P4-2002-286

А. С. Парван

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ В ЯДЕРНОЙ МУЛЬТИФРАГМЕНТАЦИИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы равновесной статистической механики широко применяются в физике столкновений тяжелых ионов при промежуточных и высоких энергиях для анализа выхода частиц и описания термодинамических свойств (уравнений состояния) конечных ядерных систем. Точный учет сохраняющихся зарядов важен для описания явлений ядерной мультифрагментации [1,2] и процессов выхода частиц в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ионов [3,4]. В последнее время применение этих законов сохранения в рамках статистических моделей стало возможным благодаря развитию методов точного вычисления статистической суммы канонического ансамбля. Точные решения для статистической суммы канонического ансамбля на основе рекуррентных уравнений [5] известны для очень узкого класса задач, таких, как квантовый идеальный газ N тождественных частиц [6–9] и статистические модели мультифрагментации с классической статистикой [10–12]. В работах [10,11,13] рассматривались рекуррентные уравнения в приложении к ядерной мультифрагментации для системы нуклонов с сохраняющимся барионным зарядом. Для системы нейтронов и протонов с сохраняющимися барионным и электрическим зарядами рекуррентные уравнения были выведены в [12] и применены к изучению мультифрагментации в работах [14,15]. Для статистической модели мультифрагментации с квантовой статистикой точные решения известны только в случае сохранения барионного заряда [9].

В настоящей работе найден новый алгебраический метод вывода рекуррентных уравнений для статистической суммы канонического ансамбля в представлении чисел заполнения с квантовой статистикой, классической статистикой и парастатистикой, а также с любым числом сохраняющихся зарядов. На основе этого подхода удается получить рекуррентные соотношения для статистической суммы и средних по ансамблю в рамках новой статистической модели ядерной мультифрагментации с сохранением барионного и электрического зарядов со статистиками Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака и парастатистики, при учете внутренних степеней свободы ядерных фрагментов. Следует отметить, что по сравнению с другими статистическими моделями ядерной мультифрагментации преимущества этой модели сводятся к трем: в используемом каноническом ансамбле точно учтено сохранение барионного и электрического зарядов, модель обобщается на случай квантовой статистики и парастатистики фрагментов и развитая модель допускает точное решение проблемы. Показано, что статистические суммы модели мультифрагментации с сохранением барионного заряда и идеального газа N тождественных частиц приводятся к одной и той же сумме с мультиномиальными коэффициентами [5] вне зависимости от статистики фрагментов (частиц). Для модели мультифрагментации с сохранением барионного и электрического зарядов статистическая сумма приводится к обобщенной сумме с мультиномиальными коэффициентами.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрен идеальный газ N тождественных частиц в каноническом ансамбле и сформулирован метод вывода рекуррентных соотношений. В разделе 3 этот метод обобщается на случай статистической модели мультифрагментации с сохранением барионного заряда. В разделе 4 сформулирована статистическая модель мультифрагментации с сохранением барионного и электрического зарядов, для статистической суммы которой приведены соответствующие рекурсивные соотношения. В пятом разделе содержатся обсуждения и заключительные замечания. В приложении дается вывод рекуррентных уравнений.

2. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ N ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ

Статистическая сумма для идеального газа N тождественных частиц в каноническом ансамбле в случае, когда частицы подчиняются квантовой статистике либо классической статистике или парастатистике, дается формулой [16]

$$\mathcal{Q}_N = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} \delta\left(\sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}} - N\right) \; G(\{n_{\vec{p}}\}) \; e^{-\beta \sum_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}}}, \tag{1}$$

где $\beta = 1/T$, а δ – символ Кронекера. Допустимы следующие значения $n_{\vec{p}}$:

$$n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \ldots, K. \tag{2}$$

Для статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Максвелла – Больцмана $K = N$. Для статистики Ферми – Дирака $K = 1$ и для парастатистики $1 < K < N$. Число состояний системы, соответствующих $\{n_{\vec{p}}\}$, есть $G(\{n_{\vec{p}}\}) = 1$ для парастатистики, статистики Ферми – Дирака и статистики Бозе – Эйнштейна, и $G(\{n_{\vec{p}}\}) = (1/N!)N!/\prod_{\vec{p}} n_{\vec{p}}!$ для статистики Максвелла – Больцмана. Одночастичные энергии в случае нерелятивистского идеального газа даются формулой $\varepsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$, а в случае релятивистского идеального газа формулой $\varepsilon_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Отметим, что для конкретной физической системы задается соответствующий набор квантовых чисел и энергий одночастичных состояний.

Статистическая сумма (1) удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям [6–9]

$$\mathcal{Q}_N = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \omega_l \; \mathcal{Q}_{N-l}, \tag{3}$$

$$\omega_l = y_l \sum_{\vec{p}} e^{-\beta l \varepsilon_{\vec{p}}}, \tag{4}$$

где $\mathcal{Q}_0 = 1$. Для статистики Ферми – Дирака и статистики Бозе – Эйнштейна $y_l = (\mp 1)^{l+1}$, Для статистики Максвелла – Больцмана $y_l = \delta_{l,1}$ и для парастатистики $y_l = 1 - (K+1)\;\delta(l/(K+1) - [l/(K+1)])$. Здесь и в дальнейшем верхний знак соответствует статистике Ферми – Дирака, а нижний – статистике Бозе – Эйнштейна.

