

P11-2007-38

К. В. Лукьянов

МОДЕЛЬ ЯДРО-ЯДЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО  
ФОЛДИНГА: ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ,  
ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД И ПРОГРАММА  
ВЫЧИСЛЕНИЯ

Лукьянов К. В.

P11-2007-38

Модель ядро-ядерного потенциала двойного фолдинга:  
основные формулы, итерационный метод и программа вычисления

Дано описание метода построения ядро-ядерного потенциала на основе подхода, определяемого моделью двойного фолдинга. Представлена итерационная процедура для численного решения соответствующего интегрального уравнения. Обсуждаются особенности программной реализации. Демонстрируются численные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Lukyanov K. V.

P11-2007-38

Double Folding Model of Nucleus-Nucleus Potential:  
Formulae, Iteration Method and Computer Code

Method of construction of the nucleus-nucleus double folding potential is described. Iteration procedure for the corresponding integral equation is presented. Computer code and numerical results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

## 1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему моменту накоплен значительный материал по дифференциальным сечениям упругого рассеяния и полным сечениям ядро-ядерных реакций при промежуточных энергиях. Это делает актуальным развитие микроскопических моделей для адекватного описания экспериментальных данных без использования феноменологических параметров. К данной проблематике относятся, в том числе, задачи исследования ядер с экзотической структурой [1, 2]. Это ядра с «нейтронным гало», нейтронно- или протонно-избыточные ядра, а также ядра с альфа-кластерной структурой. Их свойства проявляются в наблюдаемых характеристиках рассеяния на стабильных ядрах с хорошо установленной структурой. Кроме того, разработка моделей ядро-ядерного взаимодействия важна в связи с прикладными исследованиями по преобразованию радиоактивных ядерных отходов в радиационно безопасные продукты.

Движение налетающего ядра с кинетической энергией  $E$  в поле потенциала  $U$  описывается волновым уравнением Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + (E - U(\Psi))\Psi = 0, \quad (1.1)$$

где  $U$  есть комплексный (оптический) ядро-ядерный потенциал

$$U(r) = V(r) + iW(r), \quad (1.2)$$

$\mu = m \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$  — приведенная масса;  $m$  — масса нуклона;  $A_1, A_2$  — атомные веса сталкивающихся ядер;  $\Psi(\mathbf{r})$  — волновая функция относительного движения ядер;  $\hbar$  — постоянная Планка. В принципе при построении микроскопических моделей ядерного потенциала исходное уравнение Шредингера записывается для системы всех участвующих во взаимодействии друг с другом нуклонов и затем преобразуется так, чтобы выделить уравнение только для части  $\Psi(\mathbf{r})$  полной волновой функции, которая зависит от координаты между центрами тяжести сталкивающихся ядер  $\mathbf{r}$ . Как правило, это уравнение оказывается нелинейным, где соответствующий потенциал сам зависит от  $\Psi(\mathbf{r})$ . Однако на практике задачу упрощают и сводят проблему к решению двух независимых задач, а именно, к разработке методов построения микроскопического потенциала с учетом основных, линейных, членов по потенциалу

нуклон-нуклонного ( $NN$ ) взаимодействия  $v_{NN}$ , и независимо, к решению уравнения (1.1) с полученным потенциалом  $U(r)$ . В этой последней задаче с помощью разложения  $\Psi(\mathbf{r})$  в ряд по сферическим гармоникам переходят к системе дифференциальных уравнений для одномерных радиальных волновых функций (парциальных волн) и составляют программы их численного решения (например, ECIS [3] и DWUCK4 [4]). В некоторых физически обоснованных случаях строят приближенные аналитические методы решения. Так, при энергиях столкновения, значительно превышающих значение потенциала в области его основного вклада в рассеяние, можно использовать явный вид эйкональной фазы рассеяния и соответствующие аналитические выражения для амплитуды и сечений рассеяния, записанные в высокоэнергетическом приближении (ВЭП) (см., например, [5]).

Что же касается микроскопических подходов к расчету самого потенциала, то здесь для получения его вещественной части  $V$  была разработанная модель двойного фолдинга (МДФ) [6–8]. Она успешно себя зарекомендовала в расчетах сечений как протон-ядерного рассеяния, так и рассеяния легких и тяжелых ядер ядрами. При этом мнимая часть потенциала  $W$  не рассчитывается, а задается феноменологически с последующей подгонкой, как правило, трех и более параметров, определяющих форму  $W$ . Однако здесь можно использовать как основу полученный недавно микроскопический комплексный ядро-ядерный потенциал [9], который адекватно воспроизводит фазу микроскопической теории рассеяния в ее оптическом пределе, развитой на основе высокоэнергетического приближения в работах [10, 11] для протон-ядерного рассеяния и затем обобщенной в работах [12, 13] на случай ядро-ядерного рассеяния.

Как показали практические расчеты [9, 14–16], сочетание подходов ВЭП и МДФ обеспечивает согласующееся с экспериментом описание дифференциальных сечений упругого рассеяния ядер ядрами и полных сечений реакций при промежуточных энергиях от 10 до 100 МэВ на нуклон налетающего ядра. Этот подход можно обобщить также на случай неупругого ядро-ядерного рассеяния в указанном диапазоне энергий [17].

В настоящей работе излагается метод построения ядро-ядерного потенциала на основе МДФ. В разд. 2 приводятся формулы, определяющие модель потенциала двойного фолдинга для ядро-ядерного упругого рассеяния. В разд. 3 дано обобщение МДФ-потенциала для неупругого рассеяния с возбуждением коллективных состояний ядер. В разд. 4 описаны итерационный метод и программа для вычисления ядро-ядерных потенциалов МДФ, приведены формфакторы типичных плотностей и параметры  $NN$ -потенциалов, необходимые для расчетов. В разд. 5 — численные примеры.

## 2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ МДФ ДЛЯ ЯДРО-ЯДЕРНОГО РАССЕЙЯНИЯ

В модели двойного фолдинга (МДФ) потенциал взаимодействия двух ядер строится как сумма потенциалов эффективного (с учетом влияния ядерной среды) нуклон-нуклонного взаимодействия  $v_{NN}$  каждого из нуклонов налетающего ядра  $A_1$  с нуклонами ядра-мишени  $A_2$ . Расположение координат этих нуклонов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  показано на рис. 1, а вероятности их нахождения в данных

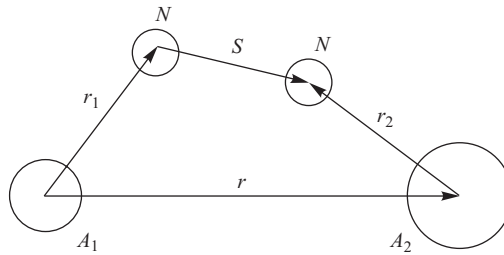


Рис. 1. Схема расположения координат, используемых в расчетах

точках задаются функциями распределения плотностей  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  геометрических центров нуклонов («точечных нуклонов») в ядрах  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. При этом суммирование заменяется шестимерным интегрированием:

$$V(\mathbf{r}) = \int \rho_1(\mathbf{r}_1) v_{NN}(s) \rho_2(\mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (2.1)$$

Здесь функция распределения плотности точечных нуклонов ядра  $\rho$  есть сумма его нормированных функций распределений плотности протонов и нейтронов \*:

$$\rho = \rho_p + \rho_n, \quad (2.2)$$

$$4\pi \int_0^\infty \rho_p(\mathbf{r}) r^2 dr = Z, \quad 4\pi \int_0^\infty \rho_n(\mathbf{r}) r^2 dr = N, \quad 4\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) r^2 dr = A. \quad (2.3)$$

Если формы распределений  $\rho_p$  и  $\rho_n$  совпадают, то

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Z}{A} \rho(\mathbf{r}) + \frac{N}{A} \rho(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

---

\*Ниже мы будем специально оговаривать тот случай, когда функции плотности сферически-симметричны, то есть  $\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(r)$ . Однако, чтобы при замене переменных не загромождать аргументы знаками модуля, будем снимать знак вектора в основном только в конечных выражениях.

Согласно подходу, определяемому МДФ, вещественный ядро-ядерный потенциал состоит из нескольких слагаемых. Ниже мы рассмотрим потенциал прямого фолдинга  $V^D$ , как он задан выражением (2.1), в следующем разделе — потенциал с учетом нуклонного обмена  $V^{EX}$ . Каждый из них разбивается, в свою очередь, на изоскалярную (IS) и изовекторную (IV) части, так что суммарный потенциал имеет вид

$$V = V^D + V^{EX} = (V_{IS}^D + V_{IV}^D) + (V_{IS}^{EX} + V_{IV}^{EX}). \quad (2.5)$$

**2.1. Прямой потенциал фолдинга.** Протоны и нейтроны отличаются по характеру своего взаимодействия друг с другом, и поэтому составляющие  $NN$ -потенциала строятся согласно закону сохранения изоспина, то есть

$$v_{nn} = v_{pp} = (v_{00} + v_{01})(\delta_{nn} + \delta_{pp}), \quad v_{np} = v_{pn} = (v_{00} - v_{01})(\delta_{np} + \delta_{pn}), \quad (2.6)$$

где  $\delta_{ij}=1$  при  $i = j$  и 0 при  $i \neq j$ . Подставляя эти  $NN$ -потенциалы в (2.1) и учитывая (2.2) и (2.6), получаем

$$V_{IS}^D(\mathbf{r}) = \int \rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2) v_{00}^D(E, \rho, s) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (2.7)$$

$$V_{IV}^D(\mathbf{r}) = \int \delta\rho_1(\mathbf{r}_1) \delta\rho_2(\mathbf{r}_2) v_{01}^D(E, \rho, s) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (2.8)$$

где

$$\delta\rho_i(\mathbf{r}_i) = \rho_{i,p}(\mathbf{r}_{i,p}) - \rho_{i,n}(\mathbf{r}_{i,n}), \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Эффективные  $NN$ -потенциалы в ядерной среде  $v_{00}^D$  и  $v_{01}^D$  параметризуются отдельно. Они включают зависимость от энергии налетающего нуклона  $E/A_1$  и от плотности ядер  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  в области их перекрытия. Запишем такой потенциал как

$$v(E, \rho, s) = g(E) F(\rho) v(s). \quad (2.10)$$

Корректирующая функция  $F(\rho)$  задает зависимость от плотности в общем виде [19]:

$$F(\rho) = C[1 + \alpha e^{-\beta\rho} - \gamma\rho], \quad \rho = \rho_1 + \rho_2. \quad (2.11)$$

