

P2-2011-116

Т. Г. Дедович\*, М. В. Токарев\*\*

МЕТОД СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ  $P$ -АДИЧЕСКИХ  
ПОКРЫТИЙ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
СОБЫТИЙ

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

---

\*E-mail: dedovich@sunhe.jinr.ru

\*\*E-mail: tokarev@jinr.ru

Дедович Т. Г., Токарев М. В.

P2-2011-116

Метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий  
для фрактального анализа событий

Обсуждаются законы подобия и их проявления в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях. Предполагается, что партонный ливень и процесс адронизации приводят к образованию множества частиц, имеющих фрактальную структуру. Отмечается, что метод подсчета клеток ВС (Box Counting method) и метод  $P$ -адических покрытий ( $P$ -adic Coverage method) позволяют определить фрактальную размерность множеств с длиной  $1/k$  допустимых диапазонов. Предлагается новый метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC-метод: Systems of the equations of  $P$ -adic Coverages), расширяющий возможности PaC-метода, для анализа фракталов с различной длиной  $m/k$  допустимых диапазонов. Показано, что SePaC-метод позволяет определять фрактальную размерность с заданной точностью, количество уровней, тип фрактала (регулярный или случайный) и его структуру.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2011

Dedovich T. G., Tokarev M. V.

P2-2011-116

Method of Systems of the Equations of  $P$ -adic Coverages  
for Fractal Analysis of Events

Self-similarity in multiple processes at high energies is discussed. A parton shower is assumed to transform into a hadron shower with a fractal structure. It is noted that the BC (Box Counting) and PaC ( $P$ -adic Coverage) methods allow one to determine the dimension of fractals with permissible  $1/k$  parts. New method (method of Systems of the equations of  $P$ -adic Coverages) that is applicable for analysis of  $N$ -ary cascades with permissible  $m/k$  parts is offered. This method (SePaC method) allows us to determine the fractal dimension of the shower with the given accuracy, the number of fractal levels and of partons at branching in the process of development of the shower, the cascade type (random or regular) and its structure.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2011

## ВВЕДЕНИЕ

Установлено, что законы подобия играют важную роль при изучении фазовых переходов и критических явлений в обычных средах (газах, жидкостях, кристаллах, ...) [1]. Предполагается, что процессы множественного рождения частиц в столкновениях адронов и ядер высоких энергий также обладают свойствами подобия. В связи с запуском коллайдеров тяжелых ионов RHIC и LHC открываются возможности изучения новых фазовых состояний и фазовых переходов в многочастичной системе — ядерной материи, образующейся при экстремально высокой температуре и плотности. Отметим, что каждое фазовое состояние многочастичной системы может проявлять свойство подобия даже вдали от области фазового перехода. Значения характеристик различных состояний отличаются и должны испытывать скачки при фазовых переходах.

Одним из проявлений свойства самоподобия является  $z$ -скейлинг, установленный при анализе инклюзивных спектров адронов, прямых фотонов и струй во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий [2]. В  $z$ -представлении спектр инклюзивной частицы описывается безразмерной функцией  $\psi$ , зависящей от единственной безразмерной переменной  $z$ . Обе величины выражаются через экспериментально измеряемые кинематические (импульсы и массы сталкивающихся и регистрируемой частиц) и динамические (дифференциальные и полные инклюзивные сечения, плотность множественности) величины. Величина  $z$  обладает свойством фрактальной меры и описывается степенной зависимостью с постоянными значениями показателей  $\delta, \epsilon$ . Предполагается, что резкое изменение этих показателей можно рассматривать как сигнатуру фазового перехода. В рамках подхода [2] предложен микроскопический сценарий взаимодействия, отражающий самоподобие в структуре сталкивающихся объектов (адронов, ядер), взаимодействии их конститuentов и процессе адронизации.

Степенной закон поведения факториальных моментов в зависимости от длины бинов в быстройном распределении был установлен при исследовании пион-протонных столкновений при энергии  $\sqrt{s} = 250$  ГэВ [3]. Эта закономерность наблюдалась в событиях с большими флуктуациями плотности множественности. Величина флуктуации ( $\sim 10^2$ ) превышала среднее значение

для данного типа событий в 60 раз. Такая характеристика множественного рождения, по аналогии с гидродинамикой, была названа перемежаемостью. В работах А. Бяласа [4] и Р. Хва [5] было показано, что наблюдаемые флуктуации являются динамическими и отражают самоподобие процесса взаимодействия. Это подтверждалось степенной зависимостью факториальных моментов  $F_q(\delta y) \sim (\delta y)^{-\phi(q)}$  и  $G_q(\delta y) \sim (\delta y)^{-\tau(q)}$  порядка  $q$  от длины бинов в быстрой распределении. Здесь  $\phi(q), \tau(q)$  — показатели перемежаемости.

Экспериментально установленные степенные зависимости (перемежаемость,  $z$ -скейлинг и др. [6]), характеризующие самоподобие, являются типичными для фракталов [7]. Фракталами называются объекты, структура которых при различном разрешении одинакова. Одной из важнейших характеристик этих объектов является размерность. Фрактальная размерность  $D_F$  (размерность Хаусдорфа–Безиковича) определяется как величина  $D_F$ , при которой предел  $M$  в уравнении (1) имеет конечное значение:

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N l_i^{D_F} = \text{const.} \quad (1)$$

Здесь  $N$  — количество пробников (отрезков), покрывающих объект. Размеры (длины) пробников  $l_i \leq \delta$  не обязательно равны между собой, но не превышают значение  $\delta$ . Величина  $\delta^{-1}$  называется разрешением, на котором исследуется структура объекта. Как правило, фракталы имеют нецелочисленную размерность.

Обычно предполагается, что адроны, рожденные в неупругом взаимодействии, можно представить как наборы точек в трехмерном фазовом пространстве  $(p_T, \eta, \phi)$ . Здесь  $p_T$  — поперечный импульс,  $\eta$  — псевдобыстрота и  $\phi$  — азимутальный угол частицы. Распределение точек в этом пространстве, определяемое динамикой взаимодействия, не является однородным и рассматривается как фрактал. Показатель степени  $\tau(q)$  (характеризующий перемежаемость) определяет спектр фрактальных размерностей  $D(q) = \tau(q)/(q-1)$  и демонстрирует связь между фракталами и множественным рождением частиц. Таким образом, точное определение фрактальной размерности является важным условием для изучения динамики взаимодействия. Однако существуют некоторые проблемы при их определении. Так, конечное значение числа частиц в наборе данных не позволяет перейти к предельному случаю ( $\delta \rightarrow 0$ ) [8]. Выбор набора пробников  $\delta$  также может существенно повлиять на вычисляемое значение фрактальной размерности [9].

Обычно для определения фрактальной размерности используют несколько базовых методов. К ним относятся ВС-метод (Box Counting Method) [7, 10, 11], метод регуляризации [12], метод  $R/S$  нормированного размаха [13], метод максимумов модулей вейвлет-преобразования [14]. ВС-метод

впервые был применен для определения фрактальной размерности береговой линии Британии [15] и широко используется в современных исследованиях.

В работе [9] проведен анализ ВС-метода и показано, что он не включает процедуру поиска оптимального набора бинов, необходимого для точного определения фрактальной размерности. Предложенный в работе метод  $P$ -адических покрытий (PaC-метод:  $P$ -adic Coverage method) свободен от указанного выше недостатка. Он позволяет автоматически выполнить поиск оптимального набора распределений, определить фрактальную размерность множества, количество уровней и элементов в каждом расщеплении, а также тип фрактала (регулярный или случайный) и его структуру. В основе ВС- и PaC-методов лежит понятие клеточной размерности  $D_b$ :

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}, \quad (2)$$

где  $N(\delta)$  — количество пробников размера  $\delta$ , покрывающих объект. Известно, что для простых фракталов, таких как триадное канторовское множество и фракталы с длиной  $1/k$  допустимых (заполняемых) диапазонов, эти размерности совпадают (здесь  $k$  — количество частей в разбиении пространства на первом уровне). Однако, в общем случае, клеточная размерность  $D_b$  отличается от фрактальной  $D_F$  [13].

В данной работе предложен новый метод систем уравнений для  $P$ -адических покрытий (SePaC-метод: Systems of the equations of  $P$ -adic Coverages), расширяющий область применимости PaC-метода на фракталы с различной длиной  $m/k$  допустимых диапазонов и позволяющий определить фрактальную размерность с заданной точностью. Количество частей  $m$  допустимых диапазонов первого уровня изменяется от 1 до  $(k-1)/2$ . В разд. 1 описан процесс развития партонного ливня с последующей адронизацией и показана его взаимосвязь с фракталами, а также сформулированы различные гипотезы их формирования. В разд. 2 представлены основные идеи SePaC-метода, позволяющего определить размерность и другие характеристики фракталов, и приведено его описание. Результаты анализа фракталов SePaC-методом и их сравнение с результатами, полученными PaC- и ВС-методами, представлены в разд. 3. Основные результаты работы и выводы приведены в заключении.

## 1. ПАРТОННЫЕ ЛИВНИ И ПРОЦЕСС АДРОНИЗАЦИИ КАК ФРАКТАЛЫ

Для анализа взаимодействия адронов и ядер широко используются различные монте-карло-генераторы событий (PYTHIA и JETSET [16], HERWIG [17], SHERPA [18], HIJING [19], ARIADNE [20], UrQMD [21]). Взаи-

модействие адронов рассматривается как взаимодействие партонов. Партоны, выходящие из жесткого взаимодействия, инициируют ливень в конечном состоянии (родительский партон излучает два дочерних). Вводится закон распределения энергии, угловое упорядочение партонов (углы разлета дочерних партонов меньше, чем родительского) и механизм адронизации.

Далее представлен сценарий развития партонного ливня и процесса адронизации, приводящий к образованию фрактала.

На первом шаге, партон  $a$ , выходящий из жесткого взаимодействия и имеющий значение псевдобыстроты  $\eta = 0$  из области возможных значений (например,  $|\eta| \leq 5$ ) излучает два партона  $b$  и  $c$ . Диапазон возможных углов излучения  $(\Theta_+, \Theta_-)$  определяет допустимые части псевдобыстротного пространства ( $\eta$ -пространства) для рожденных партонов\*. Пространство, допустимое для родительского партона, условно делится на  $k$  частей. Далее, в качестве примера, рассмотрим случай, когда  $k = 5$ . Пусть первая часть пространства (диапазон с длиной  $m = 1$ ) допустима для партона  $b$ , а четвертая-пятая части (диапазон с  $m = 2$ ) для партона  $c$ . Партоны  $b$  и  $c$  могут иметь любое значение  $\eta$  из допустимого диапазона. Отметим, что в рассматриваемом случае диапазон, состоящий из двух частей, в процессе дальнейшего деления представляет единый объект, т. е. происходит зависимое деление частей. На каждом последующем шаге развития ливня процесс излучения повторяется при сохранении структуры заполняемых диапазонов, т. е. является регулярным. В дальнейшем такой механизм формирования фрактала будем называть регулярным зависимым делением. В рассматриваемом сценарии партонный ливень развивается до второго уровня включительно (имеется 4 конечных партона, и пространство разбито на  $N_p = 25$  частей). Последующий процесс (адронизация) приводит к образованию частиц, расположение которых совпадает с положением допустимых диапазонов третьего уровня аналогичного партонного каскада (пространство разбито на  $N_p = 125$  частей). В отличие от партонного каскада, количество частиц в допустимом диапазоне может изменяться от единицы до значения, равного количеству частей, составляющих диапазон. В этом случае каждая частица располагается в отдельной части и общее количество частиц равно 27.

