P11-2007-114

С. А. Михеев*, В. П. Цветков*

ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП С ПОКАЗАТЕЛЕМ, БЛИЗКИМ К ЕДИНИЦЕ

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

*Тверской государственный университет, Тверь, Россия

Михеев С. А., Цветков В. П. Р11-2007-114
Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице

Впервые доказано существование точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп в интервале значений показателя политропы $0,9989 < n \leqslant 1,0795$, в которых ответвляются асимметричные относительно оси вращения решения, описывающие распределение плотности. Показано, что в этом интервале значений n параметр быстроты вращения в критических точках ε_k принимает значения $0,0442 > \varepsilon_k \geqslant 0$.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Mikheev S. A., Tsvetkov V. P. P11-2007-114
The Bifurcation Points of Rotating Magnetic Newtonian Polytrops with a Coefficient Close to Unit

This investigation has proved for the first time that there are bifurcations of Newtonian rotating polytropic curves over the range of the polytropic coefficient $0.9989 < n \leqslant 1.0795$, where the solutions asymmetric with respect to the rotation axis, that describe a density distribution, are derived. It has been shown that within this interval, the n parameter of the rotation rapidity takes the values $0.0442 > \varepsilon_k \geqslant 0$ in critical points ε_k.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Конфигурация однородной несжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости зависит от одного параметра, определяющего быстроту вращения $\varepsilon = \dfrac{\omega^2}{4\pi G\rho_0}$ (ω — угловая скорость вращения конфигурации, G — гравитационная постоянная, ρ_0 — плотность конфигурации), и точные аналитические решения известны только для эллипсоидальных фигур равновесия [1–3].

Конфигурация сжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости уже зависит не только от параметра ε, но и от параметров уравнения состояния гравитирующей материи. Задача об ответвлении асимметричных относительно оси вращения решений уравнения, описывающего вращающиеся гравитирующие конфигурации, при этом существенно усложняется. Возможности найти точные аналитические решения в этом случае нет. Дать ответ о существовании точек бифуркации можно только приближенными методами, и оценку точности вычислений провести достаточно сложно. Поэтому вопрос о точках бифуркации в данном случае открыт.

Порядок асимметрии распределения вещества относительно оси вращения конфигурации удобно определять параметром X. Для несжимаемой гравитирующей вращающейся жидкости X зависит только от параметра быстроты вращения ε, $X = X(\varepsilon)$.

Для намагниченных же конфигураций интенсивность влияния магнитного поля на параметр асимметрии X определяется величиной $\eta_m = \dfrac{B_0^2 \sin^2\alpha}{8\pi G\rho_0 a_1^2}$ (B_0 — характерное значение магнитной индукции в центре конфигурации, a_1, a_3 — длины большой и малой полуосей эллипсоида вращения, аппроксимирующего реальную поверхность конфигурации, α — угол наклона магнитной оси к оси вращения). Физически это отношение плотностей магнитной и гравитационной энергии в центре конфигурации. Асимметрия X в этом случае будет зависеть уже от двух параметров ε и η_m.

Впервые уравнение для параметра X в случае намагниченных вращающихся однородных конфигураций получено в [4], где показана важная роль параметра η_m вблизи точек бифуркации в этом уравнении, представляющем кубическую по X параболу.

Намного усложняется ситуация по исследованию поведения параметра асимметрии X для сжимаемых гравитирующих вращающихся намагниченных конфигураций. Параметр X уже зависит от ε, η_m и параметров уравнения состояния $P = P(\rho)$, описывающего зависимость давления от плотности. В самом простом случае политропы с индексом n $X = X(\varepsilon, \eta_m, n)$.

Наиболее известны работы Джинса [5] и Джеймса [6] по исследованию точек бифуркации вращающихся ньютоновских гравитирующих политроп при $\eta_m = 0$. В них проведены оценки максимального значения индекса политропы n_k, выше которого точек бифуркации нет, $n < n_k$. Джинс дает оценку $n_k = 0,83$, а Джеймс — $n_k = 0,808$. Физической причиной этого в работах [5,6] названо истечение вещества с экватора конфигурации, возникающего при той степени сплюснутости конфигурации, которая необходима для достижения точки бифуркации. Ускорение свободного падения на экваторе g_e будет равно нулю. При большем значении быстроты вращения g_e становится отрицательным, с экватора конфигурации возникает истечение вещества и стационарная конфигурация невозможна. Такой подход восходит к работе Джинса [5].

Аналитического исследования политропных конфигураций вблизи точек бифуркации в этих работах не проводилось, так как при этом нужно проводить вычисления до членов порядка X^3. Исследования проводились на основании лишь линейного приближения.

