

P4-2015-17

В. В. Пупышев\*

ДВУМЕРНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЙНИЕ  
КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ.  
ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ГРИНА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

\* E-mail: [pupyshev@theor.jinr.ru](mailto:pupyshev@theor.jinr.ru)

Пупышев В. В.

P4-2015-17

Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы.  
Волновые функции и функции Грина

Предполагается, что заряженная квантовая частица движется в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства и рассеивается неподвижным кулоновским центром, лежащим в той же плоскости. Исследуются волновая функция такой частицы, функция Грина и все радиальные компоненты этих функций. Для модулей таких компонент выведены равномерные мажорантные оценки. Найдены представление волновой функции через регулярные радиальные функции Кулона и представление амплитуды рассеяния через парциальные фазы. Получены интегральные представления функции Грина и всех ее радиальных компонент.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2015

Pupyshev V. V.

P4-2015-17

Two-Dimensional Coulomb Scattering of a Quantum Particle.  
The Wave Functions and Green Functions

By assumption, a charged quantum particle moves in the two-dimensional plane of the three-dimensional configuration space and is scattered by the fixed Coulomb center lying in the same plane. The wave function of this particle, the Green function and all radial components of these functions are studied. For the modules of these components the uniform major bounds are derived. The representation of the wave function in terms of the regular radial Coulomb functions and the representation of the scattering amplitude in terms of the partial phase shifts are found. For the Green function and its radial components the integral representations are obtained.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2015

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время бурно развивается теоретическая и экспериментальная физика ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках [1]. В одной из них, а именно в дискообразной, квантовое движение частиц газа происходит в основном в двумерной плоскости их трехмерного координатного пространства.

Одна из особо интересных для практических приложений особенностей двумерного движения по сравнению с трехмерным такова: при любом сколь угодно слабом, но притягивающем взаимодействии в системе двух квантовых частиц эти частицы имеют хотя бы одно связанное состояние.

Следовательно, в дискообразных ловушках возможен синтез новых химических соединений, не существующих в трехмерном пространстве.

Поэтому с точки зрения теоретической физики и квантовой химии особо актуальными в настоящее время являются две задачи: построение квантовой теории двумерного рассеяния для систем нескольких заряженных частиц в пределе их нулевой полной энергии и создание экономичных методов численного анализа физических процессов, происходящих в таких системах.

Первым и неизбежным этапом решения этих задач является исследование двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы неподвижным силовым центром. Такому исследованию предполагается посвятить серию работ. Настоящая работа является первой из них.

В разд. 1 поясняются используемые обозначения и определения. Разд. 2 посвящен представлениям радиальных компонент волновой функции кулоновского рассеяния квантовой частицы и функции Грина через гипергеометрические функции. В разд. 3 для всех таких компонент выводятся и исследуются мажорантные оценки. В разд. 4 обсуждаются разложения волновой функции и амплитуды рассеяния в косинус-ряды Фурье. В разд. 5 выводится интегральное представление функции Грина. В заключении перечислены основные результаты.

### **1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Используем терминологию и обозначения, принятые в известных монографиях по квантовой теории рассеяния [2, 3], квантовой механике [4, 5], в курсе высшей математики [6] и в математических справочниках [7–9].

Перечислим основные предположения.

Пусть квантовая частица  $p_1$  имеет конечную положительную массу  $m_1 > 0$ , вещественный кулоновский заряд  $z_1$  и движется только в двумерной плоскости  $\mathcal{P}$  ее трехмерного координатного пространства  $\mathcal{R}^3$ . Предполагаем, что некоторая неподвижная точка  $O$  этой плоскости является кулоновским силовым центром с вещественным зарядом  $Z$ , воздействующим на частицу  $p_1$  посредством кулоновского потенциала. Считаем, что этот потенциал определяется формулой  $z_1 Z/r$ , где  $r$  — расстояние между частицей  $p_1$  и точкой  $O$  в плоскости  $\mathcal{P}$ .

В плоскости  $\mathcal{P}$  введем двумерную декартову систему координат  $S^2$  с координатами  $(x, y)$  и осями  $OX$  и  $OY$ , положительные направления которых определяются ортами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Пусть начальная точка этой системы совпадает с силовым центром  $O$ , а орт  $\mathbf{e}_1$  направлен вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}_0$  начального состояния частицы  $p_1$ . Следуя монографии [5], считаем, что частица  $p_1$  испускается из бесконечно удаленной точки  $x = -\infty$  оси  $OX$ . В системе  $S^2$  радиус-вектор  $\mathbf{r}$  частицы  $p_1$  является двумерным вектором  $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2$ , а вектор  $\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{e}_1$  имеет одну ненулевую координату  $k_0 > 0$ . Положив  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$ , определим полярные координаты  $(r, \varphi)$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  частицы  $p_1$ : расстояние  $r \geq 0$  и азимутальный угол  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . В силу предположений о кулоновском потенциале волновой вектор  $\mathbf{k}$  состояния упругого рассеяния этой же частицы лежит в плоскости  $\mathcal{P}$ , а волновое число  $k \equiv |\mathbf{k}|$  равно начальному волновому числу  $k_0$ .

Перейдем к описанию параметров и аргументов.

Символом  $\hbar$  обозначим константу Планка. Напомним, что волновое число  $k$  частицы  $p_1$  связано с ее полной энергией  $E$  равенством  $k = \sqrt{2m_1 E/\hbar^2}$ , а модуль параметра  $R \equiv \hbar^2/(2m_1 z_1 Z)$  в случае  $z_1 Z < 0$  является аналогом боровского радиуса [4]. Если потребуется, то будем различать два случая: случай кулоновского притяжения ( $R < 0$ ) и случай кулоновского отталкивания ( $R > 0$ ). По определению вектор  $\mathbf{r}'$  принадлежит плоскости  $\mathcal{P}$  и имеет полярные координаты  $(r', \varphi')$ .

Наряду с размерными переменными  $r$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $\mathbf{r}'$  и  $k$  будем использовать безразмерные аргументы: безразмерные расстояния  $\rho \equiv kr$  и  $\rho' \equiv kr'$ , безразмерное волновое число  $q \equiv k|R|$  и параметр Зоммерфельда  $\eta \equiv 1/(2kR) = \text{sign } R/(2q)$ . Безразмерные «рабочие» переменные  $\xi$ ,  $s$  и  $t$  при необходимости переопределяем.

