P2-2002-114

Н. А. Черников, Н. С. Шавохина

РТГ ЛОГУНОВА В СВЕТЕ ГЕОМЕТРИИ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

Релятивистская теория гравитации Логунова изложена в книге [1]. Она хорошо смотрится в свете созданной в минувшем веке геометрии аффинной связности. Мы надеемся показать это в данной статье.

В РТГ решен вопрос об интегральных законах сохранения 4-импульса и 6-момента количества движения. Для решения этого вопроса наряду с гравитационной метрикой в РТГ введена фоновая метрика Минковского.

Интересна история рассматриваемого предмета.

Геометрия аффинной связности выросла на основе римановой геометрии. Ключевым объектом в пределах новой ветви геометрии является аффинная связность. В пределах римановой геометрии, соответственно, ключевым объектом является метрическое тензорное поле. В настоящей статье мы опираемся на превосходный курс [2] геометрии аффинной связности.

В десятые годы прошлого века Эйнштейн, Гроссман и, независимо от них, Гильберт на основе римановой геометрии построили общую теорию относительности. Все было хорошо в ОТО до тех пор, пока введенный в работе [3] "псевдотензор энергии" (термин взят в кавычки не нами, а самим Эйнштейном!) гравитационного поля не стал предметом дискуссии. Споры о псевдотензоре начались и долгие годы продолжались из-за того, что для его удовлетворительного описания не находилось подходящего объекта в римановой геометрии. Такой объект нашелся в геометрии аффинной связности. Называется он тензором аффинной деформации.

В работе [4] Борн и Инфельд написали нелинейные уравнения для электромагнитного поля в мире Минковского.

Похожим образом в работе [5] Розен написал нелинейные уравнения для гравитационного поля в мире Минковского. Казалось, что тем самым он ввел в теорию гравитации Эйнштейна метрику Минковского в качестве фонового объекта. Но на самом деле оказалось, что в качестве фонового объекта он ввел не саму метрику Минковского, а лишь только ее кристоффелеву связность, которая в данном случае примитивна. Иначе говоря, Розен рассмотрел теорию Эйнштейна не в мире Минковского, а в четырехмерном аффинном пространстве. В таком случае удается сформулировать закон сохранения 4-импульса, а вот закон сохранения 6-момента количества движения сформулировать не удается.

Чтобы можно было сформулировать все десять законов сохранения, необходимо дополннить фоновую аффинную геометрию до фоновой геометрии Минковского, но однозначно сделать это в теории Эйнштейна - Розена невозможно.

Действительно, если считать, что координаты x^a, в которых задана гравитационная метрика $g_{mn}dx^m dx^n$, по отношению к фоновой аффинной геометрии являются аффинными координатами, то, например, две разные метрики

$$dx^1dx^1 + dx^2dx^2 + dx^3dx^3 - dx^4dx^4$$

и

$$dx^1dx^1 + dx^2dx^2 + dx^3dx^4$$

задают одну и ту же аффинную геометрию. Произвол в выборе фоновой метрики в теории Эйнштейна - Розена представляется в виде симметричной матрицы порядка 4 и сигнатуры (1, 1, 1, -1) с вещественными элементами.

Не только примитивную связность, но и метрику Минковского в качестве фоновых объектов однозначно ввел в теорию гравитации Логунов в ряде работ, результаты которых подытожены в книге [1], так что в ней больше, чем в работе Розена, уравнения гравитационного поля похожи на уравнения Борна - Инфельда.

Чтобы ввести в РТГ фоновую метрику, пришлось ввести и массу гравитона, которой нет места в ОТО. Напротив, если не вводить в теорию гравитации массу гравитона, то в конечном счете от любой фоновой метрики остается лишь ее кристоффелева связность.

Введение фоновых объектов объясняется не одним только желанием определить понятие гравитационной энергии. Так, начиная с работы [3], интегральную теорему Гаусса в теории гравитации стали применять к псевдовекторным полям, что недопустимо. Ведь прежде чем позволить себе применить теорему Гаусса к какому-либо геометрическому объекту, нужно объявить его векторным полем, а чтобы иметь основания для такого объявления по отношению к псевдовекторным полям, необходимо и достаточно ввести в теорию гравитации фоновую связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$.

