Р10-2012-83

В. Б. Злоказов, В. К. Утенков

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ РЕДКИХ СОБЫТИЙ

Направлено в журнал «European Physical Journal A»

Злоказов В. Б., Утенков В. К. P10-2012-83
Оптимальный доверительный интервал
для экспоненциального распределения при анализе редких событий

При анализе отдельных случайных событий типичной является задача: определить, управляется ли наблюдаемое событие $t_i$ известной с точностью до параметра функцией распределения? Решение ее дается областью оси $(0, t)$ (доверительным интервалом), в которую событие $t_i$ попадает с заранее заданной вероятностью $P$.

Целесообразно строить оптимальный доверительный интервал (ОДИ) на основе следующих требований к области наиболее вероятной принадлежности наблюдаемой случайной величины: 1) длина такого интервала должна быть минимальной; 2) вероятность, заключенная на таком интервале, должна быть максимальной; 3) отношение вероятности гипотезы к вероятности ее альтернативы должно быть максимальным.

ОДИ существует не для любой функции распределения, но его удается построить для играющего огромную роль в физике радиактивных распадов экспоненциального распределения $F(t, T) = 1 - \exp(-t/T)$, где он равен $(0{,}2\hat{T})$ ($\hat{T}$ — оценка $T$). ОДИ имеет большие преимущества по сравнению с обычными доверительными интервалами, так как обеспечивает меньшую сумму ошибок 1-го и 2-го рода при проверке гипотез.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2012

Zlokazov V. B., Utyonkov V. K. P10-2012-83
Optimum Confidence Interval
in the Analysis of Exponentially Distributed Rare Events

In the analysis of rare events a typical question is as follows: does an observed event $t_i$ belong to distribution function with some known parameter? The answer is provided by a region of the $(0, t)$ axis (a confidence interval), inside which the event $t_i$ occurs with an a priori probability $P$.

It is appropriate to construct an optimal confidence interval (OCI) satisfying the following requirements which secure that this interval contains the observed random quantity most probably: 1) the length of such an interval should be minimal; 2) the probability within such an interval should be maximum; 3) the ratio of the probabilities of the null hypothesis and its alternative should be maximum.

The OCI does not exist for any arbitrary distribution function. However, one can construct such an OCI for the exponential distribution $F(t, T) = 1 - \exp(-t/T)$, where it equals $[0.2\hat{T}]$. Here $\hat{T}$ is an estimate of $T$. The exponential distribution function is of fundamental importance in the physics of the radioactive decays. The OCI has advantages over usual confidence intervals, since it provides a smaller sum of the Type I and the Type II errors in testing the hypotheses.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Наиболее важной областью применения экспоненциального распределения $F(t,T) = 1 - \exp(-t/T)$ является, безусловно, такое явление атомной физики, как радиоактивный распад. Здесь $t$ — время, а $T$ — параметр, называемый также константой распада. Этот процесс обладает следующими свойствами:

• распад во время наблюдения не зависит от предыстории, а зависит лишь от длительности времени наблюдения;

• распады совокупности атомов не зависят друг от друга.

Среднее значение наблюдаемой случайной величины $t_i$, подчиненной функции $F(t,T)$, равно $T$, а дисперсия — $(T^2)$. Плотность $F$ равна

$$f(t,T) = \frac{dF}{dt} = \exp(-t/T)/T.$$

Независимой информацией о процессе при заданном $T$ является и число распадов $n(t)$, приходящееся на какой-либо временной интервал длины $t$. Если в образце в момент времени 0 имелось $N$ радиоактивных атомов, то вероятность $P$ наблюдать $n$ распадов за время $t$ будет

$$P(n(t) = m) = C_N^m p^m q^{N-m}, \tag{1}$$

где $p$ — вероятность наблюдать распад одного атома за время $t$, т. е. $1 - \exp(-t/T)$, $q = 1 - p$.
Для больших $N$ это распределение можно приближенно представить двумя более наглядными формулами.