Необходимо отметить, что в работе Джеймса [6] сделано много приближений и предположений, и, на наш взгляд, точность ее результатов автором сильно завышена. Особенно касается это вычисления g_e, так как эта величина вычисляется на границе конфигурации, а используемые в работе биноминальные степенные ряды вблизи границы сходятся очень медленно. После операции дифференцирования, необходимой для вычисления g_e, точность оценок g_e уже существенно уменьшается. Пренебрегается влиянием границы конфигурации на решение уравнений конфигурации. Достаточно грубым приближением для оценки осенесимметричных членов в уравнениях вращающейся гравитирующей политропы является сделанное в [6] предположение о доминировании в них второй гармоники.

Уравнение гравитирующей вращающейся конфигурации сильно нелинейно зависит от показателя политропы n, и утверждение об отсутствии точек бифуркации при $n > n_k$ по крайней мере безосновательно.

Цель нашей работы — показать, вопреки имеющемуся мнению, существование точек бифуркации ньютоновских гравитирующих вращающихся политроп со значениями показателя, незначительно превышающими единицу.

В этой области параметр сплюснутости $e = \dfrac{a_3}{a_1}$ в точках бифуркации уже достаточно близок к единице, а значение параметра быстроты вращения ε может принимать сколь угодно малые значения. При этом значения g_e с большим запасом становятся отличными от нуля и положительными, что гарантирует стабильность конфигурации.

Этот эффект может значительно влиять на эволюцию угловой скорости медленных пульсаров ε меньше или порядка 10^{-4} с уравнением состояния, близким к политропе с показателем $1 < n < 1,08$. Из реалистических уравнений состояния к ним наиболее близко уравнение состояния ядерной материи Рейда.

В основу развиваемой нами математической модели вращающихся намагниченных политроп положим, как и в [7], уравнение

$$\frac{1}{2\pi a_1^2}\int\limits_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{\mathbf{r}'}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' - K_0\int\limits_{p(\mathbf{r})}^{1}\frac{dp}{\tilde{\rho}(p)} - \varepsilon\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $\Pi_{(m)}$ — вклад магнитных натяжений; $\tilde{\rho} = \dfrac{\rho}{\rho_0}$; ρ — плотность конфигурации; ρ_0 — плотность в центре конфигурации; a_1, a_3 — полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; $p = \dfrac{P}{P_0}$ — отношение давления к центральному значению давления; $K_0 = \dfrac{P_0}{2\pi G\rho_0^2 a_1^2}$; $\mathbf{r}_\perp = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$; $x_1 = \dfrac{x}{a_1}$; $x_2 = \dfrac{y}{a_1}$; $x_3 = \dfrac{x}{a_3}$; D — область R^3, в котрой $\tilde{\rho} \geqslant 0$.

Параметр K_0 является важной характеристикой конфигурации и по порядку величины равен отношению давления к плотности гравитационной энергии в ее центре.

Уравнение (1) при $\Pi_{(m)} = 0$ в литературе [8] часто называют уравнением Ляпунова, который получил выдающиеся результаты при его исследовании.

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в R^3. Эту границу δD будем искать в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности [7]:

$$\delta D: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^{L} Z_{ijk}x_1^i x_2^j x_3^k = 1. \qquad (2)$$

Полуоси аппроксимирующего сфероида a_1, a_3 и коэффициенты Z_{ijk} находятся из условия минимизации функционала [7]

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta D}\tilde{\rho}^2 d\Omega, \qquad (3)$$

что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad a_1\frac{\partial\Lambda}{\partial a_1} = 0, \quad a_3\frac{\partial\Lambda}{\partial a_3} = 0. \qquad (4)$$

Система уравнений (1), (4) представляет собой замкнутую систему для нахождения a_1, a_3, Z_{ijk}, $\tilde{\rho}$.

Представим плотность конфигурации $\tilde{\rho}$ в виде полинома степени P

$$\tilde{\rho} = \sum_{a,b,c}^{P} \rho_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c. \tag{5}$$

Если выбрать P достаточно большим, то с любой степенью точности, согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса, выражение (5) аппроксимирует плотность реальной конфигурации.

Коэффициенты ρ_{abc} и Z_{ijk}, определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные $\rho_{(ab)c}$, $Z_{(ij)k}$ и антисимметричные $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$ части относительно оси вращения и будем искать в виде разложения по малому параметру асимметрии X, подлежащему в дальнейшем определению:

$$\rho_{abc} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)!}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{b}{2}\right)!}\rho_{a+b,c} + \rho_{[ab]c}X + \rho_{1(ab)c}X^2,$$

$$Z_{ijk} = \frac{\left(\frac{i+j}{2}\right)!}{\left(\frac{i}{2}\right)!\left(\frac{j}{2}\right)!}Z_{i+j,k} + Z_{[ij]k}X + Z_{1(ij)k}X^2. \tag{6}$$

Здесь и далее a, b, c и i, j, k являются четными, а вводимые вновь величины удовлетворяют соотношениям симметрии $\rho_{1(ab)c} = \rho_{1(ba)c}$, $\rho_{[ab]c} = -\rho_{[ba]c}$, $Z_{1(ij)k} = Z_{1(ji)k}$, $Z_{[ij]k} = -Z_{[ji]k}$, а $\rho_{[20]0}$ нормируем на единицу.