На рис. 1, *a* показана схема развития описанного выше сценария. Область возможных углов излучения  $(\Theta_+, \Theta_-)$  отмечена сплошными и пунктирными линиями. В левой части рисунка приведено количество частей  $N_p$  в общем разбиении пространства. В правой части указано количество допустимых диапазонов  $N_r$  и их соответствие количеству партонов или частиц. Над каждым допустимым диапазоном показано количество частей, из которых он состоит.

---

\*Псевдобыстрота  $\eta$  выражается через угол  $\Theta$  следующим соотношением  $\eta = -\ln(\operatorname{tg}(\Theta/2))$ .

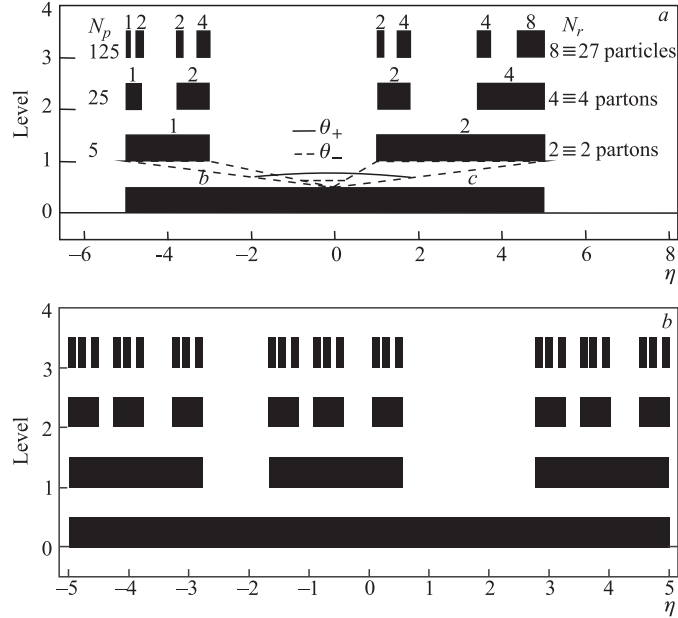


Рис. 1. Партонный ливень и процесс адронизации как фрактал с длиной  $m/k$  допустимых диапазонов. Зависимость допустимых диапазонов  $\eta$ -пространства от уровня фрактала. Регулярные фракталы с зависимым делением, образованные разбиением исходного пространства на  $k$  частей: а)  $k = 5$ , допустимы первая ( $m = 1$ ) и четвертая-пятая ( $m = 2$ ) части первого уровня; б)  $k = 9$ , допустимы первая-вторая ( $m = 2$ ), четвертая-пятая ( $m = 2$ ) и восьмая-девятая ( $m = 2$ ) части первого уровня

Величины  $N_r$  и  $N_p$  для каждого уровня связаны степенным законом

$$N_r = N_p^s, \quad (3)$$

где значение  $s$  определяется формулой  $s = \ln N_r^1 / \ln k$  ( $N_r^1$  — количество допустимых диапазонов первого уровня) и в рассматриваемом случае равно  $\ln 2 / \ln 5 \approx 0,4307 \dots$ . Таким образом, показатель степени  $s$  зависит от структуры фрактала, но, как будет показано ниже, не совпадает с фрактальной размерностью  $D_F$ .

Используя уравнение (1), определим фрактальную размерность множества. В рассмотренном примере в  $n$ -м поколении количество пробников  $N = 2^n$ , самый короткий имеет длину  $(1/5)^n$ , самый длинный —  $(2/5)^n$ , всего —  $n!/(p!(n-p)!)$  отрезков, длина которых  $(1/5)^p(2/5)^{n-p}$ , где  $p = 0, 1, \dots, n$ .

Мера  $M$  в  $n$ -м поколении представима в виде

$$M = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} (1/5)^{pD_F} (2/5)^{(n-p)D_F} = ((1/5)^{D_F} + (2/5)^{D_F})^n \quad (4)$$

и имеет конечное значение при  $n \rightarrow \infty$ , если величина  $D_F$  удовлетворяет уравнению

$$(1/5)^{D_F} + (2/5)^{D_F} = 1. \quad (5)$$

Численное решение уравнения (5) соответствует значению фрактальной размерности  $D_F \approx 0,5639\dots$

Далее покажем, что ВС- и РаС-методы не позволяют точно определить размерность  $D_F$  рассматриваемого фрактала. Используя уравнение (2), определим клеточную размерность. В  $n$ -м поколении число пробников и их размер определяются выражениями  $N(\delta) = 3^n$  и  $\delta = (1/5)^n$  соответственно. В этом случае клеточная размерность равна величине  $D_b = \ln 3 / \ln 5 \approx 0,6826\dots$  Относительная разность  $|D_F - D_b| / D_F$  составляет 21%. В данной работе будет развит новый SePaC-метод, позволяющий определять фрактальную размерность этого множества с предварительно заданной точностью, значительно превышающей точность ВС- и РаС-методов.

Рассмотренный фрактал обычно называют фракталом с неравными отношениями (допустимые диапазоны имеют разную длину). Отметим, что допустимые диапазоны могут иметь равную длину и их количество на первом уровне фрактала может быть больше двух. В общем случае уравнение для вычисления фрактальной размерности имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N_r^1} d_i^{D_F} = 1. \quad (6)$$

Здесь  $N_r^1$  — количество пробников (допустимых диапазонов) первого уровня;  $d_i$  — размеры пробников, покрывающих фрактал (длины допустимых диапазонов) на первом уровне.

В качестве примера рассмотрим фрактал, образованный регулярным зависимым делением. Предположим, что в процессе развития партонного ливня исходное  $\eta$ -пространство на первом уровне условно делится на девять частей. Образуются три партона с допустимыми первой-второй (диапазон с  $m = 2$ ), четвертой-пятой (диапазон с  $m = 2$ ) и восьмой-девятой (диапазон с  $m = 2$ ) частями. На каждом последующем шаге процесс деления (излучения) повторяется, сохраняя структуру допустимых диапазонов. Первые три уровня фрактала приведены на рис. 1, б. Фрактальная размерность является решением уравнения

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{D_F} + \left(\frac{2}{9}\right)^{D_F} + \left(\frac{2}{9}\right)^{D_F} = 1 \quad (7)$$



и равна  $D_F \approx 0,7304\dots$ . Клеточная размерность равна  $D_b = \ln 6 / \ln 9 \approx 0,8155\dots$ . Относительная разность  $|D_F - D_b| / D_F$  составляет 11 %.

Далее рассмотрим фрактал, образование которого происходило случайным зависимым делением. Предположим, что в процессе развития партонного ливня исходное  $\eta$ -пространство на первом уровне условно делится на пять частей. Образуются два партона с допустимыми диапазонами, состоящими из одной ( $m = 1$ ) и двух ( $m = 2$ ) частей. Диапазоны располагаются случайно, не соприкасаясь друг с другом. На каждом последующем шаге процесс деления (излучения) повторяется при сохранении количества и длины допустимых диапазонов. Первые три уровня фрактала приведены на рис. 2, а.

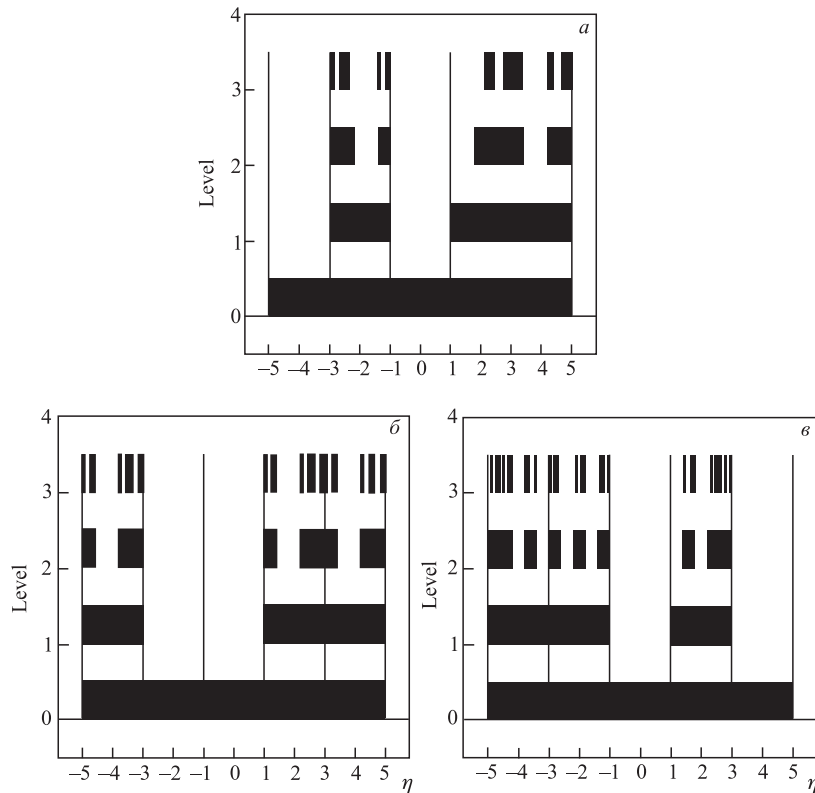


Рис. 2. Зависимость допустимых диапазонов  $\eta$ -пространства от уровня фрактала. Фракталы, образованные делением исходного пространства на пять частей (отмеченные вертикальными линиями). а) Случайный фрактал с зависимым делением и двумя допустимыми диапазонами с длинами  $m = 1$  и  $m = 2$  на первом уровне. Фракталы с независимым делением: б) регулярный с допустимыми первой ( $m = 1$ ), четвертой ( $m = 1$ ), пятой ( $m = 1$ ) частями первого уровня, в) случайный с тремя допустимыми диапазонами и равными длинами  $m = 1$  на первом уровне

Размерности  $D_F$  и  $D_b$  этого множества совпадают с размерностями фрактала, изображенного на рис. 1, *а*.

