Р17-2007-29

А. Б. Кузнецов

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ПОДТВЕРЖДЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Кузнецов А. Б. Р17-2007-29
Об экспериментальном подтверждении уравнений Гинзбурга–Ландау

На основе численного решения уравнений Гинзбурга–Ландау для одиночного флюксоида получена аппроксимирующая формула зависимости отношения критических полей (первого ко второму) от параметра Гинзбурга–Ландау. Проведено сравнение этой формулы с 46 экспериментальными результатами, показавшее хорошее их согласие.

Работа выполнена в Лаборатории физики частиц ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Kuznetsov A. B. P17-2007-29
On Experimental Confirmation of Ginzburg–Landau Equation

A numerical solution of the Ginzburg–Landau equation for a single fluxoid was used to obtain an approximation formula of ratio dependence of critical fields (of the first to the second one) on the Ginzburg–Landau parameter. Comparison of this formula with 46 experimental results showed their good agreement.

The investigation has been performed at the Laboratory of Particle Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

ВВЕДЕНИЕ

На основе уравнений Гинзбурга–Ландау [1,2] для одиночного флюксоида в свое время был проведен расчет отношения первого критического магнитного поля H_{c1} к термодинамическому критическому магнитному полю H_{ct}, и было проведено сравнение с некоторыми экспериментальными результатами [3].

Цель данной работы: повторение аналогичных расчетов в широком диапазоне параметра Гинзбурга–Ландау κ [1] и их сравнение с бо́льшим числом экспериментальных данных.

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Основываясь на феноменологической локальной квантовой теории сверхпроводимости Гинзбурга, Ландау, Абрикосова, Горькова [1,2,4,5] (ГЛАГ) рассмотрим ориентированный и протяженный вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ (ось z) цилиндрический образец из однородного сверхпроводника второго рода $\kappa = \lambda/\xi \geqslant 1/\sqrt{2}$ [1,4] ($\kappa(T), \lambda(T)$ и $\xi(T)$ — зависящие от температуры: параметр Гинзбурга–Ландау, глубина проникновения магнитного поля и длина когерентности)*.

В плоскости, нормальной к оси z, введем нормированные координаты $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/\xi$. Сечение образца в этой плоскости, ограниченное внешним контуром $\mathbf{r}'_g$, имеет нормированную площадь $S'_g = S_g/\xi^2$, а $r' = 0$ соответствует внутренней точке, достаточно удаленной от границы образца $\mathbf{r}'_g$. Предполагаем, что радиус кривизны r'_k границы образца $\mathbf{r}'_g$ удовлетворяет условию $r'_k \gg \kappa$.

В таком образце нормированную волновую функцию ψ ($|\psi|^2 \leqslant 1$ — плотность куперовских пар в присутствии магнитного поля, отнесенная к их плотности без поля) можно считать не зависящей от z и в плоскости, нормальной к оси z, представить в виде $\psi = |\psi| \exp(i\theta) = f \exp(i\theta)$, где

---

*На основе микроскопической теории сверхпроводимости [6] были получены формулы [5], связывающие ξ, λ и κ, с ξ_0 — радиусом корреляций сверхпроводящих электронов (размером куперовских пар [7]), l — длиной свободного пробега электронов и $\lambda(0)$ — глубиной проникновения магнитного поля при $T = 0$, из которых следует, что микроскопическая теория не вносит дополнительных ограничений на применение теории ГЛАГ для сверхпроводников второго рода.

$f(\mathbf{r}')$ и $\theta(\mathbf{r}')$ — скалярные функции, однозначные в области образца ($\psi(f, i\theta)$ определена на многолистной комплексной плоскости: $f \leqslant 1$ и имеет минимум $f_m > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi p$, p — натуральное число, соответствующее номеру листа этой плоскости).

Тогда, согласно формулировке Гинзбурга–Ландау [1], отклонение в сверхпроводнике нормированной плотности свободной энергии Гиббса при внешнем поле $\mathbf{H}_0$ от нормированной плотности этой энергии в отсутствие поля записывается в виде

$$g_{sH_0} = (G_{sH} - G_{s0})\,\frac{8\pi}{H_{c2}^2} = \\ = \frac{(1-f^2)^2}{2\kappa^2} + \frac{(\nabla f)^2 + \mathcal{A}^2 f^2}{\kappa^2} + (\mathrm{rot}\mathcal{A})^2 - 2\mathrm{rot}\mathcal{A}\cdot\mathbf{h}_0, \quad (1)$$

где $H_{c2}(T) = \Phi_0/2\pi\xi^2$ — второе критическое поле, определяемое экспериментально [8] и определяющее $\xi(T)$, $\Phi_0 = hc/2e$ — квант магнитного потока, $\mathcal{A}(\mathbf{r}')$ — нормированный на $H_{c2}\xi$ вектор-потенциал, $\mathrm{rot}\mathcal{A} = \mathbf{h}(\mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{r}')/H_{c2}$ — нормированное магнитное поле, проникающее в сверхпроводник, $\mathbf{h}_0 = \mathbf{H}_0/H_{c2}$.

Из калибровочной инвариантности теории при определенных выше действительных $f(\mathbf{r}')$ и $\theta(\mathbf{r}')$ следует

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}') = \mathbf{A}(\mathbf{r}') - \nabla\theta, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ — аналитическая функция во всей области $\mathbf{S}'_g$, занимаемой сверхпроводником, $\nabla\theta|_{r'\to 0} \propto 1/r'$. Следовательно, $\mathcal{A}(\mathbf{r}')$ имеет полюс при $r' = 0$.