При подстановке (2.10), (2.11) в выражение для потенциала прямого фолдинга (2.7) интеграл удастся упростить и свести к одномерному, если в  $F(\rho)$  в качестве аргументов функций плотности ядер 1 и 2 выбирать соответствующие координаты нуклонов, а именно,

$$\rho = \rho_1(\mathbf{r}_1) + \rho_2(\mathbf{r}_2). \quad (2.12)$$

Тогда (2.7) принимает вид

$$V_{IS}^D(\mathbf{r}) = Cg(E) \int \left\{ \rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) + \alpha \bar{\rho}_1(\mathbf{r}_1)\bar{\rho}_2(\mathbf{r}_2) - \right. \\ \left. - \gamma \left[ \tilde{\rho}_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) + \rho_1(\mathbf{r}_1)\tilde{\rho}_2(\mathbf{r}_2) \right] \right\} v_{00}^D(\mathbf{s}) d^3r_1 d^3r_2, \quad (2.13)$$

где

$$\bar{\rho}_i(\mathbf{r}_i) = \rho_i(\mathbf{r}_i) e^{-\beta\rho_i(\mathbf{r}_i)}, \quad \tilde{\rho}_i(\mathbf{r}_i) = [\rho_i(\mathbf{r}_i)]^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Для последующих расчетов шестимерный интеграл (2.13) упрощается путем перехода в импульсное представление. В случае рассеяния сферически-симметричных ядер подынтегральные функции в (2.13) не зависят от угловых переменных, и потенциал выражается через одномерный интеграл

$$V_{IS}^D(r) = \frac{Cg(E)}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \rho_1(q)\rho_2(q) + \alpha \bar{\rho}_1(q)\bar{\rho}_2(q) - \right. \\ \left. - \gamma \left[ \tilde{\rho}_1(q)\rho_2(q) + \rho_1(q)\tilde{\rho}_2(q) \right] \right\} v_{00}^D(q) j_0(qr) q^2 dq, \quad (2.15)$$

куда входят фурье-образы (формфакторы) соответствующих подынтегральных функций в (2.13), (2.14), например,

$$\rho(q) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(r) d^3r = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) j_0(qr) r^2 dr, \quad (2.16)$$

и аналогично для  $\bar{\rho}_1(q)$ ,  $\tilde{\rho}(q)$  и  $v(q)$ . Здесь  $j_0(qr) = \sin(qr)/qr$  — сферическая функция Бесселя нулевого порядка.

Для изовекторного потенциала  $V_{IV}^D$  имеем те же выражения, что и (2.13)–(2.16), только вместо плотностей  $\rho$  всюду надо подставить соответствующие  $\delta\rho$  (2.9).

**2.2. Обменный потенциал.** Обменный потенциал, как и прямой, состоит из изоскалярной и изовекторной части. Рассмотрим его изоскалярную часть, которая определяется выражением [20]

$$V_{IS}^{EX}(\mathbf{r}) = \int \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}) \rho_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{s}) \times \\ \times g(E) F(\rho) v_{00}^{EX}(s) j_0(K(r)s/M) d^3r_1 d^3r_2. \quad (2.17)$$

Здесь  $\rho(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  — смешанная одночастичная матрица плотности точечных нуклонов ядра. Далее, сюда входит  $j_0(\kappa s)$  — нулевая ( $l = 0$ ) компонента частичного разложения экспоненты  $\exp(i\vec{\kappa}\vec{s})$ , полученной как произведение плоской волны нуклона ядра  $A_1$  и сопряженной плоской волны нуклона ядра  $A_2$  с импульсами  $\vec{\kappa}_1 = \mathbf{K}/A_1$  и  $\vec{\kappa}_2 = \mathbf{K}/A_2$ , где  $\mathbf{K}$  — импульс относительного движения ядер. При свободном движении ядер имеем

$K = [2mME_{c.m.}/\hbar^2]^{1/2}$ , где  $m$  — масса нуклона,  $M = A_1A_2/(A_1 + A_2)$ , и тогда  $\kappa = K/A_1 + K/A_2 = K/M$ . Искажение нуклонных волновых функций в ядерном поле приближенно учитывается с помощью замены  $K$  на локальный импульс ядро-ядерного движения

$$K(r) = [(2mM/\hbar^2)(E_{c.m.} - V(r) - V_C(r))]^{1/2}, \quad (2.18)$$

где  $V(r)$  есть суммарный потенциал ядро-ядерного взаимодействия, который включает прямую и обменную части, то есть теперь  $\kappa(r) = K(r)/M$ . Как видно, импульс  $K(r)$  сам зависит от ядро-ядерного потенциала, т.е. задача (2.17) является нелинейной.

Для упрощения нелокальных матриц плотности в (2.17) будем использовать линейное приближение [21]

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r} \pm \mathbf{s}) \simeq \rho(\mathbf{r} \pm \frac{\mathbf{s}}{2}) \hat{j}_1(k_F(|\mathbf{r} \pm \frac{\mathbf{s}}{2}|) \cdot \mathbf{s}), \quad (2.19)$$

где

$$\hat{j}_1(x) = \frac{3}{x} j_1(x) = \frac{3}{x^3}(\sin x - x \cos x). \quad (2.20)$$

Здесь  $k_F(r)$  — локальный импульс Ферми нуклона в ядре:

$$k_F(r) = \left\{ \frac{5}{3\rho} [\tau(\rho) - \frac{1}{4} \nabla^2 \rho(r)] \right\}^{1/2}, \quad (2.21)$$

а  $\tau(\rho)$  — плотность кинетической энергии нуклонов в ядре. Это же выражение справедливо и для каждого сорта нуклонов ядра (протонов или нейтронов)  $q = n, p$  по отдельности: надо только заменить  $\rho \rightarrow \rho_q$  и  $\tau(\rho) \rightarrow \tau_q(\rho_q)$ . Таким образом импульс Ферми одинаков для нуклонов, протонов и нейтронов. Для последних, с учетом конечных размеров ядра, во многих работах (см., например, [8]) используется выражение из монографии [22], которое, если еще учесть  $\rho_q \simeq \rho/2$ , имеет вид

$$\frac{\tau(\rho)}{2} \simeq \tau_q(\rho_q) = \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} [\rho_q(r)]^{5/3} + \frac{|\nabla \rho_q(r)|^2}{36\rho_q(r)} + \frac{\nabla^2 \rho_q(r)}{3}. \quad (2.22)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} k_F^{(I)}(r) &= \left\{ [3\pi^2 \rho_q(r)]^{2/3} + \frac{5C_S |\nabla \rho_q(r)|^2}{3\rho_q^2(r)} + \frac{5\nabla^2 \rho_q(r)}{36\rho_q(r)} \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \left[ \frac{3\pi^2}{2} \rho(r) \right]^{2/3} + \frac{5C_S |\nabla \rho(r)|^2}{3\rho^2(r)} + \frac{5\nabla^2 \rho(r)}{36\rho(r)} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где множитель  $C_S$ , согласно [22], рекомендовано брать равным  $1/36$ .



Операторы дифференцирования в приведенных формулах действуют как

$$|\nabla\rho(r)|^2 = \left|\frac{d\rho(r)}{dr}\right|^2, \quad \nabla^2\rho(r) = \frac{d^2\rho(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho(r)}{dr}. \quad (2.24)$$

Теперь, чтобы в обменном потенциале (2.17) свести шестимерный интеграл к одномерному, сделаем ряд преобразований. Во-первых, в функции  $F(\rho)$  (2.11) зависимости эффективного  $NN$ -потенциала от плотности  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  будем, в отличие от (2.12), в качестве аргументов плотностей падающего ядра и ядра-мишени выбирать одну и ту же точку, а именно, середину расстояния между нуклонами 1 и 2:

$$\rho = \rho_1\left(\mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{s}}{2}\right) + \rho_2\left(\mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{s}}{2}\right). \quad (2.25)$$

В таком случае после подстановки в (2.17) функций (2.11), (2.19) с плотностями  $\rho_1(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}/2)$  и  $\rho_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}/2)$  удобно ввести новые переменные

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{u} = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{s}}{2}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{s}}{2}, \quad (2.26)$$

от которых теперь будут зависеть подынтегральные функции. Составим соответствующие комбинации этих функций

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}) &= \rho_i(\mathbf{x}_i) \hat{j}_1(k_{F,i}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{s}), & y_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}) &= h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}) e^{-\beta\rho_i(\mathbf{x}_i)}, \\ z_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}) &= h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}) \rho_i(\mathbf{x}_i), & i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

и представим обменный потенциал в виде

$$V_{IS}^{EX}(\mathbf{r}) = C g(E) \int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) v_{00}^{EX}(s) j_0(K(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}/M) d^3s, \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) &= \int \left\{ h_1(\mathbf{u}, \mathbf{s}) h_2(\mathbf{u} - \mathbf{r}, \mathbf{s}) + \alpha y_1(\mathbf{u}, \mathbf{s}) y_2(\mathbf{u} - \mathbf{r}, \mathbf{s}) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma [h_1(\mathbf{u}, \mathbf{s}) z_2(\mathbf{u} - \mathbf{r}, \mathbf{s}) + z_1(\mathbf{u}, \mathbf{s}) h_2(\mathbf{u} - \mathbf{r}, \mathbf{s})] \right\} d^3u. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Это последнее выражение упрощается за счет перехода в импульсное представление. В случае столкновения сферически-симметричных ядер все подынтегральные функции в (2.28) и (2.29) зависят только от модулей своих аргументов. Поэтому в (2.28) интеграл по  $d\hat{s}$  дает  $4\pi$ , а второй интеграл (2.29) в импульсном представлении принимает вид

$$V_{IS}^{EX}(r) = 4\pi C g(E) \int_0^\infty G(r, s) v_{00}^{EX}(s) j_0(K(r)s/M) s^2 ds, \quad (2.30)$$

где

$$G(r, s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ h_1(q, s) h_2(q, s) + \alpha y_1(q, s) y_2(q, s) - \right. \\ \left. - \gamma [h_1(q, s) z_2(q, s) + z_1(q, s) h_2(q, s)] \right\} j_0(qr) q^2 dq, \quad (2.31)$$

а формфакторы (фурье-образы) функций (2.27) равны

$$h_i(q, s) = 4\pi \int_0^\infty \rho_i(r) \hat{j}_1(k_{F,i}(r) \cdot s) j_0(qr) r^2 dr, \quad (2.32)$$

$$y_i(q, s) = 4\pi \int_0^\infty \rho_i(r) \hat{j}_1(k_{F,i}(r) \cdot s) e^{-\beta \rho_i(r)} j_0(qr) r^2 dr, \quad (2.33)$$

$$z_i(q, s) = 4\pi \int_0^\infty \rho_i^2(r) \hat{j}_1(k_{F,i}(r) \cdot s) j_0(qr) r^2 dr, \quad i = 1, 2. \quad (2.34)$$

Изовекторный обменный потенциал  $V_{IV}^{EX}$  получается из (2.30) заменой в соответствующих функциях (2.32)–(2.34) плотностей  $\rho_i$  на разности плотностей  $\delta\rho_i$  (2.9) — протонной и нейтронной — каждого из ядер 1 и 2. При этом естественно считать, что и для протонов, и для нейтронов данного ядра  $i$  ферми-импульс  $k_{F,i}$  один и тот же, вычисляемый с плотностью ядра как целого  $\rho_i = \rho_{p,i} + \rho_{n,i}$ , нормированной на  $A_i$ .