Рассмотренные ранее фракталы формировались регулярным или случайным зависимым делением частей. Для них значения размерностей  $D_F$  и  $D_b$  различны. Поэтому применение ВС- и РаС-методов, в основе которых лежит определение клеточной размерности  $D_b$ , не позволяет определить фрактальную размерность  $D_F$ .

Размерности  $D_F$  и  $D_b$  фрактала совпадают, если длины всех допустимых диапазонов первого уровня равны  $1/k$ . В качестве примера рассмотрим следующий фрактал (см. рис. 2, *б*). Предположим, что в процессе развития ливня исходное  $\eta$ -пространство на первом уровне условно делится на пять частей. Образуются три партона с допустимыми первой (диапазон с  $m = 1$ ), четвертой (диапазон с  $m = 1$ ) и пятой (диапазон с  $m = 1$ ) частями. Каждая из допустимых частей в процессе дальнейшего деления рассматривается как независимый объект с повторяющейся структурой на каждом уровне. Первые три уровня фрактала приведены на рис. 2, *б*. Процесс его формирования будем называть регулярным независимым делением. Фрактальная размерность является решением уравнения

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{D_F} + \left(\frac{1}{5}\right)^{D_F} + \left(\frac{1}{5}\right)^{D_F} = 1 \quad (8)$$

и равна  $D_F = \ln 3 / \ln 5 \approx 0,6826 \dots$ . Клеточная размерность  $D_b$  совпадает с фрактальной. Отметим, что вычисления размерности описанного фрактала методами ВС (с использованием набора распределений, количество бинов которого изменяется по степеням основания 5) и РаС приводят к точному значению фрактальной размерности.

Фракталы, образованные случайным независимым делением, также имеют равные значения размерностей  $D_b$  и  $D_F$ . В качестве примера рассмотрим следующий фрактал (см. рис. 2, *в*). Предположим, что в процессе развития ливня исходное  $\eta$ -пространство на первом уровне условно делится на пять частей. Образуются три партона с допустимыми диапазонами, состоящими из одной ( $m = 1$ ) части. Диапазоны располагаются случайно. На каждом последующем шаге процесс излучения повторяется с сохранением количества и длины допустимых диапазонов. На рис. 2, *в* показаны первые три уровня фрактала. Фрактальная и клеточная размерности этого множества равны между собой и совпадают с размерностями фрактала, представленного на рис. 2, *б*.

Таким образом, условие при котором уравнения (1) и (2) имеют одинаковые решения, соответствует длине  $1/k$  допустимых диапазонов первого уровня (т. е. фракталам, образованным регулярным или случайным независимым делением). Анализ таких множеств был проведен в статье [9].

В заключение раздела отметим, что развитие партонного ливня с последующей адрионизацией может привести к образованию фракталов с различной

длиной  $m/k$  допустимых диапазонов первого уровня. Фракталы разделяются на классы, соответствующие различным процессам их формирования: регулярному и случайному независимому и зависимому делению частей. Фракталы, образованные независимым делением, имеют равные значения фрактальной  $D_F$  и клеточной  $D_b$  размерностей, определяемые PaC-методом [9]. Значения  $D_F$  и  $D_b$  различны для фракталов, образованных зависимым делением. В следующем разделе будет предложен SePaC-метод, позволяющий определить размерность  $D_F$  таких фракталов с заданной точностью.

## 2. SePaC-МЕТОД

В этом разделе приведены основные идеи и описан SePaC-метод, позволяющий анализировать фракталы с различной длиной  $m/k$  допустимых диапазонов исходного пространства. Этот метод автоматически выполняет подбор оптимального набора пробников, необходимых для определения размерностей фракталов, и аналогично PaC-методу может быть применен к анализу большого числа данных (например, событий по рождению частиц или струй во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий). SePaC-метод позволяет определять как фрактальную размерность исследуемого множества с заданной точностью, так и другие его характеристики (тип и структуру, количество уровней и элементов в расщеплении).

**2.1. Основные идеи SePaC-метода.** В основу SePaC-метода заложены следующие закономерности. Набор пробников для точного вычисления фрактальной размерности должен совпадать с элементами фрактала на каждом уровне его формирования. В этом случае уравнения системы (9) характеризуют каждый уровень в отдельности:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \sum_{i=1}^{N_1} (l_{1,i})^{D_F} = 1, \\ \vdots \\ M_k = \sum_{i=1}^{N_k} (l_{k,i})^{D_F} = 1 \end{array} \right. \quad (9)$$

и имеют одинаковые решения. Здесь  $N_k$  — количество допустимых диапазонов (пробников, покрывающих объект) на уровне  $k$  и  $l_{k,i}$  — длина допустимых диапазонов на рассматриваемом уровне. Для выбора этого набора рассматриваются различные  $P$ -адические покрытия. Для каждого покрытия анализируются гипотезы формирования фрактала (регулярного и случайного независимого и зависимого деления). При рассмотрении гипотез для каждого уровня составляется система уравнений (9). Численные решения  $D_F^{\text{lev}}$  находятся, например, методом деления отрезка пополам с заданной точностью  $\text{Prсc}$ . Вычисляется среднее значение фрактальных размерностей для

всех уровней  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$  и отклонение от среднего значения для каждого уровня. Если отклонение от среднего значения для всех уровней не превышает значения точности  $P_{\text{res}}$ , то рассматриваемое  $P$ -адическое покрытие считается оптимальным и рассматриваемая гипотеза подтвержденной. Дальнейшее рассмотрение гипотез и  $P$ -адических покрытий прекращается. Значение фрактальной размерности определяется средним значением  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$ , а его точность величиной  $\text{Dev}$ .

В качестве примера рассмотрим построение системы уравнений  $P$ -адических покрытий (9), используя оптимальный набор пробников, для фрактала, изображенного на рис. 1, *a*. На первом уровне пространство разбито на пять частей, допустимы первая (длина диапазона  $1/5$ ) и четвертая-пятая части (длина диапазона  $2/5$ ). Уравнение для первого уровня имеет вид

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{D_F} + \left(\frac{2}{5}\right)^{D_F} = 1. \quad (10)$$

На втором уровне пространство разбито на 25 частей. Допустимы четыре диапазона. Длина первого равна  $1/25$ , второго —  $2/25$ , третьего —  $2/25$ , четвертого —  $4/25$ . Уравнение для второго уровня имеет вид

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{D_F} + 2\left(\frac{2}{25}\right)^{D_F} + \left(\frac{4}{25}\right)^{D_F} = 1. \quad (11)$$

На третьем уровне пространство разбито на 125 частей. Допустимы восемь диапазонов. Длина первого равна  $1/125$ , второго —  $2/125$ , третьего —  $2/125$ , четвертого —  $4/125$ , пятого —  $2/125$ , шестого —  $4/125$ , седьмого —  $4/125$ , восьмого —  $8/125$ . Уравнение для третьего уровня имеет вид

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{D_F} + 3\left(\frac{2}{125}\right)^{D_F} + 3\left(\frac{4}{125}\right)^{D_F} + \left(\frac{8}{125}\right)^{D_F} = 1. \quad (12)$$

Численные решения уравнений (10)–(12) совпадают и определяют значение фрактальной размерности  $D_F \approx 0,5639\dots$

**2.2. Описание SePaC-метода.** В качестве фрактала рассмотрим множество частиц в псевдобыстротном пространстве. Пусть каждая частица имеет значением псевдобыстроты  $\eta$ , измеренное с точностью  $\Delta\eta$ . Значения  $\eta$  измеряются в диапазоне  $(\eta_{\min}, \eta_{\max})$ . Приведем пошаговое описание алгоритма, реализующего SePaC-метод, и более детальный комментарий некоторых пунктов, требующих пояснения. Алгоритм, реализующий SePaC-метод, состоит из следующих шагов:

1. Считываются входные данные  $\{\eta_i\}$  — значения псевдобыстрот конечных частиц.

2. Определяется количество уровней бинарного процесса  $N_{\text{bin}} = \log_2 N_{\text{part}}$ , где  $N_{\text{part}}$  — количество конечных частиц.
3. Определяется величина  $P_{\text{max}} = \text{целая часть } \sqrt[3]{(\eta_{\text{max}} - \eta_{\text{min}})/\Delta\eta}$ , характеризующая максимальное  $P$ -адическое покрытие.
4. Строятся различные  $P$ -адические покрытия пространства. Каждое покрытие содержит набор разбиений пространства. В каждом наборе количество ячеек в разбиениях изменяется по степенному закону  $N_{\text{lev}} = (P)^{\text{lev}}$ . Основание  $P = 2, 3, 4, \dots, P_{\text{max}}$  является характеристикой  $P$ -адического покрытия. Величина  $\text{lev} = 1, \dots, N_{\text{bin}}$  характеризует количество разбиений пространства в данном покрытии и соответствует уровню фрактала. Для каждого из покрытий проводится анализ, описанный в последующих пунктах.
5. Определяется количество ненулевых (содержащих хотя бы одну частицу) ячеек  $N(\text{lev}, P)$  для каждого уровня  $\text{lev}$  рассматриваемого  $P$ -адического покрытия.
6. Определяется количество уровней  $N_{\text{lev}}$  для текущего  $P$ -адического покрытия. Если  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$ , то  $N_{\text{lev}} = \text{lev}$ . В противном случае  $N_{\text{lev}} = N_{\text{bin}}$ .
7. Рассмотрение  $P$ -адического покрытия прекращается, если  $N_{\text{lev}} = 1$  или  $N_{\text{part}} \neq N(N_{\text{lev}}, P)$ .
8. Проверяется гипотеза регулярного независимого деления частей:
  - а) рассмотрение  $P$ -адического покрытия прекращается, если  $N(\text{lev}, P) \neq N(1, P)^{\text{lev}}$ ;
  - б) проводится анализ массивов структур;
  - в) проводится анализ системы уравнений (9).
9. Если гипотеза п. 8 не подтверждается, то проверяется гипотеза регулярного зависимого деления частей:
  - а) определяется количество диапазонов  $N_r(\text{lev}, P)$  и их длина  $m/k$ ;
  - б) рассмотрение  $P$ -адического покрытия прекращается, если  $N_r(1, P) = 1$  или  $N_r(\text{lev}, P) \neq N_r(1, P)^{\text{lev}}$ ;
  - в) проводится анализ массивов структур;
  - г) проводится анализ систем уравнений (9).
10. Если гипотезы пп. 8–9 не подтверждаются и условие п. 8а не выполнено, то проверяется гипотеза случайного независимого деления частей (анализируется система уравнений (9)).
11. Если гипотезы пп. 8–10 не подтверждаются и условие п. 9б не выполнено, то проверяется гипотеза случайного зависимого деления частей (анализируется система уравнений (9)).
12. При выполнении одной из гипотез фиксируется оптимальное покрытие  $P$  (рассматриваемое) и определяются характеристики фрактала:
  - а) значение фрактальной размерности  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle \pm \text{Dev}$ ;
  - б) количество уровней фрактала  $N_{\text{lev}}$ ;

- в) тип фрактала (подтвердившаяся гипотеза);
- г) структура фрактала:
  - количество частей в разбиении пространства на первом уровне  $k = P$ ;
  - количество допустимых диапазонов ( $N_r(1, P)$  для гипотез с зависимым делением и количество ненулевых элементов  $N(1, P)$  для гипотез с независимым делением);
  - длина допустимых диапазонов ( $m/k$  для гипотез с зависимым делением и  $1/k$  для гипотез с независимым делением);
  - заполняемые части для регулярных фракталов (номера ненулевых элементов в массиве структур первого уровня).

