

P4-2009-39

В. К. Игнатович, Л. Т. Н. Фан\*

УПРУГИЕ ВОЛНЫ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

---

\*Тульский государственный университет

Игнатович В. К., Фан Л. Т. Н.  
Упругие волны и их особенности

P4-2009-39

Единым образом рассмотрены упругие волны в изотропных и анизотропных средах, их отражение от границы раздела и возникновение поверхностных волн. Отмечены особенности упругих волн, которые до сих пор никогда не обсуждались в научной литературе.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И. М. Франка ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2009

Ignatovich V. K., Phan L. T. N.  
Elastic Waves and Their Peculiarities

P4-2009-39

Propagation, reflection from an interface of elastic waves in isotropic and anisotropic media, and some of their surface modes are considered in a unified way. Some of their peculiarities, which are not yet noted in scientific literature, are discussed.

The investigation has been performed at the Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2009

## ВВЕДЕНИЕ

В наше время суперколлайдера, квантовых компьютеров, квантовой телепортации, темной материи, темной энергии и безумной жажды «новой физики» (будто старая уже полностью исчерпала себя) акустика и упругие волны кажутся архаизмом. Эта наука представляется давно завершенной (см., например, [1]) и инженерно-прикладной. В ней нет предмета для исследований, она во всех учебниках излагается почти одинаково и потому кажется неинтересной. Однако при пристальном взгляде оказывается все не так.

Чтобы показать это, проведем сравнение теории упругих волн с нейтронной оптикой. В пустом пространстве нейтрон (пренебрегаем его спином) описывается плоской волной

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (1)$$

которая удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = -\Delta\psi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где для простоты приняты единицы  $\hbar = 2m = 1$ . Подстановка сюда плоской волны дает соотношение между  $k$  и  $\omega$ :  $\omega = k^2$ , которое, поделив на  $k^2$  (это мы будем делать в упругих волнах), можно также записать в виде

$$\frac{\omega}{k^2} - 1 = 0. \quad (3)$$

Упругие волны рассматриваются несколько иначе. Волна определяется вектором  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  смещения материальной точки с координатами  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ . Вектор  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  можно аналогично (1) также представить плоской волной

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (4)$$

которая отличается от (1) только вектором поляризации  $\mathbf{A}$ . В случае изотропных сред уравнение для  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + E \nabla(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (5)$$

где  $c$  и  $E$  — некоторые константы. Подстановка сюда (4) дает

$$\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A} + E \mathbf{k}(\mathbf{kA}). \quad (6)$$

Поделив обе части уравнения на  $k^2$ , получим уравнение

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2 k^2} - 1 \right) \mathbf{A} = E \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappaA}), \quad (7)$$

которое похоже на (3) за исключением правой части, где введен единичный вектор  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ . Собственно отличие двух уравнений для распространения волн в безграничной среде по существу приводит только к различным зависимостям  $\omega(k)$ .

Самое интересное возникает при наличии неоднородности пространства в виде границы раздела. Пусть, например, бесконечное пространство разделено на две части плоскостью, перпендикулярной оси  $z$ . В нейтронной физике различие полупространств описывается введением потенциала  $u(z) = \Theta(z > 0)u_0$ , где  $u_0$  — константа, а  $\Theta(z)$  — ступенчатая функция, равная единице, когда условие в ее аргументе выполнено, и нулю в ином случае. С потенциалом уравнение Шредингера имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = [-\Delta + \Theta(z > 0)u_0] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

и его решение дается выражением

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel} - i\omega t) \times \\ & \times \left( \Theta(z < 0) [e^{ik_{\perp} z} + R e^{-ik_{\perp} z}] + \Theta(z > 0) T e^{ik'_{\perp} z} \right), \quad (9) \end{aligned}$$

где  $R, T$  — амплитуды отражения и преломления,  $k_{\perp} = \sqrt{\omega - k_{\parallel}^2}$ ,  $k'_{\perp} = \sqrt{\omega - k_{\parallel}^2 - u_0}$ , а  $\mathbf{k}_{\parallel}$  — компоненты волнового вектора, параллельные границе раздела. Заметим, что каждая из волн в области  $z < 0$  имеет вид  $\exp(iKz)$ , где  $K$  ( $K = \pm k_{\perp}$ ) является решением уравнения  $\omega - k_{\parallel}^2 - K^2 = 0$ , которое также можно записать в виде

$$\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} - 1 - q^2 = 0, \quad (10)$$

где  $q = K/k_{\parallel}$ . Такая перезапись тривиальна и для нейтронной оптики не имеет особого смысла, но в случае упругих волн оказывается очень полезной.

Преломленная волна  $\exp(ik'_\perp z)$  в случае, когда  $k_\perp^2 < u_0$  при действительном  $u_0$ , экспоненциально затухает в области  $z > 0$ , т.е. имеет вид  $\exp(-k''_\perp z)$ , где  $k''_\perp = \sqrt{u_0 - k_\perp^2}$  — чисто действительная величина. Заметим, что экспоненциально затухающая волна  $\exp(-Kz)$  при отсутствии потерь не может иметь комплексного показателя, т.е. она не может быть вида  $\psi = \exp(-Kz + iK'z)$ , поскольку такое поведение соответствовало бы нарушению закона сохранения энергии. Действительно, при наличии  $K' > 0$  в направлении  $z > 0$  возникал бы поток частиц, пропорциональный  $j = K'|\psi|^2 = K'\exp(-2Kz)$ , который бы экспоненциально растворялся в среде без видимых на то оснований. Оказывается, что упругие волны, и это нам представляется удивительным, могут иметь комплексный показатель затухания и при этом не нарушать закон сохранения энергии.

В следующем разделе будет сформулирована общая теория упругих волн как в изотропной, так и в анизотропной средах. В разделе 2 будут исследованы волны в изотропных средах, их отражение и преломление на границе раздела двух изотропных сред, отражение от свободной поверхности, и возникновение поверхностных волн. В разделе 3 рассмотрены волны в анизотропных средах и продемонстрированы их удивительные свойства, которые на первый взгляд противоречат интуиции и которые до сих пор не обсуждались в научной литературе.

## 1. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ УПРУГИХ ВОЛН

Исходным пунктом теории упругих волн является плотность свободной энергии упругой деформации [1]. В случае изотропных сред она равна

$$F = \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2, \quad (11)$$

где  $u_{ij}$  — тензор деформации

$$u_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (12)$$

$x_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты, а  $\lambda$  и  $\mu$  — два параметра, называемые упругими постоянными Ламэ.

В качестве анизотропных сред обычно рассматриваются кристаллы со многими феноменологическими постоянными [2, 3], однако для того, чтобы понять отличие анизотропных сред от изотропных, достаточно ввести одно выделенное направление, скажем, вдоль единичного вектора  $\mathbf{a}$ , и ввести еще одну упругую постоянную, скажем  $\zeta$ , которая имеет такую же размерность

плотности энергии, как и постоянные Ламэ. Тогда свободную энергию можно записать как [4]

$$F = \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu u_{lj}^2 - \zeta (a_j u_{jl})^2, \quad (13)$$

где анизотропная часть представлена квадратом вектора с компонентами  $a_j u_{jj}$ , а знак перед  $\zeta$  не обязательно должен быть отрицательным.

С помощью свободной энергии определяется тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}, \quad (14)$$

который в общем случае выражается через тензор деформации с помощью соотношения

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{kl}, \quad (15)$$

где  $c_{ijkl}$  — некий феноменологический тензор, симметричный относительно перестановок индексов

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \quad (16)$$

В случае изотропных сред тензор  $c_{ijkl}$ , как следует из (11) и (14), равен

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ik} \delta_{lj}), \quad (17)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, равный единице при  $i = j$  и нулю — в ином случае. В случае анизотропных сред из (13) и (14) следует

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{ll} + 2\mu u_{ij} - 2\zeta (a_i u_{jl} a_l + a_l u_{li} a_j), \quad (18)$$

т. е.

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ik} \delta_{lj}) - \zeta (a_i \delta_{jl} a_k + \delta_{il} a_j a_k + a_i \delta_{jk} a_l + \delta_{ik} a_j a_l). \quad (19)$$

Заметим, что тензор (19) удовлетворяет всем требованиям симметрии (16) и при  $\zeta \rightarrow 0$  он переходит в (17).

