

P11-2002-291

П. Г. Акишин

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧИСЛЕННОЙ
МНОГОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ДЛЯ БЫСТРОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

1. Введение

Один из основных методов изучения ядерной материи в экспериментальной физике основан на эффекте отклонения от прямой орбиты под действием силы Лоренца движущихся в магнитном поле заряженных частиц. С использованием статистических методов на основе измерений этих отклонений и учета уравнений движения удается определить основные параметры взаимодействующих частиц. В данной работе рассматриваются математические вопросы, связанные с одним из наиболее трудоемких моментов проблемы распознавания треков в неоднородных магнитных полях - численным интегрированием уравнений движения. Прежде всего для этого необходимо знать величину магнитного поля в любой точке рабочей области экспериментальной установки. Для аппроксимации магнитного поля наиболее часто используются два подхода. В первом подходе поле задается в узлах некоторой прямоугольной сетки. Для продолжения поля обычно используются линейные по каждой пространственной переменной функции. Этот метод имеет достаточно хорошие характеристики по быстродействию, но предъявляет повышенные требования к оперативной памяти используемого для расчетов компьютера для хранения базы данных. В другом подходе для аппроксимации магнитного поля в отдельных подобластях используется разложение поля по неким базисным функциям. Этот метод позволяет вычислять производные поля высокого порядка в подобласти, но при этом приближения поля терпят разрыв при переходе из одной подобласти в другую. При сильной нелинейности поля качество аппроксимации для этого метода также сильно зависит от числа используемых базисных функций и, как следствие, от оперативной памяти компьютера. Для аппроксимации магнитного поля в данной работе используются кубические сплайн-функции от трех переменных. Все численные методы интегрирования уравнений движения высокого порядка точности предполагают существование производных поля соответствующего порядка. Иначе эти методы не обеспечивают декларированную точность вычислений. Используемый в работе подход обеспечивает существование смешанных производных всех компонент поля до третьего порядка по каждой пространственной переменной. Особенности применения метода для аппроксимации магнитного поля в сложных областях иллюстрируются во втором разделе на примере эксперимента ALICE [1]. В третьем разделе проводится анализ эффективности различных численных методов решения уравнений движения заряженных частиц с использованием построенной трехмерной сплайн-аппроксимации магнитного поля. Оценка параметров трека по экспериментальным данным приводит к минимизации функционалов, зависящих от результатов решения уравнений движения. В экспериментах, как правило, измеряются приближенные значения координат частиц в некоторых плоскостях детекторов. Как следствие, при обработке экспериментальной информации необходимо знать только результат движения заряженной частицы в магнитном поле с плоскости детекторов до следующей плоскости. Таким образом можно определить операторы трансформации координат и импульса частицы при движении с одной плоскости детекторов до следующей. На примере эксперимента ALICE в четвертом и пятом разделах рассматриваются попытки численной аппроксимации подобных операторов. Предложенные методы позволяют не только существенно сократить вычислительные затраты на получение

результатов решения уравнений движения, но также одновременно вычислять производные этих операторов как функции фитируемых параметров. Последний факт очень важен при использовании эффективных методов минимизации: градиентный спуск, метод Ньютона и другие дифференциальные методы минимизации.

2. Трехмерная сплайн-аппроксимация магнитного поля

Проблема фитирования треков в физике высоких энергий непосредственно связана с необходимостью многократного решения уравнений движения заряженных частиц в магнитном поле [2], [3]. Как правило, на практике в экспериментах мы имеем дело с неоднородным магнитным полем, полученным в результате измерений и заданным на некотором множестве точек. Для построения непрерывного продолжения поля обычно используют кусочно-линейную аппроксимацию по каждой переменной, так называемые трилинейные функции формы. Но эти приближения не обладают не только производными высших порядков по пространственным переменным, но даже производными первого порядка. Наличие производных магнитного поля высших порядков существенно влияет на качество решения уравнений движения, особенно в случае использования для этих целей методов типа Рунге-Кутты высокого порядка точности. На примере эксперимента ALICE в данном разделе мы рассмотрим один из возможных методов построения трехмерных дифференцируемых приближений магнитного поля.

