Р5-2007-41

В. В. Пупышев

СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПАРНОГО УДАРА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

Пупышев В. В. P5-2007-41
Строение регулярных решений уравнений Фаддеева вблизи точки парного удара

Исследуются дву- и трехмерные уравнения Фаддеева для системы трех частиц с центральными или S-волновыми парными взаимодействиями. Регулярные решения таких уравнений представлены бесконечными рядами по целым степеням расстояния между двумя частицами и искомым функциям других трехчастичных координат. Построение таких функций сведено к решению алгебраических рекуррентных уравнений. Для регулярных решений фаддеевских уравнений выведены граничные условия в точке парного удара.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Pupyshev V. V. P5-2007-41
Structure of Regular Solutions to the Faddeev Equations in the Vicinity of the Two-Body Collision Point

The two- and three-dimensional Faddeev equations for a three-body system with two-body central or S-wave interactions are studied. The regular solutions of these equations are represented as infinite series in integer powers of the distance between two particles and the sought functions of other three-particle coordinates. The construction of these functions is reduced to solving algebraic recurrence equations. For the regular solutions to the Faddeev equations the boundary conditions at the two-body collision point are derived.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

1. ВВЕДЕНИЕ

После работы Като [1] разложения трехчастичной волновой функции вблизи точки парного удара в случае кулоновских парных взаимодействий исследовались многими авторами. Результаты таких исследований представлены в работах [4–6] и во многих других работах, обсужденных в обзоре [7]. Наиболее полный анализ строения волновой функции вблизи точки парного удара дан в работе [8].

В ней исследовалось шестимерное уравнение Шредингера для системы трех частиц с центральными парными взаимодействиями более общего вида, чем кулоновские. Регулярные общее и частные физические решения такого уравнения были представлены бесконечными рядами по целым степеням расстояния между двумя частицами и искомым функциям других трехчастичных координат. Построение таких функций в угловых базисах, образованных сферическими и бисферическими гармониками или симметризованными D-функциями Вигнера, было сведено к решению простых алгебраических рекуррентных уравнений. Для проекций физических решений на угловые базисные функции были выведены граничные условия в точке парного удара.

Настоящая работа является естественным продолжением вышеупомянутой работы [8] и посвящена построению и анализу разложений регулярных решений дву- и трехмерных уравнений Фаддеева [9–11] вблизи точки парного удара. Главная цель нашего анализа — вывод связей в точке парного удара, т. е. линейных соотношений, связывающих частные производные исследуемых решений в этой точке.

С теоретической точки зрения искомые связи интересны как аналоги и обобщения давно известного условия Като, но уже для парциальных фаддеевских компонент волновой функции. Вывод таких связей представляется актуальным и с практической точки зрения. Дело в том, что включение связей в дискретные сплайн-аналоги [12, 13] уравнений Фаддеева — простой способ заметно улучшить поточечную сходимость вычисляемого решения к точному вблизи точки парного удара.

Наши исследования основаны на известном в теории дифференциальных уравнений асимптотическом методе [14, 15]. В этом методе решение исследуемого дифференциального уравнения в частных производных ищется в виде бесконечного степенного ряда по одному аргументу и искомым функциям всех других аргументов. На первом этапе для таких функций из исходного уравнения выводится рекуррентная цепочка бесконечных систем уравнений, а затем доказывается ее однозначная разрешимость. Если описанный этап удается завершить, то построенный ряд называется формальным асимптотическим решением исходного дифференциального уравнения. Следующий и, как правило, довольно сложный этап состоит в доказательстве асимптотической сходимости и дифференцируемости полученного ряда.

В настоящей работе реализуется первый этап построения асимптотических разложений регулярных решений дву- и трехмерных уравнений Фаддеева вблизи точки парного удара: для таких решений выводятся формальные асимптотические разложения, вопрос о сходимости которых в каком-либо смысле остается открытым. Доказательство сходимости принципиально затрудняется наличием в полученных разложениях произвольных функций. Поэтому предполагается, что все разложения асимптотические и дифференцируемы, а все содержащиеся в них неопределенные функции отличны от нуля. Далее выводятся явные асимптотики полученных рядов в виде подсумм их нескольких наиболее медленно убывающих слагаемых. Наконец, вычисляются частные производные разных порядков таких подсумм в точке парного удара и из полученной совокупности выражений исключаются все неопределенные функции. В итоге получаются искомые связи для парциальных фаддеевских компонент.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ ФОРМУЛЫ

Используем систему единиц, в которой заряд e электрона e^- и константа Планка $\hbar$ равны единице. В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ фиксируем декартову систему координат S с ортами $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$ и начальной точкой O, совпадающей с центром масс исследуемой системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц p_1, p_2 и p_3 с массами m_1, m_2, m_3 и зарядами z_1, z_2, z_3. Пусть в этой системе $\mathbf{a}_{ij}$ — разность радиусов-векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ частиц p_i и p_j, а $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ — приведенные векторы Якоби [9]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{ij}}\,(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)\,, \quad \mu_{ij} \equiv \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\,, \\
\mathbf{y}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{k,ij}}\left(\frac{m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j}{m_i + m_j} - \mathbf{a}_k\right), \qquad \mu_{k,ij} \equiv \frac{m_k\,(m_i + m_j)}{m_1 + m_2 + m_3}\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где индексы i, j, k образуют циклическую перестановку триады индексов 1, 2, 3: индекс i переходит в k, j — в i, а k — в j. В шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$ векторам $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ сопоставим вектор $\mathbf{r}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$.

Выберем пару $\{p_j, p_k\}$ частиц p_j и p_k. В $\mathcal{R}^6$ под окрестностью точки парного удара частиц p_j и p_k подразумевается область $\mathcal{G} \equiv \{\mathbf{r}_i : x_i \ll 1, y_i > 0\}$, в которой эти частицы близки друг к другу, но отделены от частицы p_i.

Пусть Ψ^ε — регулярное ($|\Psi^\varepsilon(\mathbf{r})| < \infty, \forall\mathbf{r}$) решение уравнения Шредингера для системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ в $\mathcal{R}^6$:

$$(H - E)\,\Psi^\varepsilon = 0\,, \quad H = H_0 + V\,, \quad V \equiv \sum_{k=1}^{3} V_k\,, \tag{2}$$

где H_0 — свободный гамильтониан; E — полная энергия; V_k — взаимодействие между частицами p_i и p_j, а ε — полный набор сохраняющихся квантовых чисел рассматриваемой трехчастичной системы.

В теории Фаддеева [9] решение Ψ^ε восстанавливается как сумма его трех фаддеевских компонент Ψ_1^ε, Ψ_2^ε и Ψ_3^ε, подчиненных в $\mathcal{R}^6$ системе трех дифференциальных уравнений:

$$(H_0 - E)\,\Psi_k^\varepsilon = -V_k\,\Psi^\varepsilon\,, \quad \Psi^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^\varepsilon + \Psi_3\,, \quad k = 1,2,3\,. \tag{3}$$

В случае центральных парных взаимодействий, например кулоновских

$$V_k(x_k(a_{ij})) = \frac{z_i z_j}{a_{ij}}\,, \quad V_k(x_k) = \frac{q_k}{x_k}\,, \quad q_k \equiv z_i z_j \sqrt{2\mu_{ij}}\,, \quad k = 1,2,3, \tag{4}$$

или взаимодействий более общего вида

$$V_k(x_k) = \frac{q_k}{x_k} + \bar{V}_k(x_k)\,, \quad \bar{V}_k(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n\,\bar{V}_{kn}\,, \quad \bar{V}_{kn} = \text{const}\,, \quad k = 1,2,3, \tag{5}$$

с гамильтонианом H коммутируют сам H, квадрат оператора полного углового момента $\mathbf{l}$, его компонента l_3 и оператор P_r инверсии $\mathbf{r}_i \to -\mathbf{r}_i$. Набор ε состоит из собственных чисел этих операторов: $\varepsilon = \{E, \ell, m, \sigma\}$.

Всюду далее некулоновские слагаемые $\bar{V}_k$ парных взаимодействий (5) считаем аналитическими функциями, полагаем, что

$$x \equiv x_i \to 0, \quad y \equiv y_i > 0\,, \quad u \equiv \cos\theta = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})/(xy)\,, \quad k \neq i\,, \quad q \equiv q_i\,,$$

и используем координатное представление $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}| \equiv \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i|$, в котором

$$H_0 = -\partial_x^2 - \frac{2}{x}\,\partial_x + \frac{\mathbf{l}_x^2}{x^2} - \partial_y^2 - \frac{2}{y}\,\partial_y + \frac{\mathbf{l}_y^2}{y^2}\,, \quad \mathbf{l}_x \equiv -i\,\mathbf{x}\times\nabla_x, \, \mathbf{l}_y \equiv -i\,\mathbf{y}\times\nabla_y\,. \tag{6}$$

В качестве собственных функций всех трех операторов $\mathbf{l}^2$, l_3 и P_r используем бисферические гармоники [16]:

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha=-a}^{a} C_{a\alpha b\beta}^{\ell m}\,Y_{a\alpha}(\hat{y})\,Y_{b\beta}(\hat{x})\,, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}, (-1)^{a+b} = \sigma\,, \tag{7}$$

и комбинации D-функций Вигнера $D^{\ell}_{mm'}$ — симметризованные D-функции [4]:

$$D^{\ell\sigma}_{mm'}(\omega^t) = \left[\frac{2\ell+1}{16\pi^2(1+\delta_{m'0})} \right]^{1/2} \left[D^{\ell}_{mm'}(\omega^t) + \sigma(-1)^{\ell-m'} D^{\ell}_{m,-m'}(\omega^t) \right] . \tag{8}$$

Здесь $C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}$ — коэффициент Клебша–Гордана, Y_{fe} — сферическая гармоника:

$$Y_{fe}(\hat{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ie\varphi_a)\, \Theta_{fe}(\cos\theta_a) , \quad \hat{a} \equiv (\theta_a, \varphi_a) , \quad \hat{a} = \hat{x}, \hat{y} , \tag{9}$$

а $\omega^t = (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)$ — набор углов Эйлера, определяющих ориентацию выбранной «подвижной» системы координат S^t относительно системы S.