Приведем и обсудим исходные уравнения. Таковыми для наших исследований будут два уравнения в плоскости  $\mathcal{P}$ : уравнение Шредингера [5] для волновой функции  $\Psi^c(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \eta)$  двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) + \frac{z_1 Z}{r} \right] \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = E \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta), \quad (1)$$

и порожденное этим уравнением уравнение для функции Грина  $G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) + \frac{z_1 Z}{r} - E \right] G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2)$$

Здесь и далее по определению  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — дельта-функция.

В уравнении (1) сумма всех операторов, заключенных в квадратные скобки, является полным гамильтонианом. Он коммутирует с оператором  $\partial_\varphi^2$ . Поэтому счетное множество собственных функций

$$g_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(i m \varphi) = (2\pi)^{-1/2} \cos m \varphi + i (2\pi)^{-1/2} \sin m \varphi, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

оператора  $\partial_\varphi^2$  является удобным угловым базисом для редукции обоих двумерных уравнений (1) и (2) к одномерным радиальным уравнениям.

Напомним важное свойство такого базиса, известное в теории рядов Фурье [6. Ч.2]. Если функция  $f(r, \varphi)$  непрерывна по обоим аргументам и инвариантна относительно инверсии  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , то ее разложение по функциям  $g_m(\varphi)$ ,

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0, \pm 1, \pm 2, \dots} g_m(\varphi) \left[ \int_0^{2\pi} f(r, \varphi') g_m(\varphi') d\varphi' \right],$$

вырождается в косинус-ряд Фурье

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0, 1, 2, \dots} f_m(r) g_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ f_0(r) + \sum_{m=1, 2, \dots} [2 f_m(r)] \cos m \varphi \right\} \quad (3)$$

с радиальными компонентами

$$f_m(r) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m \varphi d\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь выявим важное следствие предположений о начальном состоянии квантовой частицы  $p_1$ . Как предполагалось выше, частица  $p_1$  испускается из бесконечно удаленной точки  $x = -\infty$  оси  $OX$  и движется вдоль оси  $OX$ , причем в ее положительном направлении. Такое движение описывается функцией  $\exp(ikx)$ , которая согласно теории двумерного рассеяния [5] является старшим слагаемым асимптотики волновой функции  $\Psi^c$  в пределе  $kr \rightarrow \infty$ . Так как  $x = r \cos \varphi$ , функция  $\exp(ikx)$  инвариантна относительно инверсии  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Следовательно, волновая функция рассеяния  $\Psi^c$  должна обладать тем же свойством при любых значениях ее аргументов. Поэтому эта функция является косинус-рядом Фурье типа (3).

Обсудим свойства решения  $G^c$  уравнения (2). Правая часть этого уравнения инвариантна относительно перестановки векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  и относительно одновременной инверсии  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,  $\varphi' \rightarrow -\varphi'$  угловых координат этих векторов. Следовательно, искомая функция Грина  $G^c$  должна обладать теми же свойствами. Угловые базисные функции  $(2\pi)^{-1/2} \cos m(\varphi - \varphi')$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , инвариантны относительно упомянутой выше инверсии. Поэтому функция  $G^c$  раскладывается в ряд типа (3), но по таким угловым функциям, зависящим от разности углов  $\varphi$  и  $\varphi'$ .

Отметим еще одно свойство функции  $G^c$ . В случае выключенного кулоновского взаимодействия ( $qQ = 0$ ) согласно принятым выше определениям  $|R| = \infty$ , а  $\eta = 0$ , поэтому уравнение (2) становится уравнением для свободной функции Грина  $G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k})$ . Следовательно, кулоновская функция Грина  $G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)$ , взятая в точке  $\eta = 0$ , равна функции  $G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k})$ .

Теперь перечислим лишь те известные в теории гипергеометрических функций [7] соотношения, которые окажутся ключевыми в разд. 2 и 4.

Символами  $\Gamma(t)$ ,  $\Psi(t) \equiv \partial_t \Gamma(t)/\Gamma(t)$  и  $(a)_n$  обозначаем гамма- и пси-функции и символ Похгаммера:

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n \equiv a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a), \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция Куммера  $\Phi(a, c; \xi)$  и функция Трикоми  $\Psi(a, c; \xi)$  — линейно независимые решения вырожденного гипергеометрического уравнения

$$[\xi \partial_\xi^2 + (c - \xi) \partial_\xi - a] U(\xi) = 0. \quad (4)$$

Функция Куммера  $\Phi(a, c; \xi)$  является степенным рядом

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{\xi^n}{n!} = 1 + \frac{a}{c} \frac{\xi}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{\xi^2}{2!} + \dots \quad (5)$$

и удовлетворяет тождеству (преобразованию) Куммера

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv \exp(\xi) \Phi(c - a, c; -\xi). \quad (6)$$

Эта же функция равна единице в точке  $|\xi| = 0$ , а в пределе  $|\xi| \rightarrow \infty$  имеет асимптотику

$$\begin{aligned} \Phi(a, c; \xi) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \left[ \frac{\exp(i\pi s)}{\xi} \right]^a + O(|\xi|^{-a-1}) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \xi^{a-c} \exp(\xi) + O(|\exp(\xi) \xi^{-a-c-1}|), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $s = 1$ , если  $2 \arg \xi \in (-\pi, 3\pi)$ , и  $s = -1$ , если  $2 \arg \xi \in (-3\pi, -\pi]$ .

Для уравнения (4) случай неотрицательного, но целого значения  $n + 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , параметра  $c$  является особым и называется логарифмическим. В этом случае функция Трикоми  $\Psi(a, c; \xi)$  имеет довольно сложное строение и представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \Psi(a, n + 1; \xi) = & \frac{(-1)^{n-1}}{n! \Gamma(a - n)} \left\{ \Phi(a, n + 1; \xi) \ln \xi + \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a)_p}{(n + 1)_p} [\Psi(a + p) - \Psi(1 + p) - \Psi(1 + n + p)] \frac{\xi^p}{p!} \right\} + \\ & + \frac{(n - 1)!}{\Gamma(a)} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(a - n)_p}{(1 - n)_p} \frac{\xi^{p-n}}{p!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое слагаемое этой суммы — произведение логарифмической функции  $\ln(\xi)$  и функции  $\Phi(a, c; \xi)$ , второе слагаемое — бесконечный ряд, содержащий пси-функции, а третье слагаемое — конечная сумма, которая полагается равной нулю в случае  $n = 0$ .