В случае эксперимента ALICE мы разобьем рабочую область на три независимые подобласти. Первая подобласть соответствует дипольному магниту ($z \in [7.145, 14.8]$). Вторая подобласть связана с дверями магнита $L3$ ($z \in [6.185, 7.145]$). Третья подобласть локализована внутри магнита $L3$ ($z \in [0, 6.185]$). В каждой из подобластей для описания геометрии мы будем использовать собственную систему координат. Пусть ψ_a есть угол между лучом, соединяющим точку $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ с точкой $\mathbf{b} = (0, y_a, 0)$, и плоскостью Oyz . Имеем

$$x_a = \tan(\psi_a)z_a .$$

Точка $\hat{\mathbf{a}} = (\psi_a, y_a, z_a)$ принадлежит прямоугольной области $\Omega_1 = \left[-\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{20}\right] \times [-2.85, 3.45] \times [7.12, 14.8]$. Для описания геометрии второй подобласти используется коническая система координат с центром в точке $O_c = (0, 0.3, 0)$:

$$x_a = \tan(\theta_a) \cos(\phi_a)z_a , \quad y_a = \tan(\theta_a) \sin(\phi_a)z_a + 0.3 .$$

Точка $\hat{\mathbf{a}} = (\theta_a, \phi_a, z_a)$ принадлежит прямоугольной области $\Omega_2 = \left[0, \frac{\pi}{20}\right] \times [0, 2\pi] \times [6.185, 7.145]$. Для третьей подобласти мы используем цилиндрическую систему координат:

$$x_a = r_a \cos(\phi_a), \quad y_a = r_a \sin(\phi_a) + 0.3 .$$

Точка $\hat{\mathbf{a}} = (r_a, \phi_a, z_a)$ принадлежит прямоугольной области $\Omega_3 = [0, 1.6] \times [0, 2\pi] \times [0, 6.185]$. Отметим, что подобным выбором переменных нам удалось отобразить все три подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ сложной формы в параллелепипеды.

Рассмотрим общую проблему трехмерной сплайн-аппроксимации для некоторой функции $f(u, v, t)$ в параллелепипеде $\Omega = [U_1, U_2] \times [V_1, V_2] \times [T_1, T_2]$. Ниже мы

применяем алгоритм построения кубической сплайн-интерполяции функций двух переменных из [4] для аппроксимации функций трех переменных. Пусть $\{u_k, k = \overline{0, K}\}$, $\{v_l, l = \overline{0, L}\}$, $\{t_m, m = \overline{0, M}\}$ есть некий набор узлов для переменных u, v, t . Мы предполагаем, что

$$u_k < u_{k+1}, \quad v_l < v_{l+1}, \quad t_m < t_{m+1};$$

и

$$u_0 = U_1, \quad u_K = U_2, \quad v_0 = V_1, \quad v_L = V_2, \quad t_0 = T_1, \quad t_M = T_2 \quad .$$

Пусть $\{f^{k,l,m}\}$ есть

$$f^{k,l,m} = f(u_k, v_l, t_m), \quad k = \overline{0, K}, \quad l = \overline{0, L}, \quad m = \overline{0, M} \quad .$$

Процесс построения сплайн-аппроксимации состоит из трех шагов. На первом шаге мы построим $L \times M$ одномерных кубических сплайн-функций $\tilde{f}^{l_0, m_0}(u)$ для всех $\{l_0, m_0, l_0 = \overline{0, L}, m_0 = \overline{0, M}\}$ на основе $\{f^{k, l_0, m_0}, u_k, k = \overline{0, K}\}$. В качестве дополнительных краевых условий мы используем равенство вторых производных сплайна на концах интервала их конечно-разностным аналогам. После этого на каждом интервале $[u_{k_0}, u_{k_0+1}]$ функция $\tilde{f}^{l_0, m_0}(u)$ равна

$$\tilde{f}^{l_0, m_0}(u) = a_0^{k_0, l_0, m_0} + u a_1^{k_0, l_0, m_0} + u^2 a_2^{k_0, l_0, m_0} + u^3 a_3^{k_0, l_0, m_0} \quad .$$

Следует отметить, что функция $\tilde{f}^{l_0, m_0}(u)$ имеет непрерывные первые и вторые производные по переменной u и кусочно-непрерывную третью производную. После первого шага мы проводим аналогичную процедуру для переменной v . Для всех $\{k_0, m_0, i, k_0 = \overline{0, K}, m_0 = \overline{0, M}, i = \overline{0, 3}\}$ на основе $\{a_i^{k_0, l, m_0}, v_l, l = \overline{0, L}\}$ мы получаем набор коэффициентов $\{b_{i,j}^{k_0, l_0, m_0}, i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 3}\}$. Для всех $\{m_0 = \overline{0, M}\}$ на каждом прямоугольнике $[u_{k_0}, u_{k_0+1}] \times [v_{l_0}, v_{l_0+1}]$ функция $\hat{f}^{m_0}(u, v)$ равна

$$\hat{f}^{m_0}(u, v) = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} b_{i,j}^{k_0, l_0, m_0} u^i v^j \quad .$$