- Если $p$ близко к $q$, т. е. оба близки к $1/2$, $P(n(t) = m)$ будет близко к

  $$(1/\sqrt{2\pi Npq}) \exp(-0,5((m - Np)/\sqrt{Npq})^2) \tag{2}$$

  и при $N \to \infty$ равномерно по $m$ будет тем ближе к нему, чем больше $N$.

- Если же $p \ll q$ и значит будет малой величиной, близкой к нулю (в силу $p + q = 1$), то $P(n(t) = n)$ будет сколь угодно близко к

  $$P(n,a) = a^n/n! \exp(-a), \quad a = Np. \tag{3}$$

  и при $N \to \infty$ равномерно по $n$ будет тем ближе к нему, чем больше $N$.

$P(n, a)$ — распределение Пуассона с параметром $a$, который для него является и средним и дисперсией.

Обе функции распределения $F(t, T)$ (непрерывная) и $P(n, a)$ (дискретная) играют большую роль в экспериментах ядерной физики, где с их помощью мы можем сформулировать ряд задач по анализу данных этих экспериментов. Будем говорить: данные $t_i$ $(n_i)$ соответствуют модели $F(t, T)$ $(P(n, a))$, если они являются выборочными значениями случайных величин с функциями распределений $F(t, T)$ $(P(n, a))$, соответственно.

Тогда для наборов $t_i, i = 1,2,\ldots,m$ (времена радиоактивных распадов), и $n_j, j = 1,2,\ldots,N$ (количество распадов в точке $j$), можно указать следующие задачи их анализа:

1. По данным $t_i$ необходимо построить оценку величины $T$ и точность этой оценки;

2. Если известна $T$, то необходимо проверить гипотезу: соответствуют ли данные $t_i$ модели $F(t, T)$?

3. По данным $n_j$ необходимо построить оценку величины $a$ и точность этой оценки;

4. Если известно $a$, то необходимо проверить гипотезу: соответствуют ли данные $n_j$ модели $P(n, a)$?

Все эти задачи подробно исследованы в математической литературе, и описаны алгоритмы их решения. В данной работе речь пойдет о проверке гипотез. Нас будут интересовать лишь особенности методов решения этих задач для исключительно малой статистики данных $t_i$ и $n_j$ (вплоть до отдельных событий), каковая имеет место в такой важной области экспериментальной физики, как синтез сверхтяжелых элементов [1], где методы проверки гипотез через анализ гистограмм, построенных из $t_i$ и $n_j$, часто неприменимы, поскольку требуют большой статистики данных.

## 1. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ (ДИ) ДЛЯ ИЗВЕСТНЫХ $T$ И $N_0$

Итак, имея наши наборы данных $t_i$ и $n_j$, проверим две гипотезы:

1) соответствует ли каждый из $t_i$ модели $F(t, T)$?

2) соответствует ли в общих чертах совокупность $t_i$ модели $F(t, T)$?

Чтобы мы приняли решение о соответствии $t_i$ закону $F(t, T)$, необходимо построить ДИ — интервал $[a, b]$ на оси $(0, t)$, в который значения нашей случайной величины попадают с заданной вероятностью $P_1$; если событие $t_i$ попадет в $[a, b]$, то оно не противоречит гипотезе о его соответствии $F(t, T)$ (но, разумеется, еще не подтверждает ее).

На практике обычно используют двусторонний ДИ «среднее плюс/минус сигма», где сигма — корень квадратный из дисперсии. Для гауссова распределения это соответствует $P_1 \approx 0{,}68$, и здесь отношение шансов «за»/«против» для проверяемой гипотезы будет равно приблизительно двум.

Но для произвольного распределения такие ДИ не являются реалистическими образами наиболее вероятной области значений случайной величины. Предпочтительными могут оказаться несимметричные ДИ или даже односторонние. Правда, в этом случае ДИ может быть определен неоднозначно.