Первые три члена в правой части (1) характеризуют структуру нормированной плотности энергии $\delta\varepsilon$ как в мейсснеровской зоне, так и во флюксоиде. Первый член $\delta\varepsilon_n$ — нормированная плотность энергии неполной конденсации, второй член $\delta\varepsilon_k$ — нормированная плотность кинетической энергии, третий член $\delta\varepsilon_h$ — нормированная плотность энергии проникшего магнитного поля.

В этом случае уравнения Гинзбурга–Ландау принимают вид

$$\kappa^2\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathcal{A} + f^2\mathcal{A} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 f + f - f^3 - \mathcal{A}^2 f = 0, \quad (4)$$

$$f\nabla\mathcal{A} + 2\nabla f\cdot\mathcal{A} = 0, \text{ или, так как } \nabla\mathcal{A} = 0, \text{ с учетом (3) } \nabla f\cdot\mathbf{j}_s = 0, \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\nabla f\cdot\mathbf{n} = \frac{df}{d\mathbf{n}} = 0, \quad f\mathcal{A}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{или с учетом (3)} \quad \mathbf{j}_s\cdot\mathbf{n} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}') = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathcal{A}$ — плотность сверхтоков, нормированная на $cH_{c2}/4\pi\xi$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе образца $\mathbf{r}'_g$.

Уравнения (3) и (4) с граничными условиями (6) описывают проникновение магнитного поля внутрь **односвязного** сверхпроводника второго рода как в поверхностную мейсснеровскую зону, так и вглубь образца в виде *флюксоидов* [4], а (5) характеризует структуру этого проникновения — **ортогональность** ∇f и $\mathbf{j}_s$, т. е. как в поверхностной зоне, так и в любом стационарном *флюксоиде* линии уровней f совпадают с линиями уровней h.

Нормированная на $H_{c2}^2/8\pi$ энергия флюксоида на единицу его длины $\varepsilon(\kappa)$ для одиночного флюксоида, удаленного от границы, определяется, согласно (1), в полярных координатах $\rho = r'$ интегралом (переходы к последним двум интегралам получены в [4, 9])

$$\frac{\varepsilon(\kappa)}{2\pi} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{(1-f^2)^2}{2\kappa^2} + \frac{(\nabla f)^2 + \mathcal{A}^2 f^2}{\kappa^2} + h^2 \right) \rho\, d\rho = \\ = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1-f^4}{2\kappa^2} + h^2 \right) \rho\, d\rho = \int\limits_0^\infty \frac{1-f^2}{\kappa^2} \rho\, d\rho. \quad (7)$$

Из (7), в частности, с учетом (1) следует соотношение

$$\frac{\varepsilon_h}{2\pi} = \int\limits_0^\infty h^2 \rho\, d\rho = \int\limits_0^\infty \frac{(1-f^2)^2}{2\kappa^2} \rho\, d\rho = \frac{\varepsilon_n}{2\pi}, \quad (8)$$

отражающее важную характеристику одиночного флюксоида — равенство между энергией магнитного поля ε_h и энергией неполной конденсации ε_n. Эта интегральная связь между h и f использовалась ниже для контроля точности численного решения уравнений, соответствующих (3) и (4).

2. ОДИНОЧНЫЙ ФЛЮКСОИД

Одиночный флюксоид вдали от поверхности сверхпроводника описывается уравнениями (3) и (4) в полярных координатах, которые удобно записать в виде, позволяющем корректно сформулировать граничные условия как в центре флюксоида, так и при $\rho \gg \kappa$ [4, 10]

$$\frac{d^2F}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho} - \frac{f^2}{\kappa^2}F = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + f - f^3 - \frac{F^2}{\rho^2}f = 0, \quad (10)$$

с граничными условиями (рассматривается флюксоид с одним квантом потока Φ_0)

$$F(0) = -1, \quad F(\rho)|_{\rho\to\infty} \to 0, \qquad f(0) = f_m, \quad f(\rho)|_{\rho\to\infty} \to 1, \tag{11}$$

где $0 \leqslant f(\rho) < 1$, $F(\rho) = \rho\,\mathcal{A}_\varphi(\rho)$ ($[-F(\rho)]$ определяет во флюксоиде в области, большей ρ, нормированную на $\Phi_0/2\pi$ величину магнитного потока $[-1 \leqslant F(\rho) < 0]$).

В области $0 < \rho \leqslant \rho_m$ ($\rho_m \gg 1$) уравнения (9) и (10) решаются численно, а при $\rho \geqslant \rho_m$ они приближенно решаются аналитически. При ρ_m эти решения сшиваются.

Из анализа (9) и (10) при $\rho = \epsilon \ll 1$ следует

$$\begin{aligned} &f = a\epsilon\left(1 - \frac{(1+h_c)}{8}\epsilon^2\right), \\ &F = -1 + \epsilon^2\left(\frac{h_c}{2} - \frac{a^2}{8\kappa^2}\epsilon^2\right), \quad \text{т. е. здесь} \quad f_m \to 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где коэффициенты $a(\kappa)$ и $h_c(\kappa)$ определяются при их решении.

Из (12) вблизи центра флюксоида следуют зависимости относительной плотности куперовских пар $\bar{n}_s$, магнитного поля h и плотности сверхтоков j_s, формирующих флюксоид:

$$\bar{n}_s = a^2\epsilon^2, \quad h = \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho} = h_c - \frac{a^2}{2\kappa^2}\epsilon^2, \quad j_s = -\frac{dh}{d\rho} = \frac{a^2}{\kappa^2}\epsilon, \tag{13}$$

которые показывают, что коэффициент h_c определяет поле в центре, а коэффициент a определяет зависимости вблизи центра: $\bar{n}_s$, спада магнитного поля и j_s.

