

P11-2012-86

Н. Д. Дикусар *

**КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ
ШЕСТОГО ПОРЯДКА С АВТОМАТИЧЕСКИМ
ОБНАРУЖЕНИЕМ УЗЛОВ**

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

* E-mail: dnd@jinr.ru

Дикусар Н. Д.

P11-2012-86

Кусочно-полиномиальная аппроксимация шестого порядка
с автоматическим обнаружением узлов

Коэффициенты модели локального сегмента для кусочно-полиномиальной аппроксимации шестого порядка определяются по значениям функции и ее первой производной в трех узлах носителя. В рамках недавно предложенного метода базисных элементов получены формулы для коэффициентов в разложении функции по степеням $(x - x_0)$ на трехточечной сетке. Разработан алгоритм автоматического обнаружения узлов. Численные расчеты на достаточно трудных тестах показали высокую эффективность модели в плане устойчивости вычислений, точности и гладкости аппроксимации.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2012

Dikusar N. D.

P11-2012-86

Piecewise Polynomial Approximation
of the Sixth Order with Automatic Knots Detection

Coefficients of a local segment model for piecewise polynomial approximation of the sixth order are evaluated using values of the function and of its first derivative at three knots of the support. Formulae for coefficients of the function expansion in degrees of $(x - x_0)$ on a three-point grid are obtained within the framework of the recently proposed basic element method. An algorithm for automatic knot detection is developed. Numerical calculations applying quite complicated tests have shown high efficiency of the model with respect to the calculation stability, accuracy and smoothness of approximation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Но весьма часто бывает важно, чтобы погрешность приводилась к нулю для пределов промежутка.

П. Л. Чебышев [1]

В математике и прикладных науках сложную функциональную зависимость, заданную формулой или дискретным набором точек, приближают полиномами небольшой степени часто в виде локальных сегментов. Обычно для этого используют кубические сплайны, или кусочно-кубическую аппроксимацию [2–6]. Повышение эффективности методов и алгоритмов *аппроксимации сложных функций и сглаживания* экспериментальных данных актуально в различных областях научных исследований.

Эффективность методов *кусочно-полиномиальной аппроксимации* (КПА) зависит от *степени* многочленов, аппроксимирующих сегменты, от *непрерывности и порядка гладкости в узлах и оптимального разбиения* области задания функции. Гладкость связана с *качеством аппроксимации* и обеспечивается сплайн-методами, а *выбор числа узлов и их расположения* является нетривиальной задачей, в которой ищется компромисс между *точностью* приближения и *длиной промежутка (носителя)* аппроксимации. Общая эффективность КПА зависит от выбора *формы полиномиальной модели*. С точки зрения точности вычислений использование высоких степеней более выгодно, хотя *вычислительная сложность* при этом возрастает [6].

Существуют различные формы представления многочленов, коэффициенты которых определяются по-разному. Например, для локальной аппроксимации $f(x) \in C^{(n)}$ наиболее часто используют многочлен Тейлора $T_n(x - x_0)$ с коэффициентами $f^{(i)}(x_0)/i!$, $i = \overline{0, n}$, который является многочленом *наилучшего приближения* в малой окрестности одной точки $x = x_0$. В интерполяционных формулах Лагранжа, Ньютона, Гаусса, Эрмита и др. коэффициенты равны или зависят от $f_*^{(i)} = f^{(i)}(x_*)$. В случае среднеквадратичной аппроксимации данных с ошибками используют метод наименьших квадратов (МНК).

В данной работе предлагается метод КПА шестого порядка, основанный на *многочленах пятой степени*, представленных в форме *базисных элементов* (МБЭ) [7, 8]. Применение МБЭ пятой степени в задачах КПА приносит выгоду как по точности оценок, так и по длине локальных носителей. В [8] показаны преимущества использования МБЭ при решении задач аппроксимации функций и сглаживания данных в плане повышения *устойчивости* вычислений и понижения *вычислительной сложности*.

Материал статьи излагается в шести разделах. В разд. 1 представлена конструкция многочленов в форме базисных элементов и приведены формулы МБЭ-коэффициентов пятой степени. В разд. 2 в рамках локальной МБЭ-аппроксимации на трехточечной сетке получены *формулы для коэффициентов* в разложении $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$. Разд. 3 посвящен задаче МБЭ-экстраполяции, а в разд. 4 приводится алгоритм детектора узлов. МБЭ-аппроксимация и сглаживания шестого порядка обсуждаются в разд. 5 и 6 соответственно.

1. МБЭ

В работе [8] доказана теорема о представлении многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ в форме базисных элементов (одной кубической и трех квадратичных парабол), построенных на трехточечной сетке $x_\alpha < x_0 < x_\beta$:

$$f(x) \approx P_{n \downarrow k}(Q, \mathbf{w}, \mathbf{r}) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i = \sum_{i=0}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i, \quad k = \lfloor n/3 \rfloor, \quad (1)$$

где Q и $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ — базисные элементы, $\mathbf{b}_i = Q^i \mathbf{w}^T$, а $\mathbf{r}_i = [r_{\alpha i}, r_{\beta i}, r_{0i}]^T$ — коэффициенты.

При $n = 5$ модель *локального сегмента* $S(x) \approx f(x)$, $x \in [x_\alpha x_\beta] \subset [a, b]$, принимает вид

$$S(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{f} + \mathbf{b}^T \mathbf{r} = f_\alpha w_1 + f_\beta w_2 + f_0 w_3 + r_\alpha b_1 + r_\beta b_2 + r_0 b_3, \quad (2)$$

где

$$Q = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta), \quad w_1 = \frac{-\tau(\tau - \beta)}{\alpha\gamma}, \quad (3)$$

$$w_2 = \frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}, \quad w_3 = \frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta}; \quad \sum_{j=1}^3 w_j = 1,$$

$$\tau = x - x_0, \quad \alpha = x_\alpha - x_0, \quad \beta = x_\beta - x_0,$$

$$\gamma = \beta - \alpha, \quad x, \alpha, \beta \in R, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0.$$

Коэффициенты $\mathbf{f} = [f_\alpha, f_\beta, f_0]^T$ и $\mathbf{r} = [r_\alpha, r_\beta, r_0]^T$ ассоциированы с узлами сетки $x_\alpha < x_0 < x_\beta$, а параметры α и β ограничены по абсолютной величине и функционально связаны с независимой переменной x базисными элементами w_j и Q . Квадратичная составляющая $\mathbf{w}^T \mathbf{f}$ в (2) определяется коэффициентами $f_\nu = f(x_\nu)$, $\nu = \alpha, \beta, 0$. Коэффициенты r_ν при старших степенях x определяются в виде [8]

$$r_\nu = c_\nu f'_\nu + \mathbf{k}_\nu^T \mathbf{f}, \quad \nu = \alpha, \beta, 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha &= [(\gamma - \alpha)/(\alpha^2 \gamma^2), 1/(\gamma^2 \beta), -1/(\beta \alpha^2)]^T, \\ \mathbf{k}_\beta &= [1/(\alpha \gamma^2), -(\beta + \gamma)/(\gamma^2 \beta^2), -1/(\beta^2 \alpha)]^T, \\ \mathbf{k}_0 &= [-1/(\alpha^2 \gamma), 1/(\gamma \beta^2), (\alpha + \beta)/(\beta^2 \alpha^2)]^T, \\ c_\alpha &= -1/(\alpha \gamma), \quad c_\beta = 1/(\gamma \beta), \quad c_0 = 1/(\beta \alpha), \quad \gamma = \beta - \alpha; \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

