P2-2002-197

М. Динейхан, А. Джаханшир*, С. А. Жаугашева*,
С. К. Сахиев*

ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН В СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 480012, Алма-Ата, Казахстан

1 Введение

Описание связанных состояний атомов является одной из классических проблем квантовой механики. Эта проблема изучалась многими авторами и хорошо известна. В настоящий момент при изучении механизма взаимодействия цветных объектов широко применяется феноменологическая потенциальная модель кварков [1], построенная по аналогии с теорией атомных структур. Эта модель хорошо описывает спектр и характеристики чармония [1, 2] и боттомия [3], состоящих из тяжелых кварков. При изучении свойств адронов, состоящих из легких кварков, требуется учитывать релятивистский характер взаимодействия. Однако в настоящий момент отсутствует общепринятый рецепт учета релятивистского характера взаимодействия в рамках феноменологической потенциальной модели кварков.

С другой стороны, для описания последних экспериментальных данных по атомным спектрам требуется учет различных поправок высшего порядка. В частности, за последние десять лет экспериментальные числа для частоты перехода $1S - 2S$ уровней в атоме водорода изменились на три порядка, т.е. от $3 \cdot 10^{-10}$ [4] до $3.4 \cdot 10^{-13}$ [5], а сверхтонкое расщепление энергетического спектра мюонного атома водорода в три раза, т.е. от $3.6 \cdot 10^{-8}$ [6], до $1.2 \cdot 10^{-8}$ [7].

Таким образом, определение релятивистских поправок к энергетическому спектру как атомных, так и адронных структур является одной из актуальных проблем современности.

Поправки в атомной физике можно классифицировать как релятивистские, радиационные и поправки, связанные с отдачей. Многочисленные экспериментальные и теоретические работы посвящены оценке этих поправок (подробно см. в [8]). В настоящий момент технические достижения экспериментальных исследований позволяют получить ионы тяжелых элементов с одним электроном. В этом случае константа связи электромагнитного взаимодействия $(Z\alpha)$ становится порядка единицы, так что электромагнитные взаимодействия становятся сильными и учет релятивистских поправок становится необходимым. Однако теоретические модели, предназначенные для описания релятивистских поправок к спектрам, в основном ограничиваются низшим порядком по константе связи $(Z\alpha)$ (подробности см. в [8]).

В работе [9] получена релятивистская поправка к гамильтониану взаимодействия цветных объектов, а также учтены дополнительные вклады, связанные со спин-орбитальным взаимодействием. Однако полученный добавочный потенциал содержит много свободных параметров.

Наша работа посвящена изучению этой проблемы на основе исследования асимптотического поведения поляризационной петли в скалярной электродинамике. Аналитически определены релятивистские поправки к гамильтониану взаимодействия и вычислена томасовская прецессия для скалярных частиц.

2 Постановка задачи

Рассмотрим связанное состояние, состоящее из двух заряженных скалярных частиц. Определим массу этого состояния по асимптотическому поведению поляризационной петли скалярных частиц во внешнем электромагнитном поле. Поляризационный оператор во внешнем поле записывается в следующем виде [10]:

$$\Pi(x-y) = < G(x,y|A) G^*(y,x|A) >_A \quad . \tag{1}$$

Здесь проводится усреднение по электромагнитному полю $A_\alpha(x)$. Функция грина $G(x,y|A)$ для скалярной частицы во внешнем поле определяется уравнением

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha(x) \right)^2 + \frac{c^2 m^2}{\hbar^2} \right] G(x,y|A) = \delta(x-y) \ , \tag{2}$$

где m - масса скалярной частицы, а e - константа связи. Пропагатор электромагнитного поля имеет вид:

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = < A_\alpha(x) A_\beta(y) >_A = \delta_{\alpha\beta} D(x-y) \ . \tag{3}$$

Масса связанного состояния определяется следующим образом:

$$M = - \lim_{|x-y|\to\infty} \frac{\ln(\Pi(x-y))}{|x-y|} \ . \tag{4}$$

Решение уравнения (2) представляется в виде функционального интеграла [10]

$$\begin{aligned} G(x,y|A) &= \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(4\pi s)^2} \exp\left\{-sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s}\right\} \\ &\times \int d\sigma_\beta \exp\left\{ie \int\limits_0^1 d\xi \frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial \xi} A_\alpha(\xi)\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где введены обозначения:

$$Z_\alpha(\xi) = (x-y)_\alpha \xi + y_\alpha - 2\sqrt{s} B_\alpha(\xi) \ , \tag{6}$$

$$d\sigma_\beta = N \delta B \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\xi \dot{B}^2(\xi)\right\} \ , \tag{7}$$