Функция  $\Psi(a, c; \xi)$ ,  $c = 1, 2, \dots$ , содержит постоянную Эйлера  $\gamma = 0,577215\dots$ , в пределе  $|\xi| \rightarrow 0$  имеет асимптотику

$$\begin{aligned} \Psi(a, c; \xi) = & -\frac{1}{\Gamma(a)} [\ln \xi + \Psi(a) - 2\gamma] + O(|\xi \ln \xi|), \quad c = 1, \quad |\xi| \rightarrow 0, \\ \Psi(a, c; \xi) = & \xi^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} + O(|\ln \xi|), \quad c = 2, \quad |\xi| \rightarrow 0, \\ \Psi(a, c; \xi) = & \xi^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} + O(|\xi|^{c-2}), \quad c = 3, 4, \dots, \quad |\xi| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (9)$$

а в пределе  $|\xi| \rightarrow \infty$  — асимптотику

$$\Psi(a, c; \xi) = \xi^{-a} + O(|\xi|^{-a-1}), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad 2 \arg \xi \in (-3\pi, 3\pi). \quad (10)$$

Обсуждаемая функция  $\Psi(a, c; \xi)$  многозначная. Далее используем только ее главную ветвь, выделенную условием  $\arg \xi \in (-\pi, \pi]$ .

Напомним, что вырожденные гипергеометрические функции  $\Phi(a, c; \xi)$  и  $\Psi(a, c; \xi)$  связаны с функциями Уиттекера  $M_{\alpha, \beta}(\xi)$  и  $W_{\alpha, \beta}(\xi)$  равенствами

$$\begin{aligned} \Phi(a, c; \xi) = & \exp(\xi/2) \xi^{-1/2-\beta} M_{\alpha, \beta}(\xi), \\ \Psi(a, c; \xi) = & \exp(\xi/2) \xi^{-1/2-\beta} W_{\alpha, \beta}(\xi), \\ \alpha = & c/2 - a, \quad \beta = (c - 1)/2. \end{aligned} \quad (11)$$

Этим замечанием завершим настоящий раздел.

## 2. РАДИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КУЛОНА И ГРИНА

В данном разделе ключевыми будут представления волновой функции  $\Psi^c$  и функции Грина  $G^c$  в виде рядов типа (3). Для анализа таких рядов вместо индекса  $m = 0, 1, 2, \dots$  удобнее использовать индекс  $\lambda = m - 1/2 = -1/2, 1/2, \dots$ , и для сокращения записи считать, что  $\varepsilon_\lambda = 1$ , если  $2\lambda = -1$ , и  $\varepsilon_\lambda = 2$  в случае  $2\lambda \geq 1$ .

Угловые базисные функции  $\zeta_\lambda(\varphi)$  определим формулами

$$\zeta_\lambda(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos[(2\lambda + 1)\varphi/2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos m\varphi, \\ 2\lambda = -1, 1, 3, \dots, \quad m = \lambda + 1/2.$$

Объектами нашего исследования будут проекции  $u_\lambda$  и  $G_\lambda^c$  функций  $\Psi^c$  и  $G^c$  на соответствующие угловые функции  $\zeta_\lambda(\varphi)$  и  $\zeta_\lambda(\varphi - \varphi')$ . Такие проекции называем радиальными компонентами функций  $\Psi^c$  и  $G^c$  или радиальными волновыми функциями Кулона и радиальными кулоновскими функциями Грина.

**2.1. Радиальные волновые функции Кулона полуцелого порядка.** Используя индекс  $\lambda$  и символ  $\varepsilon_\lambda$ , представим функцию  $\Psi^c$  рядом типа (3):

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = (2\pi\rho)^{-1/2} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda u_\lambda(\rho, \eta) \cos[(2\lambda + 1)\varphi/2]. \quad (12)$$

В уравнении Шредингера (1) заменим функцию  $\Psi^c$  таким рядом. Полученное уравнение последовательно спроецируем на все линейно независимые угловые функции  $\zeta_\lambda(\varphi)$  и таким образом выведем счетную ( $2\lambda = -1, 1, 3, \dots$ ) последовательность не зацепляющихся друг с другом радиальных уравнений Шредингера:

$$\left[ \partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] u_\lambda(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (13)$$

Обсудим одно из них. Только на время обсуждения позволим индексу  $\lambda$  принимать любые вещественные значения. Используем известные в теории дифференциальных уравнений факты [6. Т. 3. Ч. 2]. Для уравнения (13) при условии  $\lambda \geq -1/2$  точка  $\rho = 0$  является регулярной, а точка  $\rho = \infty$  — существенно особой. Для точки  $\rho = 0$  определяющее уравнение  $s(s-1) = \lambda(\lambda+1)$  имеет два корня:  $s_1 = \lambda + 1$  и  $s_2 = -\lambda$ . Разность  $s_1 - s_2 = 2\lambda + 1$  таких корней равна целому числу, если  $\lambda$  — полуцелое или целое число. Только при таких значениях  $\lambda$  реализуется логарифмический случай: уравнение (13) имеет решение  $F_\lambda(\rho, \eta)$ , представимое рядом по степеням аргумента  $\rho$ , а любое другое решение, линейно независимое с таким рядом, содержит в



качестве слагаемого произведение  $F_\lambda(\rho, \eta) \ln \rho$ . Символом  $H_\lambda(\rho, \eta)$  обозначим одно из решений, содержащих такое произведение. Для полного анализа уравнения (13) достаточно знать два его линейно независимых решения  $F_\lambda$  и  $H_\lambda$ , потому что любое другое решение является линейной комбинацией этих решений. В случае целых значений  $\lambda = \ell = 0, 1, 2, \dots$  обсуждаемое уравнение (13) становится давно известным в теории трехмерного рассеяния радиальным уравнением Кулона [4]. Многие свойства его решений — радиальных кулоновских волновых функций  $F_\ell(\rho, \eta)$  и  $H_\ell(\rho, \eta)$  целого порядка  $\ell$  — детально изучены [8].

Из данного выше качественного анализа уравнения (13) следуют два вывода. Достаточно найти линейно независимые решения  $F_\lambda$  и  $H_\lambda$ ,  $2\lambda = -1, 1, 3, \dots$ , этого уравнения. Представляется логичным определить эти решения по аналогии с функциями  $F_\ell$  и  $H_\ell$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . Поступим именно таким образом.