К этому добавим, что как из уравнений Эйнштейна, так и из выражения для "псевдотензора энергии" можно унать о фоновых объектах только то, что их там нет. Напротив, как в уравнения Эйнштейна, так и в "псевдотензор энергии" входят все гравитационные объекты: и связность Кристоффеля Γ^a_{mn}, и метрика Гаусса g_{mn}, и тензор Римана R^a_{klm}.

Надо сказать, что введение "псевдотензора энергии" в теорию гравитации наделило тензорный анализ псевдотензорной субкультурой. Фоновая связность является надежным лекарством от этой беды. Рецепт простой: компоненту Γ^a_{mn} надо заменить на разность компонент: $\Gamma^a_{mn} - \check{\Gamma}^a_{mn}$. В результате такой замены"псевдотензор энергии", например, превращается в тензор энергии гравитационного поля.

Тем не менее коварный вопрос остается без ответа. Он переносится с формы на содержание и задается теперь в следующем виде: какую именно связность надо выбрать в качестве фоновой? В теории Логунова (впрочем, и в теории Розена) этот вопрос снимается, поскольку на него готов ответ: надо выбрать ту связность, которая в качестве фонового объекта входит в состав функционала действия Лагранжа - Гильберта рассматриваемой системы.

Вариационный принцип Лагранжа - Гильберта принят в РТГ за основу. Функционал действия (LH) представляется в виде следующей суммы:

$$(LH) = (LH)_M \ + \frac{1}{16\pi}\int g^{mn}(P^s_{mn}P^a_{sa} - P^a_{mb}P^b_{an})d\Omega +$$

$$+\frac{\mu^2}{16\pi}\int (d\Omega + d\check{\Omega} - \frac{1}{2}\,\check{g}_{mn}\,g^{mn}\,d\Omega)\,, \qquad (1)$$

где

$$d\Omega = \sqrt{|g|}dx^1dx^2dx^3dx^4\,, \quad d\check{\Omega} = \sqrt{|\check{g}|}dx^1dx^2dx^3dx^4\,, \qquad (2)$$

через P^a_{mn} обозначен тензор аффинной деформации

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn}\,. \qquad (3)$$

Константа μ^2 имеет смысл квадрата массы гравитона. Через $(LH)_M$ обозначен функционал действия вещества в мире с гравитационной метрикой g_{ab}. От фоновых объектов он не зависит. Как и в [1], здесь принята система единиц, в которой

$$G = c = \hbar = 1. \qquad (4)$$

Вариационные производные от (LH) по лагранжевым переменным надо приравнять нулю, а вариационная производная по фоновой метрике $\check{g}_{mn}$ определяет тензор T^{mn} энергии-импульса всей рассмативаемой системы в мире с метрикой $\check{g}_{mn}$. Вариационная производная от $(LH)_M$ по гравитационной метрике g_{mn} определяет тензор M^{mn} энергии-импульса вещества в мире с метрикой g_{mn}. Соответствующие частные вариации представим в виде интегралов

$$\delta(LH) = -\frac{1}{2}\int T^{mn}\delta\check{g}_{mn}\,d\check{\Omega}\,, \qquad (5)$$

$$\delta(LH)_M = \frac{1}{2}\int M_{mn}\delta g^{mn}\,d\Omega = -\frac{1}{2}\int M^{mn}\delta g_{mn}\,d\Omega\,. \qquad (6)$$

Согласно работе [6] следующие дивергенции равны нулю:

$$\check{\nabla}_m T^{mn} = 0\,, \qquad \nabla_m M^{mn} = 0\,. \qquad (7)$$

Возьмем вариацию (5) и получим тензор T^{mn}. В соответствии с (1) вариацию (5) представим в виде

$$-16\pi\delta(LH) =$$

$$= \frac{1}{2}\int J^{mn}(\delta\breve{g}_{mn})d\Omega + \frac{\mu^2}{2}\int(\delta\breve{g}_{mn})(\breve{g}^{mn}d\breve{\Omega} - g^{mn}d\Omega), \quad (8)$$

