P2-2002-298

И. А. Шелаев

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

В теории кеплеровых орбит известное уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = M \tag{1}$$

связывает эксцентрическую аномалию E со средней M. Аномалия E представляет собой угол между радиусом-вектором из центра эллипса в произвольную точку на орбите и полярной осью эллипса, а средняя $M = \omega t$ есть время, умноженное на частоту вращения тела. В (1) e — эксцентриситет замкнутой орбиты, для которой всегда $e < 1$. Это трансцендентное уравнение является «наиболее трудным местом» [1] в теории.

Покажем, что (1) имеет решение вида

$$E = M - e\sin M, \tag{2}$$

которое в результате зеркального отражения относительно биссектрисы прямого угла между осями координат M и E трансформируется в (1).

Аналитически зеркальное отражение относительно биссектрисы прямого угла между осями равносильно линейному преобразованию координат с помощью матрицы μ [2]

$$\begin{vmatrix} M' \\ E' \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} M \\ E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M \\ E \end{vmatrix}, \text{ или } M' = E,\ E' = M. \tag{3}$$

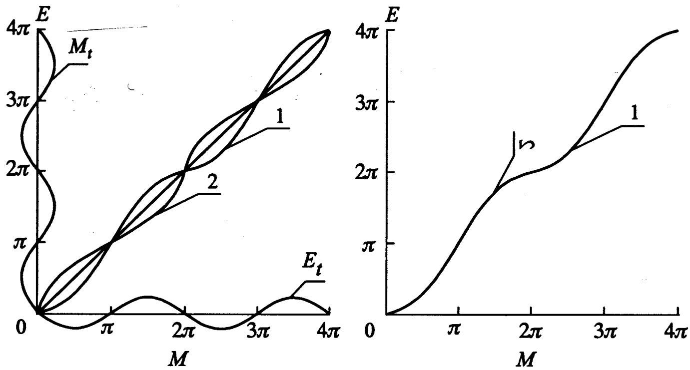
В силу преобразования (3) равенство (2) принимает вид

$$M' = E' - e\sin E', \tag{4}$$

т.е. форму уравнения Кеплера (1), если у переменных опустить штрихи.

Очевидно, что выполненные линейные преобразования координат сохраняют частотный спектр функции $E(M)$, а решение уравнения (1) в форме (2) представляется как готовое разложение в ряд Фурье, и в силу «уравнения замкнутости» А. М. Ляпунова [3] частотный спектр любого движения по эллипсу состоит из одной гармоники $M = \omega t$ с амплитудой e.

Сказанное иллюстрирует рисунок, где слева для $e = 0,5$ кривая *1*, вычисленная в соответствии с уравнением (1) методом итераций, представлена как сумма кривой $M_t = -e\sin E$ и прямой $M_r = E$, а кривая *2* построена согласно равенству (2) и представлена также суммой прямой $E_r = M$ и синусоиды $E_t = -e\sin M$. Разумеется, рациональные части кривых M_r и E_r



совпадают между собой и с биссектрисой угла между координатными осями, а трансцендентные M_t и E_t зеркально-симметричны относительно биссектрисы. Поэтому справа кривая *1* изображена в первоначальном виде, а кривая *2* — после зеркального отражения относительно биссектрисы, в результате чего она полностью совпала с кривой *1*.

Список литературы

1. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972, С. 17.

2. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965, С. 172.

3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, Т. III. С. 587.

Получено 25 декабря 2002 г.

Шелаев И. А. P2-2002-298
Решение уравнения Кеплера

Получено новое точное решение уравнения Кеплера в виде явной зависимости эксцентрической аномалии от средней, и показано, что спектр эксцентрической аномалии содержит только одну гармонику частотой 1 и амплитудой, равной эксцентриситету эллиптической орбиты.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Shelaev I. A. P2-2002-298
Solution to the Kepler Equation

A new precise solution of the Kepler equation is obtained in the form of an explicit dependence between an eccentric anomaly and a mean one, and it is shown that the spectrum of eccentric anomaly contains only one harmonic with a frequency 1 and amplitude equal to the eccentricity of an elliptic orbit.

The investigation has been performed at the Veksler–Baldin Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *А. Н. Шабашова*
Макет *Е. В. Сабаевой*

Подписано в печать 15.04.2003.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,25. Уч.-изд. л. 0,27. Тираж 415 экз. Заказ № 53855.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/