

P11-2011-104

И. В. Амирханов, Н. Р. Саркар, И. Сархатов, З. К. Тухлиев,
З. А. Шарипов

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

Направлено в журнал «Вестник РУДН. Серия “Математика.
Информатика. Физика”»

Амирханов И. В. и др.

P11-2011-104

Аналитическое и численное исследования решений краевых задач для квазипотенциального уравнения

В работе проведено исследование решений краевых задач для квазипотенциального уравнения с кусочно-постоянными потенциалами при различных значениях параметров задачи. Проведен сравнительный анализ решений квазипотенциального уравнения с решениями уравнения Шредингера.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2011

Amirkhanov I. V. et al.

P11-2011-104

Analytical and Computational Investigations of Solutions of Boundary-Value Problems for the Quasipotential Equation

Investigation of solutions of a boundary-value problem is carried out for the quasipotential equation with piecewise-constant potentials at various values of the parameters of the problem. The comparative analysis of the solutions of the quasipotential equation with the solutions of Schrödinger equation is performed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Учет релятивистских эффектов является одной из важнейших проблем в спектроскопии кваркониев, т. е. мезонов, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка (простейшие двухчастичные системы). Изучение этих эффектов позволяет установить границы применимости нерелятивистской потенциальной модели и вычислить релятивистские поправки. В этом случае необходимо привлекать для изучения спектроскопии мезонов релятивистские уравнения, например квазипотенциальные уравнения. Поэтому в данной работе мы исследуем краевые задачи для квазипотенциального уравнения [1] и уравнения Шредингера с различными потенциалами и проводим сравнительный анализ полученных решений для выявления релятивистских эффектов.

Проведем исследование решений краевых задач для следующего уравнения:

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)]\psi(r) = 0, \quad (1)$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1 \right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1}, \quad H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{ch} \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right],$$

ε — безразмерный параметр, $V(r)$ — потенциал взаимодействия.

Разлагая оператор $\operatorname{ch} \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right)$ в ряд, уравнение (1) можно свести к дифференциальному уравнению бесконечного порядка. При $\varepsilon \rightarrow 0$, $E_\varepsilon \rightarrow q^2$, $H_\varepsilon \rightarrow -\frac{d^2}{dr^2}$, (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера [2]

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2 \right] \psi(r) = 0. \quad (2)$$

Поэтому особую актуальность приобретают методы поиска таких решений краевой задачи $\{\psi_n, E_n\}_{\text{qus}}$ для уравнения (1), которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к решениям аналогичной краевой задачи $\{\psi_n, E_n\}_{\text{Schr}}$ для уравнения Шредингера (2). Тогда отличие этих решений при $\varepsilon \neq 0$ можно интерпретировать как релятивистский эффект.

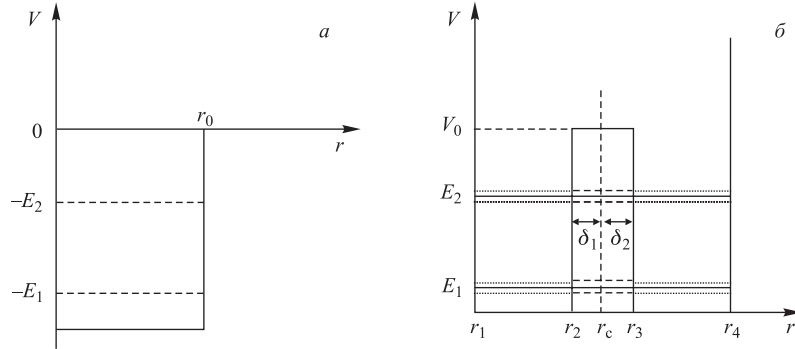


Рис. 1. Вид потенциалов

В предыдущих наших работах [3–5] исследовались краевые задачи для квазипотенциального уравнения (1) различными методами. В данной работе исследуем краевую задачу для уравнения (1) с использованием оператора сдвига $\exp(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}) f(r) = f(r \pm i\varepsilon)$. Проведен сравнительный анализ решений квазипотенциального уравнения (1) с решениями уравнения Шредингера (2) с дискретным спектром в потенциальных ямах двух типов (см. рис. 1), а также в бесконечно глубокой потенциальной яме.