Докажем справедливость рекуррентных уравнений (3). Для этого введем вспомогательное тождество, справедливость которого нетрудно проверить простой подстановкой

$$\sum_{n_{\vec p}=0}^{K} n_{\vec p}\, G(n_{\vec p})\, x^{n_{\vec p}}\, \Phi(N-n_{\vec p}) = \sum_{l=1}^{N} y_l\, x^l \sum_{n_{\vec p}=0}^{\min[N-l,K]} G(n_{\vec p})\, x^{n_{\vec p}}\, \Phi(N-n_{\vec p}-l), \qquad (5)$$

где x, Φ – произвольные переменные. Для парастатистики, статистики Ферми – Дирака и статистики Бозе – Эйнштейна переменная $G(n_{\vec p}) = 1$, а для статистики Максвелла – Больцмана $G(n_{\vec p}) = 1/n_{\vec p}!$.

Под знаком суммы по числам заполнения в формуле (1), в силу закона сохранения полного числа частиц $\sum_{\vec p} n_{\vec p} = N$, введем единицу вида $1 = \sum_{\vec p} n_{\vec p}/N$

$$\mathcal{Q}_N = \frac{1}{N} \sum_{\vec p'} \sum_{\{n_{\vec p}\}} \delta\left(\sum_{\vec p} n_{\vec p} - N\right) n_{\vec p'}\, G(\{n_{\vec p}\})\, e^{-\beta \sum_{\vec p} \varepsilon_{\vec p} n_{\vec p}}. \qquad (6)$$

Замечаем, что сумма по $n_{\vec p'}$ в выражении (6) совпадает с левой частью тождественного уравнения (5), если переменные $x = e^{-\beta\varepsilon_{\vec p'}}$ и $\Phi(N-n_{\vec p'}) = \delta\left(\sum_{\vec p\neq\vec p'} n_{\vec p} - (N-n_{\vec p'})\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_N = \frac{1}{N} \sum_{\vec p'} \sum_{\{n_{\vec p}\}_{\vec p\neq\vec p'}} G(\{n_{\vec p}\}_{\vec p\neq\vec p'})\, e^{-\beta \sum_{\vec p\neq\vec p'} \varepsilon_{\vec p} n_{\vec p}} \times \\ \times \sum_{n_{\vec p'}=0}^{K} n_{\vec p'} G(n_{\vec p'})\, e^{-\beta\varepsilon_{\vec p'} n_{\vec p'}}\, \delta\left(\sum_{\vec p\neq\vec p'} n_{\vec p} - (N-n_{\vec p'})\right). \qquad (7)\end{aligned}$$

Используя тождество (5), а также воспользовавшись уравнениями (1), (4), окончательно имеем рекуррентные уравнения (3)

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_N &= \frac{1}{N} \sum_{\vec p'} \sum_{\{n_{\vec p}\}_{\vec p\neq\vec p'}} G(\{n_{\vec p}\}_{\vec p\neq\vec p'})\, e^{-\beta \sum_{\vec p\neq\vec p'} \varepsilon_{\vec p} n_{\vec p}} \sum_{l=1}^{N} y_l\, e^{-\beta l \varepsilon_{\vec p'}} \times \\ &\times \sum_{n_{\vec p'}=0}^{\min[N-l,K]} G(n_{\vec p'})\, e^{-\beta\varepsilon_{\vec p'} n_{\vec p'}}\, \delta\left(\sum_{\vec p\neq\vec p'} n_{\vec p} - (N-n_{\vec p'}-l)\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} y_l \sum_{\vec p'} e^{-\beta l \varepsilon_{\vec p'}} \sum_{\{n_{\vec p}\}} \delta\left(\sum_{\vec p} n_{\vec p} - (N-l)\right) G(\{n_{\vec p}\})\, e^{-\beta \sum_{\vec p} \varepsilon_{\vec p} n_{\vec p}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \omega_l\, \mathcal{Q}_{N-l}. \qquad (8)\end{aligned}$$

Воспользовавшись алгебраическим методом суммирования (5) - (8) получаем следующее представление для средних чисел заполнения

$$\begin{aligned}\langle n_{\vec p}\rangle_N &= \frac{1}{\mathcal{Q}_N} \sum_{\{n_{\vec p}\}} \delta\left(\sum_{\vec p} n_{\vec p} - N\right) n_{\vec p}\, G(\{n_{\vec p}\})\, e^{-\beta \sum_{\vec p} \varepsilon_{\vec p} n_{\vec p}} = \\ &= \frac{1}{\mathcal{Q}_N} \sum_{k=1}^{N} y_k\, e^{-\beta k \varepsilon_{\vec p}}\, \mathcal{Q}_{N-k}. \qquad (9)\end{aligned}$$