**2.3. Кулоновский потенциал взаимодействия ядер.** Кулоновский потенциал обычно рассчитывается как прямой фолдинг-потенциал без учета обмена нуклонами. Часто используется приближение так называемого потенциала однородного распределения заряда, когда точечный заряд  $eZ_1$  рассеивается в кулоновском поле, создаваемом однородно распределенным зарядом  $eZ_2$  в сфере радиуса  $R_C = r_c(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ , то есть суммарного зарядового радиуса сталкивающихся ядер. Такой потенциал легко найти аналитически, используя формулу фолдинга, аналогичную (2.1).

В общем случае расчет кулоновского потенциала можно проводить, используя формулу двойного фолдинга (2.15), куда подставляются формфакторы распределения точечных зарядов в ядрах и не учитывается зависимость потенциала кулоновского протон-протонного взаимодействия от плотности ядерной среды.

**2.4. Оптический ВЭП-потенциал.** До сих пор в большинстве работ по ядро-ядерному рассеянию с помощью фолдинга строился только вещественный потенциал. При сравнении с экспериментом к такому микропотенциалу добавлялась феноменологическая мнимая часть (обычно в вуде-саксоновской форме) с подгоняемыми параметрами. Это связано с трудностями построения практически реализуемой теории мнимой части потенциала в рамках рассматриваемой модели. В то же время известно, что высокоэнергетическое

приближение (ВЭП) успешно описывает рассеяние при энергиях  $E \gg |U(\bar{R})|$  и малых углах  $\vartheta \ll \sqrt{2/k\bar{R}}$ , где  $\bar{R}$  определяет область основного вклада потенциала в рассеяние. В работах [9, 25] удалось получить в явном виде оптический потенциал ВЭП, который дает описание ядро-ядерного рассеяния, эквивалентное микроскопическому подходу. Этот потенциал (вещественная и мнимая части) имеет вид

$$U_{\text{opt}}^H = V^H + iW^H, \quad (2.35)$$

$$V^H(r) = -\frac{\hbar v}{(2\pi)^2} \bar{\sigma}_{NN} \bar{\alpha}_{NN} \int_0^\infty \rho_1(q) \rho_2(q) f_N(q) j_0(qr) q^2 dq, \quad (2.36)$$

$$W^H(r) = -\frac{\hbar v}{(2\pi)^2} \bar{\sigma}_{NN} \int_0^\infty \rho_1(q) \rho_2(q) f_N(q) j_0(qr) q^2 dq. \quad (2.37)$$

Здесь  $v$  — скорость относительного движения ядер;  $\rho(q)$  — формфактор плотности точечных нуклонов ядра; а  $f_N(q)$  — амплитуда  $NN$ -рассеяния в зависимости от переданного импульса  $q$ . Величины  $\bar{\sigma}_{NN}$  и  $\bar{\alpha}_{NN}$  есть усредненные по изоспинам сталкивающихся ядер полное сечение  $NN$ -рассеяния и отношение действительной к мнимой части амплитуды  $NN$ -рассеяния под углом  $0^\circ$ . В принципе, значения обеих этих величин можно получить из независимых экспериментов.

Задача расчета сечений ядро-ядерного рассеяния в рамках ВЭП при использовании оптического потенциала произвольной формы реализована в комплексе программ HEA (<http://www.jinr.ru/programs/jinrlib/hea>). При этом в программе учтена зависимость  $\bar{\sigma}_{NN}$  и  $\bar{\alpha}_{NN}$  от энергии согласно параметризациям из работ [25–26], а также использованы параметризации этих величин в зависимости от плотности участвующих в столкновениях ядер согласно [28, 29].

### 3. ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С КОЛЛЕКТИВНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ЯДРА

Для расчета сечений неупругого рассеяния с возбуждением коллективных состояний ядра необходимо иметь соответствующий потенциал взаимодействия, который приводит к переходу из упругого канала в неупругий. Такой потенциал в качестве аргументов включает зависимость как от  $r$  — расстояния между центрами сталкивающихся ядер, так и от переменной  $\alpha_{\lambda\mu}$  — внутренних координат коллективного движения сталкивающихся ядер. (Ниже рассмотрим возбуждение только ядра-мишени 2). В феноменологических моделях вращения и(или) колебания ядра набор  $\{\alpha_{\lambda\mu}\}$  — это координаты, описывающие движение поверхности ядра, а конкретно — его радиуса  $R_2(\alpha_{\lambda\mu})$ .

При изучении рассеяния более естественно вместо  $R$  рассматривать соответствующие движения эквидистантных поверхностей по координате  $r_2$  плотности распределения материи  $\rho_2(r_2)$  ядра 2. В случае квадрупольных деформаций поверхности ( $\lambda = 2$ ) ее отклонение от сферической формы реализуется заменой координат \*

$$r_2 \Rightarrow \mathbf{r}_2 = r_2 - r_2 \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\lambda} Y_{2\lambda}(\hat{r}_2), \quad (3.1)$$

где  $\hat{r}_2$  есть угловые переменные вектора  $\mathbf{r}_2$ . При рассмотрении, например, вращательных возбуждений ядра коллективными координатами являются

$$\alpha_{2\lambda} = \beta_2 D_{\mu 0}^{(2)*}(\Theta_i), \quad (3.2)$$

где  $\Theta_i$  — углы поворота Эйлера внутренней оси симметрии ядра в системе координат, в которой определен вектор  $\mathbf{r}$ . Эти же углы выступают как переменные соответствующей волновой функции вращения ядра, а  $\beta_2$  — параметр деформации. Обычно деформационная примесь считается малой величиной, и тогда в плотности деформированного ядра сохраняют только линейные по  $\alpha_{2\lambda}$  члены:

$$\rho_2(\mathbf{r}_2) \Rightarrow \rho_2(r_2) + o_2(\mathbf{r}_2), \quad (3.3)$$

где

$$o_2(\mathbf{r}_2) = o_2^{(2)}(r_2) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\hat{r}_2), \quad o_2^{(2)} = -r_2 \frac{d\rho_2(r_2)}{dr_2}. \quad (3.4)$$

Таким образом, в формулах для прямого и обменного потенциалов деформационную добавку  $o_2(\mathbf{r}_2)$  к плотности  $\rho_2(r)$  можно использовать как малую величину и разложить по ней сами потенциалы, оставляя только линейные по  $o_2(\mathbf{r}_2)$  члены.

**3.1. Прямой потенциал.** Представим прямой потенциал (2.7), согласно (2.10), (2.12), в виде

$$V^D(\mathbf{r}) = g(E) \int \rho_1(r_1) [\rho_2(r_2) + o_2(\mathbf{r}_2)] \times \\ \times F(\rho_1(r_1) + \rho_2(r_2) + o_2(\mathbf{r}_2)) v_{00}^D(s) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (3.5)$$

---

\* Обычно деформационную добавку к радиусу ядра  $R$  вводят со знаком «плюс». И наоборот, при такой добавке к  $r$  нужно изменить ее знак на «минус», так как в выражение для плотности (или потенциала) эти величины входят с разными знаками, например, в виде  $(r - R)$  [30].

Разложим функцию плотности  $F$  в ряд по  $o_2(\mathbf{r})$ , оставляя первые два члена:

$$F(\rho + o_2(\mathbf{r}_2)) = F(\rho) + \frac{dF}{d\rho} o_2(\mathbf{r}_2) = F(\rho) + \hat{F}(\rho) o_2(\mathbf{r}_2), \quad (3.6)$$

где удобно использовать параметризацию общего вида (2.11)

$$F(\rho) = C[1 + \alpha e^{-\beta\rho} - \gamma\rho], \quad \hat{F}(\rho) = \hat{C}[1 + \hat{\alpha} e^{-\beta\rho} - \hat{\gamma}\rho], \quad (3.7)$$

$$\rho = \rho_1(r_1) + \rho_2(r_2), \quad \hat{C} = -C\gamma, \quad \hat{\alpha} = \alpha\beta/\gamma, \quad \hat{\gamma} = 0.$$

Теперь запишем потенциал (3.5) в линейном приближении по  $o_2(\mathbf{r})$  как

$$V^D(\mathbf{r}) = V^D(r) + V_{int}^D(\mathbf{r}), \quad V_{int}^D(\mathbf{r}) = V_{int}^{D1}(\mathbf{r}) + V_{int}^{D2}(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

где для его центральной части  $V^D(r)$  остаются прежние выражения (2.13)–(2.16), а два переходных потенциала взаимодействия имеют вид

$$V_{int}^{D1}(\mathbf{r}) = g(E) \int \rho_1(r_1) o_2(\mathbf{r}_2) F(\rho_1(r_1) + \rho_2(r_2)) v_{00}^D(s) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (3.9)$$

$$V_{int}^{D2}(\mathbf{r}) = g(E) \int \rho_1(r_1) \hat{o}_2(\mathbf{r}_2) \hat{F}(\rho_1(r_1) + \rho_2(r_2)) v_{00}^D(s) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (3.10)$$

Здесь обозначено

$$\hat{o}_2(\mathbf{r}_2) = \hat{o}_2^{(2)}(r_2) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\hat{r}_2), \quad \hat{o}_2^{(2)}(r_2) = o_2^{(2)}(r_2) \rho_2(r_2). \quad (3.11)$$