Выбирая параметры δ_1 и δ_2 различным образом, меняем ширину барьера ($(\delta_1 + \delta_2)$ определяет ширину барьера) (рис. 1, б). Далее при $\delta_1 = \delta_2$ мы назовем потенциал симметричным, а при $\delta_1 \neq \delta_2$ — несимметричным.

Важной модельной системой является симметричная прямоугольная двойная потенциальная яма. Такая система применяется для моделирования свойств объектов, имеющих две устойчивые конфигурации (два минимума потенциальной энергии), например молекулы аммиака NH_3 и т. д.

Основной особенностью симметричных двойных потенциальных ям является наличие в нижней части их спектра дублетных энергетических уровней, причем чем меньше энергетическая щель между уровнями в дублетах, тем больше высота и ширина барьера, разделяющего ямы.

Проведем исследование решений краевых задач для уравнения (1) при различных значениях параметра ε .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сначала получим необходимые формулы для проведения сравнительного анализа решений краевых задач для уравнения Шредингера (2) и квазипотенциального уравнения (1). Затем приведем численные результаты.

а. Решения уравнений (1) и (2) в прямоугольной потенциальной яме с бесконечной высокой стенкой, т. е. $V(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r < r_0, \\ \infty, & \text{если } r > r_0. \end{cases}$

Далее везде $r_0 = \pi$.

Решения должны удовлетворять граничным условиям $\psi(0) = 0$, $\psi(\pi) = 0$. Внутри ямы решение ищем в виде

$$\psi(r) = A \sin(\alpha r), \quad 0 \leq r \leq \pi. \quad (3)$$

При любом значении α решение (3) удовлетворяет уравнению Шредингера (2), т. е. $q^2 = \alpha^2$, причем $\psi(0) = 0$. Из условия $\psi(\pi) = 0$ находим параметр α , т. е. $\alpha = n$. Тогда спектр энергии будет $q^2 = n^2$.

Подставляя решение (3) в квазипотенциальное уравнение (1), получаем выражение

$$E_\alpha = \frac{2}{\varepsilon^2}(\text{ch}(\alpha\varepsilon) - 1) \quad (4)$$

и из условия $\psi(\pi) = 0$ находим

$$E_n = \frac{2}{\varepsilon^2}(\text{ch}(n\varepsilon) - 1). \quad (5)$$

б. Решения уравнений (1) и (2) в прямоугольной потенциальной яме конечной глубины (рис. 1, а). Далее рассматриваем только связанные состояния, т. е. дискретный спектр. Тогда $q^2 = -E$, где $E > 0$, $0 < E < V_0$ и V_0 — глубина ямы.

Решения ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= A \sin(\alpha r), & 0 \leq r \leq \pi, \\ \psi_2(r) &= B \exp(-\beta r), & \pi \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Решения (6) удовлетворяют граничным условиям $\psi_1(0) = 0$ и $\psi_2(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Подставляя (6) в уравнение (2), получаем $\alpha = \sqrt{V_0 - E}$; $\beta = \sqrt{E}$.

Из условий непрерывности функции и первой производной функции

$$\begin{aligned} \psi_1(r)|_{r=\pi} &= \psi_2(r)|_{r=\pi}, \\ \psi_1'(r)|_{r=\pi} &= \psi_2'(r)|_{r=\pi} \end{aligned} \quad (7)$$

получаем трансцендентное уравнение для нахождения дискретных значений E :

$$\alpha \cos(\alpha\pi) + \beta \sin(\alpha\pi) = 0. \quad (8)$$

Подставляя решения (6) в уравнение (1), находим

$$V_0 - E = \frac{2}{\varepsilon^2}(\text{ch}(\alpha\varepsilon) - 1), \quad 0 \leq r \leq \pi, \quad (9)$$

$$E = \frac{2}{\varepsilon^2}(1 - \cos(\beta\varepsilon)), \quad \pi \leq r < \infty. \quad (10)$$