Поясним некоторые условия и введенные в пунктах алгоритма величины, а также опишем схемы анализа массивов структур и системы уравнений (9).

В п. 2 определяется  $N_{\text{bin}}$  — количество уровней бинарного процесса (в каждом акте деления образуются два новых объекта). В таком процессе количеством уровней будет максимальным. Значение  $N_{\text{bin}}$  используется как верхняя граница для количества уровней фрактала.

В п. 3 определяется значение  $P_{\text{max}}$  — максимально возможного  $P$ -адического покрытия. Поскольку псевдобыстроты частиц измеряются в диапазоне  $(\eta_{\text{min}}, \eta_{\text{max}})$ , то количество ячеек максимального покрытия не должно превышать значения величины  $(\eta_{\text{max}} - \eta_{\text{min}})/\Delta\eta$ . Больше количество ячеек излишне, так как соответствует более высокой точности измерения. Предполагается, что минимальное количество уровней фрактала, необходимое для анализа, равно трем. Так как в каждом покрытии число ячеек в разбиениях изменяется по степенному закону  $N_{\text{lev}} = (P)^{\text{lev}}$ , то количество ячеек максимального покрытия равно  $(P_{\text{max}})^3$ . Величина  $P_{\text{max}}$  определяется из условия  $(P_{\text{max}})^3 = (\eta_{\text{max}} - \eta_{\text{min}})/\Delta\eta$ . Целочисленное решение этого уравнения определяет значение максимально возможного  $P$ -адического покрытия.

В п. 6 определяется количество уровней  $N_{\text{lev}}$  для текущего  $P$ -адического покрытия. Количество заполненных ячеек  $N(\text{lev}, P)$  не изменится, если число уровней больше, чем реально существует. Условие насыщения величины  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$  для фиксированного значения  $P$  определяет количество уровней  $N_{\text{lev}} = \text{lev}$  фрактала. Отсутствие насыщения соответствует наличию бинарного процесса и  $N_{\text{lev}} = N_{\text{bin}}$ .

В п. 7 описаны условия, при которых рассмотрение текущего  $P$ -адического покрытия прекращается. Фрактал образуется процессом многократного деления частей, поэтому не может содержать один уровень. Кроме этого, если разбиение пространства выбрано правильно, то количество ненулевых частей на последнем уровне  $N(N_{\text{lev}}, P)$  должно совпадать с количеством частиц в событии  $N_{\text{part}}$ . При нарушении хотя бы одного из этих условий рассмотрение  $P$ -адического покрытия прекращается.

Если условия п. 7 выполнены, то последовательно рассматриваются гипотезы регулярного независимого и зависимого деления частей, случайного

независимого и зависимого деления. Подтверждение одной из гипотез фиксирует оптимальное  $P$ -адическое покрытие (рассматриваемое) и переводит алгоритм в п. 12, где определяются характеристики фрактала.

В п. 8 проверяется гипотеза регулярного независимого деления частей. При формировании множества согласно этой гипотезе количество допустимых диапазонов совпадает с количеством ненулевых ячеек  $N(\text{lev}, P)$ . При этом величина  $N(1, P)$  определяет количество допустимых диапазонов на первом уровне. На каждом уровне количество диапазонов должно удовлетворять условию  $N(\text{lev}, P) = N(1, P)^{\text{lev}}$ . Для дальнейшей проверки этой гипотезы проводятся анализы массивов структур и систем уравнений, которые описаны ниже.

В п. 9 проверяется гипотеза регулярного зависимого деления частей. Для каждого  $P$ -адического покрытия и уровня  $\text{lev}$  определяется количество допустимых диапазонов  $N_r(\text{lev}, P)$  и их длины. Величина  $N_r(1, P)$  определяет количество допустимых диапазонов на первом уровне. На каждом уровне количество диапазонов должно удовлетворять условию  $N_r(\text{lev}, P) = N_r(1, P)^{\text{lev}}$ . Для дальнейшей проверки этой гипотезы проводится анализы массивов структур и систем уравнений (9).

Опишем более детально процедуру анализа массивов структур, используемую в пп. 8б, 9в.

1. Определяются массивы структур на каждом уровне (см. приложение).
2. Проверяется регулярность каждого уровня. Уровень считается регулярным, если структуры внутри уровня самоподобны.
3. Проверяется регулярность фрактала. Фрактал считается регулярным, если каждый уровень регулярный и структуры уровней самоподобны.
4. Рассмотрение гипотезы прекращается, если фрактал не является регулярным.

Процедура анализа системы уравнений (9) используется в пп. 8в, 9г, 10, 11. Ниже приведем ее пошаговое описание.

1. Составляется система уравнений (9) для каждого уровня.
2. Определяются значения  $D_F^{\text{lev}}$ , являющиеся решением уравнений (9). Решения находятся методом деления отрезка пополам.
3. Определяется среднее значение фрактальной размерности  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle = \sum_{\text{lev}=1}^{N_{\text{lev}}} D_F^{\text{lev}} / N_{\text{lev}}$  и отклонение  $\Delta D_F^{\text{lev}} = |\langle D_F^{\text{lev}} \rangle - D_F^{\text{lev}}|$  для всех уровней.
4. Рассмотрение гипотезы прекращается, если условие точности  $\Delta D_F^{\text{lev}} < \text{Dev}$  не выполнено.

Отметим, что величина  $\text{Dev}$  является единственным параметром алгоритма.

Таким образом, в данном подразделе описан SePaC-метод, позволяющий анализировать фрактальные пространства с длиной  $m/k$  допустимых диапазонов.

### 3. АНАЛИЗ ФРАКТАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ SePaC-МЕТОДА

В этом разделе демонстрируются возможности SePaC-метода, а также приведено сравнение результатов анализа различных фракталов ВС-, PaC- и SePaC-методами. В качестве анализируемых фрактальных множеств рассматриваются наборы значений псевдобыстрот  $\{\eta_i\}$  частиц, образующихся согласно процедурам, описанным в разд. 1. Считается, что процесс адронизации сохраняет принцип формирования пространственной структуры партонового ливня, при этом частицы заполняют каждую часть допустимого диапазона  $\eta$ -пространства. Значение  $\eta$  для каждой частицы определяется средним значением части псевдобыстротного пространства, в которую она попадает. В рассматриваемом методе определяется величина максимального  $P$ -адического покрытия  $P_{\max}$ , которая зависит от точности измерения величины  $\eta$ . Выбор  $P_{\max} = 10$  и значения параметра алгоритма  $\text{Dev} = 0,0001$  достаточен для определения характеристик фракталов, рассматриваемых в этой работе\*.

**3.1. Регулярные фракталы с зависимым делением частей.** В данном подразделе приведены результаты анализа SePaC-методом различных фракталов, образованных согласно гипотезе регулярного зависимого деления частей. В подразд. 3.1.1 и 3.1.2 рассмотрены фракталы с неравными и равными отношениями длин диапазонов  $m/k$ , соответственно.

*3.1.1. Фракталы с неравными отношениями.* Фрактал с неравными отношениями длин допустимых диапазонов  $m/k$  изображен на рис. 1, а. В процессе его формирования исходное пространство условно делилось на пять частей с допустимыми первой (диапазон с  $m = 1$ ) и четвертой-пятой (диапазон с  $m = 2$ ) частями. Рассмотрим пять уровней фрактала. Количество конечных частиц равно  $N_p = 243$ , а фрактальная размерность  $D_F \approx 0,5639 \dots$  (см. разд. 1).

Далее опишем работу алгоритма SePaC-метода на примере этого фрактала. В п.3 подразд. 2.2 определяется значение величины  $N_{\text{bin}} = 7$ . В процессе анализа рассматриваются различные  $P$ -адические покрытия. Каждое покрытие содержит набор разбиений пространства. В каждом наборе количество ячеек изменяется по степенному закону  $N_{\text{lev}} = (P)^{\text{lev}}$ , где основание  $P = 2, 3, 4, \dots, P_{\max}$ , а  $\text{lev} = 1, \dots, N_{\text{bin}}$ . Анализ покрытий с  $P = 1, 2, 3, 4$  не подтвердил ни одну из рассматриваемых гипотез (пп. 4–11, подразд. 2.2), поэтому далее приведем детальное рассмотрение покрытия с  $P = 5$ .

---

\*Влияние точности измерения величины  $\eta$  и параметра  $\text{Dev}$  на результаты фрактального анализа будет рассмотрено в отдельной работе.



В п. 5 определяется количество ненулевых бинов  $N(\text{lev}, 5)$  для каждого уровня  $\text{lev}$  рассматриваемого покрытия:  $N(1, 5) = 3$ ,  $N(2, 5) = 8$ ,  $N(3, 5) = 22$ ,  $N(4, 5) = 62$ ,  $N(5, 5) = 243$ ,  $N(6, 5) = 243$ ,  $N(7, 5) = 243$ .

В п. 6 выполнено условие насыщения  $N(5, 5) = N(6, 5)$ , согласно которому определяется количество уровней  $N_{\text{lev}} = 5$ .

В п. 7 условия  $N_{\text{lev}} = 1$  и  $N_{\text{part}} \neq N(5, 5)$  не выполняются, поэтому дальнейший анализ рассматриваемого покрытия с  $P = 5$  продолжается.