Поскольку структура обоих потенциалов  $V_{int}^{D1}$  и  $V_{int}^{D2}$  одинакова, то подробнее рассмотрим только один из них  $V_{int}^{D1}$ , а второй дадим по аналогии. Итак, подставляя функцию плотности  $F(\rho_1(r_1) + \rho_2(r_2))$  (3.7) в (3.9), получим

$$V_{int}^{D1}(\mathbf{r}) = Cg(E) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} \int \left\{ \rho_1(r_1) o_2^{(2)}(r_2) + \alpha \bar{\rho}_1(r_1) \bar{o}_2^{(2)}(r_2) - \right. \\ \left. - \gamma [\tilde{\rho}_1(r_1) o_2^{(2)}(r_2) + \rho_1(r_1) \hat{o}_2^{(2)}(r_2)] \right\} v_{00}^D(s) Y_{2\mu}(\hat{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (3.12)$$

где

$$\bar{\rho}_1(r) = \rho_1(r) e^{-\beta\rho_1(r)}, \quad \tilde{\rho}_1(r) = [\rho_1(r)]^2, \quad (3.13)$$

$$\bar{o}_2^{(2)}(r) = o_2^{(2)}(r) e^{-\beta\rho_2(r)}, \quad \hat{o}_2^{(2)} = o_2^{(2)}(r_2) \rho_2(r_2). \quad (3.14)$$

Видно, что в каждом из слагаемых интеграла (3.12) есть только одна функция, зависящая от векторной переменной, в данном случае от  $\mathbf{r}_2$ . Поэтому в импульсном представлении потенциал перехода принимает вид

$$V_{int}^{D1}(\mathbf{r}) = V_{int}^{D1(2)}(r) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\hat{r}), \quad (3.15)$$

где

$$V_{int}^{D1(2)}(r) = Cg(E) \frac{1}{2\pi^2} \int \left\{ \rho_1(q) o_2^{(2)}(q) + \alpha \bar{\rho}_1(q) \bar{o}_2^{(2)}(q) - \right. \\ \left. - \gamma \left[ \bar{\rho}_1(q) o_2^{(2)}(q) + \rho_1(q) \bar{o}_2^{(2)}(q) \right] \right\} v_{00}^D(q) j_2(qr) q^2 dq. \quad (3.16)$$

Здесь фурье-образы функций с индексом (2) сверху есть

$$f_2^{(2)}(q) = 4\pi \int f_2^{(2)}(r) j_2(qr) r^2 dr, \quad (3.17)$$

а остальные функции в (3.16) определяются как

$$f(q) = 4\pi \int f(r) j_0(qr) r^2 dr. \quad (3.18)$$

Сферические функции Бесселя равны  $j_0(x) = \sin x/x$ ,  $j_2(x) = (1/x^3)[(3 - x^2) \sin x - 3x \cos x]$ .

Аналогичный вид имеет и второй потенциал  $V_{int}^{D2}$  (3.10), в котором при подстановке  $\hat{F}(\rho)$  учтем, что  $\hat{\gamma} = 0$ . Тогда

$$V_{int}^{D2}(\mathbf{r}) = \hat{C}g(E) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} \int \left\{ \rho_1(r_1) \hat{o}_2^{(2)}(r_2) + \hat{\alpha} \bar{\rho}_1(r_1) \bar{\hat{o}}_2^{(2)}(r_2) \right\} \times \\ \times v_{00}^D(s) Y_{2\mu}(\hat{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (3.19)$$

где

$$\bar{\hat{o}}_2^{(2)}(r) = \hat{o}_2^{(2)}(r) e^{-\beta \rho_2(r)} = o_2^{(2)}(r) \rho_2(r) e^{-\beta \rho_2(r)}. \quad (3.20)$$

Соответствующее выражение в импульсном представлении имеет вид

$$V_{int}^{D2}(\mathbf{r}) = V_{int}^{D2(2)}(r) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\hat{r}), \quad (3.21)$$

где

$$V_{int}^{D2(2)}(r) = \hat{C}g(E) \frac{1}{2\pi^2} \int \left\{ \rho_1(q) \hat{o}_2^{(2)}(q) + \hat{\alpha} \bar{\rho}_1(q) \bar{\hat{o}}_2^{(2)}(q) \right\} v_{00}^D(q) j_2(qr) q^2 dq. \quad (3.22)$$

Здесь, как и прежде, фурье-образы функций с верхним индексом (2) определяются формулой (3.17), а без него формулой (3.18).

**3.2. Обменный потенциал.** Теперь рассмотрим обменный потенциал (2.17). Как и в разд. 2.2, используем линейное приближение (2.19) для матрицы плотности, а саму плотность ядра-мишени  $\rho_2(\mathbf{r}_2)$  в формулах (2.17) и (2.25) представляем в виде суммы центральной и квадрупольной частей (3.3). Тогда, основываясь на общих выражениях (2.27)–(2.29) и учитывая то, что в каждом из четырех слагаемых подынтегральной функции (2.29) только одна функция, имеющая индекс 2, содержит зависимость от угловых координат аргумента, при переходе в импульсное представление можно получить переходной обменный потенциал в виде\*:

$$V^{EX} = V^{EX1} + V^{EX2}, \quad (3.23)$$

где

$$V_{\text{int}}^{EX1}(\mathbf{r}) = V_{\text{int}}^{EX1(2)}(r) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\hat{r}), \quad (3.24)$$

$$V_{\text{int}}^{EX1(2)}(r) = 4\pi C g(E) \int_0^\infty G^{(2)}(r, s, \{\alpha, \gamma\}) v_{00}^{EX}(s) j_0(K(r)s/M) s^2 ds, \quad (3.25)$$

$$G^{(2)}(r, s, \{\alpha, \gamma\}) = \int \left\{ h_1(q, s) h_2^{(2)}(q, s) + \alpha y_1(q, s) y_2^{(2)}(q, s) - \right. \\ \left. - \gamma \left[ h_1(q, s) z_2^{(2)}(q, s) + z_1(q, s) h_2^{(2)}(q, s) \right] \right\} j_2(qr) q^2 dq. \quad (3.26)$$

Здесь  $h_1(q, s)$ ,  $y_1(q, s)$ ,  $z_1(q, s)$  заданы формулами (2.32)–(2.34), а остальные, с индексами 2 сверху, есть фурье-образы

$$h_2^{(2)}(q, s) = 4\pi \int_0^\infty h_2^{(2)}(x, s) j_2(qx) x^2 dx, \quad h_2^{(2)}(x, s) = o_2^{(2)}(x) \hat{j}_1(k_{F,2}(x) \cdot s), \quad (3.27)$$

$$y_2^{(2)}(q, s) = 4\pi \int_0^\infty y_2^{(2)}(x, s) j_2(qx) x^2 dx, \quad y_2^{(2)}(x, s) = h_2^{(2)}(x, s) e^{-\beta \rho_2(x)}, \quad (3.28)$$

$$z_2^{(2)}(q, s) = 4\pi \int_0^\infty z_2^{(2)}(x, s) j_2(qx) x^2 dx, \quad z_2^{(2)}(x, s) = h_2^{(2)}(x, s) \rho_2(x). \quad (3.29)$$

---

\*При факторизации матрицы плотности  $\rho_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{s})$  в виде (2.19) мы учитываем деформационную добавку к  $r_2$  (см.(3.1)) только в функции плотности  $\rho_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}/2)$  и не учитываем ее в функции  $\hat{j}_1(k_F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}/2) \cdot \mathbf{s})$ . Кроме этого, при условии  $r \gg s$  интеграл по углам вектора  $\mathbf{s}$  относительно  $\mathbf{r}$  можно заменить на  $4\pi$ .

Аналогичным образом получаются результаты для второго переходного обменного потенциала взаимодействия

$$V_{\text{int}}^{EX2}(\mathbf{r}) = V_{\text{int}}^{EX2(2)}(r) \sum_{\mu=0,\pm 2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\hat{r}), \quad (3.30)$$

$$V_{\text{int}}^{EX2(2)}(r) = 4\pi \hat{C}g(E) \int_0^\infty \hat{G}^{(2)}(r, s, \{\hat{\alpha}, \hat{\gamma} = 0\}) v_{00}^{EX}(s) j_0(K(r)s/M) s^2 ds, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}^{(2)}(r, s, \{\hat{\alpha}, \hat{\gamma} = 0\}) &= \\ &= \int_0^\infty \left\{ h_1(q, s) \bar{h}_2^{(2)}(q, s) + \hat{\alpha} y_1(q, s) \bar{y}_2^{(2)}(q, s) \right\} j_2(qr) q^2 dq, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где

$$\bar{h}_2^{(2)}(q, s) = 4\pi \int_0^\infty \bar{h}_2^{(2)}(x, s) j_2(qx) x^2 dx, \quad (3.33)$$

$$\bar{h}_2^{(2)}(x, s) = o_2^{(2)}(x) \rho_2(x) \hat{j}_1(k_{F,2}(x) \cdot s),$$

$$\bar{y}_2^{(2)}(q, s) = 4\pi \int_0^\infty \bar{y}_2^{(2)}(x, s) j_2(qx) x^2 dx, \quad (3.34)$$

$$\bar{y}_2^{(2)}(x, s) = \bar{h}_2^{(2)}(x, s) e^{-\beta \rho_2(x)}.$$

При этом для  $h_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  использованы обозначения (2.27).

Отметим, что при вычислении переходных потенциалов нет необходимости проводить итерационную процедуру, подобную расчетам центральной части обменного потенциала, поскольку здесь центральный потенциал и соответствующий ему локальный импульс не меняются.

#### 4. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В данном разделе излагается метод вычисления МДФ-потенциала для случая, определяемого формулами из разд. 2. Расчеты по формулам из разд. 3 осуществляются аналогично.

**4.1. Расчет  $V^D(r)$ .** В разд. 2.1 получены формулы для построения  $V^D(r)$ . Расчет сводится в данном случае к вычислению интеграла (2.15).

Предварительный анализ показывает, что  $V^D(r) \rightarrow 0$  при  $r \gg 2\tilde{R}$ , где  $\tilde{R} \sim A_1^{1/3} + A_2^{1/3}$ . Это обеспечивает возможность перехода от полубесконечных интервалов интегрирования к численному интегрированию на конечном отрезке  $[R_{\min}, R_{\max}]$ ,  $R_{\min} \rightarrow 0$ , что подтверждается тестовыми расчетами на последовательности расширяющихся интервалов интегрирования (см. разд. 4.3).