с нормировкой

$$B_\alpha(0) = B_\alpha(1) = 0 \ ; \qquad \int d\sigma_\beta = 1 \ .$$

Подставляя (5) в (1) и проводя усреднение по полю $A_\alpha(x)$, имеем (детали вычисления см. в работе [11])

$$\Pi(x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{d\mu_1 d\mu_2}{(8x\pi^2)^2} \exp\left\{-\frac{|x|}{2}\left(\mu_1 + \frac{m_1^2}{\mu_1}\right) - \frac{|x|}{2}\left(\mu_2 + \frac{m_2^2}{\mu_2}\right)\right\} J(\mu_1, \mu_2) \ . \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} J(\mu_1\mu_2) &= N_1 N_2 \int\int \delta\vec{r}_1 \delta\vec{r}_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\tau \left(\mu_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}(\tau) + \mu_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}(\tau)\right)\right\} \\ &\times \exp\{-W_{1,1} + 2W_{1,2} - W_{2,2}\} \end{aligned} \tag{9}$$

и использовано обозначение

$$W_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{e^2}{2}\int\limits_0^x\int\limits_0^x d\tau_1 d\tau_2 \dot{Z}^{(i)}_\alpha(\tau_1) D_{\alpha\beta}\left(Z^{(i)}(\tau_1) - Z^{(j)}(\tau_2)\right)\dot{Z}^{(j)}_\beta(\tau_2) \ . \quad (10)$$

Функциональный интеграл в (9) похож на фейнмановский интеграл по траекториям в нерелятивистской квантовой механике [12] для движения двух частиц с массами μ_1 и μ_2. При этом взаимодействие между этими частицами описывается нелокальным функционалом в (10), в котором содержатся как потенциальное, так и непотенциальное взаимодействие. Учитывая (8) и (9) в пределе $|x-y| \to \infty$, из (4) для массы связанного состояния получаем (подробно см. в [11]):

$$M = \sqrt{m_1^2 - 2\mu^2 E'(\mu)} + \sqrt{m_2^2 - 2\mu^2 E'(\mu)} + \mu E'(\mu) + E(\mu) \ , \quad (11)$$

где параметр μ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\sqrt{m_1^2 - 2\mu^2 E'(\mu)}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2 - 2\mu^2 E'(\mu)}} \ . \quad (12)$$

Здесь $E'(\mu) = \partial E(\mu)/\partial\mu$, а $E(\mu)$ определяется как

$$\lim_{|x|\to\infty} J(\mu_1, \mu_2) = \exp\{-xE(\mu_1, \mu_2)\} \ . \quad (13)$$

Параметры μ_1 и μ_2 будем рассматривать как массы составляющих частиц в связанном состоянии. Эти массы отличаются от масс свободных частиц m_1 и m_2. $E(\mu)$ является энергией связанного состояния и определяется нелокальным взаимодействием в (10). Математическая проблема состоит в вычислении функционального интеграла в (9). Наша задача - аппроксимировать это нелокальное взаимодействие эффективным локальным потенциалом взаимодействия.

Таким образом, для определения структуры гамильтониана нам нужно получить конкретное выражение для эффективного потенциала из функционального интеграла, представленного в (9) и (10). Учитывая (6) и используя фурье-представление пропагатора фотона (3) и (10), перепишем выражение для $W_{i,j}$ в следующем виде:

$$W_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{e^2}{2}\int\limits_0^x\int\limits_0^x d\tau_1 d\tau_2 \left(\vec{n} + \frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_i(\tau_1)\right)\left(\vec{n} + \frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_j(\tau_2)\right)$$
$$\times \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\widetilde{D}\left(\vec{q}^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \tag{14}$$
$$\exp\left\{is(\tau_1 - \tau_2) + \frac{is}{c}\left(r_i^{(4)}(\tau_1) - r_j^{(4)}(\tau_2)\right) + i\left(\vec{q}(\vec{r}_i(\tau_1) - \vec{r}_j(\tau_2))\right)\right\}.$$

В работе [11] при $c \to \infty$ получено

$$H = \frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + V(r)\ , \tag{15}$$

где $V(r)$ - потенциал взаимодействия. Для кулоновского взаимодействия он равен

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\ . \tag{16}$$

Таким образом, наша задача - определить структуру эффективного гамильтониана взаимодействий, используя представление (14).

При стандартных вычислениях с учетом орбитальных возбуждений ограничиваются низшей степенью (v/c), а в нашем подходе мы проведем частичное суммирование бесконечного ряда по степенями (v/c), а также учтем вклад томасовской прецессии.