Отмечая, что ненормированная плотность сверхтока $J_s = n_s f^2 ev$ при $v < v_s$ (v — скорость куперовских пар, $v_s \sim 3{\cdot}10^3$ м/с — скорость сверхзвука, $n_s = mc^2/4\pi e^2\lambda^2$ — плотность сверхпроводящих электронов при $h_0 = 0$), из (12) и (13) при $\xi_0 \sim 10^{-6}$ м следует $\rho > (h/4\pi m\xi_0 v_s)(\xi_0/\xi)(v_s/v) = 2\cdot 10^{-2}(\xi_0/\xi)(v_s/v)$. Для «чистых» сверхпроводников ($l \gg \xi_0$) $\xi \gg \xi_0$, а для «грязных» ($l \ll \xi_0$) $\xi \sim \xi_0$ [5]. Это ограничение сравнительно слабое и оно учитываться не будет.

Численное решение (9) и (10) при фиксированных κ проводится в области $\epsilon \leqslant \rho \leqslant \rho_m$ ($\epsilon \ll 1, \rho_m \gg 1$) при граничных условиях (12), в которых при выборе достаточно малого ϵ можно ограничиться низшими членами ϵ. Здесь удобно использовать соотношение

$$F(\rho) = -b(\rho,\kappa)\left[\frac{\rho}{\kappa}K_1\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)\right], \quad 1 < b(\rho,\kappa) < b(\rho_m,\kappa). \tag{14}$$

В этих решениях во всей области определения, согласно (11), (12) и (14), f и b кроме ограниченности должны удовлетворять условиям их монотонного роста:

$$f < 1, \quad \frac{df}{d\rho} > 0, \quad \frac{d^2 f}{d\rho^2} < 0 \tag{15}$$

$$\text{при} \quad \rho > 1 \quad \frac{db}{d\rho} > 0, \quad \frac{d^2 b}{d\rho^2} < 0. \tag{16}$$

Метод решения следующий. Уравнения (9) и (10) при фиксированных κ решаются в области $\epsilon < \rho < \rho_i$ с граничными условиями (12) с постепенным увеличением ρ_i. При каждом ρ_i коэффициенты a и h_c подбираются так, чтобы удовлетворялись условия (15) и (16). При нарушении условий $f < 1$ или $d^2 f/d\rho^2 < 0$ — коэффициент a уменьшается, а при нарушении условия $df/d\rho > 0$ — увеличивается. При нарушении условия $db/d\rho > 0$ коэффициент h_c уменьшается, а при нарушении условия $d^2 b/d\rho^2 < 0$ — увеличивается. С измененными a и h_c процесс решения повторяется с увеличенным ρ_i вплоть до $\rho_i = \rho_m$.

Минимальное значение ρ_m определялось из выполнения условий

$$[1 - f(\rho_m)] < 10^{-2}, \quad [1 - b(\rho_m - 1)/b(\rho_m)] < 10^{-2}. \tag{17}$$

Отметим, что условия (15) и (16) выполняются в некоторой области $\delta a \cdot \delta h_c$, сокращающейся с ростом ρ_i, и в этой области $\delta a/\delta h_c \simeq 0{,}5$ (эта связь слабо зависит от κ).

Из анализа (9) и (10) при $\rho \geqslant \rho_m \gg 1$, когда $(1 - f) = \delta \ll 1$, при пренебрежении в (9) слагаемыми $\delta \cdot F$ и $\delta^2 \cdot F$ следует

$$\begin{gathered} F|_{\rho>\rho_m} \to -b_m(\kappa)\left[\frac{\rho}{\kappa} K_1\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)\right], \quad h|_{\rho>\rho_m} \to \frac{b_m(\kappa)}{\kappa^2} K_0\left(\frac{\rho}{\kappa}\right), \\ j_s|_{\rho>\rho_m} \to \frac{b_m(\kappa)}{\kappa^3} K_1\left(\frac{\rho}{\kappa}\right), \end{gathered} \tag{18}$$

где $b_m(\kappa) = b(\rho_m, \kappa)$ — амплитуда функции, аппроксимирующей F при $\rho \geqslant \rho_m$, K_1 и K_0 — функции Макдональда, а при пренебрежении в (10) слагаемыми δ^2, δ^3 и $\delta \cdot F^2/\rho^2$ следует, что оно представляется неоднородным уравнением Бесселя с правой частью $(-F^2/\rho^2)$, аппроксимируемой (18)

$$\frac{d^2\delta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\delta}{d\rho} - 2\delta = -\left[\frac{b_m(\kappa)}{\kappa} K_1\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)\right]^2 \quad \text{при} \quad \delta|_{\rho\to\infty} \to 0. \tag{19}$$

Частное решение неоднородного уравнения (19) при $\kappa \neq 2$ можно представить в виде суммы рядов

$$\delta_c(\rho) = \left[K_1\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)\right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\kappa)}{\rho^{2n}} + \left[K_0\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)\right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n(\kappa)}{\rho^{2n}} + \\ + K_0\left(\frac{\rho}{\kappa}\right) K_1\left(\frac{\rho}{\kappa}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\kappa)}{\rho^{1+2n}}, \quad (20)$$

где коэффициенты B_n, D_n, G_n находятся при подстановке $\delta_c(\rho)$ в (19).