Для имеющихся к настоящему времени оценок магнитного поля пульсаров по замедлению периода имеет место оценка $B_0 \sim 10^{10} - 10^{12}$ Гс. В этом случае $|\Pi_{(m)}| \sim 10^{-12} - 10^{-9}$ при $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$ г/см^3. Поэтому имеет смысл учитывать $\Pi_{(m)}$ только при нахождении асимметричных коэффициентов $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$.

Аналитическое выражение $\Pi_{(m)}$ выберем в самом простом виде:

$$\Pi_{(m)} = \frac{k}{2}\eta_m(x_1^2 - x_2^2), \tag{7}$$

где k — показатель скорости убывания магнитного поля при удалении от магнитной оси. Для определенности положим $k = 1$.

Для решения уравнения (1) мы должны знать конкретный вид уравнения состояния $P = P(\rho)$. В нашем случае оно предположительно имеет вид политропы с показателем n, близким к единице $|n-1| \ll 1$. Именно для этих значений n у нас имеют место наиболее интересные результаты по исследованию точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп.

В случае политропы имеем

$$\int\limits_{p}^{1} \frac{dp}{\tilde{\rho}} = (1+n)\tilde{\rho}^{\frac{1}{n}}. \tag{8}$$

Аппроксимируем правую часть (8) многочленом второй степени:

$$(1+n)\tilde{\rho}^{\frac{1}{n}} \cong \delta_0 + \delta_1(\tilde{\rho}-1) + \delta_2(\tilde{\rho}-1)^2. \tag{9}$$

Коэффициенты δ_0, δ_1, δ_2 находятся минимизацией уклонения правой и левой частей (9) в метрике L_2. При этом

$$\delta_0 = \frac{4n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(3n+1)}, \quad \delta_1 = -\frac{4n(n+1)(4n-7)}{(2n+1)(3n+1)},$$

$$\delta_2 = -\frac{20n(n^2-1)}{(2n+1)(3n+1)}. \tag{10}$$

Погрешность аппроксимации $n = 1,04$ составила $4 \cdot 10^{-3}$. Положим $h = n-1$ и в случае $|h| \ll 1$ из (10) имеем $\delta_0 \cong \delta_1 \cong 2$, $\delta_2 \cong \frac{10}{3}h$. Отсюда следует возможность качественного изменения характера решения уравнения (1) справа и слева от точки $n = 1$, так как знак квадратичной по $\tilde{\rho}-1$ части в (9) при этом изменяется, коэффициент при h в δ_2 будет больше $\frac{10}{3}$.

Представление (9) можно использовать и для реалистических уравнений состояния, учитывающих наличие сильных взаимодействий между нуклонами в нейтронных звездах, выбрав соответствующим образом коэффициенты δ_0, δ_1, δ_2.

В нашей работе [7] создан комплекс символьно-численных программ, использование которого для решения (1), (4) позволяет свести задачу вычисления основного параметра X к решению кубического уравнения для X:

$$A(e,n)X + B(e,n)X^3 = \eta_m, \tag{11}$$

где $e = \frac{a_3}{a_1}$, и этот параметр является основной характеристикой сплюснутости поверхности конфигурации вдоль оси вращения и, также как ε, характеризует степень быстроты вращения. У нас e является свободным параметром, а ε вычисляемым: $\varepsilon = \varepsilon(e)$. В работе Джеймса [6] наоборот значения ε задаются.

Кубический член в (11) существенен вблизи кривой $A(e,n) = 0$, которая определяет множество точек бифуркации $e_k = e_k(n)$ и ее можно назвать уже бифуркационной кривой. Поэтому $B(e,n)$ нам нужно знать лишь в точках $e_k(n)$, т. е. $B_k(n) = B(e_k(n), n)$, что значительно упрощает вычисления.

Решение уравнения (11), переходящее при $\eta_m = 0$ в симметричное решение $X = 0$, может быть представлено с помощью функции $f_M(\lambda) = \left(108 + 12\sqrt{-12\lambda^3 + 81}\right)^{1/3}$, найденной нами в системе символьной математики MAPLE, в виде

$$X(\lambda) = \left(\frac{1}{6} f_M(\lambda) + 2\lambda f_M^{-1}(\lambda)\right) X_k, \tag{11a}$$

$$\lambda = -\frac{A(e,n)}{B_k(n) X_k^2}, \quad X_k = \left(\frac{\eta_m}{B_k(n)}\right)^{1/3}.$$

Вблизи точки бифуркации коэффициент $A(e,n)$ по определению является малым параметром, по степеням которого можно представить разложение решения (11a). В линейном по $A(e,n)$ приближении имеем

$$X = X_k \left(1 - \frac{1}{3} \frac{A(e,n)}{B_k(n) X_k^2}\right). \tag{11б}$$

Отметим, что выражение (11б) справедливо только при $|A(e,n)| \ll \eta_m^{2/3}$.