Для получения однозначного интервала необходимо наложить на $[a, b]$ дополнительное условие. Можно сослаться на такие два подхода:

1. Для заданного уровня значимости $\epsilon$ строится интервал $[a, b]$ так, чтобы $F(0, T) - F(a, T)$ (ошибка слева) и $F(b, T) - F(\infty, T)$ (ошибка справа) были равны каждая $\epsilon/2$; такой подход защищается, например, в [2]; но симметрия здесь не всегда может быть согласована с $1 - P_1$, и вообще она, скорее, оправдана для симметричного или хотя бы пикообразного распределения, а наше $F(t, T)$ таким не является; правда, применительно к оценкам параметра такой интервал оправдан, если распределение таких оценок является нормальным (хотя бы в асимптотике).

2. Подход в [3] основан на признании, что двусторонние ДИ, которыми пользуются повсеместно, не всегда являются эффективным инструментом проверки гипотез, и отмечает, что наилучшим ДИ будет «the shortest interval with the highest probability density» [3, P. 75] (правильнее было бы сказать «with the largest probability integral»). Правда, деталей метода построения такого ДИ в работе не дано.

В ней в конкретном примере распределения Пуассона величины $n$ $P(n = i) = a^i/i! \exp(-a)$ начинают рассматриваться как распределение величины $a$ при заданном $i$ (байесовский подход), и далее для заданного $P_1$ строятся ДИ, как выше, но с использованием «байесовской» функции распределения.

Другой способ построения асимметричного ДИ (через функцию правдоподобия) предложен в [4]: в качестве ДИ берется отрезок оси $(0, t)$, на котором функция правдоподобия спадает до половины от своего максимума.

Ответить на вопрос, соответствует ли в общих чертах совокупность $t_i$ модели $F(t, T)$, можно, выбрав какую-либо функцию величин $t_i$ (например, среднее от них) и построив функцию распределения для нее и соответствующий ей ДИ, а далее действовать так, как описано выше (для отдельных событий).

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

Попытаемся построить понятие оптимального доверительного интервала (ОДИ) для экспоненциального распределения из самых общих соображений о его цели.

Очевидно, для заданной $F(t, T)$ оптимальный доверительный интервал $[a, b]$ должен удовлетворять следующим фундаментальным требованиям:

1) минимальность разности $b-a$, поскольку она характеризует рассеяние событий $t_i$ вокруг их среднего значения; в слишком большой интервал с большой вероятностью будут укладываться как «истинные» $t_i$, так и «ложные»;

2) максимальность общей вероятности попадания события в интервал $[a, b]$, иначе принятое решение не может считаться достаточно надежным;

3) значительное превышение вероятности принять прямую гипотезу вероятности ее отвергнуть. Равенство этих вероятностей соответствует максимуму математической (не физической) энтропии распределения принимаемых решений, фактически равномерному их распределению, а тем самым их минимальной информативности. С точки зрения принятия решений наиболее информативны максимально неравномерные распределения.

Третье условие вытекает из второго, если альтернатива прямой гипотезе есть ее отрицание.

Формальный подход здесь требует построения критерия (меры), экстремум (максимум или минимум) которого и означал бы удовлетворение этим условиям. Рассмотрим в качестве примера случай нашего распределения $F(t, T)$. На первый взгляд можно взять как критерий, например, такое выражение

$$C(a, b) = \frac{\exp(-a/T) - \exp(-b/T)}{b - a} \tag{4}$$

при условиях $a \geqslant 0$, $b > a$.

Это наиболее «естественный» критерий, поскольку числитель в (4) есть полная вероятность для события $t_i$ попасть в интервал $[a, b]$ $(b > a)$, и максимум (4) будет иметь место, в частности, при возможном максимуме $F(a, T) - F(b, T)$ и соответствующем ему минимуме $(b-a)$.

Представим (4) в виде

$$C(a, b) = \exp(-a/T) \cdot (1 - \exp(-z/T))/z,$$

где $z = b-a$; легко видеть, что это выражение возрастает монотонно по $T$ при $b \to a$, т. е. при $z \to 0$ и стремится к величине $\exp(-a/T)/T$. Другими словами, выражение (4) быть искомым критерием не может, так что придется прибегнуть к полуэмпирическому способу оптимизации.