Введем две «подвижные» системы координат $S^t = (\mathbf{e}^t_1, \mathbf{e}^t_2, \mathbf{e}^t_3)$, $t = x, y$. Пусть начальные точки O^x и O^y систем S^x и S^y совпадают с начальной точкой O фиксированной системы $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, а их реперы таковы, что

$$(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}^x_1) > 0,\ (\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}^x_2) = 0,\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^x_3) = x; \quad (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^y_1) < 0,\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^y_2) = 0,\ (\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}^y_3) = y\, .$$

Тогда орты $\mathbf{e}^x_2$ и $\mathbf{e}^y_2$ направлены вдоль нормали $\mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ к плоскости трех частиц, а система S^x получается поворотом системы S^y вокруг орта $\mathbf{e}^y_2$ на угол θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как в системе S ориентация этих векторов задана углами $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ и $\hat{y} = (\theta_y, \varphi_y)$, а в системе S^t — углами $\hat{x}^t$ и $\hat{y}^t$:

$$\begin{aligned} \hat{x}^t &= (\theta^x_x, \varphi^x_x) = (0, 0) , \quad \hat{y}^t = (\theta^x_y, \varphi^x_y) = (\theta, 0) , \quad t = x ; \\ \hat{x}^t &= (\theta^y_x, \varphi^y_x) = (\theta, \pi) , \quad \hat{y}^t = (\theta^y_y, \varphi^y_y) = (0, 0) , \quad t = y , \end{aligned}$$

то переход $S \to S^x$ определяется углами Эйлера $\omega^x = (\varphi_x, \theta_x, \gamma^x)$, а переход $S \to S^y$ — углами Эйлера $\omega^y = (\varphi_y, \theta_y, \gamma^y)$, где углы γ^t таковы, что

$$\cos\gamma^t = \operatorname{ctg}\theta\, \cos\theta_t - \operatorname{cosec}\theta\, \cos\theta_{t'} , \quad t \neq t' = x, y\, .$$

Далее будут рассматриваться два случая $t = x, y$, в случае $t = x$ «подвижной» является система S^x, а в случае $t = y$ — система S^y.

Выведем ключевые формулы дифференцирования.

Векторы Якоби (1) кинематически связаны [17]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +c_{ki} & s_{ki} \\ -s_{ki} & c_{ki} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} c_{ki} \\ s_{ki} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma_{ki} \\ \sin\gamma_{ki} \end{pmatrix} ,$$

$$\gamma_{ki} \in [-\pi/2, /\pi/2],$$

где γ_{ki} — кинематический угол, определяемый только отношениями масс частиц. В силу такой связи x_k и y_k — функции трех аргументов u и x, y:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | x_k \rangle &= x_k(x,y,u) = \left[\, (c_{ki}\, x)^2 + (s_{ki}\, y)^2 + 2\, c_{ki}\, s_{ki}\, uxy \,\right]^{1/2} \,, \quad (10) \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | y_k \rangle &= y_k(x,y,u) = \left[\, (s_{ki}\, x)^2 + (c_{ki}\, y)^2 - 2\, c_{ki}\, s_{ki}\, uxy \,\right]^{1/2} \,, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | x_k \rangle &= x_k(x,y,u) = \frac{|s_{ki}| y}{g(v_x)} \,, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | y_k \rangle = y_k(x,y,u) = \frac{c_{ki} y}{g(v_y)} ; \quad (11) \\ g(v) &\equiv (1 - 2uv + v^2)^{-1/2} \,, \quad v_x \equiv -\frac{c_{ki} x}{s_{ki} y} \,, \quad v_y \equiv \frac{s_{ki} x}{c_{ki} y} \,. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $1/x_k(x,y,u)$ пропорциональна производящей функции $g(v_x)$ для полиномов Лежандра $P_n(u)$ (см. [16]), поэтому

$$\frac{1}{x_k} = \frac{1}{|s_{ki}| y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{c_{ki}\, x}{s_{ki}\, y} \right)^n P_n(u) \,, \quad k \neq i \,. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует формула дифференцирования

$$\partial_x^n\, x_k |_{x=0} = c_{ki}\, \frac{s_{ki}}{|s_{ki}|}\, \frac{n!}{2n-1} \left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki} y} \right)^{n-1} \left[P_n(u) - P_{n-2}(u) \right] ,\, n = 0, 1, \ldots \tag{13}$$

Аналогичным образом доказывается формула дифференцирования

$$\partial_x^n\, y_k |_{x=0} = s_{ki}\, \frac{n!}{2n-1} \left(\frac{s_{ki}}{c_{ki} y} \right)^{n-1} \left[P_n(u) - P_{n-2}(u) \right] , \quad n = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Теперь приведем и поясним разложения, доказанные в работе [8] и являющиеся ключевыми для построений, выполненных в следующем разделе.

Гладкая часть $\bar{V}_k$ парного взаимодействия (5) является рядом

$$\bar{V}_k(x_k(x,y,u)) = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^{p} \bar{V}_k^{ps}(|s_{ki}| y)\, P_s(u) \,, \quad (-1)^{p+s} = 1 \,, \tag{15}$$

а вследствие представлений (5), (12) и (15) полное взаимодействие $V = V_1 + V_2 + V_3$ раскладывается в двойной ряд:

$$\begin{aligned} V(x,y,u) &= \frac{q}{x} + V^{00}(y) + \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^{p} V^{ps}(y)\, P_s(u) \,, \quad (16) \\ V^{ps}(y) &\equiv \bar{V}_{ip}\, \delta_{s0} + \delta_{ps} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{|s_{ki}| y} \left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki} y} \right)^p + \sum_{k \neq i} \bar{V}_k^{ps}(y) \,, \end{aligned}$$

где отличны от нуля только константы $V^{p0} = \bar{V}_{ip}$ с нечетным p и функции $V^{ps}(y)$ с четной суммой $p + s$. При $p \leqslant 2$ их можно найти по формулам

$$V^{00}(y) \;=\; V_{i0} + \sum_{k\neq i} \left[\, q_k/(|s_{ki}|\, y) + \bar{V}_k(|s_{ki}|y) \,\right] \,, \quad V^{10}(y) = V_{i1}\,,$$

$$V^{11}(y) \;=\; \sum_{k\neq i} c_{ki}(s_{ki}/|s_{ki}|) \,\left[\, \bar{V}_k'(|s_{ki}|y) -\, q_k/(s_{ki}\, y)^2 \,\right] \,,$$

$$V^{20}(y) \;=\; V_{i2} + (1/6) \sum_{k\neq i} c_{ki}^2 \,\left[\, \bar{V}_k''(|s_{ki}|y) + 2\, \bar{V}_k'(|s_{ki}|y)/(|s_{ki}|y) \,\right] \,,$$

$$V^{22}(y) \;=\; \sum_{k\neq i} \left\{ q_k c_{ki}^2/(|s_{ki}|y)^3] + (1/3)\, c_{ki}^2 \,\left[\, \bar{V}_k''(|s_{ki}|y) - \bar{V}_k'(|s_{ki}|y)/(|s_{ki}|y) \,\right] \right\} ,$$

где $\bar{V}_k'$ и $\bar{V}_k''$ — первая и вторая производные функции $\bar{V}_k(x_k)$ по аргументу x_k в точке $x_k = |s_{ki}|y$, т. е. при $x = 0$.

Разложение решения Ψ^ε по бисферическому базису (7) — конечная сумма

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ab} \Psi^\varepsilon_{ab}(x, y)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y})\,, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}\,, \quad (-1)^{a+b} = \sigma\,. \qquad (17)$$

Ее бисферические компоненты Ψ^ε_{ab} являются рядами

$$\Psi^\varepsilon_{ab}(x, y) = \sum_{n=b\geqslant\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)\,, \quad \mu(\sigma) \equiv (1/2)[1 - \sigma(-1)^\ell]\,, \qquad (18)$$

а компоненты $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)$ этих рядов подчинены цепочкам рекуррентных по индексу $n \geqslant b$ алгебраических уравнений и однозначно выражаются через неопределенные функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)$ с $b = n$ и известные коэффициенты q_k, $\bar{V}_{ip}$ и функции $\bar{V}^{ps}(y)$, содержащиеся в разложении (16) полного взаимодействия.