При $\alpha = -\beta = h = \text{const}$ эти формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} r_{-h} &= \frac{f'_{-h}}{2h^2} + \frac{3f_{-h} + f_h - 4f_0}{4h^3}, \\ r_h &= \frac{f'_h}{2h^2} - \frac{f_{-h} + 3f_h - 4f_0}{4h^3}, \\ r_0 &= \frac{-f'_0}{h^2} - \frac{f_{-h} - f_0}{2h^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (2)–(6) позволяют легко найти коэффициенты многочлена в разложении $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, когда x изменяется в промежутке $[x_0 + \alpha, x_0 + \beta]$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta < 0$.

2. МБЭ-АППРОКСИМАЦИЯ НА ТРЕХТОЧЕЧНОЙ СЕТКЕ

Известно, что в *небольшой* окрестности точки x_0 многочлен Тейлора с коэффициентами $f^{(i)}(x_0)/i!$, $i = \overline{0,5}$, дает *наилучшее* приближение к $f(x)$. В знаменитой монографии 1853 г. «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» [1] П.Л. Чебышев заметил, что даже в малом, фиксированном интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$ полином Тейлора следует заменить другим полиномом. Такой полином Чебышев нашел как решение задачи в следующей формулировке: «*Определить изменения, которые надо произвести в приближенном выражении функции $f(x)$, данном ее разложением по степеням $(x - x_0)$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x = x_0 - h$ и $x = x_0 + h$, где h — величина не очень*

значительная». Этим полиномом стал широко известный *полином наилучшего приближения Чебышева*. С его помощью и были получены поправки к коэффициентам полинома Тейлора.

С геометрической точки зрения коэффициенты \mathbf{f} и \mathbf{r} в (1), (2), как и коэффициенты многочлена Тейлора, располагаются на вертикалях $x = x_\nu$, $\nu = \alpha, 0, \beta$ (рис. 1, а). При замене Q в формуле (2) его выражением в x -координатах

$$S(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{f} + \overbrace{(x - x_\alpha)(x - x_0)(x - x_\beta)}^Q \mathbf{w}^T \mathbf{r} \quad (7)$$

правая часть (7) аналогична форме многочлена Тейлора для окрестностей точек x_α, x_0, x_β .

Рассмотрим формулу (2) с точки зрения определения *изменений* в коэффициентах многочлена Тейлора, если $f(x)$ аппроксимировать МБЭ пятой степени (2)–(5).

Представляет интерес следующая

Задача. Используя формулы (2)–(5), для заданных $\alpha, \beta, \mathbf{f} = [f_\alpha, f_\beta, f_0]^T$ и $\mathbf{r} = [r_\alpha, r_\beta, r_0]^T$ найти коэффициенты d_i многочлена $f(x) \approx \sum_{i=0}^5 d_i (x - x_0)^i$ с нулевыми погрешностями в узлах сетки $x_\alpha < x_0 < x_\beta$, когда x изменяется в пределах от $x = x_0 + \alpha$ до $x = x_0 + \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta < 0$.

Решение задачи дает

Теорема. Коэффициенты d_i многочлена пятой степени, представляющего $f(x)$ ее разложением по степеням $(x - x_0)$ на отрезке $[x_0 + \alpha, x_0 + \beta]$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta < 0$,

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^5 d_i (x - x_0)^i \quad (8)$$

выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} d_5 &= [\alpha r_\beta + \gamma r_0 - \beta r_\alpha] / (\alpha\beta\gamma), \\ d_4 &= [\alpha\beta(r_\alpha - r_\beta) - 2\gamma(\alpha + \beta)r_0 + 2(\beta^2 r_\alpha - \alpha^2 r_\beta)] / (\alpha\beta\gamma), \\ d_3 &= [2\alpha\beta(\alpha r_\beta - \beta r_\alpha) + \alpha^3 r_\beta + \gamma(\alpha^2 + \beta^2)r_0 - \beta^3 r_\alpha] / (\alpha\beta\gamma) + 4r_0, \\ d_2 &= [\alpha f_\beta + \gamma f_0 - \beta f_\alpha] / (\alpha\beta\gamma) + [\beta^2 r_\alpha - \alpha^2 r_\beta] / \gamma - 2(\alpha + \beta)r_0, \\ d_1 &= [\beta^2 f_\alpha - \gamma(\alpha + \beta)f_0 - \alpha^2 f_\beta] / (\alpha\beta\gamma) + \alpha\beta r_0, \\ d_0 &= f_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $f_\nu = f(x_\nu)$, $\gamma = \beta - \alpha$, r_ν вычисляются по формулам (4), (5), $\nu = \alpha, \beta, 0$.

Доказательство. Формулы (9) вытекают из равенства правых частей уравнений (7) и (8). Они получаются с учетом (3)–(5) после записи $\mathbf{w}^T \mathbf{f}$, $Q\mathbf{w}^T \mathbf{r}$ в координатной форме и группировки множителей при соответствующих степенях $(x - x_0)$. ■

Следствие 1. При $\alpha = -h_0$ и $\beta = kh_0$, $h_0 > 0$, $k = 1, 2, \dots$, из (9) получим $d_0 = f_0$, $d_1 = f'_0$, и коэффициенты d_2, \dots, d_5 в векторной форме

$$d_i(k, h_0; \mathbf{f}_{h_0}, \mathbf{f}'_{h_0}) = \frac{1}{h_0^5} \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_{h_0} + \frac{1}{h_0^4} \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}'_{h_0}, \quad i = \overline{2, 5}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9a)$$