3 Определение релятивистской поправки к гамильтониану взаимодействия

Приступим к определению структуры эффективного гамильтониана взаимодействия. Пропагатор электромагнитного поля запишем в стандартной форме:

$$\widetilde{D}\left(\vec{q}^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \simeq \frac{1}{\vec{q}^2 + s^2/c^2} = \int\limits_0^\infty d\eta \exp\left\{-\eta\left(\vec{q}^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)\right\}\ . \tag{17}$$

Согласно (14) после интегрирования по $d\vec{q}$ имеем

$$W_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{e^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\tau_1 d\tau_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\eta}{(2\sqrt{\eta\pi})^3}\cdot\exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4\eta}\right)$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{k+n}}{n!(k-n)!}\cdot\eta^n r^{(4)(k-n)}e^{is\tau}\left(\frac{is}{c}\right)^{n+k}\Theta\ , \tag{18}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_1-\tau_2)\ ; \qquad \vec{r}(\tau) = \vec{r}_i(\tau_1) - \vec{r}_j(\tau_2)\ ; \\ r^{(4)}(\tau) &= r_i^{(4)}(\tau_1) - r_j^{(4)}(\tau_2); \\ \Theta &= 1 + \frac{\vec{n}}{c}\left(\dot{\vec{r}}_i(\tau_1) + \dot{\vec{r}}_j(\tau_2)\right) + \frac{\dot{\vec{r}}_i(\tau_1)\dot{\vec{r}}_j(\tau_2)}{c^2}\ . \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь τ_1 и τ_2 могут рассматриваться как собственные времена составных частиц 1 и 2 соответственно. Рассмотрим асимптотическое поведение поляризационной петли. Из (13) следует, что при $x \to \infty$ (или $t \to \infty$) функции $W_{i,j}$ должны зависеть от t линейный образом. Поэтому евклидово время $r^{(4)}$ в этом пределе должно зависеть от разности τ собственных времен составных частиц. Составные частицы взаимодействуют между собой только через электрическое поле. Мы ограничимся рассмотрением простого случая ($\Theta = 1$), а также будем считать, что евклидово время $r^{(4)}$ не зависит от собственных времен составных частиц. В этом случае, учитывая (19) и проводя интегрирование по ds, после некоторых простых упрощений из (18) получим

$$\begin{aligned} W_{i,j} &= (-1)^{i+j}\frac{e^2}{8\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\tau_1 d\tau_2 \frac{\delta(\tau_1-\tau_2)}{|\vec{r}_i(\tau_1) - \vec{r}_j(\tau_2)|} \\ &+ (-1)^{i+j}\frac{e^2}{8\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!c^{2k}}\cdot\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial^{2k}}{\partial\tau^{2k}}\left(|\vec{r}_i(\tau) - \vec{r}_j(\tau)|\right)^{2k-1} \\ &\equiv W_{i,j}^{(1)} + W_{i,j}^{(2)}\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Каждое слагаемое в (20) рассмотрим по отдельности. $W_{i,j}^{(1)}$ соответствует вкладу однофотонного обмена, при этом диагональное взаимодействие при $i = j$ определяет переномировку массы. Имеем

$$-W_{1,1}^{(1)} + 2W_{1,2}^{(1)} - W_{2,2}^{(1)} = \int_0^t d\tau \left\{ -\frac{\alpha}{r(\tau)} + V(0) \right\}, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} r(\tau) &= |\vec{r}_1(\tau) - \vec{r}_2(\tau)| \,, \\ V(0) &= \alpha \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{\vec{q}^2} \,. \end{aligned} \tag{22}$$

$V(0)$ соответствует обычной перенормировке массового оператора в нерелятивистском пределе и при дальнейших вычислениях будет рассматриваться как постоянный параметр. Второе слагаемое $W_{i,j}^{(2)}$ содержит только перекрестные члены $(i \neq j)$, а диагональные $(i = j)$ равны нулю.

Теперь определим релятивистские поправки. Параметр τ будем рассматривать как собственное время относительных движений составных частиц. Тогда величина

$$\vec{v}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\vec{r}(\tau)) \tag{23}$$

определяет скорость относительного движения составных частиц. Прежде всего рассмотрим случай, когда скорость относительного движения постоянна:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\vec{v}(\tau)) = 0 \,. \tag{24}$$

Это означает учет первой релятивистской поправки к гамильтониану взаимодействия. Детали вычислений приведены в Приложении A.

Тогда, учитывая (21), (22) и (A.3), из (20) для гамильтониана взаимодействия имеем:

$$H = H_0 + H_{rel} \,, \tag{25}$$

где

$$H_0 = \left\{ \frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 - \frac{\alpha}{r} + V(0) \right\} \,;$$

$$H_{rel} = \frac{\alpha}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\ell(\ell+1)/(c^2r^2)}} - 1\right] . \tag{26}$$

Из выражения (26) видно, что полученная релятивистская поправка регулярна в точке $r = 0$.

Таким образом, мы получили релятивистскую поправку к гамильтониану взаимодействия, которая связана с релятивистской природой взаимодействия. В данном приближении наша система состоит из частицы и античастицы, которые двигаются друг относительно друга с постоянной скоростью. Аналогичные результаты получены в работе [9]. Полученная добавка к гамильтониану существенна на малых расстояниях и в нерелятивистском пределе ($c \to \infty$) исчезает. Заметим, что при получении этой поправки мы не учили зависимость евклидового времени от собственного времени частиц. В принципе в нашем подходе есть возможность учесть любую зависимость евклидового времени от τ. Конечно, конкретный вид этой зависимости влечет появление добавочного взаимодействия к (25). Поэтому представлется интересным исследование этой зависимости в дальнейшем.

