Р5-2007-79

В. В. Пупышев

СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА И ФАДДЕЕВА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ТРОЙНОГО УДАРА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

Пупышев В. В. P5-2007-79
Строение регулярных решений уравнений Шредингера и Фаддеева вблизи точки тройного удара

Системы трех частиц с центральными парными взаимодействиями более общего вида, чем кулоновские, рассматриваются вблизи точки тройного удара. Исследуются регулярные фаддеевские бисферические компоненты, подчиненные системам двумерных интегродифференциальных уравнений. Показано, что все фундаментальные регулярные решения этих уравнений являются двойными бесконечными рядами по целым степеням гиперрадиуса, его логарифма и искомым функциям одного гиперугла. Построение таких функций сведено к решению рекуррентной цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений. Фаддеевские бисферические компоненты представлены суммами всех фундаментальных решений. Найденные разложения этих компонент использованы для восстановления разложений проекций регулярных решений шестимерных уравнений Шредингера и Фаддеева на угловые базисы, образованные бисферическими гармониками, гипергармониками или симметризованными D-функциями Вигнера. Для всех таких проекций выведены граничные условия в точке тройного удара.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Pupyshev V. V. P5-2007-79
Structure of Regular Solutions to the Schrödinger and Faddeev Equations in the Vicinity of the Triple Collision Point

Three-body systems with two-body central interactions are considered in the vicinity of the triple collision point. The regular Faddeev bispherical components obeying the systems of two-dimensional integrodifferential equations are studied. It is shown that all fundamental regular solutions to these equations are the double series in integer powers of the hyperradius, its logarithm and the sought functions of one hyperangle. The construction of these functions is reduced to solving of a recurrence chain of ordinary differential equations. The Faddeev bispherical components are presented as infinite sums of all regular solutions. The found expansions of these components are used for reproduction of expansions of projections of the regular solutions to the six-dimensional Schrödinger and Faddeev equations onto the angular basis formed by bispherical harmonics, hyperharmonics or the symmetrized Wigner D-functions. For all these projections the boundary conditions at the triple collision point are derived.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{R}^6$ — шестимерное координатное пространство исследуемой системы трех квантовых частиц, а r — ее гиперрадиус [1]. В $\mathcal{R}^6$ под малой окрестностью точки тройного соударения $r=0$ понимается шестимерный шар $\mathcal{H} \equiv \{\mathbf{r} : r \ll 1\}$, внутри которого расстояния между любыми двумя частицами малы.

Разложение трехчастичной волновой функции в $\mathcal{H}$ впервые получено В. А. Фоком в [2] для ${}^1S_0$-состояния атома ^{3}He. Ядро гелия считалось неподвижным кулоновским центром, а движение двух электронов описывалось трехмерным уравнением Шредингера. Общее регулярное решение этого уравнения искалось в виде двойного ряда по целым степеням гиперрадиуса r, его логарифма $s \equiv \ln r$ и неизвестным функциям двух гиперуглов. Для этих функций В. А. Фок вывел рекуррентную цепочку уравнений, некоторые из них ему удалось разрешить в явном виде.

В обзорах [3,4] дан сравнительный анализ огромного числа работ по исследованию и обобщению фоковского разложения решений уравнения Шредингера для атомных систем из трех и более частиц с парными, чисто кулоновскими взаимодействиями и различными типами симметрии волновой функции. Большинство работ, процитированных в этих обзорах, выполнены по ставшей классической фоковской схеме.

Авторы работы [5] начали обобщение фоковского разложения на случай произвольных масс частиц и центральных парных взаимодействий, представимых рядами по целым степеням x^n, $n = -1, 0, \ldots$, расстояния x между двумя соответствующими частицами. Предложенный авторами вывод разложения фаддеевских компонент Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, подчиненных системе трех шестимерных дифференциальных уравнениям Фаддеева, выполнен по фоковской схеме. Эти компоненты строились в виде фоковских рядов по целым степеням r^n и s^m переменных r и s и функциям $\Psi_i^{nm}(\Omega_i)$, $i = 1, 2, 3$, зависящим от совокупностей Ω_i пяти гиперуглов и подчиненным рекуррентной цепочке дифференциальных уравнений. Решения ее первых трех уравнений авторы получили в явном виде.

Точное решение следующих уравнений — очень трудная задача, потому что их правые части устроены довольно сложно, а число независимых переменных, равное пяти, слишком велико. Численный анализ таких уравнений принципиально невозможен по простой причине: искомые функции Ψ_i^{nm} содержат в качестве слагаемых общие решения соответствующих однородных уравнений, эти слагаемые определены с точностью до произвольных множителей, зафиксировать их значения без потери общности нельзя.

Все перечисленные выше трудности удалось преодолеть в рамках другого подхода [6] к выводу разложений фоковского типа, но лишь в случае трех тождественных частиц с S-волновыми взаимодействиями. В этом подходе исходными являются двумерные интегродифференциальные уравнения Фаддеева, а их общее регулярное решение представляется линейной комбинацией произвольных коэффициентов и фундаментальных решений. Каждое фундаментальное решение строится в виде ряда по целым степеням r^n и s^m и функциям $U_{nm}^{L\ell}(\varphi)$, зависящим лишь от одного гиперугла φ и подчиненным рекуррентной цепочке обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с однородными граничными условиями. Такая рекуррентная краевая задача довольно проста и, что самое главное, не содержит никаких неопределенных коэффициентов. Поэтому решение довольно большого числа ее первых уравнений не вызывает принципиальных затруднений. Для решения можно использовать и известные численные методы [7], и предложенный в [6] способ построения функций $U_{nm}^{L\ell}$ в виде рядов по собственным функциям интегральных операторов, содержащихся в двумерных фаддеевских уравнениях.

В [8] кратко обсуждалось возможное обобщение описанного выше метода на случай трех разных частиц с центральными парными взаимодействиями. Исчерпывающее описание такого обобщения и его практических приложений — главная цель настоящей работы, устроенной следующим образом.

В разделе 1 перечислены только те известные определения и соотношения, которые потребуются в разделах 2–4. Вывод каждого из приведенных соотношений детально изложен в [9–11].

Раздел 2 посвящен подробному описанию и иллюстрации метода построения фундаментальных регулярных решений двумерных уравнений Фаддеева в шаре $\mathcal{H}$ в виде рядов фоковского типа и исследованию зависимости строения таких рядов от строения парных взаимодействий.

В разделах 3 и 4 по полученным разложениям восстановлены и исследованы разложения регулярных решений одно-, дву- и трехмерных систем уравнений Фаддеева и Шредингера в шаре $\mathcal{H}$ и для таких решений в точке тройного удара выведены новые граничные условия в виде линейных соотношений (связей) между частными производными разных порядков.

В Заключении просуммированы основные результаты.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФОРМУЛЫ

В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ фиксируем декартову систему координат S с направляющими ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ и начальной точкой O, совпадающей с центром масс исследуемой системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц p_1, p_2 и p_3 с массами m_1, m_2 и m_3 и зарядами z_1, z_2 и z_3.

В системе S стандартным образом введем три пары приведенных трехмерных векторов Якоби $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$. Векторы $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ объединим в шестимерный вектор $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathcal{R}^6$ с гиперсферическими координатами (r, Ω_i), где $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ — гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ — набор из пяти углов: $\hat{x}_i \equiv (\theta_{x_i}, \varphi_{x_i})$ и $\hat{y}_i \equiv (\theta_{y_i}, \varphi_{y_i})$ — пары сферических углов векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ в системе S, а $\varphi_i \equiv \operatorname{arctg}(y_i/x_i)$. Все гиперуглы набора Ω_k можно представить как функции гиперуглов набора Ω_i и параметра — кинематического угла γ_{ki}. Отметим этот факт соотношением $\Omega_k = \Omega_k(\Omega_i; \gamma_{ki})$ и приведем пример:

$$\varphi_k(\varphi_i, u_i; \gamma_{ki}) = \arccos\left\{[\cos(\gamma_{ki} - \varphi_i)]^2 + (1/2)(u_i - 1)\sin 2\gamma_{ki}\sin 2\varphi_i\right\}^{1/2},$$

где u_i — косинус угла θ_i между векторами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, выраженный через $\hat{x}_i$ и $\hat{y}_i$.

Введем в $\mathcal{R}^3$ три $(i = 1, 2, 3)$ правые, декартовы и "подвижные" системы координат S_i^x с ортами $\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i$. Пусть начальные точки O_i и O систем S_i^x и S_3 совпадают, $\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{e}_1^i, > 0$, $\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{e}_2^i = 0$, а $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{e}_3^i = x_i$. Тогда орты $\mathbf{e}_2^i$ коллинеарны нормали $\mathbf{N} \equiv \mathbf{x}_i \times \mathbf{y}_i$ к плоскости $\mathcal{P}$ трех частиц и эта плоскость совпадает с плоскостями $\mathcal{P}_{13}^i$ ортов $\mathbf{e}_1^i$ и $\mathbf{e}_3^i$. Так как в системе S ориентация векторов $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{y}^i$ задана углами $\hat{x}_i = (\theta_{x_i}, \varphi_{x_i})$ и $\hat{y}_i = (\theta_{y_i}, \varphi_{y_i})$, а в системе S_i^x — углами $\hat{x}_i^x = (\theta_{x_i}^x, \varphi_{x_i}^x) = (0, 0)$ и углами $\hat{y}_i^x = (\theta_{y_i}^x, \varphi_{y_i}^x) = (\theta_i, 0)$, то переход $S \to S_i^x$ определяется углами Эйлера $\omega_i^x = (\varphi_{x_i}, \theta_{x_i}, \gamma_i^x)$, где

$$\cos\gamma_i^x = \operatorname{ctg}\theta_i \cos\theta_{x_i} - \operatorname{cosec}\theta_i \cos\theta_{y_i}\,.$$

В задаче трех частиц как угловые базисные функции наиболее часто используются определенные в [12] и [13] биполярные сферические гармоники (бисферические гармоники) $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ и гипергармоники

$$Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) \quad\equiv\quad 2\operatorname{cosec}(2\varphi_i)\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\,\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)\,, \tag{1}$$

а также введенные в [9] функции

$$\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i) \equiv N_{Lab}\,(\sin\varphi_i)^{a+1}\,(\cos\varphi_i)^{b+1}\,P_n^{(a+1/2,b+1/2)}(\cos 2\varphi_i) \tag{2}$$

и D^σ-функции $D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega_i^x)$, каждая из которых — вполне определенная линейная комбинация [14] двух D-функций Вигнера $D_{m,+m'}^{\ell *}(\omega_i^x)$ и $D_{m,-m'}^{\ell *}(\omega_i^x)$.

Бисферические гармоники можно представить как суммы [15]:

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}_i,\hat{y}_i) \;\; = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} T^{\ell m'}_{ab}\,\Theta_{am'}(u_i)\,D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^x_i)\,. \qquad (3)$$

В (1)–(3) обозначения стандартные: N_{Lab} — известные нормировочные множители, $P^{(a,b)}_n$ — полиномы Якоби, $\Theta_{a\alpha}$ — нормированные присоединенные полиномы Лежандра, $T^{\ell m'}_{ab}$ — коэффициенты Ченга–Фано, а индексы могут принимать только следующие значения:

$$\begin{array}{rcl} \ell & = & 0,1,\dots\,; \quad m=-\ell,-\ell+1,\dots,\ell\,; \quad |a-b|\le \ell \le a+b\,; \\ L & = & a+b+2n\,,\; n=0,1,\dots\,; \quad \sigma=\pm\,(-1)^{\ell}\,, \quad \mu(\sigma)\equiv[1-(-1)^{\ell}\sigma]/2\,. \end{array}$$

При данных значениях полного углового момента ℓ и полной пространственной четности σ минимальное значение $L_{\min}$ гипермомента L равно $\ell+\mu(\sigma)=a+b$, а $\mu(\sigma)=0$ для нормальной четности $\sigma=(-1)^{\ell}$ и $\mu(\sigma)=1$ для аномальной четности $\sigma=(-1)^{\ell+1}$.

Пусть H_0 и E — свободный гамильтониан и полная энергия системы $\{p_1,p_2,p_3\}$ трех частиц, $V\equiv V_1+V_2+V_3$ — полное взаимодействие, а V_1, V_2, V_3 — центральные взаимодействия между частицами p_2 и p_3, p_1 и p_3, p_1 и p_2.

В ядерной и молекулярной физике наряду с кулоновскими потенциалами

$$V_k(x_k)=q_k/x_k\,, \quad q_k\equiv z_i z_j\sqrt{2\mu_{ij}}\,, \quad \mu_{ij}\equiv m_i m_j/(m_i+m_j)\,, \quad k=1,2,3,$$

часто используются взаимодействия более широкого класса

$$V_k(x_k)=q_k/x_k+\bar{V}_k(x_k)=\sum_{n=-1}^{\infty} V_{kn}\,x^n_k\,, \quad k=1,2,3, \qquad (4)$$

и типичными являются три случая A), B) и C):

$$A)\,V_{k,-1}\neq 0\,; \quad B)\,V_{k,-1}=0\,,\,V_{k1}\neq 0\,; \quad C)\,V_{k,2n-1}=0\,,n=0,1,\dots\,, \qquad (5)$$

где $q_k\equiv V_{k,-1}$ и все V_{kn}, $n\ge 0$, — известные константы. В любом из этих случаев с полным гамильтонианом $H\equiv H_0+V$ коммутируют квадрат оператора полного углового момента $\ell=\ell_1\mathbf{e}_1+\ell_2\mathbf{e}_2+\ell_3\mathbf{e}_3$, его компонента ℓ_3 и оператор P одновременной инверсии $\mathbf{x}_i\to-\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i\to-\mathbf{y}_i$. Поэтому полный набор ε сохраняющихся квантовых чисел системы трех частиц состоит из значения энергии и собственных чисел этих трех операторов: $\varepsilon=\{E,\ell,m,\sigma\}$.

Далее мы исследуем только те регулярные (ограниченные всюду в $\mathcal{R}^6$) частные решения Ψ^ε и $\{\Psi_1^\varepsilon, \Psi_2^\varepsilon, \Psi_3^\varepsilon\}$ уравнения Шредингера

$$\left[H_0(r,\Omega_i) - E + V_i(r\cos\varphi_i) + \sum_{k\neq i} V_k(r\cos\varphi_k(\varphi_i,u_i;\gamma_{ki})) \right] \Psi^\varepsilon(r,\Omega_i) = 0 \tag{6}$$

и соответствующей системы трех $(i = 1,2,3)$ уравнений Фаддеева

$$\begin{aligned} &[\, H_0(r,\Omega_i) - E\,]\; \Psi_i^\varepsilon(r,\Omega_i) = -V_i(r\cos\varphi_i)\,\Psi^\varepsilon(r,\Omega_i)\,, \\ &\Psi^\varepsilon(r,\Omega_i) = \Psi_i^\varepsilon(r,\Omega_i) + \sum_{k\neq i}\Psi_k^\varepsilon(r,\Omega_k(\Omega_i;\gamma_{ki}))\,, \end{aligned} \tag{7}$$

которые являются собственными функциями операторов H, ℓ^2, ℓ_3 и P.

Фаддеевские компоненты $\Psi_i^\varepsilon(r,\Omega_i)$ представим бисферическими рядами

$$\Psi_i^\varepsilon = 2\,[r^2\sin 2\varphi_i]^{-1} \sum_{ab} U_{iab}^\ell(r,\varphi_i)\,\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i,\hat{y}_i)\,, \tag{8}$$

гиперсферическими рядами

$$\Psi_i^\varepsilon = r^{-2} \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)} \sum_{ab} U_{iLab}^\ell(r)\,Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) \tag{9}$$

и D^σ-рядами

$$\Psi_i^\varepsilon = 2\left[r^2\sin 2\varphi_i\,(1-u_i^2)^{1/2} \right]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U_{im'}^{\ell x}(r,\varphi_i,u_i)\,D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega_i^x)\,, \tag{10}$$

а функции U_{iab}^ℓ, U_{iLab}^ℓ и $U_{im'}^{\ell x}$ будем называть фаддеевскими приведенными бисферическими, гиперсферическими и D^σ-компонентами.