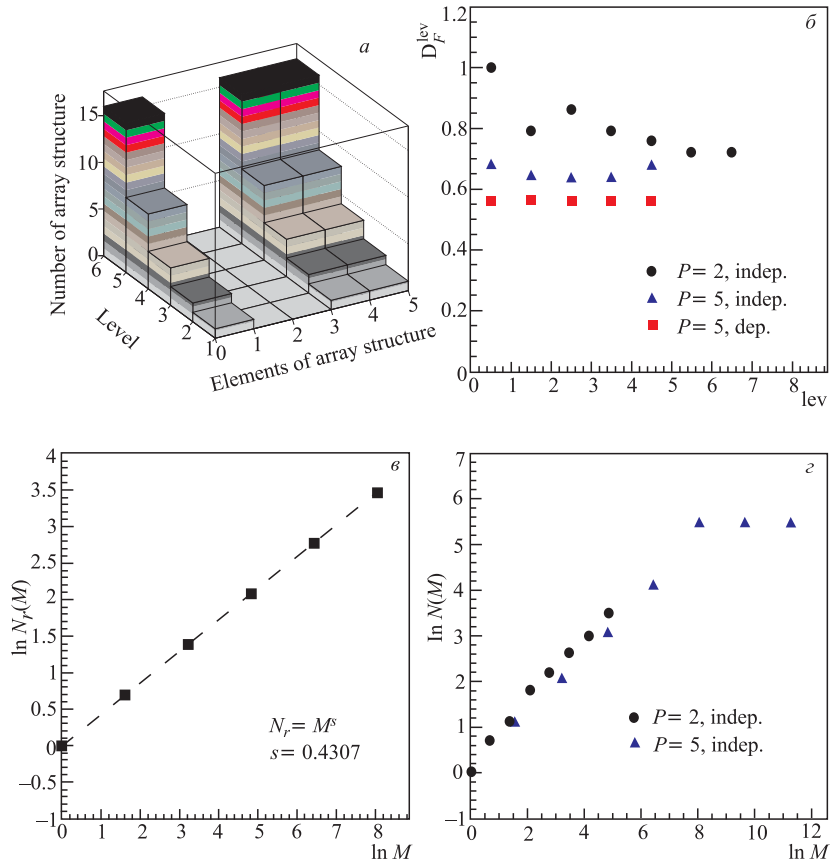


Рис. 3. Регулярный фрактал с зависимым делением, образованный разбиением исходного пространства на пять частей с допустимыми первой ( $m = 1$ ) и четвертой-пятой ( $m = 2$ ) частями. а) Зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. б) Зависимость значений  $D_F^{\text{lev}}$  от уровня  $\text{lev}$ . в) Зависимость количества диапазонов  $N_r$  от количества ячеек  $M$  в разбиениях для оптимального  $P$ -адического покрытия. з) Зависимость количества ненулевых бинов  $N$  от количества бинов  $M$  в распределениях покрытий с  $P = 2$  и 5

В п. 8 проверяется гипотеза регулярного независимого деления частей. Количество ненулевых бинов  $N(\text{lev}, 5)$  на каждом уровне  $\text{lev}$  в случае ее выполнения должно удовлетворять условию  $N(\text{lev}, 5) = N(1, 5)^{\text{lev}}$  (п. 8а). Найденные значения  $N(1, 5) = 3$  и  $N(2, 5) = 8$  отвергают рассматриваемую гипотезу.

В п. 9 проверяется гипотеза регулярного зависимого деления частей. Определяется количество диапазонов  $N_r(\text{lev}, 5)$  для каждого уровня  $\text{lev}$ :  $N_r(1, 5) = 2$ ,  $N_r(2, 5) = 4$ ,  $N_r(3, 5) = 8$ ,  $N_r(4, 5) = 16$ ,  $N_r(5, 5) = 32$ . Выполнение условия  $N_r(\text{lev}, 5) = N_r(1, 5)^{\text{lev}}$  (п. 9б) разрешает дальнейшую проверку гипотезы. В п. 9в проводится анализ массивов структур разных уровней. На рис. 3, а показана зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. Видно, что фрактал является регулярным (массивы структур внутри уровней одинаковы и совпадают для каждого из уровней). В п. 9г проводится анализ системы уравнений (9). Значения  $D_F^{\text{lev}}$  решений уравнений для каждого уровня  $\text{lev}$  показаны (темный квадрат) на рис. 3, б. Отклонения  $\Delta D_F^{\text{lev}}$  от среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle = 0,5639$  для каждого уровня удовлетворяют условию точности  $\Delta D_F^{\text{lev}} < \text{Dev}$ . Таким образом, основание с  $P = 5$  является оптимальным и гипотеза регулярного зависимого деления частей подтверждается. Оставшиеся гипотезы не рассматриваются.

На рис. 3, б также показаны решения  $D_F^{\text{lev}}$  уравнений (9) для покрытия с основаниями  $P = 2$  (темный круг) и  $P = 5$  (темный треугольник), соответствующие гипотезам регулярного независимого деления частей. Видно, что для  $P = 2$  значения  $D_F^{\text{lev}}$  существенно отличаются на разных уровнях и не удовлетворяют условию точности. С увеличением числа уровней значения  $D_F^{\text{lev}}$  сходятся к величине, отличной от истинной фрактальной размерности  $D_F = 0,5639 \dots$  (см. разд. 1). Меньший разброс значений  $D_F^{\text{lev}}$  наблюдается для основания  $P = 5$ , но и в этом случае условие точности не выполняется и предельное значение отличается от истинного.

Далее, в п. 12 определяются характеристики фрактала. Значение фрактальной размерности  $D_F = 0,5639 \pm 0,0001$  определяется средним значением  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$ , а точность соответствует величине  $\text{Dev}$ . Количество уровней фрактала  $N_{\text{lev}}$  равно 5. Рассматриваемый фрактал является регулярным с зависимым делением (тип подтвердившейся гипотезы). Количество частей  $k = 5$  в разбиении пространства на первом уровне определяется величиной  $P$  оптимального покрытия. Количество допустимых диапазонов, равное величине  $N_r(1, 5) = 2$ , интерпретируется как количество партонов в каждом акте деления в процессе развития ливня. При этом номера ненулевых элементов (1, 4 и 5-й) в массиве структур (см. рис. 3, а) первого уровня определяют расположение допустимых диапазонов для каждого из партонов, т. е. геометрию развития ливня в  $\eta$ -пространстве.

Зависимость количества диапазонов  $N_r$  от количества ячеек  $M$  в разбиениях  $\eta$ -пространства для оптимального  $P$ -адического покрытия в дважды

логарифмическом масштабе показана на рис. 3, в. Полученная зависимость описывается степенным законом  $N_r = M^s$ . Найденное значение  $s = 0,4307$  соответствует величине  $\chi^2 < 10^{-30}$  аппроксимации и совпадает со значением коэффициента  $s = \ln 2 / \ln 5$ , определенного в разд. 1.

Ниже приведены результаты сравнительного анализа SePaC-, BC- и PaC-методов. Напомним, что в BC- и PaC-методе [9] фрактальная размерность  $D_F$  определяется величиной наклона зависимости (представленной в дважды логарифмическом масштабе) количества ненулевых бинов  $N$  от количества бинов  $M$  в распределениях. В BC-методе рассматривается один набор распределений (одно покрытие). В PaC-методе анализируются различные наборы ( $P$ -адические покрытия), из которых выбирается оптимальный. На рис. 3, г представлена зависимость  $\ln N$  от  $\ln M$  в наборах распределений. Количество бинов в рассмотренных наборах распределений изменяется по степенному закону  $M = (P)^{\text{lev}}$ , где  $P = 2$  и  $5$  ( $P = 2$  наиболее часто используется в BC-методе,  $P = 5$  оптимально для данного фрактала в PaC-методе). Значения  $\chi^2$  линейной аппроксимации и вычисленного значения фрактальной размерности  $D_F^{\text{meth}}$  с ошибкой  $\Delta D_F^{\text{meth}}$  приведены в табл. 1. Относительное отклонение  $\epsilon = |D_F^{\text{meth}} - D_F| / D_F$  вычисленного значения от истинного  $D_F \approx 0,5639 \dots$  (см. разд. 1.) составляет 24 и 19% для BC- и PaC-методов соответственно. В последней строке таблицы приведено значение размерности, определенное SePaC-методом. Как можно видеть, в пределах точности оно совпадает с истинным значением. Отметим, что при использовании BC-метода с  $P = 2$  результат зависит от количества аппроксимируемых точек.

**Таблица 1. Результаты сравнительного анализа регулярного и случайного фракталов с зависимым делением, образованных разбиением исходного пространства на пять частей и двумя допустимыми диапазонами с длиной  $m = 1$  и  $m = 2$ , проведенного BC-, PaC- и SePaC-методами**

Метод	$P$	$\chi^2$	$D_F \pm \Delta D_F$	$\epsilon \cdot 100\%$
BC	2	0,08	$0,70 \pm 0,02$	24 %
PaC	5	0,06	$0,67 \pm 0,01$	19 %
SePaC	5	—	$0,5639 \pm 0,0001$	0 %

**3.1.2. Фракталы с равными отношениями.** Далее рассмотрим фрактал с равными отношениями  $m/k$  длин допустимых диапазонов, изображенный на рис. 1, б. В процессе его формирования исходное пространство условно делилось на девять частей с допустимыми первой-второй (диапазон с  $m = 2$ ), четвертой-пятой (диапазон с  $m = 2$ ) и восьмой-девятой (диапазон с  $m = 2$ ) частями. Рассмотрим четыре уровня фрактала. Количество конечных частиц равно  $N_{\text{part}} = 1296$ , а фрактальная размерность  $D_F \approx 0.7304 \dots$  (см. разд. 1).

Опишем работу алгоритма SePaC-метода на примере этого фрактала. В п. 3 (подразд. 2.2) определяется значение величины  $N_{\text{bin}} = 10$ . Анализ

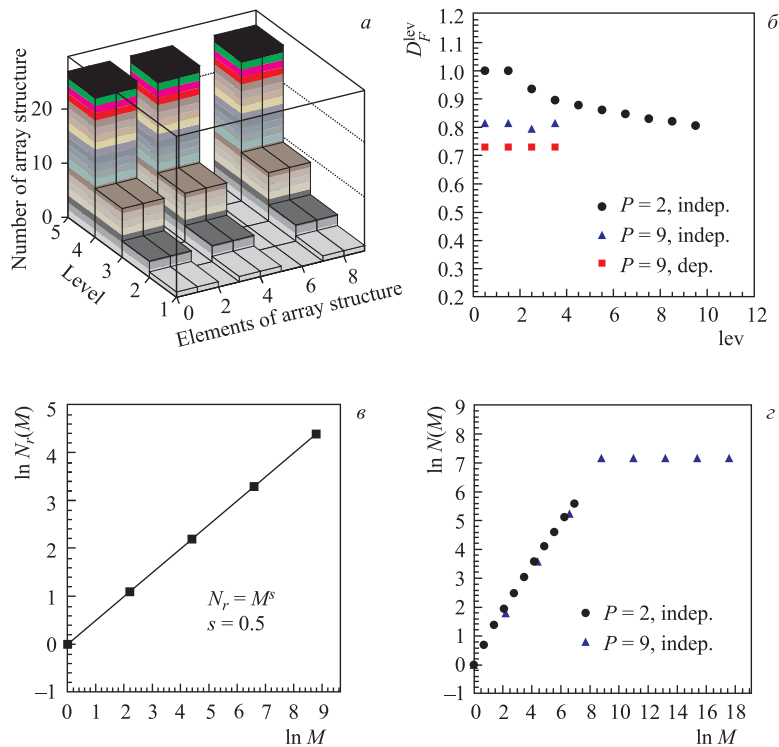


Рис. 4. Регулярный фрактал с зависимым делением, образованный разбиением исходного пространства на девять частей с допустимыми первой-второй ( $m = 2$ ), четвертой-пятой ( $m = 2$ ) и восьмой-девятой ( $m = 2$ ) частями. а) Зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. б) Зависимость значений  $D_F^{\text{lev}}$  от уровня lev. в) Зависимость количества диапазонов  $N_r$  от количества ячеек  $M$  в разбиениях для оптимального  $P$ -адического покрытия. г) Зависимость количества ненулевых бинов  $N$  от количества бинов  $M$  в распределениях покрытий с  $P = 2$  и 9

покрытий с  $P = 1, 2, \dots, 8$  не подтвердил ни одну из гипотез (пп. 4–11, подразд. 2.2), поэтому рассматривается покрытие с  $P = 9$ . Условие насыщения количества ненулевых бинов в зависимости от уровня определяет количество уровней фрактала  $N_{\text{lev}} = 4$  (п. 6). Так как количество уровней не равно 1 и количество частиц совпадает с количеством ненулевых элементов на последнем уровне, то дальнейший анализ рассматриваемого покрытия продолжается (п. 7). Количество ненулевых бинов нарушает условие  $N(\text{lev}, 9) = N(1, 9)^{\text{lev}}$  (п. 8а), т. е. гипотеза регулярного независимого деления частей не подтверждается. Количество диапазонов для разных уровней

удовлетворяет условию  $N_r(\text{lev}, 9) = N_r(1, 9)^{\text{lev}}$  (п. 9б), что позволяет далее рассматривать гипотезу регулярного зависимого деления частей.