Первые коэффициенты $(n = 0)$ определяются формулами

$$B_0 = \frac{b_m^2}{2} \frac{(\kappa^2 - 1)}{\kappa^2(\kappa^2 - 2)}, \quad D_0 = B_0 \frac{1}{(\kappa^2 - 1)}, \quad G_0 = B_0 \frac{2\kappa}{(\kappa^2 - 2)}, \quad (21)$$

а при $n \geqslant 1$ коэффициенты находятся из системы рекуррентных уравнений

$$\begin{gathered} B_n \frac{(1-\kappa^2)}{\kappa^2} + D_n \frac{1}{\kappa^2} + B_{n-1} 2n^2 + G_{n-1} \frac{2n}{\kappa} = 0, \\ B_n \frac{1}{\kappa^2} + D_n \frac{(1-\kappa^2)}{\kappa^2} + D_{n-1} 2(n-1)^2 + G_{n-1} \frac{2(2n-1)}{\kappa} = 0, \\ B_n \frac{2(2n+1)}{\kappa} + D_n \frac{4n}{\kappa} + G_n \frac{(2-\kappa^2)}{\kappa^2} + G_{n-1} 2n^2 = 0. \end{gathered} \quad (22)$$

Функция, аппроксимирующая δ при $\rho \geqslant \rho_m$, представляется в виде

$$\delta(\rho) = C_1(\kappa) K_0(\sqrt{2}\rho) + C_2(\kappa) \delta_c(\rho). \quad (23)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 в (23) находятся из условий сшивания решений при ρ_m

$$C_1(\kappa) K_0(\sqrt{2}\rho_m) + C_2(\kappa) \delta_c(\rho_m) = 1 - f(\rho_m), \quad (24)$$

$$C_1(\kappa) \sqrt{2} K_1(\sqrt{2}\rho_m) - C_2(\kappa) \left.\frac{d\delta_c}{d\rho}\right|_{\rho_m} = \left.\frac{df}{d\rho}\right|_{\rho_m}, \quad (25)$$

где в (20) можно ограничиться первыми членами сумм.

Полученные решения должны были удовлетворять условию (8) с заданной точностью q, т. е.

$$\left| \left(\int_0^{\infty} h^2 \rho d\rho \right) \Big/ \left(\int_0^{\infty} \frac{(1-f^2)^2}{2\kappa^2} \rho d\rho \right) - 1 \right| < q, \quad (26)$$

где интегралы вычисляются с использованием аппроксимаций (18) и (23).

Уравнения (9) и (10) решались в области ($1/\sqrt{2} \leqslant \kappa \leqslant 50$) при $\epsilon = 1 \cdot 10^{-9}$ и $q = 1 \cdot 10^{-4}$. Коэффициенты a и h_c определялись с относительной точностью, лучшей 10^{-4}.

Как известно, первое критическое внешнее поле $h_{c1}(\kappa)$, при котором энергетически выгодно образование флюксоида с одним квантом Φ_0, определяется из условия обращения в нуль интеграла от (1) по сечению флюксоида [4]

$$\varepsilon(\kappa) - 4\pi h_{c1}(\kappa) = 0, \tag{27}$$

где $\varepsilon(\kappa)$ определяется (7).

Величины $h_{c1}(\kappa)$ вычислялись, согласно (7), с учетом аппроксимации (23). Относительные точности этих вычислений лучше 10^{-3} во всей области κ. Полученная зависимость согласуется с [3].

Соответствующие расчеты при двух квантах во флюксоиде [9] показывают, что $\varepsilon(\kappa, 2)/\varepsilon(\kappa, 1) > 2$ при $\kappa > 1/\sqrt{2}$, т. е. в сверхпроводниках второго рода энергетически наиболее выгодны флюксоиды с одним квантом потока магнитного поля.

2.1. Характеристики флюксоида с одним квантом. Зависимости расчетных величин h_{c1}, h_c, a и b_m от κ хорошо аппроксимируются формулами с указанными точностями

$$\begin{gathered} h_{c1a}(\kappa) = \frac{(\sqrt{2}\kappa)^{-\pi/2}}{(\sqrt{2}\kappa)^{q_1}}, \;\; q_1 = 0{,}081 \left(1 - \exp\left[-0{,}04(\sqrt{2}\kappa - 1)\right]\right), \\ \left|\frac{h_{c1a}}{h_{c1}} - 1\right| < 3 \cdot 10^{-3}, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} h_{ca}(\kappa) = \frac{(\sqrt{2}\kappa)^{-1{,}39}}{(\sqrt{2}\kappa)^{q_0}}, \;\; q_0 = 0{,}136 \left(1 - \exp\left[-0{,}05(\sqrt{2}\kappa - 1)\right]\right), \\ \left|\frac{h_{ca}}{h_c} - 1\right| < 4 \cdot 10^{-3}, \end{gathered} \tag{29}$$

$$a_a(\kappa) = 0{,}584 + 0{,}271 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\kappa}} - \sqrt{\sqrt{2}\kappa}\right), \;\; \left|\frac{a_a}{a} - 1\right| < 3 \cdot 10^{-3}, \tag{30}$$

$$\begin{gathered} b_a(\kappa) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2}\kappa)^{-1{,}42}}{(\sqrt{2}\kappa)^{q_b}}, \;\; q_b = 0{,}2 \left(1 - \exp\left[-0{,}04(\sqrt{2}\kappa - 1)\right]\right), \\ \left|\frac{b_a - 1}{b_m - 1} - 1\right| < 3 \cdot 10^{-2}. \end{gathered} \tag{31}$$

Аппроксимирующая функция $h_{c1a}(\kappa)$ в пределах точности, указанной в (28), совпадает с приведенными в таблице [3] шестью расчетными значениями $h_1(\kappa)$.