Декартовы компоненты  $u_j(\mathbf{r}, t)$  вектора смещения удовлетворяют уравнениям Ньютона

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_j(\mathbf{r}, t) = F_j, \quad (20)$$

где  $\rho$  — плотность вещества, а декартовы компоненты  $F_j$  плотности силы  $\mathbf{F}$  выражаются через тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ :

$$F_j = \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{jl}(\mathbf{r}, t). \quad (21)$$

С тензором напряжений (18) уравнение Ньютона (20) записывается в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \nabla_j \sigma_{ij} = \mu [\Delta u_i + \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{u})] + \lambda \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \zeta (a_i [\Delta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u})] + (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 u_i + \nabla_i (\mathbf{a} \cdot \nabla) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})). \quad (22)$$

Вектор смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  обычно представляется в виде суммы двух слагаемых:  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ , первое из которых представляет собой градиент скалярного,  $\varphi$ , а второе ротор векторного,  $\boldsymbol{\psi}$ , потенциалов. Мы отойдем от стандарта и будем представлять вектор смещения единым образом в виде плоской волны (4). При этом теория упругих волн значительно упрощается. Конечно, упругие волны вещественны, поэтому они представляются вещественной частью плоской волны (4). Далее будет важно, где нужно быть особенно внимательными относительно вещественности, но пока никаких трудностей у нас не будет. Подстановка (4) в (22) приводит к уравнению для вектора поляризации  $\mathbf{A}$ :

$$\rho \omega^2 \mathbf{A} = \mu k^2 \mathbf{A} + (\lambda + \mu) \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \zeta (\mathbf{a} [k^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})] + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{A} + \mathbf{k} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A})]). \quad (23)$$

Удобно привести его к безразмерному виду (см. (3), (7)), поделив на  $\mu k^2$ . В результате получим

$$\Omega^2 \mathbf{A} = E \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A}) - \xi (\mathbf{a} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a}) (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A})] + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a}) [(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{A} + \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A})]), \quad (24)$$

где введена стандартная скорость  $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$  распространения поперечных волн в изотропных средах, фазовая скорость волны  $v_p = \omega/k$ , безразмерное отношение  $v = v_p/c_t$ , безразмерные параметры  $E = (\lambda + \mu)/\mu$ ,  $\xi = \zeta/\mu$ , единичный вектор  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$  и переменная  $\Omega^2 = v^2 - 1$ . В следующем разделе мы рассмотрим случай изотропных сред, когда  $\xi = 0$ .

## 2. ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В изотропной среде уравнение (24) имеет вид

$$\Omega^2 \mathbf{A} = E \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A}). \quad (25)$$

При заданном направлении распространения волны  $\boldsymbol{\kappa}$  можно ввести два взаимно ортогональных единичных вектора  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , которые ортогональны и  $\boldsymbol{\kappa}$ . Вектор поляризации  $\mathbf{A}$  можно представить в полученном ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\kappa}$  в виде

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \beta \boldsymbol{\kappa}. \quad (26)$$

Умножив уравнение (25) последовательно на  $\mathbf{e}_{1,2}$  и  $\boldsymbol{\kappa}$ , получим три линейных однородных уравнения для координат  $\alpha_{1,2}$  и  $\beta$ :

$$\Omega^2 \alpha_{1,2} = 0, \quad [\Omega^2 - E] \beta = 0. \quad (27)$$

Из первого уравнения получаем  $\Omega^2 = 0$ ,  $v^2 = 1$  и  $\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{e}_{1,2}$ . Эти два решения соответствуют сдвиговым поперечным модам, распространяющимся со скоростью  $v_p = c_t$ . Из третьего уравнения, которое отвечает продольной моде,  $\mathbf{A}_3 = \boldsymbol{\kappa}$ , следует  $v^2 = E + 1$ , и скорость распространения этой моды равна  $v_p^2 = c_t^2 = (E + 1)c_t^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ .

Два единичных ортогональных вектора  $\mathbf{e}_{1,2}$  лежат в плоскости, перпендикулярной единичному вектору  $\boldsymbol{\kappa}$  распространения волны, но их азимутальный угол в этой плоскости произволен. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы облегчить решение тех или иных задач. В частности, далее при исследовании отражения от плоскости раздела двух сред удобно положить:  $\mathbf{e}_1$  перпендикулярен плоскости падения, а  $\mathbf{e}_2$  — внутри нее.

**2.1. Отражение от границы раздела.** Предположим, что бесконечная среда разделена на две части с разными упругими постоянными плоскостью, перпендикулярной оси  $z$ . Полупространство  $z < 0$  характеризуется постоянными  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ , а полупространство  $z > 0$  — постоянными  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $\rho'$ . На границе раздела  $z = 0$  будет происходить отражение и преломление волн. Если падающая из области  $z < 0$  на границу раздела плоская волна  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$  имеет моду (поляризацию)  $\mathbf{A}_j$ , то полная система волн, возникающая на границе раздела, равна

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \exp(i\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - i\omega t) \times \\ \times \left[ \left( \mathbf{A}_j e^{ik_{\perp}z} + \sum_{l=1}^3 r_{lj} \mathbf{A}_{lr} e^{-ik_{l\perp}z} \right) \Theta(z < 0) + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^3 t_{lj} \mathbf{A}'_l e^{ik'_{l\perp}z} \Theta(z > 0) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

где  $r_{lj}$ ,  $t_{lj}$  — амплитуды отражения и преломления волн моды  $l$ . Нормальные к границе раздела компоненты  $k_{l\perp}$  и  $k'_{l\perp}$  зависят от номера моды  $l$ . Из (27) следует, что

$$\begin{aligned} k_{1,2\perp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k_{\parallel}^2}, \quad k'_{1,2\perp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t'^2} - k_{\parallel}^2}, \\ k_{3\perp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k_{\parallel}^2}, \quad k'_{3\perp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t'^2} - k_{\parallel}^2}, \quad (29) \end{aligned}$$

где  $c_t^2 = \mu/\rho$ ,  $c_t'^2 = [\lambda + 2\mu]/\rho$ , и аналогично для штрихованных величин.



Амплитуды отражения и преломления определяются с помощью граничных условий. Первым условием является требование непрерывности вектора смещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'|_{z=0} \rightarrow \mathbf{A}_j + \sum_{l=1}^3 r_{lj} \mathbf{A}_{lr} = \sum_{l=1}^3 t_{lj} \mathbf{A}'_l. \quad (30)$$

Вторым граничным условием является требование непрерывности вектора напряжения  $\Sigma$  с компонентами  $\Sigma_j = \sigma_{jl} n_l$ , или, согласно (18),

$$\Sigma = \lambda \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu[\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u}], \quad (31)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . Непрерывность вектора  $\Sigma$  эквивалентна условию

$$\mathbf{B}_j + \sum_{l=1}^3 r_{lj} \mathbf{B}_{lr} = \sum_{l=1}^3 t_{lj} \mathbf{B}'_l, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{n}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \mu[\mathbf{k}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{A}], \quad (33)$$

а  $\mathbf{k}$  различаются для разных мод. Заметим, что благодаря условию (32) волновое уравнение (22) непрерывно продолжается из одного полупространства в другое. Если бы оно не удовлетворялось, дифференцирование  $\sigma_{ij}$  по  $z$  породило бы члены, пропорциональные  $\delta(z)$ -функции, и волновое уравнение стало бы неоднородным с источниками на поверхности раздела.

Чтобы найти амплитуды отражения и преломления, нужно умножить оба уравнения (30) и (32) на три взаимно-перпендикулярных единичных вектора. В результате получатся шесть линейных неоднородных уравнений для шести переменных. В качестве таких трех векторов удобно взять 1) вектор нормали  $\mathbf{n}$ ; 2) вектор, параллельный границе раздела в плоскости падения  $\boldsymbol{\tau}$ , параллельный  $\mathbf{k}_{\parallel}$ , как показано на рис. 1, *a*; 3) вектор  $\mathbf{e}_1$ , перпендикулярный плоскости падения. На рис. 1 он направлен к читателю.