где $\mathbf{f}_{h_0} = [f_{-h_0}, f_{kh_0}, f_0]$ и $\mathbf{f}'_{h_0} = [f'_{-h_0}, f'_{kh_0}, f'_0]$, а \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i зависят от $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \left[\frac{k^2(3k+5)}{(k+1)^3}, \frac{5k+3}{k^2(k+1)^3}, \frac{-3k^2+4k-3}{k^2} \right], \\ \mathbf{u}_3 &= \left[\frac{2k(k^2-k-5)}{(k+1)^3}, \frac{2(5k^2+k-1)}{k^3(k+1)^3}, \frac{-2(k^3-4k^2+4k-1)}{k^3} \right], \\ \mathbf{u}_4 &= \left[\frac{-4k^2+5k-5}{(k+1)^3}, \frac{5k^2-5k-4}{k^3(k+1)^3}, \frac{4k^2-7k+4}{k^3} \right], \\ \mathbf{u}_5 &= \left[\frac{2(k+2)}{(k+1)^3}, \frac{-2(2k+1)}{k^3(k+1)^3}, \frac{-2(k-1)}{k^3} \right]; \\ \mathbf{v}_2 &= \left[\frac{k^2}{(k+1)^2}, \frac{-1}{k(k+1)^2}, \frac{2(k-1)}{k} \right], \\ \mathbf{v}_3 &= \left[\frac{k(k-2)}{(k+1)^2}, \frac{-2k-1}{k^2(k+1)^2}, \frac{k^2-4k+1}{k^2} \right], \\ \mathbf{v}_4 &= \left[\frac{-(2k-1)}{(k+1)^2}, \frac{-(k-2)}{k^2(k+1)^2}, \frac{-2(k-1)}{k^2} \right], \\ \mathbf{v}_5 &= \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2(k+1)^2}, \frac{1}{k^2} \right]. \end{aligned}$$

Следует подчеркнуть, что степень знаменателей в координатах \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i не меньше степени числителей, что указывает на устойчивость к ошибкам в \mathbf{f} и \mathbf{f}' при росте k .

Замечание 1. Величина h , или значения параметров α и β , в общем случае определяются положением точки x_0 на отрезке $[x_0 + \alpha, x_0 + \beta]$, а длина самого отрезка зависит от сложности $f(x)$ и ее производных.

В случае равномерной сетки ($h_0 = h, k = 1$) формулы d_2, \dots, d_5 (9а) упрощаются:

$$\begin{aligned}
 d_5 &= [3(f_{-h} - f_h) + h(f'_{-h} + 4f'_0 + f'_h)]/(4h^5), \\
 d_4 &= [2(-f_{-h} + 2f_0 - f_h) - h(f'_{-h} - f'_h)]/(4h^4), \\
 d_3 &= [5(f_{-h} - f_h) + h(f'_{-h} + 8f'_0 + f'_h)]/(4h^3), \\
 d_2 &= [4(f_{-h} - 2f_0 + f_h) + h(f'_{-h} - f'_h)]/(4h^2), \\
 d_1 &= f'_0, \quad d_0 = f_0,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

т. е. коэффициенты $d_i, i = \overline{0,5}$, зависят от h и значений f, f' в трех узлах $x_0 - h, x_0, x_0 + h$.

Следствие 2. Важно отметить, что ошибки $\varepsilon_D(x) = |f(x) - D_5(x - x_0)|$ и $\varepsilon_T(x) = |f(x) - T_5(x - x_0)|$ ведут себя по-разному. Вблизи x_0 $\varepsilon_T(x) < \varepsilon_D(x)$, а, начиная с $h \approx 0,7$, $\varepsilon_T(x_0 + h) \gg \varepsilon_D(x_0 + h)$, тогда как $\lim_{x \rightarrow x_0 + \nu} \varepsilon_D(x) = 0$, $\nu = -h, 0, h$, откуда следует $\max \varepsilon_D(x) < \max \varepsilon_T(x), x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = \exp[-5(x - 1)^2], x \in [-2, 2]$. Для $x_0 = 1, x_{-h} = 0,5, x_h = 1,5, \mathbf{f} = [0,2865, 0,2865, 1]^T$ и $\mathbf{f}' = [1,4325, -1,4325, 0]^T$ найдем d_i по формулам (10). Графики $T_5(x - x_0), D_5(x - x_0)$ и ошибок $\varepsilon_T = |f - T_5|, \varepsilon_D = |f - D_5|$ показаны на рис. 1, б. Те же графики, но в логарифмическом масштабе, приведены на рис. 1, в. Видно, что $\varepsilon_T \leq \varepsilon_D$ для $x \leq mh, m \approx 0,7$. Вблизи точки $x_0 + h = 1,5$ ошибка ε_T на несколько порядков больше ε_D .

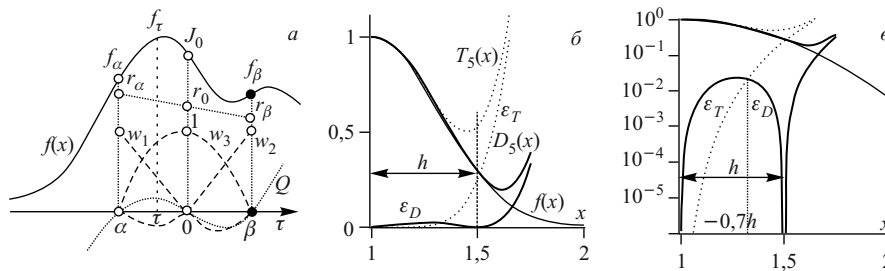


Рис. 1. Конструкция МБЭ пятой степени (а). Графики $f(x), T_5(x), D_5(x)$ (б) и ошибок $\varepsilon_T, \varepsilon_D$ (в)

3. МБЭ-ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

Методы кусочно-полиномиальной аппроксимации в той или иной степени связаны с задачей *экстраполяции*. В случае МБЭ по заданным значениям $f_\alpha^{(i)}, f_0^{(i)}, i = 0, 1$, можно оценить f_β и f'_β в точке $x = x_0 + \beta$. Рассмотрим конструкцию МБЭ (рис. 1, а).

С геометрической точки зрения степень МБЭ определяется *взаимным расположением точек* $(x_\nu, r_\nu), \nu = \alpha, \beta, 0$, на координатной плоскости [7, 8]. Например, расположение r_ν на наклонной прямой или на квадратичной параболе соответствует многочленам *четвертой* или *пятой степени*, а у *кубического* многочлена r_ν лежат на горизонтальной прямой. МБЭ *третьей* степени определяются коэффициентами \mathbf{f} и θ , т.е. $f(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{f} + \theta Q$. Из равенств $r_\alpha = r_0$ и $r_\alpha = r_\beta$ с учетом (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} \hat{f}_\beta &= [(\alpha + 2\beta)\gamma^2 f_0 + (\alpha - 2\gamma)\beta^2 f_\alpha + \alpha\beta\gamma(\beta f'_\alpha + \gamma f'_0)]/\alpha^3, \\ \hat{f}'_\beta &= [(2\alpha + \beta)\gamma^2 f_0 - (\alpha + \gamma)\beta^2 f_\alpha + (\beta + 2\gamma)\alpha^2 f_\beta]/(\alpha^2\beta\gamma) + \gamma f'_0/\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