Регулярной волновой функцией Кулона  $F_\lambda(\rho, \eta)$  полуцелого порядка  $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$  назовем вещественное решение уравнения (13), обладающее асимптотикой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = O(\rho^{\lambda+1}), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (14)$$

и асимптотикой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = \sin[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Содержащуюся в этой асимптотике пока неизвестную функцию  $\delta_\lambda^c(\eta)$  переменной  $\eta$  логично назвать парциальной кулоновской фазой двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$ .

Нерегулярной комплекснозначной волновой функцией Кулона полуцелого порядка  $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$  считаем решение  $H_\lambda(\rho, \eta)$  уравнения (13), удовлетворяющее условию

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \begin{cases} O(\sqrt{\rho} \ln \rho), & 2\lambda = -1, \\ O(\rho^{-\lambda}), & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0, \quad (16)$$

и условию

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \exp\{i[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(\eta)]\} + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Кроме решений  $F_\lambda$  и  $H_\lambda$  потребуется и вещественная нерегулярная функция Кулона полуцелого порядка  $G_\lambda$ . Определим ее формулой

$$G_\lambda(\rho, \eta) \equiv H_\lambda(\rho, \eta) - iF_\lambda(\rho, \eta), \quad 2\lambda = -1, 1, 3, \dots \quad (18)$$

Вследствие такого определения и формул (14)–(17) функция  $G_\lambda$  в пределе  $\rho \rightarrow 0$  ведет себя так же, как функция  $H_\lambda$ , а в пределе  $\rho \rightarrow \infty$  имеет асимптотику

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \cos[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Докажем, что решения  $F_\lambda$ ,  $H_\lambda$  и  $G_\lambda$  уравнения (13), удовлетворяющие соответствующим условиям (14)–(19), существуют. Попутно получим представления этих решений через вырожденные гипергеометрические функции.

Сначала подстановкой

$$\xi = -2i\rho, \quad u_\lambda(\rho, \eta) = \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) U(\xi)$$

сведем исследуемое уравнение (13) к вырожденному гипергеометрическому уравнению (4) с параметрами  $a = \lambda + 1 + i\eta$  и  $c = 2\lambda + 2$ . Приведем полученное уравнение:

$$\left[ \xi \partial_\xi^2 + (2\lambda + 2 - \xi) \partial_\xi - (\lambda + 1 + i\eta) \right] U(\xi) = 0. \quad (20)$$

При тех же параметрах  $a$  и  $c$  этому уравнению удовлетворяют функции  $\Phi(a, c; \xi)$  и  $\Psi(a, c; \xi)$ , заданные формулами (5) и (8). Следовательно, при любых множителях  $C_\lambda(\eta)$  и  $D_\lambda(\eta)$  решениями исходного уравнения (13) будут произведения

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &\equiv C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) \Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2; -2i\rho), \\ H_\lambda(\rho, \eta) &\equiv D_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) \Psi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2; -2i\rho). \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь нужно показать, что эти произведения при вполне определенном выборе множителей  $C_\lambda(\eta)$  и  $D_\lambda(\eta)$  станут искомыми функциями Кулона, удовлетворяющими граничным условиям (14)–(17). Используя асимптотики (7), (9) и (10) гипергеометрических функций  $\Phi(a, c; \xi)$  и  $\Psi(a, c; \xi)$  с параметрами  $a = \lambda + 1 + i\eta$  и  $c = 2\lambda + 2$ , убедимся в том, что обсуждаемые произведения  $F_\lambda(\rho, \eta)$  и  $H_\lambda(\rho, \eta)$  будут иметь требуемые асимптотики (14)–(17) тогда и только тогда, когда функции  $\delta_\lambda^c(\eta)$ ,  $C_\lambda(\eta)$  и  $D_\lambda(\eta)$  переменной  $\eta$  заданы равенствами

$$\begin{aligned} \delta_\lambda^c(\eta) &= \arg \Gamma(\lambda + 1 + i\eta), \quad C_\lambda(\eta) = 2^\lambda \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} \exp(-\pi\eta/2), \\ D_\lambda(\eta) &= (-1)^{\lambda+1/2} 2^{\lambda+1} \exp[i\delta_\lambda^c(\eta) + \pi\eta/2] = \\ &= (-1)^{\lambda+1/2} 2^{2\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)}{\Gamma(2\lambda + 2) C_\lambda(\eta)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Искомую функцию Кулона  $G_\lambda$  построим по формуле (18), заменив в ней уже найденные функции  $F_\lambda$  и  $H_\lambda$  правыми частями равенств (21).

Продолжим исследование кулоновских функций полуцелого порядка.

Сначала найдем их вронскианы. Уравнение Кулона (13) является дифференциальным уравнением второго порядка и не содержит производной первого порядка. Как известно [6], вронскиан двух любых решений уравнений

такого класса равен постоянной, и ее можно найти, заменив эти решения их асимптотиками. Следуя этому правилу и используя асимптотики (15), (17) и (19), получаем искомые вронскианы:

$$\begin{aligned} W(F_\lambda, H_\lambda) &\equiv F_\lambda \partial_\rho H_\lambda - H_\lambda \partial_\rho F_\lambda = -1, \\ W(F_\lambda, G_\lambda) &\equiv -1, \quad W(G_\lambda, H_\lambda) \equiv i. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь убедимся в том, что обе функции  $F_\lambda$  и  $G_\lambda$  являются вещественными.

Начнем с функции  $F_\lambda$ . Заменяв в ее представлении (21) гипергеометрическую функцию  $\Phi$  соответствующим рядом (5), получим

$$F_\lambda(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1+i\eta)_n}{(2\lambda+2)_n} \frac{(-2i\rho)^n}{n!}. \quad (24)$$

Комплексное сопряжение такого ряда равносильно замене  $i \rightarrow -i$ . Следовательно,

$$F_\lambda^*(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^\lambda \exp(-i\rho) \Phi(\lambda+1-i\eta, 2\lambda+2, 2i\rho).$$

Правая часть этого равенства в силу тождества Куммера (6) равна исходной функции  $F_\lambda$ , определенной первой из формул (21). Значит,  $F_\lambda$  — вещественная функция.

Предположим, что функция  $G_\lambda$  имеет отличную от тождественного нуля мнимую часть  $T$ . Тогда возможны два случая: вронскиан  $W(F_\lambda, T)$  равен мнимому числу или нулю. В первом случае вронскиан  $W(F_\lambda, G_\lambda)$  окажется комплексным числом. Согласно второму равенству (23) вронскиан  $W(F_\lambda, G_\lambda)$  — вещественное число. Во втором случае функции  $F_\lambda$  и  $T$  линейно зависимы. Значит, существует константа  $t$ , такая, что  $T = tF_\lambda$ . Поэтому в пределе  $\rho \rightarrow \infty$  асимптотика функции  $G_\lambda$  должна содержать в качестве слагаемого произведение константы  $t$  и старшего члена асимптотики (15) функции  $F_\lambda$ . В асимптотике (19) функции  $G_\lambda$  такого произведения нет. В обоих рассмотренных случаях получены противоречия. Значит,  $G_\lambda$  — вещественная функция.

