_{\ell m'}+q^2)\,T^{\ell m'}_{a1}\,f^{1x}_a\,\Theta_{am'}-\frac{V^{11}}{10\sqrt{3}}f^{0x}_\ell\sum_{a=|\ell\pm1|}C^{a0}_{\ell010}T^{\ell m'}_{a1}\Theta_{am'}+$$
$$+\ \frac{q}{6}\sum_{a=|\ell-2|}^{\ell+2}T^{\ell m'}_{a2}\,f^{2x}_a\Theta_{am'}(u)+\sum_{a=|\ell-3|}^{\ell+3}T^{\ell m'}_{a3}\,f^{3x}_a\,\Theta_{am'}\,.$$

Используя эти представления, доказываем асимптотики рядов (58):

$$\begin{aligned}
\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(x,y,\theta) &= \left[1+\frac{qx}{2}+\frac{x^2}{12}\left(2h^x_{\ell m'}(y)+q^2\right)\right]\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(0,y,\theta)+\\
&+\ \frac{x^3}{144}\left[q(8h^x_{\ell m'}(y)+q^2)+12V^{10}\right]\,\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(0,y,\theta)+\\
&+\ x^2\sum_{a=\ell,|\ell\pm2|}\left(1+\frac{qx}{6}\right)T^{\ell m'}_{a2}\,f^{2x}_a(y)\,\Theta_{am'}(u)+ \qquad (76)\\
&+\ x\sum_{a=|\ell\pm1|}\left[1+\frac{qx}{4}+\frac{x^2}{40}\left(4h^x_{am'}(y)+q^2\right)\right]T^{\ell m'}_{am'}f^{1x}_a(y)\,\Theta_{am'}(u)+\\
&+\ x^3\sum_{a=|\ell\pm1|}\left[T^{\ell m'}_{a3}\,f^{3x}_a(y)-\frac{V^{11}(y)}{10\sqrt{3}}C^{a0}_{\ell010}T^{\ell m'}_{a1}\,f^{0x}_\ell(y)\right]\Theta_{am'}(u)+\\
&+\ x^3\sum_{a=|\ell\pm3|}T^{\ell m'}_{a3}\,f^{3x}_a\,\Theta_{3m'}(u)+O(x^4)\,,\quad \sigma+(-1)^\ell;\\
\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(x,y,\theta) &= x\left[1+\frac{qx}{4}+\frac{x^2}{40}\left(4h^x_{\ell m'}(y)+q^2\right)\right]\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(0,y,\theta)+\\
&+\ x^2\sum_{a=|\ell\pm1|}\left(1+\frac{qx}{6}\right)T^{\ell m'}_{a2}\,f^{2x}_a(y)\,\Theta_{am'}(u)+\\
&+\ x^3\sum_{a=\ell,|\ell\pm2|}T^{\ell m'}_{a3}\,f^{3x}_3(y)\,\Theta_{am'}(u)+O(x^4)\,,\quad \sigma=(-1)^{\ell+1}\,.
\end{aligned}$$

При $x=0$ производные $\partial^n_x\Psi^{\varepsilon x}_{m'}=(n!)\Psi^{n\varepsilon x}_{m'}$, $n=0,1,2,3$, асимптотик (76) содержат разное число неизвестных функций $f^{n'x}_a$, $n'\le n$. Поэтому не существует линейной комбинации производных разных порядков, не содержащей ни одной функции $f^{n'x}_a$. Для проекций $\partial^n_x\Psi^{\varepsilon x}_{am'}$ производных $\partial^n_x\Psi^{\varepsilon x}_{m'}$ на функции $\Theta_{am'}(u)$ такие комбинации, т.е. связи (9), имеются. Например, в случае $a=\ell$ при $\sigma=(-1)^\ell$ и $n=0$ или $\sigma=(-1)^{\ell+1}$ и $n=1$:

$$\begin{aligned}
&\partial^n_x\,(2\partial_x-q)\ \Psi^{\varepsilon x}_{\ell m'}(x,y,\theta)=0\,, \qquad (77)\\
&\left[12\partial^{2+n}_x\,(2\partial_x-q)-q(4h^x_{\ell m'}(y)-q^2)-(12+20n)V^{10}\right]\Psi^{\varepsilon x}_{\ell m'}(x,y,\theta)=0\,.
\end{aligned}$$

Отметим, что асимптотика (13), доказанная в [7], следует из соотношения (76) в случае $\sigma=(-1)^\ell$. Чтобы в этом убедиться, в этой сумме нужно положить $\mathbf{x}=\mathbf{x}_3$ и $q=z_1z_2\sqrt{2\mu_{12}}$, затем по формулам (1) выразить $\mathbf{x}_3$ и $\mathbf{y}_3$ через $\mathbf{R}$ и ρ и, наконец, оставить слагаемые, убывающие медленнее, чем $O(R^2)$.