где

$$\frac{1}{2}\int J^{mn}(\delta\breve{g}_{mn})d\Omega = \delta\int g^{mn}(P^a_{mb}P^b_{an} - P^s_{mn}P^a_{sa})d\Omega\,. \quad (9)$$

Следовательно,

$$16\pi T^{mn} = -\Pi^{mn} + \mu^2\,\Psi^{mn}\,, \quad (10)$$

где

$$\Pi^{mn} = \omega\, J^{mn}, \quad (11)$$

$$\Psi^{mn} = \omega g^{mn} - \breve{g}^{mn}, \quad (12)$$

через ω обозначена скалярная функция

$$\omega = \sqrt{g/\breve{g}}\,. \quad (13)$$

Для лучшего понимания физического смысла тензорных полей Ψ^{mn} и T^{mn} сошлемся на книгу [1], где гравитационное поле описывается тензорной плотностью $\tilde{\phi}^{mn} = \sqrt{-\breve{g}}\;\Psi^{mn}$, а источник гравитационного поля — тензорной плотностью $t^{mn} = \sqrt{-\breve{g}}\;T^{mn}$.

Вариация (9) взята в [7] и тензор J^{mn} получен там же. Согласно [7] этот тензор равен

$$J^{mn} = (\breve{\nabla}_l - P_l)(\breve{\nabla}_k - P_k)J^{klmn}\,, \quad (14)$$

где

$$J^{klmn} = \breve{g}^{mk}g^{ln} + \breve{g}^{nk}g^{lm} - \breve{g}^{kl}g^{mn} - \breve{g}^{mn}g^{kl}\,, \quad (15)$$

а через P_k обозначен ковектор аффинной деформации

$$P_k = P^a_{ka} == -\partial_k \ln \omega \ . \tag{16}$$

Ввиду (16) для всякого тензорного поля T

$$\omega(\check{\nabla}_k - P_k)T = \check{\nabla}_k\, \omega T \ .$$

Поэтому

$$\omega(\check{\nabla}_l - P_l)(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} = \check{\nabla}_l\, \omega(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} \ ,$$

$$\omega(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} = \check{\nabla}_k\, \omega J^{klmn} \ ,$$

так что

$$\Pi^{mn} = \omega(\check{\nabla}_l - P_l)(\check{\nabla}_k - P_k)J^{klmn} = \check{\nabla}_l\check{\nabla}_k\, \omega J^{klmn} \ . \tag{17}$$

Теперь обозначим

$$\check{\nabla}_k\Psi^{mn} = \Psi^{mn}_k \ , \quad \Psi^n = \Psi^{kn}_k \ ,$$

$$\check{\nabla}_n\Psi^n = \Psi \ , \quad \check{\nabla}_l\check{\nabla}_k\Psi^{mn} = \Psi^{mn}_{lk} \tag{18}$$

и заметим, что

$$\check{\nabla}_k(\omega J^{klmn}) = \check{g}^{mk}\Psi^{ln}_k + \check{g}^{nk}\Psi^{lm}_k - \check{g}^{lk}\Psi^{mn}_k - \check{g}^{mn}\Psi^l \ . \tag{19}$$

Следовательно,

$$\Pi^{mn} = \check{g}^{mk}\Psi^{ln}_{lk} + \check{g}^{nk}\Psi^{lm}_{lk} - \check{g}^{lk}\Psi^{mn}_{lk} - \check{g}^{mn}\Psi \ . \tag{20}$$

Подставив это выражение в (10), получим формулу связи гравитационного поля Ψ^{mn} с источником T^{mn}:

$$16\pi T^{mn} = \check{g}^{lk}\Psi^{mn}_{lk} + \check{g}^{mn}\Psi - \check{g}^{mk}\Psi^{ln}_{lk} - \check{g}^{nk}\Psi^{lm}_{lk} + \mu^2\, \Psi^{mn} \ . \tag{21}$$