Второй момент чисел заполнения принимает такой вид:

$$\langle n_{\vec{p}} n_{\vec{p}'} \rangle_N = \frac{1}{Q_N} \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} \delta \left(\sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}} - N \right) \; n_{\vec{p}} \, n_{\vec{p}'} \; G(\{n_{\vec{p}}\}) \; e^{-\beta \sum_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}}} =$$

$$= \frac{1}{Q_N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N-i} \; y_i \, y_j \; e^{-\beta i \varepsilon_{\vec{p}}} \; e^{-\beta j \varepsilon_{\vec{p}'}} \; Q_{N-i-j} +$$

$$+ \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \; \frac{1}{Q_N} \sum_{j=1}^{N} \; y_j \; e^{-\beta j \varepsilon_{\vec{p}}} \; j \; Q_{N-j}. \tag{10}$$

Нетрудно показать, что путем последовательной подстановки в рекуррентные уравнения (3) статистическая сумма Q_N получается в виде суммы с мультиномиальными коэффициентами [5,16]

$$Q_N = \sum_{\{n_k\}} \delta \left(\sum_{k=1}^{N} k n_k - N \right) \prod_{k=1}^{N} \frac{\omega_k^{n_k}}{k^{n_k} n_k!}. \tag{11}$$

Сумма (11) берется по всем неотрицательным целым числам от n_1 до n_N таким, что $N = n_1 + 2n_2 + \ldots + N n_N$, или, что то же самое, по всем разбиениям числа N, или по всем цикловым классам $(n_1, \ldots, n_N)$ перестановок N элементов. В комбинаторном анализе мультиномиальный коэффициент

$$C(N, \{n_k\}) = \frac{N!}{\prod_{k=1}^{N} k^{n_k} n_k!} \tag{12}$$

представляет собой число перестановок из N элементов класса $(n_1, \ldots, n_N)$. Перестановка N символов описывается симметрической группой S_N, которая имеет $N!$ элементов. При представлении перестановок в виде циклов число цикловых классов равно числу неприводимых представлений группы S_N [17,18]. Производящая функция $N! Q_N(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ чисел $C(N, \{n_k\})$ носит название циклового индикатора симметрической группы S_N [5].

Определим статистическую сумму для большого канонического ансамбля. Ввиду (11) большую статистическую сумму можно записать в форме

$$Q^{GC}(\lambda) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N Q_N = e^{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \omega_k \lambda^k}, \tag{13}$$

где $\lambda = e^{\beta\mu}$, μ – химический потенциал.

Отметим, что статистическая сумма Q_N, выраженная в терминах $x_{\vec{p}} = e^{-\beta \varepsilon_{\vec{p}}}$, в случае статистики Бозе – Эйнштейна является полностью симметрической функцией, а в случае статистики Ферми – Дирака – элементарной симметрической функцией [19,20].

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯДЕРНОЙ МУЛЬТИФРАГМЕНТАЦИИ С ТОЧНЫМ СОХРАНЕНИЕМ БАРИОННОГО ЗАРЯДА СИСТЕМЫ

Для модели ядерной мультифрагментации с законом сохранения барионного заряда, в случае когда фрагменты подчиняются квантовой статистике либо классической статистике или парастатистике, статистическая сумма системы и ее рекуррентные уравнения представляются в следующем виде [9]

$$\mathcal{Q}_A = \sum_{\{N_{k\vec{p}}\}} \delta\left(\sum_{k=1}^{A}\sum_{\vec{p}} k\ N_{k\vec{p}} - A\right)\ G(\{N_{k\vec{p}}\})\ e^{-\beta\sum_{k\vec{p}} E_{k\vec{p}} N_{k\vec{p}}} = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{A}\sum_{\mu=1}^{[A/k]} k\ \omega_{k\mu}\ \mathcal{Q}_{A-k\mu} = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{A} \omega_k\ \mathcal{Q}_{A-k}, \tag{16}$$

где $\mathcal{Q}_0 = 1$, $[A/k]$ – максимально возможное число фрагментов сорта k. Допустимы следующие значения для чисел заполнения $N_{k\vec{p}}$:

$$N_{k\vec{p}} = 0, 1, 2, \ldots, K_k, \tag{17}$$

где целое число $K_k = [A/k]$ для статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Максвелла – Больцмана, $K_k = 1$ для статистики Ферми – Дирака и $1 < K_k < [A/k]$ для парастатистики. Число состояний системы, соответствующих $\{N_{k\vec{p}}\}$, есть $G(\{N_{k\vec{p}}\}) = 1$ для парастатистики, статистики Ферми – Дирака и статистики Бозе – Эйнштейна, и $G(\{N_{k\vec{p}}\}) = (1/N!)N!/\prod_{\vec{p}} N_{k\vec{p}}!$ для статистики Максвелла – Больцмана. Энергия фрагмента равна $E_{k\vec{p}} = \vec{p}^2/2m_k + B_k + \triangle E_k$, где B_k – энергия связи фрагмента сорта k, $\triangle E_k$ – энергия взаимодействия фрагмента со средним полем. Переменные $\omega_{k\mu}$ и ω_k выражаются в такой форме

$$\omega_{k\mu} = y_{k\mu} \sum_{\vec{p}} e^{-\beta\mu E_{k\vec{p}}}, \tag{18}$$

$$\omega_k = \sum_{l=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} \delta_{k,l\mu}\ l\ y_{l\mu} \sum_{\vec{p}} e^{-\beta\mu E_{l\vec{p}}} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} \delta_{k,l\mu}\ l\ \omega_{l\mu}. \tag{19}$$

Для статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Ферми – Дирака $y_{k\mu} = (\mp 1)^{\mu+1}$. Для статистики Максвелла – Больцмана $y_{k\mu} = \delta_{\mu,1}$ и для парастатистики $y_{k\mu} = 1 - (K_k + 1)\ \delta(\mu/(K_k+1) - [\mu/(K_k+1)])$.

