

P2-2013-21

Т. Г. Дедович \*, М. В. Токарев \*\*

АНАЛИЗ ФРАКТАЛОВ  
С ЗАВИСИМЫМ ДЕЛЕНИЕМ ЧАСТЕЙ  
ВС-, PaC- И SePaC-МЕТОДАМИ

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

---

\* E-mail: dedovich@sunhe.jinr.ru

\*\* E-mail: tokarev@jinr.ru

Дедович Т. Г., Токарев М. В.

P2-2013-21

Анализ фракталов с зависимым делением частей  
ВС-, PaC- и SePaC-методами

Обсуждаются представления о размерности пространства-времени в общей теории относительности и квантовой теории. Подчеркивается, что размерность дискретного пространства может быть определена на основе меры Хаусдорфа. Нецелочисленная размерность является типичной характеристикой фрактала. Предполагается, что процесс образования адронов при взаимодействиях частиц и ядер высоких энергий обладает фрактальными свойствами. Рассматриваются методы анализа фракталов: подсчета клеток (ВС), P-адических покрытий (PaC) и систем уравнений P-адических покрытий (SePaC) для определения фрактальной размерности. Проведен сравнительный анализ фракталов с зависимым делением частей этими методами. Определены оптимальные значения параметров, позволяющие восстановить фрактальную размерность  $D_F$ , количество уровней  $N_{lev}$  и структуру фрактала с максимальной эффективностью. Отмечается, что SePaC-метод имеет преимущества для анализа фракталов с зависимым делением.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2013

Dedovich T. G., Tokarev M. V.

P2-2013-21

Analysis of Fractals with Dependent Branching  
by Using BC, PaC and SePaC Methods

The concept of space-time dimension in general relativity and quantum theory is briefly discussed. It is noted that the dimension of a discrete space can be determined based on the Hausdorff measure. A fractional dimension is a typical characteristic of a fractal. The formation of hadrons in the interactions of particles and nuclei at high energies is assumed to have fractal properties. The methods of fractal analysis as Box Counting (BC), P-adic Coverage (PaC) and Systems of Equations of P-adic Coverage (SePaC) methods, are used to determine the fractal dimension. A comparative analysis of reconstruction of fractals with dependent branching is performed by these methods. The optimal values of parameters of the methods are determined. They allow us to find the fractal dimension, number of levels and structure of the fractal with maximum efficiency. It is noted that the SePaC method has advantages to the BC and PaC methods for analysis of fractals with dependent branching.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2013

## ВВЕДЕНИЕ

В общей теории относительности пространство является четырехмерным псевдоримановым многообразием, структура которого в малой окрестности каждой точки обладает свойствами евклидова пространства. В общем случае любое пространство характеризуется метрическими и топологическими свойствами. Метрические свойства связаны с понятием расстояния, описываемого метрикой. К ним относятся, например, кривизна, кручение, изотропность и однородность пространства. Топологические свойства описываются величинами, сохраняющимися при непрерывных деформациях, такими как размерность и связность пространства, числа Бетти, эйлерова характеристика. Размерность является не только математическим, но и физическим понятием. Она обладает определенным эмпирическим статусом и отражает связь с измеримыми величинами, фундаментальными физическими константами, законами сохранения и метрической структурой пространства-времени.

Развитие квантовой теории внесло изменения в представление о свойствах пространства и его размерности. Интуитивное понимание свойств евклидова пространства выражается в аксиомах элементарной геометрии, сформулированных в работе Гильберта [1]. Особое значение имеет аксиома Архимеда (аксиома измеримости). Она рассматривает измерение расстояния как сравнение двух масштабов, один из которых может быть сколь угодно малым. В квантовой теории гравитации существует минимальный масштаб — планковская длина [2]:

$$l_{\text{Pl}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \quad (1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света и  $G$  — гравитационная постоянная. Она имеет порядок  $10^{-35}$  м. Существование этого масштаба означает невозможность измерения расстояний меньше планковских. Развитие квантовой физики привело к сомнению в непрерывности структуры пространства-времени, появлению нового представления о неархимедовости, дискретности пространства и зависимости его размерности от масштаба. В. Владимиров и И. Волович предложили использовать Р-адические числа для описания неархимедовых пространств на малых масштабах [3]. Приложениям Р-адических чисел в физике посвящен, например, обзор [4].

В квантовой теории поля существует проблема расходимостей. Она решается, в частности, введением процедуры размерной регуляризации, использующей нецелое значение размерности пространства. Один из способов нахождения нецелочисленной размерности дискретного пространства основан на мере Хаусдорфа. Эта мера определяется следующим выражением:

$$M_\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_{i=1}^N l_i^\delta. \quad (2)$$

Здесь оператор  $\inf$  означает минимальное из всех возможных покрытий  $K$  рассматриваемого множества,  $\{l_i\}$  — диаметры шаров покрытия, не превышающие значение  $\epsilon$ . Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_F$  определяется как значение  $\delta$ , при котором мера  $M_\delta$  имеет конечное значение [5]. Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением. Объекты, для которых величина  $D_F$  принимает нецелочисленное значение, в отличие от топологической размерности  $D_T$  называются фракталами. Отличительной чертой фракталов является их самоподобие на разных масштабах.

В физике высоких энергий предполагается, что адроны, рожденные во взаимодействиях частиц и ядер, можно представить как наборы точек в трехмерном фазовом пространстве  $(p_T, \eta, \phi)$ . Здесь  $p_T$  — поперечный импульс,  $\eta$  — псевдобыстрота и  $\phi$  — азимутальный угол частицы. Распределение точек зависит от механизма образования частиц, не является однородным и может рассматриваться как фрактал. Поэтому фрактальная размерность характеризует динамические свойства процесса образования частиц.