Выведем представления функций Кулона  $F_\lambda$  и  $H_\lambda$  через функции Уиттекера  $M_{\alpha,\beta}$  и  $W_{\alpha,\beta}$ . Для этого в равенствах (21) выразим функции  $\Phi$  и  $\Psi$  через функции  $M_{\alpha,\beta}$  и  $W_{\alpha,\beta}$  по формулам (11). В результате получим искомые представления:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &= \exp(-\pi\eta/2) i^{\lambda+1} \frac{|\Gamma(\lambda+1+i\eta)|}{2\Gamma(2\lambda+2)} M_{-i\eta, \lambda+1/2}(-2i\rho), \\ H_\lambda(\rho, \eta) &= \exp(\pi\eta/2) i^{-\lambda} \frac{\Gamma(\lambda+1+i\eta)}{|\Gamma(\lambda+1+i\eta)|} W_{-i\eta, \lambda+1/2}(-2i\rho). \end{aligned} \quad (25)$$

Завершим настоящий пункт следующим замечанием: строение кулоновских функций  $F_\lambda$  и  $G_\lambda$  подробно исследовано в работе [10], но лишь в случае  $2\lambda = -1$ .

**2.2. Радиальные функции Грина полужелого порядка.** Используя известное представление дельта-функции в полярных координатах [4]

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (rr')^{-1/2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi'),$$

сведем уравнение (2) для функции Грина  $G^c$  к уравнению

$$\left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 - \frac{1}{rR} + k^2 \right) G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{k}, \eta) = \frac{2m_1}{\hbar^2} \frac{1}{\sqrt{rr'}} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (26)$$

Правая часть этого уравнения содержит дельта-функцию  $\delta(\varphi - \varphi')$ , аргументом которой является разность углов  $\varphi$  и  $\varphi'$ . Следовательно, искомое решение  $G^c$  должно быть разложением типа (3), но по угловым функциям  $\zeta_\lambda(\varphi - \varphi')$ :

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{k}, \eta) = \frac{m_1}{\pi \hbar^2} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \sum_{2\lambda = -1, 1, 3, \dots} \varepsilon_\lambda G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) \cos [(\lambda + 1/2)(\varphi - \varphi')]. \quad (27)$$

В уравнении (26) заменим функцию  $G^c$  таким рядом. Полученное соотношение спроецируем на все угловые функции  $\zeta_\lambda(\varphi - \varphi')$ , выполнив интегрирование по обоим переменным  $\varphi$  и  $\varphi'$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ , затем применим известное равенство [4]

$$\delta(r - r') = k \delta(\rho - \rho').$$

В результате выведем счетную ( $2\lambda = -1, 1, 3, \dots$ ) совокупность незацепляющихся уравнений для радиальных компонент  $G_\lambda^c$  функции Грина  $G^c$ :

$$\left[ \partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = \delta(\rho - \rho'). \quad (28)$$

Заметим, что каждому такому неоднородному уравнению отвечает ранее исследованное радиальное уравнение Шредингера, записанное в виде уравнения Кулона (13). Поэтому при любом значении  $\lambda$  функция  $G_\lambda^c$  является радиальной кулоновской функцией Грина для задачи рассеяния на полупрямой  $\rho > 0$ .

Самый простой способ построения радиальной функции Грина для задачи рассеяния описан в монографии [3] на примере радиального уравнения Шредингера с короткодействующим потенциалом. Применив этот способ к уравнению (28), получим представление каждой ( $2\lambda = -1, 1, 3, \dots$ ) радиальной функции Грина  $G_\lambda^c$  через функции Кулона:

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = -F_\lambda(\rho_<, \eta) H_\lambda(\rho_>, \eta), \quad \rho, \rho' > 0, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (29)$$

где  $\rho_{<} = \rho'$ ,  $\rho_{>} = \rho$ , если  $\rho' < \rho$ , а в случае  $\rho' > \rho$  наоборот:  $\rho_{<} = \rho$ , а  $\rho_{>} = \rho'$ .

Выполним проверку. В уравнении (28) заменим функцию  $G_\lambda^c$  правой частью равенства (29). В любом из случаев  $\rho' < \rho$  или  $\rho' > \rho$  одна из функций  $F_\lambda(\rho_{<}, \eta)$  или  $H_\lambda(\rho_{>}, \eta)$  является решением уравнения (13), а при  $\rho' = \rho$  вронскиан таких функций равен единице. Поэтому исследуемое уравнение вырождается в тождество.

Приступим к выводу интегрального представления функции  $G_\lambda^c$ .

Сначала в равенстве (29) выразим функции Кулона через функции Уиттекера по формулам (25). В результате получим равенство

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = -\iota \frac{\Gamma(\lambda + 1 + \iota \eta)}{2\Gamma(2\lambda + 2)} M_{-\iota \eta, \lambda + 1/2}(-2\iota \rho_{<}) W_{-\iota \eta, \lambda + 1/2}(-2\iota \rho_{>}). \quad (30)$$

Отметим, что это равенство воспроизводит давно известное соотношение, выведенное в работе [11] другим способом, основанным на осцилляторном представлении уравнения Кулона в многомерном конфигурационном пространстве.

Далее потребуется известное интегральное представление произведения функций Уиттекера [9] через модифицированную функцию Бесселя  $I_{2\beta}$ :

$$M_{\alpha, \beta}(ac) W_{\alpha, \beta}(bc) = \frac{c \sqrt{ab} \Gamma(1 + 2\beta)}{\Gamma(1/2 + \beta - \alpha)} \times \\ \times \int_0^\infty \exp[-(c/2)(a + b) \operatorname{ch}(u)] [\operatorname{cth}(u/2)]^{2\alpha} I_{2\beta}(c\sqrt{ab} \operatorname{sh}(u)) du. \quad (31)$$

Это представление верно при условиях  $b > a$ ,  $\operatorname{Re}(1/2 + \beta - \alpha) > 0$  и, как отметил С. Кларсфельд [12], во всей комплексной полуплоскости  $\operatorname{Re} \beta > -1/2$  параметра  $\beta$ .