Результаты анализа массивов структур разных уровней (п. 9в) представлены на рис. 4, а. Зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала указывает на его регулярность (массивы структур внутри уровней одинаковы и совпадают для каждого из уровней). Значение решений  $D_F^{\text{lev}}$  уравнений (9) для каждого уровня lev представлено (темный квадрат) на рис. 4, б. Гипотеза регулярного зависимого деления частей подтверждается, так как отклонение  $\Delta D_F^{\text{lev}}$  от среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle = 0,7304$  не превышает значения Dev (п. 9г). Таким образом, оптимальным является покрытие с  $P = 9$  и гипотеза регулярного зависимого деления частей подтверждается. Оставшиеся гипотезы не рассматриваются.

На рис. 4, б также показаны решения  $D_F^{\text{lev}}$  уравнений (9) для покрытия с основанием  $P = 2$  (темный круг) и  $P = 9$  (темный треугольник), полученные для гипотез регулярного независимого деления частей. Видно, что решения уравнений (9) для разных уровней с основаниями  $P = 2$ , а также  $P = 9$  заметно отличаются. Отклонение от среднего значительно превосходит точность Dev решения уравнений (9) в обоих случаях. С увеличением числа уровней значения  $D_F^{\text{lev}}$  сходятся к величинам, отличным от истинной фрактальной размерности  $D_F = 0,7304 \dots$  (см. разд. 1).

Далее, в п. 12 определяются характеристики фрактала. Среднее значение  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$  и значение Dev определяют фрактальную размерность множества и ее точность  $D_F = 0,7304 \pm 0,0001$ . Количество уровней фрактала  $N_{\text{lev}}$  равно 4. Рассматриваемый фрактал является регулярным с зависимым делением (тип подтвердившейся гипотезы). Количество частей  $k = 9$  в разбиении пространства на первом уровне определяется величиной  $P$  оптимального покрытия. Количество допустимых диапазонов, равное величине  $N_r(1, 9) = 3$ , интерпретируется как количество партонов в каждом акте деления в процессе развития ливня. При этом номера ненулевых элементов (1, 2, 4, 5, 8 и 9-й) в массиве структур (см. рис. 4, а) первого уровня определяют расположение допустимых диапазонов для каждого из партонов, т.е. геометрию развития ливня в  $\eta$ -пространстве.

На рис. 4, в показана зависимость количества диапазонов  $N_r$  от количества ячеек  $M$  в разбиениях пространства для оптимального  $P$ -адического покрытия в дважды логарифмическом масштабе. Представленная зависимость описывается степенным законом  $N_r = M^s$ . Показатель степени  $s = 0,5$  соответствует величине  $\chi^2 < 10^{-29}$  аппроксимации и совпадает со значением коэффициента  $s = \ln 3 / \ln 9$ , определенного в разд. 1.

Ниже приведены результаты сравнительного анализа SePaC-, BC- и PaC-методов на примере рассмотренного фрактала. На рис. 4, г представлена зависимость (в дважды логарифмическом масштабе) количества ненулевых бинов  $N$  от количества бинов  $M$  в распределениях различных наборов. Количе-

ство бинов в наборах изменяется по степенному закону  $M = (P)^{\text{lev}}$ , где  $P = 2$  и  $9$  ( $P = 9$  оптимально для данного фрактала в PaC-методе). Значения  $\chi^2$  линейной аппроксимации и вычисленного значения фрактальной размерности  $D_F^{\text{meth}}$  с ошибкой  $\Delta D_F^{\text{meth}}$  приведены в табл. 2. Относительное отклонение  $\epsilon = |D_F^{\text{meth}} - D_F|/D_F$  вычисленного значения от истинного  $D_F \approx 0,7304 \dots$  (см. разд. 1) составляет 10 и 11 % для ВС- и PaC-методов соответственно. В последней строке таблицы приведено значение размерности, определенное SePaC-методом. Видно, что в пределах заданной точности это значение совпадает с истинным.

**Таблица 2. Результаты сравнительного анализа регулярного фрактала с зависимым делением, образованного разбиением исходного пространства на девять частей и допустимыми первой-второй ( $m = 2$ ), четвертой-пятой ( $m = 2$ ) и восьмой-девятой ( $m = 2$ ) частями, проведенного ВС-, PaC- и SePaC-методами**

Метод	$P$	$\chi^2$	$D_F^{\text{meth}} \pm \Delta D_F^{\text{meth}}$	$\epsilon \cdot 100 \%$
ВС	2	0,08	$0,80 \pm 0,02$	10 %
PaC	9	0,06	$0,81 \pm 0,01$	11 %
SePaC	9	—	$0,7304 \pm 0,0001$	0 %

Таким образом, SePaC-метод позволяет анализировать фракталы, образованные согласно гипотезе регулярного зависимого деления частей. Рассмотренный метод, в отличие от ВС- и PaC-методов, с заданной точностью определяет фрактальную размерность  $D_F$ , тип фрактала и его структуру.

**3.2. Регулярные фракталы с независимым делением частей.** Регулярный фрактал с независимым делением частей изображен на рис. 2, б. В процессе его формирования исходное пространство условно делилось на пять частей с допустимыми первой (диапазон с  $m = 1$ ), четвертой (диапазон с  $m = 1$ ) и пятой (диапазон с  $m = 1$ ) частями. Рассмотрим пять уровней фрактала. Количество конечных частиц  $N_{\text{part}} = 243$ , а фрактальная размерность  $D_F \approx 0,6828 \dots$  (разд. 1).

Далее, опишем работу алгоритма SePaC-метода на примере описанного выше фрактала. В п. 3 (подразд. 2.2) определяется значение величины  $N_{\text{bin}} = 7$ . Анализ покрытий с  $P = 1, 2, 3, 4$  не подтвердил ни одну из гипотез (пп. 4–11, подразд. 2.2), поэтому перейдем к рассмотрению покрытия с  $P = 5$ .

В п. 5 определяется количество ненулевых бинов  $N(\text{lev}, 5)$  для каждого уровня  $\text{lev}$ :  $N(1, 5) = 3$ ,  $N(2, 5) = 9$ ,  $N(3, 5) = 27$ ,  $N(4, 5) = 81$ ,  $N(5, 5) = 243$ ,  $N(6, 5) = 243$ ,  $N(7, 5) = 243$ .

В п. 6 выполнено условие насыщения  $N(5, 5) = N(6, 5)$ , согласно которому определяется количество уровней  $N_{\text{lev}} = 5$ .

В п. 7 условия  $N_{\text{lev}} = 1$  и  $N_{\text{part}} \neq N(5, 5)$  не выполняются, т. е. дальнейшее рассмотрение покрытия с  $P = 5$  продолжается.

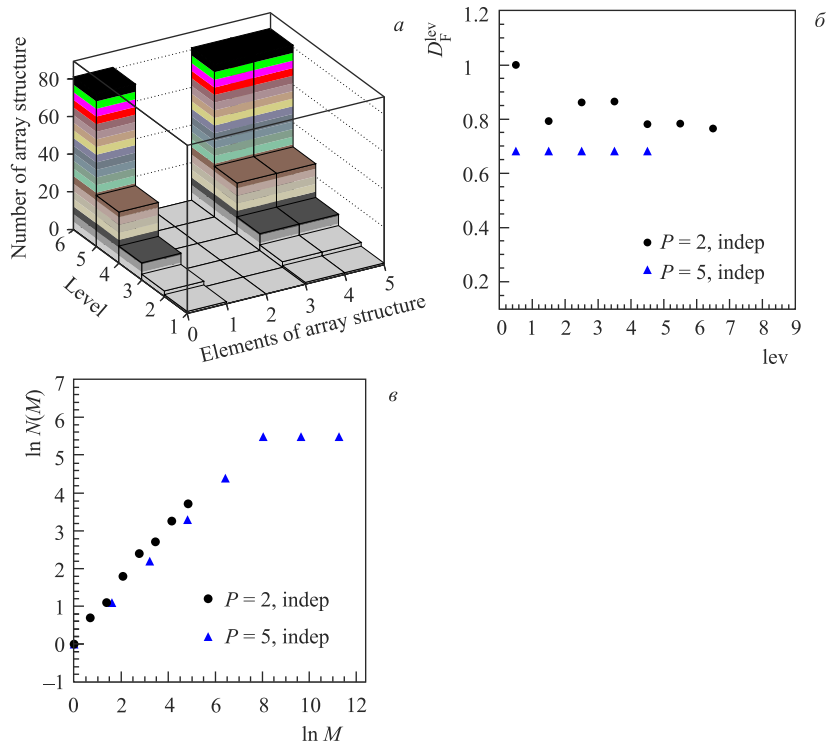


Рис. 5. Регулярный фрактал с независимым делением, образованный разбиением исходного пространства на пять частей с допустимыми первой ( $m = 1$ ) и четвертой-пятой ( $m = 2$ ) частями. а) Зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. б) Зависимость значений  $D_F^{\text{lev}}$  от уровня lev. в) Зависимость количества ненулевых бинов  $N$  от количества бинов  $M$  в распределениях покрытий с  $P = 2$  и 5

В п.8 рассматривается гипотеза регулярного независимого деления частей. Количество ненулевых бинов  $N(\text{lev}, 5)$  на каждом уровне lev удовлетворяет условию  $N(\text{lev}, 5) = N(1, 5)^{\text{lev}}$  (п. 8а), что позволяет продолжить рассмотрение гипотезы. В п. 8б проводится анализ массивов структур разных уровней. На рис. 5, а показана зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. Видно, что фрактал является регулярным (массивы структур внутри уровней одинаковы и совпадают для каждого из уровней). Отметим, что заполненные элементы для разных уровней совпадают с аналогичной зависимостью, представленной на рис. 3, а для фрактала с независимым делением частей (см. рис. 1, а). Однако для фракталов с независимым и зависимым делением количество массивов структур  $N_y$  различное и удовле-

творяет условиям  $N_y = \text{lev}^3$  и  $N_y = \text{lev}^2$ , соответственно. Показатель (три) в первом случае соответствует количеству частей, а во втором случае (два) — количеству диапазонов в каждом акте деления. Далее рассматривается анализ системы уравнений (9) (п. 8в). Решения  $D_F^{\text{lev}}$  для каждого уровня  $\text{lev}$  представлены (темный квадрат) на рис. 5, б. Отклонения от среднего значения для каждого уровня удовлетворяют условию точности  $\Delta D_F^{\text{lev}} < \text{Dev}$ . Таким образом, покрытие с  $P = 5$  является оптимальным и гипотеза регулярного независимого деления частей подтверждается. Оставшиеся гипотезы не рассматриваются.