Повторяя подобную процедуру для переменной t , получаем набор коэффициентов $\{c_{i,j,n}^{k_0, l_0, m_0}, i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 3}, n = \overline{0, 3}\}$. В результате мы имеем следующую аппроксимацию $F(u, v, t)$ для функции $f(u, v, t)$ в ячейке $[u_{k_0}, u_{k_0+1}] \times [v_{l_0}, v_{l_0+1}] \times [t_{m_0}, t_{m_0+1}]$:

$$F(u, v, t) = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} \sum_{n=0,3} c_{i,j,n}^{k_0, l_0, m_0} u^i v^j t^n \quad .$$

Формально дифференцируя это равенство по переменным u, v, t , мы получаем аппроксимацию для смешанных производных функции $f(u, v, t)$ до третьего порядка включительно по каждой из переменных u, v, t . В некоторых случаях, как и в эксперименте ALICE, переменные u, v, t сами являются функциями других переменных x, y, z . Учитывая, что в нашем случае производные функций u, v, t по переменным x, y, z могут быть вычислены аналитически, получаем следующие аппроксимации для производных функции $f(u, v, t)$ по переменным x, y, z :

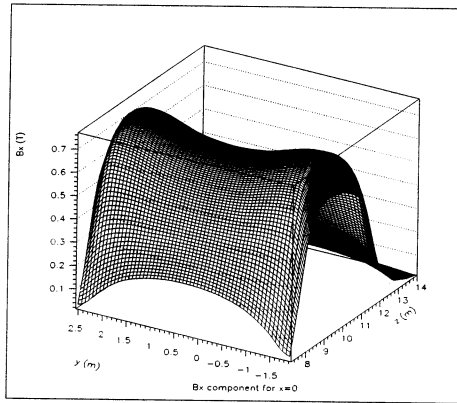
$$\frac{df(u, v, t)}{dx} = \frac{df(u, v, t)}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df(u, v, t)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{df(u, v, t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad ,$$

$$\frac{df(u, v, t)}{dy} = \frac{df(u, v, t)}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{df(u, v, t)}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} + \frac{df(u, v, t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dy},$$

$$\frac{df(u, v, t)}{dz} = \frac{df(u, v, t)}{du} \cdot \frac{du}{dz} + \frac{df(u, v, t)}{dv} \cdot \frac{dv}{dz} + \frac{df(u, v, t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}.$$

Аналогично могут быть вычислены смешанные частные производные более высоких порядков.

Данный подход использовался для построения трехмерных сплайн-аппроксимаций для каждой компоненты магнитного поля в областях $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Исходные данные для компонент магнитного поля были получены в процессе численного моделирования магнитной системы эксперимента ALICE [6], [7]. На рисунке приведено распределение в медианной плоскости диполя построенной трехмерной сплайн-аппроксимации основной компоненты магнитного поля.



Распределение B_x -компоненты поля в медианной плоскости дипольного магнита $x = 0$

3. Уравнения движения

Движение заряженных частиц в магнитном поле может быть описано следующей задачей Коши:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right], \quad (3.1)$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ есть магнитное поле в точке \mathbf{r} . Имеют место следующие начальные условия :

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}^1 = (x_1, y_1, z_1)^T, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v}^1 = \frac{|\mathbf{P}|}{m} (\sin(\theta) \cos(\psi), \sin(\theta) \sin(\psi), \cos(\theta))^T, \quad (3.2)$$

где \mathbf{P} есть импульс частицы. Только в крайне редких случаях удается выписать решение этой задачи Коши аналитически, например, в случае независимости $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

от g . Поэтому численные методы являются основным инструментом для решения этой проблемы [8],[9]. Для решения системы уравнений (3.1) обычно используется алгоритм Нистрема - модификация метода Рунге-Кутты для систем четвертого порядка точности [9]. Определим $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Тогда из (3.1) имеем:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r})}{dt} = \frac{q}{m} [\mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]. \quad (3.3)$$

Отсюда систему уравнений (3.1) можно записать в векторной форме :

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{u} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})^T$, $\mathbf{u}^0 = (\mathbf{r}^1, \mathbf{v}^1)^T$. Для численного решения этой системы мы используем классические методы Рунге-Кутты различных порядков [9]. Для метода А третьего порядка мы предполагаем, что $\{\mathbf{K}_i, i = \overline{1,3}\}$ есть

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) + \frac{h\mathbf{K}_1}{2}), \quad \mathbf{K}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) - h\mathbf{K}_1 + 2h\mathbf{K}_2) .$$

Тогда для малых h имеет место следующая аппроксимационная формула :

$$\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{u}(t) + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 4\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) + O(h^4) .$$