Теперь произведение функций Уиттекера, содержащееся в представлении (30), заменим табличным интегралом (31), положив в нем  $\alpha = \iota \eta$ ,  $\beta = \lambda + 1/2$  и  $c = -2\iota$ , а также  $a = \rho'$ ,  $b = \rho$  при  $\rho > \rho'$  и наоборот  $a = \rho$ ,  $b = \rho'$  в случае  $\rho < \rho'$ . В результате получим искомое интегральное представление радиальной функции Грина:

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = \iota^{(\lambda + 3/2)} \sqrt{\rho \rho'} \int_0^\infty [\operatorname{th}(u/2)]^{2\iota \eta} \times \\ \times \exp[\iota(\rho + \rho') \operatorname{ch}(u)] J_{2\lambda + 1}(2\sqrt{\rho \rho'} \operatorname{sh}(u)) du, \quad (32)$$

где  $J_{2\lambda + 1}$  — функция Бесселя первого рода. Запишем полученное предста-

вление в переменных  $s = t \operatorname{sh}(u)$  и  $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'}$  в виде равенства

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = (-1)^{(\lambda+3/2)} \frac{t}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2} + t} \right]^{2i\eta} \times \\ \times \exp \left[ i(\rho + \rho') \sqrt{1 + (s/t)^2} \right] J_{2\lambda+1}(s) \frac{ds}{\sqrt{s^2 + t^2}}. \quad (33)$$

В следующем разделе это равенство окажется ключевым.

### 3. МАЖОРАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА И КУЛОНА

В настоящем разделе используется обозначение  $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'}$  и решается следующая задача: стартуя с интегрального представления (33) функции  $G_\lambda^c$ , последовательно вывести простые, но равномерные по параметру  $\eta$  и индексу  $\lambda$  мажорантные оценки функций  $|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)|$ ,  $|F_\lambda(\rho', \eta) H_\lambda(\rho, \eta)|$ ,  $|F_\lambda(\rho, \eta)|$  и  $|F_\lambda(\rho', \eta) G_\lambda(\rho, \eta)|$ .

Приступим к решению. Как известно [6], модуль определенного интеграла от некоторой подынтегральной функции не превышает интеграла от модуля этой же функции. Поэтому из представления (33) следует, что при любых  $\lambda$  и  $\eta$

$$|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)| \leq B_\lambda(t) \equiv \frac{t}{2} \int_0^\infty \frac{|J_{2\lambda+1}(s)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} ds. \quad (34)$$

Предположим, что удалось найти довольно простую функцию  $P_\lambda(t)$ , превышающую интеграл  $B_\lambda(t)$  при любых  $\lambda$  и  $t$ . Тогда вследствие соотношений (34) эта функция будет искомой мажорантной оценкой для функции  $|G_\lambda^c|$  в следующем смысле:

$$|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)| \leq B_\lambda(t) < P_\lambda(t). \quad (35)$$

Покажем, как, используя эту оценку, вывести все остальные искомые оценки. Сначала в неравенствах (35) заменим функцию Грина  $G_\lambda^c$  произведением (29), и таким образом докажем оценку

$$|F_\lambda(\rho', \eta) H_\lambda(\rho, \eta)| < P_\lambda(t), \quad \rho' \leq \rho. \quad (36)$$

Перейдем в этой оценке к пределу  $\rho \rightarrow \infty$  при том же условии  $\rho' < \rho$ . Согласно формуле (17) функция  $|H_\lambda(\rho, \eta)|$  в этом пределе не превосходит единицу, поэтому в итоге получим оценку

$$|F_\lambda(\rho', \eta)| < P_\lambda(2\rho'), \quad \rho' \geq 0. \quad (37)$$

Выведем еще две оценки. Вследствие определения (18) функции  $G_\lambda(\rho, \eta)$  имеем

$$|F_\lambda(\rho', \eta) H_\lambda(\rho, \eta)| = \left\{ [F_\lambda(\rho', \eta) F_\lambda(\rho, \eta)]^2 + [F_\lambda(\rho', \eta) G_\lambda(\rho, \eta)]^2 \right\}^{1/2},$$

поэтому верно неравенство

$$|F_\lambda(\rho', \eta) G_\lambda(\rho, \eta)| < |F_\lambda(\rho', \eta) H_\lambda(\rho, \eta)|, \quad \rho' \leq \rho.$$

Правая часть этого неравенства подчиняется соотношению (36). Следовательно, и левая часть этого же неравенства удовлетворяет тому же соотношению:

$$|F_\lambda(\rho', \eta) G_\lambda(\rho, \eta)| < P_\lambda(t), \quad \rho' \leq \rho. \quad (38)$$

Итак, если известна функция  $P_\lambda(t)$ , мажорирующая интеграл  $B_\lambda(t)$ , то верны оценки (35)–(38). Осталось найти такую функцию. Для этого придется отдельно рассмотреть разными способами два случая:  $2\lambda \geq 1$  и  $2\lambda = -1$ .

*Случай  $2\lambda \geq 1$ .* Здесь сумма  $2\lambda + 1$  больше или равна двум, а известные неравенства [12]

$$\int_0^\infty \frac{|J_\nu(s)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} ds < \int_0^\infty |J_\nu(s)| \frac{ds}{s} < \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \quad (39)$$

выполняются при условии  $\nu \geq 1$ . Поэтому в этих неравенствах можно положить  $\nu = 2\lambda + 1$ , а затем умножить получившиеся соотношения на множитель  $t/2$ . В результате получится верхняя оценка интеграла  $B_\lambda(t)$  и искомое представление функции  $P_\lambda(t)$ :

$$B_\lambda(t) \equiv \frac{t}{2} \int_0^\infty \frac{|J_{2\lambda+1}(s)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} ds < P_\lambda(t) \equiv \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda + 1}}, \quad 2\lambda \geq 1. \quad (40)$$

Подставим найденную функцию  $P_\lambda(t)$  в доказанные выше неравенства (35)–(38). Обсудим полученные таким образом оценки. Начнем с преимуществ. Все эти оценки убывают в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  как  $O(\lambda^{-1/2})$  и содержат функцию  $P_\lambda(t)$ , которую нетрудно вычислить при любых значениях аргументов  $\rho, \rho', \eta$  и индекса  $\lambda$ . Основной недостаток обсуждаемых оценок проявляется в пределе больших значений аргументов  $\rho$  и  $\rho'$ , когда левые части этих оценок близки к единице, а правые части неограниченно возрастают как  $O(\sqrt{\rho\rho'})$ . В этом пределе все оценки (35)–(38) становятся слишком грубыми. Явно завышенной является и оценка (36) для функции  $F_\lambda(\rho', \eta)$  в пределе  $\rho' \rightarrow 0$ . Действительно, в этом пределе согласно формуле (14) такая функция убывает быстрее, чем функция  $\rho'$ , а именно как  $O(\rho'^{\lambda+1})$ .