Гравитационная метрика выступает в (LH) в качестве одной из лагранжевых переменных. Приравнивая нулю вариационную производную от функционала (LH) по гравитационной кометрике g^{mn}, мы получаем следующие уравнения тяготения

$$S_{mn} - \check{S}_{mn} - \frac{1}{2}\, g^{ab}\,(S_{ab} - \check{S}_{ab})\, g_{mn} = 8\pi M_{mn}\ , \tag{22}$$

где 8

$$S_{mn} = R_{mn} - \frac{\mu^2}{2}\, g_{mn}, \quad \check{S}_{mn} = \check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2}\, \check{g}_{mn} \tag{23}$$

суть характеристические тензоры Риччи для метрических тензоров g_{mn} и $\check{g}_{mn}$ с характерными числами $\Lambda = \check{\Lambda} = \mu^2/2$.

Из (22) следует, что

$$g^{ab}(S_{ab} - \check{S}_{ab} + 8\pi M_{ab}) = 0. \tag{24}$$

Поэтому уравнения (22) приводятся к следующему виду:

$$S_{mn} - \check{S}_{mn} = 8\pi\,\left(M_{mn} - \frac{1}{2}\, g^{ab} M_{ab}\, g_{mn}\right)\ . \tag{25}$$

Так как

$$\nabla_s\, g^{sm}[S_{mn} - \frac{1}{2}\,(g^{ab} S_{ab}) g_{mn}] = 0\ , \tag{26}$$

то из уравнений (22) получается следствие

$$\nabla_s\, g^{sm}[\check{S}_{mn} - \frac{1}{2}\,(g^{ab}\check{S}_{ab}) g_{mn}] = -8\pi \nabla_s\, g^{sm} M_{mn}\ . \tag{27}$$

В силу второго из равенств (7) правая часть здесь равняется нулю, так что

$$\nabla_s\, g^{sm}[\check{S}_{mn} - \frac{1}{2}\,(g^{ab}\check{S}_{ab}) g_{mn}] = 0\ . \tag{28}$$

Рассмотрим выражение (28) для произвольно взятого симметричного тензорного поля N_{mn}. Так как $\nabla_s g^{ab} = 0$, то

$$\nabla_s g^{sm}[N_{mn} - \frac{1}{2}\,(g^{ab}N_{ab}g_{mn})] =$$

$$= \frac{1}{2}\,g^{sm}[\nabla_s N_{mn} + \nabla_m N_{an} - \nabla_n N_{sm}]\,, \tag{29}$$

а так как

$$\nabla_n N_{sm} = \check{\nabla}_n N_{sm} + P^r_{ns}N_{rm} + P^r_{nm}N_{sr},$$

то

$$[\nabla_s N_{mn} + \nabla_m N_{an} - \nabla_n N_{sm}] =$$
$$[\check{\nabla}_s N_{mn} + \check{\nabla}_m N_{an} - \check{\nabla}_n N_{sm}] + 2P^r_{sm}N_{rn}.$$

Следовательно,

$$\omega\;\nabla_s g^{sm}[N_{mn} - \frac{1}{2}\,(g^{ab}N_{ab}g_{mn})] =$$

$$\Psi^r N_{rn} + \frac{1}{2}(\Psi^{sm} + \check{g}^{mn})[\check{\nabla}_s N_{mn} + \check{\nabla}_m N_{an} - \check{\nabla}_n N_{sm}]. \tag{30}$$

При этом мы учли, что

$$\omega g^{sm}P^r_{sm} = \omega\Phi^r = \omega(\nabla_s - P_s)g^{sr} = \check{\nabla}_s(\omega g^{sr}) = \check{\nabla}_s\Psi^{sr} = \Psi^r\;.$$

Полагая в тождестве (30)

$$N_{mn} = \check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2}\check{g}_{mn} = \check{S}_{mn}\;, \tag{31}$$

