

P4-2002-282

Ф. М. Пеньков\*

**ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ  
СПЕКТРОВ, ДЛИН РАССЕЯНИЯ  
И КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕКОМБИНАЦИИ  
В СИСТЕМЕ ТРЕХ БОЗОНОВ**

Направлено в «Журнал экспериментальной  
и теоретической физики»

---

\*E-mail: [penkov@thsun1.jinr.ru](mailto:penkov@thsun1.jinr.ru)

# 1 Введение

Открытие слабосвязанного состояния двух атомов гелия [1] и проблемы устойчивости бозе-конденсата атомов щелочных металлов (см., например, [2] ) инициировало всплеск расчетов по свойствам трехчастичных систем, определяемых парным взаимодействием с большой длиной рассеяния  $a_0$  по сравнению с радиусом действия парных сил  $r_0$ :

$$\frac{r_0}{a_0} \ll 1. \quad (1)$$

Практическая значимость исследования трехчастичных систем с большой длиной парного рассеяния сопровождается значительными трудностями численных расчетов. Это связано с необходимостью брать очень большие расстояния для фиксирования асимптотического поведения волновой функции трехчастичной системы. И если существует целый ряд работ по расчету спектра трех атомов гелия (см., например, работы [3] и цитирование в них), то уже расчетам длин рассеяния атома гелия на димере гелия посвящены единичные публикации [3, 4]. Более того, расчеты, использующие разные границы области численного решения, дают различные значения длин рассеяния [4]. Еще большие трудности возникают при расчетах коэффициентов рекомбинации, которые определяют устойчивость бозе-конденсата.

Кроме практической значимости, указанные выше трехчастичные системы вызывают интерес из-за близости параметров двухчастичного взаимодействия к условиям проявления эффекта Ефимова [5]. В частности, величина  $\ln(|a_0|/r_0)/\pi$ , определяющая количество ефимовских уровней в трехчастичной системе для гелий-гелиевого взаимодействия, примерно равна 0.9, что оставляет возможность аномального поведения второго связанного состояния тримера гелия при уменьшении глубины парного взаимодействия. Действительно, численное моделирование такой ситуации приводит к увеличению (по модулю) энергии возбужденного состояния указанной системы [6]. Поэтому система трех атомов гелия является первой физической системой трех частиц с равными массами, свойства которой определяются эффективным автомодельным взаимодействием  $\sim -\gamma^2/R^2$  с константой связи  $\gamma^2$ , не зависящей от деталей парного взаимодействия [5]. Параметры парного взаимодействия лишь ограничивают область действия такого эффективного потенциала: от  $\sim r_0$  до  $\sim |a_0|$ . Очевидные свойства решений в этом потенциале указывают на определяющее положение одного безразмерного параметра  $|a_0|/r_0$ . Если он стремится к бесконечности, то количество связанных состояний в трехчастичной системе тоже стремится к бесконечности. В частности, при

$|a_0| \rightarrow \infty$  спектр сгущается к нулю, определяя собственно эффект Ефимова [5], а при  $r_0 \rightarrow 0$  спектр неограничен снизу [7], что эквивалентно падению на центр [8]. В работе [9] было показано, что интегральные уравнения для трехчастичных систем с нулевым радиусом действия парных сил [10] не имеют единственного решения и определяются одним свободным параметром. Такая ситуация определила возможную процедуру описания системы путем фиксирования свободного параметра по известной спектральной точке [9]. Эта идея неоднократно использовалась для описания реальных физических систем. В частности, в последние годы в рамках эффективной теории поля (EFT) были построены феноменологические трехчастичные уравнения, которые включали свободный параметр сразу, на основании дополнительного условия сходимости ряда EFT [11]. Использование трехчастичных уравнений с нулевыми радиусами парных сил для описания реальных физических систем неявно предполагает малость поправок из-за конечного радиуса. Однако в настоящее время никаких строгих утверждений о величине поправок за счет конечного отношения  $|a_0|/r_0$  не существует. Поэтому в настоящей работе реализована схема рассмотрения трехчастичных систем, когда параметром является эффективный радиус парного взаимодействия. При этом основные этапы решения задачи остаются прежними. Эффективный радиус рассматривается как параметр в интегральных уравнениях Фаддеева и подбирается так, чтобы совпадал один из двух уровней в системе трех атомов гелия (тример). Далее вычисляется второй уровень и длина рассеяния атома гелия на связанной паре двух других. Расчеты, проведенные по такой схеме, согласуются, как будет показано ниже, с результатами расчетов дифференциальных уравнений Фаддеева в пределах нескольких процентов. После этого вычисляются коэффициенты рекомбинации.