Из (28) и (29) видно, что определяющими являются зависимости $h_{c1a} \approx (1/\kappa^{\pi/2})$ и $h_{ca} \approx (1/\kappa^{1,39})$, и следует, что отношение $h_c(\kappa)/h_{c1}(\kappa)$ монотонно растет с ростом κ и изменяется от 1 при $\kappa = 1/\sqrt{2}$ до 1,7 при $\kappa = 50$. Из анализа (30) и (31) следует, что коэффициент $a(\kappa)$ и амплитуда $b_m(\kappa)$ функции, аппроксимирующей $F|_{\rho>\rho_m}$ (18), существенно изменяются только при $\kappa < 10$ ($a(1/\sqrt{2}) \simeq 0{,}855$, $a(10) \simeq 0{,}59$, $b_m(1/\sqrt{2}) = 1+1/\sqrt{2}$, $b_m(10) \simeq 1$).

В энергии флюксоида доля энергии неполной конденсации в его центральной части (равная, согласно (8), доле энергии магнитного поля) существенна и при $1/\sqrt{2} < \kappa < 50$ монотонно изменяется в пределах $(0,21 > (\varepsilon_n/\varepsilon) > 0,11)$, а доли энергии, определяемые $(\nabla f)^2$ и $(f\mathcal{A})^2$, изменяются, соответственно, в пределах (0,29–0,06) и (0,29–0,72).

2.2. Сравнение с экспериментом. Отметим, что теория Гинзбурга–Ландау подразумевает объемную однородность вещества, т. е. в рассматриваемом случае однородного вдоль поля (оси z) цилиндрического образца вещество в отсутствие поля однородно и в поперечном сечении (параметр κ не зависит от координат). Для таких сверхпроводников второго рода кривая намагниченности при H_{c1} должна иметь резкий максимум (при $H > H_{c1}$ кванты магнитного потока проникают в сверхпроводник, равномерно распределяясь по его сечению, и намагниченность падает). При этом большему κ соответствует меньшее H_{c1}.

В большинстве рассмотренных ниже экспериментальных результатов кривые намагниченности имеют резкий максимум при H_{c1}, но в ряде случаев эти кривые имеют в той или иной степени пологий максимум.

При пологих максимумах кривых намагниченности ряд авторов [11–14] за H_{c1} принимают значение поля H_1, при котором эта кривая отклоняется от линейной зависимости, а некоторые авторы [8, 15] за H_{c1} принимают значение поля H_2, при котором на спаде кривой модуль ее производной имеет максимум. Было также предложено [16] для таких кривых намагниченности определять H_{c1} через поле H_s, соответствующее точке пересечения касательной к максимальному спаду этой кривой с направлением линейной намагниченности ($H_s \simeq H_m$, где H_m — поле, соответствующее максимуму намагниченности). Следовательно, здесь есть некоторая неопределенность при определении величины H_{c1}, и относительная неопределенность может составлять десятки процентов (для $\mathrm{Nb_3Sn}$ [13] $(H_2 - H_1)/H_s = 0,8$ (см. таблицу, порядковый номер 41)).

На участке подъема кривой от H_1 до положения ее максимума H_m поле проникает не равномерно по всему сечению, а, очевидно, только в некоторый приповерхностный слой. При $H > H_m$ начинается равномерное проникновение по всему сечению. С точки зрения теории Гинзбурга–Ландау рост намагниченности при $H_1 < H < H_m$ можно объяснить следующим: или параметр κ растет при приближении к поверхности образца, что и определяет проникновение поля только в эту область, или его поверхность неоднородна вдоль оси z, например, имеются выступы, в которые и проникает поле.

В таблице для различных соединений дано сравнение экспериментальных значений $h_{c1} = H_{c1}/H_{c2}$ при различных $\sqrt{2}\kappa = H_{c2}/H_{ct}$ (H_{ct} — термодинамическое критическое поле) с расчетными по формуле (28) h_{c1a}. Значения полей H_{c1}, H_{ct}, H_{c2} приведены в кГс, а значения температур T_i (измерения) и T_c (критической) в К.

Для соединений, у которых порядковые номера в таблице 8, 16, 40–46, величины H_{c1}, H_{ct}, H_{c2} получены автором из соответствующих кривых намагниченности, приведенных в [12–14, 17, 18].

В экспериментальных результатах, где были приведены кривые намагниченности с нерезкими или пологими максимумами, в качестве значения первого критического поля брались поля, соответствующие различным точкам этих максимумов, а именно: H_1, H_s, H_m, H_2 (соответствующие числовые значения имеют нижние индексы: (1), (s), (m), (2), как и числовые значения соответствующих величин $(h_{c1} - h_{c1a})/h_{c1a}$). Для некоторых соединений приведено несколько значений H_{c1} (номера 15, 16, 41–44).

Значения величин $(h_{c1} - h_{c1a})/h_{c1a}$, модули которых превышают 0,1, выделены жирным шрифтом.