*Случай  $2\lambda = -1$ .* Здесь  $\nu \equiv 2\lambda + 1 = 0$ , а неравенство (39) верно при условии  $\nu \geq 1$ . Поэтому это неравенство нельзя использовать для оценки

функции  $|J_0(s)|$ . В известных справочниках [7, 8] для этой функции приводится лишь одна оценка сверху  $|J_0(s)| \leq 1$ ,  $s \geq 0$ , которая порождается интегралом Пуассона:

$$J_0(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dw \cos(s \sin w).$$

Другие мажорантные оценки функции  $|J_0(s)|$ , справедливые при любом  $s \geq 0$ , по-видимому, неизвестны. Поэтому придется доказать равномерную оценку

$$|J_0(s)| < \sqrt{\frac{2}{\pi s}}, \quad s \geq 0. \quad (41)$$

Если  $0 \leq s \leq 2/\pi$ , то  $\sqrt{2/(\pi s)} \geq 1$ , но  $|J_0(s)| \leq 1$  при любом  $s \geq 0$ . Поэтому на отрезке  $0 \leq s \leq 2/\pi$  обсуждаемая оценка (41) заведомо верна. Теперь воспользуемся известной асимптотикой [8] суммы квадратов функций Бесселя  $J_0(s)$  и  $Y_0(s)$  первого и второго родов. Запишем эту асимптотику в виде произведения

$$J_0^2(s) + Y_0^2(s) = \frac{2}{\pi s} \left[ 1 - \frac{1}{8s^2} + \varepsilon(s) \right], \quad \varepsilon(s) > 0, \quad \varepsilon = O(s^{-4}), \quad s \rightarrow \infty.$$

Исследуем его второй сомножитель  $S(s)$ , равный сумме, заключенной в квадратные скобки. Слагаемое  $\varepsilon(s)$  положительное и убывает быстрее слагаемого  $(8s^2)^{-1}$ . Поэтому существует конечное значение  $s_0$  аргумента  $s$ , такое, что на всей полупрямой  $s \geq s_0$  функция  $S(s)$  меньше единицы. Следовательно, на этой же полупрямой обе функции  $|J_0^2(s)|$  и  $|Y_0^2(s)|$  не превышают первого сомножителя обсуждаемой асимптотики. Значит, оценка (41) верна в случае  $s \geq s_0$ . Доказать эту оценку в оставшемся случае  $2/\pi < s < s_0$  удалось, но лишь путем вычислений функции  $|J_0(s)|$  с четырнадцатизначной точностью на отрезке  $2/\pi \leq s \leq 10^{15}$ .

Для исследования мажорантной оценки  $P_{-1/2}(t)$  интеграла (34),  $2\lambda = -1$ , кроме неравенства (41) потребуются эллиптический интеграл первого рода  $F(\varphi|\alpha)$ . Напомним определение такого интеграла и его известные представления [8, 9]. Интеграл  $F(\varphi|\alpha)$  с аргументом  $\varphi$  и модулярным углом  $\alpha$  определяется равенством

$$F(\varphi|\alpha) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2 (\sin \theta)^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi/2],$$

и поэтому является четной функцией угла  $\alpha$ . В случае  $\varphi = \pi/2$  интеграл  $F(\varphi|\alpha)$  называется полным и обозначается символом  $K(\alpha)$ . В случае  $\alpha = \pi/4$



для интеграла  $F(\varphi|\alpha)$  имеются два представления [9]:

$$F(\varphi|\pi/4) = 2 \int_0^w \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}, \quad \varphi = \arccos \left[ \frac{(1-w^2)}{(1+w^2)} \right], \quad 0 \leq w \leq 1; \quad (42)$$

$$F(\varphi|\pi/4) = 2 \int_w^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}, \quad \varphi = \arccos \left[ \frac{(w^2-1)}{(1+w^2)} \right], \quad w \geq 1.$$

Перейдем к анализу интеграла (34) в случае  $2\lambda = -1$ . Заменяем в нем функцию  $|J_0(s)|$  правой частью неравенства (41). Полученный интеграл подстановкой  $s = tu^2$  сведем к сумме двух интегралов (42) с одним и тем же пределом  $w = 1$ . Такая сумма по определению является полным эллиптическим интегралом  $K(\pi/4) = 1,85407647\dots$  первого рода с модулярным углом  $\alpha = \pi/4$ . Запишем выполненные преобразования в виде следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|J_0(s)|}{\sqrt{s^2+t^2}} ds &< \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi t}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = \sqrt{\frac{8}{\pi t}} K(\pi/4). \end{aligned}$$

Основное следствие этой цепочки — равномерная по переменной  $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'}$  оценка

$$\begin{aligned} B_{-1/2}(t) < P_{-1/2}(t) &\equiv \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K(\pi/4) = \beta (\rho\rho')^{1/4}, \\ \beta &\equiv \frac{2K(\pi/4)}{\sqrt{\pi}} = 2,09209924\dots \end{aligned} \quad (43)$$

Перейдем к построению более точных оценок интеграла  $B_{-1/2}(t)$ . Начнем с того, что введем неотрицательный параметр  $b$  и запишем этот интеграл в виде суммы интеграла по отрезку  $[0, b]$  и интеграла по полупрямой  $[b, \infty)$ . В первом интеграле заменим функцию  $|J_0(s)|$  единицей, а во втором — правой частью неравенства (41). Таким образом получим справедливую при любом  $b > 0$  оценку

$$B_{-1/2}(t) < Q(t, b) \equiv \frac{t}{2} \int_0^b \frac{ds}{\sqrt{s^2+t^2}} + \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}. \quad (44)$$

Из всех таких оценок выберем наилучшую. Для этого найдем производную

$$\partial_b Q(t, b) = \frac{t}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \right) \frac{1}{\sqrt{b^2+t^2}}$$

и заметим, что она имеет единственный нуль  $b = 2/\pi$  и является отрицательной, если  $b < 2/\pi$ , и положительной, если  $b > 2/\pi$ . Следовательно, при

любом  $t \geq 0$  функция  $Q(t, b)$  по переменной  $b$  имеет единственный локальный минимум и такой минимум достигается в точке  $b = 2/\pi$ . Поэтому наилучшей является оценка  $Q(t, b)$  при значении  $b = 2/\pi$ .