Гипергармоники — произведения (1) функций 2cosec $\varphi_i\,\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$ и $\tilde{W}_{Lab}$), а множество $\{W_{Lab}(\varphi_i)\}_{L=a+b}^{\infty}$ функций W_{Lab} с фиксированными a и b ортонормировано на отрезке $0 \le \varphi_i \le \pi/2$:

$$\langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|\tilde{W}_{L'ab}(\varphi_i)\rangle \equiv \int_0^{\pi/2} \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\,\tilde{W}_{L'ab}(\varphi_i)\,d\varphi_i = \delta_{LL'}\,.$$

Поэтому это множество является полным и ортонормированным базисом для разложения бисферической компоненты U_{iab}^ℓ, а ее проекция на функцию $\tilde{W}_{Lab}$ равна гиперсферической компоненте U_{iLab}^ℓ:

$$U_{iab}^\ell(r,\varphi_i) = \sum_{L=a+b}^{\infty} U_{iLab}^\ell(r)\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i),\;\; U_{iLab}^\ell(r) = \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|U_{iab}^\ell(\varphi_i)\rangle\,. \tag{11}$$

Если приравнять разложения (8) и (10) функции Ψ_i^ε, а затем применить (3), то получатся представления D^σ-компонент $U_{im'}^{\ell x}$ через компоненты U_{iab}^ℓ:

$$U_{im'}^{\ell x}(r,\varphi_i,u_i) = (1-u_i^2)^{1/2}\sum_{ab} T_{ab}^{\ell m'}\, U_{iab}^\ell(r,\varphi_i)\,\Theta_{am'}(u_i)\,. \qquad (12)$$

Разложениям (8)–(10) трех фаддеевских компонент Ψ_1^ε, Ψ_2^ε и Ψ_3^ε отвечают следующие разложения их суммы $\Psi^\varepsilon(r,\Omega_i)$: бисферический ряд

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon &= 2\,[r^2\sin 2\varphi_i]^{-1}\sum_{ab} U_{ab}^\ell(r,\varphi_i)\,\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i,\hat{y}_i)\,, \\ U_{ab}^\ell(r,\varphi_i) &= U_{iab}^\ell(r,\varphi_i) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'}\langle r,\varphi_i|h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})|U_{ka'b'}^\ell(r,\varphi_k)\rangle\,, \end{aligned} \qquad (13)$$

содержащий интегралы с известными в явном виде ядрами

$$\begin{aligned} &\langle r,\varphi_i|h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})|U_{ka'b'}^\ell(r,\varphi_k)\rangle = \\ &\quad = \int_{C_-(\varphi_i;\gamma_{ki})}^{C_+(\varphi_i;\gamma_{ki})} h_{aba'b'}^\ell(\varphi_i,\varphi_k;\gamma_{ki})\,U_{ka'b'}^\ell(r,\varphi_k)\,d\varphi_k\,, \qquad (14) \\ &C_-(\varphi_i;\gamma_{ki}) \equiv |\varphi_i - |\gamma_{ki}||\,,\ C_+(\varphi_i;\gamma_{ki}) \equiv \min\{\varphi_i + |\gamma_{ki}|, \pi-\varphi-|\gamma_{ki}|\}\,, \end{aligned}$$

гиперсферический ряд

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon &= r^{-2}\sum_{Lab} U_{Lab}^\ell(r)\,Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,, \qquad (15) \\ U_{Lab}^\ell(r) &\equiv U_{iLab}^\ell(r) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'}\langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\,U_{kLa'b'}^\ell(r)\,, \end{aligned}$$

где $\langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}$ — коэффициенты Рейнала–Реваи, и D^σ-ряд

$$\Psi^\varepsilon = 2\left[r^2\sin 2\varphi_i(1-u_i^2)^{1/2}\right]^{-1}\sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U_{m'}^{\ell x}(r,\varphi_i,u_i)\,D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega_i^x)\,, \qquad (16)$$

в котором $U_{m'}^{\ell x}$ — известные суммы [11] фаддеевских компонент $U_{km''}^{\ell x}$.

Шредингеровские приведенные компоненты U_{ab}^ℓ и U_{Lab}^ℓ и $U_{m'}^{\ell x}$ подчиняются аналогам соотношений (11) и (12): компоненты U_{ab}^ℓ и U_{Lab}^ℓ взаимосвязаны:

$$U_{ab}^\ell(r,\varphi_i) = \sum_{L=a+b}^{\infty} U_{Lab}^\ell(r)\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i),\ \ U_{Lab}^\ell(r) = \langle\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)|U_{ab}^\ell(\varphi_i)\rangle, \qquad (17)$$

а вследствие (3) компоненты $U_{m'}^{\ell x}$ выражаются через компоненты U_{ab}^ℓ:

$$U_{m'}^{\ell x}(r,\varphi_i,u_i) = (1-u_i^2)^{1/2}\sum_{ab} T_{ab}^{\ell m'}\,U_{ab}^\ell(r,\varphi_i)\,\Theta_{am'}(u_i)\,. \qquad (18)$$

Три способа редукции системы (7) реализуются по однотипной схеме: сначала все компоненты Ψ_i^ε и их сумма Ψ^ε заменяются однотипными рядами (8)–(10) и (13)–(16), а затем полученные соотношения проецируются на соответствующий угловой базис. В итоге получаются фаддеевские двумерные интегродифференциальные уравнения для бесконечной совокупности $\{U_{iab}^\ell\}$ всех компонент U_{iab}^ℓ, одномерные дифференциальные уравнений для бесконечной совокупности $\{U_{iLab}^\ell\}$ всех компонент U_{iLab}^ℓ и трехмерные дифференциальные уравнения для конечной совокупности $\{U_{im'}^{\ell x}\}$ всех компонент $U_{im'}^{\ell x}$.

Редукция уравнения Шредингера (6) реализуется аналогичным способом: искомое решение Ψ^ε заменяется его рядом (13) или (15), или же (16), получившееся уравнение проецируется на соответствующий угловой базис и в результате выводятся системы дву-, одно- и трехмерных систем уравнений Шредингера для бесконечных совокупностей $\{U_{ab}^\ell\}$ и $\{U_{Lab}^\ell\}$ всех компонент U_{ab}^ℓ и U_{Lab}^ℓ и конечной совокупности $\{U_{m'}^{\ell x}\}$ всех компонент $U_{m'}^{\ell x}$.

Далее нам потребуются только двумерные уравнения Фаддеева

$$\left[\tilde{H}_{0ab}(r,\varphi_i)+E\right]U_{iab}^\ell(r,\varphi_i)=V_i(r\cos\varphi_i)\,U_{ab}^\ell(r,\varphi_i)=$$
$$=V_i(r\cos\varphi_i)\left[U_{iab}^\ell(r,\varphi_i)+\sum_{k\neq i}\sum_{a'b'}\langle r,\varphi_i|h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})|U_{ka'b'}^\ell(r,\varphi_k)\rangle\right]. \quad (19)$$

В этих уравнениях $r\in[0,\infty)$, а $\varphi_i\in[0,\pi/2]$ для каждого $i=1,2,3$; оператор

$$\tilde{H}_{0ab}(r,\varphi_i)\equiv\partial_r^2+r^{-1}\,\partial_r-r^{-2}\,\tilde{L}_{ab}^2(\varphi_i)$$

порожден свободным гамильтонианом H_0 и содержит оператор

$$\tilde{L}_{ab}^2(\varphi_i)\equiv\ -\partial_{\varphi_i}^2+a(a+1)/(\sin\varphi_i)^2+b(b+1)/(\cos\varphi_i)^2\,;$$

индексы a,b и a',b' принимают любые допустимые при данных ℓ и σ значения, причем условием $(-1)^{a+b}=(-1)^{a'+b'}=\sigma$ обеспечивается сохранение собственного числа σ оператора инверсии P, а для того чтобы ряды (8) были ограничены на лучах $\{r\in[0,\infty),\varphi_i=0\}$ и $\{r\in[0,\infty),\varphi_i=\pi/2\}$, все искомые функции $U_{iab}^\ell(r,\varphi_i)$ подчиняются однородным граничным условиям:

$$U_{iab}^\ell=0,\ r=0,\ \varphi_i\in[0,\pi/2]\,;\qquad U_{iab}^\ell=0,\ r\in(0,\infty),\ \varphi_i=0,\pi/2\,, \quad (20)$$

Оператор $\tilde{L}_{ab}^2$ отображает функцию $\tilde{W}_{Lab}$ по правилу

$$[\,\tilde{L}_{ab}^2(\varphi_i)-(L+2)^2\,]\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)=0\,, \quad (21)$$

а оператор $h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})$ — по правилу [16]

$$\langle\varphi_i|h_{aba'b'}^\ell(\gamma_{ki})|\tilde{W}_{La'b'}(\varphi_k)\rangle=\langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi_i)\,. \quad (22)$$

Всюду далее у всех аргументов опущен индекс i и считается, что

$$x \equiv x_i,\ y \equiv y_i,\ \varphi \equiv \varphi_i,\ \Omega \equiv \Omega_i,\ u \equiv u_i,\ \theta \equiv \theta_i\,,\ (1-u_i^2)^{1/2} = \sin\,\theta\,,$$

асимптотикой и связью называются асимптотика при $r \to 0$ и связь при $r = 0$.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть все парные взаимодействия — ряды (4) одного и трех типов (5), а полный набор сохраняющихся квантовых чисел $\varepsilon = \{E, \ell, m, \sigma\}$ задан.

В нашем подходе исходной является краевая задача (19), (20). Его реализацию начнем с обсуждения ключевых формул.

Рассмотрим систему (19). Пусть $\{a, b\}$ — выбранная пара индексов a и b. Для анализа уравнения этой системы, содержащего в левой части компоненту U^{ℓ}_{iab} с такими индексами a и b, будем использовать как полный угловой базис набор $\{\tilde{W}_{Lab}(\varphi)\}^{\infty}_{L=a+b}$ функций (2). Этот базис исключительно удобен, потому что согласно спектральным формулам (21) и (22) функции $\tilde{W}_{Lab}$ являются собственными и для оператора $\tilde{L}^2_{ab}$, и для оператора $h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki})$.

Кроме этих формул, ключевыми будут разложения

$$(\cos\,\varphi)^g\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi) = \sum_{L'=a+b} A^{Lg}_{L'ab}\,\tilde{W}_{L'ab}(\varphi)\,,\qquad g = -1, 0, \ldots \tag{23}$$

Все коэффициенты $A^{Lg}_{L'ab}$ этих разложений — однократные интегралы:

$$\begin{aligned} A^{Lg}_{L'ab} \;\; &\equiv \;\; N_{Lab}\,N_{L'ab} \int_0^{\pi/2} (\sin\,\varphi)^{2a+2}\,(\cos\,\varphi)^{2b+2+g}\;\times \\ &\times \;\; P^{(a+1/2,b+1/2)}_n(\cos\,2\varphi)\,P^{(a+1/2,b+1/2)}_{n'}(\cos\,2\varphi)\,d\varphi\,. \end{aligned}$$

Каждый из таких интегралов подстановкой $z = \cos\,2\varphi$ и заменой полинома $P^{(a+1/2,b+1/2)}_{n'}(z)$ или $P^{(a+1/2,b+1/2)}_n(z)$ гипергеометрическим рядом [17] сведем к сумме табличных интегралов [18]. В итоге получим инвариантное относительно замены $n \leftrightarrow n'$ индексов n и n' представление в виде конечной суммы:

$$\begin{aligned} A^{Lg}_{L'ab} = N_{Lab}\,N_{L'ab}\,\frac{(-1)^{n+n'}}{2\,n!\,n'!}\,(b+3/2)_n \times \\ \times \sum_{p=0}^{n} \frac{(-n)_p}{(b+3/2)_p}\,\frac{(a+b+n+2)_p}{\Gamma(p+1)}\left(-\frac{g}{2}-p\right)_{n'} \times \\ \times\, B\left(a+n'+\frac{3}{2}, b+p+\frac{g}{2}+\frac{3}{2}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

Эта сумма содержит гамма- и бета-функции Γ и B и символ Похгаммера $(-g/2-p)_{n'}$, который при замене $n \leftrightarrow n'$ переходит в символ $(-g/2-p)_n$. Из-за этих символов все коэффициенты $A^{Lg}_{L'ab}$ разложения (23) отличны от нуля, если g — нечетное число, и равны нулю, если g — четное число и $L' > L+g$ или же $L' < \max\{a+b, L-g\}$.

Приступим к построению фундаментальной системы регулярных решений краевой задачи (19), (20). Каждое из ее линейно независимых регулярных решений будем искать в виде формальных асимптотических при $r \to 0$ рядов. Сначала определим вид старших слагаемых искомых рядов. По условию (4) в исследуемых уравнениях (19) потенциалы не могут возрастать при $r \to 0$ быстрее слагаемых $r^{-2}\,\tilde{L}^2_{ab}(\varphi)$ операторов $\tilde{H}_{0ab}$. Поэтому старший член асимптотики каждой компоненты Φ^L_{iab} искомого решения определяется соответствующим характеристическим (см. [19]) уравнением $\tilde{H}_{0ab}\,\Phi^L_{iab} = 0$. Используя (21), из таких уравнений находим

$$\Phi^L_{iab}(r,\varphi) = X^L_{iab}\, r^{L+2}\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) + o(r^{L+2})\,, \quad r \to 0\,. \tag{25}$$

Здесь и далее, как и в системе (19), $i = 1,2,3$, индексы a и b подчинены условиям $a+b \le L$ и $(-1)^{a+b} = \sigma$, а X^L_{iab} — произвольные коэффициенты.