Для определения фрактальных размерностей множеств и процессов в литературе используются несколько базовых методов: подсчета клеток (BC) [6–8], регуляризации [9],  $R/S$  нормированного размаха [10], максимумов модулей вейвлет-преобразования [11]. В работах [12, 13] предложены новые методы фрактального анализа: метод  $P$ -адические покрытия (PaC) и метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC). Отметим, что в рассматриваемых методах используются покрытия с основанием  $P$ , которое может быть как простым, так и составным числом. Такой подход более оправдан с алгоритмической точки зрения. А использование в качестве оснований только простых чисел является частным случаем данных методов. Предложенные методы позволяют определить не только фрактальную размерность  $D_F$ , но также количество уровней  $N_{lev}$  и структуру фракталов.

В данной работе проведен сравнительный анализ фракталов с зависимым делением частей BC-, PaC- и SePaC-методами. В разд. 1 представлен сценарий партонного ливня с последующей адронизацией, приводящий к образованию фрактала. В разд. 2 дано описание этих методов. Процедура выбора оптимальных значений параметров методов приведена в разд. 3. Они позволяют восстановить фрактальную размерность  $D_F$ , количество уровней  $N_{lev}$

и структуру фрактала с максимальной эффективностью. В разд.4 обсуждаются результаты сравнительного анализа используемых методов на примере фракталов с зависимым делением частей. Основные выводы сформулированы в заключении.

## 1. ПАРТОННЫЕ ЛИВНИ И ПРОЦЕСС АДРОНИЗАЦИИ КАК ФРАКТАЛЫ

Для анализа взаимодействия адронов и ядер высоких энергий широко используются различные монте-карло-генераторы событий [14–19]. Остановимся вкратце на особенностях кинематики развития партонного ливня. В процессе развития ливня родительский партон  $a$  с энергией  $E$  излучает два дочерних партона  $b$  и  $c$ , которые несут доли энергии  $z$  и  $1 - z$ . Такой механизм расщепления повторяется для всех дочерних партонов. Углы расщепления партонов ограничены ( $\Theta_- < \Theta < \Theta_+$ ) и упорядочены:  $\Theta_b, \Theta_c < \Theta_a$ .

Далее представлен сценарий развития партонного ливня и процесса адронизации, приводящий к образованию фрактала. На рис. 1 приведены первые три уровня фрактала. Диапазон углов излучения ( $\Theta_+, \Theta_-$ ) определяет допустимые части псевдобыстротного пространства  $\{\eta\}$  для дочерних партонов ( $\eta = -0,5 \ln(\text{tg}(\Theta/2))$ ). Пространство излучения для родительского партона условно делится на пять частей. Для дочерних партонов допустимые диапазоны псевдобыстрот состоят из одной (первой) и двух частей (четвертой, пятой). На каждом последующем шаге развития ливня процесс излучения повторяется, сохраняя структуру заполнения  $\eta$ -пространства. Диапазон, состоящий из двух частей, рассматривается как единый объект, т. е. происходит

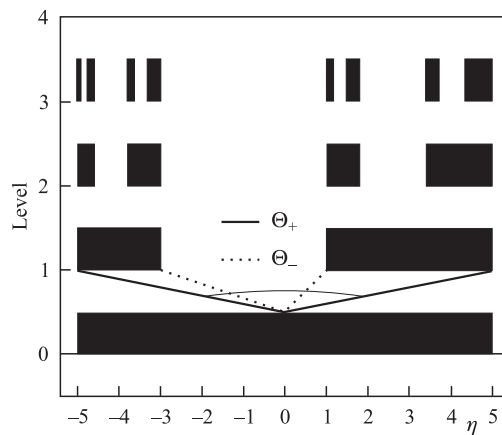


Рис. 1. Зависимость допустимых диапазонов  $\eta$ -пространства от уровня фрактала

зависимое деление частей. Предполагается, что процесс адронизации сохраняет структуру партонного ливня. Процесс формирования такого фрактала будем называть регулярным с зависимым делением. Формирование фрактала происходило по  $P$ -адическому закону, т. е. на каждом уровне пространство делилось на  $M$  частей, количество которых на разных масштабах изменяется по степенному закону с основанием  $P$ :  $M = P^n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для фрактала, показанного на рис. 1, основание  $P = 5$ .

Напомним, что фрактальная размерность — это величина  $D_F$ , при которой мера (2) конечна. Для фракталов, рассматриваемых в данной работе,  $D_F$  является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{N_r^1} d_i^{D_F} = 1. \quad (3)$$

Здесь  $N_r^1$  — количество пробников (допустимых диапазонов) первого уровня,  $d_i$  — размеры пробников (длины допустимых диапазонов), покрывающих фрактал на первом уровне. Для фрактала, показанного на рис. 1, уравнение (3) имеет вид

$$(1/5)^{D_F} + (2/5)^{D_F} = 1. \quad (4)$$

Его решение  $D_F \approx 0,5639 \dots$

Часто размерность фрактала характеризуют клеточной размерностью  $D_b$ , определяемой по формуле

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}. \quad (5)$$

Здесь  $N(\delta)$  — количество пробников размером  $\delta$ , покрывающих объект. Известно, что клеточная размерность не всегда совпадает с фрактальной. В данном случае  $D_F \approx 0,5639 \dots$ , а  $D_b \approx 0,6826$ . В следующем разделе приведены описания методов, основанных на разных определениях размерности.

## 2. ВС-, PaC- и SePaC-МЕТОДЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Остановимся кратко на методах, используемых в данной работе. Метод подсчета клеток (ВС) [7] является одним из широко используемых для определения фрактальной размерности. В работах [12] и [13] предложены методы  $P$ -адических покрытий (PaC) и систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC). В данной работе проводится сравнение этих методов с целью определения наилучшей эффективности восстановления фрактальной размерности, количества уровней и основания в  $P$ -адическом формировании фрактала. В анализе используется набор 437 тестовых фракталов, полученных зависимым делением. Их количество определяется числом всех возможных разновидностей фракталов по основанию  $P = 4-8$ .