Для метода В также третьего порядка $\{\mathbf{K}_i, i = \overline{1,3}\}$ есть

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) + \frac{h\mathbf{K}_1}{3}), \quad \mathbf{K}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) + \frac{2h\mathbf{K}_1}{3}) ,$$

Для малых h получаем

$$\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{u}(t) + \frac{h}{4}(\mathbf{K}_1 + 3\mathbf{K}_3) + O(h^4) .$$

Пусть $\{\mathbf{K}_i, i = \overline{1,4}\}$ есть

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) + \frac{h\mathbf{K}_1}{2}) ,$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) + \frac{h\mathbf{K}_2}{2}), \quad \mathbf{K}_4 = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t) + h\mathbf{K}_3) .$$

Тогда для метода С четвертого порядка справедлива следующая аппроксимационная формула :

$$\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{u}(t) + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) + O(h^5) .$$

Для сравнения различных методов были проведены модельные расчеты траектории заряженной частицы с единичным зарядом q и импульсом P , движущейся в магнитном поле, построенном на основе подхода, изложенного в предыдущем разделе. В качестве точного решения брались результаты, полученные методом

Эйлера с очень маленьким шагом интегрирования. В качестве начальных значений мы брали точку трека с координатами из $\mathbf{x} = (0, 0.31, 0.2)^T$ и касательным вектором $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))^T$. Сравнение результатов x_f, y_f и вычислительного времени T в секундах на моделирование одной траектории для различных методов приведено в Табл.1. Результаты расчетов по методу Нистрема приведены для случая 50 и 100 шагов. Как видно из Табл.1, методы более высокого порядка не гарантируют более высокую точность вычислений. Этот результат является следствием того факта, что сплайн-аппроксимация магнитного поля в (3.1) имеет непрерывные производные не выше второго порядка. Это означает, что $y(t)$ имеет непрерывные производные не выше четвертого порядка, и применение метода Рунге-Кутты четвертого порядка не дает увеличения точности по сравнению с методами третьего порядка.

Таблица 1:

$$\theta = 0^\circ, \quad \phi = 0^\circ,$$

(N) - метод Нистрема; (E) - точное решение

P	10	40	70	100
(N(50)) x_f	-0.40585E-3	-0.18376E-3	-0.11144E-3	-0.79801E-4
(N(100)) x_f	-0.40638E-3	-0.18373E-3	-0.11142E-3	-0.79786E-4
(A) x_f	-0.40632E-3	-0.18374E-3	-0.11143E-3	-0.79782E-4
(B) x_f	-0.40629E-3	-0.18373E-3	-0.11142E-3	-0.79786E-4
(C) x_f	-0.40604E-3	-0.18387E-3	-0.11151E-3	-0.79782E-4
(E) x_f	-0.40638E-3	-0.18372E-3	-0.11142E-3	-0.79849E-4
(N(50)) y_f	0.70047	0.40734	0.36561	0.34893
(N(100)) y_f	0.70054	0.40736	0.36562	0.34894
(A) y_f	0.70054	0.40736	0.36562	0.34894
(B) y_f	0.70053	0.40736	0.36563	0.34894
(C) y_f	0.70055	0.40735	0.36562	0.34893
(E) y_f	0.70053	0.40736	0.36562	0.34893
(N(50)) T	0.0105	0.0105	0.0105	0.0105
(N(100)) T	0.0204	0.0194	0.0194	0.0194
(A) T	0.0182	0.0129	0.0129	0.0128
(B) T	0.0182	0.0131	0.0132	0.0132
(C) T	0.0166	0.0159	0.0159	0.0162

4. Многомерная кубическая аппроксимация Эрмита

Проблема оценки параметров трека по экспериментальным данным, как правило, приводит к минимизации функционалов, зависящих от результатов решения уравнений движения (3.1). Для минимизации этих функционалов необходимо знать не только сами решения, но также и производные этих решений как функции начальных значений (3.2). Учитывая те объемы информации, которые получают в

современных физических экспериментах, возникают достаточно жесткие требования не только по точности применяемых вычислительных методов, но также и по их быстродействию. В данном разделе на примере эксперимента ALICE мы рассмотрим возможности многомерной аппроксимации Эрмита для построения быстрых алгоритмов нахождения, как решений уравнений движения, так и производных этих решений по начальным данным.

Основная сложность при использовании многомерной аппроксимации заключается в катастрофическом росте объемов данных с ростом размерности задачи. Все эти данные необходимо держать в оперативной памяти компьютера. Отметим, что для метода сплайн-аппроксимации функций в N -мерном пространстве из первого раздела необходимо $I = 4^N \prod_{l=1}^N K_l$ слов для приближения одной функции. Числа $\{K_l, l = \overline{1, N}\}$ соответствуют числу разбиений области по различным координатам.