Для того чтобы эффективный радиус явно входил в уравнения Фаддеева, в настоящей работе используется двухполюсная парная  $t(p, p'; p_0^2/m)$ -матрица. При этом один ее полюс отвечает связанному состоянию пары, а положение второго определяет эффективный радиус. В частности, при использовании парного сепарабельного взаимодействия в виде потенциала Ямагучи

$$v(p, p') = -\frac{8\pi}{m} \frac{\beta(\beta + \kappa)^2}{(\beta^2 + p^2)(\beta^2 + p'^2)} \quad (2)$$

двухчастичная  $t(p, p'; p_0^2/m)$ -матрица имеет полюсы при  $p_0 = i\kappa$  и  $p_0 = -i(2\beta + \kappa)$ . Здесь  $p$  – импульс относительного движения,  $m$  – масса атома,  $\kappa = \sqrt{-m\varepsilon}$  – волновое число состояния димера с энергией  $\varepsilon$ ,  $\beta$  – определяет

параметры разложения эффективного радиуса:

$$a_0 = \frac{2(\beta + \kappa)^2}{\beta\kappa(\kappa + 2\beta)}; \quad r_0 = \frac{\kappa^2 + 2\beta\kappa + 3\beta^2}{\beta(\beta + \kappa)^2}.$$

Отметим, что при  $\beta \gg \kappa$  длина рассеяния  $a_0 \simeq \kappa^{-1}$ , а эффективный радиус  $r_0 \simeq 3/\beta$ . Предел нулевого радиуса достигается устремлением  $\beta$  к бесконечности. Из-за явной связи  $\beta$  с эффективным радиусом именно эта величина будет использоваться ниже как параметр задачи.

## 2 Длина рассеяния и связанные состояния тримера гелия

Для нахождения энергий связанных состояний трех атомов гелия и амплитуд упругого рассеяния атома гелия на димере гелия ( $\text{He}_2$ ), ниже энергии развала, решались уравнения Фаддеева с сепарабельными парными потенциалами (2). Техника построения и симметризации уравнений Фаддеева в указанном случае многократно описана (см., например, монографию [12]). Здесь будет использована схема, рассмотренная в работе [13]. В рамках этой схемы интегральные уравнения для амплитуды рассеяния бозона на связанном состоянии двух других имеют простой квазидвухчастичный вид:

$$f(k_i, k_0) = V^{\text{eff}}(k_i, k_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{V^{\text{eff}}(k_i, k) k^2 dk}{k^2 - (Z - \varepsilon)4m/3} f(k, k_0), \quad (3)$$

где  $Z = 3k_0^2/4m + \varepsilon + i0$  – полная энергия системы,  $\mathbf{k}$  – импульс относительного движения частицы и связанной пары, а  $V^{\text{eff}}$  – S-волновая проекция эффективного потенциала. Для потенциала Ямагучи эффективный потенциал имеет вид

$$V^{\text{eff}}(k_i, k_j) = \frac{16}{3} \frac{(\beta + \kappa)^2 \beta S(k_i) S(k_j)}{\left(\beta^2 + (\mathbf{k}_j + \frac{\mathbf{k}_i}{2})^2\right) \left(-mZ + k_i^2 + k_j^2 + \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j\right) \left(\beta^2 + (\mathbf{k}_i + \frac{\mathbf{k}_j}{2})^2\right)},$$

где введены обозначения:

$$S(k) = (\beta + a_k) \sqrt{\frac{\kappa + a_k}{2\beta + \kappa + 2a_k}}; \quad a_k = \sqrt{-m(Z - k^2 3m/4)}.$$