Разложение решения Ψ^ε по D^σ-базису — конечная сумма

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \Psi^{\varepsilon t}_{m'}(x, y, \theta)\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)\,, \quad t = x, y. \qquad (19)$$

Все ее D^σ-компоненты $\Psi^{\varepsilon t}_{m'}$ в случае $t = x$ являются рядами

$$\Psi^{\varepsilon x}_{m'}(x, y, \theta) = \sum_{n=m'}^{\infty} x^n \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi^{n\varepsilon x}_{am'}(y)\, \Theta_{am'}(u)\,, \qquad (20)$$

а в случае $t = y$ — рядами

$$\Psi^{\varepsilon y}_{m'}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{b=m'}^{n} \Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}(y)\, \Theta_{bm'}(u)\,. \qquad (21)$$

В обоих случаях Θ-компоненты $\Psi^{n\varepsilon t}_{am'}(y)$ подчиняются цепочкам рекуррентных по индексу $n \geqslant b$ алгебраических уравнений и однозначно выражаются через соответствующие ($t = x$ или $t = y$) произвольные функции $f^{n+2,t}_{m'}(y)$ и известные коэффициенты q_k, $\bar{V}_{ip}$ и компоненты $\bar{V}^{ps}(y)$ разложения (16).

3. СЛУЧАЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Исследуем строение фаддеевской компоненты Ψ^{ε}_i в бисферическом базисе.

Пусть решение Ψ^{ε} уравнения Шредингера представлено рядом (17), (18) с известными компонентами $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)$. Докажем, что такое представление порождает аналогичные представления фаддеевской компоненты Ψ^{ε}_i:

$$\Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ab} \Psi^{\varepsilon}_{iab}(x, y)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y})\,, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}, \quad (-1)^{a+b} = \sigma\,, \qquad (22)$$

и ее бисферических компонент Ψ^{ε}_{iab}:

$$\Psi^{\varepsilon}_{iab}(x, y) \equiv \langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) | \Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \sum_{n=b \geqslant \mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y). \qquad (23)$$

Для этого исследуем только одно уравнение фаддеевской системы (3), а именно, уравнение, содержащее в левой части компоненту Ψ^{ε}_i. В этом уравнении представим операторы V_i, H_0 и решение Ψ^{ε} уравнения Шредингера соответствующими суммами (5), (6) и (17), (18). Правая часть получившегося уравнения — ряд по степеням x и базисным функциям $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}$. Поэтому искомое регулярное решение Ψ^{ε}_i — может быть только рядом того же типа, но пока без дополнительных ограничений на индексы a, b и n:

$$\Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{ab} \Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab} \hat{x}, \hat{y})\,. \qquad (24)$$

Заменим Ψ^{ε}_i таким рядом. Спроецируем полученное уравнение на функции $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y})$ и выведем для каждой пары $\{a, b\}$ алгебраическую и рекуррентную по индексу n цепочку уравнений

$$\begin{aligned}\left[\, b(b+1) - (n+2)(n+3) \,\right] \Psi^{n+2,\varepsilon}_{iab}(y) = -\left[\, h_a(y) - V^{00}(y) \,\right] \Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y) - \\ -q\Psi^{n+1,\varepsilon}_{ab}(y) - \sum_{p=0}^{n} V_{ip}\, \Psi^{n-p,\varepsilon}_{ab}(y)\,, \quad n = -2, -1, \ldots, \qquad (25)\end{aligned}$$

где h_a — диагональный матричный элемент оператора

$$h(\mathbf{y}) \equiv -\partial^2_y - \frac{2}{y}\,\partial_y + \frac{\mathbf{l}^2_y}{y^2} + V^{00}(y) - E$$

в бисферическом базисе (7):

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab} | h(\mathbf{y}) | \mathcal{Y}^{\ell m}_{a'b'} \rangle &= \delta_{aa'} \delta_{bb'} h_a(y) , \\
h_a(y) &\equiv -\partial_y^2 - \frac{2}{y} \partial_y + \frac{a(a+1)}{y^2} + V^{00}(y) - E .
\end{aligned} \tag{26}$$

Пусть в этой цепочке $n < b$ или $b < \mu(\sigma)$, тогда $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y) \equiv 0$ и поэтому $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y) \equiv 0$. Далее полагаем $n \geqslant b \geqslant \mu(\sigma)$. При таких ограничениях пробный ряд (24) становится рядом (22), а исследуемая цепочка однозначно разрешима: при данных a и b все искомые функции $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}$ с $n > b$ выражаются через неопределенную функцию $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y)$ с $n = b$ и известные функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$. Следовательно, разложения (22) и (23) существуют, что и требовалось доказать.

Теперь построим явные асимптотики рядов (23) с $b \leqslant 2$ как подсуммы их трех наиболее медленно убывающих при $x \to 0$ слагаемых, а затем получим связи при $x = 0$ для производных $\partial_x^n \Psi^{\varepsilon}_{iab}$. Сначала в уравнениях (25) заменим функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}(y)$ с $n \leqslant 3$ их явными выражениями, найденными в работе [8]. Решим полученные уравнения и выразим функции $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y)$ как комбинации неопределенных функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ и $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}$ с $n = b$, равных производным $(n!)^{-1} \partial_x^n \Psi^{\varepsilon}_{ab}(x,y)$ и $(n!)^{-1} \partial_x^n \Psi^{\varepsilon}_{iab}(x,y)$ при $x = 0$ и $n = b$. Используя такие комбинации, выведем искомые асимптотики рядов (23), а именно, асимптотику компоненты $\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}$:

$$\begin{aligned}
\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y) &= \left\{ 1 + \frac{x^2}{6} \left(h_\ell - V^{00} \right) \left[1 + \frac{x^2}{20} \left(h_\ell - V^{00} \right) \right] \right\} \Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(0,y) + \\
&+ \frac{x}{2} \left\{ q + \frac{x}{6} \left(2V_{i0} + q^2 \right) + \right. \\
&+ \frac{x^2}{72} \left[q^3 + 2q(4h_\ell + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12 V_{i1} \right] + \\
&+ \frac{x^3}{1440} \left[q^4 + 4q^2 \left(5h_\ell + 3V_{i0} - 3V^{00} \right) + \right. \\
&+ \left. \left. 84 q\, V_{i1} + 24 \left(6V_{i2} + V_{i0}(2h_\ell - V^{00}) \right) \right] \right\} \Psi^{\varepsilon}_{\ell 0}(0,y) + O(x^5) ,
\end{aligned} \tag{27}$$

асимптотики компонент Ψ^{ε}_{ia1} с индексом $a = |\ell \pm (1 - \mu(\sigma))|$:

$$\begin{aligned}
\Psi^{\varepsilon}_{ia1}(x,y) &= x \left[1 + \frac{x^2}{10} (h_a - V^{00}) \right] \partial_x \Psi^{\varepsilon}_{ia1}(x,y)|_{x=0} + \\
&+ \frac{x^2}{4} \left\{ q + \frac{x}{10} \left(4V_{i0} + q^2 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{x^2}{180} \left[q^3 + 2q \left(7h_a + 5V_{i0} - 5V^{00} \right) + 40 V_{i1} \right] \right\} \partial_x \Psi^{\varepsilon}_{a1}(x,y)|_{x=0} - \\
&- \frac{x^4}{180\sqrt{3}} q V^{11} C^{a0}_{\ell 010} \Psi^{\varepsilon}_{\ell 0}(0,y) + O(x^5)
\end{aligned} \tag{28}$$

и асимптотики компонент Ψ^{ε}_{ia2} с индексом $a=|\ell+\mu(\sigma)|$, $|\ell\pm(2-\mu(\sigma)|$:

$$\begin{aligned}\Psi^{\varepsilon}_{ia2}(x,y) &= \frac{x^2}{2}\left[1+\frac{x^2}{14}\,(h_a-V^{00})\right]\partial^2_x\,\Psi^{\varepsilon}_{i2a}(x,y)|_{x=0}+ \\ &+ \frac{x^3}{12}\left[q+\frac{x}{14}\,(6V_{i0}+q^2)\right]\partial^2_x\,\Psi^{\varepsilon}_{2a}(x,y)|_{x=0}+O(x^5)\,.\end{aligned} \qquad (29)$$

Вычислив производные ∂^n_x, $n\leqslant 4$, этих асимптотик, получаем серию связей при $x=0$ и $y>0$ для компонент Ψ^{ε}_{iab} и Ψ^{ε}_{ab}. В этой серии при любом q имеются связи

$$\partial^b_x\,[\,2\partial_x\,\Psi^{\varepsilon}_{iab}(x,y)-q\,\Psi^{\varepsilon}_{ab}(x,y)\,]=0\,,\quad b\geqslant n=0,1,2. \qquad (30)$$

Из таких связей в случае $q\neq 0$ следуют равенства

$$\partial^b_x\Psi^{\varepsilon}_{ab}(x,y)=(2/q)\,\partial^{b+1}_x\Psi^{\varepsilon}_{ab}(x,y)\,,\quad b=0,1,2\,;\quad x=0,\,y>0.$$