Условие (9) выполняется для любого ε . Из условия (10) получаем ограничение на параметр ε :

$$0 \leq \varepsilon \leq \frac{2}{\sqrt{E}}. \quad (11)$$

Для уравнения (1) условия сшивания (7) модифицируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1(r)|_{r=\pi} &= \psi_2(r)|_{r=\pi}, \\ L\psi_1(r)|_{r=\pi} &= L\psi_2(r)|_{r=\pi}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$L = \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{\varepsilon \frac{d}{dr}} - 1 \right), \quad L \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dr}. \quad (13)$$

Тогда трансцендентное уравнение для нахождения дискретных значений E принимает вид

$$C_3 \sin(\alpha\pi) + C_4 \alpha \cos(\alpha\pi) - C_5 \beta \sin(\alpha\pi) = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{\cos(\alpha\varepsilon) - 1}{\varepsilon}, \quad C_4 = \frac{\sin(\alpha\varepsilon)}{\alpha\varepsilon}, \quad C_5 = \frac{1}{\beta\varepsilon} (\exp(-\beta\varepsilon) - 1), \\ \alpha &= \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arccch} \left(\frac{2}{\varepsilon^2} (V_0 - E) - 1 \right), \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arccos} \left(\frac{2}{\varepsilon^2} E - 1 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ $C_3 \rightarrow 0$, $C_4 \rightarrow 1$ и $C_5 \rightarrow -1$. Следовательно, трансцендентное уравнение (14) переходит в уравнение (8). Это означает, что решения (собственные значения и собственные функции) квазипотенциального уравнения стремятся к решениям уравнения Шредингера.

в. Решения уравнений (1) и (2) в прямоугольной потенциальной яме с барьером (рис. 1, б). Далее $q^2 = E$ и отдельно рассматриваем случаи, когда $E < V_0$ и $E > V_0$.

При $E < V_0$ решения ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= A_1 \sin(k(r - r_1)), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ \psi_2(r) &= A_2 \exp(-\kappa(r - r_c)) + B_2 \exp(\kappa(r - r_c)), & r_2 \leq r \leq r_3, \\ \psi_3(r) &= A_3 \sin(k(r - r_4)), & r_3 \leq r \leq r_4. \end{aligned} \quad (16)$$

При численном решении параметры задачи выбираем следующим образом:

$$r_1 = 0, \quad r_4 = \pi, \quad r_c = \frac{\pi}{2}, \quad r_2 = r_c - \delta_1, \quad r_3 = r_c + \delta_2.$$

Решения (16) удовлетворяют граничным условиям $\psi_1(0) = 0$ и $\psi_3(\pi) = 0$. Подставляя (16) в (2), находим $k = \sqrt{E}$, $\kappa = \sqrt{V_0 - E}$.

Из условий непрерывности функции $\psi(r)$ и ее первой производной в точках

$$r = r_2 \quad \psi_1(r)|_{r=r_2} = \psi_2(r)|_{r=r_2}, \quad \psi_1'(r)|_{r=r_2} = \psi_2'(r)|_{r=r_2}$$

и

$$r = r_3 \quad \psi_2(r)|_{r=r_3} = \psi_3(r)|_{r=r_3}, \quad \psi_2'(r)|_{r=r_3} = \psi_3'(r)|_{r=r_3}$$

получаем трансцендентное уравнение для нахождения дискретных значений энергии E

$$\det W = 0, \tag{18}$$

где W — матрица 4×4 со следующими элементами:

$$\begin{aligned} w_{11} &= \sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)\right), & w_{12} &= -\exp(\kappa\delta_1), \\ w_{13} &= -\exp(-\kappa\delta_1), & w_{14} &= 0; \\ w_{21} &= k \cos\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)\right), & w_{22} &= k \exp(\kappa\delta_1), \\ w_{23} &= -k \exp(-\kappa\delta), & w_{24} &= 0; \\ w_{31} &= 0, & w_{32} &= \exp(-\kappa\delta_2), \\ w_{33} &= \exp(\kappa\delta_2), & w_{34} &= \sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right)\right); \\ w_{41} &= 0, & w_{42} &= -\kappa \exp(-\kappa\delta_2), \\ w_{43} &= \kappa \exp(\kappa\delta_2), & w_{44} &= -\cos\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right)\right). \end{aligned}$$