Длина рассеяния вычислялась двумя способами для возможности оценки аккуратности разложения эффективного радиуса: как предел уравнения

при  $k_0 = 0$  и как предел решения (амплитуды)  $a^{(3)} = f(k_0, k_0)$  при  $k_0 \rightarrow 0$ . Для задачи на связанное состояние решается однородное уравнение с таким же ядром. Уравнение (3) решалось численно по схеме работы [14] с точностью вычисления приведенных ниже параметров не хуже шести значимых цифр. Как уже указывалось выше, величина  $\beta$  рассматривалась как параметр задачи. Его значение подбиралось так, чтобы совпадал один из уровней тримера гелия с уровнем, ранее рассчитанным другими авторами [3, 15], с использованием реалистических потенциалов Азиза: HFD-B [16], LM2M2 [17], SAPT [18], SAPT1 [18], SAPT2 [18]. Поскольку тример гелия имеет два связанных состояния, то настоящие расчеты проводились в привязке и к первому, и ко второму уровням.

Таблица: Результаты расчетов энергий связанных состояний тримера гелия, длин рассеяния атома гелия на димере гелия и коэффициентов комбинации для атомов гелия. Пояснения в тексте

HFD-B, $\varepsilon = -1.685411$ mK					
метод	$\beta$ ( $\text{\AA}^{-1}$ )	$E_1$ (K)	$E_2$ (mK)	$a^{(3)}$ ( $\text{\AA}$ )	C
1	0.3305		-2.7899	116.60	0.977
2	0.3200	-0.12597		121.58	0.704
[3]		-0.1325	-2.74	$135 \pm 5$	
[4]				121.9	
LM2M2, $\varepsilon = -1.303483$ mK					
1	0.3305		-2.3163	109.48	2.513
2	0.3220	-0.12070		114.25	2.145
[3]		-0.1259	-2.28	$131 \pm 5$	
[4]				115.4	
SAPT, $\varepsilon = -1.898390$ mK					
1	0.33111		-3.0501	118.23	0.521
2	0.31730	-0.12763		124.35	0.276
[15, 4]		-0.13637	-2.986	123.7	
SAPT1, $\varepsilon = -1.732405$ mK					
1	0.33130		-2.8507	116.74	0.868
2	0.31785	-0.12539		123.00	0.554
[15, 4]		-0.13382	-2.790	122.4	
SAPT2, $\varepsilon = -1.81500$ mK					
1	0.33130		-2.9507	117.51	0.686
2	0.31735	-0.12638		123.86	0.396
[15, 4]		-0.13516	-2.887	123.1	

Результаты вычислений показаны в таблице. В общих строках приведены типы парных потенциалов с указанием энергии связи димера. При

этом для потенциалов HFD-B и LM2M2 энергия связи димера рассчитывалась автором, а для потенциалов типа SAPT эти значения взяты из работы [15]. Ссылки в колонке "метод" показывают, откуда бралась информация для подгонок основного  $E_1$  или возбужденного  $E_2$  состояния тримера, а цифры "1" и "2" указывают, под какой уровень:  $E_1$  или  $E_2$  выбирался параметр  $\beta$ , приведенный во второй колонке. Заметим, что в работе [3] приведены данные и по энергиям связи тримера гелия, и по длинам рассеяния атома гелия на димере, тогда как расчеты энергий связи тримера и длин рассеяния для потенциалов SAPT приведены в разных публикациях: [15] и [4], соответственно. Для более легкого чтения подогнанный уровень в таблице опускался. Колонка "С" относится к результатам следующего раздела и будет пояснена ниже. Результаты расчетов, приведенные в таблице, показывают неплохое согласие для столь простой модели описания. Так, максимальная погрешность в описании положения основного состояния при привязке к возбужденному уровню составляет 6.5%, а в описании возбужденного состояния при привязке к основному уровню – 2.2%. Согласие же длин рассеяния, полученных при привязке к возбужденному состоянию, с результатами вычислений работы [4] столь хорошо (относительная ошибка меньше 1%), что может служить критерием аккуратности вычислений этих величин. Напомним, что различие длин рассеяния, приведенных авторами в работах [3] и [4], возникает из-за разных границ области численного решения дифференциальных уравнений Фаддеева [4].