**2.1. Методы подсчета клеток и P-адических покрытий.** В ВС- и PaC-методах фрактальная размерность  $D_F$  определяется как параметр наклона зависимости  $N \sim M^{D_F}$  в дважды логарифмическом масштабе. Здесь  $M$  и  $N$  — количество бинов и ненулевых бинов в наборе распределений исследуемой величины. В распределениях набора количество бинов  $\{M_i\}$  изменяется по степенному закону ( $M_i = (P)^i$ ,  $i = 0, 1, 2 \dots$ ), т. е. набор является P-адическим покрытием. В ВС-методе, как правило, используется покрытие с основанием  $P = 2$ , а в PaC-методе — различные покрытия с  $P = 2, \dots, P_{\max}$ . В случае, когда  $\chi^2$  линейной аппроксимации зависимости  $\ln N$  от  $\ln M$  меньше заданного значения параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$ , то набор рассматриваемых частиц считается фракталом с основанием  $P$  и размерностью  $D_F$ . Количество уровней фрактала определяется по условию насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$ . Отметим, что ВС-метод имеет один свободный параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$ , а PaC — два параметра: значение основания максимального P-адического покрытия  $P_{\max}$  и  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Детальное описание методов приведено в [12].

**2.2. Метод систем уравнений P-адических покрытий.** Метод систем уравнений P-адических покрытий (SePaC) основан на определении фрактальной размерности  $D_F$ , получаемой решением систем уравнений для каждого уровня. Он включает рассмотрение различных P-адических покрытий множества с основанием  $P = 3, \dots, P_{\max}$ , исследование гипотез формирования фракталов (с зависимым и независимым делением частей) и нахождение решения  $D_F^{\text{lev}}$  системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{Nd_{\text{lev}}} (d_{i \text{ lev}})^{D_F^{\text{lev}}} = 1. \quad (6)$$

Здесь  $Nd_{\text{lev}}$  и  $d_{i \text{ lev}}$  — количество и длина допустимых диапазонов для каждого уровня соответственно. В случае, когда отклонения от среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$  для каждого уровня меньше заданного значения параметра Dev, набор рассматриваемых частиц считается фракталом с основанием  $P$  и размерностью  $D_F$ . Количество уровней фрактала определяется условием насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$ . SePaC-метод имеет два параметра: значение основания максимального P-адического покрытия  $P_{\max}$  и предельное отклонение от среднего Dev. Подробное описание метода приведено в работе [13].

### 3. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ $\chi_{\text{lim}}^2$ , $P_{\max}$ , Dev

Каждый из методов ВС, PaC и SePaC имеет свои параметры. Оптимальное значение параметров  $\chi_{\text{lim}}^2$ ,  $P_{\max}$ , Dev позволяет определить фрактальную

размерность, количество уровней и основание с максимальной эффективностью. Эффективность нахождения величины  $V$  определяется выражением

$$\text{Ef}_V = 1 - |\text{Er}_V|, \quad \text{если } |\text{Er}_V| \leq 1, \quad \text{Ef}_V = 0, \quad \text{если } |\text{Er}_V| > 1. \quad (7)$$

Здесь  $\text{Er}_V$  — ошибка восстановления величины  $V = D_F, N_{\text{lev}}, P$ :

$$\text{Er}_V = (V - V_{\text{test}})/V_{\text{test}}. \quad (8)$$

Здесь  $V_{\text{test}}$  — истинное значение величины  $V$ . Полная эффективность выражается через эффективности восстановления фрактальной размерности, количества уровней и основания следующей формулой:

$$\text{Ef}_{\text{tot}} = \text{Ef}_{D_F} \cdot \text{Ef}_{N_{\text{lev}}} \cdot \text{Ef}_P. \quad (9)$$

**3.1. Процедура поиска параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC- и SePaC-методов.** Значение параметра  $P_{\text{max}}$  определяет количество рассматриваемых P-адических покрытий. Процедура поиска этого параметра для PaC- и SePaC-методов детально описана в работе [20]. Отметим, что значение параметра  $P_{\text{max}}$  устанавливается при анализе функции  $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$  для различных значений  $P_{\text{max}}$  и всех значений  $\chi_{\text{lim}}^2$  и  $\text{Dev}$  для PaC- и SePaC-методов:

$$\Delta D_{\text{ext}} = \Delta D_{D_F} + \Delta D_{N_{\text{lev}}} + \Delta D_P. \quad (10)$$

Здесь  $\Delta D_{D_F}$ ,  $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$  и  $\Delta D_P$  — разность распределений по величинам  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$  и  $D_P$  соответственно.

Далее приведено описание процедуры поиска параметра  $P_{\text{max}}$ . Зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от  $P_{\text{max}}$  представлена на рис. 2, а для PaC- и на рис. 2, б для SePaC-методов. Выбор оптимального значения  $P_{\text{max}}$  проводился в диапазоне значений  $P_{\text{max}} = 3-23$ . Для PaC-метода значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  изменялось в диапазоне  $10^{-13}-2,5$ . Значение  $\text{Dev}$  для SePaC-метода варьировалось от  $10^{-6}$

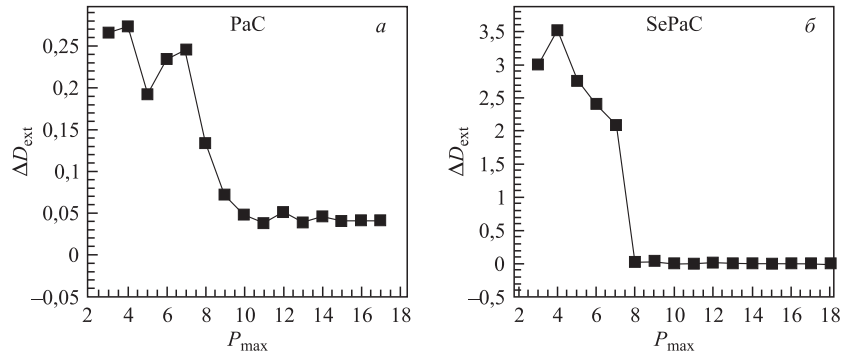


Рис. 2. Зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от параметра  $P_{\text{max}}$  для методов PaC (а) и SePaC (б)