На рис. 5, б также показаны решения  $D_F^{\text{lev}}$  систем уравнений (9) для покрытия с основанием  $P = 2$  (темный круг), полученные для гипотезы независимого деления частей. Как можно видеть, для основания  $P = 2$  решения уравнений  $D_F^{\text{lev}}$  для разных уровней отличаются существенно. С увеличением числа уровней значение  $D_F^{\text{lev}}$  сходится к величине, отличной от истинной фрактальной размерности  $D_F = 0,6828 \dots$  (см. разд. 1).

Далее, в п. 12 определяются характеристики фрактала. Значение фрактальной размерности  $D_F = 0,6828 \pm 0,0001$  определяется средним значением  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$ , а точность соответствует величине  $\text{Dev}$ . Количество уровней фрактала равно  $N_{\text{lev}} = 5$ . Рассматриваемый фрактал является регулярным с независимым делением (тип подтвердившейся гипотезы). Количество частей  $k = 5$  в разбиении пространства на первом уровне определяется величиной  $P$  оптимального покрытия. Количество ненулевых элементов, равное величине  $N(1, 5) = 3$ , интерпретируется как количество партонов в каждом акте деления в процессе развития ливня. При этом номера ненулевых элементов (1, 4 и 5-й) в массиве структур (см. рис. 5, а) первого уровня определяют расположение допустимых диапазонов для каждого из партонов, т. е. геометрию развития ливня в  $\eta$ -пространстве.

Ниже представлены результаты сравнительного анализа рассматриваемого фрактала, проведенного SePaC-, BC- и PaC-методами. На рис. 5, в показаны зависимости (в дважды логарифмическом масштабе) количества ненулевых бинов  $N$  от количества бинов  $M$  в распределениях различных наборов. Количество бинов в наборах изменяется по степенному закону  $M = (P)^{\text{lev}}$ , где  $P = 2$  и  $5$  ( $P = 5$  оптимально для данного фрактала в PaC-методе). Зна-

**Таблица 3. Результаты сравнительного анализа регулярного и случайного фракталов с независимым делением, образованных разбиением исходного пространства на пять частей и тремя допустимыми диапазонами с равными длинами  $m = 1$ , проведенного BC-, PaC- и SePaC-методами**

Метод	$P$	$\chi^2$	$D_F^{\text{meth}} \pm \Delta D_F^{\text{meth}}$	$\epsilon \cdot 100 \%$
BC	2	0,06	$0,78 \pm 0,03$	14 %
PaC	5	$10^{-28}$	$0,68 \pm 0,01$	0 %
SePaC	5	—	$0,6826 \pm 0,0001$	0 %



чения  $\chi^2$  линейной аппроксимации и вычисленного значения фрактальной размерности  $D_F^{\text{meth}}$  с ошибкой  $\Delta D_F^{\text{meth}}$  приведены в табл. 3. Относительное отклонение  $\epsilon$  для ВС-метода составляет 14%. В последней строке таблицы приведено значение размерности, определенное SePaC-методом. Видно, что значения  $D_F^{\text{meth}}$ , найденные PaC- и SePaC-методами в пределах точности совпадают с истинным значением.

Таким образом, показано, что SePaC- и PaC-методы позволяют анализировать фракталы, образованные согласно гипотезе регулярного независимого деления частей. Отметим, что только SePaC-метод дает возможность определить фрактальную размерность  $D_F$  с заданной точностью.

**3.3. Случайные фракталы с зависимым делением частей.** Случайный фрактал с зависимым делением частей изображен на рис. 2, *a*. В процессе его формирования исходное пространство условно делилось на пять частей с двумя допустимыми диапазонами, состоящими из одной ( $m = 1$ ) и двух ( $m = 2$ ) частей. Диапазоны располагаются случайно, но не соприкасаясь. Рассмотрим пять уровней фрактала. Количество частиц в конечном состоянии равно  $N_{\text{part}} = 243$ , а фрактальная размерность  $D_F \approx 0,5639 \dots$  (см. разд. 1).

Далее опишем работу алгоритма SePaC-метода на примере этого фрактала. Анализ покрытий с  $P = 1, 2, 3, 4$  не подтвердил ни одну из гипотез (пп. 4–11, подразд. 2.2), поэтому приведем детальное рассмотрение покрытия с  $P = 5$ . Условие насыщения количества ненулевых бинов в зависимости от уровня определяет количество уровней фрактала  $N_{\text{lev}} = 5$  (п. 6). Так как количество уровней не равно 1 и количество частиц совпадает с количеством ненулевых элементов на последнем уровне, то дальнейший анализ рассматриваемого покрытия продолжается (п. 7). Количество ненулевых бинов нарушает условие  $N(\text{lev}, 5) = N(1, 5)^{\text{lev}}$  (п. 8а) (гипотеза регулярного независи-

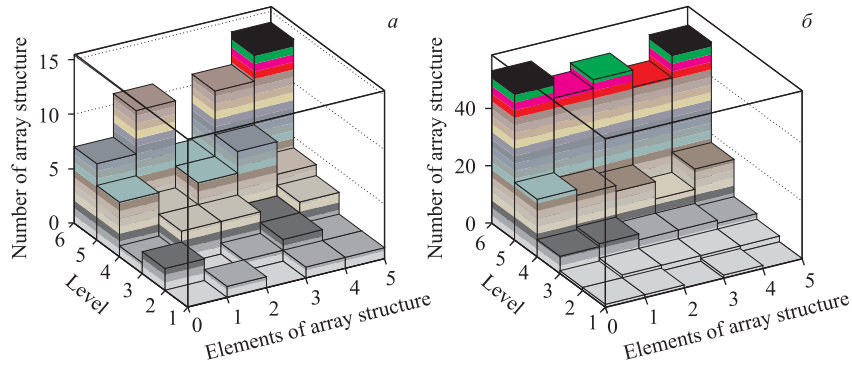


Рис. 6. Случайные фракталы с зависимым (*a*) и независимым (*b*) делением, образованные разбиением исходного пространства на пять частей. Зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала для двух зависимых частей с длиной  $m = 1$  и  $m = 2$  (*a*) и трех независимых частей с равными длинами  $m = 1$  (*b*)

мого деления частей не подтверждается). Количество диапазонов для разных уровней удовлетворяет условию  $N_r(\text{lev}, 5) = N_r(1, 5)^{\text{lev}}$  (п. 9б), что позволяет далее рассматривать гипотезу регулярного зависимого деления. В п. 9в проводится анализ массивов структур разных уровней. На рис. 6, а представлена зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. Из рисунка видно, что фрактал не является регулярным. Массивы структур внутри уровней случайны, и дальнейшее рассмотрение гипотезы регулярного зависимого деления частей прекращается.

Так как условие в п. 8а не выполнено, то гипотеза случайного независимого деления частей не рассматривается. Выполнение условия в п. 9б позволяет рассмотреть гипотезу случайного зависимого деления частей. Для этого анализируется система уравнений (9). Рассматриваемый фрактал и изображенный на рис. 1, а имеют на каждом уровне одинаковое количество диапазонов с одинаковой длиной. Поэтому системы уравнений (9) для них совпадают. Зависимость решений уравнений  $D_F^{\text{lev}}$  от уровня фрактала lev совпадает с аналогичной зависимостью, представленной на рис. 3, б. Так как отклонение  $\Delta D_F^{\text{lev}}$  от среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle = 0,5639$  не превышает значения Dev, то оптимальным является покрытие с  $P = 5$  и подтверждается гипотеза случайного зависимого деления. Характеристики рассматриваемого фрактала (исключая тип фрактала) совпадают с характеристиками фрактала, рассмотренного в подразд. 3.1.1.

Зависимость количества диапазонов  $N_r$  от количества ячеек  $M$  в разбиениях пространства для оптимального  $P$ -адического покрытия и результаты сравнительного анализа рассматриваемого фрактала, полученные SePaC-, BC- и PaC-методами, соответствуют рис. 3, в, г и табл. 1 (см. подразд. 3.1.1).

Таким образом, установленные результаты показывают, что SePaC-метод позволяет анализировать фракталы, образованные согласно гипотезе случайного зависимого деления частей и, в частности, определять значение фрактальной размерности с заданной точностью.

**3.4. Случайные фракталы с независимым делением частей.** Случайный фрактал с независимым делением частей изображен на рис. 2, в. В процессе его формирования исходное пространство условно делилось на пять частей с тремя допустимыми диапазонами, состоящими из одной части ( $m = 1$ ). Диапазоны располагались случайно. Рассмотрим пять уровней фрактала. Количество конечных частиц равно  $N_{\text{part}} = 243$ , а фрактальная размерность  $D_F \approx 0,6828 \dots$  (см. разд. 1).

Далее опишем работу алгоритма SePaC-метода на примере этого фрактала. Проведенный анализ покрытий с  $P = 1, 2, 3, 4$  не подтвердил ни одну из гипотез (пп. 4–11, подразд. 2.2), поэтому проведем рассмотрение покрытия с  $P = 5$ . Условие насыщения количества ненулевых бинов в зависимости от уровня определяет количество уровней фрактала  $N_{\text{lev}} = 5$  (п. 6). Так как количество уровней не равно 1 и количество частиц совпадает с коли-

чеством ненулевых элементов на последнем уровне, то дальнейший анализ этого покрытия продолжается (п. 7). Количество ненулевых бинов удовлетворяет условию  $N(\text{lev}, 5) = N(1, 5)^{\text{lev}}$  (п. 8а), поэтому гипотеза регулярного независимого деления частей продолжает рассматриваться. В п. 8б проводится анализ массивов структур разных уровней. На рис. 6, б представлена зависимость элементов и количества массивов структур от уровня фрактала. Из рисунка видно, что фрактал не является регулярным. Массивы структур внутри уровней случайны, и дальнейшее рассмотрение гипотезы регулярного независимого деления частей прекращается. Количество диапазонов для разных уровней не удовлетворяет условию  $N_r(\text{lev}, 8) = N_r(1, 8)^{\text{lev}}$  (п. 9б), поэтому гипотеза регулярного независимого деления частей не рассматривается.