Совокупность $\{\Phi^L_{iab}\}$ всех компонент Φ^L_{iab} с асимптотиками (25) и одним и тем же значением $L \ge L_{\min}$, но любыми возможными при таком L индексами i, a и b назовем L-решением. Компоненты Φ^L_{iab} и $\Phi^{L'}_{ia'b'}$, L- и L'-решений, $L \ne L'$, имеют разную асимптотику (25), что обеспечивает линейную независимость всех L-решений по аргументу r. Компоненты Φ^L_{iab} и $\Phi^L_{ia'b'}$ одного и того же L-решения с разными индексами a и a' и (или) разными индексами b и b' также линейно независимы, потому что согласно (2) и (25) асимптотики любой из компонент Φ^L_{iab} при $\varphi \to 0$ или $\varphi \to \pi/2$ зависят от индекса a или b:

$$\Phi^L_{iab} = O(\varphi_i^{a+1}),\ r \to 0,\ \varphi \to 0;\ \ \Phi^L_{iab} = O\left((\pi/2-\varphi)^{b+1}\right),\ r \to 0\,,\ \varphi \to \pi/2\,.$$

Выберем некоторое значение L и начнем построение каждой компоненты L-решения в виде ряда

$$\Phi^L_{iab}(r,\varphi) \equiv r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(ns)\, \Phi^{Ln}_{iab}(s,\varphi)\,, \quad s \equiv ln\, r\,, \tag{26}$$

где по предположению все функции $r^n = \exp(ns)$ и Φ^{Ln}_{iab} линейно независимы и, кроме того, $\Phi^{Ln}_{iab} = 0$ при $r = 0$ и $\varphi = 0, \pi/2$. Чтобы представления (26) не противоречили соотношениям (25), положим

$$\Phi^{L0}_{iab}(s,\varphi) \equiv X^L_{iab}\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,. \tag{27}$$

Заменой $r \to s \equiv ln\, r$ и подстановкой $\varrho = \exp(s)\cos\varphi$ выведем из системы (19) более удобную для нашей цели систему

$$\left[\partial_s^2 - \tilde{L}^2_{ab}(\varphi)\right] U^{\ell}_{iab}(s,\varphi) = -E\, U^{\ell}_{iab}(s,\varphi) +$$
$$+ \exp(2s)\, V_i(\varrho)\, \left[U^{\ell}_{iab}(s,\varphi) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle s,\varphi | h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | U^{\ell}_{ka'b'}(s,\varphi_k)\rangle \right].$$

В этой системе заменим все потенциалы V_i рядами (4), а функции U^{ℓ}_{iab} — компонентами Φ^L_{iab} искомого L-решения, взятыми в виде (26). В полученных уравнениях приведем подобные слагаемые с одинаковыми степенями аргумента $r = \exp(s)$ и приравняем каждое такое слагаемое к нулю. В итоге получится система уравнений для функций Φ^{Ln}_{iab}:

$$D^{Ln}_{ab}(s,\varphi)\, \Phi^{Ln}_{iab}(s,\varphi) = R^{Ln}_{iab}(s,\varphi)\,, \tag{28}$$
$$\begin{aligned} R^{Ln}_{iab}(s,\varphi) \;\; \equiv \;\; & -E\, \Phi^{L,n-2}_{iab}(s,\varphi) + \sum_{m=0}^{n-1} V_{i,n-m-2}\, (\cos\varphi)^{n-m-2} \times \\ \times \;\; & \left[\Phi^{Lm}_{iab}(s,\varphi) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle s,\varphi | h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | \Phi^{Lm}_{ka'b'}(s,\varphi_k)\rangle \right], \end{aligned}$$

где $a+b, a'+b' \leq L$ и по определению $\Phi^{Ln}_{iab} \equiv 0$ при $n < 0$, а

$$D^{Ln}_{ab}(s,\varphi) \equiv (\partial_s + L + n + 2)^2 - \tilde{L}^2_{ab}(\varphi)\,. \tag{29}$$

Система (28) — рекуррентная цепочка n-подсистем, $n = 0, 1, \ldots$ Каждая n-подсистема — совокупность неоднородных уравнений для всех функций Φ^{Ln}_{iab} с данным значением индекса n и индексами i, a, b, такими, что $i = 1, 2, 3$; $(-1)^{a+b} = \sigma$ и $a+b \leq L$. Все уравнения любой n-подсистемы не зацепляются ни по индексу i, ни по индексам a, b и содержат в правых частях R^{Ln}_{iab} компоненты Φ^{Lm}_{iab} решений всех предыдущих m-подсистем, $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Исследуем уравнение некоторой n-подсистемы для функции Φ^{Ln}_{iab} с выбранными значениями индексов i, a, b. Общее решение Φ^{Ln}_{iab} такого неоднородного уравнения — сумма его частного решения и общего решения $Z^{L'n}_{iab}$ соответствующего однородного уравнения. Решение $Z^{L'n}_{iab}$ — сумма

$$Z^{L'n}_{iab}(s,\varphi) = \left[C^+ \exp(L'_+ s) + C^- \exp(L'_- s) \right] \tilde{W}_{L'ab}(\varphi)$$

где $C^{\pm}$ — произвольные константы; $L' = a + b + 2n'$, $n' = 0, 1, ...$, а $L'_{\pm} \equiv \pm L' - L - n$. Слагаемые каждой такой суммы можно отнести либо к компонентам нерегулярных решений, либо к компонентам другого ($L' \neq L$)

L'-решения исходной краевой задачи (19), (20). Поэтому далее без потери общности полагаем все функции $Z^{L'n}_{iab}$ равными нулю и исследуем лишь частные решения неоднородной системы уравнений (28), равные нулю в точках $\varphi_i = 0, \pi/2$.

Предположим, что правая часть R^{Ln}_{iab} исследуемого уравнения (28) для компоненты Φ^{Ln}_{iab} — полином по s конечной степени $M'(n)$:

$$R^{Ln}_{iab}(s,\varphi) = \sum_{m=0}^{M'(n)} s^m \, R^{Lnm}_{iab}(\varphi)\,, \quad M'(n) < \infty\,. \tag{30}$$

Заменим в этом уравнении искомую компоненту Φ^{Ln}_{iab} ее разложением

$$\Phi^{Ln}_{iab}(s,\varphi) = \sum_{L'=a+b} G^{Ln}_{iL'ab}(s)\,\tilde{W}_{L'ab}(\varphi) \tag{31}$$

по полному базису $\{\tilde{W}_{L'ab}(\varphi_i)\}^{\infty}_{L'=a+b}$. Используя (21) и (29), спроецируем полученное уравнение на этот базис и таким способом выведем для искомых функций $G^{Ln}_{iL'ab}$, $L' = a+b, a+b+2, \ldots$, бесконечную цепочку незацепляющихся ни по каким индексам уравнений Гаусса с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\left[\, \partial^2_s + 2(L+2+n)\,\partial_s + D^{Ln}_{L'ab} \,\right]\, G^{Ln}_{iL'ab}(s) = \\ &= \langle \tilde{W}_{L'ab}(\varphi) | R^{Ln}_{iab}(s,\varphi)\rangle = \sum_{m=0}^{M'(n)} s^m \,\langle \tilde{W}_{L'ab}(\varphi) | R^{Lnm}_{iab}(\varphi)\rangle\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Согласно определению (2) функций $\tilde{W}_{Lab}$ индексы L и L' могут принимать одновременно только четные или нечетные значения, если сумма $a+b$ — четное или нечетное число, т. е. если $\sigma = +1$ или же $\sigma = -1$. Поэтому коэффициент

$$D^{Ln}_{L'ab} \equiv (L+2+n)^2 - (L'+2)^2$$

равен нулю только при четном n и $L' = L+n$. В этом случае решение $G^{Ln}_{iL'ab}(s)$ уравнения (32) — полином степени $M'(n)+1$ со старшим членом $B^{Ln}_{iab}\, s^{M'(n)+1}$, если, конечно, не равен нулю коэффициент

$$B^{Ln}_{iab} \equiv \langle\, \tilde{W}_{L+n,ab}(\varphi) | R^{Ln}_{iab}(\varphi)\rangle / \left[\, 2\,(L+2+n)\,(M'(n)+1)\,\right]\,. \tag{33}$$

Во всех остальных случаях, когда $L' \neq L+n$ или $B^{Ln}_{iab} = 0$, решение $G^{Ln}_{iL'ab}(s)$ — полином степени $M'(n)$. Значит, верны следующие правила: если правая часть R^{Ln}_{iab} уравнения n-подсистемы (28) для функции Φ^{Ln}_{iab} — полином по s степени $M'(n)$, то решение Φ^{Ln}_{iab} — полином по s степени

$M'(n)$ или $M'(n)+1$, если n — нечетное или, соответственно, четное число. В последнем случае согласно (31), старшее слагаемое решения-полинома Φ^{Ln}_{iab} — функция $B^{Ln}_{iab}\, s^{M'(n)+1}\, \tilde W_{L+n,ab}(\varphi)$.

Используя сформулированные выше правила, докажем, что предположение (30) верно, и определим $M'(n)$ в каждом из трех случаев (5).

Начнем с наиболее общего случая A). Исследуем первую $(n=1)$ подсистему (28). Ее правая часть содержит только функции (27) и поэтому не зависит от s. Применив правило (22), представим рассматриваемую подсистему в виде совокупности несвязанных уравнений:

$$D^{Lp}_{ab}(s,\varphi)\, \Phi^{Lp}_{iab}(\varphi) = R^{Lp}_{iab}(s,\varphi) = V_{i,p-2}\, B^{L1}_{iab}(\cos\varphi)^{p-2}\, \tilde W_{Lab}(\varphi)\,, \qquad (34)$$

где $p=1$, а B^{L1}_{iab} — комбинации неопределенных коэффициентов $X^L_{ka'b'}$:

$$B^{L1}_{iab} \equiv X^L_{iab} + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\, X^L_{ka'b'}\,. \qquad (35)$$

Для полноты докажем, что уравнение (34) с данными значениями L, a, b, i и любым нечетным p имеет единственное регулярное решение. Заменим произведение $(\cos\varphi)^{p-2}\, \tilde W_{Lab}(\varphi)$ в правой части исследуемого уравнения бесконечным рядом (23) с коэффициентами (24). Затем, используя (21) и (22), убедимся подстановкой в том, что искомым и единственным, но пока формальным, решением полученного уравнения будет бесконечный ряд

$$\Phi^{Lp}_{iab}(\varphi) = V_{i,p-2}\, B^{L1}_{iab} \sum_{L'=a+b} \frac{A^{L,p-2}_{L'ab}}{p\,(2L'+p+4)}\, \tilde W_{L'ab}(\varphi)\,. \qquad (36)$$

Теперь докажем, что этот ряд всюду равномерно сходится к конечной сумме

$$\Phi^{Lp}_{iab}(\varphi) = V_{i,p-2}\, B^{L1}_{iab}\, (\cos\varphi)^p \sum_{L'=a+b}^{L} C^{Lp}_{L'ab}\, \tilde W_{L'ab}(\varphi)\,. \qquad (37)$$

Для этого достаточно показать, что при вполне определенных коэффициентах $C^{Lp}_{L'ab}$ эта сумма удовлетворяет уравнению (34). Подставим в него функции $\tilde W_{L'ab}$ и Φ^{Lp}_{iab} в виде (2) и (37). В полученном уравнении перейдем к переменной $z=\cos 2\varphi$, а функции $zP^{(a+1/2,\,b+1/2)}_{n'}(z)$ и $(1-z^2)\,\partial_z P^{(a+1/2,\,b+1/2)}_{n'}(z)$ представим известными комбинациями [17] линейно независимых полиномов $P^{(a+1/2,\,b+1/2)}_{n}(z)$ с индексами $n=n', n'\pm 1$. Положив коэффициент при каждом $(n=0,1,\ldots,(L-a-b)/2)$ таком полиноме равным нулю, получаем линейную систему уравнений с трехдиагональной матрицей $\mathbf{M}$:

$$M_{L',L'-2}\, C^{Lp}_{L'-2,ab} + M_{L'L'}\, C^{Lp}_{L'ab} + M^{L}_{L',L'+2}\, C^{Lp}_{L'+2,ab} = \delta_{LL'}\,, \qquad (38)$$

где $L' = a+b, a+b+2, \ldots, L$, а элементы $M_{L'L'}$, $M_{L'-2,L'} \equiv Z^-_{L'}$ и $M_{L',L'+2} \equiv Z^+_{L'}$ главной, нижней и верхней диагоналей матрицы $\mathbf{M}$ удобно вычислять в следующем порядке:

$$
\begin{aligned}
d_{L'} &= N_{L'ab}/N_{Lab}\,, \quad d^{\pm}_{L'} = \left[\,(L+p+2)^2 - (L' \pm p+2)^2\,\right]\,, \\
M_{L'L'} &= d_{L'}\left\{p\left[L'+p+1-\frac{(a-b)(a+b+1)}{L'+1}\right]+\right. \\
&+ \left.\frac{1}{2}\,d^{+}_{L'}\left[1-\frac{(a-b)(a+b+1)}{(L'+1)(L'+3)}\right]\right\}, \\
Z^{\pm}_{L'} &= d_{L'}\,d^{\pm}_{L'}\,\frac{[2L'-2(a\pm b)+3\pm 1][2L'+2(a\pm b)+5\pm 3]}{16(L'+2)(L'+2\pm 1)}\,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Так как матрица $\mathbf{M}$ имеет доминирующую диагональ, то система (38) однозначно разрешима, поэтому все коэффициенты $C^{Lp}_{L'ab}$ суммы (37) определяются этой системой единственным образом, что и требовалось показать.

Если размерность $(L-a-b)/2+1$ матрицы $\mathbf{M}$ невелика, то все коэффициенты $C^{Lp}_{L'ab}$ и соответствующее им решение (37) уравнения (34) можно найти в явном виде. Например, в самом простом случае, когда $L = a+b$,

$$
\Phi^{Lp}_{iab}(s,\varphi) = \Phi^{Lp0}_{iab}(\varphi) \equiv \frac{V_{i,p-2}}{p\,(2b+p+1)}\,B^{L1}_{iab}\,(\cos\varphi)^p\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,. \tag{40}
$$

Итак, все функции Φ^{L1}_{iab}, удовлетворяющие первой $(n=1)$ подсистеме (28), определены явно формулами (24), (36) или (37)–(40), в которых $p=1$.

Исследуем вторую $(n=2)$ подсистему (28). Так как все функции Φ^{L0}_{iab} и Φ^{L1}_{iab} не зависят от s, то и правые части R^{L2}_{iab} уравнений этой подсистемы не зависят от s и являются рядами (30) с $n=2$ и $M'(n)=0$. Следовательно, все искомые компоненты Φ^{L2}_{iab} решения $\{\Phi^{L2}_{iab}\}$ — линейные по s функции:

$$
\Phi^{L2}_{iab}(s,\varphi) = B^{L2}_{iab}\;s\,\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi) + G^{L2}_{iab}(\varphi)\,, \tag{41}
$$

где B^{L2}_{iab} и G^{L2}_{iab} — пока неизвестные постоянные и функции. Подставив искомые функции Φ^{L2}_{iab} в виде (41) во вторую подсистему (28), получаем уравнения

$$
\left[\,\tilde{L}^2_{ab}(\varphi) - (L+4)^2\,\right]G^{L2}_{iab}(\varphi) = 2(L+4)\,B^{L2}_{iab}\,\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi) - R^{L2}_{iab}(\varphi)\,. \tag{42}
$$

Решение каждого (любые допустимые i, a и b) такого уравнения существует тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна собственной функции $\tilde{W}_{L+2,ab}$ оператора D^{L2}_{ab}, заданного формулой (29) с $n=2$. Этим условием однозначно определяется коэффициент $B_{iab}^{L,2p}$, $p=1$. При любом L

$$
\begin{aligned}
B_{iab}^{L,2p} &= (2L+8)^{-1}\, V_{i,-1} \Big[\langle (\cos\varphi)^{p-2}\, \tilde{W}_{L+2p,ab}(\varphi) | \Phi_{iab}^{Lp}(\varphi)\rangle + \\
&+ \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} \langle (\cos\varphi)^{p-2} \tilde{W}_{L+2p,ab}(\varphi) | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma_{ki}) | \Phi_{ka'b'}^{Lp}(\varphi_k)\rangle \Big],
\end{aligned} \tag{43}
$$

а в частном случае, когда $L=a+b$ и Φ_{iab}^{Lp} — функция (40),

$$
\begin{aligned}
B_{iab}^{L,2p} &= [2p\,(L+4)]^{-1}\; V_{i,-1} \sum_{k\neq i} V_{k,p-2} \sum_{a'b'} B_{ka'b'}^{L1}\,(2b'+p+1)^{-1} \times \\
&\times \langle \tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi)\,(\cos\varphi)^{p-2} | h_{aba'b'}^{\ell}(\gamma_{ki}) | (\cos\varphi_k)^p\, \tilde{W}_{La'b'}(\varphi_k)\rangle\,.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Заменим в определении (43) коэффициента $B_{iab}^{L,2p}$ функцию Φ_{iab}^{Lp} ее рядом (36), а затем применим правила (22) и (23). Так как ряд (36) бесконечный, то и коэффициент $B_{iab}^{L,2p}$ представится бесконечной суммой, содержащей только коэффициенты $A_{L'ab}^{Lg}$, $g=p,p-2$, и $\langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}$. Такая бесконечная сумма может оказаться равной нулю лишь в исключительном случае, в общем случае $B_{iab}^{L,2p}\neq 0$, если $p=1,3,5,\ldots$