Можно заметить, что при любом $T$ и заданной длине интервала $[a, b]$ интеграл $\int_a^b \exp(-t/T)/T dt$ будет максимальным при $a = 0$. Отсюда следует, что ОДИ для экспоненциального распределения должен начинаться с $a = 0$.

К сожалению, не удается подобрать приемлемое формальное условие, из которого можно было бы однозначно определить $b$. Здесь мы вынуждены использовать модельный подход, а именно, исходить из того, что правая граница не должна превышать сумму среднего и сигмы (корня квадратного из дисперсии) для экспоненциального распределения, т. е. $T + T = 2T$. Тогда мы будем иметь такой результат:

$$(b - a) = 2T.$$

Вероятность, определенная на интервале $[0, 2T]$, равна $F(0, T) - F(2T, T) = 1 - \exp(-2) \approx 0{,}865$ (86,5 %) и будет больше вероятности альтернативной гипотезы примерно в 6,4 раза.

Сравним эти цифры с теми, которые мы имели бы, если бы строили не оптимальный, а двусторонний интервал $[a, b]$ и точки $a, b$ определяли бы из условия равенства вероятности на интервалах $[0, a]$ и $[b, \infty]$:

$$1 - \exp(-a/T) = \exp(-b/T)$$

и условия $b - a = 2T$. Опуская легко воспроизводимые выкладки, мы имели бы

$$a = T \cdot ln(1 + \exp(-2)); \quad b = T \cdot (2 + ln(1 + \exp(-2))).$$

Это дало бы интервал той же длины $2T$, но не максимальной вероятности на нем (лишь около 76 %) и превышение вероятности прямой гипотезы над вероятностью альтернативы не в 6,4 раза, а лишь в 3 раза. Отсюда видны очевидные преимущества такого оптимального ДИ над другими.

ОДИ эффективнее и при дискриминации гипотез. Пусть $H_0$: $T = T_1$, а $H_A$: $T = T_2$, $T_1 < T_2$.

Для ОДИ $[0, 2T_1]$ ошибка 1-го рода равняется $\exp(-2)$, ошибка 2-го рода — $1 - \exp(-2T_1/T_2)$. Сравним эти ошибки с ошибками у двустороннего ДИ $[a, b] = [T \cdot \ln(1 + \exp(-2)),\ T \cdot (2 + \ln(1 + \exp(-2)))]$. Ошибка 1-го рода равняется $1 - \exp(-a/T_1) + \exp(-b/T_1)$, 2-го рода — $\exp(-a/T_2) - \exp(-b/T_2)$; сумма обеих этих ошибок больше, чем сумма ошибок ОДИ. Можно показать, что она будет больше и для произвольного интервала $[a, b]$, если $a \neq 0$ и $T_1 < T_2$.

Рассмотрим конкретный пример: $a = 7$, $b = 15$, $T_1 = 4$, $T_2 = 12$. Сумма ошибок для ОДИ равна приблизительно 0,62, для ДИ — примерно 1,12. Почти вдвое больше.

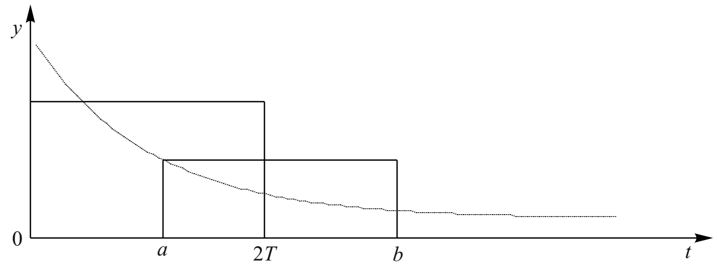


Рис. 1. Экспоненциальная кривая. Отрезки вертикальных прямых отсекают на оси $(0, t)$ несимметричный двусторонний ДИ $[a, b]$ и односторонний ОДИ $[0, 2T]$

Другой пример использования ОДИ — критерий отношения правдоподобий (ОП) для дискриминации гипотез. Для $F(t, T)$ при $m = 1$ это отношение равно $(T_2/T_1) \exp(-t_i(T_2 - T_1)/(T_1 T_2))$. Его распределение таково, что там тоже уместнее использование одностороннего ДИ.