Возможность высокой точности вычисления амплитуды рассеяния позволяет сделать выводы о возможности и области действия квазидвухчастичного разложения эффективного радиуса:

$$k_0 \text{ctg} \delta(k_0) = -\frac{1}{a^{(3)}} + \frac{r_{\text{eff}} k_0^2}{2} + \dots$$

Здесь  $\delta$  – фаза упругого рассеяния атома гелия на димере в S-волне, а  $r_{\text{eff}}$  – эффективный радиус рассеяния. Это разложение по четным степеням импульса часто используется при анализе низкоэнергетического рассеяния и справедливо для достаточно быстро убывающих потенциалов (см., например, [19]).

Для демонстрации импульсной зависимости  $k_0 \text{ctg} \delta(k_0)$  вычислялись первые и вторые производные. В качестве примера был выбран потенциал HFD-B. Здесь не приводится график этой функции и ее первой производной из-за их малой информативности. Укажем лишь, что с точностью численного счета коэффициент перед линейным слагаемым в  $k_0 \text{ctg} \delta(k_0)$  равен нулю. На рисунке 1 показан график второй производной:

$r(k_0) = d^2(k_0 \text{ctg} \delta(k_0))/dk_0^2$ , которая совпадает с эффективным радиусом при  $k_0 \rightarrow 0$ .

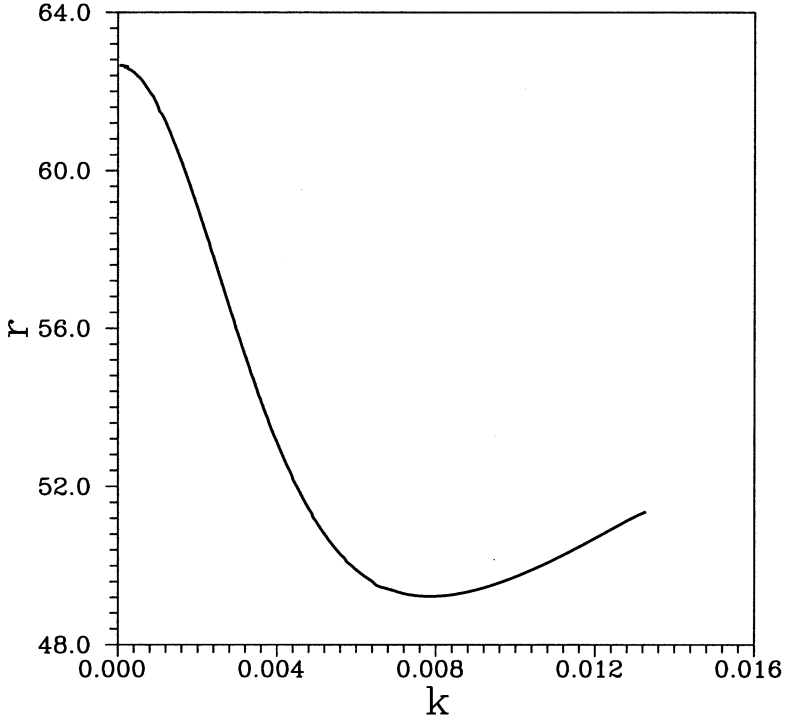


Рис. 1: Зависимость  $r$  от  $k$ .  $r$  в Å,  $k$  в Å<sup>-1</sup>. Пояснения в тексте

На рисунке 1 хорошо видно, что параболическая импульсная зависимость (примесь  $k^4$ ) ограничивается импульсами  $\sim 10^{-3}$  Å<sup>-1</sup>, сменяясь далее на ярко выраженную линейную зависимость вплоть до импульсов  $\sim 4 \cdot 10^{-3}$  Å<sup>-1</sup>. Таким образом, область разложения по целым степеням энергии не превышает  $10^{-5}$ К, что не позволяет описать амплитуду рассеяния атома гелия на димере простым полюсным соотношением  $f(k) = 1/(-1/a + r_{\text{eff}}k^2/2 - ik)$  (см., например, [20]). Более того, подставляя значения  $r_{\text{eff}} = 62.6$ Å и  $a^{(3)} = 121.58$ Å в это выражение, можно убедиться, что амплитуда будет иметь полюсы не при энергии связи тримера, а при энергиях, содержащих и действительную и мнимую части. Заметим, что подстановка в амплитуду параметров разложения эффективного радиуса для парного столкновения атомов гелия (потенциал HFD-B)  $a_0 = 88.601$ Å

и  $r_0 = 7.278\text{\AA}$  дает положение полюса с относительной погрешностью  $\sim 4 \cdot 10^{-5}$ .