4 Определение поправки к гамильтониану, связанной с томасовской прецессией

Рассмотрим случай, когда составные частицы двигаются друг относительно друга с непостоянной скоростью, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{v}(\tau)) \neq 0 . \tag{27}$$

В этом случае системы, связанные с каждой частицей, становятся неинерциальными, что приводит к томасовской прецессии. Мы будем предполагать, что

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{v}(\tau)) \neq 0 ; \quad \ddot{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial\tau}(\dot{\vec{v}}(\tau)) = 0 . \tag{28}$$

При таком предположении для частной производной от орбитального момента имеем

$$\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}[\vec{r},\vec{v}] = [\vec{r},\dot{\vec{v}}] \ . \tag{29}$$

С другой стороны, в квантовой электродинамике [13] при движении заряженных частиц с ускорением величина

$$\hat{d} = \frac{1}{rc^2}\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial\tau} = \frac{1}{c^2}[\vec{n},\ddot{\vec{r}}] \ , \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \ , \tag{30}$$

определяет дипольный момент системы, где r - расстояние между зарядами. Теперь рассмотрим производную второго порядка от оператора орбитального момента. Учитывая соотношение (28), из (30) имеем

$$\frac{\partial^2\hat{\ell}}{\partial\tau^2} = \frac{\partial}{\partial\tau}[\vec{r},\dot{\vec{v}}] = [\vec{v},\dot{\vec{v}}] \ . \tag{31}$$

Это взаимодействие связано с прецессией частиц [14]. Обычно величину

$$\vec{\omega}_T = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\hat{\ell}}{\partial\tau^2} = \frac{1}{v^2}\cdot[\vec{v},\dot{\vec{v}}] \tag{32}$$

называют частотой томасовской прецессии.

Таким образом, если система удовлетворяют условию (28), то появляется добавочное взаимодействие дипольного момента (30) и прецессии (32) с частотой $\vec{\omega}_T$. При дальнейших вычислениях предполагаем, что частные производные от радиуса-вектора по τ выше второго порядка равны нулю. С использованием этого предположения вычислено второе слагаемое $W^{(2)}_{i,j}$ в (31). Детали вычисления изложены в Приложении B.

Из формул (B.2), (B.3) и (B.6) видно, что диполь–дипольное, диполь–орбитальное взаимодействие, а также взаимодействие, которое связано с томасовской прецессией, дают вклады в гамильтониан взаимодействия. Учитывая (31), рассмотрим добавку, представленную в (B.6):

$$H^{LT} = \frac{\alpha}{4r}\cdot\frac{(\hat{\ell}\cdot\hat{\omega}_T)}{v^2}\left[3\ln(1+v^2) - v^2\cdot\frac{1-v^2}{1+v^2}\right] \ . \tag{33}$$

Здесь $v = (\vec{n}\vec{v})$ - относительная скорость составной частицы. С другой стороны, частота томасовской прецессии, измеренная по лабораторным часам, определяется в следующем виде (подробно см. в [14]):

$$\vec{\Omega}_T = -(\gamma - 1) \cdot \vec{\omega}_T \ , \tag{34}$$

где $\vec{\omega}_T$ - частота прецессии, представленная в (32), и использовано обозначение

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}} \ , \tag{35}$$

Релятивистская поправка, связанная с томасовско-орбитальным взаимодействием, имеет вид

$$H^{LT} = -\frac{\alpha}{r}\frac{(\vec{\ell} \cdot \vec{\Omega}_T)}{4v^2(\gamma - 1)} \cdot \left[3\ln(1 + v^2) - v^2 \cdot \frac{1 - v^2}{1 + v^2}\right] \ . \tag{36}$$

Аналогичные зависимости от r были получены в работе [9].

Поправка, пропорциональная квадрату томасовской прецессии, согласно (B.8) и (34) из (31), записывается

$$H^{TT} = \alpha r \cdot \frac{\widehat{\Omega}_T^2}{256v^2(\gamma - 1)}\left[1 - \sqrt{1 + 4v^2} + 8v^2 - 8v^4 + \frac{8v^6}{3}\right] \ . \tag{37}$$

Таким образом, полный гамильтониан взаимодействия заряженных скалярных частиц с учетом релятивистской поправки и томасовской прецессии записывается в следующем виде:

$$H = H_0 + H_{rel} + H^{LT} + H^{TT} \ . \tag{38}$$

В дальнейшем определим собственные значения этого гамильтониана как функции от параметра μ.