При $\alpha = -h$ и $\beta = kh, k = 2, 3, \dots$, формулы (11) принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{f}_{kh} &= [k(k+1)(kf'_{-h} + (k+1)f'_0)]h - \\ &\quad - (k+1)^2(2k-1)f_0 + k^2(2k+3)f_{-h}, \\ \hat{f}'_{kh} &= [(3k+2)\hat{f}_{kh} + (k-2)(k+1)^2 f_0 - k^3 f_{-h}]/ \\ &\quad (k(k+1)h) - (k+1)f'_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для $k = 1$ (случай равномерной сетки) формулы (12) упрощаются:

$$\hat{f}_h = 2h(f'_{-h} + 2f'_0) + 5f_{-h} - 4f_0, \quad \hat{f}'_h = 5f'_{-h} + 8f'_0 + 12(f_{-h} - f_0)/h. \quad (13)$$

Пример 2. На рис. 2, а показан график *кубической экстраполяции* для функции $f(x) = \sin x + \cos 7x$ на отрезке от $x = 0,85$ до $x = 1,05$. Значения \hat{f}_β и \hat{f}'_β получены по (12) для $h = 0,001$ и $k = \overline{1, 200}$. Графики ошибок

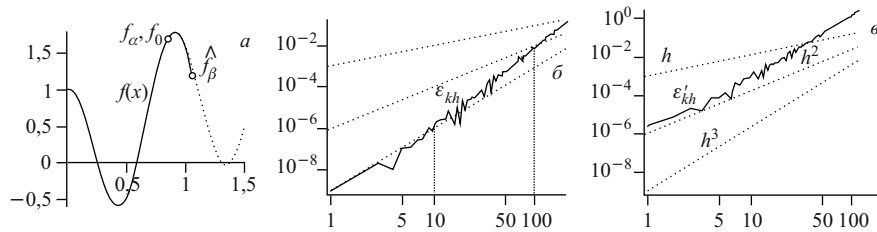


Рис. 2. Кубическая МБЭ-экстраполяция (а). Графики $\epsilon_{kh}(kh)$ (б) и $\epsilon'_{kh}(kh)$ (для сравнения пунктиром показаны графики для $h^i, i = 1, 2, 3$) (в)

$\varepsilon_{kh} = |f_{kh} - \hat{f}_{kh}|$ и $\varepsilon'_{kh} = |f'_{kh} - \hat{f}'_{kh}|$ показаны в двойном логарифмическом масштабе на рис. 2, б и в. Видно, что $\varepsilon_{kh} \approx O(h^3)$ для $x \in [x_0, x_0 + 10h]$ и $\varepsilon_{kh} \approx O(h^2)$ для $x \in [x_0 + 10h, x_0 + 100h]$ (рис. 2, б).

4. ДЕТЕКТОР УЗЛОВ

В теоретическом плане *оптимальная расстановка узлов* является весьма трудной задачей. В случае МБЭ-модели ищутся границы отрезка $[\bar{x}_0 - h, \bar{x}_0 + h]$, на котором сегмент S на кривой f приближается многочленом $D_5(x - x_0; \mathbf{d})$, где \mathbf{d} — коэффициенты. Точность и порядок гладкости существенно зависят от шага h .

В процедуре поиска правой границы $\bar{x}_0 + h$ сегмента $S(x) \approx f(x)$ в качестве критерия используется предел $\lim_{x \rightarrow x_0 + h} \varepsilon_D(x) = 0$, который наряду с формулами (9а) образует ядро алгоритма *детектора узлов*, суть которого состоит в следующем.

В режиме «сканирования» кривой f с мелким шагом $h_0 \ll h$ алгоритм находит параметры \bar{x}_0 и h . Значения $f(x_0 + kh_0)$ и $f'(x_0 + kh_0)$ вычисляются на последовательности вложенных интервалов $[x_0 - h_0, x_0 + h_0] \subseteq [x_0 - h_0, x_0 + 2h_0] \subseteq \dots \subseteq [x_0 - h_0, x_0 + kh_0]$ при фиксированных x_0 и h_0 . После этого на сетке $x_0 - h_0 < x_0 < x_0 + h_k$ по (8), (9а) вычисляются $D_5(h_k; \mathbf{d}_k)$, где $h_k = kh_0$, $k = 1, 2, \dots$

При $k > 2$ по разностям $\Delta_{k-1} = D_5(h_k; \mathbf{d}_k) - D_5(h_{k-1}; \mathbf{d}_{k-1})$ и $\Delta_{k-2} = D_5(h_k; \mathbf{d}_k) - D_5(h_{k-2}; \mathbf{d}_{k-2})$ определяются $\lambda_k = \Delta_{k-1}/\Delta_{k-2}$. Пока $h_k < x_0 + h$, $|\Delta_{k-1}| \approx |\Delta_{k-2}|$, однако при переходе через точку $x_0 + h$, с учетом $\lim_{x \rightarrow x_0 + h_k} \varepsilon_D(x) = 0$, $|\Delta_{k-2}| \ll |\Delta_{k-1}|$, в результате чего происходит скачок $\lambda_k = \lambda^*$ (переход через точку, где $\varepsilon_D = 0$). При $|\lambda^*| \geq T_\lambda$ (T_λ — заданный порог), находится длина интервала $H = h_0 + h_k$. По значениям $h = H/2$, $\bar{x}_0 = x_0 - h_0 + h$ и формулам (10) на сетке $\bar{x}_0 - h < \bar{x}_0 < \bar{x}_0 + h$ определяется сегмент $S(x; \bar{x}_0, h) = D_5(x - \bar{x}_0; \mathbf{d})$, где $\mathbf{d} = \mathbf{d}(h, \mathbf{f}_h, \mathbf{f}'_h)$. Шаг h_0 и порог T_λ являются параметрами настройки детектора и зависят от уровня сложности аппроксимируемой кривой.

Пример 3. Детектор с параметрами $x_0 = 0,7$, $h_0 = 0,0024$, $T_\lambda = 0,65$ и стартовой точкой $x_0 - h_0 = 0,6976$ на кривой $f(x) = \exp(-35(x-1)^2)$ обнаружил узел $\bar{x}_0 + h = 1,0096$, где $h = 0,156$, $\bar{x}_0 = 0,8536$. Графики λ_k , d_{jk} , $j = \overline{2, 5}$ и «скачок» $k^* = 129$ показаны на рис. 3, а.

На рис. 3, б — графики $f(x)$, $D_5(x - \bar{x}_0)$, $D_5(h_k)$ и ошибок в пятикратном масштабе. Коэффициенты $D_5(x - \bar{x}_0) \approx f(x)$, $x \in [0,825, 1,095]$, рассчитанные по формулам (10), соответственно равны $d_0 = 0,472294$, $d_1 = 4,840069$, $d_2 = 6,273996$, $d_3 = -84,963451$, $d_4 = -179,35155$, $d_5 = 492,76991$. Максимальная ошибка $\varepsilon_{\max} = \max_{x \in [\bar{x}_0 - h, \bar{x}_0 + h]} |f(x) - D_5(x - \bar{x}_0)|$ составила $\sim 0,8\%$.