Рекуррентные уравнения (15) для статистической суммы (14) получены на основе следующего тождественного уравнения, справедливость которого можно проверить непосредственной подстановкой (ср. с (5))

$$\sum_{N_{k\vec{p}}=0}^{K_k} N_{k\vec{p}}\ G(N_{k\vec{p}})\ x^{N_{k\vec{p}}}\ \Phi(A - kN_{k\vec{p}}) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{[A/k]} y_{k\mu}\ x^{\mu} \sum_{N_{k\vec{p}}=0}^{\min([A/k]-\mu, K_k)} G(N_{k\vec{p}})\ x^{N_{k\vec{p}}}\ \Phi(A - kN_{k\vec{p}} - k\mu). \tag{20}$$

Вывод рекуррентных уравнений (15) приведен в Приложении (ср. с (6) – (8)).

Среднее от оператора O по полному ансамблю системы определяется в методе канонического ансамбля следующим образом:

$$\langle O\rangle_A = \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\{N_{k\vec{p}}\}}\delta\left(\sum_{k=1}^{A}\sum_{\vec{p}} k\ N_{k\vec{p}} - A\right) O(\{N_{k\vec{p}}\})\ G(\{N_{k\vec{p}}\})\ e^{-\beta\sum_{k\vec{p}} E_{k\vec{p}}N_{k\vec{p}}}. \tag{21}$$

На основе тождественного уравнения (20) и алгебраического метода суммирования статистической суммы (см. Приложение) можно вычислить любое среднее по ансамблю. В частности, для средних чисел заполнения и их второго момента получаются выражения вида

$$\langle N_{k\vec{p}}\rangle_A = \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\mu=1}^{[A/k]} y_{k\mu}\ e^{-\beta\mu E_{k\vec{p}}}\ \mathcal{Q}_{A-k\mu}, \tag{22}$$

$$\langle N_{i\vec{p}}N_{j\vec{p}'}\rangle_A = \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\mu,\nu} y_{i\mu}\ y_{j\nu}\ e^{-\beta\mu E_{i\vec{p}}}\ e^{-\beta\nu E_{j\vec{p}'}}\ \mathcal{Q}_{A-i\mu-j\nu} + \\ +\delta_{ij}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\ \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\mu} y_{i\mu}\ e^{-\beta\mu E_{i\vec{p}}}\ \mu\ \mathcal{Q}_{A-i\mu}. \tag{23}$$

Если средние числа заполнения в (22) просуммировать по всем значениям импульса $\vec{p}$, то для среднего числа фрагментов сорта k в системе из A нуклонов получим представление через статистические суммы меньшей системы

$$\langle N_k\rangle_A = \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\mu=1}^{[A/k]} \omega_{k\mu}\ \mathcal{Q}_{A-k\mu}. \tag{24}$$

Второй момент среднего числа фрагментов получается путем суммирования по всем состояниям $\vec{p}, \vec{p}'$ второго момента чисел заполнения (23)

$$\langle N_iN_j\rangle_A = \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\mu,\nu} \omega_{i\mu}\ \omega_{j\nu}\ \mathcal{Q}_{A-i\mu-j\nu} + \delta_{ij}\ \frac{1}{\mathcal{Q}_A}\sum_{\mu=1}^{[A/i]} \omega_{i\mu}\ \mu\ \mathcal{Q}_{A-i\mu}. \tag{25}$$

Нетрудно показать, что путем последовательной подстановки в рекуррентные уравнения (16) статистическая сумма $\mathcal{Q}_A$ получается в виде суммы

$$\mathcal{Q}_A = \sum_{\{N_k\}}\delta\left(\sum_{k=1}^{A} kN_k - A\right)\prod_{k=1}^{A}\frac{\omega_k^{N_k}}{k^{N_k}N_k!}. \tag{26}$$

Сумма (26) отличается от выражения (11) лишь заменой N на A и явным видом функций ω_k. Статистическая сумма $A!\mathcal{Q}_A(\omega_1,\ldots,\omega_A)$ является цикловым индикатором симметрической группы S_A или производящей функцией мультиномиальных коэффициентов $C(A,\{N_k\})$ (12). Отметим, что в предельном случае $y_{k\mu} \to \delta_{k,1}y_{k\mu}$ все проинтегрированные выражения статистической модели ядерной мультифрагментации принимают вид, соответствующий идеальному газу N тождественных частиц.