5 Спектр гамильтониана взаимодействия

Используя метод осцилляторного представления [11], определим спектр гамильтониана взаимодействия заряженных скалярных частиц с учетом релятивистской поправки и томасовской прецессии. Для этого рассмотрим уравнение Шредингера(УШ):

$$H_{tot}\Psi = E\Psi \ . \tag{39}$$

Для определения собственных значений и волновой функции из уравнения (39) мы будем применять метод осцилляторного представления (ОП). Проведем замену переменных (подробно см. в [15]):

$$r = q^{2\rho} \ ; \quad \Psi \to \Psi(q^2) + q^{2\rho\ell}\Phi(q^2) \ , \tag{40}$$

и после некоторых стандартных упрощений из (39) получаем модифицированное УШ:

$$\begin{aligned}\Big\{ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right) - \mu\alpha 4\rho^2 q^{2(\rho-1)} \\ & - 4E\cdot\mu\rho^2 q^{2(2\rho-1)} + 4\rho^2 q^{2(2\rho-1)}\mu\widetilde{H}(q)\Big\}\Phi(q^2) = 0 \ ,\end{aligned} \tag{41}$$

где введено обозначение

$$\widetilde{H}(q) = H_{rel} + H_{LT} + H_{TT} \tag{42}$$

и параметр

$$d = 2 + 2\rho + 4\rho\ell \tag{43}$$

определяет размерность вспомогательного пространства. Детали вычислений спектра в рамках ОП подробно изложены в работах [15, 16]. Приводим окончательные результаты для энергии основного состояния в нулевом приближении ОП:

$$\varepsilon_0(U) = \varepsilon_0^c + \varepsilon_0^{rel} + \varepsilon_0^{LT} + \varepsilon_0^{TT} \ , \tag{44}$$

где

$$\varepsilon_0^c(\mu) = \frac{d\omega}{4} - \alpha\mu\frac{4\rho^2}{\omega^{\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - E\frac{4\rho^2}{\omega^{2\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tag{45}$$

и $\varepsilon_0^{rel}(\mu)$ - вклад релятивистского взаимодействия (26):

$$\varepsilon_0^{rel}(\mu) = 4\alpha\mu\rho^2\omega^{d/2}\int\limits_0^\infty \frac{du u^{d/2+\rho-2}\exp(-u\omega)}{\Gamma(d/2)} \times \left[\frac{1}{\sqrt{1+\ell(\ell+1)/u^{2\rho}}} - 1\right] . \tag{46}$$

ε_0^{LT} - добавочной вклад томас-орбитального взаимодействия оказался равным:

$$\varepsilon_0^{LT} = -\alpha\mu\lambda_{LT}(\ell)\cdot\frac{4\rho^2(\vec{L}\vec{S})}{\omega^{\rho-1}}\cdot\frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tag{47}$$

с

$$\lambda_{LT}(\ell) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{\xi}}{(1-\sqrt{\xi})^2(1+\sqrt{\xi})}\left[3\ln(1+\xi) - \xi\frac{1-\xi}{2-\xi}\right] ;$$

ε_0^{TT} вклад томасовский прецессии равен:

$$\varepsilon_0^{TT}(\mu) = \alpha\mu\lambda_{TT}(\ell)\cdot\frac{4\rho^2\vec{S}^2}{\omega^{3\rho-1}}\cdot\frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tag{48}$$

с

$$\lambda_{TT}(\ell) = \frac{1}{256}\cdot\frac{\sqrt{\xi}}{(1-\sqrt{\xi})^2(1+\sqrt{\xi})}\left[1-\sqrt{5-4\xi}+\frac{8}{3}(1-\xi^3)\right] ;$$

$$\xi = 1 - <v^2> .$$

Таким образом, мы определили энергию основного состояния в нулевом приближении ОП в вспомогательном пространстве. В этих выражениях ω частота осциллятора, которая определяется из условия осцилляторного представления (подробно см. в [15]):

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon(\omega) = 0 . \tag{49}$$

Спектр исходной системы определяется из уравнения

$$\varepsilon_0(E) = 0 . \tag{50}$$

Мы определили аналитически релятивистскую поправку и томасовскую прецессию для гамильтониана взаимодействия заряженных скалярных частиц, а также в рамках метода ОП получили рецепты вычисления спектра данного гамильтониана.

6 Обсуждение

На основе исследования асимптотического поведения поляризационной петли для скалярных частиц в электромагнитном поле определена релятивистская поправка к гамильтониану взаимодействия. Полученные добавки существенны на малых расстояниях, что связано с релятивистской природой связанного состояния, и в пределе $c \to 0$ (или $r \to \infty$) эти добавки исчезают.

Аналитически определены конституентные массы составляющих частиц, образующих связанное состояние. Показано, что конституентные массы составляющих отличаются от масс свободного состояния, в частности конституентная масса фотона не равна нулю.

Вычислены добавки, связанные с томасовской прецессией.

С учетом релятивистской поправки и томасовской прецессии к гамильтониану взаимодействия заряженных скалярных частиц в рамках метода осцилляторного представления определен спектр связанных состояний.