до 0,9. Как видно из рис. 2, а, зависимость  $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$  для PaC-метода имеет плато при  $P_{\text{max}} = 10-18$ . Значение  $\Delta D_{\text{ext}} \approx 0,045$  на плато указывает на незначительное изменение формы всех распределений. Для SePaC-метода зависимость  $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$  (рис. 2, б) также имеет плато при  $P_{\text{max}} = 8-18$ . Неизменность формы распределений соответствует значению  $\Delta D_{\text{ext}} = 0$  на плато. Отметим, что  $P_{\text{max}} = 8$  (начало плато) является максимальным значением основания Р-адического покрытия анализируемого набора данных.

Мы установили, что параметр  $P_{\text{max}}$  для PaC- и SePaC-методов определяется минимальным значением, соответствующим началу плато в зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от величины  $P_{\text{max}}$ . Для фракталов с независимым делением выбор параметра  $P_{\text{max}}$  также соответствовал минимальному значению на плато [20].

**3.2. Процедура поиска параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС- и PaC-методов.** Параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяет, является ли рассматриваемый набор данных фракталом. Процедура поиска этого параметра для ВС- и PaC-методов описана в статье [20]. Отметим, что выбор оптимального значения  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяется при анализе функции  $\Delta D_{\text{ext}}(\chi_{\text{lim}}^2)$  для различных значений  $\chi_{\text{lim}}^2$  при фиксированном оптимальном значении  $P_{\text{max}}$  для PaC-метода. Для обоих методов значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  изменялось в диапазоне  $10^{-13}-2,5$ . В табл. 1 показано соответствие между номером  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  и значением  $\chi_{\text{lim}}^2$ .

**Таблица 1. Соответствие номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  и величины  $\chi_{\text{lim}}^2$**

$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi_{\text{lim}}^2$	$10^{-13}$	$10^{-12}$	$10^{-11}$	$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\chi_{\text{lim}}^2$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\chi_{\text{lim}}^2$	0,08	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\chi_{\text{lim}}^2$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\chi_{\text{lim}}^2$	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

На рис. 3, а приведена зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для ВС-метода. Видно, что эта функция имеет два плато, которые соответствуют малым и большим значениям  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Область оптимальных зна-

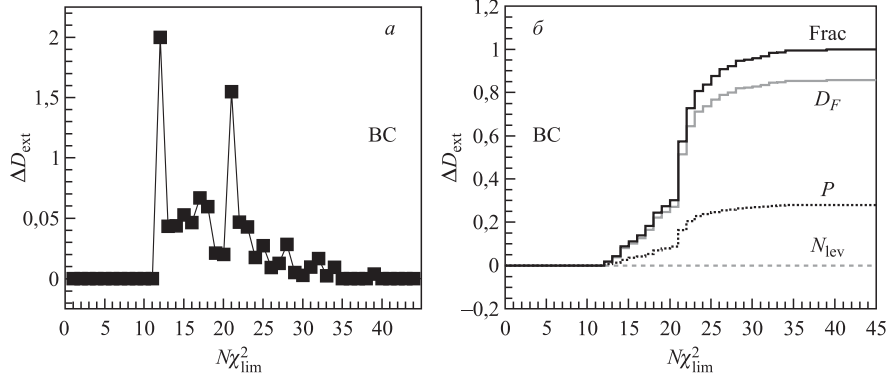


Рис. 3. Зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (а) и эффективностей (б) от номера параметра  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для ВС-метода

чений этого параметра зависит от эффективностей восстановления фрактала  $\text{Ef}_{\text{Frac}}$ , фрактальной размерности  $\text{Ef}_{D_F}$ , количества уровней  $\text{Ef}_{N_{\text{lev}}}$  и основания Р-адического покрытия  $\text{Ef}_P$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ . Эффективность восстановления фрактала определяется выражением

$$\text{Ef}_{\text{Frac}} = N_{\text{Frac}}/N_{\text{test}}, \quad (11)$$

где  $N_{\text{test}}$  и  $N_{\text{Frac}}$  — количество рассматриваемых и восстановленных фракталов.

Проведем сравнительный анализ эффективности восстановления (рис. 3, б) и функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (рис. 3, а) для ВС-метода. Первое плато функции  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$  соответствует нулевому значению доли фракталов в наборе событий  $\text{Ef}_{\text{Frac}}$  (рис. 3, б), а второе — максимальному значению функции  $\text{Ef}_{\text{Frac}}$ . Поэтому  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяется как минимальное значение этой величины на втором плато зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Этот же выбор  $\chi_{\text{lim}}^2$  соответствует максимальным значениям эффективности восстановления  $\text{Ef}_{D_F}$ ,  $\text{Ef}_{N_{\text{lev}}}$  и  $P$  (см. рис. 3, б). Подчеркнем, что для фракталов с независимым делением выбор параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС-метода также определяется минимальным значением  $\chi_{\text{lim}}^2$  на втором плато [20].

Далее приведем результаты анализа фракталов, полученные РаС-методом. На рис. 4, а показана зависимость  $\Delta D_{\text{ext}}$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ . Она имеет два плато при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 1-6$  и  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 35-45$ , а также пики при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 11$  и  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21$ . Особенности функции  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$  определяются поведением эффективностей восстановления  $\text{Ef}_{\text{Frac}}$ ,  $\text{Ef}_{D_F}$ ,  $\text{Ef}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Ef}_P$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для наборов, восстановленных как фракталы (рис. 4, б). Из рисунка видно, что зависимость  $\text{Ef}_{\text{Frac}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$  имеет два плато при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 1-6$  и  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21-45$ .