Используя эти равенства, исключим производные $\partial^b_x\Psi^{\varepsilon}_{ab}$ из других связей исследуемой серии и в результате выведем связи, но уже только для фаддеевских компонент Ψ^{ε}_{iab}:

$$\begin{aligned}&\left[\,3q\,\partial^2_x-(2V_{i0}+q^2)\,\partial_x-q(h_\ell-V^{00})\right]\,\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y)=0,\\ &\partial_x\left\{\,12q\,\partial^2_x-[q^3+2q(4h_\ell+3V_{i0}-3V^{00})+12V_{i1}]\right\}\,\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y)=0,\\ &\left\{60q\partial^4_x-\left[\,q^4+4q^2(5h_\ell+3V_{i0}-3V^{00})+84qV_{i1}+\right.\right.\\ &\left.\left.+\;24(6V_{i2}+V_{i0}(2h_\ell-V^{00}))\right]\partial_x-12q(h_\ell-V^{00})^2\,\right\}\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y)=0,\quad(31)\\ &\partial_x\left[\,10q\partial^2_x-3(4V_{i0}+q^2)\partial_x-3(h_a-V^{00})\,\right]\,\Psi^{\varepsilon y}_{ia1}(x,y)=0\,,\\ &\sqrt{3}\,\partial^2_x\left[\,15q\partial^2_x-\left[\,q^2+2q(7h_a+5V_{i0}-5V^{00})+40V_{i1}\right]\,\right\}\,\Psi^{\varepsilon y}_{ia1}(x,y)=\\ &=4\,qV^{11}\,C^{a0}_{\ell 010}\,\partial_x\Psi^{\varepsilon y}_{i\ell 0}(x,y)=0,\\ &\partial^2_x\left[\,7q\,\partial^2_x-2\partial_x-6(h_a-V^{00})\,\right]\,\Psi^{\varepsilon}_{ia2}(x,y)=0.\end{aligned}$$

Если $q=0$ и $x=0$, то все связи (30) и (31) становятся тривиальными: $\partial^{b+1}_x\Psi^{\varepsilon}_{iab}=0$, $b=0,1,2$; между компонентами Ψ^{ε}_{iab} и Ψ^{ε}_{ab} имеются связи

$$\begin{aligned}&(3\partial^2_x+V^{00}-h_\ell)\,\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y)=V_{i0}\,\Psi^{\varepsilon}_{\ell 0}(x,y)\,,\\ &\partial_x\,\left[\,5\partial^2_x-3(h_a-V^{00})\,\right]\,\Psi^{\varepsilon}_{ia1}(x,y)=3V_{i0}\,\partial_x\Psi^{\varepsilon}_{a1}(x,y)\,,\\ &\partial^2_x\left[\,7\partial^2_x-6(h_a-V^{00})\,\right]\,\Psi^{\varepsilon}_{ia2}(x,y)=6\partial^2_x\Psi^{\varepsilon}_{a2}(x,y)\,;\end{aligned} \qquad (32)$$

а компоненты Ψ^{ε}_{iab}, $b=0,1$, удовлетворяют следующим связям:

$$\begin{aligned}&\left[\,2V_{i0}\partial^3_x-V_{i1}(3\partial^2_x+V^{00}-h_\ell)\,\right]\,\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y)=0,\\ &\left\{\,5V_{i0}\partial^4_x-3\left[6V_{i2}+V_{i0}(2h_\ell-V^{00})\right]\,\partial^2_x+\right.\\ &\left.+(6V_{i2}+V_{i0}h_\ell)(h_\ell-V^{00})\,\right\}\,\Psi^{\varepsilon}_{i\ell 0}(x,y)=0,\\ &\partial_x\,\left[\,9\partial^3_x-20\,\partial^2_x+12(h_a-V^{00})\,\right]\,\Psi^{\varepsilon}_{ia1}(x,y)=0.\end{aligned} \qquad (33)$$

Как известно [9], шестимерные уравнения Фаддеева (3) подстановкой (22) сводятся к системе двумерных интегродифференциальных уравнений для совокупности $\{\Psi^{\varepsilon}_{jab}\}$ всех фаддеевских бисферических компонент Ψ^{ε}_{jab}. Ядра интегральных операторов таких двумерных уравнений Фаддеева — довольно сложные функции. Детальное исследование этих ядер выполнено в работах [18] и [19]. Сравнительный анализ дискретных сплайн-аналогов двумерных уравнений Фаддеева дан в обзоре [12]. Во все такие аналоги несложно включить полученные связи (30)–(33), чтобы улучшить поточечную сходимость вычисляемого решения к точному решению $\{\Psi^{\varepsilon}_{jab}\}$ вблизи точки парного удара. Пример такого включения дан в недавней работе [13].

Теперь исследуем строение фаддеевской компоненты Ψ^{ε}_{i} в D^{σ}-базисе.

Пусть решение Ψ^{ε} уравнения Шредингера представлено рядом (19) с D^{σ}-компонентами (20) или рядом (19) с D^{σ}-компонентами (21), а все компоненты этих рядов $\Psi^{n\varepsilon t}_{im'}(y)$, где $t = x$ или $t = y$, известны. Используя те же приемы, что и при доказательстве формул (22), нетрудно показать, что обоим $(t = x, y)$ представлениям функции Ψ^{ε} отвечают аналогичные по строению разложения фаддеевской компоненты Ψ^{ε}_{i} и разложения ее D^{σ}-компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{im'}$: при $t = x$

$$\Psi^{\varepsilon}_{i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^{x})\, \Psi^{\varepsilon x}_{im'}(x, y, \theta)\,, \tag{34}$$

$$\Psi^{\varepsilon x}_{im'}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^{n} \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi^{n\varepsilon x}_{iam'}(y)\, \Theta_{am'}(u)\,, \tag{35}$$

а в случае $t = y$

$$\Psi^{\varepsilon}_{i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^{y})\, \Psi^{\varepsilon y}_{im'}(x, y, \theta)\,, \tag{36}$$

$$\Psi^{\varepsilon y}_{im'}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^{n} \sum_{b=m'}^{n} \Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}(y)\, \Theta_{bm'}(u)\,. \tag{37}$$

Вывод уравнений для неизвестных Θ-компонент $\Psi^{n\varepsilon x}_{iam'}$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}$ из уравнения (3), содержащего в левой части компоненту Ψ^{ε}_{i}, несложен. Сначала V_i, H_0 и Ψ^{ε} заменяются соответствующими суммами (5), (6) и (19), (20) или (19), (21), а Ψ^{ε}_{i} — искомым рядом (34) или (36). Затем полученные уравнения проецируются сначала на функции $D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^{t})$ с $t = x$ или $t = y$, а затем на соответствующие базисные функции $\Theta_{am'}(u)$ или $\Theta_{bm'}(u)$. Все правила для такого последовательного проецирования подробно описаны в работе [8].

В итоге для искомых Θ-компонент $\Psi^{n\varepsilon t}_{iam'}(y)$, $t = x, y$, получаются рекуррентные по индексу n цепочки алгебраических уравнений. В случае $t = x$ при любых $n > \mu(\sigma)$ и m' уравнения цепочки для неизвестных $\Psi^{n\varepsilon x}_{iam''}(y)$ зацепляются по индексу $m'' = m', m' \pm 1$ и поэтому цепочка неудобна для ее анализа и далее не рассматривается. В случае $t = y$ для каждого $m' = \mu(\sigma), \mu(\sigma) + 1, \ldots \ell$ получается простая рекуррентная $(n = -2, -1, \ldots)$ цепочка:

$$[b(b+1) - (n+2)(n+3)]\ \Psi^{n+2,\varepsilon y}_{ibm'}(y) = -q\Psi^{n+1,\varepsilon y}_{bm'}(y) - \sum_{p=0}^{n} V_{ip}\,\Psi^{n-p,\varepsilon y}_{b'm'}(y) +$$
$$+\, y^{-2} \sum_{m''=m'\pm 1} \gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}\, q^{b}_{m'm''}\, \Psi^{n\varepsilon y}_{ibm''}(y) - \left[h^{y}_{bm'}(y) - V^{00}(y)\right]\ \Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}(y), \tag{38}$$

где $\Psi^{n\varepsilon x}_{ibm'} \equiv 0$ при $n < b$ и при $b < m'$, $h^{y}_{bm'}(y)$ — дифференциальный оператор:

$$h^{y}_{bm'}(y) \equiv -\frac{1}{y^2}\,\partial_y(y^2\partial_y) + \frac{1}{y^2}\left[\ell(\ell+1) + b(b+1) - 2m'^2\right] + V^{00}(y) - E\,,$$

а коэффициенты $\gamma^{\ell\sigma}_{m'm''}$ и $q^{b}_{m'm''}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\gamma^{\ell\sigma}_{m',m'+1} &\equiv \left\{\left[1 + \delta_{m'0}\,\sigma\,(-1)^{\ell}\right]\,[\ell(\ell+1) - m'(m'+1)]\right\}^{1/2},\\
\gamma^{\ell\sigma}_{m',m'-1} &\equiv (1 - \delta_{m'0})\,\left\{\left[1 + \delta_{m'1}\,\sigma\,(-1)^{\ell}\right]\,[\ell(\ell+1) - m'(m'-1)]\right\}^{1/2};\\
q^{b}_{m'm''} &\equiv \left[b(b+1) - m'm''\right]^{1/2}, \quad m'' = m' \pm 1\,.
\end{aligned}$$

Решения $\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{ibm'}$ уравнений (38) удобно искать в порядке возрастания $(n = -2, -1, \ldots)$ индекса n и убывания $(b = n, n-1, \ldots)$ индекса b при каждом n. Уравнение с $b = n + 2$ имеет вид $0\,\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{ibm'} = 0$, поэтому $\Psi^{n+2,\varepsilon y}_{im'}(y) = g^{n+2,y}_{im'}(y)$, где $g^{n+2,y}_{im'}(y)$ — некоторая нетривиальная функция. Исключение составляет случай $\sigma = (-1)^{\ell+1}$, $m' = 0$, когда согласно (37) $\Psi^{n\varepsilon y}_{im'} = 0$ при всех n. Поэтому в этом случае полагаем $g^{ny}_{i0}(y) \equiv 0$ при всех n.