Прежде чем считать амплитуды отражения и преломления, легко определить углы, под которыми идут все волны от границы раздела. Например, пусть падающая волна — продольная, как показано на рис. 1, *б*. Ее волновой вектор равен  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_{\perp})$ , а вектор поляризации —  $\mathbf{A}_3 = \boldsymbol{\kappa}_3 = (k_x, 0, k_{\perp})/k$ , где  $k = \omega/c_l$ . Продольная отраженная волна распространяется в зеркальном направлении. Ее волновой вектор равен  $\mathbf{k}_s = (k_x, 0, -k_{\perp})$ , а поляризация —  $\mathbf{A}_{3r} = \boldsymbol{\kappa}_{3r} = (k_x, 0, -k_{\perp})/k$ . Другой отраженной волной будет поперечная с волновым вектором  $\mathbf{k}_{2r} = (k_x, 0, -k_{2\perp})$ , (29), и поляризацией —  $\mathbf{A}_{2r} = (-k_{2\perp}, -k_x)c_t/kc_l$ , где  $k_{2\perp} = \sqrt{\omega^2/c_t^2 - k_x^2}$ . Упругие волны в противоположность квантовым волнам частиц имеют тем больший волновой вектор, чем меньше их скорость. Поэтому угол скольжения  $\varphi_2$  отраженной поперечной волны больше зеркального угла  $\varphi_3$  продольной. Углы определяются

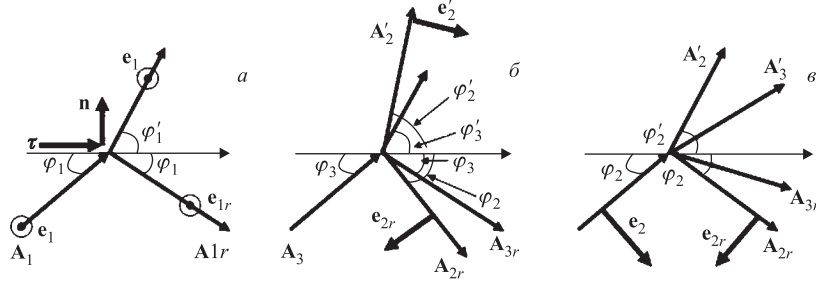


Рис. 1. Отражение волн от границы раздела между двумя изотропными средами. а) Падающая волна имеет поперечную поляризацию  $\mathbf{A}_1$ . При отражении и преломлении не возникают другие моды. б) Падающая волна продольна  $\mathbf{A}_3$ . На границе раздела возникают поперечные моды  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{A}'_2$ ; в) Падающая волна имеет поперечную поляризацию  $\mathbf{A}_2$ . Граница раздела порождает продольные волны  $\mathbf{A}_3$  и  $\mathbf{A}'_3$

исходя из требования, что компонента волнового вектора  $k_x$  одинакова для всех волн. Поэтому  $(\omega/c_t) \cos \varphi_2 = k_x = (\omega/c_l) \cos \varphi_3$ , откуда следует, что  $\varphi_2 > \varphi_3$ . Таким же образом определяются углы скольжения преломленных волн:  $\cos \varphi'_2 = \cos \varphi_3 (c'_t/c_l)$ .

Чтобы описать поляризацию отраженных и преломленных волн, необходимо задать базисную правую тройку единичных ортогональных векторов  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ . Эти три вектора связаны друг с другом векторным произведением:  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}$ , и т.д., поэтому на рис. 1 отраженная волна  $\mathbf{A}_{2r}$  имеет поляризацию  $\mathbf{A}_{2r} = \mathbf{e}_{2r} = \boldsymbol{\kappa}_{2r} \times \mathbf{e}_1$ . Поскольку  $\boldsymbol{\kappa}_2 = (\mathbf{n}k_{2\perp} + \boldsymbol{\tau}k_{\parallel})/k_2$ , и  $[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1] = \boldsymbol{\tau}$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 = [\boldsymbol{\kappa}_2 \times \mathbf{e}_1] &= \frac{k_{2\perp} \boldsymbol{\tau} - k_{\parallel} \mathbf{n}}{k_2}, & \mathbf{A}_{2r} = [\boldsymbol{\kappa}_{2r} \times \mathbf{e}_1] &= -\frac{k_{2\perp} \boldsymbol{\tau} + k_{\parallel} \mathbf{n}}{k_2}, \\ \mathbf{A}_{3r} &= \frac{-k_{3\perp} \mathbf{n} + k_{\parallel} \boldsymbol{\tau}}{k_3}. \end{aligned} \quad (34)$$

2.1.1. *Отражение моды  $\mathbf{A}_1$ .* Простейший способ отражения относится к моде  $\mathbf{A}_1$ . Ее поляризация направлена вдоль  $\mathbf{e}_1$ . После умножения уравнений (30) и (32) на  $\mathbf{e}_1$  получаем

$$1 + r_{11} = t_{11}, \quad \mu_1(1 - r_{11})k_{\perp} = \mu_2 t_{11} k'_{\perp}, \quad (35)$$

откуда тотчас же следует, что

$$r_{11} = \frac{\mu_1 k_{\perp} - \mu_2 k'_{\perp}}{\mu_1 k_{\perp} + \mu_2 k'_{\perp}}, \quad (36)$$

где  $k_{\perp} = \sqrt{\omega^2/c_t^2 - k_{\parallel}^2}$ , и  $k'_{\perp} = \sqrt{\omega^2/c_t'^2 - k_{\parallel}^2}$ . Отражение этой моды зеркально и не сопровождается появлением других мод.

*2.1.2. Отражение моды  $\mathbf{A}_2$ .* Более интересен случай, когда падающая волна имеет моду  $\mathbf{A}_2$ . Ее отражение и преломление сопровождается появлением продольной моды  $\mathbf{A}_{3r}$ , а поскольку скорость  $c_l$  продольной моды  $\mathbf{A}_{3r}$  больше скорости  $c_t$  зеркально отраженной моды  $\mathbf{A}_{2r}$ , то угол скольжения  $\varphi_3$  продольной моды меньше угла  $\varphi_2$  моды  $\mathbf{A}_{2r}$ , как показано на рис. 1, *в*. Можно представить себе, что при некотором критическом угле падения  $\varphi_2 = \varphi_c$  угол  $\varphi_3$  становится равным нулю. Тогда продольная волна в области  $z < 0$  будет распространяться вдоль поверхности раздела. Поскольку  $\cos \varphi_3 = (c_l/c_t) \cos \varphi_2 \leq 1$ , то критический угол  $\varphi_c$  равен  $\varphi_c = \arccos(c_t/c_l)$ . Аналогичные рассуждения применимы и к преломленной продольной волне. Поэтому можно ожидать, что при  $\varphi_2 < \arccos(\max(c_t/c_l, c_t'/c_l'))$  продольная волна становится чисто поверхностной.

Чтобы найти амплитуды всех волн, нужно уравнения (30) и (32) умножить последовательно на  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ . В результате получатся четыре уравнения для четырех неизвестных  $r_{22}$ ,  $r_{32}$ ,  $t_{22}$  и  $t_{32}$ , которые можно разрешить аналитически. Однако это довольно скучная работа, которую лучше передоверить компьютеру.

Аналитическое решение более просто в случае отражения волн от свободной поверхности. В этом случае мы имеем одно граничное условие

$$\mathbf{B}_2 + r_{22}\mathbf{B}_{2r} + r_{32}\mathbf{B}_{3r} = 0, \quad (37)$$

и нам нужно определить только две амплитуды  $r_{22}$  и  $r_{32}$ . Последовательным умножением (37) на  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  с учетом (33) и (34) мы получаем два уравнения

$$\begin{aligned} -2 \frac{k_{2\perp} k_{\parallel}}{k_2} (1 - r_{22}) + r_{32} \frac{(E-1)k_3^2 + 2k_{3\perp}^2}{k_3} = \\ = -\frac{2k_{2\perp} k_{\parallel}}{k_2} (1 - r_{22}) + r_{32} \frac{k_2^2 - k_{\parallel}^2}{k_3} = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{k_2^2 - 2k_{\parallel}^2}{k_2} (1 + r_{22}) - 2r_{32} \frac{k_{3\perp} k_{\parallel}}{k_3} = 0, \quad (39)$$

из которых следует

$$\begin{aligned} r_{32} &= \frac{k_3}{k_2} \frac{4k_{2\perp} k_{\parallel} (k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)}{4k_{3\perp} k_{2\perp} k_{\parallel}^2 + (k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)^2}, \\ r_{22} &= \frac{4k_{3\perp} k_{2\perp} k_{\parallel}^2 - (k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)^2}{4k_{3\perp} k_{2\perp} k_{\parallel}^2 + (k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

При угле скольжения падающей волны меньше критического  $\cos \varphi_2 > \cos \varphi_c = c_t/c_l$ , когда  $k_{3\perp}^2 < 0$  и  $k_{3\perp} = iK_l$ , продольная волна оказывается чисто поверхностной, поскольку она сосредоточена в узком слое толщины  $l = 1/K_l$ , где  $K_l = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \omega^2/c_l^2}$ . Другими словами: у нас появляется чисто продольная поверхностная волна  $\mathbf{u}_{ls}$  с поляризацией  $\mathbf{A}_{ls}$ ! Но что за странная эта волна! Поскольку частота  $\omega$  падающей волны произвольна, а  $k_{\parallel} < \omega/c_t$ , поверхностная продольная волна должна иметь те же самые  $\omega$  и  $k_{\parallel}$ , поэтому ее скорость вдоль поверхности  $c_p = \omega/k_{\parallel}$  может быть произвольной в интервале  $c_t < c_p < c_l$ , т.е. это не релеевская волна, для которой характерна фиксированная скорость  $c_R < c_t$ !