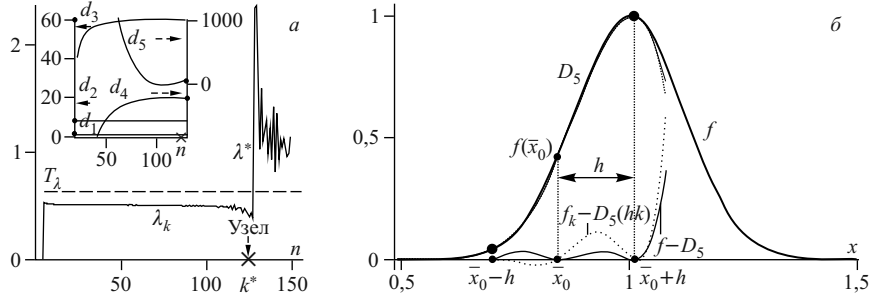


Рис. 3. Обнаружение правого узла на кривой $f(x)$ и графики коэффициентов \mathbf{d}_k (а). Графики $f(x)$, $D_5(h_k) \approx f(x_0 + h_k)$ (точки), $[D_5(x - \bar{x}_0)]$, $5x[f_k - D_5(h_k)]$ и $5x[f(x) - D_5(x - \bar{x}_0)]$ (б)

Замечание 2. При использовании детектора узлов число сегментов N_S заранее неизвестно. N_S определяется при достижении правой границы области задания $f(x)$, что позволяет аппроксимировать сложные кривые полиномиальными сегментами шестого порядка на отрезках произвольной длины.

5. КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ (КПА)

В общем случае точность аппроксимации и гладкость «склейки» сегментов S_n и S_{n+1} , $n = \overline{1, N_S}$, регулируются параметрами α и β (длина носителя $\gamma = \beta - \alpha$), а также зависят от сложности аппроксимируемой функции, выбора узлов и шага. Следует отметить, что МБЭ пятой степени с учетом его конструкции и формул (9) обеспечивает непрерывность и гладкость до третьего порядка, в зависимости от h . В этом плане модель (2) в каком-то смысле напоминает конструкцию интерполяционного сплайна пятой степени дефектов 2 и 3 с параболической интерполяцией [2].

Надежность обнаружения узлов зависит от выбора h_0 и T_λ . Чем меньше h_0 , тем больше арифметических операций затрачивается на вычисление \mathbf{d}_k . Их можно сократить табулированием $\mathbf{u}_i(k)$ и $\mathbf{v}_i(k)$, $i = \overline{2, 5}$, $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$, в формулах (9а), где k_{\max} — максимальное число шагов h_0 на максимальной длине H . Отметим, что детектор узлов можно использовать также для аппроксимации интерполяционными сплайнами.

Непрерывность и гладкость стыковки S_n и S_{n+1} обеспечиваются условиями $f^{(i)}(\bar{x}_{0n} + h_n) \equiv f^{(i)}(\bar{x}_{0(n+1)} - h_{(n+1)})$, $i = 0, 1$; $n = \overline{1, N_S}$. Гладкость более высокого порядка во многом определяется шагом и поведением производных. При уменьшении шага разрывы $S_n''(x)$ и $S_n'''(x)$ в узлах стыковки уменьшаются, а производные сегментов приближаются к производным аппроксимируемой функции для $x \in [\bar{x}_{0n} - h_n, \bar{x}_{0n} + h_n]$.

Ниже на примерах показаны результаты КПА шестого порядка функций, используемых при тестировании методов интерполяционных и сглаживающих сплайнов.

Пример 4. В работе [6] в качестве теста для оценки аппроксимации сложных функций В-сплайнами высоких степеней предложена функция

$$\varphi(x; \varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon(2 + \varepsilon)}{2\pi(1 + \varepsilon - \cos x)}}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \varepsilon > 0. \quad (14)$$

Используя детектор узлов, сделаем $\varphi(x, \varepsilon)$ -сегментацию для $\varepsilon = 0,21$. Функция (14) сканировалась при $h_0 = 0,0041$, $x_0 = -3,14$ и $T_\lambda = 0,65$. На рис. 4 приведены графики $\lambda_{k,n}$, $n = \overline{1, 7}$, обнаруженные детектором (а), $S_n(x)$ и $S'_n(x)$ с узлами стыковки (б) и графики $S''_n(x)$ (в), где n — индекс сегмента.

Наблюдается непрерывность и гладкость первой производной, почти гладкая вторая производная с разрывами в узлах (рис. 5, в). Графики ошибок $\varepsilon_n^{(i)}$ для сегментов $S_n(x)$, $S'_n(x)$ и $S''_n(x)$, $i = 0, 1, 2$, показаны на рис. 5, где $\varepsilon_n^{(i)} = \log |\varphi^{(i)}(x; 0,21) - D_5^{(i)}(x - x_{0n})|$.

Все расчеты в приведенных примерах велись с точностью до десятого знака, а производные находились численно по формуле $\hat{f}'_{\nu n} = [f(x_{\nu n} + \rho) - f(x_{\nu n})]/\rho$, $\nu = -h, 0, h$, где $\rho = 10^{-5}$. Расчеты даны в табл. 1. Показаны коэффициенты лишь при x^3, x^4 и x^5 .

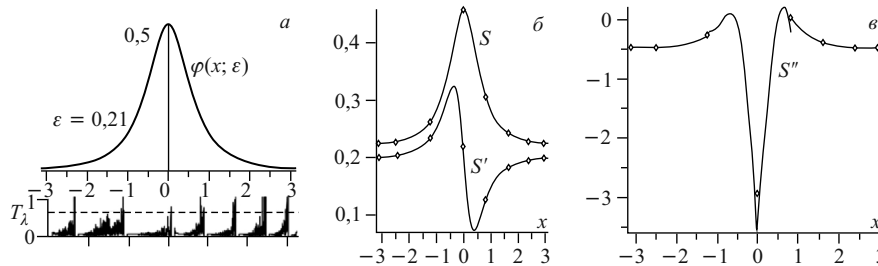


Рис. 4. Сканирование функции $\varphi(x, \varepsilon)$ (а). Узлы и сегменты $S_n(x)$, $S'_n(x)$ (б) и $S''_n(x)$ (в)

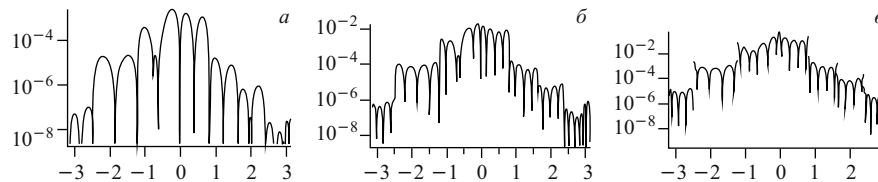


Рис. 5. Графики логарифмов модулей ошибок ε_n , ε'_n и ε''_n для сегментов S_n , S'_n и S''_n