Для мюонного спектрометра ALICE мы выберем ось z вдоль пучка. Пусть z_1 и z_2 есть z координаты двух последовательных плоскостей детекторов. Тогда длина временного интервала интегрирования T в (3.1) должна быть выбрана из условия $z(T) = z_2$. Пусть $\mathbf{r}^2, \mathbf{v}^2$ и есть

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}(T), \quad \mathbf{v}^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(T) \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T = (x_1, y_1, P, \theta, \psi)^T.$$

Обозначим $\{\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}}{du_i}, \overline{1, 5}\}$ производные \mathbf{r} по начальным данным u_i . Тогда $\hat{\mathbf{r}}_i(T)$ и $\frac{d\hat{\mathbf{r}}_i(T)}{dt}$ могут быть найдены как решения задачи Коши

$$m \frac{d^2 \hat{\mathbf{r}}}{dt^2} = q \left[\frac{d\hat{\mathbf{r}}_i}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right] + q \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}_i] \right] \quad (4.1)$$

на интервале $[0, T]$ с начальными условиями

$$\hat{\mathbf{r}}_i(0) = \frac{d\mathbf{r}^1}{du_i}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{r}}_i}{dt}(0) = \frac{d\mathbf{v}^1}{du_i}. \quad (4.2)$$

Матрица $[\mathbf{A}(\mathbf{r})]$ в (4.1) есть

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r})] = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{B}_x(\mathbf{r})}{dx} & \frac{d\mathbf{B}_x(\mathbf{r})}{dy} & \frac{d\mathbf{B}_x(\mathbf{r})}{dz} \\ \frac{d\mathbf{B}_y(\mathbf{r})}{dx} & \frac{d\mathbf{B}_y(\mathbf{r})}{dy} & \frac{d\mathbf{B}_y(\mathbf{r})}{dz} \\ \frac{d\mathbf{B}_z(\mathbf{r})}{dx} & \frac{d\mathbf{B}_z(\mathbf{r})}{dy} & \frac{d\mathbf{B}_z(\mathbf{r})}{dz} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу аппроксимации некоторой функции $f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ в пятимерной прямоугольной области $\Omega = \{[U_1^1, U_2^1] \times [U_1^2, U_2^2] \times [U_1^3, U_2^3] \times [U_1^4, U_2^4] \times [U_1^5, U_2^5]\}$ на основе многомерной кубической интерполяции Эрмита [4]. Пусть $\{u_j^i, j = \overline{1, L_j}, i = \overline{1, 5}\}$ есть прямоугольная сетка в области Ω по переменным $\{u_i\}$. Предполагается, что $u_i^j < u_i^{j+1}$, $u_i^1 = U_1^i$ и $u_i^{L_i} = U_2^i$. Пусть $\{f_j^{i,k,l,m,n}\}$ и $\{\hat{f}_j^{i,k,l,m,n}\}$ есть

$$f_j^{i,k,l,m,n} = f(u_1^i, u_2^k, u_3^l, u_4^m, u_5^n), \quad \hat{f}_j^{i,k,l,m,n} = \frac{df(u_1^i, u_2^k, u_3^l, u_4^m, u_5^n)}{du_j}, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Наша задача заключается в построении аппроксимации $f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ в каждой ячейке $\Omega^{i,k,l,m,n} = \{[u_1^i, u_1^{i+1}] \times [u_2^k, u_2^{k+1}] \times [u_3^l, u_3^{l+1}] \times [u_4^m, u_4^{m+1}] \times [u_5^n, u_5^{n+1}]\}$, используя значения функции f и ее производных $\{\hat{f}_j\}$ только в узлах рассматриваемой ячейки.

Рассмотрим кубическую интерполяцию Эрмита для функций от одной переменной [4]. Пусть функции $\{F_i(x), i = \overline{0, 3}\}$ есть

$$F_0(x) = 1 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3, \quad F_1(x) = x - 2 \cdot x^2 + x^3,$$

$$F_2(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3, \quad F_3(x) = -x^2 + x^3.$$

Для любого полинома $P(x)$ третьей степени и любого x из интервала $[a, b]$ мы имеем тождество

$$P(x) = P(a) \cdot F_0(u) + hP'(a)F_1(u) + P(b) \cdot F_2(u) + hP'(b)F_3(u), \quad (4.3)$$