Тем не менее это действительно продольная поверхностная волна. Ее волновой вектор комплексен:  $\mathbf{k} = k_{\parallel}\boldsymbol{\tau} + iK_l\mathbf{n}$ , и потому ее поляризация, пропорциональная этому вектору, имеет компоненты и вдоль и перпендикулярно границе раздела:

$$\mathbf{A}_{ls} = (k_{\parallel}\boldsymbol{\tau} - iK_l\mathbf{n})/\sqrt{k_{\parallel}^2 + K_l^2}, \quad (41)$$

Нет ничего странного в том, что вектор поляризации имеет комплексную величину. Это означает, что вещественная часть волны, которая должна соответствовать вещественному вектору смещения, пропорциональна

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ls} &\propto \text{Re} [(k_{\parallel}\boldsymbol{\tau} - iK_l\mathbf{n})e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} + K_l z - i\omega t}] = \\ &= [(k_{\parallel}\boldsymbol{\tau} \cos(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - \omega t) + K_l\mathbf{n} \sin(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - \omega t)] e^{K_l z}, \quad (42) \end{aligned}$$

т.е. фаза колебания вдоль нормали  $\mathbf{n}$  сдвинута на  $\pi/2$  по отношению к фазе колебаний вдоль вектора  $\boldsymbol{\tau}$  на границы раздела.

Аналогично продольной волне можно определить и поверхностную поперечную волну, хоть она при отражениях от свободной поверхности и не образуется. Ее поляризация равна

$$\mathbf{A}_{ts} = (k_{\parallel}\mathbf{n} + iK_t\boldsymbol{\tau})/\sqrt{k_{\parallel}^2 + K_t^2}, \quad (43)$$

где  $K_t = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \omega^2/c_t^2}$ . Соответствующий вещественный вектор смещения пропорционален

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ts} &\propto \text{Re} [(k_{\parallel}\mathbf{n} + iK_t\boldsymbol{\tau})e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} + K_t z - i\omega t}] = \\ &= [(k_{\parallel}\mathbf{n} \cos(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - \omega t) - K_t\boldsymbol{\tau} \sin(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - \omega t)] e^{K_t z}, \quad (44) \end{aligned}$$

а скорость распространения вдоль поверхности раздела может быть произвольной, но меньше  $c_t$ .

Заметим, что показатели затухания и той и другой поверхностных волн являются чисто вещественными, и никаких странностей, связанных с комплексным показателем затухания, о которых шла речь во введении, пока не появляется.

Когда продольная волна становится поверхностной, амплитуда,  $r_{22}$  отражения поперечной моды  $\mathbf{A}_{2r}$  оказывается равной

$$r_{22} = -\frac{(k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)^2 - 4iK_l k_{2\perp} k_{\parallel}^2}{(k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)^2 + 4iK_l k_{2\perp} k_{\parallel}^2}, \quad (45)$$

т. е. она оказывается единичным комплексным числом, которое соответствует полному отражению падающей волны.

*2.1.3. Распределение энергии между двумя отраженными волнами.* В силу закона сохранения энергии полная плотность потока энергии отраженных волн вдоль нормали к поверхности должна быть равна плотности потока энергии в падающей волне. Проверим, выполняется ли это требование.

Плотность потока энергии упругой волны определяется вектором Умова–Пойнтинга  $\mathbf{j}$  с компонентами

$$j_i = -\sigma_{il}^* du_l/dt, \quad (46)$$

где \* означает комплексное сопряжение. Подстановка сюда (18) дает

$$\frac{\mathbf{j}}{\omega\mu} = i \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}^*) + \nabla_*(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \right\}, \quad (47)$$

где  $\nabla_*$  означает оператор  $\nabla$ , действующий только на вектор  $\mathbf{u}^*$ . Подставив сюда плоскую волну (4), получим

$$\frac{\mathbf{j}}{\omega\mu} = \left( \frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) \mathbf{A}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{k} = E\mathbf{A}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{k}. \quad (48)$$

Отметим, что направление потока определяется не только направлением волнового  $\mathbf{k}$ , но и направлением вектора поляризации  $\mathbf{A}$ .

Нормальная компонента потока равна

$$\frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})}{\mu\omega} = E(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + k_{\perp}. \quad (49)$$

В случае падающей моды  $\mathbf{A}_2$  ее поток по направлению к границе раздела равен  $j_0 = \mu\omega k_{\perp 2} = \rho\omega c_t^2 k_{\perp 2}$ . Отраженные плотности потоков двух мод равны соответственно  $j_{2r} = \rho c_t^2 |r_{22}|^2 k_{\perp 2}$ ,  $j_{3r} = \rho c_t^2 |r_{32}|^2 k_{\perp 3}$ . Закон сохранения энергии требует

$$|r_{22}|^2 + |r_{32}|^2 \frac{c_t^2 k_{\perp 3}}{c_t^2 k_{\perp 2}} = 1. \quad (50)$$

Подстановка (40) показывает, что это требование удовлетворяется.

Когда продольная волна становится поверхностной, ее поток энергии от поверхности прекращается. Поэтому закон сохранения энергии (50) приводится к виду

$$|r_{22}|^2 = 1, \quad (51)$$

и, согласно (45), энергия сохраняется и в этом случае.

**2.2. Поверхностная релеевская волна.** Выше нам уже встречались поверхностные волны. Они удовлетворяют волновому уравнению, но не существуют независимо без падающей и отраженной волн, потому что без этих волн они не удовлетворяют граничным условиям. Релеевская поверхностная волна существует независимо, без падающей волны, и ее скорость  $c_R = \omega/k_{\parallel} < c_t$  имеет фиксированную величину. Чтобы найти  $c_R$ , представим выражение (37) в виде

$$\frac{1}{r_{22}}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_{2r} + \frac{r_{32}}{r_{22}}\mathbf{B}_{3r} = 0, \quad (52)$$

где  $r_{22}$  и  $r_{32}$  указаны в (40). Скорость релеевской волны получается из (52). Она соответствует таким значениям  $\omega/k_{\parallel}$ , при которых

$$\frac{1}{r_{22}} = 0. \quad (53)$$

В этом случае падающая волна исчезает, и все волновое поле состоит из поверхностных волн. Из (45) следует, что (53) выполняется, если

$$4k_{3\perp}k_{2\perp}k_{\parallel}^2 + (k_2^2 - 2k_{\parallel}^2)^2 = 0. \quad (54)$$

Поскольку для поверхностных волн  $k_{2\perp}^2 = \omega^2/c_t^2 - k_{\parallel}^2 < 0$ , и  $k_{3\perp}^2 = \omega^2/c_l^2 - k_{\parallel}^2 < 0$ , то уравнение (54) приводится к виду

$$4\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\zeta^2x^2} = (2-x^2)^2, \quad (55)$$

где  $x = c_R/c_t$ ,  $c_R = \omega/k_{\parallel}$ , и  $\zeta = c_t/c_l$ .

При выполнении (55) полный вектор смещения (вектор смещения релеевской волны) равен

$$\mathbf{u}_R \propto \frac{1}{r_{22}}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_{2r} + \frac{r_{32}}{r_{22}}\mathbf{u}_{3r} = \mathbf{u}_{ts} + \frac{r_{32}}{r_{22}}\mathbf{u}_{ls}, \quad (56)$$

где  $\mathbf{u}_{ts}$  и  $\mathbf{u}_{ls}$  распространяются вдоль поверхности с одинаковой скоростью  $\omega/k_{\parallel} = c_R$ . Подстановка (40), (42) и (44) в (56) показывает, что вектор смещения  $\mathbf{u}_R(\mathbf{r}, t)$  в релеевской волне пропорционален [5]

$$\begin{aligned} & \mathbf{n} \cos(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - \omega t)[2q_t q_l e^{K_t z} - (1 + q_t^2)e^{K_t z}] - \\ & - \boldsymbol{\tau} \sin(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel} - \omega t)q_t[2e^{K_t z} - (1 + q_t^2)e^{K_t z}]. \end{aligned} \quad (57)$$

где  $K_t = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \omega^2/c_t^2}$ ,  $K_l = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \omega^2/c_l^2}$ , и  $q_{t,l} = K_{t,l}/k_{\parallel}$ .

Аналогичным образом находится скорость поверхностной волны Стоуни, которая возникает не на свободной поверхности, а на поверхности раздела двух изотропных сред. Принципиальных трудностей для ее вычисления нет, но из-за технических трудностей мы ее здесь не приводим.