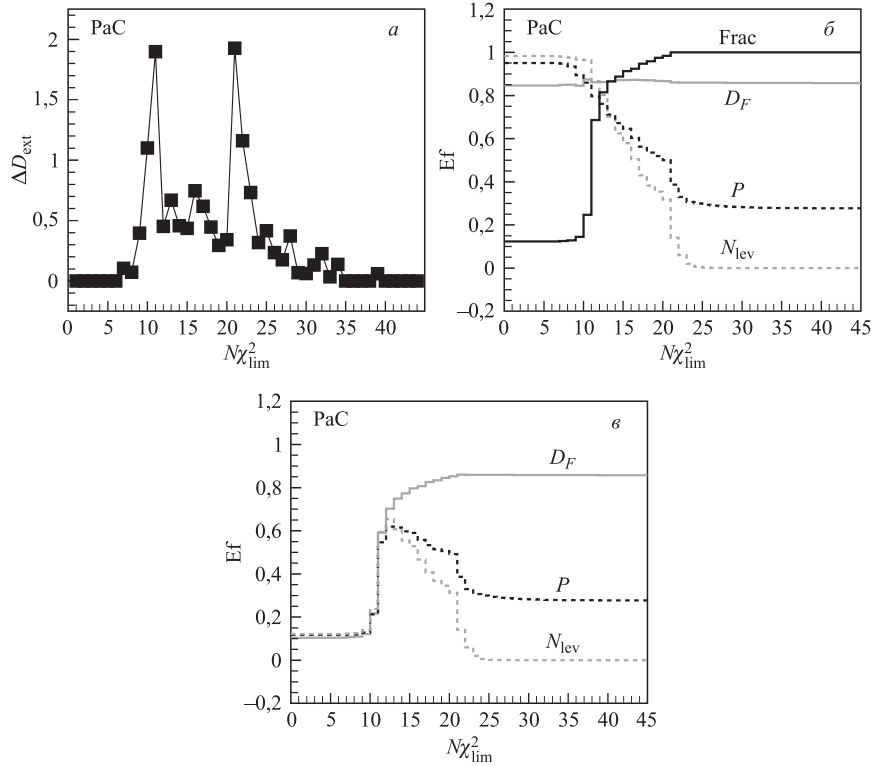


Рис. 4. Зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (а), эффективностей для наборов, восстанавливаемых как фракталы (б), и всех наборов данных (в) от номера параметра  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для PaC-метода

Значение  $\text{Ef}_{\text{Frac}}$  на первом плато равно 0,125, а на втором — 1. Быстрый рост  $\text{Ef}_{\text{Frac}}$  наблюдается при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 11$ , что соответствует первому пику зависимости  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$ . Эффективность  $\text{Ef}_{D_F}$  практически не меняется во всем диапазоне изменения  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ . Эффективности  $\text{Ef}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Ef}_P$  имеют максимальные значения (0,95–0,99) при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 1–10$ . При больших значениях ( $> 10$ ) эффективности линейно уменьшаются и быстро спадают при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21$ , что соответствует второму пику зависимости  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$ . Для определения области оптимальных значений параметра проанализируем зависимости эффективностей восстановления  $\text{Ef}_{D_F}$ ,  $\text{Ef}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Ef}_P$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для всех тестовых фракталов (рис. 4, в). Установлено, что максимальное значение  $\text{Ef}_{D_F}$  наблюдается при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21–45$  (рис. 4, в). Это соответствует области справа от второго пика зависимости  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$  (рис. 4, а). Мак-

симальные значения  $Ef_{N_{lev}}$  и  $Ef_P$  соответствуют  $N_{\chi_{lim}^2} = 12$  (т. е. первому значению  $N_{\chi_{lim}^2}$  между двумя пиками в зависимости  $\Delta D_{ext}(N_{\chi_{lim}^2})$ ).

Таким образом, для ВС-метода значение параметра  $\chi_{lim}^2$  определяется как минимальное значение, соответствующее началу второго плато в зависимости функции  $\Delta D_{ext}(N_{\chi_{lim}^2})$ . В PaC-методе для вычисления  $D_F$  величина  $\chi_{lim}^2$  определяется как значение второго пика зависимости  $\Delta D_{ext}(N_{\chi_{lim}^2})$ , а для вычисления  $N_{lev}$  и  $P$  величина  $\chi_{lim}^2$  определяется как минимальное значение между двумя пиками.

**3.3. Процедура поиска параметра Dev для SePaC-метода.** Параметр Dev определяет, является ли набор данных фракталом. Процедура поиска этого параметра подробно описана в статье [20]. Отметим, что выбор Dev определяется при анализе функции  $\Delta D_{ext}(Dev)$  при фиксированном оптимальном значении параметра  $P_{max}$ . Область изменения Dev соответствует диапазону  $10^{-6}$ –0,9. В табл. 2 показано соответствие между номером  $N_{Dev}$  и значением Dev.