где $h = b - a$, $u = \frac{x-a}{h}$. Аналогичное тождество может быть сформулировано и в многомерном случае. Пусть $\Omega^N = \{[u_1^1, u_2^1] \times [u_1^2, u_2^2] \times \dots \times [u_1^N, u_2^N]\}$ есть N -мерный параллелепипед. Для любого $l = \overline{1, N}$ определим

$$x_0^l = u_1^l, \quad x_1^l = u_2^l, \quad h_l = u_2^l - u_1^l, \quad t_l = \frac{u_l - u_1^l}{h_l}.$$

Тогда для любого полинома от N переменных $P(u_1, u_2, \dots, u_N)$ степени не выше 3 по каждой из переменных в Ω^N имеет место следующее тождество:

$$P(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_N=0}^1 \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_N=0}^1 P^{i_1, \dots, i_N}(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_N}^N) \cdot \prod_{l=1}^N [F_{i_l+2j_l}(t_l)h^{i_l}], \quad (4.4)$$

где

$$P^{i_1, \dots, i_N}(x_{j_1}, \dots, x_{j_N}) = \frac{d^{i_1}}{du_1} \dots \frac{d^{i_N}}{du_N} P(u_1, \dots, u_N) \Big|_{u_1=x_{j_1}} \dots \Big|_{u_N=x_{j_N}}.$$

Производные $\frac{d^{i_k}}{du_k}$ для $i_k = 0$ соответствуют тождественному преобразованию

$$\frac{d^{i_k}}{du_k} f(u_k) = f(u_k).$$

При $N = 5$, используя (4.4), мы получаем приближение $\hat{f}(u_1, \dots, u_5)$ для аппроксимации функции $f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ в ячейке

$$\hat{f}(u_1, \dots, u_5) = \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_5=0}^1 \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_5=0}^1 f^{i_1, i_2, \dots, i_5}(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_5}^5) \cdot \prod_{l=1}^5 [F_{i_l+2j_l}(t_l)h^{i_l}]. \quad (4.5)$$

Функции $\hat{f}(u_1, \dots, u_5)$ аппроксимируют $f(u_1, \dots, u_5)$ с третьим порядком точности. Дифференцируя (4.5) по u_k , мы получаем аппроксимационную формулу для

производных функции $f(u_1, \dots, u_5)$. Очевидно, что в этом случае мы теряем один порядок в аппроксимации. Как видно из (4.5), нам необходимо знать не только значения функции f во всех узлах ячейки, но также и $2^N - 1$ всевозможных смешанных производных первого порядка по каждой из переменных u_i .

Данная методика использовалась для построения быстрых алгоритмов аппроксимации результатов решения уравнений движения (3.1), а также их производных по начальным данным (3.2). В эксперименте ALICE мы имеем пять регистрирующих камер. Пусть $\{G_i(\mathbf{u}), i = \overline{1, 4}\}$ есть операторы, которые соответствуют эволюции решений уравнений движения (3.1) с начальными данными $\mathbf{u} = (x, y, z_i, P, \theta, \psi)^T$ до новых значений $G_i(\mathbf{u}) = (\hat{x}, \hat{y}, z_{i+1}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)^T$. Оператор G_1 трансформирует частицы с $z_1 = 5.4$ до $z_2 = 6.86$; G_2 с $z_2 = 6.86$ до $z_3 = 9.75$; G_3 с $z_3 = 9.75$ до $z_4 = 12.873$ и G_4 с $z_4 = 12.873$ до $z_5 = 14.3$. Для каждого оператора мы строим пятимерную прямоугольную сетку начальных значений. После этого для каждого начального значения решается эволюционная задача (3.1), (3.2). Для получения первых производных решений по начальным данным можно использовать (4.1), (4.2). Отметим, что подобные уравнения можно сформулировать и для смешанных производных, но суммарного порядка не выше трех. Аппроксимация магнитного поля,

Таблица 2:

(A)	$z_1 = 5.4,$	$z_2 = 6.86 ;$
(B)	$z_1 = 6.86,$	$z_2 = 9.75 ;$
(C)	$z_1 = 9.75,$	$z_2 = 12.873 ;$
(D)	$z_1 = 12.873,$	$z_2 = 14.3 .$

	(A)	(B)	(C)	(D)
δx (M)	0.6427E-3	0.1064E-2	0.1149E-2	0.5658E-3
δy (M)	0.4064E-3	0.1091E-2	0.1381E-2	0.3967E-3

рассмотренная во втором разделе, позволяет вычислять смешанные производные поля не выше третьего порядка. Для получения смешанных производных до пятого порядка включительно в узлах сетки можно использовать последовательно сплайн-аппроксимацию для функций от пяти переменных, аналогичную той, что мы использовали для построения сплайн-аппроксимаций трехмерного магнитного поля. Отметим, что в этом случае многомерная кубическая аппроксимация Эрмита совпадает с многомерной аппроксимацией кубическими сплайнами.