Теперь построим явные асимптотики рядов (37) с $m' \leqslant 2$ в виде подсумм их трех наиболее медленно убывающих при $x \to 0$ слагаемых и выведем связи для Θ-компонент $\Psi^{\varepsilon y}_{ibm'}$. Сначала в уравнениях (38) с $m' \leqslant 2$ заменим функции $\Psi^{n\varepsilon}_{bm'}(y)$ с $n \leqslant 3$ их явными выражениями, найденными в работе [8]. Затем решим полученные уравнения и выразим решения $\Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}(y)$ через неопределенные функции $f^{ny}_{m'} \equiv \Psi^{n\varepsilon y}_{bm'}$ и $g^{ny}_{im'} \equiv \Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}$, равные производным $(n!)^{-1}\partial^n_x\Psi^{\varepsilon y}_{m'}(x,y)$ и $(n!)^{-1}\partial^n_x\Psi^{\varepsilon y}_{im'}(x,y)$ при $x = 0$ и $n = b$. Используя полученные выражения, представим асимптотики рядов (37) с $m' \leqslant 2$, т. е.

асимптотики D^σ-компонент $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$, $m' \leqslant 2$, в обоих случаях $\sigma = \pm(-1)^\ell$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{\varepsilon y}_{i0}(x,y,\theta) = \left\{ g^{0y}_{i0} + \frac{qx}{2}\, f^{0y}_0 + \frac{x^2}{12}\,[(2V_{i0}+q^2) f^{0y}_0 + 2(h^y_{00} - V^{00}) g^{0y}_{i0}] + \right.\\
&\left. + \frac{x^3}{144}\,\left[\, q^3 + 2q(4h^y_{00} + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12V_{i1}\,\right] f^{0y}_0 \right\} \Theta_{00}(u) + \\
&+x \left[g^{1y}_{i0} + \frac{qx}{4}\, f^{1y}_0 + \frac{x^2}{40}\,(4V_{i0}+q^2)\, f^{1y}_0 \right] \Theta_{10}(u) + \\
&+\frac{x^3}{10y^2}\, \left\{ y^2 [h^y_{10} - V^{00}]\, g^{1y}_{i0} - [2\ell(\ell+1)(1+\sigma(-1)^\ell)]^{1/2} g^{1y}_{i1} \right\} \Theta_{10}(u) + \\
&\qquad\qquad +x^2 \left[g^{2y}_{i1} + \frac{qx}{6}\, f^{2y}_0 \right] \Theta_{20}(u) + x^3\, g^{3y}_{i0}\, \Theta_{30}(u) + O(x^4)\,; \quad (39)\\
&\Psi^{\varepsilon y}_{i1}(x,y,\theta) = x \left[g^{1y}_{i1} + \frac{qx}{4}\, f^{1y}_1 + \frac{x^2}{40}\,(4V_{i0}+q^2)\, f^{1y}_1 \right] \Theta_{11}(u) + \\
&+\frac{x^3}{10y^2}\, \left\{ y^2 (h^y_{11} - V^{00})\, g^{1y}_{i1} - 2\,[\ell(\ell+1)]^{1/2}\, g^{1y}_{i0} \right\} \Theta_{11}(u) + \\
&\qquad\qquad +x^2 \left[g^{2y}_{i1} + \frac{qx}{6}\, f^{2y}_1 \right] \Theta_{21}(u) + x^3\, g^{3y}_{i1}\, \Theta_{31}(u) + O(x^4)\,;\\
&\Psi^{\varepsilon y}_{i2}(x,y,\theta) = x^2 \left[g^{2y}_{i2} + \frac{qx}{6}\, f^{2y}_2 \right] \Theta_{22}(u) + x^3\, g^{3y}_{i2} \Theta_{32}(u) + O(x^4)\,,
\end{aligned}
$$

где $f^{ny}_{m'}(y), g^{ny}_{im'}(y)$ — произвольные функции, но f^{ny}_0, $g^{ny}_{i0} \equiv 0$ при $\sigma = (-1)^{\ell+1}$.

Теперь найдем производные ∂^n_x полученных асимптотик и таким образом выведем связи при $x=0$, $y>0$ для проекций $\partial^n_x \Psi^{\varepsilon y}_{ibm'} \equiv (n!)\Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}$ производных $\partial^n_x \Psi^{\varepsilon y}_{m'}$ на функции $\Theta_{bm'}(u)$. При $x=0$ и $q \neq 0$ проекции $\Psi^{\varepsilon y}_{ibm'}$ фаддеевской компоненты Ψ^ε_i связаны с проекциями $\Psi^{\varepsilon y}_{bm'}$ функции Ψ^ε соотношениями

$$
\partial^b_x\, [\, 2\, \partial_x \Psi^{\varepsilon y}_{ibm'}(x,y) - q\, \Psi^{\varepsilon y}_{bm'}(x,y)\,] = 0\,, \quad b \geqslant m' = 0,1,2\,, \qquad (40)
$$

а для проекций $\Psi^{\varepsilon y}_{ibm'}$ имеются связи

$$
\begin{aligned}
&\left[\, 3q\, \partial^2_x - (2V_{i0}+q^2)\, \partial_x - q(h^y_{00} - V^{00}) \right] \Psi^{\varepsilon y}_{i00}(x,y) = 0,\\
&\partial_x \left\{\, 12q\, \partial^2_x - [q^3 + 2q(4h^y_{00} + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12V_{i1}] \right\} \Psi^{\varepsilon y}_{i00}(x,y) = 0,\\
&\partial_x \left[\, 10q\partial^2_x - 3(4V_{i0}+q^2)\partial_x - 6q(h^y_{10} - V^{00})\,\right] \Psi^{\varepsilon y}_{i10}(x,y) = \qquad (41)\\
&\qquad = -\frac{6q}{y^2}\, \left[\, 2\ell(\ell+1)(1+\sigma(-1)^\ell)\,\right]^{1/2} \partial_x \Psi^{\varepsilon y}_{i11}(x,y),\\
&\partial_x \left[\, 10q\partial^2_x - 3(4V_{i0}+q^2)\partial_x - 6q(h^y_{11} - V^{00})\,\right] \Psi^{\varepsilon y}_{i11}(x,y) = \\
&\qquad = -12q[\ell(\ell+1)]^{1/2}\, \partial_x \Psi^{\varepsilon y}_{i10}(x,y).
\end{aligned}
$$

При $q = 0$ все эти связи вырождаются в равенства

$$\partial_x^{a+1} \Psi^{\varepsilon y}_{iam'}(x, y)|_{x=0} = 0\,, \quad a = 0, 1,$$

и, кроме того, имеются связи

$$\begin{aligned}
&\left[\, 3\partial_x^2 - (h^y_{00} - V^{00}) \,\right]\, \Psi^{\varepsilon}_{i00}(x, y) = V_{i0}\, \Psi^{\varepsilon y}_{00}(x, y)\,; \\
&\left\{\, 2V_{i0}\, \partial_x^3 - V_{i1}\, \left[\, 3\partial_x^2 - (h^y_{00} - V^{00}) \,\right] \,\right\}\, \Psi^{\varepsilon y}_{i00}(x, y) = 0\,; \\
&\partial_x\, \left[\, 5\partial_x^2 - 3(h^y_{10} - V^{00}) \,\right]\, \Psi^{\varepsilon y}_{i10}(x, y) + \\
&+ \frac{3}{y^2}\, \left[2\ell(\ell + 1)(1 + \sigma(-1)^{\ell} \right]^{1/2}\, \partial_x \Psi^{\varepsilon y}_{i11}(x, y) = 3V_{i0}\, \partial_x \Psi^{\varepsilon}_{10}(x, y); \\
&\partial_x\, \left[\, 5\partial_x^2 - 3(h^y_{11} - V^{00}) \,\right]\, \Psi^{\varepsilon y}_{i11}(x, y) + \\
&+ \frac{6}{y^2}\, \left[\ell(\ell + 1) \right]^{1/2}\, \partial_x \Psi^{\varepsilon y}_{i10}(x, y) = 3V_{i0}\, \partial_x \Psi^{\varepsilon}_{11}(x, y).
\end{aligned} \tag{42}$$