Приложение А

Приводим детали суммирования ряда

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!c^{2k}} \cdot \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} \left(r^{2k-1}(\tau) \right) \ , \tag{A.1}$$

где $r = |\vec{r}|$. Для этого прежде всего вычислим дифференциал радиуса–вектора:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \ ; \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = (\vec{n} \cdot \vec{v}) \ ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \ ; \quad \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} = 0 \ . \tag{A.2}$$

В этом приближении для различных значений k получаем:

$$\begin{aligned} k = 1 \ ; \quad & \frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} = \frac{[\vec{r}, \vec{v}]^2}{r^3} = \frac{\hat{\ell}^2}{r^3} \ ; \\ k = 2 \ ; \quad & \frac{\partial^4 r^3}{\partial \tau^4} = \frac{9\hat{\ell}^4}{r^5} \ ; \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$........;$$

$$k = n\ ; \qquad \frac{\partial^{2n} r^{2n-1}}{\partial \tau^{2n}} = \frac{\widehat{\ell}^{2n}}{r^{2n+1}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (2j-1)^2$$

и $\widehat{\ell} = [\vec{r}, \vec{v}]$ - оператор орбитального момента. Используя соотношения

$$\prod_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \left[\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}\right]^2 = \frac{\Gamma^2(2k)}{\Gamma^2(k) 2^{2(k-1)}} \tag{A.4}$$

и

$$\Gamma(2k) = \frac{2^{2k-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(k)\Gamma(k+1/2)\ , \tag{A.5}$$

а также учитывая (A.3) для исходного ряда (A.1) имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{\widehat{\ell}^{2k}}{c^{2k}} \cdot \frac{1}{r^{2k+1}} \cdot \frac{\Gamma^2(2k)}{2^{2(k-1)}\Gamma^2(k)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k}{(k)!} \cdot \Gamma(k+1/2)\ , \end{aligned} \tag{A.6}$$

где введено обозначение

$$A = \frac{\widehat{\ell}^2}{c^2 r^2}\ . \tag{A.7}$$

Используя интегральное представление для функций $\Gamma(k+1/2)$, из (A.5) получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k}{(2k)!} \cdot \int_0^{\infty} dx \frac{x^k}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-x} \left(e^{-Ax} - 1\right) \qquad (A.8) \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \ell(\ell+1)/(c^2 r^2)}} - 1\right]\ . \qquad (A.9) \end{aligned}$$

Используя это выражение, определяем релятивистские поправки.

Приложение B

В этом пункте приведем детали вычисления величины

$$J_k = \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} \left(r^{2k-1}(\tau)\right)\ , \tag{B.1}$$

с учетом условий:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} \; ; \qquad \frac{\partial \dot{\vec{v}}}{\partial \tau} = 0 \; ; \qquad (\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}) = 0 \; . \tag{B.2}$$

Мы предполагаем, что ускорение всегда перпендикулярно радиусу. В этом случае для различных значений k из (B.1) получаем

$$J_1 = \frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} = \frac{\widehat{\ell}^2}{r^3} \tag{B.3}$$

$$J_2 = 9\frac{\widehat{\ell}^4}{r^5} + 12 \cdot v \cdot \frac{\widehat{\ell}\widehat{d}}{r} + 6 \cdot r \cdot \widehat{d}^2 + 6\left(\widehat{\ell}\widehat{\omega}_T\right)\frac{v^2}{r} \; . \tag{B.4}$$

Здесь $\widehat{\ell}$ - оператор орбитального момента, $\widehat{d}$ - оператор дипольного момента и $\widehat{\Omega}_T$ - оператор, соответствующий частоте томасовской прецессии, **представленной в (30) и (32)** соответственно; v - проекция скорости на направление радиуса. В Приложении А мы учили только первое слагаемое в (B.3) и (B.4) и определили суммированный результат, который представлен в (A.8). При учете всевозможных величин для получения общей закономерности ряда нам нужно определить высшие порядки по k. Из (B.1) при $k = 3$ получаем

$$\begin{aligned} J_3 &= 5^2 3^2 \frac{\widehat{\ell}^6}{r^7} + 5!2 \cdot v^3 \cdot \frac{\widehat{\ell}\widehat{d}}{r} + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot v \cdot \frac{(\widehat{\ell}\widehat{d})\widehat{\ell}^2}{r^3} \\ &+ 5!3\left(r^2\widehat{d}^2 + v^2\left(\widehat{\ell}\widehat{\omega}_T\right)\right)\frac{v^2}{r} + 5 \cdot 4 \cdot 28\frac{(\widehat{\ell}\widehat{d})^2}{r} + 5!3v^3 \cdot r\left(\widehat{d}\widehat{\omega}_T\right) \\ &+ 5 \cdot 6 \cdot 13\left(r^2\widehat{d}^2 + v^2\left(\widehat{\ell}\widehat{\omega}_T\right)\right)\frac{\widehat{\ell}^2}{r^3} + 30 \cdot r \cdot v^4\widehat{\omega}_T^2 \; ; \end{aligned} \tag{B.5}$$