Использование аппроксимации Эрмита существенно сокращает требования к оперативной памяти используемого для расчетов компьютера. Необходимо $I = 32 \prod_{l=1}^5 (K_l + 2)$ слов для приближения одной функции. Числа $\{K_l, l = \overline{1, 5}\}$ соответствуют числу разбиений области по различным координатам В Табл.2 приведены максимальные ошибки вычисления x_f, y_f для различных операторов $\{G_i, i = \overline{1, 4}\}$. Импульс P варьировался от 10 МэВ до 100 МэВ. Заряд q равнялся 1. Среднее время вычисления $(\hat{x}, \hat{y}, z_{i+1}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)^T$ и всех их первых производных по x, y, P, θ, ψ на PC Pentium 2 (400МГц) было около 0.00185с на один трек. Сравни-

вая это время с данными из Табл.1, получаем значительный выигрыш по быстродействию. Но при этом дополнительно мы вычисляем первые производные всех полученных координат и импульсов по всем начальным данным. Используемая оперативная память для одновременной работы со всеми операторами G_i одновременно составляла 0.5Гбт. Очевидно, что для уменьшения ошибок вычислений необходимо увеличивать массивы начальных данных и, как следствие, оперативную память используемого для расчетов компьютера.

5. Многомерная аппроксимация кубическими B -сплайнами

В данном разделе мы рассмотрим возможности многомерной аппроксимации кубическими B -сплайнами [4] для построения быстрых алгоритмов нахождения решений уравнений движения (3.1) и производных этих решений по начальным данным.

Пусть $\{x_i, i = \overline{0, N}\}$ есть некое разбиение отрезка $[a, b]$ ($x_0 = a, x_N = b$). Добавим дополнительные точки:

$$x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq a; \quad b \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3}.$$

Следуя [5], определим нормализованный кубический B -сплайн $B_i(x)$:

$$B_i(x) = (x_{i+4} - x_i) \sum_{p=i}^{i+3} \frac{\theta(x_p - x)(x_p - x)^3}{w_i(x_p)},$$

где $w_i(x_p) = \prod_{j=i, j \neq p}^{i+4} (x_p - x_j)$ и $\theta(x)$ - функция Хэвисайда. Функция $B_i(x)$ тождественно равна нулю вне интервала $[x_i, x_{i+4}]$. Тогда кубический B -сплайн пяти переменных $\{u_j, j = \overline{1, 5}\}$ представим в виде:

$$S(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \sum_{i_1=-1}^{K_1+1} \sum_{i_2=-1}^{K_2+1} \sum_{i_3=-1}^{K_3+1} \sum_{i_4=-1}^{K_4+1} \sum_{i_5=-1}^{K_5+1} b_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} \prod_{k=1}^5 B_{i_k}^k(u_k).$$

Алгоритм построение пятимерного сплайна $S(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ в точности повторяет метод изложенный в [4] для случая двух переменных. Так же как и для многомерной аппроксимации поля кубическими сплайнами в качестве дополнительных краевых условий для каждой переменной u_k мы используем равенство вторых производных B -сплайна на концах интервала их конечно-разностным аналогом. Отметим, что построенный подобным образом пятимерный кубический B -сплайн требует для хранения $\prod_{l=1}^5 (K_l + 2)$ слов для приближения одной функции. Как и ранее, числа $\{K_l, l = \overline{1, 5}\}$ соответствуют числу разбиений области по различным координатам. Отсюда видно, что применяемые для многомерной аппроксимации кубические B -сплайны дают значительный выигрыш прежде всего в требованиях по оперативной памяти используемого для расчетов компьютера. В Табл.3 приведены максимальные ошибки вычислений x_f, y_f для различных операторов $\{G_i, i = \overline{1, 4}\}$. Для работы со всеми операторами G_i одновременно необходимо 170 Мбт оперативной памяти. Среднее время вычисления $(\hat{x}, \hat{y}, z_{i+1}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)^T$ и всех их первых производных было около 0.00187с на один трек. Анализ результатов Табл.3 показывает, что многомерная аппроксимация эволюции координат кубическими B -сплайнами является наиболее перспективным направлением для построения быстрых алгоритмов.