Пусть теперь $t=y$, т.е. выбрана система S^y. Все построения в этом случае реализуем в той же последовательности, что и в случае $t=x$. Сначала действием проектора (54) с $t=y$ на систему (25)–(27) подчиним неизвестные $\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}$ ряда (58) дифференциальным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&[\,Q_{m'm'}(\theta)-(n+2)(n+3)\,]\;\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{m'}(y,\theta)=-q\,\Psi^{n+1,\varepsilon y}_{m'}(y)+\\
&+y^{-2}\sum_{m''=m'\pm1}\gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\,Q_{m'm''}(\theta)\,\Psi^{n\varepsilon y}_{m''}(y,\theta)-\\
&-h^{y}_{m'}(y,\theta)\,\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}(y,\theta)-\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}V^{ps}(y)\,P_s(u)\,\Psi^{n-p,\varepsilon y}_{m'}(y,\theta)\,,
\end{aligned}
\tag{78}
$$

где $\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}\equiv 0$ при $n<0$ или $n<m'=\mu(\sigma),\ldots,\ell$; $Q_{m'm''}$ – операторы (73), а $h^{y}_{m'}$ – оператор $h(\mathbf{y})$ (см. (24)) в обкладках одинаковых функций $D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^{y})$:

$$
h^{y}_{m'}(y,\theta)\equiv -y^{2}\partial_y(y^{2}\partial_y)+y^{-2}Q_{m'm'}(\theta)+y^{-2}\left[\ell(\ell+1)-2m'^{2}\right]+V^{00}(y)-E\,.
$$

Подстановкой (62) сведем уравнения (78) к алгебраическим уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&[\,b(b+1)-(n+2)(n+3)\,]\;\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{bm'}(y)=-q\Psi^{n+1,\varepsilon y}_{bm'}(y)+\\
&+y^{-2}\sum_{m''=m'\pm1}\gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\,q^{b}_{m'm''}\,\Psi^{n\varepsilon y}_{bm''}(y)-h^{y}_{bm'}(y)\Psi^{n\varepsilon}_{bm'}(y)-\\
&-\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{p}(-1)^{s}\,V^{ps}(y)\sum_{b'=m'}^{n-p}C^{b'0}_{s0b0}\,C^{bm'}_{s0b'm'}\,\Psi^{n-p,\varepsilon y}_{b'm'}(y)\,,
\end{aligned}
\tag{79}
$$

где $m'=\mu(\sigma),\ldots,\min\{b,n+2\}$, и $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}=0$, если $n<0$ или $m'>b$ или же $n>b$, а $h^{y}_{bm'}$ – оператор $h^{y}_{m'}$ в обкладках одинаковых функций $\Theta_{bm'}(\theta)$:

$$
h^{y}_{bm'}(y)\equiv -y^{-2}\partial_y(y^{2}\partial_y)+y^{-2}\left[\ell(\ell+1)+b(b+1)-2m'^{2}\right]+V^{00}(y)-E\,.
$$

При данных n и b неизвестные $\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{bm'}$, $m'=\mu(\sigma),\ldots,\min\{b,n+2\}$, системы (79), в отличие от решений $\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{am'}$ уравнений (75), не зацеплены по индексу m'. Нетривиальное решение $F^{n+2,y}_{bm'}$, $m'=\mu(\sigma),\ldots,\min\{b,n+2\}$, соответствующей однородной системы существует только при $b=n+2$ и элементарно выражается ($F^{n+2,y}_{bm'}=f^{n+2,y}_{m'}$) через произвольные функции $f^{n+2,y}_{m'}(y)$, равные линейным комбинациям (64) произвольных бисферических компонент $\Psi^{n+2,\varepsilon}_{a,n+2}$. По указанным причинам построение общего решения $\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{bm'}$, $m'\le b\le n+2$, цепочки систем (79) в порядке возрастания n и убывания b при каждом n не вызывает затруднений:

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{n+2,m'}(y)=f^{n+2,y}_{m'}(y)\,,\qquad \Psi^{n+2,\varepsilon y}_{n+1,m'}(y)=[q/(2n+4)]\,f^{n+1,y}_{m'}(y)\,,\\
&\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{nm'}(y)=[1/(4n+6)]\left[\Big(h^{y}_{nm'}(y)+q^{2}/(2n+2)\Big)\,f^{ny}_{m'}(y)-\right.\\
&-y^{-2}\sum_{m''=m'\pm1}\gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\,q^{n}_{m'm''}\,f^{ny}_{m''}(y)-C^{n-10}_{10n0}\,C^{nm'}_{10n-1m'}\,V^{11}(y)\,f^{n-1,y}_{m'}(y)+\\
&\qquad\left.+C^{n-20}_{20n0}\,C^{nm'}_{20n-2m'}\,V^{22}(y)\,f^{n-2,y}_{m'}(y)\right]\,,\ldots
\end{aligned}
$$

В итоге Θ-компоненты $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y)$, а затем и функции $\Psi^{n\varepsilon y}_{m'}(y,\theta)$, т.е. суммы (62), выражаются через произвольные функции $f^{n'y}_{m'}(y)$ с $n'\le n$, известные операторы $h^{y}_{bm'}(y)$ и функции $V^{ps}(y)$ и $\Theta_{bm'}(u)$. Например,

$$
\Psi^{0\varepsilon y}_{m'}\;=\;\Psi^{0\varepsilon y}_{m'}=f^{0y}_{0}\,\Theta_{00}\,\delta_{m'0}=2^{-1/2}\,f^{0y}_{0}\,,\quad \Psi^{1\varepsilon y}_{m'}=(q/2)\Psi^{0\varepsilon y}_{m'}+f^{1y}_{m'}\Theta_{1m'}\,,
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_{m'}^{2\varepsilon y} &= (1/12)\left(2h_{00}^{y}+q^{2}\right)\Psi_{m'}^{0\varepsilon y}+(q/4)\,f_{m'}^{1y}\Theta_{1m'}+f_{m'}^{2y}\Theta_{2m'}\,,\\
\Psi_{0}^{3\varepsilon y} &= (1/144)\left[q(8h_{00}^{y}+q^{2})+12V^{10}\right]\Psi_{m'}^{0\varepsilon y}+(q/6)\,f_{0}^{2y}\,\Theta_{20}+f_{0}^{3y}\,\Theta_{30}+\\
&+\ (1/40)\left[\left(4h_{10}^{y}+q^{2}\right)\Psi_{m'}^{0\varepsilon y}-4y^{-2}\gamma_{01}^{\ell\sigma}q_{01}^{1}\,f_{1}^{1y}+(4/\sqrt{3})\,V^{11}\,\Psi_{m'}^{0\varepsilon y}\right]\Theta_{10}\,,\\
\Psi_{1}^{3\varepsilon y} &= (1/40)\left[\left(4h_{11}^{y}+q^{2}\right)f_{1}^{1y}-4y^{-2}\gamma_{01}^{\ell\sigma}\,q_{01}^{1}f_{0}^{1y}\right]\Theta_{11}+(q/6)f_{1}^{2y}\Theta_{21}+f_{1}^{3y}\Theta_{31},\\
\Psi_{2}^{3\varepsilon y} &= (q/6)\,f_{2}^{2y}\,\Theta_{22}+f_{2}^{3y}\,\Theta_{32}\,,\quad \Psi_{3}^{3\varepsilon y}=f_{3}^{3y}\,\Theta_{33}\,,
\end{aligned}
\tag{80}
$$