### 3 Коэффициенты рекомбинации

Коэффициент рекомбинации  $\alpha$  связан с количеством переходов  $3 \rightarrow 2$  ( $1 + 1 + 1 \rightarrow 2 + 1$ ) в единицу времени из единичного объема соотношением  $\alpha n^3$ , где  $n$  – концентрация атомов. При этом, по условию определения, полная энергия системы трех тел  $Z = 0$ .

Особый интерес к процессам рекомбинации атомов при низких температурах связан с тем, что это явление разрушает бозе-конденсацию. Вместе с тем существует значительная неопределенность в расчетах этого коэффициента. Так, в работе [2] делается утверждение, что безразмерный коэффициент  $C$ , который вводится из размерных соображений:

$$\alpha = C \frac{a_0^4 \hbar}{m},$$

при выполнении условия (1), является универсальным для всех систем и равен  $C = 3.9$ . Авторы работы [21] заметили, что такую универсальность обеспечить невозможно, и дают разброс значений  $C = 0 \div 65$ . В работе [22] в рамках EFT-модели приводится феноменологическая формула, параметры которой определялись из интегрального уравнения модели EFT:

$$C = C_{max} \cos^2[s_0 \ln(a_0 \Lambda) + \delta]; \quad C_{max} = 67.9 \pm 0.7, \quad \delta = 1.74 \pm 0.02. \quad (4)$$

В этой формуле  $s_0 \sim 1.0063$ , а  $\Lambda$  – параметр теории и может быть определен по процедурам, приведенным выше, то есть из сравнения с расчетами энергии связи или длин рассеяния для трехчастичных систем.

Нашей задачей было нахождение решения из точных трехчастичных уравнений Фаддеева и проверка асимптотического поведения при  $\beta \rightarrow \infty$  ( $r_0 \rightarrow 0$ ).

Коэффициент рекомбинации может быть записан через амплитуду процесса  $3 \rightarrow 2$  простым выражением

$$\alpha = \pi \frac{k_f}{m} |f_{3 \rightarrow 2}|^2, \quad (5)$$

где  $k_f = \sqrt{4/3}\kappa$ . Заметим, что это выражение получается как двухчастичный поток в выходном канале, умноженный на фактор  $1/6$ , который возникает при учете количества тройных комбинаций.



Уравнение для упругой амплитуды рассеяния (3) было приведено без вывода, поэтому ниже будет показана схема вывода интегрального уравнения Фаддеева для амплитуды неупругого перехода  $3 \rightarrow 2$  для произвольного сепарабельного взаимодействия в паре  $v = |\nu\rangle\langle\nu|$ . Для этого определим канальную Т-матрицу соотношением [19]

$$T_\alpha = \langle\varphi_\alpha|\bar{v}_\alpha|\Psi^+(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)\rangle,$$

где греческие индексы отвечают одному из трех наборов координат Якоби,  $|\Psi^+(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)\rangle$  – волновая функция трех частиц в непрерывном спектре,  $\langle\varphi_\alpha|$  – волновая функция связанного состояния пары в конечном канале, а  $\bar{v}_\alpha$  – стандартное обозначение суммы парных потенциалов за исключением взаимодействия, связывающего подсистему  $\alpha$ . Из-за тождественности частиц амплитуда неупругого перехода выражается через сумму трех амплитуд:

$$f_{3\rightarrow 2} = -\frac{m^*}{2\pi}T; \quad T = \sum_\alpha T_\alpha.$$

Здесь  $m^* = 2/3m$  – приведенная масса трехчастичной системы.