**Таблица 2. Соответствие номера  $N_{Dev}$  и величины Dev**

$N_{Dev}$	1	2	3	4	5	6	7	8
Dev	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$N_{Dev}$	9	10	11	12	13	14	15	16
Dev	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
$N_{Dev}$	17	18	19	20	21	22	23	24
Dev	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

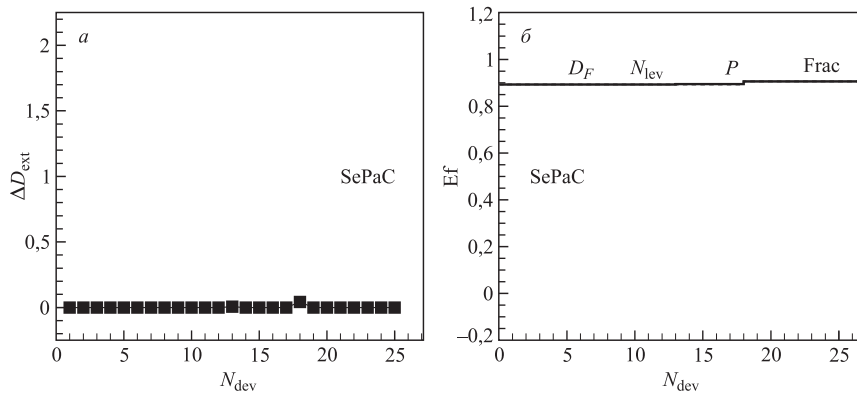


Рис. 5. Зависимости функции  $\Delta D_{ext}$  (а) и эффективностей (б) от параметра Dev для наборов, восстанавливаемых как фракталы, для SePaC-метода

На рис. 5, *a, б* представлены зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  и эффективностей  $Ef_{\text{Frac}}$ ,  $Ef_{D_F}$ ,  $Ef_{N_{\text{lev}}}$  и  $Ef_P$  от параметра  $Dev$  для наборов, восстанавливаемых как фракталы. Значения функции  $\Delta D_{\text{ext}}(Dev)$  (рис. 5, *a*) равны нулю. Установлено, что доля фракталов в наборе событий  $Ef_{\text{Frac}}$  равна 0,9 при любых значениях  $Dev$  (рис. 5, *б*), а эффективности восстановления  $Ef_{D_F}$ ,  $Ef_{N_{\text{lev}}}$  и  $Ef_P$  не изменяются в указанном диапазоне.

Таким образом, значение  $Dev$  может быть выбрано произвольно из диапазона  $10^{-6}$ –0,9.

#### 4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ВС, PaC И SePaC

В данном разделе представлены результаты сравнения эффективностей и ошибок восстановления фрактальной размерности  $Er_{D_F}$ , количества уровней  $Er_{N_{\text{lev}}}$  и основания  $Er_P$ , полученные при анализе фракталов с зависимым

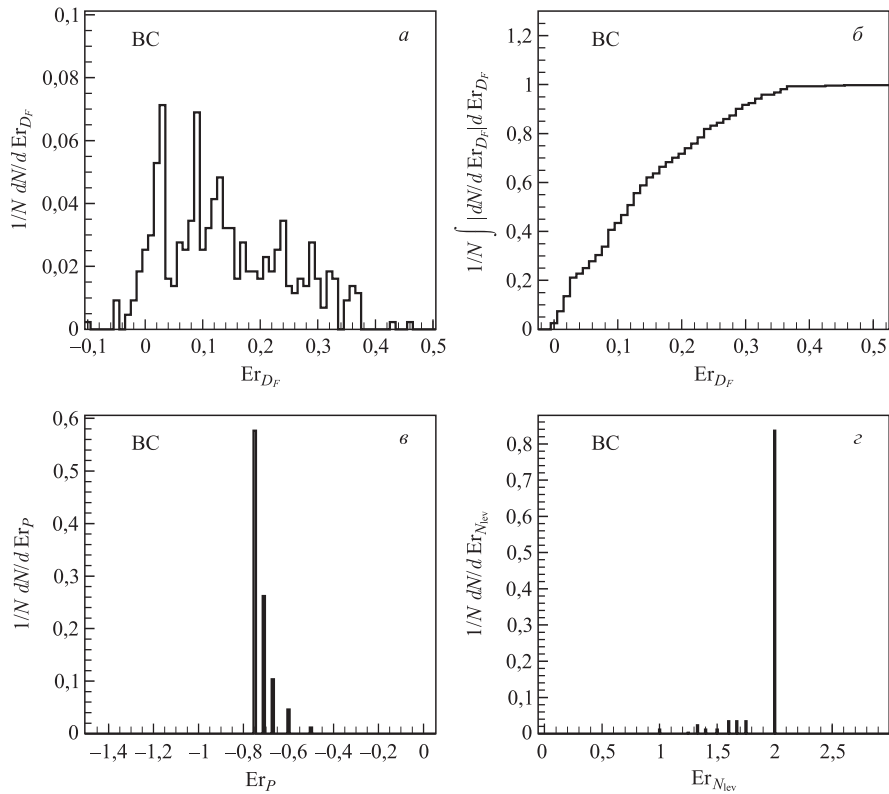


Рис. 6. Нормированные распределения ошибок фрактальной размерности  $Er_{D_F}$  (*a*), основания  $Er_P$  (*в*), количества уровней  $Er_{N_{\text{lev}}}$  (*г*) и интегральное для  $D_F$  (*б*) для наборов, восстановленных как фракталы ВС-методом

делением ВС-, PaC- и SePaC-методами, использующими найденные в разд. 3 оптимальные наборы параметров.

На рис. 6, *a, б* показаны нормированное и интегральное распределения ошибки  $Er_{D_F}$  для наборов, восстановленных ВС-методом как фракталы. Установлено, что для большинства фракталов размерность больше тестовой (рис. 6, *a*). В статье [20] было показано, что для фракталов с независимым делением частей для большинства фракталов восстанавливаемая размерность ВС-методом меньше тестовой. Таким образом, если в наборе данных присутствуют фракталы с зависимым и независимым делением частей, то распределение фрактальных размерностей будет искажаться. Например, на гладком участке распределения может появиться плато или два пика. Будем считать, что фрактальная размерность определяется точно, если ошибка восстановления меньше 0,5 %. Найдено, что размерность восстанавливается точно для 2,5 % фракталов, для 25 % фракталов ошибка  $Er_{D_F}$  меньше 5 %, а