Таблица 1.

k^*	h	$\bar{x}_0 + h$	d_3	d_4	d_5
160	0,6519	-2,488	0,002210078852	0,001955482703	0,000408956349
308	1,2587	-1,229	0,02017365274	0,01263787540	0,00556063124
294	1,2013	-0,028	-0,07798676832	-0,4541606788	-0,3238439375
204	0,8323	0,8042	0,8878975418	-0,6337884515	-0,4386260570
202	0,8241	1,6283	-0,08426001952	0,03909126085	-0,0047884727
186	0,7585	2,386	-0,01470730410	0,008266380715	-0,0037648384
138	0,5617	2,948	-0,00341839266	0,002303214895	-0,0006302299
58	0,2337	3,14	-0,00037764951	0,001756091848	-0,0037882789

При уменьшении параметра $\varepsilon = 0,05$ функция $\varphi(x; \varepsilon)$ становится более трудной для аппроксимации. В этом случае необходимо уменьшать шаг локальной сетки.

На рис. 6 приведены результаты КПА $\varphi(x; 0,05)$, $x \in [-3,14, 3,14]$, десятию сегментами на равномерной сетке с шагом $h = 0,3$. Оценка среднеквадратичного отклонения (с. к. о.), полученная по выборке из 300 точек (по 30 точек на каждом сегменте), составила $\hat{\sigma}_{\varepsilon_D} = 0,0013$.

В следующем примере многочлены $D_5(x - x_0)$ и $T_5(x - x_0)$ использованы для сегментации кривой, взятой на поверхности Франке [10], используемой для тестирования методов и алгоритмов сглаживания рассеянных данных (рис. 7, а):

$$F(x, y) = 0,75 \exp(-[(9x - 2)^2 + (9y - 2)^2]/4) + 0,75 \exp[-(9x + 1)^2/49 - (9y + 1)^2/10] + 0,5 \exp[-(9x - 7)^2 + (9y - 3)^2]/4 - 0,2 \exp[-(9x - 4)^2 - (9y - 7)^2], \quad x, y \in [-0,25, 1].$$

Пример 5. На кривой $f(x) = F(x, 0,2)$, $x \in [-1,5, 1,5]$ в узлах равномерной сетки с шагом $h = 0,5$ зафиксируем тринадцать точек $\{f_m = f(x_m)\}_{m=1}^{13}$

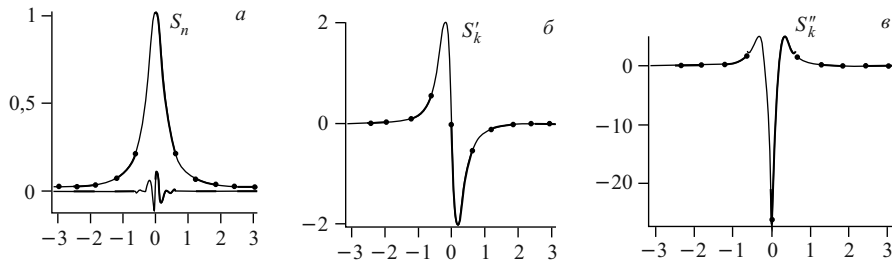


Рис. 6. КПА шестого порядка на десяти отрезках с равномерным шагом $h = 0,3$

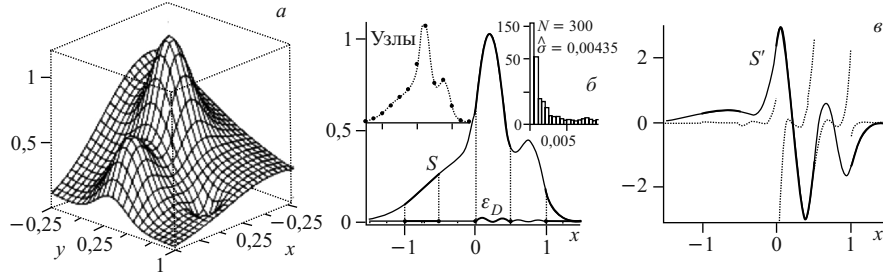


Рис. 7. Фрагмент поверхности $F(x, y)$ (а); $S_n = D_{5n}$ и ε_D (б); $S'_n = D'_{5n}$ и $S'_n = [T'_5]_n$ (точки) (в)

(рис. 7, б сверху, слева). С учетом стыковочных узлов получим шесть локальных равномерных сеток $x_{-h}^{(n)} < x_0^{(n)} < x_h^{(n)}$, $n = \overline{1, 6}$. Значения $d_{jn}(h; \mathbf{f}_n, \mathbf{f}'_n)$, $j = \overline{0, 5}$ (10), определялись при условиях $[f_h^{(i)}]_n \equiv [f_{-h}^{(i)}]_{n+1}$, $n = \overline{1, 5}$, $i = \overline{0, 1}$. Коэффициенты модели $S = T_5(x - x_0)$ равны $f^{(i)}(x_0^{(n)})/i!$, $i = \overline{0, 5}$.

На графиках $S'_n = [T'_5]_n$ (показаны точками на рис. 7, в) наблюдаются разрывы в узлах стыковки. $\max \varepsilon_T \gg \max \varepsilon_D$, т. е. производные до пятого порядка включительно, не компенсируют условий гладкости на концах сегментов при $h = 0,5$. МБЭ-модель обеспечивает гладкость S_n и S'_n (рис. 7, б и в), а S''_n терпит разрывы. При увеличении числа сегментов точность и качество аппроксимации улучшаются. Гистограмма ошибок $\varepsilon_D = |f(x_k) - D_5(x_k - x_0^{(n)})|$, $n = \overline{1, 6}$, $k = \overline{1, 50}$ (всего 300 точек), и оценка с. к. о. $\hat{\sigma} = 0,00435$ (рис. 7, б).

Оценки максимальных ошибок $\varepsilon_{\max}^{(i)} = \max |f^{(i)} - S_n^{(i)}|$, $i = \overline{0, 3}$, где $S_n = D_5(x - x_0^{(n)})$, $n = \overline{1, N_S}$, для $f(x) = F(x, 0,2)$, $x \in [-1,5, 1,5]$, на равномерной сетке при различных h приведены в табл. 2. Максимальные значения ошибок попадают в интервал, где производная функции быстро меняется (рис. 7, б). При шаге $h = 0,1, 0,12$ и $0,15$ графики всех трех производных сегментов выглядят гладкими.

Таблица 2.