Подставляя (16) в (1), вычисляем

$$E = \frac{2}{\varepsilon^2}(\operatorname{ch}(k\varepsilon) - 1), \tag{19}$$

$$V_0 - E = \frac{2}{\varepsilon^2}(1 - \cos(\kappa\varepsilon)). \tag{20}$$

Из (20) получаем ограничение на параметр ε : $0 \leq \varepsilon \leq \frac{2}{\sqrt{V_0 - E}}$. Условия сшивания (17) модифицируем так же, как и в предыдущем пункте б (см. (12), (13)). Тогда трансцендентное уравнение для нахождения дискретных значений E принимает вид

$$\det M = 0, \tag{21}$$

где M — матрица 4×4 со следующими элементами:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)\right), & m_{12} &= -\exp(\kappa\delta_1), \\
m_{13} &= -\exp(-\kappa\delta_1), & m_{14} &= 0; \\
m_{21} &= U_1, & m_{22} &= -C_5 \kappa \exp(\kappa\delta_1), \\
m_{23} &= -C_6 \kappa \exp(-\kappa\delta_2), & m_{24} &= 0; \\
m_{31} &= 0, & m_{32} &= \exp(-\kappa\delta_2), \\
m_{33} &= \exp(\kappa\delta_2), & m_{34} &= \sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right)\right); \\
m_{41} &= 0, & m_{42} &= C_5 \kappa \exp(-\kappa\delta_2), \\
m_{43} &= C_6 \kappa \exp(\kappa\delta_2), & m_{44} &= -U_3; \\
C_3 &= \frac{\cos(k\varepsilon) - 1}{\varepsilon}, & C_4 &= \frac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon}, \\
C_5 &= \frac{1}{\kappa\varepsilon}(\exp(-\kappa\varepsilon) - 1), & C_6 &= \frac{1}{\kappa\varepsilon}(\exp(\kappa\varepsilon) - 1); \\
U_1 &= C_3 \sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)\right) + C_4 k \cos\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)\right), \\
U_3 &= -C_3 \sin\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right)\right) + C_4 k \cos\left(k\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right)\right).
\end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (21) переходит в уравнение (18) и их спектры совпадают.

При $E > V_0$ решения ищем в виде

$$\begin{aligned}
\psi_1(r) &= A_1 \sin(k(r - r_1)), & r_1 &\leq r \leq r_2, \\
\psi_2(r) &= A_2 \sin(-\kappa(r - r_c)) + B_2 \cos(\kappa(r - r_c)), & r_2 &\leq r \leq r_3, \\
\psi_3(r) &= A_3 \sin(k(r - r_4)), & r_3 &\leq r \leq r_4.
\end{aligned} \tag{22}$$

Решения (22) удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_3(\pi) = 0.$$

Поставляя (22) в (2), получаем $k = \sqrt{E}$, $\kappa = \sqrt{E - V_0}$.

Из условий непрерывности функции $\psi(r)$ и ее первой производной в точках

$$r = r_2 \quad \psi_1(r)|_{r=r_2} = \psi_2(r)|_{r=r_2}, \quad \psi_1'(r)|_{r=r_2} = \psi_2'(r)|_{r=r_2}$$

и

$$r = r_3 \quad \psi_2(r)|_{r=r_3} = \psi_3(r)|_{r=r_3}, \quad \psi_2'(r)|_{r=r_3} = \psi_3'(r)|_{r=r_3}$$

получаем трансцендентное уравнение для нахождения дискретных значений энергии E

$$\det P = 0, \quad (24)$$

где P — матрица 4×4 со следующими элементами:

$$\begin{aligned} p_{21} &= k \cos \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \right), & p_{22} &= -\kappa \cos (\kappa \delta_1), \\ p_{23} &= -\kappa \sin (\kappa \delta_1), & p_{24} &= 0; \\ p_{31} &= 0, & p_{32} &= \sin (\kappa \delta_2), & p_{33} &= \cos (\kappa \delta_2), & p_{34} &= \sin \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \right); \\ p_{41} &= 0, & p_{42} &= \kappa \cos (\kappa \delta_2), \\ p_{43} &= -\kappa \sin (\kappa \delta_2), & p_{44} &= -k \cos \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Подставляя решения (22) в уравнение (1), имеем

$$E = \frac{2}{\varepsilon^2} (\operatorname{ch} (k\varepsilon) - 1), \quad (25)$$

$$E - V_0 = \frac{2}{\varepsilon^2} (\operatorname{ch} (\kappa\varepsilon) - 1).$$