Как уже отмечено нами, во всех случаях (за исключением $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$) задача о гравитирующих конфигурациях решается приближенно. Проверить выполнение условия гидростатического равновесия во всех точках гравитирующей конфигурации невозможно. Поэтому Джинс [5] ввел условие стабильности конфигурации как неотрицательность радиальной компоненты ускорения свободного падения на экваторе $g_e > 0$. В плоскости экватора имеем

$$g(r, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r, x_3 = 0)}{\partial r} - 2\varepsilon r > 0, \tag{12}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\Phi = -\dfrac{1}{2\pi a_1^2} \displaystyle\int_D \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$.

На экваторе $r = r_e$, $\tilde{\rho}(r_e, x_3 = 0) = 0$. Тогда $g_e = g(r_e, x_3 = 0) = \dfrac{\partial \Phi(r_e, x_3 = 0)}{\partial r_e} - 2\varepsilon r_e$.

Функция $\Phi(r, x_3 = 0)$ определяется нами внутри аппроксимирующего эллипсоида, вне его мы будем использовать ее аналитическое продолжение. При этом пренебрежение гравитационным влиянием масс за пределами аппроксимирующего эллипсоида дает погрешность $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1)$.

Из вышеизложенного следует критерий для точек бифуркации равновесных конфигураций:

$$A(e_k, n) = 0, \quad g_e(e_k, n) > 0. \tag{13}$$

Проведенные нами символьно-численные вычисления функции $A(e,n)$ представлены на рис. 1, 2.

Из рис. 1 видно, что семейство кривых $A(e, n = \mathrm{const})$, $1 \leqslant n \leqslant 1,0795$, пересекает ось абсцисс в интервале значений $0,575 \leqslant e \leqslant 1$ и определяет множество точек бифуркации по параметру e, в которых $A(e_k, n) = 0$.

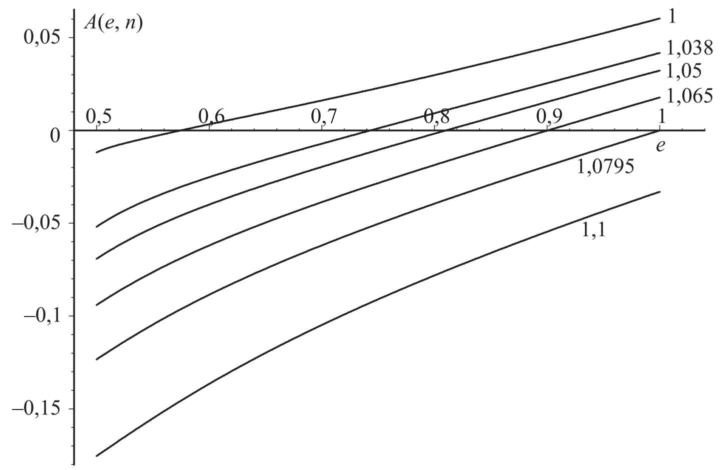

Рис. 1. Зависимость функции $A(e,n)$ от параметра e при фиксированных значениях показателя политропы n

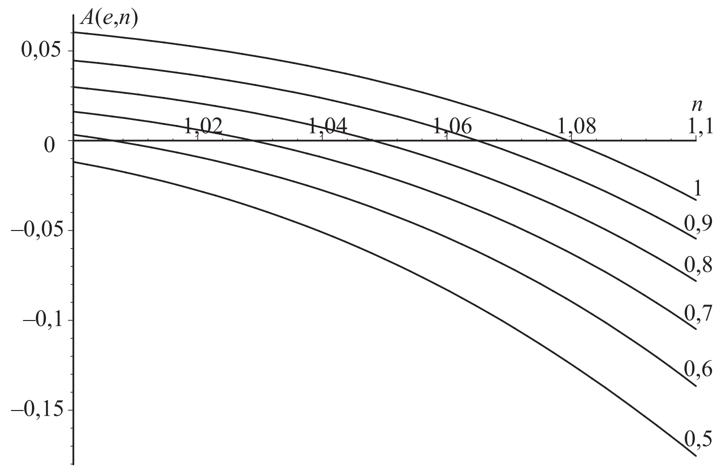

Рис. 2. Зависимость функции $A(e,n)$ от показателя политропы n при фиксированных значениях параметра e

Из рис. 2 следует, что семейство кривых $A(e = \mathrm{const}, n)$, $0,575 \leqslant e \leqslant 1$, пересекает ось абсцисс в интервале значений n $1 \leqslant n \leqslant 1,0795$ и определяет множество точек бифуркации по параметру n, в которых $A(e_k, n(e_k)) = 0$.

Зависимость $g_e(e_k, n)$ в диапазоне значений n $0,99 \leqslant n \leqslant 1,0795$ приводится на рис. 3, из которого следует, что $g_e(e_k, n = 0,9989) = 0$, $g_e(e_k, n = 1) = 3,07 \cdot 10^{-3}$, $g_e(e_k, n = 1,0795) = 0,187$.