Для примера исследуем самый простой случай. Пусть $p=1$, а $\ell=0$ и $L=L_{min}=0$. Тогда индексы a,b и a',b' принимают только нулевые значения, а ядро $h_{0000}^{0}(\varphi,\varphi';\gamma_{ki})$ равно константе $|\mathrm{cosec}\,2\gamma_{ki}|$. Согласно (35) и (44)

$$
B_{i00}^{01} = \sum_{k=1}^{3} X_{k00}^{0}, \quad B_{i00}^{02} = \frac{V_{i,-1}}{12\pi}\, B_{i00}^{01} \sum_{k\neq i} V_{k,-1}\,(2|\gamma_{ki}|-\pi)\, \frac{(\sin\gamma_{ki})^2}{\cos\gamma_{ki}} \tag{45}
$$

и поэтому $B_{i00}^{02}=0$, тогда и только тогда, когда $B_{i00}^{01}=0$ и (или) $V_{i,-1}=0$. Теперь решим уравнение (42). Используя (14) и (40), представим его правую часть суммой трех слагаемых. Одно из них пропорционально функции $\tilde{W}_{000}$, другое — функции $\tilde{W}_{200}$. Поэтому искомое решение G_{i00}^{02} является линейной комбинацией таких функций и решения f неоднородного уравнения

$$
\begin{aligned}
&\left[\partial_{\varphi}^2 + 16\right] f(\varphi) = \\
&= \frac{2B_{i00}^{01}}{3\sqrt{\pi}}\, \frac{V_{i,-1}}{\cos(\varphi)} \sum_{k\neq i} \frac{V_{k,-1}}{|\sin\gamma_{ki}|} \left\{ [\cos C_{-}(\varphi;\gamma_{ki})]^3 - [\cos C_{+}(\varphi;\gamma_{ki})]^3 \right\}
\end{aligned}
$$

с условиями $\langle \tilde{W}_{200}(\varphi)|f(\varphi)\rangle = 0$ и $f=0$ при $\varphi=0,\pi/2$. Фундаментальную систему однородного уравнения, отвечающего такому уравнению, образуют функции $\tilde{W}_{000}\sim\sin 4\varphi$ и $\tilde{Z}_{000}\sim\cos 4\varphi$. Используя их, найдем решение

f, подчиненное указанным условиям, методом вариации постоянных коэффициентов [19]. Затем запишем решение G^{02}_{i00} исходного уравнения (42) в виде

$$G^{02}_{i00}(\varphi) = -(1/12)\left[\, EX^{0}_{i00} - (V_{i,0} + (1/2)V^{2}_{i,-1})\, B^{01}_{i00}\,\right] \tilde{W}_{000}(\varphi) - \\ - (2/3)\, B^{02}_{i00}\, \tilde{W}_{200}(\varphi) - (6\sqrt{\pi})^{-1}\, B^{01}_{i00}\, V_{i,-1} \sum_{k\neq i} g(\varphi;\gamma_{ki})\,, \quad (46)$$

где функция $g(\varphi;\gamma)$ содержит функции $\tilde{s} \equiv |\sin\gamma|$ и $c \equiv \cos\gamma$ параметра $\gamma = \gamma_{ki}$ и меняет свой вид при переходе через точку $\tilde{\varphi} \equiv \pi/2 - |\gamma|$: если $\varphi \in [0, \tilde{\varphi}]$, то

$$g(\varphi;\gamma) \equiv \left\{\, 3 + \tilde{s}^{2}\, \left[\, 18\,(\sin\varphi)^{2} + \sin 4\varphi\, \ln(\cos\varphi) - \varphi\, \cos 4\varphi - 1\,\right]\,\right\} / (6\, c)\,,$$

если же $\varphi \in [\tilde{\varphi}, \pi/2]$, то

$$g(\varphi;\gamma) \equiv \left[\, 4(3 - 4c^{2})\, \cos 2\varphi + (21 - 22c^{2})\, \cos 4\varphi - 3(1 - 2c^{2})\,\right] / (24\tilde{s})\,.$$

Отмеченное изменение функционального вида — следствие зависимости пределов $C_{\pm}$ интеграла (14) от φ и γ_{ki}. В общем случае ($\ell \neq 0$) из-за такой зависимости следует ожидать, что две точки $\varphi = \gamma_{ki}$ и $\varphi = \pi/2 - \gamma_{ki}$, $k \neq i$, будут особыми для всех функций Φ^{Ln}_{iab}: при переходе через такие точки эти функции могут менять свой функциональный вид.

Продолжим анализ n-подсистем (28) с $n \geq 3$. По индукции докажем, что правые части R^{Ln}_{iab} уравнений каждой такой n-подсистемы — полиномы (30) по s степени не выше, чем $M'(n) = [(n-1)/2]$, а решения Φ^{Ln}_{iab} таких уравнений — полиномы по s той же степени, если n — нечетное число, и полиномы степени не выше, чем $[n/2]$, если n — четное число. Следовательно, предположение (30) верно, а каждая компонента L-решений системы (19) — двойная сумма

$$\Phi^{L}_{iab}(s,\varphi) = r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^{n} \sum_{m=0}^{M(n)} s^{m}\, \Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi)\,, \quad (47)$$

где $M(n) = [n/2]$ и согласно соотношениям (27) и (41)

$$\begin{array}{lcl} \Phi^{Ln0}_{iab}(\varphi) & \equiv & \Phi^{Ln}_{iab}(\varphi)\,, \quad n = 0, 1\,; \\ \Phi^{L20}_{iab}(\varphi) & \equiv & G^{L2}_{iab}(\varphi)\,, \quad \Phi^{L21}_{iab}(\varphi) \equiv B^{L2}_{iab}\, \tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi)\,. \end{array} \quad (48)$$

В уравнениях (19) заменим компоненты U^{ℓ}_{iab} компонентами Φ^{L}_{iab}, взятыми в виде (47). Полученные уравнения для функций Φ^{Lnm}_{iab} запишем как последовательность n-подсистем, расположенных в порядке возрастания индекса n

и в порядке убывания индекса m для каждого n:

$$\begin{gathered}
\Big[\,\tilde{L}^2_{ab}(\varphi) - (L+n+2)^2\,\Big]\;\Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi) = E\,\Phi^{L,n-2,m}_{iab}(\varphi) + \\
+\,(m+1)\Big[\,2(L+n+2)\Phi^{Ln,m+1}_{iab}(\varphi) + (m+2)\Phi^{Ln,m+2}_{iab}(\varphi)\,\Big] - \\
-\sum_{p=0}^{n-1} V_{i,n-p-2}(\cos\varphi)^{n-p-2}\times \\
\times\left[\,\Phi^{Lpm}_{iab}(\varphi) + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'}\langle\varphi|h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki})|\Phi^{Lpm}_{ka'b'}(\varphi_k)\rangle\,\right]. \qquad (49)
\end{gathered}$$

Система (49) является рекуррентной цепочкой неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Дополним ее до краевой задачи граничными условиями $\Phi^{Lpm}_{iab}(\varphi) = 0$ при $\varphi = 0, \pi/2$ для всех функций $\Phi^{Lpm}_{iab}(\varphi)$. Любая конечная подсистема системы (49) с такими однородными граничными условиями и наперед заданными константами X^L_{iab} асимптотик (25) однозначно разрешима и может быть проинтегрирована численно известными алгоритмами решения систем дифференциальных уравнений [7].

Альтернативный способ вычисления функций Φ^{Lnm}_{iab} заключается в суммировании их разложений по соответствующим базисным функциям $\tilde{W}_{Lab}$:

$$\Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi) = \sum_{L'=a+b} Z^{Lnm}_{iL'ab}\,\tilde{W}_{L'ab}(\varphi)\,.$$

Благодаря свойству (22) операторов $h^{\ell}_{aba'b'}$ система (49) заменой искомых функций Φ^{Lnm}_{iab} такими рядами сводится к рекуррентной и алгебраической системе линейных уравнений для искомых коэффициентов $Z^{Lnm}_{iL'ab}$.

Исследуем следующий случай B). Так как теперь $V_{k,-1} = 0$, $k = 1,2,3$, то согласно (34) и (43) имеем $\Phi^{L1}_{iab} \equiv 0$ и $B^{L2}_{iab} = 0$. Поэтому вторая $(n = 2)$ подсистема (28) — совокупность несвязанных уравнений:

$$\Big[\,\tilde{L}^2_{ab}(\varphi) - (L+4)^2\,\Big]\;\Phi^{L2}_{iab}(\varphi) = R^{L2}_{iab}(\varphi) = \big[\,V_{i0}\,B^{L1}_{iab} - E\,X^L_{iab}\big]\;\tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,.$$

Их правые части R^{L2}_{iab} и решения Φ^{L2}_{iab} не зависят от s:

$$\Phi^{L2}_{iab}(s,\varphi) = \Phi^{L20}_{iab}(\varphi) \equiv F^{L2}_{iLab}\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,, \qquad (50)$$

где постоянные F^{L2}_{iLab} связаны с коэффициентами (35) формулами

$$F^{L2}_{iL'ab} \equiv \delta_{LL'}\;\big(\,V_{i0}\,B^{L1}_{iab} - E\,X^L_{iab}\,\big)\,/(4L+12)\,. \qquad (51)$$

Третья ($n = 3$) подсистема (28) состоит из уравнений (34) с $p = 3$. Их решения — функции (40) с $p = 3$. Продолжая анализ тем же способом, что и в предыдущем случае A), последовательно доказываем следующие утверждения: все функции Φ_{iab}^{Ln}, $n < 6$, не зависят от s, все функции Φ_{iab}^{Ln} с $n = 6$ линейны по s и содержат в качестве слагаемых функции $s\, B_{iab}^{L6}\, \tilde{W}_{L+6,ab}$ с коэффициентами B_{iab}^{L6}, определенными формулой (43) с индексом $p = 3$; суммы (30) и (47) имеют пределы $M'(n) = [(n-1)/6]$ и $M(n) = [n/6]$.

Исследуем последний случай C). По определению $V_{k,p-2} = 0$, где $k = 1, 2, 3$, а $p = 1, 3$. Поэтому из (34) и (43) следует, что все компоненты решений первой и третьей подсистем (28) тождественно равны нулю: $\Phi_{iab}^{Lp} \equiv 0$, $p = 1, 3$, и $B_{iab}^{L2} = 0$. Следовательно, как и в предыдущем случае B), все компоненты решения второй ($n = 2$) подсистемы (28) определены формулами (50) и (51). Используя (22), (27) и (50), покажем, что правые части R_{iab}^{L4} всех уравнений четвертой ($n = 4$) подсистемы (28) не зависят от s и являются суммами

$$\begin{aligned} R_{iab}^{L4}(\varphi) &= \tilde{F}_{iLab}^{L2}\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) + V_{i2}\, B_{iab}^{L1}\, (\cos\varphi)^2\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,, \\ \tilde{F}_{iLab}^{L2} &\equiv (V_{i0} - E)\, F_{iLab}^{L2} + V_{i0} \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell}\, F_{kLa'b'}^{L2}\,. \end{aligned}$$

Упростим эти представления, заменив в них произведение $(\cos\varphi)^2\, \tilde{W}_{Lab}$ суммой (23) с индексом $p = 2$ и коэффициентами (24). Эта сумма, а значит, и функции $R_{iab}^{L4}(\varphi)$ являются линейными комбинации двух функций $\tilde{W}_{Lab}$ и $\tilde{W}_{L+2,ab}$, если $L = a + b$, и трех функций $\tilde{W}_{Lab}$ и $\tilde{W}_{L\pm2,ab}$, если $L > a + b$. Поэтому исследуемой подсистеме (28) с $n = 4$ удовлетворяют комбинации Φ_{iab}^{L4} этих же функций и однозначно определяемых коэффициентов $F_{iL'ab}^{L4}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{iab}^{L4}(s,\varphi) = \Phi_{iab}^{L40}(\varphi) &= \sum_{L'=L-2}^{L'+2} F_{iL'ab}^{L4}\, \tilde{W}_{L'ab}(\varphi)\,; \\ F_{iLab}^{L4} &= \frac{V_{i2}\, A_{Lab}^{L2} + \tilde{F}_{iLab}^{L2}}{8(L+4)}\,, \\ F_{i,L\pm2,ab}^{L4} &= \frac{1}{4}\, V_{i2}\, A_{L\pm2,ab}^{L2}\, B_{iab}^{L1} \left\{ \begin{array}{c} (L+5)^{-1} \\ (3L+9)^{-1} \end{array} \right. . \end{aligned} \tag{52}$$

Далее по индукции несложно доказать следующие утверждения. Если n нечетно, то n-подсистема (28) имеет только тривиальное решение ($\forall \Phi_{iab}^{Ln} \equiv 0$), а при четном n все правые части R_{iab}^{Ln}, благодаря правилам (22) и (23), являются линейными комбинациями функций $\tilde{W}_{L'ab}$, $L' \leq L+n-2$. Так как такая комбинация ортогональна собственной функции $\tilde{W}_{L+n,ab}$ оператора D_{ab}^{Ln}, то любая компонента Φ_{iab}^{Ln} не зависит от s и является комбинацией того типа, что и соответствующая правая часть R_{iab}^{Ln}:

$$\Phi_{iab}^{Ln}(\varphi) = \sum_{L'=L_-(L,n)}^{L_+(L,n)} F_{iL'ab}^{Ln}\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi)\,,\; L_\pm(L,n) \equiv \max\{L \pm n \mp 2, a+b\}\,,$$

где $n = 0, 2, \ldots$, а $F_{iL'ab}^{Ln}$ — вполне определенные числовые коэффициенты, для которых можно вывести рекуррентные по индексу n соотношения.

Итак, в рассмотренном случае $C)$ в суммах (30) и (47) индекс n — четное число, $M'(n) = 0$ и $M(n) = 0$ при любом n. Поэтому все компоненты Φ_{iab}^{L} любого L-решения — однократные ряды по четным степеням гиперрадиуса.

Суммируем доказанные выше утверждения в виде теоремы.