где $f_0^{ny}(y)\equiv 0$ при любом n, если $\sigma=(-1)^{\ell+1}$. Используя эти представления, находим асимптотики сумм (58), т.е. D-компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon y}$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{0}^{\varepsilon y}(x,y,\theta) &= \left\{1+\frac{qx}{2}+\frac{x^{2}}{12}(2h_{00}^{y}(y)+q^{2})+\right.\\
&+\ \left.\frac{x^{3}}{144}\left[q(8h_{00}^{y}(y)+q^{2})+12V^{10}\right]\right\}f_{0}^{0y}(y)\,\Theta_{00}(u)+\\
&+\ x\left[1+\frac{qx}{4}+\frac{x^{2}}{40}(4h_{00}^{y}(y)+q^{2})\right]f_{0}^{1y}(y)\Theta_{10}(u)+\\
&+\ \frac{x^{3}}{10\sqrt{3}y^{2}}\left\{y^{2}V^{11}(y)f_{0}^{0y}(y)-\right.\\
&-\ \left.[6\ell(\ell+1)(1+\sigma(-1)^{\ell})]^{1/2}f_{1}^{1y}(y)\right\}\Theta_{10}(u)+\\
&+\ x^{2}\,(1+qx/6)\,f_{0}^{2y}(y)\,\Theta_{20}(u)+x^{3}\,f_{0}^{3y}(y)\,\Theta_{30}(u)+O(x^{4})\,,\\
\Psi_{1}^{\varepsilon y}(x,y,\theta) &= x\left[1+\frac{qx}{4}+\frac{x^{2}}{40}\,(4h_{11}^{y}(y)+q^{2})\right]f_{1}^{1y}(y)\,\Theta_{11}(u)-\\
&-\ \frac{x^{3}}{5y^{2}}\,[\ell(\ell+1)]^{1/2}\,f_{0}^{1y}(y)\,\Theta_{11}(u)+\\
&+\ x^{2}\,(1+qx/6)\,f_{1}^{2y}(y)\,\Theta_{21}(u)+x^{3}\,f_{1}^{3y}(y)\,\Theta_{31}(u)+O(x^{4})\,,\\
\Psi_{2}^{\varepsilon y}(x,y,\theta) &= x^{2}\,[\,1+qx/6\,]\,f_{2}^{2y}(y)\Theta_{22}(u)+x^{3}\,f_{2}^{3y}(y)\Theta_{32}(u)+O(x^{4})\,.
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Затем из этих асимптотик выводим связи (9) при $x=0$, $y>0$ для проекций $\partial_x^n\Psi_{bm'}^{\varepsilon y}\equiv(n!)\Psi_{bm'}^{\varepsilon y}$ производных $\partial_x^n\Psi_{m'}^{\varepsilon y}$ на функции $\Theta_{bm'}(u)$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^{b}\,(2\partial_x-q)\,\Psi_{bm'}^{\varepsilon y}(x,y)=0\,,\quad b\geq m'=0,1,2\,,\\
&\left[6\partial_x^{2}-2h_{00}^{y}(y)-q^{2}\right]\Psi_{00}^{\varepsilon y}(x,y)=0\,,\\
&\left[24\partial_x^{3}-q(8h_{00}^{y}(y)+q^{2})-12V^{10}\right]\Psi_{00}^{\varepsilon y}(x,y)=0\,,\\
&\partial_x\left[20\partial_x^{2}-3(4h_{10}^{y}(y)+q^{2})\right]\Psi_{10}^{\varepsilon y}(x,y)=\\
&=4\left\{\sqrt{3}V^{11}(y)\,\Psi_{00}^{\varepsilon y}(x,y)\;-3y^{-2}\left[2\ell(\ell+1)(1+\sigma(-1)^{\ell})\right]^{1/2}\partial_x\Psi_{11}^{\varepsilon y}(x,y)\right\},\\
&\partial_x\left[20\partial_x^{2}-3(4h_{11}^{y}(y)+q^{2})\right]\Psi_{11}^{\varepsilon y}(x,y)=-(24/y^{2})\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\partial_x\Psi_{10}^{\varepsilon y}(x,y)\,.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Осталось рассмотреть случай тождественных частиц p_j и p_k. Вернемся к бисферическому представлению (42) решения Ψ^{ε}. Как следует из (7) и (33), физическое решение $\Psi^{\varepsilon+}=P^{+}\Psi^{\varepsilon}$ или $\Psi^{\varepsilon-}=P^{-}\Psi^{\varepsilon}$, обладающее, кроме набора квантовых чисел $\varepsilon=(E,\ell,m,\sigma)$, определенной перестановочной симметрией $P^{+}\Psi^{\varepsilon+}=\Psi^{\varepsilon+}$ или