Условия сшивания (23) модифицируем так же, как и в предыдущих пунктах. Тогда трансцендентное уравнение для нахождения дискретных значений E принимает вид

$$\det Q = 0, \quad (26)$$

где Q — матрица 4×4 со следующими элементами:

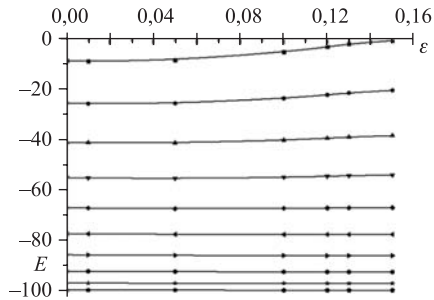
$$\begin{aligned} q_{11} &= \sin \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \right), & q_{12} &= \sin (\kappa \delta_1), \\ q_{13} &= -\cos (\kappa \delta_1), & q_{14} &= 0; \\ q_{21} &= U_1, & q_{22} &= -U_2, \\ q_{23} &= U_3, & q_{24} &= 0; \\ q_{31} &= 0, & q_{32} &= \sin (\kappa \delta_2), \\ q_{33} &= \cos (\kappa \delta_2), & q_{34} &= \sin \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \right); \\ q_{41} &= 0, & q_{42} &= U_5, \\ q_{43} &= U_6, & q_{44} &= -U_4; \\ C_3 &= \frac{\cos (k\varepsilon) - 1}{\varepsilon}, & C_{31} &= \frac{\cos (\kappa\varepsilon) - 1}{\varepsilon}, \\ C_4 &= \frac{\sin (k\varepsilon)}{k\varepsilon}, & C_{41} &= \frac{\sin (\kappa\varepsilon)}{\kappa\varepsilon}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= C_3 \sin \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \right) + C_4 k \cos \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \right), \\
U_2 &= -C_{31} \sin (\kappa \delta_1) + C_{41} \kappa \cos (\kappa \delta_1), \\
U_3 &= C_{31} \cos (\kappa \delta_1) + C_{41} \kappa \sin (\kappa \delta_1); \\
U_4 &= -C_3 \sin \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \right) + C_4 k \cos \left(k \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \right), \\
U_5 &= C_{31} \sin (\kappa \delta_2) + C_{41} \kappa \cos (\kappa \delta_2), \\
U_6 &= C_{31} \cos (\kappa \delta_2) + C_{41} \kappa \sin (\kappa \delta_2).
\end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (26) переходит в уравнение (24) и их спектры совпадают.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Из рис. 2 видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственные значения квазипотенциального уравнения стремятся к собственным значениям уравнения Шредингера. В таблице приведена разность собственных значений.



E_n^{qus}	E_n^{Schr}	$E_n^{\text{qus}} - E_n^{\text{Schr}}$
-0,875	-8,9189	8,0439
-20,71	-25,8533	5,1433
-38,73	-41,38	2,65
-54,18	-55,23	1,05
-67,17	-67,31	0,14
-77,84	-77,57	-0,27
-86,35	-85,99	-0,36
-92,84	-92,55	-0,29
-97,39	-92,24	-0,15
-100,1058	-100,0605	-0,0453

Рис. 2. Зависимость уровней энергии от параметра ε для потенциальной ямы конечной глубины

Из рис. 3 можно заключить, что для симметричного потенциала ($a-\vartheta$) собственные значения как функция от δ при малом значении ε ($\varepsilon = 0,0001$) попарно приближаются друг к другу, а с увеличением ε собственные значения сначала приближаются друг к другу, затем удаляются друг от друга. Аналогичные зависимости приведены для несимметричного потенциала ($z-e$). Рис. 4 иллюстрирует вышеприведенные зависимости собственных значений для случая выше потенциального барьера. Физические параметры указаны наверху рисунков.