Большая статистическая сумма $\mathcal{Q}^{GC}(\lambda)$ выражается в форме (13) с функциями ω_k из (18) и (19). Используя интегральное представление для символа Кронекера вида

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\ e^{\imath\phi(\sum_k kN_k - A)} = \delta\left(\sum_k kN_k - A\right), \tag{27}$$

для статистической суммы (26) получаем следующее выражение

$$\mathcal{Q}_A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\ e^{-\imath\phi A}\tilde{\mathcal{Q}}(\phi), \tag{28}$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\phi) \equiv \mathcal{Q}^{GC}(\lambda \to e^{\imath\phi}) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\omega_k e^{\imath\phi k}}, \tag{29}$$

где $\phi \in [0, 2\pi]$ – параметр группы $U(1)$. Такой метод вычисления статистической суммы $\mathcal{Q}_A$ является частным случаем более общего группового метода, применяющегося к системам с любой внутренней симметрией, представленной полупростой алгеброй Ли [21,22]. Отметим, что сохранение N числа частиц для идеального газа соответствует $U(1)$ – симметрии [19].

4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯДЕРНОЙ МУЛЬТИФРАГМЕНТАЦИИ С ТОЧНЫМ СОХРАНЕНИЕМ БАРИОННОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДОВ СИСТЕМЫ

В рамках равновесной статистической механики в каноническом ансамбле сформулируем статистическую модель ядерной мультифрагментации с точным учетом законов сохранения барионного и электрического зарядов с квантовой статистикой, классической статистикой или парастатистикой фрагментов. Пусть задана ядерная система (A, Z), размещенная в объеме V при температуре T. Сорт фрагмента (частицы) задается двумя целыми числами (k, l), где k – число нуклонов, l – число протонов и $k - l$ – число нейтронов. Для ядерной системы (A, Z) числа k, l фиксируют определенный сорт фрагмента и принимают следующие значения $l = 0, 1, \ldots, Z, k = l, l+1, \ldots, A - Z + l, k \neq 0$. Полное число разрешенных сортов фрагментов системы (A, Z) равно $\mathcal{N}_{AZ} = (A-Z+1)(Z+1)-1 = (A-Z)Z+A$. Состояние фрагмента сорта (k, l) фиксируется набором квантовых чисел $\underline{\mathrm{a}} = (\xi, \vec{p}, I_z)$, где ξ – номер уровня внутреннего возбуждения фрагмента сорта (k, l), $\vec{p}$ – его импульс и I_z – проекция спина на ось z для фрагмента сорта (k, l) на уровне внутреннего возбуждения ξ. Квантовые числа из набора $\underline{\mathrm{a}}$ принимают следующие значения

$$\begin{aligned} &\xi = 0, 1, 2, \ldots, \\ &p^{(\alpha)} = \Delta p^{(\alpha)} n^{(\alpha)},\ n^{(\alpha)} = 0, \pm 1, \ldots,\ \alpha = x, y, z,\ \Delta p^{(\alpha)} = \frac{2\pi\hbar}{L}, \\ &I_z = -S_{kl\xi}, \ldots, S_{kl\xi}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $\xi = 0$ соответствует уровню основного состояния фрагмента сорта (k, l), $\xi = 1$ первому возбужденному уровню и.т.д., $L = V^{1/3}$, а $S_{kl\xi}$ – спин фрагмента сорта (k, l) с внутренним возбуждением на уровне ξ.

Микросостояние системы задается набором чисел заполнения $\{N_{kl\underline{\mathbf{a}}}\}$ одночастичных состояний фрагментов $\{kl\underline{\mathbf{a}}\}$. Число $N_{kl\underline{\mathbf{a}}}$ представляет собой число фрагментов сорта (k,l) в состоянии $\underline{\mathbf{a}}$. Энергия микросостояния системы задается в следующем виде

$$E = \sum_{kl\underline{\mathbf{a}}} N_{kl\underline{\mathbf{a}}} E_{kl\underline{\mathbf{a}}}, \tag{31}$$

$$E_{kl\underline{\mathbf{a}}} = \frac{\vec{p}^2}{2m_{kl}} + B_{kl} + E^*_{kl\xi} + \triangle E_{kl}, \tag{32}$$

где $m_{kl} = (k-l)m_n + lm_p \simeq km$ – масса фрагмента из $k-l$ нейтронов массы m_n и l протонов массы m_p; m – масса нуклона; B_{kl} – энергия связи фрагмента сорта (k,l); $E^*_{kl\xi}$ – энергия его внутреннего возбуждения на уровне ξ; $\triangle E_{kl}$ – энергия взаимодействия фрагмента со средним полем.