N	Соединение или элемент	T_i	H_{c1} эксп.	H_{ct} эксп.	H_{c2} эксп.	$\sqrt{2}\kappa = H_{c2}/H_{ct}$	$h_{c1} = H_{c1}/H_{c2}$	$h_{c1a}(\kappa)$ из (27)	$(h_{c1} - h_{c1a})/h_{c1a}$
	Соединения с Pb								
1	Pb+2,5%Tl [17]	4,22	0,470	0,540	0,700	1,30	0,671	0,662	+0,013
2	Pb+2,54%Tl [4, 8]	4,22 1,92	0,51 0,734	0,596 0,846	0,704 1,11	1,18 1,3	0,724 0,673	0,770 0,662	-0,060 +0,017
3	Pb+4,78%Tl [19]	4,2	0,35	0,535	1,02	1,91	0,343	0,362	-0,052
4	Pb+5,0%Tl [17]	4,22	0,385	0,555	1,06	1,91	0,363	0,362	+0,003
5	Pb+5,07%Tl [4, 8]	4,22 1,82	0,43 0,60	0,561 0,854	1,01 1,73	1,8 2,03	0,426 0,347	0,396 0,329	+0,075 +0,055
6	Pb+10%Tl [17]	4,22	0,27	0,530	1,685	3,18	0,160	0,162	-0,013
7	Pb+15,19%Tl [4, 8]	4,22 1,76	0,23 0,31	0,534 0,762	2,17 3,76	4,06 4,93	0,106 0,0824	0,109 0,0799	-0,029 +0,031
8	Pb+25%Tl [17]	4,22	$0,155_{(\mathrm{m})}$	0,480	2,88	6,0	0,0538	0,0584	$-0,076_{(\mathrm{m})}$
9	Pb+30,4%Tl [19]	4,2	0,145	0,40	2,90	7,25	0,050	0,043	**+0,164**
10	Pb+30%Tl [9]	4,2	0,145	0,43	2,92	6,79	0,0497	0,0478	+0,040
11	Pb+30,31%Tl [4, 8]	4,22 1,70	0,170 0,240	0,575 0,756	2,84 4,46	4,94 5,90	0,0599 0,0538	0,0798 0,0600	**-0,249** -0,103
12	Pb+50,37%Tl [4, 8]	4,22 2,3	0,110 0,150	0,370 0,520	2,27 4,27	6,14 8,21	0,0521 0,0351	0,0562 0,0351	-0,073 0,002

Продолжение таблицы

N	Соединение или элемент	T_i	H_{c1} эксп.	H_{ct} эксп.	H_{c2} эксп.	$\sqrt{2}\kappa = H_{c2}/H_{ct}$	$h_{c1} = H_{c1}/H_{c2}$	$h_{c1a}(\kappa)$ из (27)	$(h_{c1} - h_{c1a})/h_{c1a}$
					Соединения с Pb				
13	Pb+3,5%In [4, 8]	4,22 1,95	$0,53_{(\mathbf{2})}$ $0,73_{(\mathbf{2})}$	0,604 0,842	0,983 1,52	1,62 1,80	0,539 0,480	0,465 0,396	$+\mathbf{0,159_{(2)}}$ $+\mathbf{0,212_{(2)}}$
14	Pb+3,69%In [19]	4,2	0,39	0,545	0,97	1,78	0,402	0,404	-0,005
15	Pb+4,0%In [11]	4,2 1,1 	$0,53_{(\mathbf{1})}$ $0,56_{(\mathbf{m})}$ $0,70_{(\mathbf{1})}$ $0,75_{(\mathbf{m})}$	0,742 0,742 1,035 1,035	1,20 1,20 1,90 1,90	1,62 1,62 1,84 1,84	0,442 0,467 0,368 0,394	0,469 0,469 0,384 0,384	$-0,057_{(\mathbf{1})}$ $-0,006_{(\mathbf{m})}$ $-0,041_{(\mathbf{1})}$ $+0,026_{(\mathbf{m})}$
16	Pb+4,2%In [12]	2,5	$0,44_{(\mathbf{1})}$ $0,53_{(\mathbf{s})}$	0,85 0,85	1,85 1,85	2,18 2,18	0,238 0,288	0,294 0,294	$-\mathbf{0,187_{(1)}}$ $-0,020_{(\mathbf{s})}$
17	Pb+13,9%In [19]	4,2	0,22	0,51	2,45	4,80	0,0898	0,0840	+0,058
18	Pb+13,5%In [4, 8]	4,22 1,75	0,22 0,31	0,563 0,812	2,40 3,78	4,26 4,66	0,0917 0,0820	0,101 0,0876	-0,093 -0,064
19	Pb+25%In [9]	4,2	$\sim 0,205$	0,570	3,50	6,14	0,0585	0,0562	+0,040
20	Pb+31,6%In [19]	4,2	0,155	0,495	3,70	7,47	0,0419	0,0423	-0,009
21	Pb+5,05%Hg [19]	4,2	0,235	0,58	2,30	3,97	0,102	0,114	-0,109
22	Pb+10,1%Hg [19]	4,2	0,22	0,59	4,30	7,29	0,0512	0,0439	**+0,166**
23	Pb+25%Hg [9]	4,2	0,34	0,58	1,46	2,52	0,233	0,233	-0,003
24	Pb+1,97%Bi [19]	4,2	0,46	0,57	0,73	1,28	0,630	0,678	-0,072
25	Pb+8,8%Bi [9]	4,2	0,245	0,675	3,25	4,81	0,0754	0,0831	-0,092
26	Pb+9,9%Bi [19]	4,2	0,29	0,64	2,80	4,38	0,104	0,0980	+0,061
27	Pb+3,51%Sn [19]	4,2	0,53	0,545	0,56	1,02	0,946	0,955	-0,010
28	Pb+12,9%Sn [19]	4,2	0,45	0,65	1,10	1,69	0,409	0,438	-0,067
29	Pb+1,55%Na [19]	4,2	0,28	0,61	2,05	3,36	0,137	0,149	-0,079
30	Pb+8,32%Na [19]	4,2	0,19	0,545	6,00	11,0	0,0317	0,0229	**+0,382**
31	Pb+15%Ir [9]	4,2	0,25	0,650	3,04	4,68	0,0822	0,0871	-0,056
					Nb				
32	Nb [20]	4,2	$\sim 1,30$	1,61	2,68	1,67	0,485	0,448	+0,083
33	Nb [21]	4,2 3,3 2,4 1,77	0,96 1,05 1,09 1,165	1,55 1,72 1,79 1,91	3,32 4,16 4,36 4,89	2,14 2,42 2,44 2,56	0,290 0,252 0,250 0,238	0,303 0,249 0,246 0,228	-0.040 +0,011 +0,016 +0,043
34	pure Nb [15] $T_c = 9,25$	0,0	$1,85_{(\mathbf{2})}$	2,10	4,10	1,95	0,451	0,349	$+\mathbf{0,293_{(2)}}$