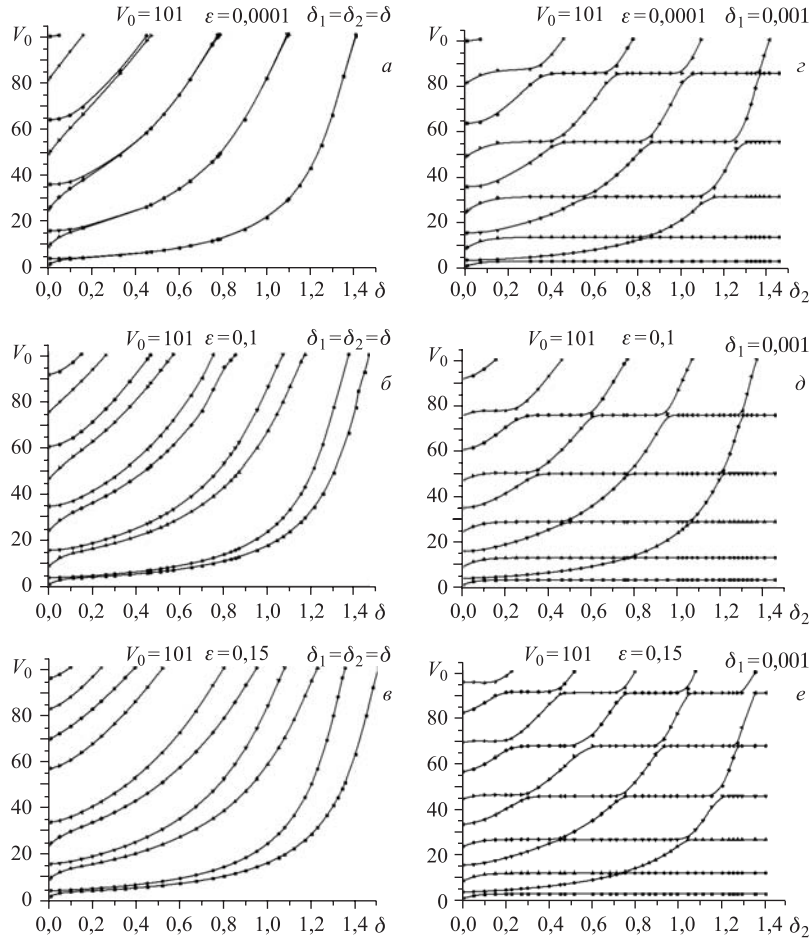


Рис. 3. Зависимость уровней энергии от δ для случая ниже потенциального барьера: $a-e$ — для симметричного потенциала, $z-e$ — для несимметричного потенциала

Для сравнения решений квазипотенциального уравнения с решениями уравнения Шредингера мы приводим решения с двумя и тремя узлами при $E < V_0$ (см. рис. 5–7). Из рис. 5 видно, что решения с двумя узлами практически совпадают, а решения с тремя узлами отличаются. Рис. 6, 7 демонстрируют, что даже при малом $\epsilon = 0,0001$ для симметричного и несимметричного потенциалов оба типа решения отличаются.

Для случая $E > V_0$ при малых ϵ решения практически совпадают (при любых δ_1 и δ_2). Отличие наблюдается при увеличении ϵ (решения не приводятся).