Из интегральных соотношений для волновой функции непрерывного спектра  $|\Psi^+\rangle = \varphi_\alpha^+ + G_\alpha\bar{v}_\alpha|\Psi^+\rangle$  получим уравнения Фаддеева для величин  $U_\alpha = v_\alpha|\Psi^+\rangle$ :

$$U_\alpha = t_\alpha + t_\alpha G_0(U_\beta + U_\gamma); \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma. \quad (6)$$

Здесь  $G_0 = (Z - H_0)^{-1}$  – функция Грина трехчастичной системы со свободным гамильтонианом  $H_0$  и  $G_\alpha = (Z - H_0 - v_\alpha)^{-1}$  – функция Грина со взаимодействием в парной подсистеме  $\alpha$  – берутся при полной энергии  $Z$ , положительная мнимая часть которой стремится к нулю. С учетом представления парной т-матрицы для сепарабельных потенциалов [13]

$$t_\alpha G_0 = v_\alpha|\varphi\rangle g_0(Z - \varepsilon_\alpha)\langle\bar{\varphi}_\alpha|$$

через немассовую волновую функцию подсистемы  $\langle\bar{\varphi}_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)|$ , которая совпадает с  $\langle\varphi_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)|$  на массовой поверхности  $(3k_\alpha^2/(4m) + p_\alpha^2/m = 3k_\alpha^2/(4m) + \varepsilon = Z)$ , можно ввести немассовую Т-матрицу:  $\tilde{T}_\alpha = \langle\bar{\varphi}_\alpha|(U_\beta + U_\gamma)$ , с очевидным свойством  $\tilde{T}_\alpha \rightarrow T_\alpha$  при  $k \rightarrow k_f$ . Тогда из уравнений Фаддеева (6) получим уравнение для немассовой Т-матрицы:

$$\tilde{T} = 6R + 2Vg_0\tilde{T}; \quad (7)$$

$$R = \langle\bar{\varphi}_\alpha|t_\beta|p_\beta\rangle, \quad V = \langle\bar{\varphi}_\alpha|v_\beta|\varphi_\beta\rangle; \quad \alpha \neq \beta, \quad p_\beta = 0.$$

Для дальнейших преобразований заметим, что неоднородный член в уравнении (7) выражается через величины  $V$ :

$$R = VD; \quad D = \frac{\nu_\alpha(p_\alpha)g_0}{\langle \varphi_\alpha | \nu_\alpha g_0 G_0 | \nu_\alpha \rangle}.$$

Это позволяет вынести множитель  $3D$  из уравнения путем простой замены  $f = 3DF$ . Комплексное уравнение для величины  $F$  удобно свести к двум действительным простым соотношением  $F = F_0 + ik_f F_1 F$ .

Преобразовав таким образом уравнения Фаддеева к удобному для решения виду, можно выразить величину  $C$  через параметры двухчастичного взаимодействия и решения уравнений Фаддеева для величин  $F_0$  и  $F_1$ :

$$C = \frac{4\pi^2 27}{\sqrt{3}} \frac{\beta(\beta + \kappa)}{(2\beta + \kappa)^2} \frac{k_f^2 F_0^2}{1 + k_f^2 F_1^2},$$

где амплитуды  $F_0$  и  $F_1$  отвечают решениям интегрального уравнения с одним и тем же ядром, но с разными свободными членами

$$F_n(k_i) = V^{\text{eff}}(k_i, k_n) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{V^{\text{eff}}(k_i, k) k^2 dk}{k^2 - k_f^2} F_n(k); \quad n = 0, 1; \quad k_0 = 0, \quad k_1 = k_f. \quad (8)$$

Интегрирование в окрестности особенности Коши понимается в смысле главного значения. Эффективный потенциал  $V^{\text{eff}} = -m/\pi V$  лишь ненамного отличается от приведенного выше

$$V^{\text{eff}}(k_i, k_j) = \frac{16}{3} \frac{(\beta + \kappa)^2 \beta S^2(k_i)}{\left(\beta^2 + (\mathbf{k}_j + \frac{\mathbf{k}_i}{2})^2\right) \left(-mZ + k_i^2 + k_j^2 + \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j\right) \left(\beta^2 + (\mathbf{k}_i + \frac{\mathbf{k}_j}{2})^2\right)}.$$

Заметим, что одно из уравнений (8) совпадает с уравнением для упругого рассеяния.