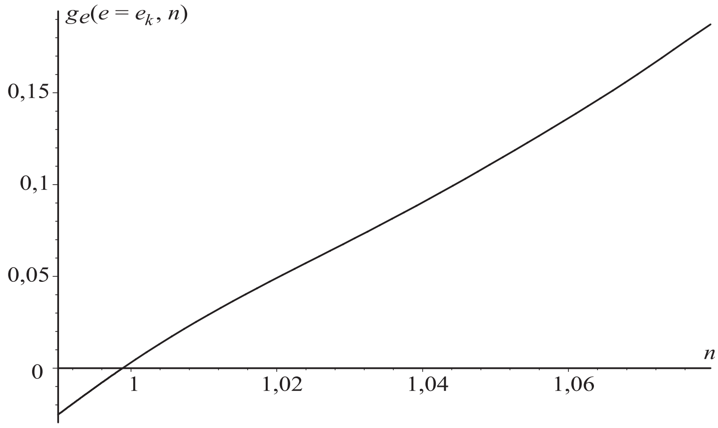

Рис. 3. Зависимость функции $g_e(e = e_k)$ от показателя политропы n

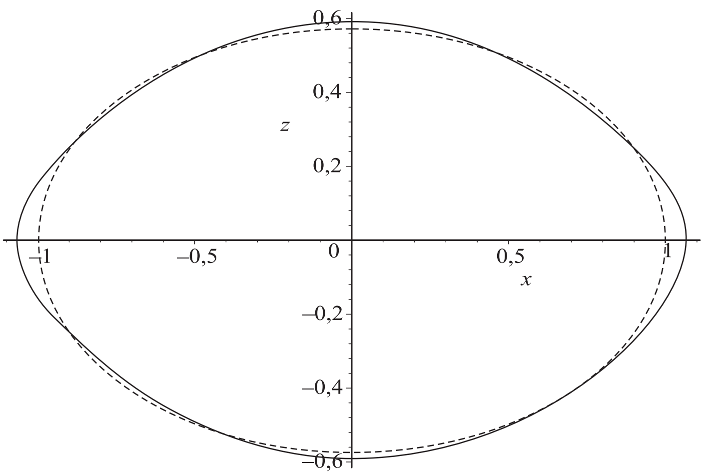

Рис. 4. Расчетная (сплошная линия) и аппроксимирующая (пунктирная линия) эллипсоидальные конфигурации при значениях $n = 1$, $e_k = 0,575$. На рисунке $x = x_1$, $z = \dfrac{1}{e_k} x_3$

Из проведенных нами оценок видно, что точки бифуркации существуют в интервале значений показателя политропы $0,9989 < n \leqslant 1,0795$, для которых $A(e_k, n) = 0$ и $g_e(e_k, n) > 0$.

Оцениваемая нами точность выполнения граничного условия в точках бифуркации как $\sqrt{\Lambda}$ при $n = 1$ ($e_k = 0,575$) равна $1,17 \cdot 10^{-2}$, расстояние от точек экватора конфигурации до центра в этом случае $r_e = 1,0661$, а погрешность аппроксимации в геометрическом подходе оценки погрешности выполнения граничного условия соответственно будет $r_e - 1 = 6,61 \cdot 10^{-2}$. В этом случае погрешность выполнения граничного условия будет приводить к погрешности в уравнениях порядка $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1) = 7,73 \cdot 10^{-4}$. При $n = 1,04$ ($e_k = 0,756$) $\sqrt{\Lambda} = 2,42 \cdot 10^{-3}$, а $r_e = 1,00457$, $\sqrt{\Lambda}(r_e - 1) = 1,11 \times 10^{-5}$, что указывает на высокую точность аппроксимации поверхности $\tilde{\rho} = 0$, возмущенной эллипсоидальной поверхностью δD, для значений показателя политропы из рассматриваемого промежутка $0,9989 < n \leqslant 1,0795$.

Наш результат, доказывающий существование точки бифуркации при $n = 1$, на первый взгляд противоречит работе [6]. Но точка $n = 1$ уклоняется от конца интервала $n = 0,9989$ на $1,1 \cdot 10^{-3}$, и с учетом погрешности вычислений противоречие снимается.

На рис. 4, 5 приведены сечения плоскостью $x_2 = 0$ аппроксимирующих сфероидов δD и найденных поверхностей $\tilde{\rho}(x_1^2 + x_2^2, x_3^2) = 0$ для значений $n = 1$ и $n = 1,04$ в точках бифуркации.