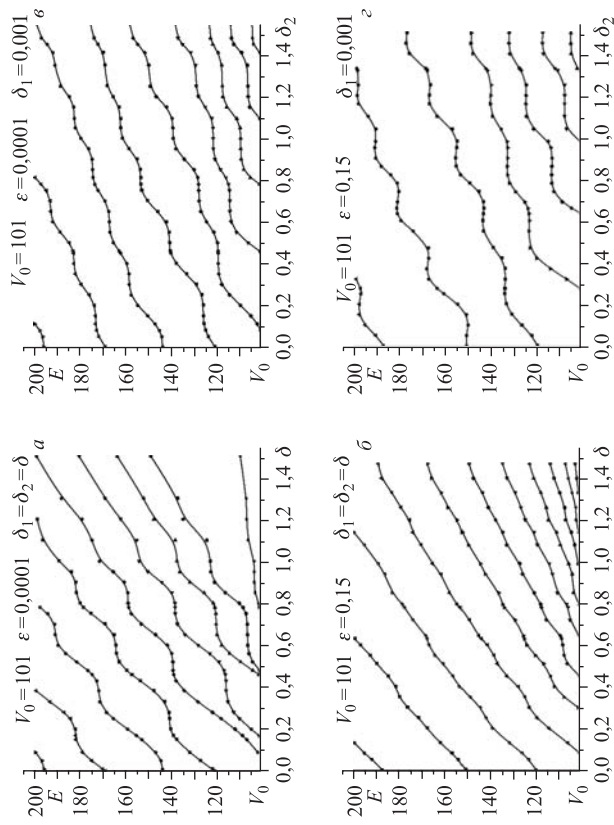


Рис. 4. Зависимость уровней энергии от δ для случая выше потенциального барьера: *a, б* — для симметричного потенциала, *а, в, г* — для несимметричного потенциала

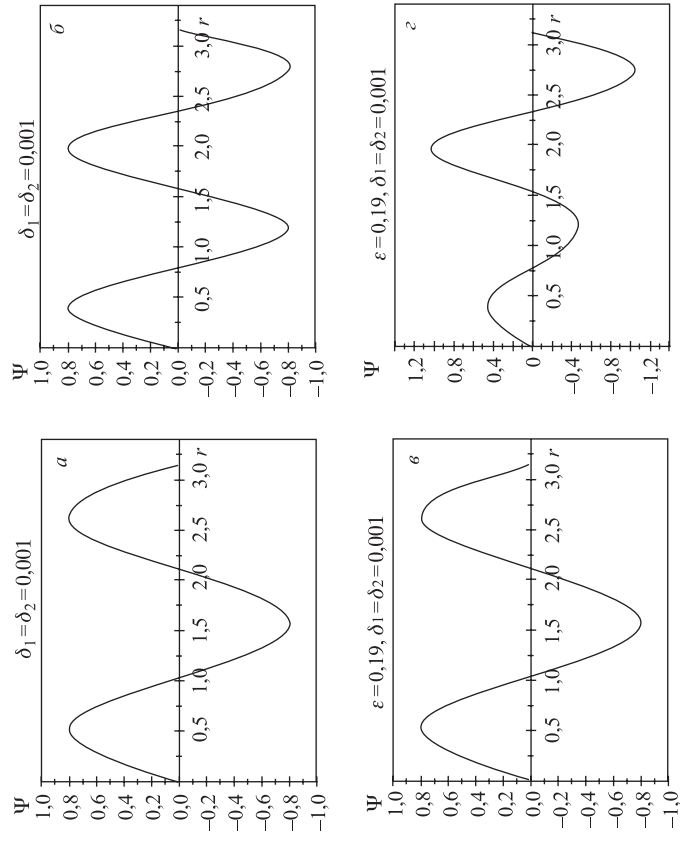


Рис. 5. Решения уравнения Шредингера (а, б) и решения квазипотенциального уравнения при $\epsilon = 0,19, \delta_1 = \delta_2 = 0,001$ (в, г) для симметричного потенциала