Заметим, что согласно (33) поверхностной волны с поляризацией, лежащей в плоскости поверхности раздела и перпендикулярной направлению распространения, не существует, поскольку для такой волны невозможно удовлетворить граничным условиям.

**2.3. Аналогия с квантовой механикой.** Прием, который был использован здесь для определения скорости релеевской волны, используется в квантовой механике для нахождения связанных состояний частицы. Представим себе одномерную потенциальную яму, показанную на рис. 2, и рассеяние на ней падающей слева частицы. В результате рассеяния образуется отраженная и прошедшая волны с амплитудами

$$\begin{aligned} R &= r_0 \frac{1 - \exp(2ik'd)}{1 - r_0^2 \exp(2ik'd)}, \\ T &= \exp(ik'd) \frac{1 - r_0^2}{1 - r_0^2 \exp(2ik'd)}, \end{aligned} \quad (58)$$

где  $k' = \sqrt{k^2 + u}$  — волновой вектор внутри ямы, а  $r_0 = (k - k')/(k + k')$  — амплитуда отражения от края ямы. Для определения связанных состояний нужно представить волновую функцию в виде

$$\begin{aligned} \psi(z) = \Theta(z < 0) \left[ \frac{1}{R} \exp(ikz) + \exp(-ikz) \right] + \\ + \Theta(z > d) \frac{T}{R} \exp(ik(z - d)). \end{aligned} \quad (59)$$

Связанные состояния соответствуют таким  $k$ , для которых выполняется  $1/R = 0$ , что эквивалентно уравнению  $r_0^2 \exp(2ik'd) = 1$ .

Таким образом, можно сказать, что поверхностная волна — это эквивалент частицы в связанном состоянии.

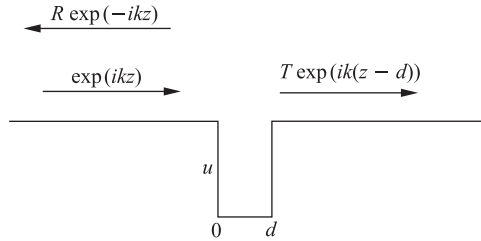


Рис. 2. Рассеяние частицы на потенциальной яме

### 3. ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ ( $\xi \neq 0$ )

В анизотропных средах, так же как в изотропных, для описания вектора поляризации нужен базис. В изотропных средах базис  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$  содержал некоторый произвол, поскольку векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  можно было поворачивать на произвольный угол в плоскости, перпендикулярной вектору распространения волны  $\boldsymbol{\kappa}$ . Только при рассмотрении отражения от границы раздела этот произвол устранялся вследствие появления плоскости падения. В анизотропных средах всегда имеется выделенная плоскость, содержащая направление распространения волны  $\boldsymbol{\kappa}$  и вектор анизотропии  $\mathbf{a}$ . Поэтому направления векторов  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  фиксируются этой плоскостью. Удобно выбрать  $\mathbf{e}_1$  перпендикулярным плоскости  $(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{a})$ , тогда при правой ориентации базисной тройки  $\mathbf{e}_2 = [\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_1]$ .

Для определения поляризации волн в бесконечной среде нужно подставить (26) в (24) и умножить полученное уравнение последовательно на три вектора  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ . В результате получим систему трех однородных уравнений, условие разрешимости которой определяет скорости трех мод, после чего можно найти коэффициенты  $\alpha_{1,2}$ , и  $\beta$ , т. е. поляризацию для каждой моды.

Самым простым оказывается уравнение после умножении (24) на  $\mathbf{e}_1$ :

$$\Omega^2 \alpha_1 + \xi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2 \alpha_1 = 0. \quad (60)$$

Отсюда немедленно следует

$$\Omega^2 + \xi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2 = 0, \quad (61)$$

и скорость поперечной моды, поляризованной вдоль вектора  $\mathbf{e}_1$ , равна

$$V_t \equiv \omega/k = c_t \sqrt{1 - \xi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2} = c_t \sqrt{1 - \xi \cos^2 \theta}, \quad (62)$$

где введен угол  $\theta$  между векторами  $\boldsymbol{\kappa}$  и  $\mathbf{a}$ . Мы видим, что в нашей модели скорость поперечной волны меньше скорости  $c_t$  в изотропной среде, и она уменьшается с уменьшением угла  $\theta$ .

Умножение (24) на  $\mathbf{e}_2$  и  $\boldsymbol{\kappa}$  приводит к системе из двух уравнений

$$(\Omega^2 + \xi)\alpha_2 + 2\xi(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa})\beta = 0, \quad (63)$$

$$[\Omega^2 - E + 4\xi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2]\beta + 2\xi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)\alpha_2 = 0, \quad (64)$$

где в первом было использовано соотношение  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)^2 + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2 = 1$ . Отсюда следует, что моды  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{A}_3$ , которые в изотропном случае были независимы, теперь смешиваются. Из их комбинации возникают две новые гибридные независимые моды, одну из которых мы будем называть квазипоперечной и ее поляризацию обозначать  $\mathbf{A}_{qt}$ , а другую — квазипродольной и ее



вектор поляризации обозначать  $\mathbf{A}_{ql}$ . При  $\xi \rightarrow 0$  приставка квази снимается и соответствующие моды переходят в чисто поперечную и продольную моды изотропной среды.

Система уравнений (63), (64) имеет решение, если

$$[\Omega^2 + \xi][\Omega^2 - E + 4\xi(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2] - 4\xi^2(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)^2 = 0. \quad (65)$$

Из этого условия определяются

$$2(\Omega_{2,3}^2 + \xi) = E + \xi[1 - 4(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2] \mp \sqrt{\{E + \xi[1 - 4(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2]\}^2 + 16\xi^2(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)^2}. \quad (66)$$

Поскольку  $(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a})^2 = \cos^2 \theta$ , и  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)^2 = \sin^2 \theta$ , то (66) приводится к виду

$$V_{2,3} = c_t \sqrt{1 - \xi + \frac{E + \xi(1 - 4 \cos^2 \theta) \mp \sqrt{[E + \xi(1 - 4 \cos^2 \theta)]^2 + 4\xi^2 \sin^2(2\theta)}}{2}}, \quad (67)$$

где  $V_{2,3} = c_t \sqrt{\Omega_{2,3}^2 + 1}$  — скорости новых независимых мод.

При  $\xi \rightarrow 0$  получаем

$$\Omega_2^2 \approx -\xi - O(\xi^2), \quad \Omega_3^2 \approx E - 4\xi \cos^2 \theta + O(\xi^2), \quad (68)$$

$$V_2 \approx c_t \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) - O(\xi^2), \quad V_3 \approx c_l - 2\frac{\xi}{c_l} \cos^2 \theta + O(\xi^2), \quad (69)$$

где  $O(\xi^2)$  обозначает малую величину, пропорциональную  $\xi^2$ . В силу этих соотношений  $V_2$  может быть названа скоростью распространения квазипоперечной волны  $V_{qt}$ , а  $V_3$  — скоростью распространения квазипродольной моды  $V_{ql}$ .

Все скорости  $V_t$ ,  $V_{qt}$  и  $V_{ql}$  зависят от угла  $\theta$  между векторами  $\boldsymbol{\kappa}$  и  $\mathbf{a}$ . Эта зависимость показана на рис. 3. Видно, что, если параметр анизотропии  $\xi$  достаточно велик, некоторые моды при достаточно малых углах  $\theta$  распространяться не могут, поскольку их скорость, как показано на рис. 3, б для квазипоперечной моды, не существует. В этой области углов скорость становится мнимой, и мнимым становится волновой вектор  $k = \omega/V$ , поэтому волна распространяться не может. Конечно, параметр анизотропии не может быть очень велик. Если  $E = 1,5$ , а  $\xi = 0,7$ , то энергия анизотропии  $\zeta$  больше параметра Ламэ  $\lambda$ , следовательно, в некоторых направлениях деформация возрастает при уменьшении напряжения, что представляется нефизичным. Для меньших  $\xi$  скорость  $V_{qt}$  не становится мнимой ни при каких углах.