Таблица 3:

(A)	$z_1 = 5.4,$	$z_2 = 6.86 ;$
(B)	$z_1 = 6.86,$	$z_2 = 9.75 ;$
(C)	$z_1 = 9.75,$	$z_2 = 12.873 ;$
(D)	$z_1 = 12.873,$	$z_2 = 14.3 .$

	(A)	(B)	(C)	(D)
δx (М)	0.1989E-3	0.4258E-3	0.5054E-3	0.1951E-3
δy (М)	0.1645E-3	0.3704E-3	0.3827E-3	0.1632E-3

6. Заключение

Бурное развитие вычислительной техники за последние десятилетия заставляет существенно пересмотреть методы и подходы, применяемые для обработки экспериментальных данных. Оперативная память современных компьютеров, допускающая работу с большими базами данных, позволяет заменить решение уравнений движения в неоднородном магнитном поле заряженных частиц многомерной аппроксимацией результатов эволюции координат и импульса этих частиц. Рассмотренный выше подход позволит существенно сократить вычислительное время, необходимое для фитирования треков. Очевидно, что предложенная методика аппроксимации операторов эволюции и их производных может быть использована для учета взаимодействия движущейся заряженной частицы не только с магнитными, но и с электрическими полями, а также со средой. В общем случае уравнение движения (3.1) заменяется на следующее уравнение:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 c^{-2}}} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right] + q\mathbf{E}(\mathbf{r}) - K \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ есть магнитное и электрическое поля в точке \mathbf{r} ; K описывает силу трения, вызванную взаимодействием частиц со средой.

Автор выражает благодарность А.С.Водопьянову, Ж.П.Куссено, Л.Ликвину за поддержку и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке EGIDE и РФФИ (грант 00-01-00617).

Список литературы

1. ALICE - Technical Proposal for A Large Ion Collider Experiment at the CERN LHC, CERN/LHCC/95-71, December 1995.
2. Методы анализа данных в физическом эксперименте. Под ред. М.Реглера, Мир, 1993.
3. H.Wind, Momentum analysis by using a quintic spline model for the track. Nucl.Instr. and Meth. **115**(1974), pp.431-434..

4. Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко, Методы сплайн-функций. Москва, Наука, 1980.
5. Ю.С.Завьялов, В.А.Леус, В.А.Скороспелов, Сплаины в инженерной геометрии. Москва, Машиностроение, 1985.
6. P.Akishin, N.Anishenko, N.Blinov, I.Boguslavsky, D.Cacaut, V.Danilov, V.Datskov, O.Golubitsky, A.Kalimov, E.Kochournikov, A.Lyubimtsev, A.Makarov, K.Mikhailov, I.Olex, V.Popov, S.Semashko, A.Shabunov, Y.Shishov, A.Shurygin, A.Sissakian, D.Swoboda, A.Vodopianov. *The Dipole Magnet Design for the ALICE DiMuon Arm Spectrometer*, MT-17, 2001, Jeneva.
7. Акишин П.Г. Применение метода объемных и граничных интегральных уравнений для моделирования магнитных систем, содержащих сверхпроводящие экраны. ЖВМ и МФ, 2001, т.41, с.1106-1116.
8. H.J. Stetter, Analysis of discretization methods for ordinary differential equations (Springer-Verlag, N.Y., 1973).
9. М. Абрамовиц, И. Стиган, Справочник пр специальным функциям. Москва, Наука, 1979.

Получено 26 декабря 2002 г.

Акишин П. Г.

P11-2002-291

Об использовании численной многомерной аппроксимации для быстрого решения уравнений движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях

Рассматриваются математические вопросы, связанные с численным интегрированием уравнений движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях. Предложена трехмерная сплайн-аппроксимация магнитного поля. Это позволяет использовать численные методы высокого порядка точности для вычисления траектории заряженной частицы, движущейся в неоднородном магнитном поле. На основе многомерной аппроксимации разработаны быстрые алгоритмы для приближенного описания решений уравнений движения, а также производных этих решений по начальным данным. Применение предложенных методов иллюстрируется на примере эксперимента ALICE.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Akishin P. G.

P11-2002-291

The Numerical Multidimensional Approximation for the Fast Solving of Equations Describing Charged Particle Motion in Non-Homogeneous Magnetic Field

In this paper we consider some mathematical problems connected with the numerical solving of motion equations for charged particle in non-homogeneous magnetic field. The three-dimensional spline approximations of magnetic field are proposed. This allows one to use high-accuracy numerical methods to evaluate the trajectory of the moving charged particle in non-homogeneous magnetic field. On the base of multidimensional approximation the fast algorithms for description of motion equations solution and its derivatives with respect to initial data are proposed. The applications of considered methods for ALICE experiment are demonstrated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 23.01.2003.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 1,02. Тираж 310 экз. Заказ № 53722.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/