Уравнения (8) решались численно. Величины  $C$ , отвечающие разным парным потенциалам, приведены в таблице. Обращает на себя внимание факт, что при небольшом различии в длинах рассеяния коэффициенты рекомбинации отличаются почти на порядок. Для исследования причины такого отличия была построена кривая зависимости  $C$  от отношения  $\kappa/\beta$ , приведенная на рисунке 2, которая демонстрирует большие амплитудные значения логарифмически осциллирующей величины  $C$ .

Проведенные численные решения позволяют утверждать, что замечание авторов работы [21] о неуниверсальности величины  $C$  справедливо. Далее можно утверждать, что эмпирическая формула работы [22] справедлива только в асимптотической области, далеко за пределами реальных параметров  $r_0/a_0$ . На рисунке 2 для демонстрации этого утверждения

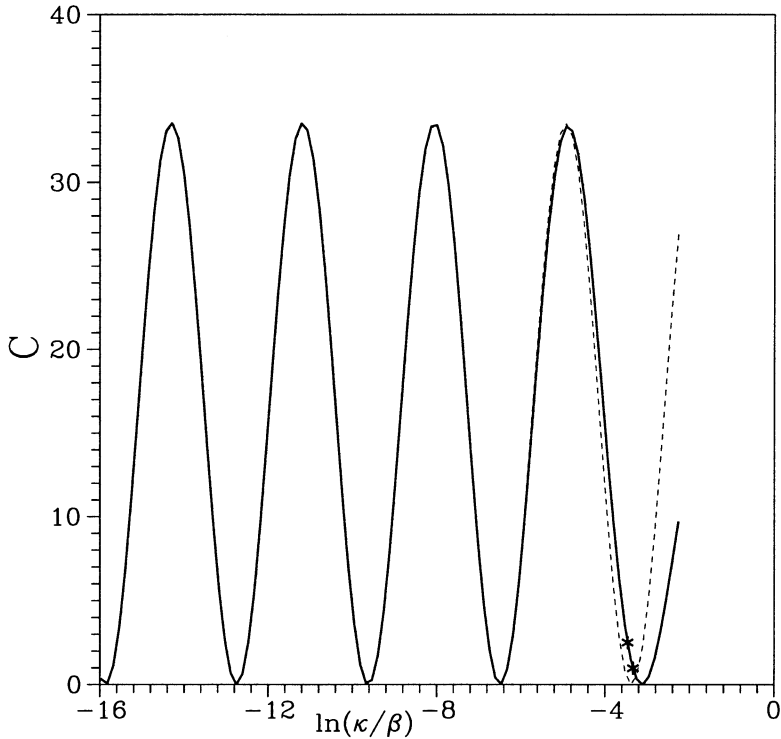


Рис. 2: Зависимость величины  $C$  от параметров парного взаимодействия. Пояснения в тексте

построены две кривые. Результаты наших расчетов проведены сплошной, а результаты расчетов по формуле (4) – пунктирной линией. Звездочками отложены значения величины  $C$  для двух гелий-гелиевых потенциалов. Для LM2M2  $C = 2.51$ , а для HFD-B  $C = 0.977$ . Видно, что эти значения лежат на кривой, зависящей только от отношения  $r_0/a_0$  (у нас  $-\kappa/\beta$ ), но не совпадающей с кривой работы [22]. Отметим, что наша кривая отличается от кривой уравнения (4) ровно в два раза. Поэтому на рисунке последняя кривая нормализована фактором 0.5.

## 4 Заключение

Расчеты, проведенные в рамках простой двухполюсной  $t$ -матрицы для гелий-гелиевого парного взаимодействия, показывают хорошее согласие спектров и длин рассеяния в системе трех атомов гелия с расчетами, выполненными для реалистических потенциалов. Поэтому можно надеяться, что рассчитанные впервые коэффициенты рекомбинации тоже будут в хорошем согласии с результатами будущих расчетов для реалистического парного взаимодействия. В этом случае результаты настоящей работы легко обобщаются на системы трех произвольных бозонов, включая атомы щелочных металлов, тогда как потенциальная модель описания таких систем разработана в настоящее время только для атомов благородных газов.