Расчеты велись на конечном интервале интегрирования  $[R_{\min}, R_{\max}]$ , с использованием равномерной дискретной сетки с шагом  $h$ . Численное интегрирование проводилось с помощью квадратурной формулы Симпсона [36].

В цикле по узлам равномерной сетки сначала проводится расчет входящих в (2.15) функций  $\bar{\varrho}(q)$  и  $\tilde{\varrho}(q)$ , для чего вычисляются интегралы вида (2.16) с подынтегральными функциями  $\bar{\varrho}(r)$  и  $\tilde{\varrho}(r)$  (2.14). Далее вычисляется сам интеграл (2.15).

**4.2. Расчет  $V^{EX}(r)$ .** Вычисление обменного потенциала (2.17) представляет основную трудность, поскольку приходится использовать итерационную процедуру его расчета из-за зависимости подынтегральной функции от импульса  $K(r)$  (2.18), который в свою очередь сам зависит от потенциала, а также из-за весьма сложной зависимости функций  $k_F(\rho)$  и  $F(\rho)$  от плотности. Учет обоих этих факторов определяет в итоге зависимость потенциала от энергии столкновения ядер.\*

В наших расчетах для нахождения обменного потенциала используется метод последовательных приближений [36]. Этот подход сводится к рассмотрению для исходного функционального уравнения\*\*

$$F(\Psi) = 0 \quad (4.1)$$

соответствующей нелинейной задачи

$$\Psi = F(\Psi) \quad (4.2)$$

и построению на ее основе последовательности итераций

$$\Psi_{k+1} = F(\Psi_k). \quad (4.3)$$

Критерием окончания итерационного процесса служит условие

$$\|\Psi_{k+1} - \Psi_k\| < \epsilon, \quad (4.4)$$

где  $\epsilon > 0$  — заранее заданное малое число, т. е. вычисления продолжаются до тех пор, пока результаты, полученные на двух последовательных итерациях, не совпадут между собой с некоторой наперед заданной точностью.

---

\*В ряде работ изучались возможности разного рода упрощения задачи. Например, ограничение зависимости  $K(r)$  только от прямого потенциала  $V^D(r)$  (первой ступени в итерационной процедуре), а также выбор ферми-импульса нуклона в ядре  $k_F(\rho)$  только при одной фиксированной плотности ядерной материи. Все это приводит к так называемому «псевдопотенциалу». Формально он получается из прямого потенциала (2.1), в котором исключается зависимость  $v_{NN}$  (2.10) от  $E$  и  $\rho$ , но взамен вводится дополнительное слагаемое, приближенно имитирующее вклад обменных эффектов (см., например, [7]). Псевдопотенциал чаще всего используется для оценок и не включает в расчеты зависимость  $NN$ -сил от плотности.

\*\*Здесь  $\Psi$  — элемент из некоторой области  $B$ -пространства  $Y$ , нелинейная функция  $F$  переводит элементы  $\Psi$  из области пространства  $Y$  в пространство  $U$ ;  $U$  является  $B$ -пространством, причем  $U \supseteq Y$ .

Вопросы сходимости и точности метода последовательных приближений (известного также как метод простых итераций) рассматриваются, например, в [37]. Как правило, итерационные схемы вида (4.3) имеют первый порядок сходимости, т. е. норма погрешности от итерации к итерации убывает в геометрической прогрессии.

Отметим здесь, что применение ньютоновских схем, имеющих более высокий, второй порядок сходимости в близкой окрестности локального корня, в данном случае нецелесообразно, поскольку применение таких схем требует на каждой итерации обращения матрицы, аппроксимирующей оператор производной Фреше, что, применительно к рассматриваемой задаче, существенно увеличивает объем вычислений на каждой итерации.

На первом итерационном шаге в качестве начального приближения  $U_0(R_{\min})$  в формуле (2.18) будем использовать прямой потенциал  $V^D(R_{\min})$ , рассчитанный с помощью формул (2.15), (2.16) из разд. 2.1.

Таблица 1. Расчеты потенциала МДФ на последовательности вдвое сгущающихся сеток с шагами  $h_0 = 0, 1$ ,  $h_1 = 0, 05$ ,  $h_2 = 0, 025$  для  ${}^6\text{He} + {}^{28}\text{Si}$  при  $E = 50$  МэВ/нукл.

$r$	$h_0$	$h_1$	$h_2$	$\sigma$
0,0	-147,41241	-147,16432	-147,14903	16,2
0,5	-145,43847	-145,19330	-145,17817	16,2
1,0	-139,76125	-139,52479	-139,51013	16,1
1,5	-130,65241	-130,43078	-130,41696	16,0
2,0	-118,56500	-118,36443	-118,35189	16,0
2,5	-104,14470	-103,97086	-103,96004	16,1
3,0	-88,228916	-88,085839	-88,077082	16,3
3,5	-71,803759	-71,692823	-71,686287	16,9
4,0	-55,911718	-55,831196	-55,826785	18,2
4,5	-41,517922	-41,463316	-41,460699	20,8
5,0	-29,348733	-29,313828	-29,312504	16,6

После первой итерации получаем приближенное значение  $V_1^{EX}(R_{\min})$ . Далее, будем уточнять это значение путем подстановки на каждой  $k$ -й итерации в формулу (2.18) значения

$$U_k(R_{\min}) = V^D(R_{\min}) + V_{k-1}^{EX}(R_{\min}) \quad (4.5)$$

до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$V_k^{EX}(R_{\min}) - V_{k-1}^{EX}(R_{\min}) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.6)$$

Таким образом, получаем значение  $V^{EX}(R_{\min})$ . Теперь, учитывая, что  $V^{EX}(r)$  является гладкой функцией, т. е.

$$V^{EX}(r_n) - V^{EX}(r_{n-1}) \leq \varepsilon, \quad r_n - r_{n-1} \leq \delta, \quad (4.7)$$

при достаточно малом шаге равномерной дискретной сетки по  $r$  значения  $V^{EX}(r)$  в двух соседних точках  $r_{n-1}$  и  $r_n$  являются близкими. Это позволяет в формуле (2.18) для каждого следующего узла сетки  $r_n$  использовать в качестве начального приближения

$$U_0(r_n) = V^D(r_n) + V^{EX}(r_{n-1}). \quad (4.8)$$

Уточняя это значение с помощью уже описанной для  $R_{\min}$  итерационной процедуры, получаем для каждого узла с номером  $n$

$$U_k(r_n) = V^D(r_n) + V_{k-1}^{EX}(r_n) \quad (4.9)$$

и, в конечном итоге, значение  $V^{EX}(r_n)$  для каждого узла  $r_n$  дискретной сетки.

Итерации продолжают до выполнения соотношения, аналогичного (4.6). При малых значениях радиуса  $r \ll R$  для выполнения соотношения (4.6) с  $\epsilon = 0,001$ , как правило, требуется  $k \simeq 20$  итераций. Для  $r \simeq R$  сходимость достигается при  $k \simeq 5$ . Для вычисления производных в формулах (2.24) для локального импульса Ферми используются трехточечные конечно-разностные формулы из [38].

Таблица 2. Расчеты потенциала МДФ на последовательности расширяющихся интервалов интегрирования  $[0, R_{\max}]$  при  $R_{\max} = 10, 15, 20$  для  ${}^6\text{He} + {}^{28}\text{Si}$  при  $E = 50$  МэВ/нукл.

$r$	$R_{\max} = 10$	$R_{\max} = 15$	$R_{\max} = 20$
0,0	-147,41241	-147,41241	-147,41242
1,0	-139,76125	-139,76125	-139,76125
2,0	-118,56500	-118,56500	-118,56500
3,0	-88,228916	-88,228916	-88,228916
4,0	-55,911718	-55,911718	-55,911718
5,0	-29,348733	-29,348733	-29,348733
6,0	-12,693727	-12,693730	-12,693730
7,0	-4,619359	-4,619367	-4,619365
8,0	-1,451416	-1,451428	-1,451428
9,0	-0,349943	-0,400530	-0,400530
10,0	-0,101391	-0,101415	-0,101415

**4.3. Программная реализация.** Программа DFM-POT, реализующая построение ядро-ядерного потенциала на основе МДФ, написана на языке C++. Для проверки правильности ее работы проводилось сравнение рассчитанных потенциалов с численными результатами других авторов, а также тестовые расчеты на последовательностях сгущающихся сеток и расширяющихся интервалов интегрирования.

В табл. 1 представлены результаты расчетов на последовательности вдвое сгущающихся сеток для  ${}^6\text{He}+{}^{28}\text{Si}$  при  $E = 50$  МэВ/нукл. Полученное значение  $\sigma$ , рассчитанное по формуле

$$\sigma = [V(h_0) - V(h_1)]/[V(h_1) - V(h_2)], \quad (4.10)$$

приблизительно равно  $2^4$ . Это подтверждает, что схема имеет четвертый порядок точности, соответствующий теоретическому порядку аппроксимации формулы Симпсона.

В табл. 2, для той же реакции  ${}^6\text{He}+{}^{28}\text{Si}$  при  $E = 50$  МэВ/нукл., представлены расчеты потенциала МДФ на последовательности расширяющихся интервалов интегрирования, подтверждающие сходимость при  $R_{max} > 2\tilde{R}$ ,  $\tilde{R} = 4,85$ .

В представленных расчетах для  ${}^6\text{He}$  использовалась гауссовская параметризация плотности (см. ниже разд. 4.4 с коэффициентами, полученными в [2]; для  ${}^{28}\text{Si}$  использовалась плотность в виде симметризованной ферми-функции. NN-потенциал рассчитывался в форме МЗУ-Paris (см. ниже разд. 4.5.2).

В программе предусмотрена возможность работы с функцией распределения плотности ядерной материи, заданной как в аналитическом виде, так и в виде таблицы, которая вводится с внешнего носителя. В качестве аналитической формы плотности используются наиболее типичные формы параметризаций, представленные ниже в разд. 4.4. Соответствующие формфакторы имеют явный вид, что существенно упрощает вычисления.

В программе реализована возможность расчетов с использованием NN-потенциалов двух типов: Рейда–Эллиота (МЗУ-Reid) [33] и парижского (МЗУ-Paris) [34]. Соответствующие формулы и параметры даны ниже в разд. 4.5.