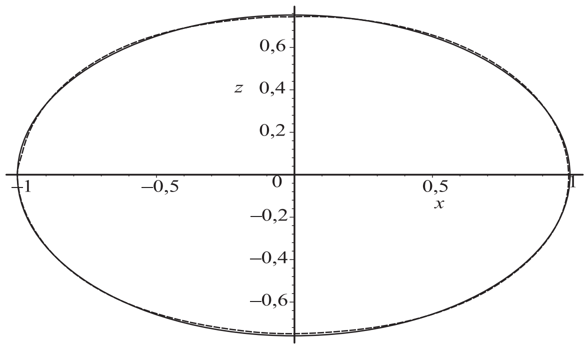

Рис. 5. Расчетная (сплошная линия) и аппроксимирующая (пунктирная линия) эллипсоидальные конфигурации при значениях $n = 1,04$, $e_k = 0,756$. На рисунке $x = x_1$, $z = \dfrac{1}{e_k} x_3$

Погрешность метода решения уравнения (1) при $n = 1,04$ у нас составила $2,53 \cdot 10^{-4}$. Левее точки $n = 1,04$ погрешность немного убывает, а правее возрастает, но остается такого же порядка.

С такой же степенью точности $\sim 10^{-4}$ функция $e_k(n)$ может быть аппроксимирована многочленом

$$e_k(n) = -190,616(n-1,04)^4 + 81,611(n-1,04)^3 + 20,784(n-1,04)^2 +$$
$$+5,227(n-1,04) + 0,757. \tag{14}$$

Аналогичное представление имеет место и для $\varepsilon_k(n)$:

$$\varepsilon_k(n) = 21,727(n-1,04)^4 - 12,041(n-1,04)^3 - 4,071(n-1,04)^2 -$$
$$-0,535(n-1,04) + 0,0282. \tag{15}$$

Согласно (14) функция $e_k(n)$ монотонно возрастает от $e_k = 0,571$ до 1 в интервале $0,9989 < n \leqslant 1,0795$. В этом интервале значений n $\varepsilon_k(n)$ монотонно убывает от $\varepsilon_k = 0,0442$ до 0.

Этот результат очень важен для медленно вращающихся ньютоновских политроп. Для любого малого значения угловой скорости ω найдется значение n из интервала $0,9989 < n \leqslant 1,0795$, для которого $\varepsilon = \varepsilon_k(n)$, $A(e_k, n) = 0$. При этом $X_k(n) = \left(\dfrac{\eta_m}{B(e_k, n)}\right)^{1/3}$. График функции $B_k(n) = B(e_k, n)$ представлен на рис. 6. Функция B_k монотонно растет от $1,1057 \cdot 10^{-3}$ $(n = 1)$ до $2,2199$ $(n = 1,0795)$. Значение параметра асимметрии в точке бифуркации наоборот будет в этом интервале примерно на два порядка уменьшаться. Переход $B_k(n)$ в отрицательную область значений происходит за пределами интересующего нас интервала значений $n < 0,9989$.

Из рис. 1 видно, что кривые $A(e, n = \mathrm{const})$, $0,9989 < n \leqslant 1,0795$, опускаются в сторону отрицательных значений с ростом показателя политропы n. Причем, если при $n = 1$ кривая $A(e, n)$ пересекает ось абсцисс в точке $e_k = 0,575$, то при $n = 1,0795$ точка пересечения будет в $e_k = 1$. Это соответствует $\varepsilon_k = 0$, т. е. отсутствию вращения в этой точке. В этой же точке $X = \left(\dfrac{\eta_m}{B(e = 1, n = 1,0795)}\right)^{1/3}$, т. е. так же, как и вблизи других точек бифуркации e_k, параметр асимметрии X будет иметь аномально большие значения с учетом малости $\eta_m \sim 10^{-9} - 10^{-12}$.

При $n > n_k = 1,0795$ ни для каких значений e $A(e, n)$ в нуль не обращается, оно уже для $e = 1$ отрицательно, и более того, с уменьшением e будет уменьшаться, удаляясь все больше от точки бифуркации $A(e, n) = 0$.

В области значений e, близких к единице, имеет место следующее аналитическое представление $A(e, n)$:

$$A(e, n) = 0,1872(e-1) + 1,3560(1,0795 - n) =$$
$$= -1,4872\varepsilon + 1,3560(1,0795 - n),$$

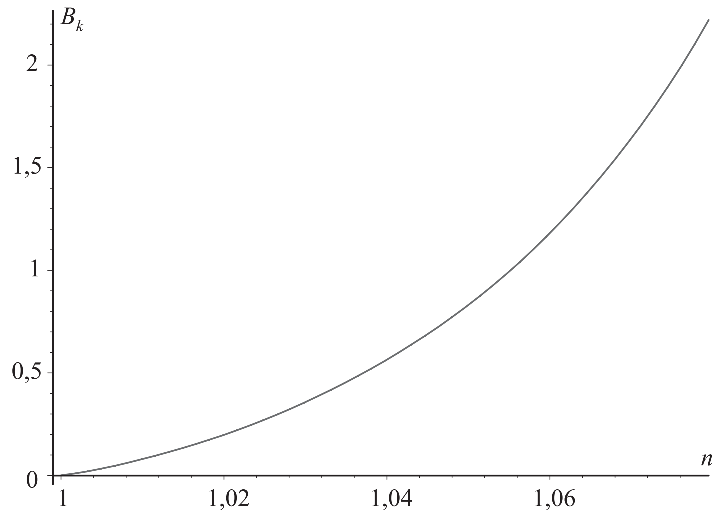

Рис. 6. Зависимость функции B_k от показателя политропы n

которое удобно использовать при описании эволюции конфигурации. Тогда с высокой степенью точности $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ из (11б) вблизи точки бифуркации имеет место следующее представление параметра асимметрии X:

$$X = X_k \left(1 + 0,2233 \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{X_k^2}\right), \quad \varepsilon_k = \varepsilon(e_k).$$