получаем

$$\omega\nabla_s\;g^{sm}[\check{S}_{mn} - \frac{1}{2}\,(g^{ab}\check{S}_{ab})g_{mn}] =$$

$$\Psi^m(\check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2}\check{g}_{mn}) + \Psi^{am}(\check{\nabla}_a\check{R}_{mn} - \frac{1}{2}\check{\nabla}_n\check{R}_{am})\;. \tag{32}$$

Отсюда и из (28) следует, что для всякого решения уравнений (22) справедливо равенство

$$\Psi^m(\check{R}_{mn} - \frac{\mu^2}{2}\check{g}_{mn}) + \Psi^{am}(\check{\nabla}_a\check{R}_{mn} - \frac{1}{2}\check{\nabla}_n\check{R}_{am}) \; . \qquad (33)$$

Так как в РТГ, согласно [1], фоновая связность примитивна, то после того, как взяты вариационные производные, надо положить

$$\check{R}^a_{klm} = 0 \; , \qquad (34)$$

а чтобы интегральные законы сохранения получались в привычном виде, надо положить

$$\check{g}_{mn}dx^m dx^n = dx^4dx^4 - dx^1dx^1 - dx^2dx^2 - dx^3dx^3 \; . \qquad (35)$$

В заключение заметим, что мы не раз обращались к рассмотрению электродинамики Борна - Инфельда.

Применив вариационный принцип Лагранжа - Гильберта к электродинамике Борна - Инфельда, мы рассмотрели в работах [8] - [10] электромагнитное поле на фоне проивольно заданной метрики $\check{g}_{mn}$ пространственно-временного мира.

Приобретенный опыт, понятно, помог нам рассмотреть здесь гравитационное поле на таком же фоне.

Список литературы

[1] *Логунов А.А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2000.

[2] *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

[3] *Эйнштейн А.* Собрание научных тудов. М.: Наука, 1966. Т. II. Ст. 85.

[4] *Born M., Infeld L.* // Proc. Roy. Soc., 1934, A 144. P. 425.

[5] *Rosen N.* //Phys. Rev. 1940. Vol. 57. P. 147.

[6] *Hilbert D.* // Grundlagen der Pysik. Nachr. Gottingen, 1915, S. 395-407.

[7] *Черников Н.А.* // Сообщение ОИЯИ Р2-87-683. Дубна, 1987.

[8] *Черников Н.А.* // Изв. вузов. Математика. 1976. No 5. С. 114–123.

[9] *Черников Н.А., Шавохина Н.С.* // Сообщение ОИЯИ Р2-81-434. Дубна, 1981.

[10] *Черников Н.А., Шавохина Н.С.* // Изв. вузов. Математика. 1986. No 4. С. 62–64.

Получено 16 мая 2002 г.

Черников Н. А., Шавохина Н. С. P2-2002-114
РТГ Логунова в свете геометрии аффинной связности

С точки зрения геометрии аффинной связности рассмотрена теория гравитации Логунова. Применение вариационного метода Лагранжа—Гильберта приводит к следующему выводу: если возможно эффективное введение фоновой метрики, то масса гравитона должна не равняться нулю, а если она равняется нулю, то от фоновой метрики эффективно остается ее кристоффелева связность и ничего более.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод авторов

Chernikov N. A., Shavokhina N. S. P2-2002-114
Logunov's RTG from the Point of View
of Affine Connection Geometry

From the viewpoint of the affine connection geometry the Logunov's theory of gravitation is considered. The application of the Lagrange—Hilbert variational method leads to the following conclusion: if an effective introduction of the background metric is possible, then the gravitation mass should not be equal to zero; if it equals zero, then from the background metric effectively remains its Christoffel connection and nothing else.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Е. В. Сабаевой*

ЛР № 020579 от 23.06.97.
Подписано в печать 05.06.2002.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,63. Уч.-изд. л. 0,47. Тираж 425 экз. Заказ № 53348.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.