Теорема. *Уравнения (19) имеют формальную фундаментальную систему регулярных L-решений, определенных рядами (47), в которых $M(n) = [n/2], [n/6], 0$, соответственно, в случае $A)$, $B)$, $C)$, а функции $\Phi_{iab}^{Lnm}(\varphi)$ подчинены однозначно разрешимой рекуррентной цепочке уравнений (49) с однородными граничными условиями в точках $\varphi = 0, \pi/2$.*

Теперь обсудим другой способ построения L-решений $\{\Phi_{iab}^{L}\}$ исходной системы (19). В этом способе ключевой является система уравнений (49). При любых данных n и m левые и правые части этих уравнений линейны относительно всех искомых функций Φ_{iab}^{Lnm} и уже найденных функций $\Phi_{ka'b'}^{Ln'm'}$ с индексами $n' \leq n$ и $m' > m$. Поэтому, начиная с $n = 1$, все коэффициенты, например B_{iab}^{L1}, B_{iab}^{L2}, $F_{iL'ab}^{L2}$, и все функции, в частности $\Phi_{iab}^{L10}, \Phi_{iab}^{L20}, \Phi_{iab}^{L21}$, обладают исключительно важным свойством — они являются линейными функциями, вообще говоря, всех неопределенных коэффициентов X_{iab}^{L}. Таким образом, при любых фиксированных значениях индексов i, a, b, n и m правая часть R_{iab}^{Lnm} любого уравнения (49) представима в виде конечной суммы

$$R_{iab}^{Lnm}(\varphi) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{a'b'} X_{ka'b'}^{L}\, R_{iab,ka'b'}^{Lnm}(\varphi)$$

и поэтому для решения Φ_{iab}^{Lnm} этого уравнения верно представление

$$\Phi_{iab}^{Lnm}(\varphi) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{a'b'} X_{ka'b'}^{L}\, \Phi_{iab,ka'b'}^{Lnm}(\varphi)\,. \tag{53}$$

Следовательно, если все коэффициенты X_{iab}^{L}, кроме коэффициента $X_{ka'b'}^{L}$ с выбранными значениями индексов k, a' и b', равны нулю, то исследуемое уравнение вырождается в уравнение, не содержащее никаких неопределенных коэффициентов:

$$\left[\tilde{L}_{ab}^{2}(\varphi) - (L+n+2)^2\right] \Phi_{iab,ka'b'}^{Lnm}(\varphi) = R_{iab,ka'b'}^{Lnm}(\varphi)\,, \quad \varphi \in [0, \pi/2]\,. \tag{54}$$

По определению компонента $\Phi_{iab}^{Lnm} = 0$, т. е. сумма (53), равна нулю в точках $\varphi = 0, \pi/2$. Это условие будет выполняться при любых коэффициентах X_{iab}^{L} тогда и только тогда, когда каждое из уравнений (54) дополнено до краевой задачи граничными условиями $\Phi_{iab,ka'b'}^{Lnm} = 0$ при $\varphi = 0, \pi/2$. Такую краевую задачу даже при сравнительно большом n можно решить известными численными методами [7], например, методом вариации постоянных коэффициентов [19]. Этот метод несложно реализовать, потому что фундаментальные решения [17] однородного уравнения, отвечающего уравнению (54), известны в явном виде. Регулярным решением является функция $\tilde{W}_{Lab}$, а нерегулярное решение выражается через функцию Якоби второго рода $Q_n^{(a+1/2,b+1/2)}$:

$$(\sin\varphi)^{a+1}\,(\cos\varphi)^{b+1}\,Q_n^{(a+1/2,b+1/2)}(\cos 2\varphi)\,, \quad n = (L-a-b)/2\,.$$

Сделаем важное замечание. Численный анализ классической цепочки рекуррентных уравнений В. А. Фока и цепочки (49) возможен лишь после определения всех содержащихся в них числовых коэффициентов. Предложенный выше подход лишен этого недостатка: в нем сначала вычисляются функции $\Phi_{iab,ka'b'}^{Lnm}$, подчиненные рекуррентной по индексам n и m цепочке однородных краевых задач, не содержащим никаких неопределенных коэффициентов, а затем без потери общности восстанавливаются все компоненты Φ_{iab}^{Lnm} любого L-решения как суммы (53) с произвольными коэффициентами X_{iab}^{L}.

3. СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

Согласно теории дифференциальных уравнений [19], общее регулярное решение дифференциального уравнения равно сумме всех его регулярных фундаментальных решений, умноженных на произвольные коэффициенты. В предыдущем разделе все регулярные фундаментальные L-решения $\{\Phi_{iab}^{L}\}$, $L = \ell + \mu(\sigma), \ell + \mu(\sigma) + 2, \ldots$, системы (19) представлены рядами (47), уже содержащими некоторые коэффициенты X_{iab}^{L}. Поэтому без потери общности компоненты U_{iab}^{ℓ} общего регулярного решения $\{U_{iab}^{\ell}\}$ этой системы можно представить суммами соответствующих компонент Φ_{iab}^{L} всех L-решений:

$$U_{iab}^{\ell}(r,\varphi) = \sum_{L=a+b}^{\infty} \Phi_{iab}^{L}(r,\varphi) = \sum_{L=a+b}^{\infty} r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m\, \Phi_{iab}^{Lnm}(\varphi)\,. \quad (55)$$

Заменив функции U^{ℓ}_{iab} такими суммами в (11), (12) и в (8), получим формальные разложения для приведенных гиперсферических компонент $U^{\ell}_{iL'ab}$:

$$\begin{aligned} U^{\ell}_{iL'ab}(r) &= \sum_{L=a+b}^{\infty} r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Phi^{Lnm}_{iL'ab}, \\ \Phi^{Lnm}_{iL'ab} &\equiv \langle W_{L'ab}(\varphi) | \Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi) \rangle \,, \end{aligned} \tag{56}$$

для приведенных D^{σ}-компонент $U^{\ell x}_{im'}$:

$$\begin{aligned} U^{\ell x}_{im'}(r,\varphi,u) &= \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)}^{\infty} r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Phi^{Lnm}_{im'}(\varphi,u) \,, \\ \Phi^{Lnm}_{im'}(\varphi,u) &\equiv \sin\theta \sum_{ab} T^{\ell m'}_{ab} \, \Theta_{am'}(u) \, \Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi); \end{aligned} \tag{57}$$

и для фаддеевских компонент Ψ^{ε}_i:

$$\begin{aligned} \Psi^{\varepsilon}_i(r,\Omega) &= \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)}^{\infty} r^{L} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Psi^{Lnm}_{i}(\Omega) \,, \\ \Psi^{Lnm}_{i}(\Omega) &\equiv \sum_{ab} \left[\, \Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi)/(\sin\,\varphi\,\cos\,\varphi) \right] \, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) \,. \end{aligned} \tag{58}$$

По доказанной в разделе 2 теореме строение этих рядов, в частности индекс $M(n)$, определяется типом (5) разложений (4) парных потенциалов.

Предположив, что все ряды (47) и (55)–(58) асимптотические, а все коэффициенты X^{L0}_{iab}, $L = a + b + 2n$, $n = 0, 1, 2$, ненулевые, найдем явные асимптотики этих рядов, а затем из асимптотик выведем связи.

Асимптотики рядов (55) и (56) представим подсуммами их трех наиболее медленно убывающих при $r \to 0$ слагаемых, которые определяются по следующим правилам: в случае А) эти слагаемые выражаются через три слагаемых рядов (47) с минимальным L, равным $a + b$; в случае B) — через три слагаемых рядов (47) с $L = a + b$ и старшие члены (25) рядов (47) с $L = a + b + 2$; в случае C) — через три слагаемых рядов (47) с $L = a + b$, два слагаемых рядов (47) с $L = a+b+2$ и старшие слагаемых (25) рядов (47) с $L = a+b+4$.

По формулам (27), (40), (48) и (50)–(52) выразим явно все нужные нам функции Φ^{Lnm}_{iab}, $L = a + b + 2n$, $n = 0, 1, 2$, через функции $\tilde{W}_{Lab}$. Следуя сформулированным выше правилам и используя эти выражения, выводим явные асимптотики рядов (55), т. е. бисферических компонент $U^{\ell}_{iab}(r,\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
A)\ U^{\ell}_{iab} &= r^{L+2}\,\Big\{\,\big[\,X^{L}_{iab} + (r\cos\varphi)\,V_{i,-1}\,B^{L1}_{iab}/(2b+2)\,\big]\,\tilde W_{Lab}(\varphi)+\\
&\quad + r^2\,s\,B^{L2}_{iab}\,\tilde W_{L+2,ab}(\varphi) + O(r^2)\,\Big\}\,,\\
B)\ U^{\ell}_{iab} &= r^{L+2}\Big\{\,X^{L}_{iab}\,\tilde W_{Lab}(\varphi) + r^2\Big[\,F^{L2}_{iLab}\,\tilde W_{Lab}(\varphi) + X^{L+2}_{iab}\tilde W_{L+2,ab}(\varphi)\Big] +\\
&\quad + (r\cos\varphi)^3\,\big[\,B^{L1}_{iab}\,V_{i1}/(6b+12)\,\big]\,\tilde W_{Lab}(\varphi) + O(r^4)\,\Big\}\,, \qquad (59)\\
C)\ U^{\ell}_{iab} &= r^{L+2}\,\Big\{\,X^{L}_{iab}\,\tilde W_{Lab}(\varphi) + r^2\Big[\,F^{L2}_{iLab}\,\tilde W_{Lab}(\varphi) + X^{L+2}_{iab}\tilde W_{L+2,ab}(\varphi)\Big] +\\
&\quad + r^4\,\Big[\,F^{L4}_{iLab}\,W_{Lab}(\varphi) + \Big(\,F^{L4}_{i,L+2,ab} + F^{L+2}_{i,L+2,ab}\,\Big)\,\tilde W_{L+2,ab}(\varphi)+\\
&\quad + X^{L+4}_{iab}\tilde W_{L+4,ab}(\varphi)\,\Big] + O(r^2)\,\Big\}\,.
\end{aligned}
$$

Далее, подставив найденные функций Φ^{Lnm}_{iab} в формулы (56) и используя разложение (23) с $g=1$ в случае $A)$ и с $g=3$ в случае $B)$, находим явные асимптотики всех гиперсферических компонент $U^{\ell}_{iL'ab}(r)$:

$$
\begin{aligned}
A)\ U^{\ell}_{iL'ab} &= r^{L+2}\Big[X^{L}_{iab}\delta_{LL'} + \frac{rV_{i,-1}}{2(b+1)}\,A^{L1}_{L'ab}\,B^{L1}_{iab}+\\
&\quad + r^2 s\,B^{L2}_{iab}\,\delta_{L',L+2} + O(r^2)\Big],\\
B)\ U^{\ell}_{iL'ab} &= r^{L+2}\,\big\{\,\big[\,X^{L}_{iab} + r^2\,F^{L2}_{iLab}\,\big]\,\delta_{LL'} + r^2 X^{L+2}_{iab}\delta_{L',L+2}+\\
&\quad + r^3 V_{i1}\,A^{L3}_{L'ab}B^{L1}_{iab}/(6b+12) + O(r^4)\,\big\}\,, \qquad (60)\\
C)\ U^{\ell}_{iL'ab} &= r^{L+2}\,\big[\,X^{L}_{iab} + r^2\,F^{L2}_{iLab} + r^4\,F^{L4}_{iLab}\big]\,\delta_{LL'}+\\
&\quad + r^{L+4}\Big[\,X^{L+2}_{iab} + r^2\,\Big(\,F^{L4}_{i,L+2,ab} + F^{L+2}_{i,L+2,ab}\Big)\,\Big]\,\delta_{L',L+2}+\\
&\quad + r^{L+6}\,X^{L+4}_{iab}\,\delta_{L',L+4} + O(r^{L+8})\,.
\end{aligned}
$$

Теперь найдем явные асимптотики рядов (57) и (58) в виде подсумм их трех наиболее медленно убывающих при $r\to 0$ слагаемых. В случае $A)$ ими являются три слагаемых этих рядов с минимально возможным $L = L_{min}$; в случае $B)$ — слагаемые с $L = L_{min}$; $n = 0,2,3$ и $L = L_{min}+2$, $n = 0$; в случае $C)$ — те же слагаемые, что и в случае B), и слагаемые с $L = L_{min}+4$, $n = 0$.

Заменив во всех упомянутых слагаемых функции Φ_{iab}^{Lnm} их найденными представлениями, получим явные асимптотики D^σ-компонент $U_{im'}^{\ell x}(r,\varphi,u)$:

$$
\begin{aligned}
A)\ U_{im'}^{\ell x} &= r^{L+2}\sin\theta \sum_{a+b=L} T_{ab}^{\ell m'}\,\Theta_{am'}(u)\times \\
&\quad\times\Big\{\Big[X_{iab}^{L} + \frac{rV_{i,-1}}{2(b+1)}\,B_{iab}^{L1}\cos\varphi\Big]\,\tilde W_{Lab}(\varphi)+ \\
&\quad + r^2\,s\,B_{iab}^{L2}\,\tilde W_{L+2,ab}(\varphi) + O(r^2)\Big\}\,, \\
B)\ U_{im'}^{\ell x} &= r^{L+2}\sin\theta \sum_{a+b=L} T_{ab}^{\ell m'}\,\Theta_{am'}(u)\,\tilde W_{Lab}(\varphi)\times \\
&\quad\times\big[\,X_{iab}^{L} + r^2\,F_{iLab}^{L2} + (r\cos\varphi)^3\,B_{iab}^{L1}\,V_{i1}/(6b+12)\,\big] + \\
&\quad + r^{L+4}\sin\theta \sum_{a+b=L}^{L+2} X_{iab}^{L+2}\,T_{ab}^{\ell m'}\,\Theta_{am'}(u)\,\tilde W_{L+2,ab}(\varphi) + O(r^{L+6})\,,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
C)\ U_{im'}^{\ell x} &= r^{L+2}\sin\theta \sum_{a+b=L} T_{ab}^{\ell m'}\,\Theta_{am'}(u)\,\tilde W_{Lab}(\varphi)\times \\
&\quad\times\big[\,X_{iab}^{L} + r^2\,F_{iLab}^{L2} + r^4\,F_{iLab}^{L4}\,\big] + \\
&\quad + r^{L+4}\sin\theta \sum_{a+b=L}^{L+2} T_{ab}^{\ell m'}\Theta_{am'}(u)\tilde W_{L+2,ab}(\varphi)\times \\
&\quad\times\Big[X_{iab}^{L+2} + r^2\Big(F_{i,L+2,ab}^{L4} + F_{i,L+2}^{L+2}\Big)\Big] + \\
&\quad + r^{L+6}\sin\theta \sum_{a+b=L}^{L+4} X_{iab}^{L+4}\,T_{ab}^{\ell m'}\,\Theta_{am'}(u)\,\tilde W_{L+4,ab}(\varphi) + O(r^{L+8})
\end{aligned}
$$

и явные асимптотики фаддеевских компонент $\Psi_i^\varepsilon(r,\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
A)\ \Psi_i^\varepsilon &= r^L \sum_{a+b=L}\Big\{\big[\,X_{iab}^{L} + (r\cos\varphi)\,V_{i,-1}\,B_{iab}^{L1}/(2b+2)\,\big]\,Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)+ \\
&\quad + r^2 s\,B_{iab}^{L2} Y_{L+2,ab}(\Omega) + O(r^2)\Big\}\,, \\
B)\ \Psi_i^\varepsilon &= r^L \sum_{a+b=L}\big[X_{iab}^{L} + r^2 F_{iLab}^{L2} + (r\cos\varphi)^3 V_{i1} B_{iab}^{L1}/(6b+12)\big]\,Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega)+ \\
&\quad + r^{L+2}\sum_{a+b=L}^{L+2} X_{iab}^{L+2}\,Y_{L+2,ab}^{\ell m}(\Omega) + O(r^{L+4})\,,
\end{aligned}
\tag{62}
$$

$$C)\ \Psi_i^{\varepsilon} = r^L \sum_{a+b=L} \left[\, X_{iab}^L + r^2\, F_{iLab}^{L2} + r^4\, F_{iLab}^{L4} \right]\, Y_{ab}^{\ell m}(\Omega) +$$

$$+\, r^{L+4} \sum_{a+b=L}^{L+2} \left[\, X_{iab}^{L+2} + r^2 \left(F_{i,L+2,ab}^{L4} + F_{i,L+2}^{L+2} \right) \right]\, Y_{L+2,ab}^{\ell m}(\Omega) +$$

$$+\, r^{L+6} \sum_{a+b=L}^{L+4} X_{iab}^{L+4}\, Y_{L+4,ab}^{\ell m}(\Omega) + O(r^{L+8})\,.$$

Приступим к выводу связей при $r = 0$. Вывод реализуем в два этапа: сначала выразим неопределенные коэффициенты X_{iab}^L и их комбинации B_{iab}^{L1} и F_{iLab}^{L2} через частные производные асимптотик (59)–(61) по аргументу r при $r = 0$, а затем заменим в определениях (35) и (51) все коэффициенты X_{iab}^L, B_{iab}^{L1} и F_{iLab}^{L2} их полученными выражениями.