Время расчета ядро-ядерного потенциала МДФ составляет, в зависимости от энергии, атомной массы сталкивающихся ядер и выбранных параметров вычислительной схемы, от нескольких минут для столкновений легких ядер при низких энергиях порядка 100 МэВ до нескольких часов при больших атомных числах сталкивающихся ядер и энергиях столкновения порядка 1000–1500 МэВ на ПЭВМ класса *Pentium – IV*. Поэтому в дальнейшем планируется исследование возможности применения алгоритмов и методов параллельного программирования.

Программа DFM-POT использовалась для построения потенциалов МДФ в работах [9, 15, 41]. Ее обобщение, реализующее изложенный в разд. 3 подход для неупругих взаимодействий, использовано в недавних работах [17] и [18]. В настоящее время ведутся расчеты сечений упругого рассеяния ядер  ${}^6\text{He}$  на протонах с потенциалами фолдинга, полученными в соответствии с представленным здесь подходом.

#### 4.4. Аналитические формфакторы некоторых функций.

4.4.1. *Потенциал Юкавы.* В расчетах ядерных фолдинг-потенциалов обычно используется эффективный нуклон-нуклонный ( $NN$ ) потенциал в виде суммы потенциалов Юкавы

$$v(r) = \sum_j N_j \frac{e^{-\mu_j r}}{\mu_j r}. \quad (4.11)$$

Используя определение формфактора (2.16), получим

$$\begin{aligned} v(q) &= 4\pi \sum_j N_j \int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr} \frac{e^{-\mu_j r}}{\mu_j r} r^2 dr = \\ &= 4\pi \sum_j \frac{N_j}{2i\mu_j q} \left[ -\frac{1}{iq - \mu_j} + \frac{1}{-iq - \mu_j} \right], \quad (4.12) \\ v(q) &= 4\pi \sum_j \frac{N_j}{\mu_j} \frac{1}{q^2 + \mu_j^2} \end{aligned}$$

4.4.2. *Функция Гаусса.* Нормированная на 1 плотность есть \*

$$\rho_G(r) = \rho_{G,0} e^{-\alpha r^2}, \quad \rho_{G,0} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (4.13)$$

При этом  $\alpha$  можно выразить через среднеквадратичный радиус [31] (формула 3.461(2))

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \rho_{G,0} \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} r^4 dr = \rho_{G,0} \frac{3}{2\alpha} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{-3/2} = \frac{3}{2\alpha}. \quad (4.14)$$

Формфактор гауссовой плотности равен [31] (ф-ла 3.952(1))

$$\begin{aligned} \rho_G(q) &= \rho_{G,0} \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} \sin(qr) r dr = \\ &= \rho_{G,0} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-q^2/4\alpha} = e^{-q^2/4\alpha}. \quad (4.15) \end{aligned}$$

---

\*Поскольку до этого плотности нормировались на числа  $Z$ ,  $N$  или  $A$ , то при их использовании в расчетах потенциалов приведенные ниже плотности надо домножать на соответствующие факторы.

4.4.3. *Функция ступеньки.* Эта функция равна  $\rho_{u,0}$  при  $r < R_u$  и 0 при  $r \geq R_u$ :

$$\rho_u(r) = \rho_{u,0} \Theta(R_u - r), \quad \rho_{u,0} = \frac{3}{4\pi R_u^3}, \quad \langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R_u^2, \quad (4.16)$$

а формфактор определяется как

$$\rho_u(q) = -\rho_{u,0} \frac{4\pi R_u}{q^2} \cos(qR_u) \left[1 - \frac{1}{qR_u} \tan(qR_u)\right]. \quad (4.17)$$

4.4.4. *Симметризованная ферми-функция.* Двухпараметрическая ферми-функция плотности

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp \frac{r-R}{a}} \quad (4.18)$$

позволяет наиболее удачно воспроизводить многие наблюдаемые величины в ядерной физике, где участвуют ядра среднего и тяжелого атомного веса. Однако там, где играет роль внутренняя область ядра либо когда рассматриваются сравнительно легкие ядра, проявляется недостаток этой функции, а именно, ее непологий ход при  $r \simeq 0$ , то есть отличная от нуля дивергенция плотности ядерного вещества в его центре. В этом плане симметризованная ферми-функция

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\sinh(R/a)}{\cosh(R/a) + \cosh(r/a)} = \rho_0 \left[ \frac{1}{1 + \exp \frac{r-R}{a}} - \frac{1}{1 + \exp \frac{r+R}{a}} \right], \quad (4.19)$$

где

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \left[1 + \left(\frac{\pi a}{R}\right)^2\right]^{-1}, \quad (4.20)$$

не содержит указанных недостатков. При  $R \gg a$ , когда  $\exp \frac{r+R}{a} \gg 1$ , вторым членом в (4.19) можно пренебречь, и тогда остается обычная ферми-функция. В работе [32] был получен ее формфактор в явном виде

$$\begin{aligned} \rho(q) &= -\rho_0 \frac{4\pi^2 a}{q} \frac{d}{dq} \left[ \frac{\sin qR}{\sinh(\pi a q)} \right] = \\ \rho(q) &= -\rho_0 \frac{4\pi^2 a R}{q} \frac{\cos qR}{\sinh(\pi a q)} \left[1 - \left(\frac{\pi a}{R}\right) \coth(\pi a q) \tan qR\right], \quad (R > \pi a). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Легко проверить, что при  $q \rightarrow 0$  имеем  $\rho(0) = \rho_0 (4/3)\pi R^3 [1 + (\pi a/R)] = 1$ .

**4.5. Параметры  $NN$ -потенциалов, реализованных в DFM-POT.** Эффективные нуклон-нуклонные ( $NN$ ) потенциалы в ядерной среде (в области перекрытия сталкивающихся ядер) обычно вводятся как сумма трех потенциалов Юкавы (МЗУ-потенциалов) [33, 34]. Таким образом, для изоскалярных ( $v_{00}$ ) и изовекторных ( $v_{01}$ ) МЗУ-потенциалов (прямых « $D$ » и обменных « $EX$ ») параметризуются формы вида

$$v_{0n}^{D(EX)} = \sum_{i=1,2,3} N_i \frac{e^{-\mu_i r}}{\mu_i r} \quad (4.22)$$

Таблица 3. Параметры МЗУ-потенциала Рейда–Эллиота из [33]

$i$	1	2	3
$\mu_i, \text{фм}^{-1}$	4,0	2,5	0,7072
$i$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$v_{00}^D, \text{МэВ}$	7999,0	-2134,25	0
$v_{00}^{EX}, \text{МэВ}$	4631,375	-1787,125	-7,8474
$v_{01}^D, \text{МэВ}$	-4885,5	1175,5	0
$v_{01}^{EX}, \text{МэВ}$	-1517,875	828,375	2,6157

Одновременно, путем сравнения с экспериментальными данными, установлены их зависимости от энергии столкновения (фактор  $g(E)$ ) и дополнительная зависимость от плотности ядер в области их перекрытия (фактор  $F(\rho(r))$ ). Ниже приведены наиболее часто используемые и уже апробированные параметризации, которые реализованы в программе DFM-POT. При этом надо помнить, что эти параметризации были сделаны только для расчета вещественной части оптических потенциалов, используемых в подгонках. Мнимые же части таких полумикроскопических потенциалов выбирались в вудс-саксоновской форме либо для этого параметризовался за счет изменения глубины и добавления производной (со своим параметром вклада) тот же фолдинг-потенциал, который использовался для вещественной части.

**4.5.1. Потенциал Рейда–Эллиота (МЗУ-Reid).** Параметры этого потенциала  $N_i$  и  $\mu_i$  даны в табл. 3. Зависимость от энергии имеет вид

$$g(E) = (1 - 0,002 E/A). \quad (4.23)$$

В расчетах с таким потенциалом использовалась зависимость от плотности  $\rho = \rho(r_1) + \rho(r_2)$  двух видов

$$DDMЗУ : \quad F(\rho) = C[1 + \alpha e^{-\beta\rho(\mathbf{r})}], \quad (4.24)$$

$$BDMZY : \quad F(\rho) = C[1 - \gamma\rho(\mathbf{r})]. \quad (4.25)$$

В работе [35] проанализированы данные по дифференциальным сечениям взаимного упругого рассеяния ядер  $^{12}\text{C}$  и  $^{16}\text{O}$  при  $E/A \simeq 100$  МэВ с использованием вещественных фолдинг-потенциалов и мнимых вудс-саксоновских. Наилучшее согласие с экспериментальными данными и коэффициент несжимаемости  $K = 150\text{--}210$  были получены при выборе параметров

$$DDMZY1 : \quad C = 0,2845, \quad \alpha = 3,6391, \quad \beta = 2,9605, \quad (4.26)$$

$$BDMZY1 : \quad C = 1,2253, \quad \gamma = 1,5124, \quad (4.27)$$

4.5.2. *Парижский потенциал MZY-Paris*. Параметры этого потенциала  $N_i$  и  $\mu_i$  даны в табл. 4, а его зависимость от энергии имеет вид

$$g(E) = (1 - 0,003 E/A). \quad (4.28)$$

Зависимость от плотности  $\rho = \rho(r_1) + \rho(r_2)$  используется в общем виде

$$CDMZY : \quad F(\rho) = C[1 + \alpha e^{-\beta\rho(\mathbf{r})} - \gamma\rho(\mathbf{r})], \quad (4.29)$$

с параметрами наилучшей подгонки

$$CDMZY6 : \quad C = 0,2658, \quad \alpha = 3,8033, \quad \beta = 1,4099, \quad \gamma = 4,0, \quad (4.30)$$

Таблица 4. Параметры парижского MZY-потенциала из [34]

$i$	1	2	3
$\mu_i, \text{фм}^{-1}$	4,0	2,5	0,7072
$i$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$v_{00}^D, \text{МэВ}$	11061,625	-2537,5	0
$v_{00}^{EX}, \text{МэВ}$	-1524,25	-518,75	-7,8474
$v_{01}^D, \text{МэВ}$	313,625	223,5	0
$v_{01}^{EX}, \text{МэВ}$	-4118,0	1054,75	2,6157

Этот вариант в последнее время наиболее часто используется в расчетах МДФ-потенциалов. Однако при этом прямой потенциал  $V^D$  оказывается отталкивающим (со знаком «плюс»), а обменный  $V^{EX}$  притягивающим (со знаком «минус»), что, казалось бы, не отвечает физическим представлениям о роли обменных сил, приводящих обычно к отталкиванию (знак «плюс»).