N_S	h	ε_{\max}	ε'_{\max}	ε''_{\max}	ε'''_{\max}
5	0,60	$3,34 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-2}$	$1,29 \cdot 10^0$	$3,13 \cdot 10^1$
10	0,30	$5,65 \cdot 10^{-7}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$8,35 \cdot 10^{-3}$	$2,41 \cdot 10^{-1}$
15	0,20	$1,14 \cdot 10^{-7}$	$3,80 \cdot 10^{-5}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$	$6,04 \cdot 10^{-1}$
20	0,15	$3,82 \cdot 10^{-8}$	$1,20 \cdot 10^{-5}$	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$2,41 \cdot 10^{-1}$
25	0,12	$1,72 \cdot 10^{-8}$	$3,32 \cdot 10^{-6}$	$4,99 \cdot 10^{-4}$	$6,80 \cdot 10^{-3}$
30	0,10	$6,84 \cdot 10^{-9}$	$7,33 \cdot 10^{-7}$	$6,68 \cdot 10^{-4}$	$9,95 \cdot 10^{-2}$

6. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ (СКПА)

В работе [8] было показано, что использование МБЭ для среднеквадратичной аппроксимации (сглаживания) повышает эффективность алгоритмов в плане *устойчивости и понижения сложности* вычислений. В случае сглаживания шестого порядка модель локального сегмента представляется многочленом в форме базисных элементов

$$S(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{f} + Q \mathbf{w}^T \mathbf{r} = \mathbf{w}^T \mathbf{f} + \mathbf{b}^T \mathbf{r}, \quad (15)$$

где вектор \mathbf{f} фиксирован, а \mathbf{r} — свободен. При известной оценке $\hat{\mathbf{f}}$ МНК-оценка $\hat{\mathbf{r}}$ определяется на основе устойчивой по отношению к входным ошибкам трансформированной модели $\tilde{u} = \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{r}}$, полученной модификацией входных данных $\tilde{u} = \tilde{S} - \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{f}}$. В результате размерность нормальной матрицы сокращается на три, что *понижает* вычислительную сложность.

Пусть нам задана выборка объема $N \{ \tilde{S}_i = f(x_i) + e_i \}_{i=1}^N$, $x_i \in [a, b]$, где $e_i \sim N(0, \sigma)$. В соответствии с задачей кусочно-полиномиального сглаживания по данным выборки $\{ \tilde{S}_i \}_{i=1}^N$ требуется найти оценку $\hat{S}(x) \approx f(x)$, $x \in [a, b]$, в виде набора из $K \ll N$ локальных сегментов $S_k(x) = \sum_{i=0}^5 d_i(\alpha_k, \beta_k; \mathbf{f}_k, \mathbf{r}_k)(x - x_{0k})^i$, $x, x_{0k} \in [x_{\alpha_k}, x_{\beta_k}]$, при условиях $\hat{S}_{k-1}(x_{\beta_{(k-1)}}) \equiv \hat{S}_k(x_{\alpha_k})$, $k = \overline{1, K}$. В терминах модели в виде (8) и (15), при заданных $x_{0k}, \alpha_k, \beta_k$ задача сводится к вычислению МНК-оценок $\hat{\mathbf{f}}_k$ и $\hat{\mathbf{r}}_k$ и коэффициентов $d_i^{(k)}(\alpha_k, \beta_k; \hat{\mathbf{f}}_k, \hat{\mathbf{r}}_k)$ по (9).

6.1. Алгоритм СКПА. Алгоритм СКПА состоит из пяти этапов.

I. Разбиение отрезка $[a, b]$ на K сегментов $[a, b] = \bigcup_{k=1}^K [x_{\alpha_k}, x_{\beta_k}]$ при $x_{\beta_{(k-1)}} \equiv x_{\alpha_k}$ и разделение $\{ \tilde{S}_i \}_{i=1}^N$ на K локальных выборок $\{ \tilde{S}_i \}_{i=1}^N = \bigcup_{k=1}^K \{ \tilde{S}_j^k \}_{j=1}^{N_k}$, где $N_k = \lfloor N/K \rfloor$.

II. Вычисление средних $\bar{\mathbf{f}}_k = [\bar{f}_{\alpha_k}, \bar{f}_{\beta_k}, \bar{f}_{0k}]^T$ по $2M + 1$ ближайшим точкам в окрестностях узлов $x_{\alpha_k} < x_{0k} < x_{\beta_k}$: $\bar{f}_{\nu_k} = \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \tilde{S}_m^k$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, $k = \overline{1, K}$, $1 \leq M \leq M_{\max}$, и обеспечение «склейки» сегментов \hat{S}_{k-1} и \hat{S}_k условиями $\bar{f}_{\beta_{(k-1)}} \equiv \bar{f}_{\alpha_k}$.

III. Преобразование данных $\tilde{S}_j^k \xrightarrow{\bar{\mathbf{f}}_k} \tilde{u}_j^k$: $\tilde{u}_j^k = \tilde{S}_j^k - \mathbf{w}_j^T \bar{\mathbf{f}}_k$, $j = \overline{1, N_k}$.

IV. Вычисление $\hat{\mathbf{r}}_k$ из условия $\sum_j^{N_k} [\tilde{u}_j^k - \mathbf{b}_k^T(\tau_j) \mathbf{r}_k]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{r}_k}$, $\tau_j \in [\alpha_k, \beta_k]$: $\hat{\mathbf{r}}_k = [\mathbf{B}^T \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}}^k$, где $\tilde{\mathbf{u}}^k = [\tilde{u}_1^k, \tilde{u}_2^k, \dots, \tilde{u}_{N_k}^k]^T$, а $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ — нормальная матрица размерности 3×3 .

V. Вычисление $d_i^k(\alpha_k, \beta_k; \bar{\mathbf{f}}_k, \hat{\mathbf{r}}_k)$ по формулам (9)–(10).

Заметим, что положение точки $x_{0k} \in [x_{\alpha_k}, x_{\beta_k}]$ определяет значения параметров α_k и β_k .

Замечание 3. Преобразование входных данных (II, III) при удачном выборе параметров α_k и β_k устойчиво к ошибкам [8], а использование базисных функций $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}(\tau; \alpha_k, \beta_k)$ (2) уменьшает на три размерность нормальной матрицы, что дает выигрыш как по устойчивости вычислений, так и по числу арифметических операций по сравнению с использованием матриц размерности 6×6 .

Проверку алгоритма сделаем на кривой из примера 5 (рис. 7, б), аддитивно искаженной случайными независимыми ошибками $e_i \sim N(0, \sigma)$ для $\sigma = 0,01$.

Пример 6. Разобьем кривую $f(x) = F(x, 0, 2)$, $x \in [-1, 5, 1, 725]$, на семь равных по длине сегментов и зададим $M = 5$. При «оцифровке» с $h = 0,01$ получим семь локальных выборок $\{\tilde{S}_i^k\}_{i=1}^{350} = \bigcup_{k=1}^7 \{\tilde{S}_j^k\}_{j=1}^{50}$. Результаты обработки этих данных по алгоритму СКПА приведены на рис. 8, а, где показаны $\{\tilde{S}_i^k\}_{i=1}^{50}$ (I), \bar{f}_k (усредненные по 11 соседним точкам) (II), локальные выборки $\{\tilde{u}_j^k\}_{j=1}^{N_k}$ (III) и гистограмма входных ошибок. Расчеты по IV и V показаны на рис. 8, б, где $\varepsilon_k = f(x) - \hat{S}_k(x)$.