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ 01-02-17575.

## Литература

- [1] F.Luo et al., J.Chem.Phys. **98**, 3564 (1993).
- [2] P.O.Fedichev, M.W.Reynolds, and G.V.Shlyapnikov, Phys.Rev.Lett. **77**, 2921 (1996).
- [3] A.K. Motovilov, W. Sandhas, S.A. Sofianos, and E.A. Kolganova, Eur.Phys.J. D **13**, 33 (2001).
- [4] V.A. Roudnev "Ultra-low energy elastic scattering in a system of three helium atoms" Препринт ОИЯИ Е4-2002-85, Дубна 2002.
- [5] В.Ефимов, ЯФ **12**, 1080 (1970).
- [6] E.A. Kolganova, A.K. Motovilov, S.A. Sofianos, J.Phys. B **31**, 1279 (1998).
- [7] Р.А.Минлос, Л.Д.Фаддеев, ЖЭТФ **41**, 1850 (1961).
- [8] L.H.Thomas, Phys.Rev. **47**, 903 (1935).
- [9] Г.С.Данилов, ЖЭТФ **40**, 498 (1961).
- [10] Г.В.Скорняков, К.А.Тер-Мартirosян, ЖЭТФ **31**, 775 (1956).
- [11] P.F. Bedaque, H.-W. Hammer, and U van Kolck, Phys.Rev.Lett. **82**, 463, (1999).

- [12] С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, Москва, 1985.
- [13] Н.Ж.Такибаев, Ф.М.Пеньков, ЯФ **50**, 373 (1989).
- [14] Ф.М.Пеньков, Н.Ж.Такибаев, ЯФ **57**, 1300 (1994).
- [15] V.Roudnev, S.Safianos and S.Yakovlev, Lanl e-print physics/0204025, submitted to Few-Body Systems
- [16] R.A. Aziz, F.R.W. McCourt, C.C.K. Wong, Mol.Phys. **61**, 1487 (1987).
- [17] R.A. Aziz, M.J. Slaman, J.Chem.Phys. **94**, 8047 (1991).
- [18] A.R.Janzen and R.A.Aziz, J.Chem.Phys. **107**, 914, (1997)
- [19] Дж.Тейлор, *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений*, Мир, Москва, 1975.
- [20] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва, 1974.
- [21] E. Nielsen and J.H. Macek, Phys.Rev.Lett. **83**, 1751 (1999).
- [22] P.F. Bedaque, Eric Braaten, and H.-W. Hammer, Phys.Rev.Lett. **85**, 908 (2000).

---

Получено 15 декабря 2002 г.

Пеньков Ф. М.

P4-2002-282

Однопараметрические зависимости спектров, длин рассеяния и коэффициентов рекомбинации в системе трех бозонов

Исследуется модель двухполюсной парной  $t$ -матрицы для описания трех-бозонных систем при условии  $r_0/a_0 \ll 1$ . Положение второго полюса на нефизическом листе рассматривается как параметр интегрального уравнения Фаддеева. Получено хорошее согласие с расчетами, выполненными для реалистических потенциалов, и предсказаны не рассчитанные ранее параметры взаимодействия трех атомов гелия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Pen'kov F. M.

P4-2002-282

One-Parameter Dependence of Spectra, Lengths of Scattering and Coefficient of Recombinations for a Three-Boson System

The model of two poles  $t$ -matrixes for the description of a three-boson system under condition  $r_0/a_0 \ll 1$  is investigated numerically. The position of the second pole is considered as a parameter of the integral Faddeev equation. The good consent with accounts executed for the realistic potentials is reached and some parameters of interaction of three-helium atoms are predicted.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

**Редактор *М. И. Зарубина***  
**Макет *Н. А. Киселевой***

Подписано в печать 09.01.2003.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,98. Тираж 350 экз. Заказ № 53698.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)