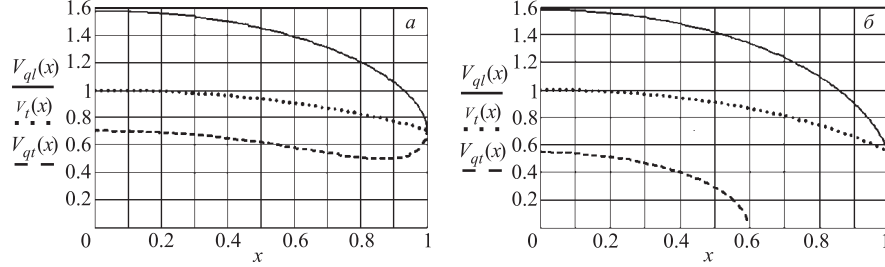


Рис. 3. Зависимость скоростей поперечной  $V_t$ , квазипоперечной  $V_{qt}$  и квазипродольной  $V_{ql}$  мод от угла  $\theta$  ( $x = \cos \theta$ ) между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{a}$  при  $E = 1,5$  и двух различных параметрах анизотропии: а)  $\xi = 0,5$ ; б)  $\xi = 0,7$ . Единица на оси ординат соответствует величине  $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$

Из (63) и (64) следует, что поляризации квазипоперечной,  $\mathbf{A}_{qt}$ , и квазипродольной,  $\mathbf{A}_{ql}$ , мод имеют вид

$$\mathbf{A}_{qt} = \frac{\xi \sin(2\theta)\mathbf{e}_2 - (\Omega_2^2 + \xi)\boldsymbol{\kappa}}{\sqrt{(\Omega_2^2 + \xi)^2 + \xi^2 \sin^2(2\theta)}}, \quad (70)$$

$$\mathbf{A}_{ql} = \frac{(\Omega_3^2 + \xi)\boldsymbol{\kappa} - \xi \sin(2\theta)\mathbf{e}_2}{\sqrt{(\Omega_3^2 + \xi)^2 + \xi^2 \sin^2(2\theta)}}.$$

При малых  $\xi$  получаем приближенные выражения

$$\mathbf{A}_{qt} \approx \mathbf{e}_2 + \frac{\xi}{E} \sin(2\theta)\boldsymbol{\kappa}, \quad \mathbf{A}_{ql} \approx \boldsymbol{\kappa} - \frac{\xi}{E} \sin(2\theta)\mathbf{e}_2. \quad (71)$$

**3.1. Отражение от границы раздела.** Если в изотропных средах отражение и преломление на границе раздела сопровождается в общем случае двойным лучерасщеплением отраженных и преломленных волн, то в случае анизотропных сред в общем случае имеет место тройное лучерасщепление [6]. Более того, в анизотропных средах в общем случае отсутствует зеркальное отражение.

На рис. 4 показано, как происходит расщепление при отражении и преломлении квазипоперечной и квазипродольной мод на границе раздела двух анизотропных сред с двумя разнонаправленными векторами анизотропии  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$ . В общем случае векторы анизотропии не лежат в плоскости падения. На рис. 4 они наклонены внутрь, так что читатель видит хвосты этих векторов, обозначенные крестиком. В нижней полуплоскости угол между вектором анизотропии  $\mathbf{a}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  падающей волны меньше, чем

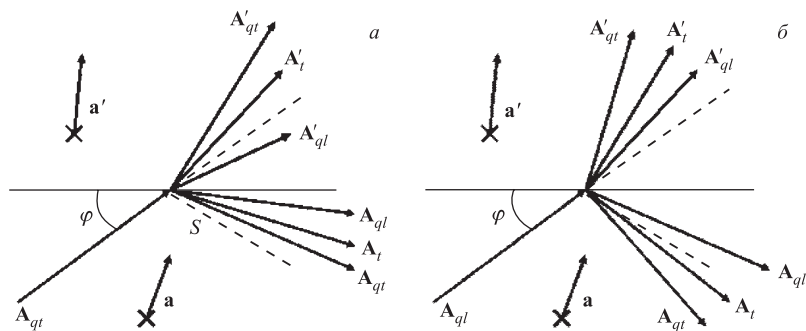


Рис. 4. Расщепление отраженных и преломленных волн на границе раздела анизотропных сред. а) Падающая волна — квазиперпендикулярная  $A_{qt}$ ; б) падающая волна — квазипролонгальная  $A_{ql}$

углы между  $a$  и отраженными волнами, а поскольку скорости отраженных волн могут оказаться больше, чем у падающей, угол скольжения отраженных волн меньше угла скольжения падающей. Если падающая волна квазиперпендикулярная, как показано на рис. 4, а, то отраженная квазиперпендикулярная волна распространяется под углом меньше зеркального, обозначенного пунктирной линией  $S$ . Углы скольжения порождаемых поперечной и квазипролонгальной волн еще меньше.

Если падающая волна — квазипролонгальная, как показано на рис. 1, б, то отраженная квазипролонгальная волна тоже идет над зеркальным направлением, обозначенным пунктирной линией  $S$ . Углы же скольжения других волн оказываются больше квазипролонгальной.

Читатель может легко сам проанализировать направления преломленных и отраженных волн при различных параметрах сред и различных модах падающей волны, поэтому мы остановимся только на одном совершенно невероятном случае, показанном на рис. 5, в котором скорости преломленных волн все больше скорости падающей волны, поэтому при достаточно малом угле скольжения падающей волны все отраженные и преломленные волны концентрируются в одну поверхностную, как показано на рис. 5, б.

В классической физике такая ситуация совершенно неприемлема, поскольку падающая плоская волна, несущая поток энергии по направлению к границе раздела, может концентрировать энергию в поверхностной волне только при условии, что энергия этой волны растет экспоненциально со временем. Но у нас стационарная задача, поэтому при условиях, показанных на рис. 5, б, поток энергии на границе раздела просто исчезает.

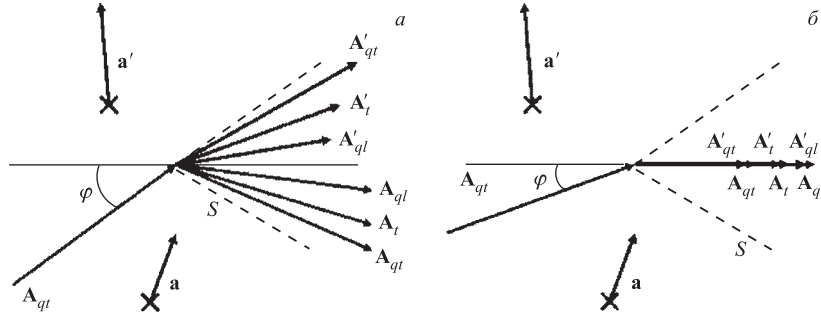


Рис. 5. Отражение, преломление и расщепление волн на границе раздела между двумя различными анизотропными средами, когда скорости отраженных волн больше, чем у падающей квазиперечной волны. *а)* Угол скольжения падающей волны достаточно велик, чтобы все волны, порождаемые границей раздела, могли распространяться в направлении оси  $z$ . *б)* Невероятная ситуация, когда угол скольжения падающей волны достаточно мал, и падающая плоская квазиперечная волна целиком преобразуется в поверхностную волну, содержащую все три моды

Любопытно, однако, что мы можем найти точное аналитическое решение задачи и посмотреть, как же все происходит на самом деле. Конечно, решать задачу в общем случае со всеми тремя неизвестными амплитудами отражения и преломления очень хлопотно, но можно рассмотреть более легкую задачу отражения квазиперечной волны от свободной поверхности (рис. 6), когда вектор анизотропии лежит в плоскости падения. Здесь указанный невероятный эффект тоже должен иметь место, и нам необходимо найти только две неизвестных величины: амплитуды отраженных квазипродольной и квазиперечной волн.

*3.1.1. Отражение квазиперечной волны от свободной поверхности, когда вектор анизотропии лежит в плоскости падения.* Предположим, что вектор анизотропии лежит в плоскости падения и имеет такое направление, что отраженные волны имеют большую скорость, чем падающая. Найдем сначала углы, под которыми распространяются отраженные волны. Они определяются из условия, что параллельная границе раздела компонента волнового вектора должна быть у всех волн одинаковой:

$$\frac{\omega}{V_{qt}(\theta)} \cos \varphi = \frac{\omega}{V_{qt}(\theta')} \cos \varphi' = \frac{\omega}{V_{qt}(\theta'')} \cos \varphi'', \quad (72)$$

где  $\theta$  обозначает угол между направлением распространения и вектором анизотропии  $\mathbf{a}$ , а  $\varphi$  обозначает угол скольжения волн по отношению к свободной поверхности. Величины  $\theta', \varphi'$  относятся к отраженной квазиперечной

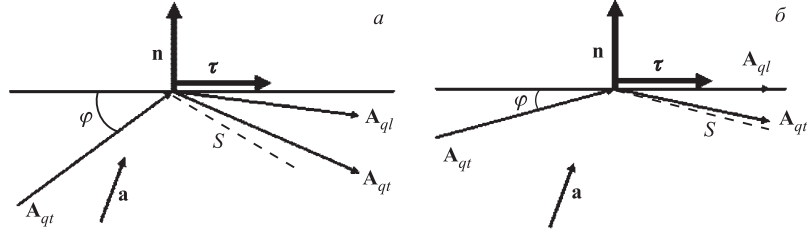


Рис. 6. Отражение квазиперпендикулярной волны от свободной поверхности, когда вектор анизотропии лежит в плоскости падения, а скорость отраженной волны больше скорости падающей. Отражение сопровождается появлением квазипродольной волны. а) Угол скольжения падающей волны достаточно велик, и обе волны, возникающие при отражении, могут распространяться по направлению  $-z$ . б) Угол скольжения падающей волны достаточно мал, и квазипродольная волна становится поверхностной