Из (59) в случае $A)$ следуют два представления коэффициентов X_{iab}^L и B_{iab}^{L1} через частные производные функции U_{iab}^{ℓ} при $r = 0$:

$$\begin{aligned}
X_{iab}^L &= \left[(L+2)!\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \right]^{-1} \partial_r^{L+2} U_{iab}^{\ell}(r,\varphi)\,, \\
B_{iab}^{L1} &= \left\{ (2b+2)/ \left[(L+3)!\, V_{i,-1}\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \right] \right\} \partial_r^{L+3} U_{iab}^{\ell}(r,\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Используя эти представления и положив $p = 1$, перепишем равенство (35) в виде связи между частными производными $Q_{jab}(\varphi) \equiv \partial_r^{L+2} U_{iab}^{\ell}|_{r=0}$ трех функций $U_{jab}^{\ell}(r,\varphi)$, $j = i, j \neq i$:

$$\partial_r^p Q_{iab}(\varphi) = M_b^{Lp}\, V_{i,p-2}\, (\cos\varphi)^p \Big[Q_{iab}(\varphi) +$$
$$+\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell}\, Q_{kab}(\varphi_k) / \tilde{W}_{La'b'}(\varphi_k) \Big]. \quad (63)$$

Здесь и всюду далее

$$M_b^{Lp} \equiv (L+p+2)!/ \left[\, p\,(2b+p+1)\,(L+2)! \,\right]\,.$$

Тем же способом доказываем, что в случае $B)$ имеются связи (63) с $p = 3$.

Случай $C)$ — исключительный. В этом случае слагаемое суммы (59) при любом $n > 0$ является произведением функции r^{2n} и угловой функции, которая, в отличие от случаев $A)$ и $B)$, всегда содержит и неопределенные коэффициенты $X_{iab}^{L'}$ с $L' = L+2n$, и коэффициенты $F_{iab}^{L'n}$, выраженные через коэффициенты $X_{iab}^{L'}$ с $L' < L+2n$. Поэтому из любой конечной совокупности соотношений, полученных дифференцированием асимптотик функций U_{iab}^{ℓ} в точке $r = 0$, нельзя исключить все неопределенные коэффициенты и получить связи для частных производных этих функций в этой точке.

Теперь из (60) выведем связи для функций $Q_{jLab}(r) \equiv \partial_r^{L+2} U^\ell_{jLab}(r)$.

В случаях $A)$ и $B)$ при любом L' и соответствующем $p = 1$ и $p = 3$ коэффициенты X^L_{iab} и B^{L1}_{iab} выражаются через производные $\partial_r^{L+2} U^\ell_{iLab}$ и $\partial_r^{L+2+p} U^\ell_{iL'ab}$ в точке $r = 0$. Заменив X^L_{iab} и B^{L1}_{iab} в (35) такими выражениями, получим связи

$$\partial_r^p Q_{iL'ab} =$$

$$= A^{Lp}_{Lab} M^{Lp}_b V_{i,p-2} \left(Q_{iLab} + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} \, Q_{kLa'b'} \right) . \quad (64)$$

В случаях $B)$ и $C)$ коэффициенты X^L_{iab} и F^{L2}_{iLab} пропорциональны производным $\partial_r^{L+2} U^\ell_{iLab}$ и $\partial_r^{L+4} U^\ell_{iLab}$ в точке $r = 0$. Используя такие соотношения и формулы (35) и (51), выводим связи

$$\partial_r^2 Q_{iLab} =$$

$$= \left(1 + \frac{L}{4}\right) \left[(V_{i0} - E) \, Q_{iLab} + \sum_{k \neq i} V_{k0} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} Q_{kLa'b'} \right] . \quad (65)$$

В случаях $B)$ и $C)$ коэффициенты F^{L2}_{iab} и X^{L+2}_{iab} пропорциональны производным $\partial_r^{L+4} U^\ell_{iLab}$ и $\partial_r^{L+4} U^\ell_{i,L+2,ab}$ при $r = 0$ и поэтому имеются простые связи:

$$\partial_r^{L+4} \left[U^\ell_{iLab}(r) - U^\ell_{i,L+2,ab}(r) \right] = 0 \, , \quad r = 0 \, . \quad (66)$$

Осталось вывести связи из равенств (61). Имеется два исключительных и рассмотренных ниже случая $\ell, \sigma = 0$ и $\ell, \sigma = 1$. Только при таких значениях ℓ и σ в случаях $A)$ и $B)$ суммы (61) содержат лишь один член и поэтому для компонент $U^{\ell x}_{im'}$ имеются связи при $r = 0$. При всех иных ℓ и σ или же в случае $C)$ эти суммы содержат два и более слагаемых, причем все коэффициенты X^L_{iab}, B^{L1}_{iab} и (или) F^{L2}_{iLab} суммируются по a и b. Поэтому их нельзя представить как частные производные компонент $U^{\ell x}_{im'}$ по r в точке $r = 0$. Следовательно, связи между такими производными не существуют. Спроецировав эти асимптотики на функции $\Theta_{am'}$, получим асимптотики проекций $U^{\ell x}_{im'a} \equiv T^{\ell m'}_{ab} U^\ell_{iab}$. В этих асимптотиках неизвестные коэффициенты не суммируются и поэтому для функций $Q_{jab} \equiv \partial_r^{L+2} U^{\ell x}_{jm'a} / T^{\ell m'}_{ab}|_{r=0}$ имеются связи (63).

Обсудим качественные следствия формул (59)–(62), в которых $L = a + b$.

Сначала поясним угловую зависимость слагаемых сумм (59). Их первые слагаемые в любом случае $A)$, $B)$ или $C)$ зависят от φ так же, как функция

$$\tilde{W}_{Lab}(\varphi) = N_{Lab} \, (\sin \varphi)^{a+1} (\cos \varphi)^{b+1}, \;\; N_{Lab} = \left[\frac{(2L+4)\Gamma(L+2)}{\Gamma(a+3/2)\,\Gamma(b+3/2)} \right]^{1/2} .$$

Угловая зависимость вторых слагаемых сумм (59) в случае $A)$ описывается произведением $\cos\varphi\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi)$, а в случаях $B)$ и $C)$ — линейной комбинацией коэффициентов X^L_{iab} и F^{L2}_{iLab} и двух функций: функции $\tilde{W}_{Lab}(\varphi)$ и функции

$$\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi) = N_{L+2,ab}\,(\sin\varphi)^{a+1}\ (\cos\varphi)^{b+1}\,(1/2)\,[a-b+(L+3)\,\cos 2\varphi]\ ,$$
$$N_{L+2,ab} = N_{Lab}\,(1/2)\,[\,(2a+3)(2b+3)(L+4)]^{1/2}\ .$$

Третьи слагаемые сумм (59) в случае $A)$ зависят от угла φ так же, как функция $\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi)$, в случае $B)$ — как функция

$$(\cos\varphi)^3\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi) = N_{Lab}(\sin\varphi)^{a+1}\ (\cos\varphi)^{b+4}\,,$$

а в случае $C)$ — как линейная комбинация коэффициентов F^{L4}_{iLab}, $(F^{L2}_{i,L+2,ab}+X^{L+4}_{iab})$ и двух функций: функции $\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi)$ и функции

$$W_{L+4,ab}(\varphi) = N_{L+4,ab}(\sin\varphi)^{a+1}(\cos\varphi)^{b+1}\times$$
$$\times\,(1/8)\,\big[\,(L+4)(L+5)(\cos 2\varphi)^2+2(L+4)\cos 2\varphi+a-b\,\big]\,.$$

Теперь опишем зависимость слагаемых сумм (60) от индекса L'. Если $L'=L$, то в любом случае $A)$, $B)$ или $C)$ старшие (первые) слагаемые убывают одинаковым образом: $U^\ell_{iL'ab}=O(r^{L+2})$. В случае $A)$ при любом L' второе слагаемое убывает как r^{L+3}. В случаях $B)$ и $C)$ вторые слагаемые убывают как r^{L+4}, только если $L'=L,L+2$. В случае $B)$ второе слагаемое убывает как r^{L+5} при всех $L'\neq L,L+2$, а в случае $C)$ — как r^{L+6}, если $L'=L,L+2,L+4$.

Рассмотрим суммы (61) и (62). В них по определению $L=\ell+\mu(\sigma)$. Поэтому асимптотики при $r\to 0$ компонент $U^\ell_{im'}$ и Ψ^ε_i во всех случаях $A)$, $B)$ и $C)$ зависят от полной четности σ: если четность нормальная, то $U^{\ell x}_{im'}=O(r^{\ell+2})$ и $\Psi^\varepsilon_i=O(r^\ell)$, если же четность аномальная, то $U^{\ell x}_{im'}=O(r^{\ell+3})$, а $\Psi^\varepsilon_i=O(r^{\ell+1})$.

Формулы (59)–(62) несложно переписать в переменных $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$. Полученные соотношения, например образы формул (59)

$$A)\ U^\ell_{iab} = N_{Lab}\,x^{b+1}\,y^{a+1}\,\left\{X^L_{iab}+\frac{x\,V_{i,-1}}{2b+2}\,B^{L1}_{iab}+\right.$$
$$\left.+\frac{N_{L+2,ab}}{2N_{Lab}}B^{L2}_{iab}ln\,(x^2+y^2)\,\big[(a+1)x^2-(b+1)y^2\,\big]+O(r^2)\right\},$$
$$B)\ U^\ell_{iab} = N_{Lab}\,x^{b+1}\,y^{a+1}\left\{X^L_{iab}+F^{L2}_{iLab}\,(x^2+y^2)+\right. \tag{67}$$
$$+\frac{N_{L+2,ab}}{N_{Lab}}\,X^{L+2}_{iab}\ \big[\,(a+1)x^2-(b+1)y^2)\,\big]+$$
$$\left.+\frac{x^3V_{i1}}{6(b+2)}\,B^{L1}_{iab}+O(r^4)\right\},$$

предлагается использовать для равномерного сращивания асимптотик фаддеевских компонент Ψ_i^ε вблизи точки парного удара $(x \to 0, y > 0)$ с их асимптотиками в пределе линейной конфигурации трех частиц $(x > 0, y \to 0)$. Решение этой проблемы предполагается дать в отдельной работе.

В (59)–(62) все коэффициенты B_{iab}^{L1}, B_{iab}^{L2} и F_{iLab}^{L2} — линейные функции (35), (44) и (51) неизвестных констант X_{iab}^L. При данных X_{iab}^L вычисление коэффициентов B_{iab}^{L1} сводится к вычислению коэффициентов Рейнала–Реваи, значения коэффициентов B_{iab}^{L2} нетрудно вычислить, используя известные компактные представления [9] ядер $h_{aba'b'}^\ell(\varphi, \varphi_k; \gamma_{ki})$, вычисление коэффициентов F_{iLab}^{L2} — несложная задача. При небольших значениях ℓ полного углового момента суммы (59)–(62) довольно просты. Для примера приведем сумму (61) в случае A) при $\ell = 0$, а затем при $\ell = 1$.

Пусть $\ell = 0$, $\sigma = 1$, тогда $L, a, b, m' = 0$, и с точностью $O(r^3 s)$

$$U_{i0}^{0x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, xy \sin\theta \left[X_{i00}^0 + \frac{x}{2}\, V_{i,-1}\, B_{i00}^{01} + 2B_{i00}^{02}\, ln(x^2+y^2)\,(x^2-y^2) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, G_{i00}^{02}(\varphi)(x^2+y^2)\right], \quad (68)$$

где B_{i00}^{01} и B_{i00}^{02} — коэффициенты (45), а $G_{i00}^{02}(\varphi)$ — функция (46) переменной $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. Так как B_{i00}^{01} — сумма коэффициентов X_{k00}^0 по индексу $k = 1, 2, 3$, то компоненты U_{i0}^{0x}, $i = 1, 2, 3$, подчиняются связям

$$\partial_r^2 \left[2\,\partial_r U_{i0}^{0x}(r,\varphi,u) - 3\,V_{i,-1}\cos\varphi \sum_{k=1}^{3} U_{k0}^{0x}(r,\varphi_k,u_k)\,\frac{\sin 2\varphi\, sin\theta}{\sin 2\varphi_k\, sin\theta_k}\right] = 0\,.$$

Пусть теперь $\ell = 1$. Если $\sigma = -1$, то $\mu(\sigma) = 0$, поэтому $L = \ell + \mu(\sigma) = 1$; $\{a, b\} = \{1, 0\}, \{0, 1\}$, а $m' = 0, 1$ и с точностью до слагаемых $O(r^5)$

$$U_{i1}^{1x} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\, x\,(y\sin\theta)^2 \left[X_{i10}^1 + \frac{x}{2} V_{i,-1}\, B_{i10}^{11} + B_{i10}^{12}\,\frac{s}{\sqrt{3}}\,(5x^2-3y^2)\right],$$
$$U_{i0}^{1x} = U_{i1}^{1x}\operatorname{ctg}\theta + \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 y\,\sin\theta \left[X_{i01}^1 + \frac{x}{4} V_{i,-1}\, B_{i01}^{11} + B_{i01}^{12}\frac{s}{\sqrt{3}}(3x^2-5y^2)\right], \quad (69)$$

где $s \equiv (1/2) ln(x^2+y^2)$, B_{iab}^{11} — следующие комбинации коэффициентов X_{iab}^1:

$$B_{i10}^{11} = X_{i10}^1 - \sum_{k\neq i}\left(X_{k10}^1\cos\gamma_{ki} - X_{k01}^1\sin\gamma_{ki}\right),$$
$$B_{i01}^{11} = X_{i01}^1 - \sum_{k\neq i}\left(X_{k10}^1\sin\gamma_{ki} + X_{k01}^1\cos\gamma_{ki}\right),$$

а коэффициенты B^{21}_{iab} выражаются через коэффициенты B^{11}_{kab} и функции $\tilde{s} \equiv |\sin\gamma|$ и $c \equiv \cos\gamma$ кинематического угла $\gamma \equiv \gamma_{ki}$:

$$
\begin{aligned}
&B^{12}_{iab} = \frac{\sqrt{3}}{60\,\pi}\, V_{i,-1} \sum_{k\neq i} V_{k,-1} \sum_{a'+b'=1} \frac{B^{11}_{ka'b'}}{b'+1}\, g^{ab}_{a'b'}(\gamma_{ki})\,;\\
&g^{10}_{10}(\gamma) = (\tilde{s}/c)^2\,(1+4c^2)(\pi - 2|\gamma|) - 2\tilde{s}^3/c\,,\\
&g^{10}_{10}(\gamma) = 4(\tilde{s}^3/c)\,(\pi - 2|\gamma|)\,\mathrm{sign}\gamma\,,\\
&g^{01}_{10}(\gamma) = (\tilde{s}/c)\,\left[(4c^2-3)(\pi-2|\gamma|) + 2\tilde{s}c\right]\,\mathrm{sign}\gamma\,,\\
&g^{01}_{01}(\gamma) = 2(\tilde{s}/c)^2\,(2c^2-1)(\pi - 2|\gamma|) + 4\tilde{s}^3/c\,.
\end{aligned}
$$

Если же $\ell, \sigma = 1$, то $\mu(\sigma) = 1$, поэтому $L = 2$, $\{a,b\} = \{1,1\}$, а $m' = 1$ и

$$
\begin{aligned}
U^{1x}_{i1} = (8/\sqrt{\pi})\,x^2y^2\sin\theta\times&\\
\times\left[X^2_{i11} + \frac{x}{4}\,V_{i,-1}B^{21}_{i11} + \sqrt{6}\,B^{22}_{i11}s(x^2-y^2)\right] + O(r^6)\,.&\quad (70)
\end{aligned}
$$

Здесь B^{21}_{i11} — сумма трех коэффициентов X^2_{k11} по индексу $k = 1,2,3$, а

$$
\begin{aligned}
B^{22}_{i11} \quad &= \quad (\sqrt{6}/120)\,\pi^{-1}\,V_{i,-1}\,B^{21}_{i11}\sum_{k\neq i} V_{k,-1}\,\mathrm{tg}^2\gamma_{ki}\,\times\\
&\times \quad \left[(\pi - 2|\gamma_{ki}|)\,\cos 2\gamma_{ki}/\cos\gamma_{ki} + 2\,\sin|\gamma_{ki}|\right]\,,
\end{aligned}
$$

поэтому для компонент U^{1x}_{i1}, $i = 1,2,3$, имеются простые связи:

$$
\partial^4_r\left[4\partial_r U^{1x}_{i1}(r,\varphi,u) - 5V_{i,-1}\cos\varphi\sum_{k=1}^{3} U^{1x}_{i1}(r,\varphi_k,u_k)\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_k}\right)^2\frac{\sin\theta}{\sin\theta_k}\right] = 0.
$$

Поясним возможные вычислительные приложения формул (59)–(66). Используя эти формулы, можно двумя простыми способами улучшить поточечную сходимость вычисляемых решений одно- дву- и трехмерных уравнений Фаддеева к их точным решения вблизи точки $r = 0$. Опишем оба способа на примере дискретных (сеточных) аналогов уравнений (19) с условиями (20) и вполне определенными физическими граничными условиями [1] при $r \to \infty$.