Окончание таблицы

N	Соединение или элемент	T_i	H_{c1} эксп.	H_{ct} эксп.	H_{c2} эксп.	$\sqrt{2}\kappa = H_{c2}/H_{ct}$	$h_{c1} = H_{c1}/H_{c2}$	$h_{c1a}(\kappa)$ из (27)	$(h_{c1} - h_{c1a})/h_{c1a}$
				Nb и его соединения и Mo–Re					
35	Nb+0,87%Ta [15] $T_c = 8,87$	0,0	$1,75_{(2)}$	2,06	4,45	2,16	0,393	0,297	$\mathbf{+0,322}_{(2)}$
36	Nb+1,56%Ta [15] $T_c = 8,76$	0,0	$1,68_{(2)}$	2,04	4,55	2,23	0,369	0,283	$\mathbf{+0,306}_{(2)}$
37	Nb+4,25%Ta [15] $T_c = 8,55$	0,0	$1,33_{(2)}$	1,98	5,32	2,69	0,250	0,211	$\mathbf{+0,187}_{(2)}$
38	Nb+6,22%Ta [15] $T_c = 8,42$	0,0	$1,11_{(2)}$	1,91	5,63	2,95	0,197	0,182	$+0,084_{(2)}$
39	Nb+19,7%Ta [15] $T_c = 7,50$	0,0	$0,84_{(2)}$	1,71	7,49	4,38	0,112	0,097	$\mathbf{+0,159}_{(2)}$
40	$NbSn_2$ [13] $T_c = 2,52$	1,79	$0,053_{(m)}$	0,107	0,31	2,90	0,171	0,187	$-0,083_{(m)}$
41	Nb_3Sn [13] $T_c = 17,98$	17,4	$0,017_{(1)}$ $0,028_{(s)}$ $0,033_{(m)}$ $0,040_{(2)}$	0,161 0,161 0,161 0,161	2,98 2,98 2,98 2,98	18,51 18,51 18,51 18,51	0,0057 0,0094 0,0111 0,0134	0,00906 0,00906 0,00906 0,00906	$\mathbf{-0,370}_{(1)}$ $+0,038_{(s)}$ $\mathbf{+0,225}_{(m)}$ $\mathbf{+0,485}_{(2)}$
42	Nb+22%Zr+ 30%Ti литой [14]	4,2	$0,60_{(1)}$ $1,0_{(m)}$ $1,4_{(2)}$	5,0 5,0 5,0	78,0 78,0 78,0	15,6 15,6 15,6	0,0077 0,0128 0,0180	0,0121 0,0121 0,0121	$\mathbf{-0,364}_{(1)}$ $+0,059_{(m)}$ $\mathbf{+0,265}_{(2)}$
43	Nb+22%Zr+ 30%Ti проволока [14]	4,2	$0,85_{(1)}$ $1,43_{(s)}$ $2,5_{(m)}$ $3,3_{(2)}$	7,50 7,50 7,50 7,50	78,0 78,0 78,0 78,0	10,4 10,4 10,4 10,4	0,0109 0,0183 0,0321 0,0423	0,0238 0,0238 0,0238 0,0238	$\mathbf{-0,542}_{(1)}$ $\mathbf{-0,231}_{(s)}$ $\mathbf{+0,349}_{(m)}$ $\mathbf{+0,78}_{(2)}$
44	Nb+22%Zr+ 30%Ti отожженная проволока [14]	4,2	$1,50_{(1)}$ $3,6_{(s)}$ $4,6_{(m)}$ $6,0_{(2)}$	12,90 12,90 12,90 12,9	78,0 78,0 78,0 78,0	6,05 6,05 6,05 6,05	0,0192 0,0462 0,0590 0,0770	0,0576 0,0576 0,0576 0,0576	$\mathbf{-0,666}_{(1)}$ $\mathbf{-0,198}_{(s)}$ $+0,024_{(m)}$ $\mathbf{+0,337}_{(2)}$
45	Mo+15%Re [18] $T_c = 7,99$	4,17	$0,40_{(s)}$	1,10	4,25	3,87	0,0940	0,1160	$\mathbf{-0,190}_{(s)}$
46	Mo+25%Re [18] $T_c = 10,25$	2,46	$0,50_{(s)}$	1,25	7,00	5,60	0,0714	0,0652	$+0,095_{(s)}$

Комментарии к таблице.

• Кривые намагниченности для сплавов Pb в основном имели острые максимумы.

• Для Pb + 25 % Tl [17] (номер 8) из кривой намагниченности [17] получено H_{ct}, на четверть большее приведенного в таблице этой работы.

• Для Pb + 30 % Tl из работ [19, 9, 4, 8] следуют различающиеся результаты (номера 9–11).