волне, а  $\theta''$ ,  $\varphi''$  — к отраженной квазипродольной волне. Представим вектор анизотропии в виде  $\mathbf{a} = \tau \cos \varphi_a + \mathbf{n} \sin \varphi_a$ , тогда  $\theta = \varphi_a - \varphi$ ,  $\theta' = \varphi_a + \varphi'$  и  $\theta'' = \varphi_a + \varphi''$ . Решение уравнений (72) можно найти численно. Зависимость скоростей падающей и отраженных волн от  $\cos \varphi$  угла скольжения  $\varphi$  падающей волны для случая  $\cos \varphi_a = 0,4$ ,  $\xi = 0,4$  и  $E = 1,5$  показана на рис. 7. Зависимость  $\cos \varphi'$  и  $\cos \varphi''$  от  $\cos \varphi$  показана на рис. 8. Мы видим, что при  $\cos \varphi > 0,92$  ни одна из отраженных волн не может распространяться в направлении  $-z$ . Что происходит при этих значениях угла падения — чрезвычайно интересный вопрос!

При  $\cos \varphi < 0,5$ , когда существуют обе отраженные волны, можно точно найти их амплитуды. Для этого нужно воспользоваться граничным условием

$$\mathbf{B}_{qt,i} + r_{22}\mathbf{B}_{qt,r} + r_{32}\mathbf{B}_{ql,r} = 0, \quad (73)$$

где  $\mathbf{B}$  равно

$$\mathbf{B} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{A} + \mathbf{k}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + (E - 1)\mathbf{n}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}) - \xi \{ \mathbf{a}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})] + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\mathbf{A} + \mathbf{k}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A})] \}, \quad (74)$$

и умножить последовательно (73) на  $\mathbf{n}$  и  $\tau$ . В результате получаются два уравнения для двух амплитуд отражения.

Обозначим

$$\beta_i \equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i) = 2(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n})(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}) + (E - 1)(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{A}_i) - 2\xi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}_i) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_i)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_i)], \quad (75)$$

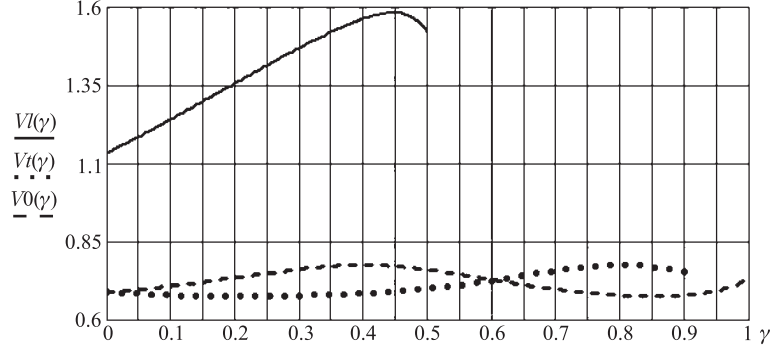


Рис. 7. Зависимость скоростей квазипоперечной падающей ( $V_0$ , сплошная кривая), квазипоперечной отраженной ( $V_t$ , пунктирная кривая) и квазипродольной отраженной ( $V_l$ , штрихпунктирная кривая) от  $\gamma = \cos \varphi$  угла скольжения падающей волны, когда  $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 0,4$ ;  $\xi = 0,4$  и  $E = 1,5$ . Видно, что в некотором диапазоне  $\gamma$  скорости обеих отраженных волн больше падающей

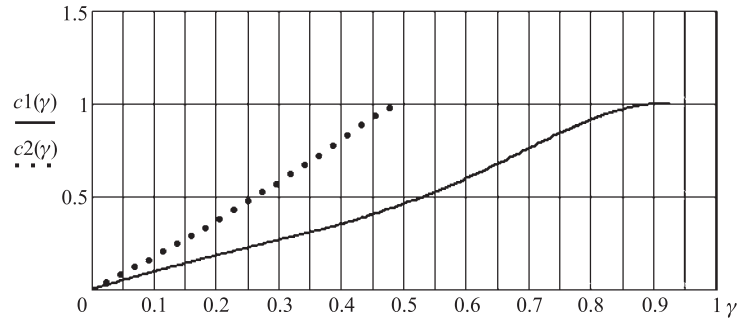


Рис. 8. Зависимость  $c_1 = \cos \varphi'$  (сплошная кривая) и  $c_2 = \cos \varphi''$  (пунктирная кривая) от  $\gamma = \cos \varphi$ . Видно, что обе величины  $c_1$  и  $c_2$  достигают единицы при  $\gamma < 1$ . Представляется, что обе отраженные волны становятся поверхностными, когда падающая волна еще остается плоской

$$\begin{aligned} \delta_i \equiv (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_i) = & (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n})(\mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\tau})(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}) - \\ & - \xi \{ (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) [ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_i)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}_i) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_i)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_i) ] + \\ & + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) [ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_i)(\mathbf{A}_i \cdot \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\tau})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}_i) ] \}, \quad (76) \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, 3$ . Индекс  $i = 1$  относится к  $\mathbf{B}_{qt,i}$  падающей волны,  $i = 2$  — к  $\mathbf{B}_{qt,r}$  и  $i = 3$  — к  $\mathbf{B}_{ql,r}$ .

Уравнение (73) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} = 0, \quad (77)$$

и его решение равно

$$\begin{pmatrix} r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = - \frac{1}{\beta_2 \delta_3 - \beta_3 \delta_2} \begin{pmatrix} \delta_3 & -\beta_3 \\ -\delta_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Мы не будем приводить окончательных выражений после подстановки (75) и (76) для  $\beta$  и  $\delta$ , поскольку они сложны и не выглядят достаточно информативно. Результаты численных расчетов для коэффициентов отражения  $Rt = |r_{22}|^2$  и  $Rl = |r_{32}|^2$  в зависимости от  $z = \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол скольжения падающей волны, приведены на рис. 9, а. Правильность расчетов подтверждается законом сохранения энергии, показанным на рис. 9, б. Все результаты расчета удается продемонстрировать только до точки  $z = 0,5$ , после которой квазипродольная волна становится поверхностной. Выше этого значения  $z$  коэффициенты отражения и энергии становятся комплексными, и отобразить их на одном графике не представляется возможным.

**3.2. Результаты численного эксперимента.** Чтобы понять, что происходит, когда квазипродольная волна становится поверхностной, запишем уравнение (23) в несколько ином виде (см. уравнение (10) и рассуждения вокруг

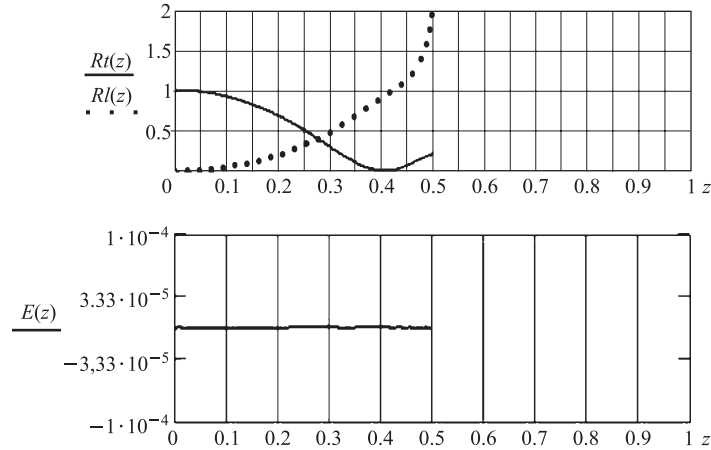


Рис. 9. а) Зависимость коэффициентов отражения  $Rt = |r_{22}|^2$  квазипоперечной (сплошная кривая) и  $Rl = |r_{32}|^2$  квазипродольной (пунктирная кривая) волн от  $z = \cos \varphi$ . б) Разность энергий падающей и отраженной волн. Видно, что до  $z = 0,5$ , закон сохранения энергии прекрасно выполняется

него). Поскольку при отражении от поверхности мы имеем две фиксированные величины: частоту  $\omega$  и компоненту волнового вектора  $k_{\parallel}$  вдоль поверхности, удобно поделить обе части уравнения (23) не на  $\mu k^2$ , как мы делали раньше при исследовании волн в бесконечном однородном пространстве, а на  $\mu k_{\parallel}^2$ . При этом фиксируется величина  $\Upsilon = \omega^2/c_t^2 k_{\parallel}^2$  и вводится нормированный волновой вектор  $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k_{\parallel} = \boldsymbol{\tau} + q\mathbf{n}$ , в котором  $q = k_{\perp}/k_{\parallel} = \text{tg}\varphi$ . В результате таких преобразований уравнение (23) приобретает вид

$$\left[ \Upsilon - 1 - q^2 + \xi(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a})^2 \right] \mathbf{A} = E\tilde{\mathbf{k}}(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}) - \xi \left( \mathbf{a}[(1 + q^2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) + (\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a})(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A})] + \tilde{\mathbf{k}}(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}) \right). \quad (79)$$

Вектор поляризации  $\mathbf{A}$  можно представить в виде  $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{n} + \beta\boldsymbol{\tau}$ . Чтобы найти  $\alpha$  и  $\beta$ , нужно умножить обе части уравнения (79) последовательно на  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ . В результате получается линейная однородная система из двух уравнений, которая имеет решение только когда детерминант ее равен нулю. Это условие приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно  $q$ , которое имеет четыре корня. Проследим за этими корнями.