$P^-\Psi^{\varepsilon-} = -\Psi^{\varepsilon-}$, ортогонально всем бисферическим гармоникам $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}$ с нечетным или, соответственно, четным индексом b. Такую ортогональность можно обеспечить единственным способом, а именно, выбрав все произвольные функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)$, $b = n$, нулевыми при нечетном или четном b, равном n. Действительно, при таком выборе по построению, описанному в разд. 4, все функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ с $b \leq n$, а значит и все бисферические компоненты Ψ^{ε}_{ab} с нечетным или четным b окажутся нулевыми. Поэтому формулы (42) станут бисферическим представлением искомого решения $\Psi^{\varepsilon+}$ или $\Psi^{\varepsilon-}$. Согласно (64) функции $f^{nx}_{m'}$ и $f^{ny}_{m'}$ равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)$ с $n = b$. Следовательно, если положить $f^{nx}_{a}(y) = f^{ny}_{m'}(y) \equiv 0$ при всех нечетных или четных n, то построенные по формулам (58)–(63), (75) и (79) D-компоненты $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$ будут D-компонентами $\Psi^{\varepsilon+,t}_{m'}$ или $\Psi^{\varepsilon-,t}_{m'}$ разложения искомого решения $\Psi^{\varepsilon+}$ или $\Psi^{\varepsilon-}$:

$$\Psi^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P^{\pm}\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^t)\,\Psi^{\varepsilon\pm,t}_{m'}(x,y,\theta)\,.$$

Другой способ построения компонент $\Psi^{\varepsilon t\pm}_{m'}$ основан на формулах

$$\begin{aligned}\Psi^{\varepsilon\pm,t}_{m'}(x,y,\theta) &\equiv \langle D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^t)|P^{\pm}\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle = \\ &= \left[\Psi^{\varepsilon t}_{m'}(x,y,\theta) \pm \sigma(-1)^{m'}\Psi^{\varepsilon t}_{m'}(x,y,\pi-\theta)\right],\end{aligned}$$

которые следуют из определений (8), (33) и равенств:

$$P_{jk}D^{\ell}_{mm'}(\omega^t) = (-1)^{\ell}\,D^{\ell}_{m,-m'}(\omega^t)\,, \quad P_{jk}\,\theta = \pi-\theta\,, \quad t = x, y\,.$$

Стоит отметить, что исследованные разложения (69) и (70) решения Ψ^{ε} порождают аналогичные представления его фаддеевской компоненты Ψ^{ε}_{i}:

$$\Psi^{\varepsilon}_{i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^x) \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi^{n\varepsilon x}_{iam'}(y)\,\Theta_{am'}(u)\,, \tag{83}$$

$$\Psi^{\varepsilon}_{i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma*}_{mm'}(\omega^y) \sum_{b=m'}^{n} \Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}(y)\,\Theta_{bm'}(u)\,. \tag{84}$$

Чтобы убедиться в этом, сначала нужно в уравнение Фаддеева (3) для Ψ^{ε}_{i} подставить Ψ^{ε}_{i} в виде анзаца (83) или (84), заменить V_i рядом (5), а Ψ^{ε} – рядом (69) или (70), затем спроектировать полученное уравнение на D-базис (8) и вывести для искомых Θ-компонент $\Psi^{n\varepsilon t}_{iam'}(y)$, $t = x, y$, рекуррентные цепочки уравнений. Например, в случае $t = y$ получится цепочка:

$$\begin{aligned}&[\,b(b+1) - (n+2)(n+3)\,]\,\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{ibm'}(y) = -q\Psi^{n+1,\varepsilon y}_{bm'}(y) - \sum_{p=0}^{n} V_{ip}\,\Psi^{n-p,\varepsilon y}_{b'm'}(y) + \\ &+y^{-2}\sum_{m''=m'\pm1}\gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\,q^{b}_{m'm''}\,\Psi^{n\varepsilon y}_{ibm''}(y) - \left[h^{y}_{bm'}(y) - V^{00}(y)\right]\Psi^{n\varepsilon}_{ibm'}(y)\,,\end{aligned}$$