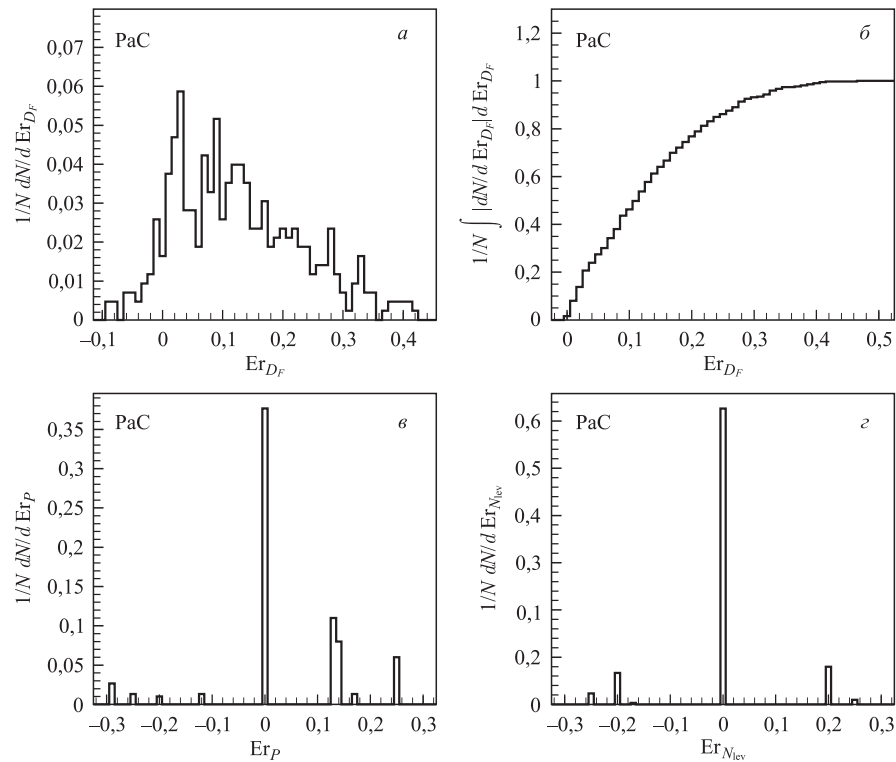


Рис. 7. Нормированные распределения ошибок фрактальной размерности  $Er_{D_F}$  (*a*), основания  $Er_P$  (*в*), количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  (*г*) и интегральное для  $D_F$  (*б*) для наборов, восстановленных как фракталы PaC-методом

для 42 % меньше 10 % (рис. 6, б). Как отмечено в разд. 2.1, ВС-метод использует только одно покрытие. Поэтому основание  $P$  и количество уровней  $N_{lev}$  не может быть определено данным методом, а нормированное распределение ошибки  $Er_P$  (рис. 6, в) характеризует только набор данных. Большинство фракталов в рассматриваемом наборе имеют основание  $P = 8$ , и поэтому максимум в распределении  $Er_P$  соответствует  $Er_P = (2 - 8)/8 = -0,75$ . Нормированное распределение ошибки восстановления количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  (рис. 6, г) также характеризует исследуемый набор данных. Для фрактала с основанием  $P = 8$ , имеющего 512 точек ( $N_{lev} = 3$ ), покрытие с  $P = 2$  соответствует количеству уровней  $N_{lev} = 9$ , а ошибка для большинства фракталов равна  $Er_{N_{lev}} = (9 - 3)/3 = 2$ .

На рис. 7, а, б показаны нормированное и интегральное распределения ошибки  $Er_{D_F}$  для наборов, восстановленных PaC-методом как фракталы.

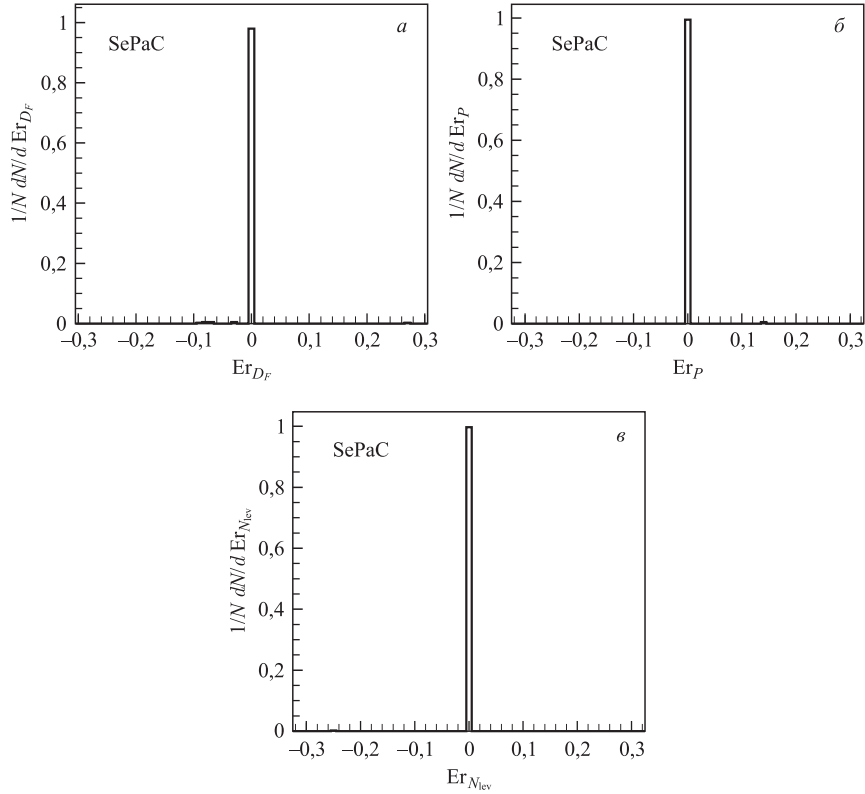


Рис. 8. Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $Er_{D_F}$  (а), основания  $Er_P$  (б) и количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  (в) для наборов, восстановленных как фракталы SePaC-методом