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

В работе [10] шестимерные уравнения Фаддеева (3) подстановкой (34) с $t = x$ были впервые редуцированы к конечной системе трехмерных дифференциальных уравнений Фаддеева для совокупности $\{\Psi^{\varepsilon x}_{jm'}\}$ всех искомых D^{σ}-компонент $\Psi^{\varepsilon x}_{jm'}$, $j = 1, 2, 3$, $m' \geqslant \mu(\sigma)$. Теория рассеяния для такой формулировки задачи трех частиц в представлении полного углового момента предложена в работе [11]. После этой работы дискретные сплайн-аналоги трехмерных уравнений Фаддеева стали интенсивно использоваться для расчета характеристик реальных трехчастичных систем. Результаты первых расчетов, выполненных в таком подходе к решению задачи трех частиц с кулоновскими взаимодействиями, обсуждались в обзоре [7]. В случае парных взаимодействий с сильным короткодействующим отталкиванием дискретные сплайн-аналоги трехмерных уравнений Фаддеева впервые построены, исследованы и применены для расчета связанных состояний тримера атома ^{4}He в работах [20] и [21]. Затем такие сплайн-аналоги использовались в работе [22], но уже для анализа упругого рассеяния атома ^{4}He на связанном состоянии двух атомов ^{4}He.

Как было показано выше, выбор системы S^y в качестве «подвижной» является предпочтительным, потому что при таком выборе фаддеевские D^{σ}-компоненты $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$, $m' \geqslant \mu(\sigma)$, вблизи точки парного удара частиц p_j и p_k устроены довольно просто. Поэтому для оптимизации численных расчетов предлагается использовать выведенные в недавней работе [23] трехмерные уравнения Фаддеева в случае $t = y$. Доказанные связи (40)–(42) стоит включать в дискретные сплайн-аналоги таких уравнений для ускорения поточечной сходимости вычисляемых фаддеевских D^{σ}-компонент $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$ к точным вблизи соответствующих ($i = 1, 2, 3$) точек парных соударений.

4. СЛУЧАЙ S-ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Ограничимся случаем трех тождественных частиц. Пусть парные потенциалы $V_k(x_k)$ — ряды (5), а парные взаимодействия — S-волновые:

$$V_k(\mathbf{x}_k) = |Y_{00}(\hat{x}_k)\rangle\, V_k(x_k)\, \langle Y_{00}(\hat{x}_k)|\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Как известно [9], в этом случае система уравнений Фаддеева в бисферическом базисе состоит из одного двумерного интегродифференциального уравнения. Его можно вывести разными способами [19]. Для наших целей наиболее удобным является представление фаддеевских компонент Ψ^{ε}_k в виде

$$\Psi^{\varepsilon}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = y_k^{\ell}\, G^{\ell}(x_k, y_k)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{\ell 0}(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{43}$$

Вследствие тождественности частиц такому представлению отвечает особое бисферическое разложение (17) решения Ψ^{ε} уравнения Шредингера (2): в этом разложении $\Psi^{\varepsilon}_{ab} \equiv 0$ при $b = 1, 2, \ldots$, а в противном случае

$$\Psi^{\varepsilon}_{ab}(x, y) = y^{\ell}\, G^{\ell}(x, y)\, \delta_{a\ell}\, \delta_{b0} + 2 \int_{-1}^{1} K^{\ell}_{ab\ell 0}(x, y, u)\, (y')^{\ell}\, G^{\ell}(x', y')\, du\,. \tag{44}$$

Здесь и далее $G^{\ell}(x_k, y_k)$ — искомая функция, $x \equiv x_i$, $y \equiv y_i$ — аргументы, переменные $x' \equiv x_k$, $y' \equiv y_k$ — функции (10) или (11) аргументов u и x, y при $\gamma_{ki} = \pi/3$, а ядра $K^{\ell}_{ab\ell 0}(y')^{\ell}$ — функции, исследованные в работах [18, 19]. В общем случае эти функции — конечные двойные суммы:

$$\begin{aligned}
K^{\ell}_{ab\ell 0}(x, y, u)\, (y')^{\ell} \quad &= \quad y^{\ell} \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{x}{y}\right)^{n} \sum_{s=b-n}^{b+n} K^{\ell n s}_{ab}\, P_s(u), \quad (-1)^{n+s+b} = 1\,, \\
K^{\ell n s}_{ab} \quad &\equiv \quad (-1)^{a}\, (\sqrt{3})^{\ell - n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \left[\frac{(2\ell+1)!}{(2\ell - 2n)!\, n!}\right]^{1/2} \times \\
&\times \quad (2s+1)\, C^{a0}_{s0\ell-n0}\, C^{b0}_{s0n0} \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & \ell \\ n & \ell - n & s \end{array} \right\},
\end{aligned} \tag{45}$$

а в случае $a = \ell$, $b = 0$ — однократные суммы:

$$\begin{aligned}
K^{\ell}_{\ell 0 \ell 0}(x, y, u)\, (y')^{\ell} \quad &= \quad y^{\ell} \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{x}{y}\right)^{n} K^{\ell n}\, P_n(u)\,, \\
K^{\ell n} \quad &\equiv \quad \frac{1}{2}\, (-1)^{\ell} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \frac{(\sqrt{3})^{n}\, \ell!}{n!\, (\ell - n)!}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Заменим в фаддеевской системе (3) функции Ψ^{ε}_k и Ψ^{ε} их бисферическими рядами с компонентами (43) и (44). Спроецируем полученные уравнения на бисферический базис и в результате для искомой функций G^ℓ выведем двумерное интегродифференциальное уравнение с ядром $K^\ell_{\ell 0 \ell 0}(y')^\ell$. Заменив это ядро суммой (46), получим уравнение

$$\left\{ \partial_x^2 + \frac{2}{x}\,\partial_x + \partial_y^2 + (\ell+1)\,\frac{2}{y}\,\partial_y + E - V_i(x) \right\} G^\ell(x,y) = \tag{47}$$
$$= 2\,V_i(x) \sum_{n=0}^{\ell} \left[K^{\ell n} \left(\frac{x}{y}\right)^n \int_{-1}^{1} du\, P_n(u)\, G^\ell(x',y') \right].$$

Построим решение G^ℓ этого уравнения в виде формального ряда

$$G^\ell(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, G_n^\ell(y)\,, \quad G_n^\ell(y) = (n!)^{-1}\, \partial_x^n G^\ell(x,y)|_{x=0}\,. \tag{48}$$

Начнем с анализа ряда Тейлора с центром в точке $x = 0$ для функции $G^\ell(x',y')$, стоящей под интегралом. Ее аргументы x' и y' — функции (11) переменных u, x, y при $\gamma = \pi/3$, поэтому производные $\partial_x^n G^\ell$ — сложные комбинации производных $\partial_x^p x'$, $\partial_x^p y'$ и их целых степеней, например,

$$\partial_x\, G^\ell(x',y') = [\,(\partial_x x')\,\partial_{x'} + (\partial_x y')\,\partial_{y'}]\; G^\ell(x',y')\,,$$
$$\partial_x^2\, G^\ell(x',y') = \left\{ [(\partial_x x')\,\partial_{x'} + (\partial_x y')\,\partial_{y'}]^2 + (\partial_x x')^2\,\partial_{x'} + (\partial_x y')^2\,\partial_{y'} \right\} G^\ell(x',y').$$

В силу (13) и (14) производные $\partial_x^p x'$ и $\partial_x^p y'$ — конечные суммы по полиномам Лежандра. Поэтому исследуемый ряд Тейлора функции G^ℓ — двойная сумма

$$G^\ell(x',y') = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^{p} G_{ps}^\ell(y)\, P_s(u)\,, \quad (-1)^{p+s} = 1\,, \tag{49}$$

в которой функции $G_{ps}^\ell(y)$ — довольно громоздкие комбинации производных функции $G^\ell(x',y')$ при $x = 0$, т. е. в точке $(x',y') = (\sqrt{3}y/2, y/2)$. Например,

$$\begin{aligned}
&G_{00}^\ell(y) = G^\ell(x',y')\,, \quad G_{11}^\ell(y) = (1/2)\,\Big(\partial_{x'} - \sqrt{3}\,\partial_{y'}\Big)\; G^\ell(x',y') \\
&G_{20}^\ell(y) = (d_2 + d_1)\; G^\ell(x',y')\,, \quad G_{22}^\ell(y) = (2d_2 - d_1)\; G^\ell(x',y')\,; \\
&d_1 \equiv [1/(6\sqrt{3})]\,(\partial_{x'} + 3\sqrt{3}\,\partial_{y'})\,, \quad d_2 \equiv (1/24)\,(\partial_{x'} - \sqrt{3}\,\partial_{y'})^2\,.
\end{aligned} \tag{50}$$

Докажем правило отбора $(-1)^{p+s} = 1$ для ряда (49). Как следует из (10), функции x' и y' инвариантны относительно одновременной инверсии $x \to -x$, $u \to -u$. Значит любая функция $G^\ell(x',y')$ и ее разложение (49) обладают этим же свойством. Каждое слагаемое $x^s G_{ps}(y) P_s(u)$ такого ряда при инверсии приобретает множитель $(-1)^{p+s}$, а все слагаемые линейно независимы по одному или двум аргументам x и u. Поэтому исследуемый ряд инвариантен относительно инверсии, тогда и только тогда, когда его индексы p и s такие, что $p+s$ — четное число, что и требовалось показать.