У потенциалов МЗУ-Reid такого несоответствия нет, но зато вместо принятого значения плотности (насыщения) ядерной материи  $\rho = 0,17$  получается  $\rho = 0,04$  при энергии связи  $\simeq 16$  МэВ, и коэффициент несжимаемости оказывается несколько заниженным по сравнению с имеющимися данными о ядерной материи в нейтронных звездах (примерно 170 против 250) [19]. Конечно, суммарные потенциалы  $V^D + V^{EX}$  в обоих случаях оказываются притягивающими (со знаком «минус»), что естественно. Объяснить подобное можно только тем, что это происходит за счет выбранной параметризации эффективных  $NN$ -потенциалов и их зависимости от плотности, и поэтому каждый элемент ядерного фолдинг-потенциала в отдельности не требует физической интерпретации.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Демонстрируются некоторые примеры использования программы DFM-POT.

**5.1. Расчет дифференциальных сечений упругого рассеяния  $^{16}\text{O}$  на ядрах.** В данном разделе представлены дифференциальные сечения упругого рассеяния  $^{16}\text{O}$  на ядрах кальция и свинца при энергии 94 МэВ/нуклон, полученные в [9] с использованием потенциала, рассчитанного с помощью программы DFM-POT на основе модели двойного фолдинга. Расчет ядро-ядерного потенциала (2.5) проводился с использованием эффективного парижского  $NN$ -потенциала (4.22) (см. табл. 4), в котором учтена зависимость от суммарной плотности  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  двух ядер в области их перекрытия за счет включения фактора  $F(\rho)$  (4.29) с параметрами (4.30) и зависимость от энергии в виде функции  $g(E)$  (4.28). Для аппроксимации плотности распределения ядерной материи в ядрах использована симметризованная ферми-функция.

На рис. 2 а, б и 3 а, б штриховыми кривыми показаны соответственно потенциал МДФ  $V_{DF}$ , рассчитанный с помощью программы DFM-POT, и потенциал ВЭП  $W_H$ , полученный с помощью программы HEA-TOTAL (<http://www.jinr.ru/programs/jinrlib/hea>). Видно, что в области экспоненциального спада микроскопические потенциалы согласуются с шестипараметрическим потенциалом Вудса–Саксона (сплошные кривые) с подогнанными под эксперимент параметрами [39].

На рисунках 2, в и 3, в представлены отношения дифференциальных сечений упругого рассеяния к резерфордскому, рассчитанные для микроскопических потенциалов  $U = V_{DF} + W_H$  (штрихи). Расчет сечений проведен с использованием программы ECIS, реализующей метод связанных каналов [3]. При расчете амплитуды и дифференциальных сечений упругого рассеяния,

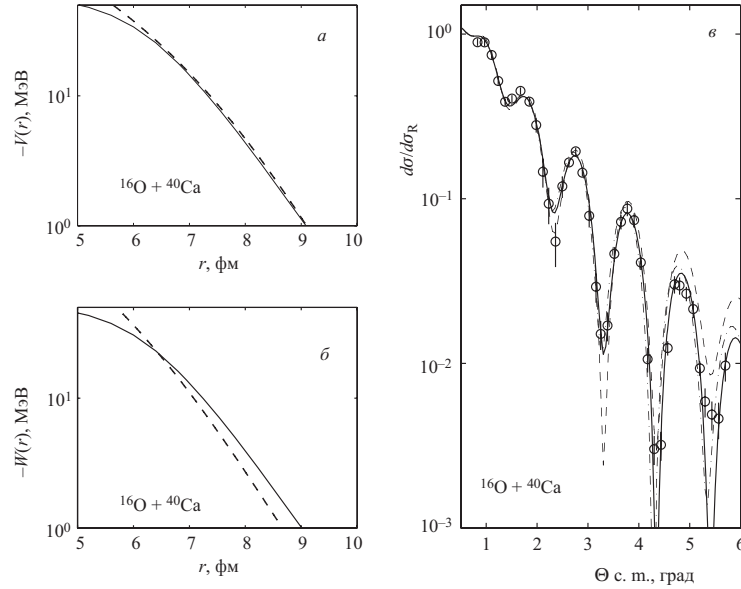


Рис. 2. *а, б*) соответственно потенциалы МДФ и ВЭП (штрихи) в сравнении с вещественной и мнимой частью феноменологического потенциала Вудса–Саксона, параметры которого подогнаны под эксперимент в [39] (сплошные). *в*) дифференциальные сечения упругого рассеяния  $^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$ ,  $E_{lab} = 1503$  МэВ в отношении к резерфордскому, рассчитанные с потенциалом Вудса–Саксона (сплошные), микропотенциалом  $U = V_{DF} + iW_H$  (штрихи), а также с перенормированным потенциалом  $U = V_{DF} + i0.88V_{DF}$  (штрихпунктир). Здесь  $V_{DF}$  — потенциал МДФ,  $W_H$  — потенциал ВЭП. Экспериментальные данные взяты из [39]. Расчет сечений проведен с помощью программы ECIS

включая резерфордское сечение, использовалась релятивистская кинематика.

Видно, что микроскопический подход обеспечивает приемлемое согласие с экспериментальными данными без использования свободных параметров, хотя, конечно, описание экспериментальной кривой менее точное по сравнению с расчетом для феноменологического потенциала Вудса–Саксона (сплошные кривые), параметры которого найдены подгонкой под эксперимент. Это нашло отражение в табл. 5, где представлены значения  $\chi^2$  как для потенциала Вудса–Саксона (WS), имеющего шесть свободных параметров, так и для микроскопических потенциалов, рассчитанных в рамках моделей МДФ и ВЭП.

В работах [9] и [15] показано, что согласие с экспериментом в рамках микроскопического подхода можно улучшить путем включения факторов, пе-

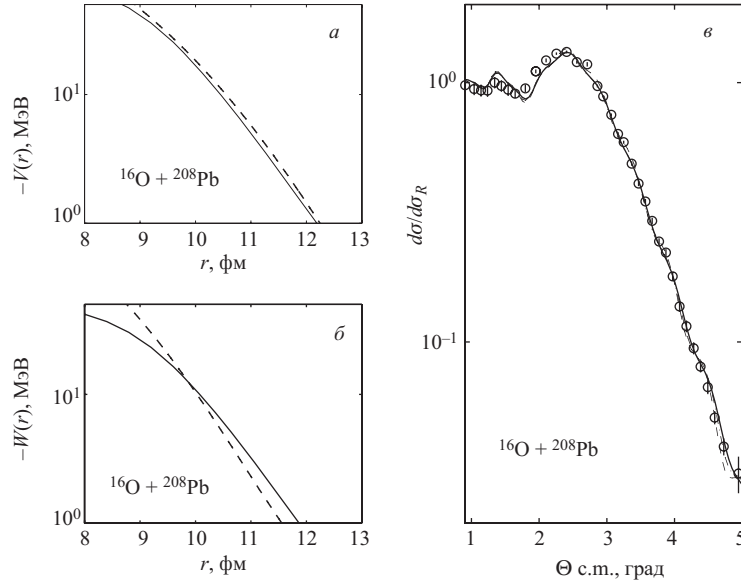


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для  $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ . Штрихпунктирная линия соответствует потенциалу  $U = V_{DF} + i0.6V_{DF}$

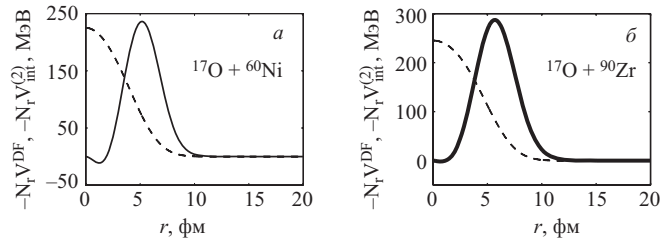


Рис. 4. Вещественная часть потенциалов  $N_r V_{DF}(r)$  упругого (штриховые кривые) и  $N_r V_{int}^{(2)}(r)$  неупругого (сплошные) ядро-ядерного взаимодействия, рассчитанная для рассеяния тяжелых ионов  $^{17}\text{O}$  на ядрах-мишенях никеля и циркония при  $E_{lab} = 1435$  МэВ.  $N_r = 0, 6$

ренормирующих глубину вещественной и/или мнимой частей микропотенциала. Так, на рис. 2, в и 3, в штрихпунктирными кривыми показаны расчеты с потенциалом в форме  $U = V_{DF} + iN_i V_{DF}$ . Значение фактора  $N_i$  равно 0,88 и 0,6 соответственно для  $^{40}\text{Ca}$  и  $^{208}\text{Pb}$ .

**5.2. Расчет дифференциальных сечений неупругого рассеяния  $^{17}\text{O}$  на ядрах.** В работе [18] разработан метод построения потенциалов МДФ неупругого рассеяния с возбуждением коллективных состояний ядер и проведены

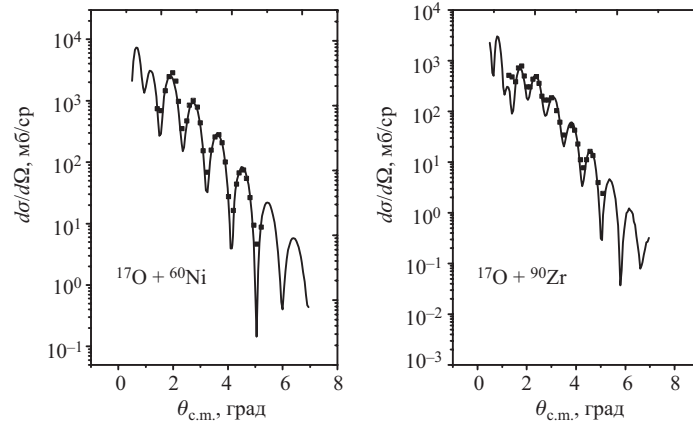


Рис. 5. Расчет дифференциальных сечений неупругого рассеяния тяжелых ионов  $^{17}\text{O}$  на ядрах-мишенях никеля и циркония при  $E_{\text{lab}} = 1435$  МэВ в рамках ВЭП с потенциалом МДФ. Экспериментальные данные взяты из [40]. Параметр деформации  $\beta_2$  равен 0,4 и 0,14 соответственно для  $^{60}\text{Ni}$  и  $^{90}\text{Zr}$