Выполнение условия в п. 8а позволяет рассмотреть гипотезу случайного независимого деления частей. Для этого анализируется система уравнений (9). Рассматриваемый фрактал и изображенный на рис. 2, б имеют на каждом уровне одинаковое количество заполненных частей. Поэтому системы уравнений (9) для них совпадают. Зависимость решений уравнений  $D_F^{\text{lev}}$  от уровня фрактала lev совпадает с аналогичной зависимостью, представленной на рис. 5, б. Так как отклонение  $\Delta D_F^{\text{lev}}$  от среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle = 0,6828$  не превышает значения Dev, то оптимальным является покрытие с  $P = 5$  и гипотеза случайного независимого деления подтверждается. Дальнейшее рассмотрение гипотез прекращается. Характеристики рассматриваемого фрактала (исключая тип фрактала) совпадают с характеристиками фрактала, рассмотренного в подразд. 3.2.

Результаты анализа рассматриваемого случайного фрактала, полученные SePaC-, BC- и PaC-методами, соответствуют результатам, показанным на рис. 5, в и приведенным в табл. 3 (см. подразд. 3.2).

Таким образом, полученные результаты показывают, что SePaC-метод позволяет анализировать фракталы, образованные согласно гипотезе случайного независимого деления частей, и в частности определять значение фрактальной размерности с заданной точностью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен широкий класс фракталов с различной длиной  $m/k$  допустимых диапазонов и сформулированы гипотезы их формирования. Обсуждается взаимосвязь фракталов и процесса развития партонового ливня с последующей адрионизацией. Исследованы различные  $P$ -адические покрытия фракталов. Установлено существование оптимального покрытия, позволяющего построить систему уравнений, связанную с набором допустимых диапазонов на каждом уровне, решение которой определяет значение фрактальной размерности.

Предложен новый метод для фрактального анализа — метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC-метод: Systems of the Equations of  $P$ -adic Coverages). SePaC-метод учитывает установленные закономерности  $P$ -адических покрытий и включает важные особенности (подбор оптимального  $P$ -адического покрытия) PaC-метода. В работе описан алгоритм, реализующий этот метод. Проведен анализ фракталов с различной длиной  $m/k$  допустимых диапазонов. Установлено, что данный метод позволяет найти оптимальное  $P$ -адическое покрытие для исследуемых множеств, определить фрактальную размерность с заданной точностью, количество уровней, а также тип фрактала и его структуру. Предполагается, что SePaC-метод может быть применен к анализу экспериментальных данных, например событий по рождению частиц или струй во взаимодействиях адронов и ядер высоких энергий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем определение структур фракталов, используемое в SePaC-методе. Фракталы, образованные согласно гипотезам регулярного независимого и зависимого деления частей, характеризуются равенством массивов структур на всех уровнях. Определение массивов структур для двух типов фракталов различно.

Определим массивы структур для регулярного фрактала с независимым делением частей, показанного на рис. 7, а. Фрактал образован делением исходного пространства на три части с допустимыми первой (диапазон с  $m = 1$ ) и третьей частью (диапазон с  $m = 1$ ). Структура первого уровня отражает его заполнение и определяется единственным массивом, состоящим из трех элементов (1 0 1). Второй уровень описывается двумя одинаковыми массивами (1 0 1). Каждый массив соответствует структуре заполняемых диапазонов первого уровня. Структура третьего уровня определяется четырьмя одинаковыми массивами (1 0 1). Структуры последующих уровней определяются аналогично.

Далее опишем определение структуры регулярного фрактала с зависимым делением частей, показанного на рис. 7, б. Фрактал образован делением исходного пространства на четыре части с допустимыми первой (диапазон с  $m = 1$ ) и третьей-четвертой частями (диапазон с  $m = 2$ ). Структура первого уровня отражает его заполнение. Из рисунка видно, что первый уровень описывается единственным массивом (1 0 1 1) и имеет два допустимых диапазона. Первый диапазон состоит из одной части, а второй из двух. Массивы структур второго уровня отражают заполнение допустимых диапазонов первого уровня. Первый диапазон имеет структуру (1 0 1 1). При определении структуры второго диапазона учитываем, что он в процессе деления рассматривался как единый объект, состоящий из двух частей. Как видно из рисунка, второй диапазон имеет ту же структуру (1 0 1 1). Таким образом, второй уровень описывается

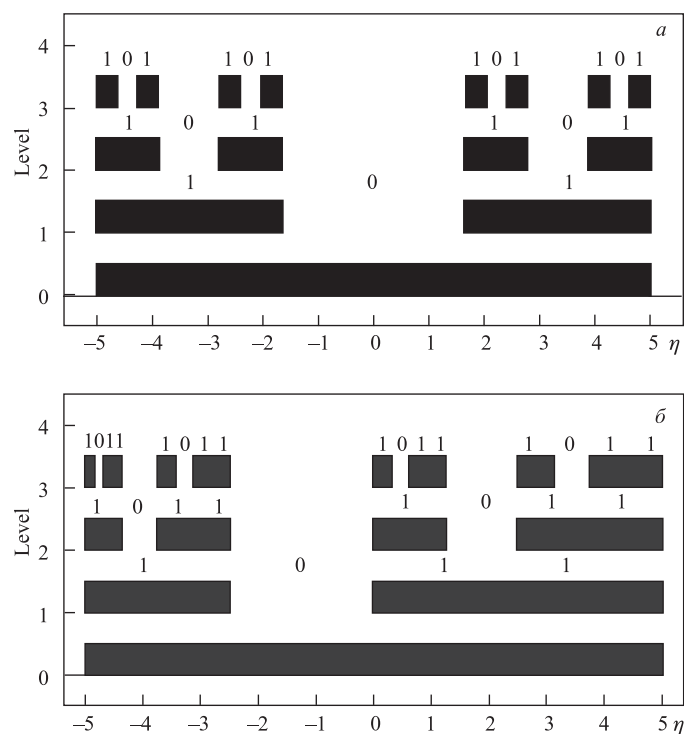


Рис. 7. Зависимость допустимых диапазонов  $\eta$ -пространства от уровня фрактала. Регулярные фракталы с независимым (а) и зависимым (б) делением, образованные разбиением исходного пространства на  $k$  частей: а)  $k = 3$ , допустимы первая ( $m = 1$ ), третья ( $m = 1$ ) части; б)  $k = 4$ , допустимы первая ( $m = 1$ ), третья-четвертая ( $m = 2$ ) части

двумя одинаковыми массивами структур (1 0 1 1) и имеет четыре допустимых диапазона. Первый диапазон состоит из одной части, второй и третий — из двух и четвертый — из четырех частей. При определении массивов структур третьего уровня учитывается длина допустимых диапазонов второго уровня. Таким образом, структура третьего уровня определяется четырьмя одинаковыми массивами (1 0 1 1). Структуры последующих уровней определяются аналогично.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hankey A., Stanley H. E. // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. P. 3515–3542; Stanley H. E. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. S358–S366.
2. Zborovský I., Panebratsev Yu., Tokarev M., Škoro G. // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 5548;

- Tokarev M., Dedovich T.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 3495;  
*Tokarev M., Rogachevski O., Dedovich T.* // Nucl. Part. Phys. 2000. V. 26. P. 1671;  
*Zborovský I., Tokarev M.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2005. V. 3. P. 312.  
*Zborovský I., Tokarev M.* // Phys. Atom. Nucl. 2007. V. 70. P. 1294.  
*Zborovský I., Tokarev M.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2009. V. 24. P. 1417;  
*Tokarev M., Zborovsky I., Dedovich T.* // Proc. of Very High Multiplicity Physics Workshops / Ed. by A. Sissakian, J. Manjavidze (Singapore: World Sci., 2008). P. 97; Proc. of the 33rd International Conference on High Energy Physics / Ed. by A. Sissakian, G. Kozlov, E. Kolganova (Singapore: World Sci., 2006). V. 1. P. 443.
3. *Adamus M. et al.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 185. P. 200.
  4. *Bjålas A.* // Nucl. Phys. B. 1986. V. 273. P. 703.
  5. *Hwa R. C.* // Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 1456;  
*Hwa R. C., Nazirov M. T.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 741.
  6. *Rogachevsky O. V.* // Proc. of the 33rd International Conference on High Energy Physics / Ed. by A. Sissakian, G. Kozlov, E. Kolganova (Singapore: World Sci., 2006). V. 1. P. 443.
  7. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature (San Francisco: Freeman, 1982).
  8. *Dremin I.* // Usp. Fiz. Nauk. 1990. V. 160, Iss. 8. P. 105;  
*Dremin I. et al.* // Usp. Fiz. Nauk. 1993. V. 163. P. 1.
  9. *Дедович Т., Токарев М.* Препринт ОИЯИ Р2-2011-3. Дубна, 2011.
  10. *Barabasi A., Stanley H.* Fractal Concepts in Surface Growth. New York, USA: Cambridge Univ. Press, 1995.
  11. *Saa A. et al.* // Nonlin. Processes Geophys. 2007. V. 14. P. 603.
  12. *Roueff F. et al.* // Proc. of the Conference «Fractals 98», Malta, October 1998.
  13. *Федер Е.* Фракталы. М.: Изд-во Мир, 1991.
  14. *Pavlov A. et al.* // Usp. Fiz. Nauk. 2007. V. 50. P. 8.
  15. *Mandelbrot B.* // Science. 1967. V. 155. P. 636.
  16. *Sjostrand T. et al.* // Computer Physics Commun. 2008. V. 178. P. 852.
  17. *Bähr M. et al.* arXiv: 0809.2002 [hep-ph] 2008.
  18. *Gleisberg T. et al.* // JHEP. 2009. V. 0902. P. 007.
  19. *Gyulassy M. et al.* // Comput. Phys. Commun. 1994. V. 83. P. 307.
  20. *Lonnblad L. et al.* // Comput. Phys. Commun. 1992. V. 71. P. 15.
  21. The UrQMD Model, <http://urqmd.org/>;  
*Bass S. A. et al.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 1998. V. 41. P. 225;  
*Bleicher M. et al.* // J. Phys. G. 1999. V. 25. P. 1859.

Получено 18 ноября 2011 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 30.01.2012.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,94. Уч.-изд. л. 2,43. Тираж 375 экз. Заказ № 57566.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)