Первый способ состоит в использовании связей (63) как граничных условий, дополнительных к условиям (20).

Второй способ реализуется по следующей схеме. Сначала задается двумерная сетка Δ узлов, лежащих на дуге $\mathcal{L}_0$ достаточно малого радиуса r_0 и вне кругового сектора $\mathcal{S}_0$, который она ограничивает:

$$
\mathcal{L}_0 \equiv \{r : r = r_0, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}\,, \quad \mathcal{S}_0 \equiv \{r : r < r_0, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}\,.
$$

В секторе $\mathcal{S}_0$ функции U^ℓ_{iab} приближаются соответствующими случаю A), B или C) суммами (59) с неизвестными коэффициентами и отброшенными остаточными членами. Вне сектора $\mathcal{S}_0$ функции U^ℓ_{iab} подчиняются дискретным аналогам уравнений (19), условий (20) и условий при $r \to \infty$, а в узлах сетки Δ, лежащих на дуге $\mathcal{L}_0$, — условиям непрерывности («сшивки»). В итоге для совокупности неизвестных коэффициентов и значений искомых функций U^ℓ_{iab} в узлах коллокации получается линейная система уравнений с квадратной матрицей. Эта система решается численно.

Оба способа нетрудно реализовать для улучшения всех известных дискретных сплайн-аналогов двумерных фаддеевских краевых задач. Такие аналоги основаны на методах сплайн-функций [21], подробно представлены в [22] и легко обобщаются на случай трехмерных уравнений для D^σ-компонент $U^{\ell x}_{im'}$, подчиненных полученным в [5] физическим граничным условиям при $r \to \infty$.

Еще одно и немаловажное приложение выведенных связей — тестирование любых алгоритмов численного анализа одно- дву- и трехмерных уравнений Фаддеева на сходимость вблизи точки $r = 0$. С этой целью в связи подставляются вычисленные решения вместо точных и по величинам получившихся невязок (погрешностей) оценивается достигнутая локальная точность.

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

Согласно (59), компоненты U^ℓ_{iab} имеют нули порядка $a+1$ и $b+1$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, а связи (63) содержат производные порядка $a+b+2$ и выше. Порядки таких нулей и производных возрастают с увеличением a и b, что заметно затрудняет реализацию всех упомянутых выше способов использования асимптотик (59) и связей (63) при больших a и b. От таких затруднений нетрудно избавиться, перейдя в системе (19) к новым компонентам

$$G^\ell_{kab}(r,\varphi_k) \equiv \{(r\sin\varphi_k)^{a+1}\,(r\cos\varphi_k)^{b+1}\}^{-1}\,U^\ell_{kab}(r,\varphi_k)\,, \quad k = 1,2,3\,.$$

Асимптотика каждой компоненты G^ℓ_{iab} — сумма слагаемых, заключенных в (59) в фигурные скобки. Поэтому компоненты G^ℓ_{iab} не равны нулю при $\varphi_i = 0, \pi/2$, а их производные невысокого порядка подчиняются связям, которые получаются подстановкой $Q_{iab} = G^\ell_{iab}$; $\tilde{W}_{Lab}$, $\tilde{W}_{La'b'} = 1$ и $L = -2$ в связи (63).

Численный анализ бесконечной системы (19) принципиально невозможен. Вместо этой системы приходится интегрировать ее конечную подсистему, в которой индексы a, a' и b, b' ограничены сверху: $a, a' \le a_{max} < \infty$ и $b, b' \le b_{max} < \infty$. Исследуем регулярное решение $\{\tilde{U}^\ell_{iab}\}$ такой подсистемы. Условия, наложенные на индексы a, a' и b, b', не порождают никаких ограничений на величину L гипермомента. Поэтому, дословно повторив анализ всех фундаментальных решений, можно показать, что в случаях $A), B)$ и $C)$

их разложения, а значит и разложение решения $\{\tilde{U}_{iab}\}$, устроены так же, как и ряды (47) и (55), отвечающие исходной системе (19). Компоненты $\tilde{U}_{iab}$ — ряды

$$\tilde{U}^{\ell}_{iab}(r,\varphi) = \sum_{L=a+b}^{\infty} r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \tilde{\Phi}^{Lnm}_{iab}(\varphi)\,,$$

где $M(n)$ — такое же, как и в рядах (55), но $\tilde{\Phi}^{Lnm}_{iab} \neq \Phi^{Lnm}_{iab}$, если $L > a_{max} + b_{max}$. Для компонент $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$ верны аналоги формул (59) и (63), полученные из них заменами $U^{\ell}_{iab} \to \tilde{U}^{\ell}_{iab}$ и $\Phi^{Lnm}_{iab} \to \tilde{\Phi}^{Lnm}_{iab}$. При вычислении компонент $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$ эти аналоги можно использовать теми же способами, что и их оригиналы.

Замена системы (19) ее конечной подсистемой порождает исключительно важный для практических приложений вопрос: в какой области аргументов компоненты U^{ℓ}_{iab} с $a \le a_{max}$ и $b \le b_{max}$ имеют то же строение, что и компоненты $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$ с теми же индексами i, a и b? Ответ на этот вопрос для области малых r впервые дан выше: компоненты U^{ℓ}_{ab} и $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$ — функционально одинаковые при $r \to 0$ в любом из трех случаев $A), B)$ и $C)$. В [23] доказано, что при $r \to \infty$ компоненты U^{ℓ}_{ab} и $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$ функционально разные, если парные взаимодействия содержат кулоновские слагаемые (случай $A)$), и функционально одинаковые, если такие слагаемые отсутствуют (случаи $B)$ и $C)$).

4. СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

Покажем, что доказанных разложений (55) всех компонент U^{ℓ}_{iab} общего регулярного решения $\{U^{\ell}_{iab}\}$ фаддеевских уравнений (19) вполне достаточно, чтобы восстановить соответствующие разложения всех шредингеровских приведенных парциальных компонент U^{ℓ}_{ab}, U^{ℓ}_{Lab} и $U^{\ell x}_{m'}$ общего регулярного решения Ψ^{ε} уравнения Шредингера (6) и самого решения Ψ^{ε}.

Подставив в (13) фаддеевские компоненты U^{ℓ}_{iab} в виде рядов (55), получим разложения приведенных бисферических компонент U^{ℓ}_{ab}:

$$\begin{aligned} U^{\ell}_{ab}(r,\varphi) &= \sum_{L=a+b}^{\infty} r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Phi^{Lnm}_{ab}(\varphi)\,, \\ \Phi^{Lnm}_{ab}(\varphi) &= \Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi) + \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} \langle \varphi | h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | \Phi^{Lnm}_{ka'b'}(\varphi_k) \rangle\,. \end{aligned} \tag{71}$$

Заменив функции U^{ℓ}_{iab} такими суммами в (17), (18) и в (13), выведем соответствующие разложения приведенных гиперсферических компонент $U^{\ell}_{L'ab}$:

$$
\begin{aligned}
U^{\ell}_{L'ab}(r) &= \sum_{L'=a+b}^{\infty} r^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Phi^{Lnm}_{L'ab}\,, \\
\Phi^{Lnm}_{L'ab} &= \langle \tilde{W}_{L'ab}(\varphi) | \Phi^{Lnm}_{ab}(\varphi) \rangle\,,
\end{aligned}
\tag{72}
$$

разложения приведенных D^{σ}-компонент $U^{\ell x}_{m'}$:

$$
\begin{aligned}
U^{\ell x}_{im'}(r,\varphi,u) &= \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{L+2+n} \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Phi^{Lnm}_{m'}(\varphi,u) \\
\Phi^{Lnm}_{m'}(\varphi,u) &= \sin\,\theta \sum_{ab} T^{\ell m'}_{ab} \Theta_{am'}(u) \Phi^{Lnm}_{ab}(\varphi)
\end{aligned}
\tag{73}
$$

и разложение общего регулярного решения Ψ^{ε} уравнения Шредингера (6):

$$
\begin{aligned}
\Psi^{\varepsilon}(r,\Omega) &= \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)}^{\infty} r^{L} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{M(n)} s^m \, \Psi^{Lnm}(\Omega)\,, \\
\Psi^{Lnm}(\Omega) &\equiv \sum_{ab} \left[\, \Phi^{Lnm}_{ab}(\varphi)/(\sin\,\varphi\,\cos\,\varphi) \, \right] \, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}).
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Найдем явные асимптотики полученных рядов (71)–(74) в виде подсумм их трех наиболее медленно убывающих слагаемых и попутно покажем, что для этого достаточно знать лишь асимптотики (59) всех фаддеевских компонент U^{ℓ}_{iab}. Сначала рассмотрим случаи $A)$ и $B)$.

Заменив в (13) компоненты U^{ℓ}_{iab} их асимптотиками (59), получаем искомые асимптотики рядов (71), т. е. асимптотики компонент $U^{\ell}_{ab}(r,\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
A)\ U^{\ell}_{ab} &= r^{L+2}\big[X^{L}_{ab}\tilde{W}_{Lab}(\varphi) + \\
&\quad + r\, f^{L1}_{ab}(\varphi) + r^2 s B^{L2}_{ab}\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi) + O(r^2)\big], \\
B)\ U^{\ell}_{ab} &= r^{L+2}\Big\{X^{L}_{ab}\tilde{W}_{Lab}(\varphi) + \\
&\quad + r^2\Big[F^{L2}_{Lab}\,\tilde{W}_{Lab}(\varphi) + X^{L+2}_{ab}\tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi)\Big] + r^3\, Q^{L3}_{ab}(\varphi) + O(r^4)\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Здесь и далее функции $f^{Lp}_{ab}(\varphi)$, $p=1,3$, определены формулами

$$
\begin{aligned}
f^{Lp}_{ab}(\varphi) \quad &\equiv \quad \frac{V_{i,p-2}\, B^{L1}_{iab}}{p\,(2b+p+1)} (\cos\,\varphi)^p\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) + \\
&+ \quad \sum_{k\neq i} \sum_{a'+b'=L} \frac{V_{k,p-2}\, B^{L1}_{ka'b'}}{p\,(2b'+p+1)} \langle \varphi | h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | (\cos\,\varphi_k)^p\, \tilde{W}_{La'b'}(\varphi_k) \rangle,
\end{aligned}
\tag{76}
$$

а все коэффициенты $Z^{L'}_{ab} = X^{L'}_{ab}, F^{L'2}_{ab}, f^{Lp}_{L'ab}$ без нижнего индекса i, нумерующего фаддеевские компоненты Ψ^{ε}_i, выражаются через соответствующие коэффициенты $Z^{L'}_{iab} = X^{L'}_{iab}, F^{L'2}_{iab}, f^{Lp}_{iL'ab}$ с индексом $i = 1, 2, 3$ по правилу

$$Z^{L'}_{ab} \equiv Z^{L'}_{iab} + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L'\ell} \, Z^{L'}_{ka'b'} \, . \tag{77}$$

Отметим, что, согласно определению (35) и этому правилу, $X^L_{ab} = B^{L1}_{iab}$.

Теперь в (17) подставим функции U^{ℓ}_{ab} в виде (75). В итоге получим асимптотики гиперсферических компонент $U^{\ell}_{L'ab}(r)$, т. е. асимптотики рядов (72):

$$\begin{aligned}
&A)\ U^{\ell}_{L'ab} = r^{L+2} \, \left[\, X^L_{ab} \, \delta_{LL'} + r \, f^{L1}_{L'ab} + r^2 s \, B^{L2}_{ab} \, \delta_{L',L+2} + O(r^2) \right] \, , \qquad (78)\\
&B)\ U^{\ell}_{L'ab} = r^{L+2} \, \left\{ \, \left[\, X^L_{ab} + r^2 \, F^{L2}_{Lab} \, \right] \delta_{LL'} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + r^2 X^{L+2}_{ab} \delta_{L',L+2} + r^3 f^{L3}_{L'ab} + O(r^4) \, \right\} \, ,
\end{aligned}$$

где символом $f^{Lp}_{L'ab}$ обозначена комбинация (77) трех коэффициентов

$$f^{Lp}_{iL'ab} \equiv V_{i,p-2} \, A^{Lp}_{L'ab} \, B^{L1}_{iab} / \left[\, p \, (2b + p + 1) \, \right] \, , \quad i = 1, 2, 3 \, .$$

Осталось найти явные асимптотики всех D^{σ}-компонент $U^{\ell x}_{m'}$ и решения Ψ^{ε}, т. е. асимптотики рядов (73) и (74). Для этого в суммах (12) и (13) оставим наиболее медленно убывающие при $r \to 0$ компоненты U^{ℓ}_{ab} с индексами a и b, подчиненными в случае $A)$ условию $a + b = L$, где $L = L_{min}$, а в случае $B)$ — условию $a + b \leq L + 2$. Заменив в (12) и (13) такие компоненты их представлениями (75), получим явные асимптотики D^{σ}-компонент $U^{\ell x}_{m'}(r, \varphi, u)$:

$$\begin{aligned}
&A)\ U^{\ell x}_{m'} = r^{L+2} \, \sin\theta \sum_{a+b=L} T^{\ell m'}_{ab} \, \Theta_{am'}(u) \times \\
&\qquad \times \left\{ \, X^L_{ab} \, W_{L,ab}(\varphi) + r f^{L1}_{ab}(\varphi) + r^2 \, s \, B^{L2}_{ab} \, \tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi) + O(r^2) \, \right\} \, , \\
&B)\ U^{\ell x}_{m'} = r^{L+2} \, \sin\theta \sum_{a+b=L} T^{\ell m'}_{ab} \, \Theta_{am'}(u) \times \qquad (79)\\
&\qquad \times \left\{ \, \left[\, X^L_{ab} + r^2 \, F^{L2}_{Lab} \, \right] \, \tilde{W}_{Lab}(\varphi) + r^3 \, f^{L3}_{ab}(\varphi) \right\} + \\
&\qquad + r^{L+4} \, \sin\theta \sum_{a+b=L}^{L+2} X^{L+2}_{ab} \, T^{\ell m'}_{ab} \, \Theta_{am'}(u) \, \tilde{W}_{L+2,ab}(\varphi) + O(r^{L+6})
\end{aligned}$$

и явную асимптотику функции $\Psi^\varepsilon(r,\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&A)\ \Psi^\varepsilon = r^L \sum_{a+b=L} \Big[X^L_{ab}\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega) + 2\, r \operatorname{cosec} 2\varphi\, f^{L1}_{ab}(\varphi)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) + \\
&\qquad + r^2 s\, B^{L2}_{ab}\, Y_{L+2,ab}(\Omega) + O(r^2) \Big]\,, \qquad (80) \\
&B)\ \Psi^\varepsilon = r^L \sum_{a+b=L} \Big\{ \big[X^L_{ab} + r^2\, F^{L2}_{Lab} \big]\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega) + \\
&\qquad + 2\, r^3 \operatorname{cosec} 2\varphi\, f^{L3}_{ab}(\varphi)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y}) \Big\} + \qquad (81) \\
&\qquad + r^{L+2} \sum_{a+b=L}^{L+2} X^{L+2}_{ab}\, Y^{\ell m}_{L+2,ab}(\Omega) + O(r^{L+4})\,.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим оставшийся случай $C)$. Используя (22), (35), (77) и равенства $X^L_{ab} = B^{L1}_{iab}$, доказываем следующее правило: чтобы получить явные асимптотики функций U^ℓ_{ab}, U^ℓ_{Lab}, $U^{\ell x}_{m'}$ и Ψ^ε достаточно в соответствующих соотношениях (59)–(62) для функций U^ℓ_{iab}, U^ℓ_{iLab}, $U^{\ell x}_{im'}$ Ψ^ε_i опустить индекс i.