Действительно, распределение $\psi = r \exp(-t \cdot s)$ выводится так: $\psi < y = t \cdot s \geqslant ln(r/y) = \exp(ln((y/r)^s)) = (y/r)^s$, где $y$ определен на $[0, r]$. Его плотность равна $(s-1)/r(y/r)^{s-1}$. Можно считать, что $s > 0$, и если $s > 1$, то плотность монотонно возрастает. Так как обозначения $T_1, T_2$ произвольны, можно считать, что $T_1 > T_2$, т. е. $s > 0$. График этой функции монотонно возрастает от 0 до 1; следовательно, здесь использование одностороннего ДИ тоже оправдано.

Практика анализа данных часто требует гибкой стратегии, и иногда приоритет должен быть решительно отдан определенному критерию оптимальности, например, минимальной длине ОДИ, даже в ущерб другим. Так как мы по существу имеем компромисс между длиной ДИ и вероятностью на нем, то в этом случае мы можем ограничиться меньшей $P_1$, но это уменьшит длину ДИ.

Например, если $P_1 = 0{,}68$, то из $1 - \exp(-kT/T) = 0{,}68$ следует, что $k \approx 1{,}1$, так что ОДИ — $[0,\ 1{,}1T]$.

То, что ОДИ начинается с 0, означает, что для экспоненциального распределения при дискриминации гипотез все малые значения $t_i$ малоинформативны (они «принадлежат» всем таким распределениям с любым $T$), но отбрасывать их нельзя — это события с максимальной вероятностью, при построении оценок параметра $T$ они важны. Но при дискриминации гипотез (т. е. $T_1 \Leftrightarrow T_2$) наиболее информативны большие времена распада, т. е. «хвосты» множеств $t_i$.

## 3. ДВОЯКАЯ ТРАКТОВКА ЗАДАЧИ: СООТВЕТСТВУЕТ ЛИ РАСПАД В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ $t_1$ ГИПОТЕЗЕ О ТОМ, ЧТО КОНСТАНТА РАСПАДА ЕСТЬ $T$?

• Если наблюдается распад единственного атома, этот распад подчиняется распределению $F(t, T)$, и здесь применим ОДИ, о котором речь шла выше.

• Если же наблюдаемый распад $t_i$ один, но он может быть распадом одного из атомов большой совокупности, то тогда уместен другой тип рассуждений. Рассмотрим пример: распад (спонтанное деление) урана $^{238}$U. Его константа распада $T_f = 4{,}47 \cdot 10^9/\ln(2)$ лет или $2{,}35 \cdot 10^{12}$ сут. Пусть зарегистрировано одно событие $t_1$ за один день. ОДИ в данном случае $[0, 2T_f]$, и следовательно, мы должны принять гипотезу о том, что это распад урана.

Но против этого протестует здравый смысл: ясно, что при такой $T_f$ шансов наблюдать спонтанный распад атома урана даже за все время существования цивилизации у нас нет. В то же время известно, что в знаменитом эксперименте Флерова и Петржака спонтанное деление урана наблюдалось каждый день. Причина этого ясна: надо иначе поставить вопрос — если есть образец урана, в котором не менее $1{,}3 \cdot 10^{19}$ атомов (из них распасться спонтанно могут примерно $7{,}1 \cdot 10^{12}$), то какова вероятность, что в течение одного дня будет наблюдаться хотя бы одно спонтанное деление с данной $T_f$?