В случае  $\cos\varphi = 0,3 < 0,5$  все корни вещественны. Два из них положительны:  $q_1 = 3,18$ ,  $q_2 = 2,47$ ; и два отрицательны:  $q_3 = -1,4$ ,  $q_4 = -3,6$ . Корень  $q_1$  соответствует заданному значению  $\cos\varphi = 0,3$  для падающей квазипоперечной волны. Корень  $q_2$  соответствует падающей квазипродольной волне. Поскольку у нас ее нет, этот корень будем отбрасывать. Отрицательные корни соответствуют отраженным волнам:  $q_3$  относится к отраженной квазипродольной, а  $q_4$  — к квазипоперечной волнам.

При  $\cos\varphi = 0,6 > 0,5$  два корня,  $q_2$  и  $q_3$ , относящиеся к квазипродольным волнам, становятся комплексно-сопряженными друг другу:  $q_{2,3} = 0,32 \pm 0,77i$ . Мы можем отобрать только  $q_3$ , поскольку он приводит к экспоненциальному затуханию квазипродольной волны в направлении  $-z$ . Заметим, что действительная часть обоих корней положительна, что интуитивно соответствует потоку энергии не от поверхности, а по направлению к ней. С точки зрения квантовой механики частиц, волновая функция  $\psi \propto \exp(iq'z + q''z)$  с таким комплексным показателем экспоненты соответствовала бы рождению частиц из вакуума, т. е. нарушению унитарности или закона сохранения энергии. Однако в случае упругих волн ситуация иная, и по этой причине мы называем свойства упругих волн противоречащими интуиции.

Численный расчет потоков энергии показывает, что разность энергии отраженных волн и падающей равна мнимой величине ( $-0,0047i$  при  $\cos\varphi = 0,6$ ,  $-0,3i$  при  $\cos\varphi = 0,7$  и т. д. вплоть до  $\cos\varphi = 0,92$ ), причем мнимое значение энергии уносится квазипродольной поверхностной волной. Но что означает мнимая величина, если фактически плотность потока энергии  $j_i = -\sigma_{il} du_l/dt$  содержит два вещественных множителя, каждый из которых



зависит от  $\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$  и  $\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ ? В случае изотропных пространств мы могли пользоваться комплексным представлением векторов смещения, подставляя тензор напряжения в (46) в комплексно-сопряженном виде. Мы могли это делать и получать вещественное значение для энергии, потому что между  $\sigma_{il}$  и  $\dot{u}_l$  не возникало разности фаз, и поток энергии был пропорционален либо  $\cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , либо  $\sin^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , а усреднение по времени в обоих случаях приводит к константе  $1/2$ , как и при умножении экспонент  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . Если же плотность потока энергии имеет мнимую величину, это значит, что между  $\sigma_{il}$  и  $\dot{u}_l$  появляется разность фаз  $\pi/2$ , т.е. если  $\sigma_{il} \propto \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , то функция  $\dot{u}_l$  пропорциональна  $\propto \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , а их произведение равно  $\propto \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , и при усреднении по времени такое произведение обращается в ноль. Отсюда следует, что поверхностная волна вполне может иметь комплексный показатель экспоненты, и его действительная часть, независимо от знака, не приводит ни к какому потоку энергии ни к поверхности, ни от нее.

Самое интересное: что происходит за  $\cos \varphi = 0,92$  (эта величина не фундаментальная постоянная, она зависит от параметров модели). При  $\cos \varphi = 0,922$  корень  $q_4$  меняет знак и становится положительным. Интуитивно мы ожидаем, что такой корень приведет к потоку энергии по направлению к поверхности, однако расчеты показывают, что плотность потока энергии по-прежнему идет от поверхности, и величина потока тождественно равна плотности падающего потока. Плотность потока отраженной волны идет от поверхности потому, что ее направление зависит не только от волнового вектора, но и от направления поляризации, а направление поляризации отраженной волны не меняется. Квазипродольная поверхностная волна по-прежнему дает мнимый поток.

Таким образом, можно заключить, что комплексный показатель затухания поверхностной волны не мешает выполнению ни закона сохранения энергии, ни граничных условий. Никаких явлений типа показанного на рис. 5, б, не возникает ни на границе раздела, ни на свободной поверхности. На свободной поверхности возможно существование поверхностных волн типа релеевской, но скорости этих волн зависят от угла между направлением распространения и вектором анизотропии. То, что эти поверхностные волны не только экспоненциально затухают с глубиной, но еще и осциллируют, не дает основания называть их истекающими поверхностными волнами («leaky surface waves»), как это иногда встречается в литературе, потому что, несмотря на осцилляции, энергия поверхностных волн остается постоянной и никуда не утекает.

**3.3. Трудности вычисления скорости поверхностной волны.** С принципиальной точки зрения, нет никакой проблемы в вычислении скорости поверхностных волн ни при каких значениях параметров. Однако есть технические трудности. Дело в том, что каждая волна, будь то поверхностная или

нет, должна удовлетворять уравнению (79) с заданным параметром  $\Upsilon$ , который равен квадрату скорости распространения  $c^2 = \omega^2/k_{\parallel}^2$  в единицах  $c_t^2$ . Решение (79) приводит к уравнению 4-й степени для неизвестной величины  $q$ . Среди четырех решений нужно выделить те, которые обладают отрицательной мнимой частью, построить два вектора поляризации  $\mathbf{A}_{1,2}$ , получить для них два вектора  $\mathbf{V}_{1,2}$  и найти значение параметра  $\Upsilon$ , при котором оба вектора параллельны и потому можно найти линейную комбинацию, которая обращает их в ноль. После этого нужно убедиться, что поток энергии от этой комбинации вдоль нормали к поверхности не содержит вещественной части. Попытка напрямую, численным образом, решить эту задачу для некоторых значений параметров оказывается неудачной. Не удается удовлетворить последнему условию. Отсюда напрашивается вывод, что поверхностных волн в анизотропной среде нет. Однако доказать это или найти условия существования поверхностных волн и их скорости можно только с помощью аналитических выражений для корней уравнения 4-й степени. Найти эти корни аналитически возможно, но при этом задача оказывается довольно трудоемкой.

**Благодарности.** Мы благодарны А. Н. Никитину и Т. И. Иванкиной за интерес к работе и обсуждения, а один из нас (В. К. И.) также благодарен Ю. Копачу, Ю. Никитенко, П. Седышеву и В. Швецову за поддержку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. Theoretical Physics, V. 7 Theory of Elasticity. Oxford: Reed educational and Professional Publishing ltd, 1999.
2. Truell R., Elbaum C., Chick B. B. Ultrasonic Methods in Solid State Physics Academic Press, New York, 1969.
3. Dieulesaint E., Royer D. Ondes Élastiques dans les Solides. Masson et C<sup>ie</sup>, 1974.
4. Nikitin A. N., Ivankina T. I., Ignatovich V. K. Peculiarities of  $p$ -and  $s$ -wave Propagation through Textured Rocks. To be published.
5. Victorov I. A. Sound Surface Waves in Solids. М.: Наука, 1981.
6. Leung W. P. Demonstration of Shear Waves, Lamb Waves and Rayleigh Waves by Mode Conversion // Am. J. Phys. 1980. V. 48(8). P. 539–42.

Получено 10 марта 2009 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 22.05.2009.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,68. Уч.-изд. л. 2,03. Тираж 350 экз. Заказ № 56606.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)