Как следует из (55)–(61) и (71)–(79), фаддеевские и соответствующие им шредингеровские парциальные компоненты — функционально одинаковые ряды по переменным r, s и угловым функциям. Однако фаддеевские угловые функции устроены гораздо более просто, чем отвечающие им шредингеровские угловые функции. Именно по этой причине в качестве стартовых уравнений использовались уравнения Фаддеева (19) в бисферическом базисе, а не соответствующая им система уравнений Шредингера в том же базисе.

Приступим к выводу связей. Исследуем равенство (75) в случае $A)$. Положим в нем $p = 1$ и $X^L_{ab} = B^{L1}_{iab}$. Найдем производную ∂^{L+3}_r получившегося соотношения при $r = 0$. В полученном равенстве, содержащем функцию (76), заменим коэффициенты B^{L1}_{iab} их выражениями через производные $\partial^{L+2}_r U^\ell_{iab}|_{r=0}$ и таким образом получим связи для функций $Q_{ab}(r,\varphi) \equiv \partial^{L+2}_r U^\ell_{ab}(r,\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
\partial^p_r Q_{ab}(r,\varphi) \;=\; & V_{i,p-2}\,(\cos\varphi)^p\, \Big[M^{Lp}_b\, Q_{ab}(r,\varphi) + \qquad (82) \\
& + \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} M^{Lp}_{b'}\, \langle \varphi | h^\ell_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | (\cos\varphi_k)^p\, Q_{a'b'}(r,\varphi_k) \rangle \Big]\,.
\end{aligned}
$$

При $p = 3$ эти связи справедливы в случае $B)$.

Вывод связей для функций $Q_{Lab}(r) \equiv \partial^{L+2}_r U^\ell_{Lab}(r)$ из соотношений (78) принципиально ничем не отличается от вывода связей (64)–(66). Поэтому приведем только окончательные выражения: в случаях $A)$ и $B)$ верны связи

$$
\partial^p_r Q_{L'ab} = A^{Lp}_{Lab}\, M^{Lp}_b\, V_{i,p-2}\, Q_{Lab}\,, \quad \forall L'\,, \qquad (83)
$$

где $p = 1$ в случае A) и $p = 3$ в случае B), а в случаях B) и C) имеются связи

$$\partial_r^2 Q_{Lab} = \left(1 + \frac{L}{4}\right) \times$$
$$\times \left[(V_{i0} - E)\, Q_{Lab} + \sum_{k \neq i} V_{k0} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell}\, Q_{La'b'} \right]. \quad (84)$$

Завершая описания связей, отметим, что вследствие соотношений (79) связям (82) подчиняются функции $Q_{ab}(\varphi) \equiv \partial_r^{L+2} U^{\ell x}_{am'} / T^{\ell m'}_{ab}|_{r=0}$, где $U^{\ell x}_{am'}$ — проекция D^σ-компоненты $U^{\ell x}_{m'}(r, \varphi, u)$ на функцию $\Theta_{am'}(u)$.

Для примера приведем явные асимптотики функции $\Psi^\varepsilon(r, \Omega_i)$ в квантовыми числами $\ell = 0$ и $\sigma = 1$. Для этого в (80) положим $a, b, L = 0$.

В случае A) получим

$$\Psi^\varepsilon = (2\pi^{3/2})^{-1} \left\{ X^0_{00} \left[2 + x\, V_{i,-1} + \sum_{k \neq i} V_{k,-1}\, g(x, y; \gamma_{ki}) \right] + \right.$$
$$\left. +\, 2 B^{20}_{00}\, (x^2 - y^2)\, ln\, (x^2 + y^2) \right\} + O(r^2)\,, \quad r \to 0\,. \quad (85)$$

где B^{20}_{00} — комбинация коэффициентов (45):

$$B^{20}_{00} = B^{20}_{i00} + \sum_{k \neq i} B^{20}_{k00}\, \cos\, 2\gamma_{ki}\,,$$

а функция g выражается через функции $\tilde{s} \equiv |\sin\,\gamma|$ и $c \equiv \cos\,\gamma$:

$$g(x, y; \gamma) \equiv \begin{cases} cx + (\tilde{s}y)^2/(3cx)\,, & y \leq x\, \mathrm{ctg}\gamma\,; \\ \tilde{s}y + (cx)^2/(3\tilde{s}y)\,, & y \geq x\, \mathrm{ctg}\gamma\,. \end{cases}$$

Поэтому существуют два особых луча $\varphi = \gamma_{ki}$, $k \neq i$, при переходе через которые меняется функциональный вид асимптотики функции $\Psi^\varepsilon(r, \Omega_i)$.

Такая же особенность имеется и в случае B), когда

$$\Psi^\varepsilon = (12\pi^{3/2})^{-1} X^0_{00} \left[12 + x^3\, V_{i1} + \sum_{k \neq i} V_{k1}\, g(x, y; \gamma_{ki}) \right] + O(r^4)\,, \quad (86)$$
$$r \to 0\,,$$

а функция $g(x, y; \gamma)$ выражается через те же функции $\tilde{s}$ и c формулами

$$g(x, y; \gamma) = \begin{cases} c^3 x^3 + 2c\tilde{s}^2 x y^2 + (\tilde{s}y)^4/(5cx)\,, & y \leq x\, \mathrm{ctg}\gamma\,; \\ \tilde{s}^3 y^3 + 2c^2 \tilde{s} x^2 y + (cx)^4/(5\tilde{s}y)\,, & y \geq x\, \mathrm{ctg}\gamma\,. \end{cases}$$

В заключение докажем важное для метода гипергармоник утверждение. Практическое применение этого метода для вычисления приближения $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$ решения Ψ^{ε} уравнения Шредингера начинается с замены бесконечного ряда (15) конечной суммой:

$$\Psi^{\varepsilon}(r,\Omega) \to \tilde{\Psi}^{\varepsilon}(r,\Omega) \equiv r^{-2} \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)}^{\tilde{L}} \sum_{ab} \tilde{U}^{\ell}_{Lab}(r)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,, \quad \tilde{L} < \infty\,.$$

Вследствие представлений (13) и (15) такой замене отвечает замена бесконечных разложений (11) компонент U^{ℓ}_{iab} конечными суммами $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$:

$$U^{\ell}_{iab}(r,\varphi) \to \tilde{U}^{\ell}_{iab}(r,\varphi) = \sum_{L=a+b}^{\tilde{L}} \tilde{U}^{\ell}_{iLab}(r)\, \tilde{W}_{Lab}(\varphi)$$

и замена самих компонент U^{ℓ}_{iab} в системе двумерных уравнений Фаддеева (7) на искомые компоненты $\tilde{U}^{\ell}_{iab}$, подчиненные условию ортогональности

$$\tilde{U}^{\ell}_{iLab}(r) = \langle \tilde{W}_{Lab}(\varphi) | \tilde{U}^{\ell}_{iab}(r,\varphi)\rangle = 0\,, \quad L > \tilde{L}\,.$$

Формальные разложения всех L-решений $\{\tilde{\Phi}^{L}_{iab}\}$ и общего решения $\{\tilde{U}^{\ell}_{iab}\}$ полученной системы нетрудно вывести, дословно повторив все приведенные в разделе 2 рассуждения, но полагая при этом $\tilde{W}_{Lab} \equiv 0$ при $L > \tilde{L}$.

Приведем окончательные результаты такого анализа. Так как считается, что $\tilde{W}_{L+n,ab} \equiv 0$ при $n > \tilde{L} - L$, то согласно формуле (33) имеем $\tilde{B}^{Ln}_{iab} = 0$ при $n > \tilde{L} - L$. Поэтому компонента $\tilde{\Phi}^{L}_{iab}$ любого L-решения — ряд

$$\tilde{\Phi}^{L}_{iab}(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{L+n+2} \sum_{m=0}^{\tilde{M}(n,\tilde{L})} s^{m}\, \tilde{\Phi}^{Lnm}_{iab}(\varphi)\,, \quad L = L_{min},\ldots,\tilde{L}\,,$$

причем $\tilde{\Phi}^{\tilde{L}nm}_{iab} = 0$ при всех n и $m > 1$, а $M(n,\tilde{L})$ зависит от величины $\tilde{L}$:

$$\tilde{M}(n,\tilde{L}) \equiv \min\{\, M(n), (L-\tilde{L})/2\,\}\,,$$

где $M(n) = [n/2], [n/6], 0$, соответственно в случае A), B), C). Следовательно, от величины $\tilde{L}$ зависит и строение ряда функции $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$

$$\tilde{\Psi}^{\varepsilon}(r,\Omega) = 2\,\mathrm{cosec}\,2\varphi \sum_{L=\ell+\mu(\sigma)}^{\infty} r^{L} \sum_{n=0}^{\infty} r^{n} \sum_{m=0}^{\tilde{M}(n,\tilde{L})} s^{m} \times$$
$$\times \sum_{ab} \left[\tilde{\Phi}^{Lnp}_{iab}(\varphi) + \sum_{k\neq i} \sum_{a'b'} \langle \varphi | h^{\ell}_{aba'b'}(\gamma_{ki}) | \tilde{\Phi}^{Lnp}_{ka'b'}(\varphi_k)\rangle \right] \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\,. \quad (87)$$

В частности, максимально возможная степень переменной s в этом ряде не превышает числа $(\tilde{L}-\ell)/2$. Этот факт воспроизводит главный результат работы [24], доказанный анализом обрезанной системы одномерных уравнений Шредингера в гиперсферическом базисе.

В случаях $A)$ и $B)$ при любом, но конечном $\tilde{L}$ ряды (15) и (87) точного и приближенного решений Ψ^{ε} и $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$ уравнения Шредингера функционально разные. Поясним это утверждение двумя примерами.

Пусть $\tilde{L}=L_{min}$, как в минимальном приближении метода гипергармоник [13]. Тогда $\tilde{M}(n)=0$ при любом n и независимо от строения парных взаимодействий разложение (87) функции $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$ содержит только целые степени аргумента r. Однако в случаях $A)$ и $B)$ функция Ψ^{ε} — ряд (15), содержащий и целые степени переменой s.

Пусть теперь $\tilde{L}=L_{min}+2$, тогда $\tilde{M}(n)\leq 1$ при любом $n\geq 2$. Поэтому в случае $A)$ разложение (87) функции $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$ линейно по переменной s, в то время как разложение (15) функции Ψ^{ε} содержит и степени s^m с $m>1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим главные преимущества представленного метода и основные результаты, впервые полученные этим методом в настоящей работе.

Метод является довольно общим и универсальным: его можно единообразно применить для последовательного построения и анализа разложений регулярных решений одно-, дву- и трехмерных уравнений Фаддеева и Шредингера вблизи точки тройного удара при любых значениях полного углового момента и пространственной четности системы трех частиц с любыми центральными взаимодействиями, представимых степенными рядами (4) по целым степеням расстояния между двумя частицами.

Несомненное преимущество метода — простота его реализации — обусловлено тем, что стартовой и ключевой для всех построений является рекуррентная цепочка неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (49) второго порядка с тривиальными граничными условиями.

Как было показано, эта цепочка однозначно разрешима, а ее решения можно вычислить, суммируя ряды по собственным функциям $\tilde{W}_{Lab}(\varphi)$ операторов $h^{\ell}_{aba'b'}$ или же применяя известные численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения двух или трех уравнений цепочки (49) удалось выразить явными формулами (27), (37)–(44), (50), (51). Эти формулы и предположения о том, что каждое исследуемое разложение является асимптотическим и дифференцируемым, позволили впервые найти и исследовать явные асимптотики (59)–(62), (67)–(70) и (75)–(80) регулярных решений дву-, одно-, трех- и шестимерных уравнений Фаддеева и

Шредингера, затем вывести связи (63)–(66) и (82), (84) для вышеупомянутых решений в точке тройного удара.

Предложенным методом впервые исследована зависимость строения разложений вблизи точки тройного удара регулярных решений и одно-, дву- и трехмерных уравнений Фаддеева и Шредингера от строения (5) разложений (4) центральных парных взаимодействий. В частности, доказано, что разложения всех этих решений являются рядами по целым степеням гиперрадиуса только тогда, когда разложения парных взаимодействий содержат лишь четные степени их аргументов.

Полезными для расчетов свойств систем трех частиц представляются описанные вычислительные приложения метода и иллюстрирующие примеры (явные асимптотики (68)–(70) и (85), (86) в случае полного углового момента, равного нулю или единице), а также результаты выполненного качественного анализа разложения (87) решения уравнения Шредингера в случае обрезанного гиперсферического базиса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркурьев В. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
2. *Фок В. А.* // Изв. Акад. наук СССР. Сер. физ. 1954. Т. 18. С. 161.
3. *Abbott P. C., Maslen E. N.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. P. 2043.
4. *Gottschalk J. E., Abbott P. C., Maslen E. N.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. P. 2077.
5. *Kostrykin V. V., Kvitsinsky A. A., Merkuriev S. P.* // Few-Body Syst. 1989. V. 6:2. P. 97.
6. *Pupyshev V. V.* // Few-Body Syst. 1990. V. 8:3. P. 105.
7. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
8. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2002. Т. 33:4. С. 843.
9. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30:6. С. 1562.
10. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2003. Т. 136:1. С. 90.
11. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2003. Т. 148:2. С. 227.
12. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.
13. *Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.

14. *Виницкий С. И., Пономарев Л. И.* // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13:6. С. 1336.

15. *Chang E. S., Fano U.* // Phys. Rev. A. 1972. V. 6. P. 173.

16. *Пупышев В. В.* // ЯФ. 1999. Т. 62:11. С. 1955.

17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2, сс. 171-172. М.: Наука, 1974.

18. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции, т. 2. М.: Наука, 1983. С. 583.

19. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1953.

20. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 1996. Т. 107:3. С. 501.

21. *Роженко А. И.* Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2005.

22. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35:2. С. 257.

23. *Квицинский А. А., Латыпов Д. М.* // ЯФ. 1991. Т. 53. С. 1552.

24. *Palumbo F.* // Phys. Lett. B. 1977. V. 69:3. P. 275.

Получено 1 июня 2007 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 16.07.2007.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,68. Уч.-изд. л. 3,20. Тираж 315 экз. Заказ № 55833.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/