Теперь в уравнении (47) заменим функции $V_i(x)$, $G^\ell(x,y)$ и $G^\ell(x',y')$ соответствующими рядами (5), (48) и (49). Из получившегося уравнения для искомых функций G^ℓ_n выведем рекуррентную цепочку уравнений:

$$\begin{aligned}(n+2)(n+3)\, G^\ell_{n+2}(y) &= q\, G^\ell_{n+1}(y) + \tilde h_\ell(y)\, G^\ell_n(y) + \\ &+ \sum_{p=1}^{n} V_{ip}\, G^\ell_{n-p}(y) + \sum_{p=0}^{n} \sum_{s=0}^{\min\{\ell,p\}} V_{i,n-p-s}\, \frac{4K^{\ell s}}{2s+1}\, y^{-s}\, G^\ell_{ps}(y)\,,\end{aligned} \tag{51}$$

где $n=-2,-1,\ldots$, а $G^\ell_n \equiv 0$ при $n<0$ и по определению

$$\tilde h_\ell(y) \equiv -\partial_y^2 - (\ell+1)\,(2/y)\,\partial_y + V_{i0} - E\,.$$

Все функции $G^\ell_n(y)$, удовлетворяющие этой цепочке, выражаются явно через неопределенную функцию $G^\ell_0(y) = G^\ell(0,y)$ и функции $G^\ell_{ps}(y)$. Заменим такими выражениями функции $G^\ell_n(y)$, $n \leqslant 3$, в сумме (48), а затем запишем ее асимптотику при $x \to 0$, $y>0$ в виде

$$\begin{aligned}G^\ell(x,y) = &\left\{ 1 + \frac{qx}{2} + \frac{x^2}{12}\,(2\tilde h_\ell(y) + q^2) + \right. \\ &\left. + \frac{x^3}{144}\,\Big[q(8\tilde h_\ell(y) + q^2) + 12V_{i1} \Big] \right\} G^\ell(0,y) + \\ &+ x\,K^{\ell 0}\,\left\{ 2q + \frac{x}{3}(q^2 + 2V_{i0}) + \frac{x^2}{36}\Big[q(q^2 + 6\tilde h_\ell(y) + 2V_{i0}) + 12V_{i1} \Big] \right\} G^\ell_{00}(y) + \\ &+ x^3\,\frac{q}{9}\,K^{\ell 0}\,\Big[(-\ell\sqrt{3}/y)\, G^\ell_{11}(y) + 3G^\ell_{20}(y) \Big] + O(x^4)\,,\end{aligned} \tag{52}$$

где $K^{\ell s}$ и G^ℓ_{00} определены формулами (46) и (50). Из этой асимптотики в случае $q \neq 0$ находим следующие связи при $x=0$ $y>0$ и $(x',y') = (\sqrt{3}y/2, y/2)$:

$$\begin{aligned}&(2\partial_x - q)\, G^\ell(x,y) = (-1)^\ell\, 2^{1-\ell}\, q\, G^\ell(x',y')\,, \\ &\Big[3q\partial_x^2 - (2V_{i0} + q^2)\partial_x - q(\tilde h_\ell + V_{i0}) \Big]\; G^\ell(x,y) = 0, \\ &\Big\{ 12q\partial_x^3 - \Big[q(6\tilde h_\ell + 2V_{i0} + q^2) + 12V_{i1} \Big]\,\partial_x - q^2(\tilde h_\ell + V_{i0}) \Big\}\; G^\ell(x,y) = \\ &= (-1)^\ell 2^{-\ell-1}\, q^2\, \Big\{ (\partial_{x'} - \sqrt{3}\,\partial_{y'})^2 + \\ &+ (4/\sqrt{3})y^{-1}\, [(1-3\ell)\partial_{x'} + 3(1+3\ell)\,\partial_{y'}] \Big\}\, G^\ell(x',y')\,,\end{aligned} \tag{53}$$

а при $q = 0$ получаем равенство $\partial_x G^\ell(x,y)|_{x=0} = 0$ и связи

$$\begin{aligned} &[3\partial_x - \tilde{h}_\ell(y)]\, G^\ell(x,y) = (-1)^\ell\, 2^{1-\ell}\, G^\ell(x',y')\,, \\ &\Big\{\, 2V_{i0}\, \partial_x^3 - V_{i1}[3\partial_x^2 + V_{i0} - \tilde{h}_\ell(y)] \,\Big\}\; G^\ell(x,y) = 0\,. \end{aligned} \tag{54}$$

В полученной серии связей (53) и (54) имеются особые связи, содержащие функцию $G^\ell(x',y')$. Эти соотношения связывают значения исследуемой функции $G^\ell(x,y)$ на прямой $(x = 0, y > 0)$ с ее же значениями, но на прямой $y = \sqrt{3}x > 0$. Такая связь является следствием нелокальности уравнения (47) и означает, что поведение фаддеевской бисферической компоненты $\Psi^\varepsilon_{i\ell 0} = y^\ell\, G^\ell(x,y)$ в точке парного удара $(x = 0, y > 0)$ зависит и от значений ее частных производных в точке $(\sqrt{3}y/2, y/2)$.

Теперь исследуем строение бисферических компонент Ψ^ε_{ab} разложения (17) решения Ψ^ε уравнения Шредингера (2), отвечающее найденному разложению (48) функции G^ℓ. Заменим в представлениях (44) этих компонент функции $G^\ell(x,y)$ и $G^\ell(x',y')$ рядами (48) и (49), а ядро $K^\ell_{ab\ell 0}(y')^\ell$ — суммой (45). Рассмотрим получившийся ряд

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon_{ab}(x,y) \;&=\; y^\ell \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, G^\ell_n(y)\, \delta_{a\ell}\delta_{b0} + \\ &+\; y^\ell \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{p=m-\ell}^{m} y^{p-m} \sum_{s=b-m+p}^{b+m-p} \frac{4K^{\ell,m-p,s}_{ab}}{2s+1}\, G^\ell_{ps}(y)\,. \end{aligned} \tag{55}$$

В нем b — четное из-за тождественности частиц, а в силу правил отбора для рядов (45) и (49) обе суммы $p + s$ и $m - p + s$ — четные. Поэтому m — четное. Следовательно, вблизи точки парного удара компонента $\Psi^\varepsilon_{\ell 0}(x,y)$ — ряд по четным и нечетным степеням аргумента x, а все остальные компоненты $\Psi^\varepsilon_{ab}(x,y)$, $b = 2, 4, \ldots$, — ряды по четным степеням этого же аргумента.

Явные асимптотики компонент $\Psi^\varepsilon_{ab}(x,y)$ при $x \to 0$ несложно найти как подсуммы наиболее медленно убывающих слагаемых рядов (55).

Например, при $b = 0$

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon_{\ell 0}(x,y) \;&=\; y^\ell \left(1 + \frac{qx}{2}\right) \left[G^\ell_0(y) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^\ell G^\ell_{00}(y) \right] - \\ &-\; x^2\, \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{y}{2}\right)^{\ell-1} C^{\ell 0}_{10\ell-10}\, G^\ell_{11}(y) + O(x^3)\,, \end{aligned} \tag{56}$$

а в случае $b = 2$

$$\Psi^{\varepsilon}_{a2} = x^2 \, \frac{2}{\sqrt{5}} \, \left(-\frac{y}{2}\right)^{\ell} \, \Big\{ \, C^{a0}_{\ell 020} \, G^{\ell}_{22}(y) + \tag{57}$$
$$+ \frac{1}{y\sqrt{3}} \, [\,(\ell + a + 2)(\ell + a + 3)(\ell - a + 2)(\ell - a + 1)]^{1/2} \;\; C^{a0}_{10\ell-10} \, G^{\ell}_{11}(y) +$$
$$+ 3y^{-2} \, [(2\ell + 1)(2\ell - 1)\ell(\ell - 1)]^{1/2} \;\; G^{\ell}_{00}(y) \, \delta_{a,\ell-2} \Big\} + O(x^4).$$

Вследствие представлений (17) и (56), (57) исследуемое решение Ψ^{ε} обладает при $x \to 0$ и $y > 0$ свойством

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Psi^{\varepsilon}_{\ell 0}(x, y) \, \mathcal{Y}^{\ell m}_{\ell 0}(\hat{x}, \hat{y}) \, [\, 1 + o(1) \,] = (1 + qx/2)\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{x=0} + O(x^2)$$

и поэтому подчиняется связи

$$(2 - q\partial_x)\Psi^{\varepsilon}(x, y) = 0 \, , \quad x = 0 \, , \quad y > 0 \, .$$

При $q \neq 0$ и $\ell = 0$ эта связь, выведенная нами в случае S-волновых взаимодействий, является аналогом условия Като, доказанного в работе [1], но в случае центральных, а именно кулоновских, парных взаимодействий.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В разделе 3 показано, как построить разложения одной фаддеевской компоненты Ψ^{ε}_{i} и ее парциальных компонент Ψ^{ε}_{iab} и $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$ вблизи точки парного удара двух выбранных частиц p_j и p_k. Полагая последовательно $i = 1, 2, 3$ и повторяя каждый раз все построения не трудно найти разложения всех парциальных компонент Ψ^{ε}_{iab} и $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$, $i = 1, 2, 3$, вблизи точек столкновения соответствующих частиц p_j и p_k. Таким образом в случае центральных парных взаимодействий завершается построение разложений решений $\{\Psi^{\varepsilon}_{jab}\}$ и $\{\Psi^{\varepsilon y}_{jm'}\}$ дву- и трехмерных уравнений Фаддеева вблизи любой из трех точек парных ударов.