Вероятность $P_2$ того, что за один день не распадется ни один атом урана, равна $\exp(-1/T_f)$ в степени $7{,}1 \cdot 10^{12}$. Это грубо приближенно $\exp(-3) \approx 0{,}05$. Отсюда: вероятность наблюдать хотя бы одно спонтанное деление урана в день приближенно равна $0{,}95$.

Построим ОДИ для этого случая. Для $N$ атомов функция распределения события $t_i$ (хотя бы один такой распад за время $(0, t)$) будет

$$P_2(t_i < t) = 1 - \exp(-Nt/T_f).$$

Это типичное экспоненциальное распределение с константой распада $T_f/N$, и следовательно, ОДИ в данном случае равен $[0{,}2 \cdot T_f/N]$.

В случае одного события вопрос о дискриминации гипотез заслуживает особого внимания. Иногда между чисто формальным подходом и подходом «здравого смысла» может возникнуть конфликт. Пусть зарегистрировано ничтожно малое время распада $t_1$ и пусть проверяются две гипотезы: $T_1 = 10^{-6}$ и $T_2 = 10^{+6}$. Формально, если $t_1$ входит в ОДИ $[0{,}2 \cdot 10^{-6}]$, оно не противоречит обеим гипотезам, но с точки зрения здравого смысла трудно согласиться с тем, что малое время может наблюдаться при $T_2$. Тут следует напомнить, что на практике проверяются не всевозможные гипотезы (таких в принципе бесконечно много), а лишь те, которые из априорной информации о контексте задачи будут реалистическими и приемлемыми. Вышеприведенная гипотеза таковой не является, но тем не менее интересен принципиальный вопрос: оправдана ли с точки зрения математики вера в то, что малые времена распада обязательно указывают на малость периода полураспада?

Такая вера безотчетно исходит из картинки гауссовских ДИ на рис. 2, где если малое значение $t$ попадает в ДИ $[b_1, b_2]$, то, конечно, принимается

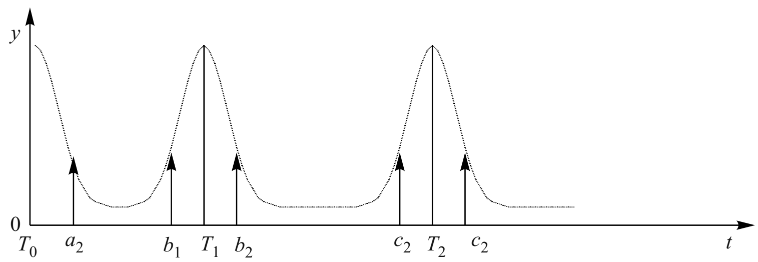


Рис. 2. $T_i$ — центры тестируемых гауссианов. ДИ: $[0, a_2]$ для $T_0$, $[b_1, b_2]$ для $T_1$, $[c_1, c_2]$ для $T_2$. Первый ДИ — положительная половинка гауссиана; ДИ для полного гауссиана будет $[-a_2, +a_2]$

гипотеза $T_1$, а если в ДИ $[c_1, c_2]$, то принимается гипотеза $T_2$. Впрочем, если сколь угодно малые значения попадают в ДИ $[0, a_2]$, даже если $a_2$ является величиной порядка $10^6$, они не противоречат гипотезе $T_0$.

Однако картина экспоненциального распределения будет совершенно иной (рис. 3).

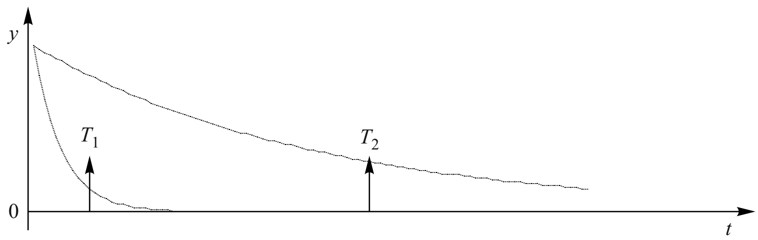


Рис. 3. Экспоненты с константами $T_1, T_2$ совмещены по амплитуде, чтобы нагляднее была видна разница между спадами этих кривых в зависимости от $T_1, T_2$

Здесь нет никаких пиков как мест наиболее вероятных событий, привязанных к определенной точке оси. Здесь область самых вероятных событий — это окрестность нуля, которая является общей для всех экспонент и не может быть отброшена — это все равно, что при анализе гауссиана выбросить окрестность его максимума.