Остановимся более подробно на исследовании ньютоновской политропы в отсутствие магнитных натяжений ($\eta_m = 0$). Уравнение (11) будет в этом случае иметь три решения в интервале $0,9989 < n \leqslant 1,0795$, $X = 0$ и $X = \pm\sqrt{-\dfrac{A(e,n)}{B(e_k,n)}}$. Наиболее интересной для нас является точка $e_k = 1$ ($\varepsilon = 0$), в которой вращение отсутствует или очень медленное. В этой точке, $|n - 1,0795| \ll 1$, уравнение для параметра X будет иметь три решения $X = 0$ и $X = \pm 0,7816\sqrt{n - 1,0795}$.

Чтобы ответить на вопрос, какое решение будет физически реализовано, оценим полную энергию конфигурации E при фиксированной массе $m = m_0$ в зависимости от значений параметра X. Вместо E удобно вычислять безразмерную величину $\tilde{E}$:

$$\tilde{E} = \frac{E}{E_{\mathrm{sp}} e} = \frac{15E}{16\pi^2 G \rho_0^2 a_1^5 e} = \varepsilon \int\limits_D \tilde{\rho}(x_1^2 + x_2^2) d^3x + \frac{1}{2} \int\limits_D \tilde{\rho}\Phi d^3x + nK_0 \int\limits_D \tilde{\rho}^{1+\frac{1}{n}} d^3x, \tag{16}$$

$$m_0 = \rho_0 a_1^3 e \int\limits_D \tilde{\rho} d^3x,$$

$d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$. Заметим, что $E_{\rm sp} = -\dfrac{16\pi^2}{15} G\rho_0^2 a_1^5$ — гравитационная энергия однородной сферы радиусом a_1 и плотностью ρ_0. Первый член в (16) — энергия вращения, второй — гравитационная энергия, третий — внутренняя энергия.

При $e = 1$, $\varepsilon = 0$ из (16) имеем

$$\tilde{E}(e=1,n) = \frac{1}{2} \int\limits_D \tilde{\rho}\Phi d^3x + nK_0 \int\limits_D \tilde{\rho}^{1+\frac{1}{n}} d^3x, \tag{17}$$

$$m_0 = \rho_0 a_1^3 \int\limits_D \tilde{\rho} d^3x.$$

Составленная нами программа по вычислению $\tilde{E}(e=1, n=1,0795)$ дает следующий результат:

$$\tilde{E}(e=1, n=1,0795) = -0,0642(1-4,879X^2). \tag{18}$$

Отсюда следует, что решение с $X = 0$ будет иметь меньшую энергию и, следовательно, являться устойчивым по сравнению с асимметричным решением $X \neq 0$, у которого энергия выше при той же массе.

При меньших значениях n и e вопрос об энергии, а следовательно, устойчивости вращающейся политропы вблизи точек бифуркации при $X = 0$ и $X \neq 0$ остается открытым и требует отдельного рассмотрения.

Проведенное нами изучение вопроса о точках бифуркации вращающихся политроп показало, что точки бифуркации медленно вращающихся политроп $1 - e \ll 1$ возможны только при значениях показателей политроп, меньших и близких к значению $n_k = 1,0795$. Для намагниченных политроп в точках бифуркации параметр асимметрии X будет порядка $\eta_m^{1/3}$, что составляет $10^{-3} - 10^{-4}$ при $\eta_m \sim 10^{-9} - 10^{-12}$ и на шесть-восемь порядков превышает его значение порядка η_m вдали от точек бифуркации.

За счет только одного вращения аксиальная асимметрия в распределении плотности очень медленно вращающихся политроп не может возникнуть, несмотря на то, что точки бифуркации имеют место при определенных значениях показателя политропы n.

Отметим, что для всех пульсаров с периодом $T \geqslant 33$ мс e_k принадлежит узкому интервалу значений $1 < e_k < 0,9996$ для значений n тоже из очень узкого интервала $1,0795 > n > 1,0794$.

При этом роль магнитных натяжений для значения параметра асимметрии X будет определяющей, так как при $\eta_m = 0$ в вышеуказанном интервале значений e и n решения с $X \neq 0$ будет неустойчиво по отношению к переходу в симметричное состояние $X = 0$.

На конце рассматриваемого интервала $n = 1$ нужно уже быстрое вращение, приводящее к существенной деформации конфигурации, для достижения точки бифуркации. В этом случае $e_k = 0,575$, $\varepsilon_k = 0,0439$ и $T_k = 1,637 \cdot 10^{-3}$ с.