разрешимость которой не сложно доказать по индукции. Потом можно выразить компоненты $\Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}$ через найденные компоненты $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}$ и построить асимптотику ряда (84), что и предполагается сделать в следующей работе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты настоящей работы. Как было показано, в случае центральных взаимодействий (5) довольно широкого класса общее Ψ и физическое Ψ^{ε} регулярные решения уравнения Шредингера (2) вблизи точки парного удара являются рядами (21), (39) и (42), (69), (70) по целым степеням x. Ключевые для построения таких рядов компоненты $\Psi^{n}_{b\beta}$, $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}$ удалось подчинить простым цепочкам алгебраических уравнений (30), (43) и (79), рекуррентных по индексу n и незацепляющихся при данном n по индексу b, индексам a, b или b, m'. Предложенная редукция исходного шестимерного уравнения Шредингера (2) к таким цепочкам позволила вывести в явном виде асимптотики (47)–(49) и (76), (81) бисферических Ψ^{ε}_{ab} и D-компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$, $t = x, y$, физического решения Ψ^{ε} вплоть до слагаемых $O(x^4)$ и $O(x^3)$. Как пояснялось, из этих асимптотик следуют и ранее неизвестные связи (50)–(52), (77), (82), и соотношения (10)–(13), доказанные другими авторами [7, 8], [13]–[15], причем в частном случае чисто кулоновских парных взаимодействий (4). В заключение отметим, что выбор системы S^y в качестве "подвижной" представляется оптимальным для построения D-компонент физического решения Ψ^{ε} вблизи точки парного удара. После того как последовательно найдены компоненты $\Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}$ и $\Psi^{\varepsilon y}_{m'}$, все отвечающие им в системе S^x компоненты, в том числе и бисферические, можно найти по доказанным формулам (65)–(68).

Литература

[1] *В. В. Пупышев.* ЯФ. 1999. Т. 62. С. 1955; ЭЧАЯ. 1999. Т. 30. С. 1562.

[2] *С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев.*
Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

[3] *V. V. Kostrykin, A. A. Kvitsinsky, S. P. Merkuriev.*
Few-Body Systems. 1989. V. 6. P. 97.

[4] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский.*
Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.

[5] *А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров.*
Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.

[6] *С. И. Виницкий, Л. И. Пономарев.* ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 1336.

[7] *В. И. Коробов.* ЯФ. 1989. Т. 50. С. 1595.

[8] *V. I. Korobov, I. V. Puzynin, S. I. Vinitsky.*
Muon Catalyzed Fusion. 1992. V. 7. P. 63.

[9] *Г. И. Марчук.* Методы вычислительной математики. Москва.: Наука, 1989.

[10] *P. M. Prenter.* Splines and Variational Methods. New York: Wiley, 1975.

[11] *К. Вильдермут, Я. Тан.* Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.

[12] *Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко.*
Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

[13] *T. Kato.* Comm. on pure and Appl. Math. 1957. V. 10. P. 151.

[14] *W. A. Bingel.* Z. Naturforsh. 1963. V. A18. P. 1249.

[15] *R. T. Pack, W. B. Brown.* J. Chem. Phys. 1966. V. 45. P. 556.

[16] *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, Т. 3, Ч. 1,2. М.: Наука, 1974.

[17] *E. S. Chang, U. Fano.* Phys. Rev. 1972. V. A6. P. 173.

Получено 9 апреля 2002 г.

Пупышев В. В. P5-2002-73
Строение регулярных решений трехчастичного уравнения Шредингера вблизи точки парного удара

Исследуется шестимерное уравнение Шредингера для системы трех частиц с центральными парными взаимодействиями более общего вида, чем кулоновские. Регулярные общее и частные физические решения такого уравнения представлены бесконечными асимптотическими рядами по целым степеням расстояния между двумя частицами и искомым функциям других трехчастичных координат. Построение таких функций в угловых базисах, образованных сферическими и бисферическими гармониками или симметризованными D-функциями Вигнера, сведено к решению простых алгебраических рекуррентных уравнений. Для проекций физических решений на угловые базисные функции выведены граничные условия в точке парного удара.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Pupyshev V. V. P5-2002-73
Structure of the Regular Solutions to the Three-Body Schrödinger Equation in the Vicinity of the Two-Body Collision Point

The six-dimensional Schrödinger equation for a three-body system with two-body central potentials of a more general type than the Coulomb ones in studied. The regular general and particular physical solutions of that equation are represented as infinite asymptotic series in integer powers of the distance between two particles and the searched functions of other three-particle coordinates. In the angular bases, formed by the spherical and bispherical harmonics or the symmetrized Wigner D-functions, the construction of those functions is reduced to solving simple algebraic recurrence equations. For the projections of the physical solutions onto angular basic functions, the boundary conditions at the two-body collision point are derived.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

ЛР № 020579 от 23.06.97.
Подписано в печать 15.05.2002.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,37. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 325 экз. Заказ № 53278.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.