Конфликт формального подхода с точкой зрения здравого смысла возникает из-за того, что, постулируя экспоненциальное распределение (не равное нулю нигде), мы допускаем, что произойти может распад в любой момент времени, Но если есть априорная информация о том, что времена распадов не могут быть меньше, чем $t_{\min}$, и больше, чем $t_{\max}$, то истинным будет «усеченное» экспоненциальное распределение, не равное нулю лишь на $[t_{\min}, t_{\max})]$, и ОДИ, разумеется, должен быть поправлен на него. В этом случае он будет равен $[t_{\min},\ MIN(t_{\max}, 2T)]$.

Можно определить $t_{\min}$ из такого, например, соображения. Очевидно, что исключение из полного ДИ $[0, 2T_2]$ интервала, например, $[0,\ 0{,}001T_2]$ приведет к уменьшению вероятности всего лишь на 0,001, однако при этом малые времена распада $t_i$, удовлетворяющие гипотезе $T_1$, но меньшие, чем $0.001 \cdot T_2$, не попадут в интервал $[0{,}001T_2,\ 2 \cdot T_2]$.

Вообще же в данной работе рассматривается подход к проверке гипотез, когда константы распада $T_1$ и $T_2$ не отличаются более, чем на 1–2 порядка величины, что является наиболее сложной задачей. И тогда для «нормальной» проверки гипотез математически обоснованным методом дискриминации гипотез будет обычный: если $t_i$ не попадает в ОДИ $[0, 2T_1]$, но попадает в $[0, 2T_2]$, то принимается гипотеза $T_2$; если не попадает ни в один ДИ, то отвергаются обе гипотезы; если попадает в $[0, 2T_1]$, то такой распад не может служить дискриминатором гипотез — недостаточная статистика данных; нужен как минимум еще один распад. Их среднее будет иметь уже пикообразное (в асимптотике гауссово) распределение (см. рис. 4), т. е. будет справедлива ситуация рис. 2, так что будет оправдан близкий «здравому смыслу» метод двустороннего ДИ.

## 4. ВЫВОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ $T$

Ситуация усложняется, если точное значение $T$ неизвестно. В этом случае решение задачи дает следующая стратегия действий:

• строится оценка $T$ и определяется плотность распределения этой оценки $g(t)$;

• ОДИ строится как $[0, 2T]$, усредненный по плотности $g(t)$.

В качестве оценки $T$ можно взять

$$T_e = \sum_{i=1}^{m} t_i/m. \tag{5}$$

Это эффективная несмещенная оценка максимального правдоподобия параметра экспоненциального распределения, и остается лишь вывести функцию $g(t)$. Она позволит нам также ответить на вопрос, соответствует ли совокупность $t_i$ модели $F(t, T)$?

Постараемся вывести сначала плотность распределения суммы $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i$.

Начнем с $m = 2$. Как известно [5], плотность $g(t, 2)$ суммы двух случайных величин с плотностями $p_1(t)$ и $p_2(t)$ соответственно равна

$$g(t, 2) = \int p_1(x) p_2(t - x) dx, \tag{6}$$

где интегралы берутся по тем $x$, для которых плотности $p_1, p_2$ положительны, т. е. при $x > 0$ и $x < t$ (вне этих $x$ $g(t, 2)$, естественно, равна 0). В нашем случае все плотности $p(t) = (1/T) \exp(-t/T)$ одинаковы, поэтому мы можем записать (6) так:

$$g(t, 2) = (1/T^2) \int_0^t \exp(-x/T) \exp((t - x)/T) dx,$$

Отсюда

$$g(t, 2) = (1/T^2) \exp(-t/T) \int_0^t dx = (1/T^2) t \cdot \exp(-t/T).$$

Плотность $g(t, 3)$ будет, очевидно, сверткой типа (6) плотностей $g(t, 2)$ и $p(t)$:

$$g(t, 3) = (1/T^3) \int_0^t x \cdot \exp(-x/T) \exp((t - x)/T) dx =$$

$$= (1/2)(t^2/T^3), \exp(-t/T),$$

и т. д. Методом индукции можно доказать, что суммы $m$ событий $t_i$:

$$g(t,m) = (1/((m-1)!))(t^{m-1}/T^m)\exp(-t/T).$$

Чтобы вывести распределение величины (5), т. е. $T_e = \sum_{i=1}^{m} t_i/m$, вспомним, что если $F(t)$ — функция распределения случайной величины $\xi$, то функция распределения величины $\xi/m$ равна $F(m \cdot t)$, а плотность ее будет производной по $t$, равной $m \cdot dF(m \cdot t)/dt$, т. е. в нашем случае, стало быть, плотность ее будет функцией $mg(mt, m)$ или

$$G(t,m) = m(1/((m-1)!))((mt)^{m-1}/T^m)\exp(-mt/T). \tag{7}$$

На рис. 4 даны два значения плотности распределения $G(t,m)$ с $m = 5$ (жирная кривая) и $m = 31$. $G(t,\ 31)$ более симметрична. Это следствие центральной предельной теоремы. Оба интеграла (площади) равны 1.

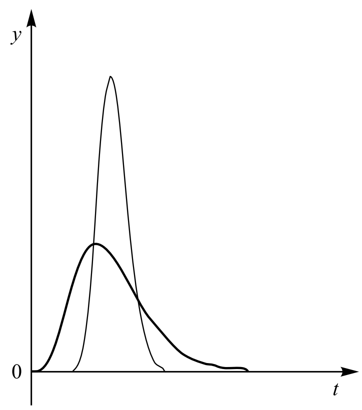

Рис. 4. Плотности распределения $G(t,m)$ с $m = 5$ (жирная кривая) и $m = 31$

Если оценка постоянной распада (5) достаточно точна (функция (7) является «узкой»), ОДИ для событий (не для $T$) можно строить с ее помощью; в противном случае необходимо усреднять этот ОДИ по распределению (7).

В рамках простого подхода можно брать значения $T_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots$, из некоторого диапазона $[T_0, T_1]$, получать ОДИ $[0, T_j]$, а затем усреднять их с плотностью (7) в качестве весов.

Другой подход к построению ДИ для $T$ заключается в построении интервала «равных шансов правдоподобия» [4]. В нашем случае эффективность обоих подходов одинакова, но метод [4] более универсален, так как применим для любого распределения, в том числе и для сложных и громоздких, для которых построить распределение типа (7) не удается, и не требует достаточно точных априорных оценок искомого параметра.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Oganessian Yu.* Heaviest Nuclei from $^{48}$Ca-Induced Reactions // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2007. V. 34. P. R165–R242.
2. *Schmidt K. H.* A New Test for Random Events of an Exponential Distribution // Eur. Phys. J. A. 2000. V. 8. P. 141–145;

*Schmidt K. H. et al.* Some Remarks on the Error Analysis in the Case of Poor Statistics // Z. Phys. A. Atoms and Nuclei. 1984. V. 316. P. 19–26.

3. *Bruechle W.* Confidence Intervals for Experiments with Background and Small Numbers of Events // Radiochim. Acta. 2003. V. 91. P. 71–80.
4. *Zlokazov V. B.* Program for Constructing the Estimates of the Parameter of the Exponential Distribution under Conditions of Poor Statistics // Nucl. Instr. Meth. 1978. V. 151, No. 1/2. P. 303–306.
5. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965.

Получено 16 июля 2012 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 14.09.2012.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,87. Уч.-изд. л. 1,05. Тираж 225 экз. Заказ № 57757.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/