• В исследованиях $NbSn_2$ и Nb_3Sn [13] образцы были в виде трубочек, плотно заполненных соответствующими кристаллами и пропитанных парафином, т. е. здесь образцы были по всему объему неоднородны с неровной поверхностью вдоль поля (номера 40 и 41).

• При исследовании сплава $\mathrm{Nb} + 22\,\%\,\mathrm{Zr} + 30\,\%\,\mathrm{Ti}$ [14] использовались цилиндрические образцы, не предполагающие хорошей однородности материала: литой, прокатанная проволока и отожженная проволока (номера 42–44).

• Номера 15, 16, 40–44 показывают, что определение экспериментального значения H_{c1} через H_s или H_m хорошо согласуется с расчетом.

• В экспериментах [15] (номера 34–39) авторы принимали $H_{c1} = H_2$ и полученные H_{c1}, H_{ct}, H_{c2} приводили к $T = 0$. Из сравнения результатов по Nb [15] (номер 34) с результатами [21] (номер 33) видно, что такое определение H_{c1} дает *систематическую* ошибку в величине $(h_{c1} - h_{c1a})/h_{c1a}$ порядка $30\,\%$. Отсюда можно заключить, что результаты по Nb–Ta (номера 35–39) тоже согласуются с расчетными.

• Аналогичное заключение можно сделать о Pb $+$ 3,5 %In [8] (номер 13), сравнивая его с номерами 14–16.

В целом видно хорошее согласие экспериментальных величин с теорией ГЛАГ в области $(1,02 \leqslant \sqrt{2}\kappa \leqslant 18,5)$, которое подчеркивает, что эта теория хорошо описывает сверхпроводники второго рода не только при $(T_c - T_i) \ll T_c$, но и при $(T_c - T_i) \sim T_c$, что отмечалось в [2], и где, как видно из таблицы (номера 2, 5, 7, 11–13, 15, 18, 33), κ зависит от T_i (растет с уменьшением T_i в согласии с теоретическими представлениями). Эксперименты подтверждают, что поток магнитного поля проникает в сверхпроводники второго рода в виде флюксоидов с одним квантом Φ_0.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

И в мейсснеровской зоне, и во флюксоиде системы линий уровней f и h совпадают (удовлетворяют условию ортогональности (5), следующему для односвязного сверхпроводника из общих уравнений).

В удаленном от границы образца одиночном флюксоиде энергия магнитного поля равна энергии неполной конденсации (8).

На основе численных решений уравнений (9) и (10), обеспечивающих относительную точность равенства (8) лучше $1 \cdot 10^{-4}$, при $1/\sqrt{2} < \kappa < 50$ получена аппроксимирующая аналитическая зависимость $h_{c1a}(\kappa) = H_{c1}/H_{c2}$ (27), согласующаяся с расчетами лучше $3 \cdot 10^{-3}$. В области $1,02 < \sqrt{2}\kappa < 18,5$ эта зависимость хорошо согласуется с экспериментальными данными (таблица), следовательно, уравнения Гинзбурга–Ландау применимы к металлическим сверхпроводникам и при $(T_c - T_i) \sim T_c$.

Автор благодарит участников семинара Ускорительного отделения ЛФЧ за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064.
2. *Гинзбург В. Л.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 593.
3. *Harden J. L., Arp V.* // Cryogenics. 1963. V. 3. P. 105.
4. *Абрикосов А. А.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442.
5. *Горьков Л. П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1918; там же. Т. 37. С. 1407.
6. *Bardeen J., Cooper I. N., Schrieffer J. R.* // Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 1175.
7. *Cooper I. N.* // Phys. Rev. 1956. V. 104. P. 1189.
8. *Шубников Л. В. и др.* // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 221.
9. *Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Б.* Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970.
10. *Кузнецов А. Б.* // Тр. III научного семинара памяти В. П. Саранцева. Дубна, 1999. Дубна: ОИЯИ, 2000. С. 173.
    Кузнецов А. Б. // Тр. XVII Совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 2000. Протвино: ИФВЭ, 2000. Т. 1. С. 389.
11. *Trauble H., Essmann U.* // Phys. Stat. Sol. 1967. V. 20. P. 95.
12. *Овчаренко О. Н., Мартынов Н. С., Коваленко Т. А.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Фундаментальная и прикладная сверхпроводимость. Харьков, 1973. Вып. 1(1). С. 42.
13. *Мацакова А. А.* // Там же. С. 62.
14. *Лазаренко Б. Г., Овчаренко О. Н., Мацакова А. А.* Металловедение, физико-химия и металлофизика сверхпроводников // Тр. II и III совещаний по металловедению, физико-химии и металлофизике сверхпроводников. М.: Наука, 1967. С. 98.
15. *Ikushima A., Mizusaki T.* // J. Phys. Chem. Solids. 1969. V. 30. P. 875.
16. *Stromberg T. F., Swenson C. A.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9. P. 370.
17. *Bon Mardion G., Goodmam B. B., Lacaze A.* // Phys. Lett. 1962. V. 2. P. 321.
18. *Joiner W. C. H., Blaugher R. D.* // Rev. Modern. Phys. 1964. V. 30. P. 67.
19. *Livincston J. D.* // Phys. Rev. 1963. V. 129. P. 1943.
20. *McConville T., Serin B.* // Phys. Rev. 1965. V. 140. P. A1169.
21. *Hitchcock H. C.* // Rev. Modern. Phys. 1964. V. 30. P. 61.

Получено 15 февраля 2007 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 11.05.2007.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,2. Тираж 305 экз. Заказ № 55772.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/