Набор чисел заполнения $\{N_{kl\underline{\mathbf{a}}}\}$ должен удовлетворять законам сохранения барионного A и электрического Z зарядов ядерной системы

$$\sum_{l=0}^{Z} \sum_{k=l,k\neq 0}^{A-Z+l} \sum_{\underline{\mathbf{a}}} kN_{kl\underline{\mathbf{a}}} = A, \tag{33}$$

$$\sum_{l=0}^{Z} \sum_{k=l,k\neq 0}^{A-Z+l} \sum_{\underline{\mathbf{a}}} lN_{kl\underline{\mathbf{a}}} = Z. \tag{34}$$

Максимально возможное число фрагментов $\tilde{N}_{kl}$ сорта (k,l) в системе (A,Z) вычисляется в виде

$$\tilde{N}_{kl} = \begin{cases} \left[\frac{A-Z}{k-l}\right], & l = 0, \\ \left[\frac{Z}{l}\right], & k = l \neq 0, \\ \min\left(\left[\frac{Z}{l}\right], \left[\frac{A-Z}{k-l}\right]\right), & k \neq l \neq 0. \end{cases} \tag{35}$$

Числа заполнения для каждого сорта (k,l) принимают следующие значения

$$N_{kl\underline{\mathbf{a}}} = 0, 1, \ldots, K_{kl}. \tag{36}$$

Для статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Максвелла – Больцмана $K_{kl} = \tilde{N}_{kl}$. Для статистики Ферми – Дирака $K_{kl} = 1$ и для парастатистики $1 < K_{kl} < \tilde{N}_{kl}$.

Статистическая сумма модели в представлении чисел заполнения имеет вид

$$Q_{A,Z} = \sum_{\{N_{kl\underline{\mathbf{a}}}\}} \delta\left(\sum_{kl\underline{\mathbf{a}}} kN_{kl\underline{\mathbf{a}}} - A\right) \delta\left(\sum_{kl\underline{\mathbf{a}}} lN_{kl\underline{\mathbf{a}}} - Z\right) G(\{N_{kl\underline{\mathbf{a}}}\}) e^{-\beta \sum_{kl\underline{\mathbf{a}}} E_{kl\underline{\mathbf{a}}} N_{kl\underline{\mathbf{a}}}}. \tag{37}$$

Для парастатистики, статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Ферми – Дирака $G(\{N_{kl\underline{\mathbf{a}}}\}) = 1$, а для статистики Максвелла – Больцмана $G(\{N_{kl\underline{\mathbf{a}}}\}) = (1/A!)A!/\prod_{kl\underline{\mathbf{a}}} N_{kl\underline{\mathbf{a}}}!$.

Нетрудно показать, что для статистической суммы (37) выполняются следующие рекуррентные уравнения

Приведем некоторые наиболее важные средние по ансамблю, такие, как средние числа заполнения, среднее число фрагментов и их моменты. Для вычисления средних чисел заполнения в формуле (44) подставляем оператор $\mathcal{O}\{N_{kl\underline{a}}\} = N_{kl\underline{a}}$, что дает

$$\langle N_{kl\underline{a}} \rangle_{A,Z} = \frac{1}{\mathcal{Q}_{A,Z}} \sum_{\mu=1}^{\tilde{N}_{kl}} y_{kl\underline{a}\mu} \; e^{-\beta\mu E_{kl\underline{a}}} \; \mathcal{Q}_{A-k\mu,Z-l\mu}. \tag{45}$$

Для вычисления второго момента чисел заполнения в формуле (44) подставляем оператор $\mathcal{O}\{N_{kl\underline{a}}\} = N_{kl\underline{a}} N_{ij\underline{b}}$, что приводит к соотношению

$$\langle N_{kl\underline{a}} N_{ij\underline{b}} \rangle_{A,Z} = \frac{1}{\mathcal{Q}_{A,Z}} \sum_{\mu,\nu} y_{kl\underline{a}\mu} y_{ij\underline{b}\nu} e^{-\beta\mu E_{kl\underline{a}}} e^{-\beta\nu E_{ij\underline{b}}} \; \mathcal{Q}_{A-k\mu-i\nu,Z-l\mu-j\nu} +$$
$$+\delta_{k,i}\delta_{l,j}\delta_{\underline{a},\underline{b}} \frac{1}{\mathcal{Q}_{A,Z}} \sum_{\mu=1}^{\tilde{N}_{kl}} \mu \; y_{kl\underline{a}\mu} \; e^{-\beta\mu E_{kl\underline{a}}} \; \mathcal{Q}_{A-k\mu,Z-l\mu}. \tag{46}$$

Выражение для среднего числа фрагментов сорта (k,l) получается как результат суммирования средних чисел заполнения (45) по всем состояниям

$$\langle N_{kl} \rangle_{A,Z} = \frac{1}{\mathcal{Q}_{A,Z}} \sum_{\mu=1}^{\tilde{N}_{kl}} \omega_{kl\mu} \mathcal{Q}_{A-k\mu,Z-l\mu}. \tag{47}$$

Величина $\omega_{kl\mu}$ вычисляется по формуле (41). Второй момент среднего числа фрагментов получается суммированием по всем состояниям $\underline{a}, \underline{b}$ второго момента чисел заполнения (46)

$$\langle N_{kl} N_{ij} \rangle_{A,Z} = \frac{1}{\mathcal{Q}_{A,Z}} \sum_{\mu,\nu} \omega_{kl\mu} \omega_{ij\nu} \; \mathcal{Q}_{A-k\mu-i\nu,Z-l\mu-j\nu} +$$
$$+\delta_{k,i}\delta_{l,j} \frac{1}{\mathcal{Q}_{A,Z}} \sum_{\mu=1}^{\tilde{N}_{kl}} \mu \; \omega_{kl\mu} \; \mathcal{Q}_{A-k\mu,Z-l\mu}. \tag{48}$$