Установлено, что для большинства фракталов размерность больше тестовой (рис. 7, *a*). В статье [20] было показано, что для большинства фракталов с независимым делением частей, размерность восстанавливается точно. Таким образом, если в наборе данных присутствуют фракталы с зависимым и независимым делением частей, то для PaC-метода распределение фрактальных размерностей будет искажаться меньше, чем для BC-метода. Найдено, что размерность восстанавливается точно для 1,5 % фракталов, для 26 % фракталов ошибка  $Er_{D_F}$  меньше 5 %, а для 43 % меньше 10 % (рис. 7, *b*). Нормированные распределения ошибок  $Er_P$  и  $Er_{N_{lev}}$  представлены на рис. 7, *в* и *г* соответственно. Как можно видеть, количество уровней и основание  $P$ -адического покрытия определяются точно для 38 и 63 % наборов, восстановленных как фракталы (рис. 7, *в*, *г*).

Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $Er_{D_F}$ , основания  $Er_P$  и количества уровней  $Er_{N_{lev}}$  приведены на рис. 8, *a–в* для наборов, восстановленных SePaC-методом как фракталы. Как можно видеть из рисунков, размерность, количество уровней и основание  $P$  определяются точно для 97–100 % фракталов.

Результаты сравнительного анализа эффективностей и ошибок восстановления  $D_F$ ,  $P$ ,  $N_{lev}$  рассматриваемыми методами при оптимальных значениях параметров для фракталов с зависимым делением частей приведены в табл. 3. Из таблицы видно, что BC- и PaC-методы восстанавливают фрактальную размерность с эффективностью  $Ef_{D_F} = 85–86$  %. Размерность восстанавливается точно для небольшого количества фракталов 2,5–1,5 %. Для BC-метода основание  $P$  восстанавливается с эффективностью 21 %, а количество уровней  $N_{lev}$  не восстанавливается. Для PaC-метода эффективности  $Ef_{N_{lev}}$  и  $Ef_P$  равны 65 и 61 % соответственно. SePaC-метод восстанавливает  $D_F$ ,  $N_{lev}$  и основание  $P$  с эффективностью 91 %. Доля событий, имеющих ошибки  $Er_{D_F}$ ,  $Er_{N_{lev}}$ ,  $Er_P$  меньше 0,5 %, составляет 89–90 %. Общая эффективность  $Ef_{tot}$ , учитывающая восстановление  $D_F$ ,  $N_{lev}$  и  $P$  SePaC-методом, равна 75 %. Она намного превышает соответствующие значения для PaC- и BC-методов (33 и 0 %).

**Таблица 3. Эффективности и ошибки восстановления  $D_F$ ,  $N_{lev}$ ,  $P$  фракталов с зависимым делением, полученные методами BC, PaC и SePaC**

Метод	$Ef_{D_F}$ , %	$Ef_{N_{lev}}$ , %	$Ef_P$ , %	$Ef_{tot}$ , %	% события, $Er_{D_F} < 0,5$ %	% события, $Er_{N_{lev}} < 0,5$ %	% события, $Er_P < 0,5$ %
BC	85	0	21	0	2,5	0	0
PaC	86	65	61	33	1,5	43	26
SePaC	91	91	91	75	89	90	90



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ восстановления характеристик фракталов с зависимым делением частей методами ВС, РаС и SeРаС. Разработанная ранее процедура поиска значений параметров  $\chi_{\text{lim}}^2$ ,  $P_{\text{max}}$ , Dev применена для нахождения их оптимальных значений. Найдены эффективности и ошибки восстановления фрактальной размерности  $D_F$ , количества уровней  $N_{\text{lev}}$  и основания  $P$ . Показанно, что SeРаС-метод имеет преимущества в анализе фракталов с зависимым делением частей перед ВС- и РаС-методами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Gilbert D.* Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1887.
2. *Pers A., Rosen N.* // Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 335;  
*Markov M.* // Prog. Theor. Phys., Suppl. 1965. P. 85;  
*Hooft G.* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 256. P. 727.
3. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* Р-адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994;  
*Vladimirov V., Volovich I.* // Theor. Math. Phys. 1984. V. 59. P. 3;  
*Vladimirov V., Volovich I.* // Common Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659.
4. *Brekke L., Freund P. G. O.* P-Adic Numbers in Physics // Phys. Rep. 1993. V. 233. P. 2.
5. *Hausdorff F.* // Math. Ann. 1918. V. 79. P. 157.
6. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
7. *Barabasi A., Stanley H.* Fractal Concepts in Surface Growth. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1995.
8. *Saa A. et al.* // Nonlin. Processes Geophys. 2007. V. 14. P. 603.
9. *Roueff F. et al.* // Proc. of the Conf. «Fractals 98», Malta, October 1998.
10. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
11. *Pavlov A. et al.* // Usp. Fiz. Nauk. 2007. V. 50. P. 8.
12. *Dedovich T., Tokarev M.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8. P. 521.
13. *Dedovich T., Tokarev M.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 9. P. 552.
14. *Sjostrand T. et al.* // Comput. Phys. Commun. 2008. V. 178. P. 852.
15. *Bähr M. et al.* arXiv: 0809.2002 [hep-ph] 2008.
16. *Gleisberg T. et al.* // JHEP. 2009. V. 0902. P. 007.
17. *Gyulassy M. et al.* // Comput. Phys. Commun. 1994. V. 83. P. 307.
18. *Lonnblad L. et al.* // Comput. Phys. Commun. 1992. V. 71. P. 15.
19. *Galoyan A.* e-Print: nucl-th/0605021. 2006.
20. *Дедович Т. Г., Токарев М. В.* Препринт ОИЯИ Р11-2013-5. Дубна, 2013.

Получено 12 марта 2013 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 22.04.2013.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,12. Уч.-изд. л. 1,35. Тираж 325 экз. Заказ № 57965.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)