Разрывы на графике $\hat{S}'(x)$ в узлах стыковки показывают, что средне-квадратичная аппроксимация плохо воспроизводит производные. Для восста-

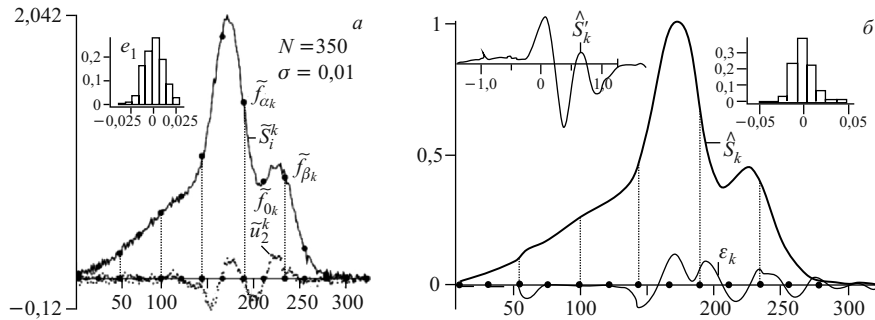


Рис. 8. Сглаживание шестого порядка: I–III (а) и IV, V (б)

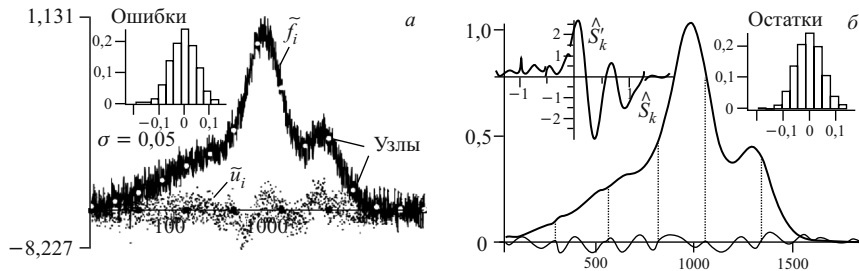


Рис. 9. Сглаживание шестого порядка $N = 2000$, $\sigma = 0,05$: I–III (а) и IV, V (б)

Таблица 3.

k	$x < x_\beta$	x_0	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
1	-0,975	-1,20	0,04812	0,27617	0,31188	-5,63704	-1,62168	72,93120
2	-0,525	-0,75	0,17403	0,51210	0,60806	-9,78713	-10,1454	130,6495
3	-0,075	-0,30	0,32546	0,10081	0,40855	14,11515	6,05154	-138,214
4	0,375	0,15	0,97098	1,76484	-10,6056	-36,5489	59,93527	245,3499
5	0,825	0,60	0,37336	0,22123	5,53694	-20,0846	-35,6049	54,60831
6	1,275	1,05	0,11510	-0,94026	2,60646	-2,86932	-12,2112	78,19547
7	1,725	1,50	0,00471	0,00638	-0,21658	-1,69013	5,93237	17,62483

новления $\hat{S}_k(x)$ по формулам (8) получен массив из примерно 50 чисел, что соответствует более чем семикратному сжатию объема входных данных. Об устойчивости алгоритма по отношению к ошибкам входных данных ($\sigma = 0,05$, $N = 2000$) можно судить по графикам рис. 9.

Коэффициент сжатия данных в этом случае ~ 40 . Численные значения коэффициентов и узлов для сегментов $\hat{S}_k(x_k)$, $x_{(k-1)} < x_k$, $k = \overline{1, 7}$, приведены в табл. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода базисных элементов предложена методика и алгоритмы решения задачи кусочно-полиномиальной аппроксимации и сглаживания шестого порядка. В модели локального сегмента используются значения $f(x)$ и $f'(x)$ в трех узлах, включая границы промежутков. Для МБЭ пятой степени получены формулы для коэффициентов d_i , $i = \overline{0, 5}$, в разложении функции по степеням $x - x_0$ на отрезке $[x_0 + \alpha, x_0 + \beta]$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta < 0$, зависящие от параметров α , β , f и f' в узлах локальной сетки, которые обеспечивают нулевую погрешность для функции и первой производной на границах интервала. Полученные формулы представляют самостоятельный интерес. Их можно использовать для решения широкого круга практических задач и в теоретических исследованиях.

Разработан алгоритм автоматического обнаружения узлов, позволяющий определять границы параметров сетки, на которой определяется локальный сегмент. Конструкция и свойства МБЭ в зависимости от шага сетки обеспечивают непрерывность стыковки сегментов и гладкость производных вплоть до третьего порядка. Численные расчеты на достаточно трудных тестах показали высокую эффективность модели в плане устойчивости вычислений, точности и гладкости аппроксимации.

Все формулы для расчетов просты. Число арифметических операций в них можно сократить табулированием БЭ и множителей u_i и v_i при вычислении d_i , $i = \overline{0, 5}$.

Устойчивость к ошибкам преобразования входных данных в алгоритме СКПА уменьшает размерность нормальной матрицы на три, что позволяет в несколько раз сократить вычислительную сложность только на операциях с нормальной матрицей. Большое число арифметических операций экономится за счет понижения максимального порядка производных, используемых при вычислении коэффициентов.

Предложенные алгоритмы являются эффективным математическим инструментом для решения задач аппроксимации сложных функциональных зависимостей и функций, заданных массивами дискретных точек, для обработки экспериментальных данных, в задачах фильтрации, промышленном дизайне, в алгоритмах оптимизации, при решении задач методами граничных элементов и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебышев П. Л. Избранные труды. М.: АН СССР, 1955. С. 614–648.
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. С. 141.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978.
5. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985.
6. Калиткин Н. Н., Шляхов И. М. В-сплайны высоких степеней // Математическое моделирование. 1999. Т. 11, № 11. С. 64–74.
7. Dikoussar N. D. Function Parameterization by Using 4-Point Transforms // Comput. Phys. Commun. 1997. V. 99. P. 235–254.
8. Дикусар Н. Д. Метод базисных элементов // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 12. С. 115–136.
9. Дикусар Н. Д., Торок Ч. Автоматический поиск узлов для кусочно-кубической аппроксимации // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 3. С. 23–40.
10. Franke R. Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods // Mathematics of Computation. 1982. V. 38. P. 181–200.

Получено 25 июля 2012 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 08.10.2012.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,19. Уч.-изд. л. 1,43. Тираж 245 экз. Заказ № 57795.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/