Конкретные вычисления статистической суммы $\mathcal{Q}_{A,Z}$ и средних по ансамблю производятся путем интегрирования выражений (40) и (41) с определенным видом энергий фрагментов (32) [9,14].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на примере идеального газа N тождественных частиц в каноническом ансамбле сформулирован новый метод вывода рекуррентных уравнений для статистической суммы системы со статистикой частиц Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака, Максвелла – Больцмана и парастатистикой в представлении чисел заполнения. Показано, что статистическая сумма системы для всех четырех типов статистики частиц приводится к хорошо известной в комбинаторном анализе сумме с мультиномиальными коэффициентами [5], в которой переменные $y_l = (\mp 1)^{l+1}$ для статистики Ферми – Дирака и статистики Бозе – Эйнштейна, $y_l = \delta_{l,1}$ для статистики Максвелла – Больцмана и

$y_l = 1 - (K+1)\ \delta(l/(K+1) - [l/(K+1)])$ для парастатистики. Статистическая сумма модели ядерной мультифрагментации с сохранением барионного заряда также приводится к сумме с мультиномиальными коэффициентами, в которой имеем следующие переменные $y_{k\mu} = (\mp 1)^{\mu+1}$ для статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Ферми – Дирака, $y_{k\mu} = \delta_{\mu,1}$ для статистики Максвелла – Больцмана и $y_{k\mu} = 1 - (K_k+1)\ \delta(\mu/(K_k+1) - [\mu/(K_k+1)])$ для парастатистики. Показано, что производящая функция $\mathcal{Q}_A(\omega_1, \ldots, \omega_A)$ мультиномиальных коэффициентов $C(A, \{N_k\})$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям (16) вне зависимости от статистики фрагментов (частиц). Сохраняющийся барионный заряд в статистической модели ядерной мультифрагментации обладает групповыми свойствами [21,22].

Построена точно решаемая статистическая модель ядерной мультифрагментации с учетом законов сохранения барионного и электрического зарядов. Найдена система рекуррентных уравнений для точного расчета статистической суммы со всеми четырьмя статистиками, Ферми – Дирака, Бозе – Эйнштейна, Максвелла – Больцмана и парастатистикой. Даны рекурсивные формулы для некоторых средних по ансамблю. Такая модель может быть использована для расчета различных характеристик, описывающих явление ядерной мультифрагментации.

Следует отметить, что разработанный метод вывода рекуррентных уравнений может быть использован в статистических моделях, описывающих выход частиц в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ионов.

ПРИЛОЖЕНИЕ: РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Докажем справедливость рекуррентной формулы (15). Для этого в выражение (14) для статистической суммы $\mathcal{Q}_A$, в силу закона сохранения барионного A заряда системы, введем единицу вида $1 = \sum_{i\vec{p}} i N_{i\vec{p}}/A$,

$$\mathcal{Q}_A = \frac{1}{A} \sum_{i\vec{p}'} i \sum_{\{N_{k\vec{p}}\}} \delta\left(\sum_{k\vec{p}} k N_{k\vec{p}} - A\right) N_{i\vec{p}'}\ G(\{N_{k\vec{p}}\})\ e^{-\beta \sum_{k\vec{p}} E_{k\vec{p}} N_{k\vec{p}}}. \tag{49}$$

Замечаем, что сумма по $N_{i\vec{p}'}$ совпадает с левой частью тождественного уравнения (20), если переменные $x = e^{-\beta E_{i\vec{p}'}}$ и $\Phi(A - iN_{i\vec{p}'}) = \delta\left(\sum_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'} k N_{k\vec{p}} - (A - iN_{i\vec{p}'})\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_A = \frac{1}{A} \sum_{i\vec{p}'} i \sum_{\{N_{k\vec{p}}\}_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'}} G(\{N_{k\vec{p}}\}_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'})\ e^{-\beta \sum_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'} E_{k\vec{p}} N_{k\vec{p}}} \times \\ \times \sum_{N_{i\vec{p}'}=0}^{K_i} N_{i\vec{p}'}\ G(N_{i\vec{p}'})\ e^{-\beta E_{i\vec{p}'} N_{i\vec{p}'}}\ \delta\left(\sum_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'} k N_{k\vec{p}} - (A - iN_{i\vec{p}'})\right).\end{aligned} \tag{50}$$

Используя тождественное уравнение (20), получаем

$$\mathcal{Q}_A = \frac{1}{A} \sum_{i\vec{p}'} i \sum_{\{N_{k\vec{p}}\}_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'}} G(\{N_{k\vec{p}}\}_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'})\ e^{-\beta \sum_{k\neq i, \vec{p}\neq\vec{p}'} E_{k\vec{p}} N_{k\vec{p}}} \sum_{\mu=1}^{[A/i]} y_{i\mu}\ e^{-\beta\mu E_{i\vec{p}'}} \times$$

$$\times \sum_{N_{i\vec{p}'}=0}^{\min([A/i]-\mu,K_i)} G(N_{i\vec{p}'})\, e^{-\beta E_{i\vec{p}'} N_{i\vec{p}'}}\, \delta\left(\sum_{k\neq i,\vec{p}\neq\vec{p}'} kN_{k\vec{p}} - (A - iN_{i\vec{p}'} - i\mu)\right). \quad (51)$$