и при $k = 4$:

$$\begin{aligned} J_4 &= 7^2 5^2 3^2 \frac{\widehat{\ell}^8}{r^9} + 7! \cdot v\frac{27}{2} \cdot \frac{(\widehat{\ell}\widehat{d})\widehat{\ell}^4}{r^5} + 7 \cdot 24 \cdot 574\frac{(\widehat{\ell}\widehat{d})^2\widehat{\ell}^2}{r^3} \\ &+ 7 \cdot 6 \cdot 810\left[r^2\widehat{d}^2 + v^2\left(\widehat{\ell}\widehat{\omega}_T\right)\right]\frac{\widehat{\ell}^4}{r^5} + 7 \cdot 120 \cdot 48v^3 \cdot \frac{(\widehat{\ell}\widehat{d})\widehat{\ell}^2}{r^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\; 7\cdot 48\cdot 46\cdot 4v^2\frac{(\hat{\ell}\hat{d})^2}{r}+7!12\cdot v^2\left[r^2\hat{d}^2+v^2\left(\hat{\ell}\hat{\omega}_T\right)\right]\frac{\hat{\ell}^2}{r^3}\\
&+\; 7!\cdot 2\cdot v^5\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{r}+7\cdot 48\cdot 184\cdot v\cdot\left[r^2\hat{d}^2+v^2\left(\hat{\ell}\hat{\omega}_T\right)\right]\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{r}\\
&+\; 7!\cdot 12\cdot v^3\cdot\left(\hat{\ell}\hat{\omega}_T\right)\cdot\frac{\hat{\ell}^2}{r}+7!\cdot v^4\cdot\hat{\omega}_T^2\cdot\frac{\hat{\ell}^2}{r}\\
&+\; 7\cdot 36\cdot 86\cdot rv^2\left(\hat{d}\hat{\ell}\right)\left(\hat{d}\hat{\omega}_T\right)+7!\cdot 5\cdot v^4\left[r^2\hat{d}^2+v^2\left(\hat{\ell}\hat{\omega}_T\right)\right]\frac{1}{r}\\
&+\; 84\cdot 55\left[r^2\hat{d}^2+v^2\left(\hat{\ell}\hat{\omega}_T\right)\right]^2\frac{1}{r}+7!\cdot 10v^5r\left(\hat{d}\hat{\omega}_T\right)+7!\cdot 5/2rv^6\hat{\omega}_T^2\;.
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Из выражений (B.3-B.6) видно, что на малых расстояниях основной вклад определяется орбитальным взаимодействием, и в этом случае вклады к гамильтониану представлены в (A.7). Если предположить, что частота томасовской прецессии постоянна ($\Omega_T = const$), то из (B.3) - (B.6) видно, что на больших расстояниях основная поправка определяется томасовской прецессией.

Теперь приведем конкретный вид взаимодействия. Рассмотрим диполь-орбитальные взаимодействия. Из (B.3) - (B.6) перепишем коэффициенты для различных значений k:

$$
\begin{aligned}
&k=2\;; &&3!\cdot 2\cdot v\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{r}\;;\\
&k=3\;; &&5!\cdot 2\cdot v^3\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{r}\;;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&k=n\;; &&(2n-1)!\cdot 2\cdot v^{2n-3}\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{r}\;.
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

В этом случае для суммированного вклада из (A.1) имеем

$$
\begin{aligned}
I_{d\ell} &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{2(2k-1)!v^{2k-3}}{c^{2k}}\cdot\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{r}\\
&= \frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{v^3r}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^{2k}\;.
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

Окончательно в системе единиц $c = 1$ получаем

$$
I_{d\ell}=\frac{(\hat{\ell}\hat{d})}{v^3r}\cdot\left[1+\frac{1}{v^4}\ln\left(\frac{1}{1+v^2}\right)\right]\;.
\tag{B.9}
$$

Рассмотрим диполь-дипольные взаимодействие. Проводя аналогичные упрощения, из (A.1) имеем

$$I_{dd} = r \cdot \frac{(\widehat{d})^2}{2v^4} \cdot \left[3\ln(1+v^2) - v^2 \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2}\right] \,. \tag{B.10}$$

Теперь приступим к оценке вкладов, пропорциональных томасовской частоте. После стандартных упрощений поправка, пропорциональная квадрату томасовской частоты, оказалось равной

$$\begin{aligned} I_{TT} &= r \cdot v^4 \omega_T^2 \cdot \left\{ \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (2k-1) \cdot 2^{2k-5} \cdot v^{2k-6} \right. \\ &\times \left. \prod_{j=1}^{k-2} (2j-1)^2 - \frac{1}{24} \right\} . \end{aligned} \tag{B.11}$$