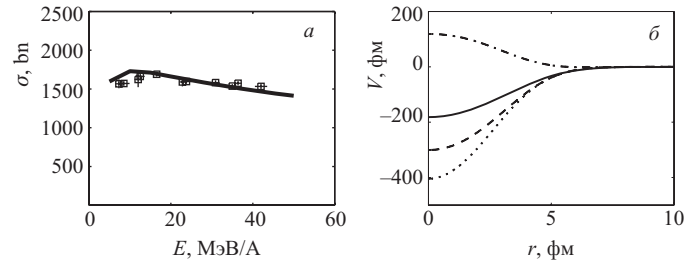


Рис. 6. а) зависимость полных сечений реакции  $^6\text{Li}$  с ядром  $^{28}\text{Si}$  от энергии в сравнении с экспериментальными данными. Расчеты сечений проведены с помощью программы DWUCK4 [4]. Используется потенциал  $U = V_{DF} + iW_H$ , где  $V_{DF}$  — потенциал МДФ,  $W_H$  потенциал ВЭП. б) потенциал МДФ (штрихпунктир: прямая часть  $V_D$ , штрихи: обменная часть  $V_{EX}$ , сплошная:  $V_{DF} = V_D + V_{EX}$ ) и потенциал ВЭП  $W_H$  (пунктир) для энергии  $E = 30$  МэВ/А

расчеты дифференциальных сечений неупругого рассеяния  $^{17}\text{O}$  на различных ядрах-мишенях при энергии 84 МэВ на нуклон. Некоторые из численных результатов представлены на рис. 4 и 5. На рис. 4 для ядер-мишеней никеля и свинца штриховыми кривыми показаны потенциалы МДФ, полученные в [15] для упругого рассеяния в форме  $N_r V_{DF} + iN_i V_{DF}$ . Факторы перенормировки  $N_r$  и  $N_i$  выбраны так, чтобы минимизировать в области экспоненциального спада отклонение потенциала МДФ от шестипараметрического потенциала

Таблица 5. Значения  $\chi^2$  для упругого рассеяния  $^{16}\text{O}$  при  $E_{\text{lab}} = 1503$  МэВ

Потенциал	$^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$	$^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$
WS	1,51	1,28
$V_{DF} + iW_H$	2,02	1,56
$V_{DF} + iN_i V_{DF}$	1,48	1,31

Вудса–Саксона, параметры которого подогнаны в [40] под экспериментальные данные по упругому рассеянию.  $N_r = N_i = 0,6$  для  $^{60}\text{Ni}$ ;  $N_r = 0,6$   $N_i = 0,5$  для  $^{90}\text{Zr}$ . Сплошными кривыми показаны неупругие потенциалы, рассчитанные по формулам, представленным в разд. 3. Рис. 5 демонстрирует соответствующие дифференциальные сечения неупругого рассеяния  $^{17}\text{O}$  на ядрах  $^{60}\text{Ni}$  и  $^{90}\text{Zr}$ . Представленный здесь расчет сделан в рамках ВЭП [17] с параметром деформации  $\beta_2$  0,4 и 0,14 соответственно для  $^{60}\text{Ni}$  и  $^{90}\text{Zr}$ . Экспериментальные данные взяты из [40].

**5.3. Расчет полных сечений реакции  $^6\text{Li} + ^{28}\text{Si}$ .** Рассчитанный в рамках МДФ ядро-ядерный потенциал использовался для расчета полных сечений реакций нейтронно-избыточных изотопов гелия и лития с ядром кремния в работах [16, 41] в зависимости от различных моделей распределения плотности ядерной материи в ядрах лития и гелия. На рис. 6 представлена рассчитанная в [41] зависимость полных сечений реакции  $^6\text{Li} + ^{28}\text{Si}$  от энергии в сравнении с экспериментальными данными.

Для расчета вещественной части ядро-ядерного потенциала используется модель двойного фолдинга с парижским  $NN$ -потенциалом (см. разд. 4.5.2). На рис. 6 видно, что, как это уже упоминалось в разд. 4.5.2, прямая и обменная части потенциала МДФ имеют разные знаки. Мнимая часть оптического потенциала рассчитывалась в рамках ВЭП, как это предложено в [14] (см. разд. 2.4). Расчеты полных сечений проводились на основе численного решения уравнения Шредингера с помощью программы DWUCK4 [4]. Представленный здесь расчет сделан с распределением плотности ядра  $^6\text{Li}$  из работы [42].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, представленные численные результаты демонстрируют, что метод построения ядро-ядерного потенциала на основе модели двойного фолдинга обеспечивает возможность согласующегося с экспериментальными данными воспроизведения наблюдаемых физических характеристик ядерных взаимодействий.

Объединение модели двойного фолдинга для вещественной части ядро-ядерного потенциала с микроскопической моделью на основе высокоэнер-

гетического приближения для мнимой части представляется перспективной основой для построения ядро-ядерных потенциалов и для расчетов как полных, так и дифференциальных сечений ядро-ядерного рассеяния при промежуточных энергиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №06-01-00228. Автор благодарит В.К. Лукьянова и Е.В. Земляную за поддержку и помощь на разных этапах работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Tanihata I. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2676.
2. *Tanihata I.* // J. Phys. G. 1996. V. 22. P. 157.
3. *Raynal J.* // Phys. Rev. C. 1981. V. 23. P. 2571.
4. *Computational Nuclear Physics, V.2* (Eds: Langanke K. et al.) Springer Verlag, 1993.
5. *Лукьянов В. К.* // ЯФ, 1995. Т. 58, вып. 11. С. 1955.
6. *Князьков О. М., Кухтина И. Н., Фаянс С. А.* // ЭЧАЯ, 1999. Т. 30. P. 870.
7. *Satchler G. R., Love W. G.* // Phys. Rep., 1979. V. 55. P. 183.
8. *Khoa D. T., Satchler G. R.* // Nucl. Phys. A, 2000. V. 668. P. 3.
9. *Лукьянов В. К., Земляная Е. В., Лукьянов К. В.* // ЯФ. 2006. Т. 69. С. 240.
10. *Glauber R. J.* Lectures in Theoretical Physics (New York, Interscience, 1959), P. 315.
11. *Сутенко А. Г.* // Укр. физ. журн., 1959. Т. 4. С. 152.
12. *Czyz W., Maximon L. C.* // Ann. Phys. (N.Y.), 1969. V. 52. P. 59.
13. *Fortanek J.* // Nucl. Phys. B, 1969. V. 12. P. 441.
14. *Лукьянов В. К., Земляная Е. В., Словинский Б.* // ЯФ, 2004. Т. 67. С. 1306.
15. *Земляная Е. В., Лукьянов В. К., Лукьянов К. В., Словинский Б., Ханна К.* // Изв. РАН сер. физ., 2005. Т. 69, вып. 11. С. 1651.
16. *Соболев Ю. Г. и др.* // Изв. РАН сер. физ., 2005. Т. 69. вып. 11. С. 1603.
17. *Hanna K. M., Lukyanov K. V., Lukyanov V. K., Metawei Z., Slowinski B., Zemlyanaya E. V.* // Письма в ЭЧАЯ, 2006. Т. 135. N. 6. P. 105.
18. *Лукьянов К. В., Земляная Е. В., Кухтина И. Н., Лукьянов В. К., Метавей З., Ханна К. М.* Микроскопический подход в неупругом рассеянии тяжелых ионов с возбуждением коллективных состояний ядер. Сообщение ОИЯИ Р4-2007-6, Дубна, 2007 (направлено в Изв. РАН сер. физ.).
19. *Dao T. Khoa, Satchler G. R., W. von Oertzen* // Phys. Rev. C, 1997. V. 56. P. 954.
20. *Sinha B.* // Phys. Rep. C, 1975. V. 20. P. 1; *Sinha B. and Moszkowski S. A.* // Phys. Lett. B, 1979. V. 81. P. 289.
21. *Campi X., Bouyssy A.* // Phys. Lett. B, 1978. V. 73. P. 263.
22. *Ring P., Shuck P.* The nuclear many-body problem (Springer-Verlag, New York, 1980) P. 542.
23. *Krivine H., Treiner J.* // Phys. Lett. B, 1979. V. 88. P. 212.
24. *Farid M. El-Azab, Satchler G. R.* // Nucl. Rev. A, 1985. V. 438. P. 525.

25. Shukla P. // Phys. Rev. C, 2003. V. 67. P. 054607.
26. Charagi S., Gupta G. // Phys. Rev. C, 2990. V. 41. P. 1610.
27. Shukla P. // arXiv:nucl-th/0112039.
28. Li G. Q., Machleidt R. // Phys. Rev. C, 1993. V. 48. P. 1702; 1994. V. 49. P. 566.
29. Cai Xiangzhou, Feng Jun, Shen Wenqing, Ma Yugang, Wang Jiansong, Ye Wei // Phys. Rev. C, 1998. V. 58. P. 572.
30. Satchler G. R. Direct Nuclear Reactions (Oxford Univ. Press, Oxford) 1983.
31. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1962.
32. Елдышев Ю. Н., Лукьянов В. К., Поль Ю. С. // ЯФ, 1972. Т. 16. С. 506.
33. Bertsch G., Borysowicz J., McManus H., Love W. G. // Nucl. Rev. A, 1977. N. 284. С. 399.
34. Anantaraman N, Toki H., Bertsch G. F. // Nucl. Rev. A, 1983. V. 398. P. 269.
35. Dao T.Khoa, W. von Oertzen, Bolen H. G. // Phys. Rev. C, 1994. V. 49. P. 1652.
36. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
37. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
38. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, Т. 1, М.: Физматгиз, 1959, С. 232–233.
39. Roussel-Chomaz P. et al. // Nucl. Phys. A, 1988. V. 477. P. 345.
40. R. Liguori Neto et al. // Nucl. Phys. A, 1993. V. 560. P. 733.
41. Лукьянов К. В. и др. Микроскопический анализ энергетической зависимости полных сечений реакций  ${}^6\text{He}, {}^6\text{Li} + {}^{28}\text{Si}$  в диапазоне  $E=5-50$  А МэВ. Препринт ОИЯИ Р4-2006-154, Дубна, 2006 (направлено в Изв. РАН сер. физ.).
42. Patterson J. D., Peterson R. J. // Nucl. Phys. A, 2003. V. 717. P. 235.

Получено 14 марта 2007 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 24.05.2007.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,35. Тираж 310 экз. Заказ № 55783.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)