Как нами было отмечено, из реалистических уравнений состояния наиболее близко к политропе со значением показателя $1,0795$ уравнение состояния Рейда.

Проведенное исследование указывает на возможность интенсивного гравитационного излучения и от достаточно медленных пульсаров, но с сильным внутренним магнитным полем, если уравнение состояния их ядерного вещества будет близко к политропе с показателем $n = n_k = 1,0795$.

Чтобы понять физические причины возникновения точек бифуркации в отсутствие вращения $\varepsilon = 0$, $e = 1$, рассмотрим уравнение для параметра асимметрии X в центральной области политропы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ll 1$, в которой доминируют квадратичные по координатам члены. В линейном по X приближении оно будет иметь вид

$$A(e = 1, n)X = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) K_0(n) - \frac{1}{5}\right) X = \eta_m. \tag{19}$$

Из (19) мы видим, что вклады в левую часть этого уравнения от тяготения и давления имеют разные знаки. Как только они будут равны по абсолютной величине, то имеет место точка бифуркации. При этом вклад тяготения от n не зависит.

Если традиционно считается уравнение состояния заданным ($n = \mathrm{const}$), а точки бифуркации ищутся по параметрам e и ε, то в (19) у нас $e = \mathrm{const} = 1$, а показатель политропы изменяется. Легко заметить, что при малых значениях n вклад давления в (1) будет доминировать, так как $K_0(n = 0) = 1/3$.

При $n = 1,5$ $K_0(n = 1,5) = 0,0701$ и $(1 + 1/n)K_0(n) = 0,1168$, что меньше 1/5. Следовательно, точка бифуркации $e = 1$ по n удовлетворяет неравенству $n < 1,5$. Численные расчеты дают $K_0 = \dfrac{1}{5}\dfrac{n}{1+n}$ в точке $n = 1,014$. Полученное значение достаточно близко к $n = 1,0795$, но говорит о том, что предположение Джинса о доминировании квадратичных членов в уравнениях, определяющих асимметричную часть конфигурации, не выполняется достаточно хорошо, так как при учете более высоких степеней (до шестой включительно) существенно различие в критическом значении показателя политропы. Оно составляет достаточно заметную величину $0,065$, т. е. величину порядка 6–7 %.

Проведенное нами исследование с использованием принципиально новых символьно-численных методов решения уравнения (1) доказало существование точек бифуркации вращающихся политроп в новом диапазоне значений их показателя $0,9989 < n \leqslant 1,0795$. Возникает, следовательно, вопрос о более тщательном изучении этой задачи для ранее исследованной области значений $n < 0,808$. Мы рассмотрели также и эту задачу. Результаты получились следующие: критерий (13) для точек бифуркации вращающихся политроп выполняется для интервалов значений n наряду с рассмотренными в этой работе $0 \leqslant n < 0,1161$ и $0,5791 < n < 0,8012$.

Правая граница второго интервала очень близка к результатам Джеймса [6] $n_k = 0,808$. Сравнивая значения $\varepsilon_k(n = 0,8012) = 0,0522$ нашей работы и $\varepsilon_k(n = 0,808) = 0,0528$ работы [6], имеем очень хорошее согласие результатов.

Если $0,1161 < n < 0,5791$ или $0,8012 < n < 0,9989$, то в точках бифуркации $A(e,n) = 0$, $g_e < 0$, и, следовательно, вблизи экватора конфигурации уравнение гидростатического равновесия (1) не выполняется. Нетривиальная зависимость положения точек бифуркации от показателя политропы n очевидна и связана с сильной нелинейностью уравнения (1) по параметру n.

Подробное рассмотрение этого вопроса будет дано в последующих наших работах.

Авторы искренне благодарны А. Н. Сисакяну за поддержку исследований вращающихся сверхплотных гравитирующих конфигураций, Г. С. Бисноватому-Когану, обсуждение с которым вопроса о точках бифуркации вращающихся ньютоновских политроп послужило отправной точкой проведенного нами тщательного исследования этого вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П. Э.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Пер. с фр. Л.: Глав. ред. общетехн. лит., 1936. С. 376.

2. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1982.
Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven: Yale Univ. Press, 1969.

3. *Тассуль Ж. Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.
Tassoul J. L. Theory of rotating stars. Princeton: Princeton University Press, 1978.

4. *Tsvetkov V. P.* Gravitational Radiation of Rapidly Rotating Drop of Homogeneous Magnetized Gravitating Liquid near Bifurcation Point // Phys. Lett. A. 1984. V. 105. P. 34–35.

5. *Jeans J. H.* Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1919.

6. *James R. A.* The structure and stability of rotating gas masses // The Astrophys. J. 1964. V. 140. P. 552.

7. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // Мат. моделирование. 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.

8. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961.

Получено 19 июля 2007 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 11.09.2007.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,12. Уч.-изд. л. 1,36. Тираж 310 экз. Заказ № 55881.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/