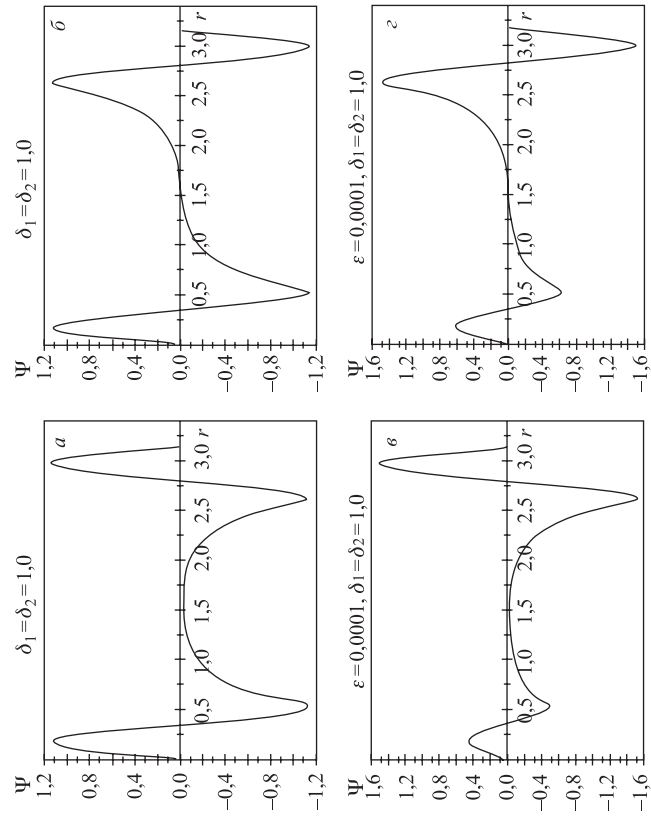


Рис. 6. Решения уравнения Шредингера (a, б) и решения квазипотенциального уравнения при $\epsilon = 0,0001, \delta_1 = \delta_2 = 1,0$ (e, z)

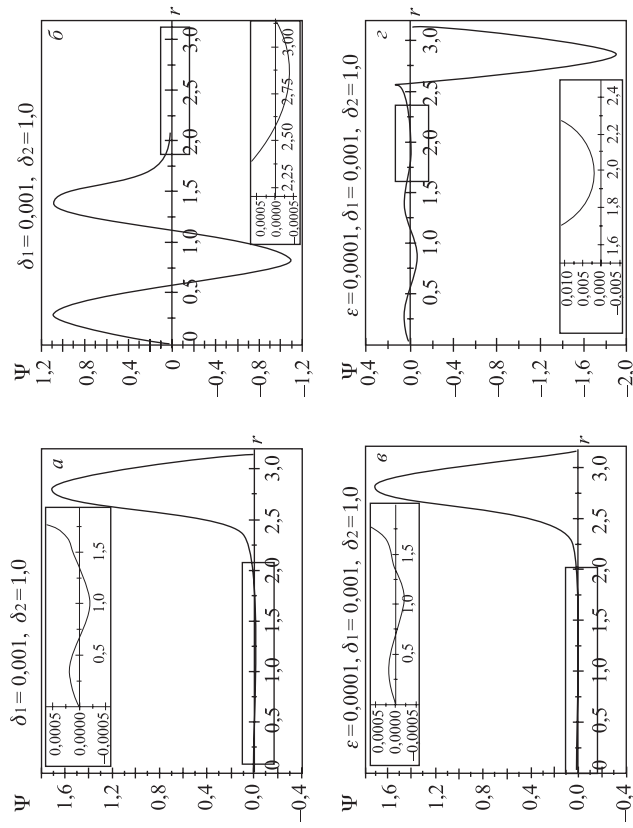


Рис. 7. Решения уравнения Шредингера (а, б) и решения квазипотенциального уравнения при $\varepsilon = 0,0001, \delta_1 = 0,001, \delta_2 = 1,0$ (в, г) (несимметричный случай)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы решения краевых задач для уравнений (1) и (2), и проведен сравнительный анализ полученных решений квазипотенциального уравнения с решениями уравнения Шредингера при различных значениях параметров задачи. Ниже перечислены некоторые из полученных результатов:

1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственные значения квазипотенциального уравнения стремятся к собственным значениям уравнения Шредингера (для рассматриваемых потенциалов). Для потенциала с конечной глубиной при увеличении ε собственные значения (по абсолютному значению) уменьшаются;

2) решения краевой задачи с разным количеством узлов по-разному ведут себя в зависимости от параметра ε (см. рис. 5);

3) собственные значения уравнения Шредингера при увеличении ширины барьера (δ_1 и δ_2) попарно приближаются друг к другу. Собственные значения для квазипотенциального уравнения с увеличением ε попарно сначала приближаются друг к другу, затем удаляются друг от друга.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 10-01-00467-а, 11-01-00278-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, № 3. С. 637–390.
2. Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катъшев Ю. В. К вопросу о предельном переходе $c \rightarrow \infty$ в релятивистском предельном переходе // ТМФ. 1970. Т. 3, № 2. С. 191–196.
3. Амирханов И. В. и др. // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 11. С. 65–79.
4. Амирханов И. В. и др. // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2010. № 3(2). С. 14–18.
5. Амирханов И. В. и др. Препринт ОИЯИ Р11-2010-96. Дубна, 2010. 14 с.

Получено 18 октября 2011 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 27.12.2011.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,06. Уч.-изд. л. 1,26. Тираж 270 экз. Заказ № 57544.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/