Представленный в разделе 3 метод достаточно общий по двум причинам.

Во-первых, этот метод применим для системы трех разных частиц с центральными парными взаимодействиями довольно общего для задач атомной и молекулярной физики типа (5) и при любых допустимых значениях полного углового момента ℓ и пространственной четности σ.

Во-вторых, этим методом можно исследовать полные (бесконечные) формальные разложений регулярных решений дву- и трехмерных уравнений Фаддеева в малых окрестностях всех трех точек парных соударений.

Главное преимущество предложенного метода — его исключительная простота, заключающаяся в том, что построение разложений всех исследуемых функций сводится к явному решению соответствующих рекуррентных цепочек алгебраических уравнений.

Метод реализуется в три этапа и стартует с уравнения Шредингера (2).

Сначала бисферические или D^{σ}-компоненты $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ или $\Psi^{n\varepsilon t}_{m'}$ решения Ψ^{ε} этого уравнения строятся в виде рядов (18) или (21) способами, предложенными в работе [8].

Затем в уравнении фаддеевской системы (3), содержащем в левой части компоненту Ψ^{ε}_{i}, функция Ψ^{ε} заменяется одним из таких рядов, взаимодействие V_i представляется известным рядом (5), а компонента Ψ^{ε}_{i} восстанавливается как соответствующий выбранному разложению функции Ψ^{ε} ряд (22), (23) или (36), (37) с искомыми функциями $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}(y)$ или $\Psi^{n\varepsilon y}_{im'}(y)$.

Наконец, эти функции выражаются как решения рекуррентных цепочек уравнений (25) или (38) через известные функции $\Psi^{n\varepsilon}_{ab}$ или $\Psi^{n\varepsilon t}_{m'}$.

Все вышеупомянутые этапы реализуются исключительно просто благодаря тому, что для анализа уравнения Шредингера и лишь одного из уравнений системы Фаддеева используется только собственное для этих уравнений координатное представление $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}| \equiv \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i|$.

Альтернативный нашему метод построения разложений фаддеевских парциальных компонент в точке парного удара впервые предложен в работе [10]. В этом методе решение Ψ^{ε} уравнение Шредингера вовсе не используется, а ключевыми являются одновременно все три шестимерные уравнения Фаддеева (3) и разложения всех $(k = 1, 2, 3)$ парных взаимодействий $V_k(x_k)$ и всех искомых компонент Ψ^{ε}_{k} в ряды Тейлора с центром в точке $x = x_i = 0$:

$$\Psi^{\varepsilon}_{k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, \Psi^{n\varepsilon}_{k}(\hat{x}, \mathbf{y})\,, \quad \Psi^{n}_{k}(\hat{x}, \mathbf{y}) = (n!)^{-1}\, \partial^n_x \Psi^{\varepsilon}_{k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)|_{x=0}\,.$$

Переменные x_k и y_k являются функциями (10) аргументов x и y, поэтому уже при $n = 3$ производные $\partial^n_x \Psi^{\varepsilon}_{k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ — довольно сложные комбинации производных $\partial^p_x x_k$ и $\partial^p_x y_k$ и производных функции Ψ^{ε}_{k} по аргументам x_k и y_k. Так как функция Ψ^{ε} считается неизвестной, то приходится решать все три уравнения Фаддеева и выводить одновременно разложения при $x_i \to 0$ и $y_i > 0$ для всех трех компонент Ψ^{ε}_{i} и Ψ^{ε}_{k}, $k \neq i$. Решение существенно усложняется тем, что искомые разложения необходимо записывать в каждом из трех координатных представлений $\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k|$, $k = 1, 2, 3$. По той же причине сложным оказывается и решение заключительной задачи восстановления разложений функции Ψ^{ε} по найденным разложениям ее фаддеевских компонент Ψ^{ε}_{i}.

В случае центральных парных взаимодействий наш подход более экономичен и прост по сравнению с альтернативным подходом работы [10].

Если же парные взаимодействия нецентральные, то в бисферическом базисе система уравнений Шредингера бесконечная, а система уравнений Фаддеева конечная. Поэтому выгоднее сначала вывести разложения бисферических фаддеевских компонент Ψ^{ε}_{iab}, т. е. применить метод обсужденной выше работы [10], а затем по найденным представлениям воспроизвести разложения компонент Ψ^{ε}_{i} и их суммы Ψ^{ε}, подчиненной уравнению Шредингера. Именно по такой схеме выполнены исследования, представленные в разделе 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты настоящей работы.

Как было доказано, если все центральные парные взаимодействия — ряды (5), то при $x \to 0$ и $y > 0$ представлениям (17), и (19), (21) решения $\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ уравнения Шредингера (2) соответствуют аналогичные по строению разложения (22), (23) и (34)–(37) фаддеевской компоненты $\Psi^{\varepsilon}_{i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ этого решения. Компоненты $\Psi^{n\varepsilon}_{iab}$ и $\Psi^{n\varepsilon y}_{ibm'}$ этих разложений подчинены разрешимым в явном виде рекуррентным цепочкам алгебраических уравнений (25) и (38).

Предложенная редукция исходных шестимерных уравнений Фаддеева (3) к таким цепочкам позволила вывести явные асимптотики (27)–(29) и (39) бисферических Ψ^{ε}_{iab} и D^{σ}-компонент $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$ физического решения Ψ^{ε}_{i} вплоть до слагаемых $O(x^4)$ и $O(x^3)$. Из этих асимптотик выведены ранее неизвестные связи (30)–(33) и (40)–(42).

В случае трех тождественных частиц и S-волновых взаимодействий доказано следующее утверждение: если потенциалы таких взаимодействий — степенные ряды (5), то при $x \to 0$ и $y > 0$ формальное решение $G^{\ell}(x, y)$ уравнения (47) — ряд (49) по целым степеням x с компонентами $G^{\ell}_{n}(y)$, подчиненными рекуррентной и разрешимой в явном виде цепочке уравнений (51). Для функции G^{ℓ} получена явная асимптотика (52) и связи (53), (54) в точке парного удара. Показано, что такой асимптотике отвечают асимптотики (56), (57) бисферических компонент Ψ^{ε}_{ab} решения Ψ^{ε} уравнения Шредингера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kato T.* // Comm. on Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. P. 151.
2. *Bingel W. A.* // Z. Naturforsh. A. 1963. V. 18. P. 1249.
3. *Pack R. T., Brown W. B.* // J. Chem. Phys. 1966. V. 45. P. 556.
4. *Виницкий С. И., Пономарев Л. И.* // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13, вып. 6. С. 1336.
5. *Коробов В. И.* // ЯФ. 1989. Т. 50, вып. 6(12). С. 1595.

6. *Korobov V. I., Puzynin I. V., Vinitsky S. I.* // Muon Catalyzed Fusion. 1992. V. 7. P. 63.

7. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2002. Т. 33, вып. 4. С. 844.

8. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2003. Т. 136, вып. 1. С. 90.

9. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

10. *Kostrykin V. V., Kvitsinsky A. A., Merkuriev S. P.* // Few-Body Syst. 1989. V. 6, No. 2. P. 97.

11. *Квицинский А. А., Кострыкин В. В., Меркурьев С. П.* // ЭЧАЯ. 1990. Т. 21, вып. 6. С. 1301.

12. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35, вып. 2. С. 257.

13. *Пупышев В. В.* // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, вып. 2. С. 28.

14. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

15. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

16. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.

17. *Smith F. T.* // J. Chem. Phys. 1959. V. 31. P. 1352.

18. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 1989. Т. 81, вып. 1. С. 86.

19. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 6. С. 1562.

20. *Roudnev V. A., Yakovlev S. L.* // Comp. Phys. Commun. 2000. V. 126. P. 162.

21. *Roudnev V. A., Yakovlev S. L.* // Chem. Phys. Lett. 2000. V. 328. P. 7.

22. *Roudnev V. A.* // Chem. Phys. Lett. 2003. V. 367. P. 95.

23. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2006. Т. 148. № 2. С. 227.

Получено 16 марта 2007 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 08.06.2007.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,74. Тираж 315 экз. Заказ № 55801.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/