Учитывая (A.4) и интегральное представление гамма-функции и проводя упрощения из (B.11), получаем

$$I_{TT} = r \cdot \frac{\widehat{\Omega}_T^2}{128(\gamma-1)^2 v^2} \cdot \left[1 - \sqrt{1+4v^2} + 8v^2 - 8v^4 + \frac{8v^6}{3}\right] \,. \tag{B.12}$$

Определим добавку, пропорциональную величине $(\widehat{\ell\Omega_T})$:

$$I_{T\ell} = \frac{(\widehat{\ell\Omega_T})}{2(1-\gamma) r v^2} \cdot \left[3 \cdot \ln(1+v^2) - v^2 \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2}\right] \,. \tag{B.13}$$

Мы привели явный вид лидирующих слагаемых на малых и больших расстояниях. Для получения всех возможных добавок нужен учет более высоких порядков частных производных по r. С учетом результатов (B.3) - (B.13) определены поправки к гамильтониану взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] C. Quigg and J. L. Rosner, Phys. Report. **59**, p.167(1979);
A. A. Быков, И. М. Дремин, А. В. Леонидов, УФН, **143**, с.(1984);
W. Lucha, F. F. Schöberl, D. Gromes. Phys. Report. **200**, p.127(1991);
(and references therein).

[2] E. Eichten et al., Phys. Rev. Lett.,**34**, p.369(1975);
D. Gromes, Nucl. Phys., **B 131**, p.80(1977);
J. L. Richardson, Phys. Lett. **B 82**, p.272(1979);
A. Martin, Phys. lett., **B 100**, p.511(1981).

[3] D. Gromes, Zet. Phys., **C22**, p.265(1984);
A. Barchielli et al., Nuovo Cim. **103A**, p.59(1990);
G. S. Bali, K. Schilling et al., Phys. Rev., **D 56**, p.2566(1997);
G. S. Bali and P.Boyle, Phys. Rev., **D 59**, p.114504(1999).

[4] M. G. Boshier, P. E. G. Baird, et al., Phys. Rev.,**A 40**, p.6169(1989).

[5] Ty. Ude, A. Huber et al., Phys. Rev. Lett.,**79**, p.2646(1997).

[6] F. G. Mariam, W. Beer, Phys. Rev. Lett., **49**, p.993(1982).

[7] W. Liu, M. G. Boshier et al., Phys. Rev. Lett., **82**, p.711(1999).

[8] M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto, Phys. Report., **342**, p.63–261(2001) (and references therein).

[9] A. B. Kaidalov, Yu.A. Siminov , Yad. Fiz., **63**, p.1507(2000).

[10] M. Dineykhan, G. V. Efimov and Kh. Namsrai, Fortsch. Phys., **39**, p.259-318(1991).

[11] M. Dineykhan, G. V. Efimov, Sacharov Conf. **1**, Proceed., Mos. **v. 2**, p.963-969(1991).

[12] R. P. Feynman and A. P. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York McGraw-Hill 1965.

[13] Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Теория поля* Москва, Наука 1988.

[14] И. Ю. Кобзарев, Б. В. Мартемьянов, М. Г. Щепкин, УФН **162**, с.1-41(1992).

[15] М. Динейхан, Г. В. Ефимов, ЭЧАЯ, **26**, с.651(1995);
M. Dineykhan, G.V. Efimov, G. Ganbold and S.N. Nedelko, *Oscillator representation in quantum physics*, Lecture Notes in Physics,**m 26**, Springer-Verlag, Berlin(1995).

[16] M. Dineykhan, G. V. Efimov, Rep. Math. Phys., **36**, p.287(1995); ЯФ, **59**, с.862(1996);
M. Dineykhan, Zeitschrift für Phys., **D 41**, p.77(1997);
M. Dineykhan, R. G. Nazmitdinov, Yad. Fiz. **62**, p.143(1999).

Получено 23 августа 2002 г.

Динейхан М. и др. P2-2002-197
Эффективный гамильтониан в скалярной электродинамике

На основе исследования асимптотического поведения поляризационной петли скалярных частиц во внешнем электромагнитном поле определена релятивистская поправка к эффективному гамильтониану взаимодействия. Аналитически определены конституентные массы составляющих связанного состояния. Показано, что конституентные массы составляющих системы отличаются от масс свободных частиц. Вычислены добавки, связанные с томасовской прецессией.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод авторов

Dineykhan M. et al. P2-2002-197
The Effective Hamiltonian in the Scalar Electrodynamics

On the basis of an investigation of the asymptotic behaviour of the polarization loop for the scalar particles in the external electromagnetic field the relativistic corrections to the Hamiltonian are determined. The constituent mass of the particles in the bound state is analytically derived. It is shown that the constituent mass of the particles differs from the mass of the particles in the free state. The corrections connected with the Thomas precession have been calculated.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 02.10.2002.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,18. Уч.-изд. л. 1,15. Тираж 425 экз. Заказ № 53545.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.