Переставляя суммы по числам заполнения и переменной суммирования μ, а также используя определение (14), окончательно имеем рекуррентные уравнения (15)

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_A &= \frac{1}{A}\sum_i i \sum_{\mu=1}^{[A/i]} y_{i\mu} \sum_{\vec{p}'} e^{-\beta\mu E_{i\vec{p}'}} \times \\
&\times \sum_{\{N_{k\vec{p}}\}} \delta\left(\sum_{k\vec{p}} N_{k\vec{p}} - (A - i\mu)\right) G(\{N_{k\vec{p}}\})\, e^{-\beta\sum_{k\vec{p}} E_{k\vec{p}} N_{k\vec{p}}} = \\
&= \frac{1}{A}\sum_i \sum_{\mu=1}^{[A/i]} i\omega_{i\mu}\, \mathcal{Q}_{A-i\mu}. \qquad (52)
\end{aligned}$$

Благодарности. Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.Д. Тонеева, М. Плосжайчика (M. Płoszajczak) и К.К. Гудиму за исключительно полезные обсуждения, а также В.В. Ужинского и Ю.Б.Иванова за полезные замечания.

Список литературы

[1] J.P. Bondorf, A.S. Botvina, A.S. Iljinov, I.N. Mishustin and K. Sneppen. Phys. Rep. 1995. V. 257. P. 133.

[2] D.H.E. Gross. Rep. Prog. Phys. 1990. V. 53. P. 605.

[3] R. Hagedorn and K. Redlich. Z. Phys. C. 1985. V. 27. P. 541-551.

[4] J. Cleymans, H. Oeshler, K. Redlich. Phys. Rev. C. 1999. V. 59. P. 1663.

[5] Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд. ин. лит., 1963.

[6] P.T. Landsberg. Thermodynamics. Interscience, New York, 1961.

[7] P. Borrmann, G. Franke. J. Chem. Phys. 1993. V. 98. P. 2484.

[8] H.-J. Schmidt and J. Schnack. Physica A. 1998. V. 260. P. 479.

[9] A.S. Parvan, V.D. Toneev, M. Płoszajczak. Nucl. Phys. A. 2000. V. 676. P. 409-451.

[10] K.C. Chase and A.Z. Mekjian. Phys. Rev. C. 1995. V. 52. P. R2339.

[11] S. Das Gupta and A.Z. Mekjian. Phys. Rev. C. 1998. V. 57. P. 1361.

[12] K.C. Chase and A.Z. Mekjian. Phys. Rev. C. 1994. V. 50. P. 2078.

[13] S. Pratt and S. Das Gupta. Phys. Rev. C. 2000. V. 62. P. 044603.

[14] А.С. Парван, В.Д. Тонеев, К.К. Гудима. ЯФ. 1999. Т. 62. С. 1593-1604.

[15] P. Bhattacharyya, S. Das Gupta, and A.Z. Mekjian. Phys. Rev. C. 1999. V. 60. P. 054616; ibid. P. 064625.

[16] К. Хуанг. Статистическая механика. М.: Мир, 1966.

[17] М. Хамермеш. Теория групп и ее применения к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.

[18] A.Z. Mekjian and S.J. Lee. Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 6294.

[19] A.B. Balantekin. Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 066105.

[20] H.-J. Schmidt and J. Schnack. Am. J. Phys. 2002. V. 70. P. 53.

[21] F. Cerulus. Nuovo Cimento. 1961. V. 19. P. 528.

[22] K. Redlich and L. Turko. Z. Phys. C. 1980. V. 5. P. 201.

Получено 20 декабря 2002 г.

Парван А. С. P4-2002-286
Алгебраический метод точного решения статистической суммы для канонического ансамбля в ядерной мультифрагментации

Найден единый метод вывода рекуррентных уравнений для статистической суммы системы невзаимодействующих частиц с сохраняющимися зарядами в случае, когда частицы подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, статистике Ферми–Дирака, статистике Максвелла–Больцмана или парастатистике. Получены рекурсивные соотношения для статистической суммы новой статистической модели ядерной мультифрагментации с сохраняющимися барионным и электрическим зарядами с квантовой статистикой и парастатистикой, при учете внутренних степеней свободы ядерных фрагментов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Parvan A. S. P4-2002-286
Algebraic Method for Exact Solution of Canonical Partition Function in Nuclear Multifragmentation

An algebraic method for the exact recursion formula for the calculation of canonical partition function of non-interacting finite systems of particles obeying Bose–Einstein, Fermi–Dirac, Maxwell–Boltzmann statistics or parastatistics is derived. A new exactly solvable multifragmentation model with baryon and electric charge conservation laws is developed. Recursion relations for this model are presented that allow exact calculation of canonical partition function for any statistics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 12.02.2003.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,87. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 350 экз. Заказ № 53762.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/