Исследуем эту оценку. В сумме  $Q(t, b)$  двух интегралов (44) положим  $b = 2/\pi$ , первый интеграл считаем функцией  $f(t)$ , а второй — функцией  $g(t)$ :

$$\begin{aligned} Q(t; 2/\pi) &= f(t) + g(t), \quad f(t) \equiv \frac{t}{2} \int_0^{2/\pi} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \\ g(t) &\equiv \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{2/\pi}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + t^2}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Оба интеграла сведем к табличным [9], а затем исследуем. Перечислим итоговые выводы. Интеграл  $f(t)$  содержит логарифмическую функцию,

$$f(t) = \frac{t}{2} \ln \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi t}\right)^2} + \frac{2}{\pi t} \right], \quad (46)$$

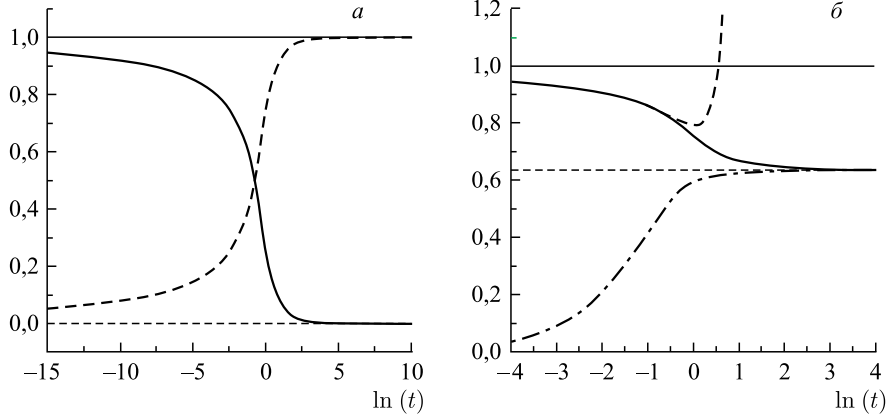
а интеграл  $g(t)$  в силу равенств (42) выражается через эллиптические интегралы:

$$g(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \begin{cases} F(\varphi|\pi/4), & t \leq 2/\pi, \\ 2K(\pi/4) - F(\varphi|\pi/4), & t \geq 2/\pi, \end{cases} \quad \varphi \equiv \arccos \left( \frac{|2 - \pi t|}{2 + \pi t} \right). \quad (47)$$

Поэтому обе функции  $f(t)$  и  $g(t)$  сходятся к нулю в пределе  $t \rightarrow 0$  как  $O(t \ln t)$  и  $O(t)$  и монотонно возрастают при увеличении аргумента  $t$ . Значения функции  $f(t)$  ограничены сверху числом  $1/\pi$ , а функция  $g(t)$  такова, что  $g(t) = O(t^{1/2})$ , если  $t \rightarrow \infty$ . В силу перечисленных свойств функций в их сумме при малых значениях аргумента доминирует первое слагаемое ( $f(t) \gg g(t)$ ), а при больших — второе ( $g(t) \gg f(t)$ ). Этот вывод иллюстрирует рис. а, на котором изображены графики отношений функций  $f(t)$  и  $g(t)$  к их сумме  $Q(t, 2/\pi)$ . Старшие слагаемые  $Q_-(t)$  и  $Q_+(t)$  асимптотик этой суммы в соответствующих пределах  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$  являются довольно простыми функциями:

$$Q_-(t) \equiv \frac{t}{2} \left( \ln \frac{4}{\pi t} + 2 \right), \quad Q_+(t) \equiv \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K(\pi/2). \quad (48)$$

Перечислим следствия обсужденных выше свойств функций  $Q(t, 2/\pi)$  и ее асимптотик  $Q_{\pm}(t)$ . Для интеграла  $B_{-1/2}(t)$ , заданного формулой (34), функция  $Q_-(t)$  является оценкой сверху при достаточно малых значениях  $t$ ; функция  $Q(t, 2/\pi)$  — верхняя оценка, но при любых значениях  $t$ ; этим же свойством обладает и функция  $Q_+(t)$ , потому что она совпадает с функцией  $P_{-1/2}(t)$ , определенной формулами (43). Качество оценок  $Q(t, 2/\pi)$  и  $Q_{\pm}(t)$  поясняет рис. б, на котором изображены графики отношений этих функций



а) Отношения  $f(t)/Q(t, 2/\pi)$  и  $g(t)/Q(t, 2/\pi)$  функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , определенных равенствами (46) и (47), к их сумме  $Q(t, 2/\pi)$  — сплошная и штриховая кривые; функции  $c_1(t) \equiv 1$  и  $c_2(t) \equiv 0$  — сплошная и штриховая прямые. б) Отношения  $B_{-1/2}(t)/Q(t, 2/\pi)$ ,  $B_{-1/2}(t)/Q_-(t)$  и  $B_{-1/2}(t)/Q_+(t)$  интеграла (34) к функциям  $Q(t, 2/\pi)$  и  $Q_-(t)$ ,  $Q_+(t)$ , заданных формулами (45) и (48), — сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые; функции  $c_1(t) \equiv 1$  и  $c_3(t) = 0,63667807 \dots$  — сплошная и штриховая прямые

к интегралу  $B_{-1/2}(t)$ , вычисленному с четырнадцатизначной точностью. Как видно, оценка  $B_{-1/2}(t) < Q_-(t)$  является довольно точной, если  $10^{-4} < t < 10^{-1}$ , и неприменима в области  $t > 10$ ; оценка  $B_{-1/2}(t) < Q(t, 2/\pi)$  верна на всем отрезке  $10^{-4} \leq t \leq 10^4$ , но слишком завышена в области  $10^{-4} < t < 1$ ; оценка  $B_{-1/2}(t) < Q_+(t)$  лишена всех недостатков предыдущих оценок и является наиболее точной при всех значениях аргумента  $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'} \in [10^{-4}, 10^4]$ .

Анализ случая  $2\lambda = -1$  закончим следующим замечанием: в этом случае в качестве наиболее простых мажорантных оценок функций  $|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)|$ ,  $|F_\lambda(\rho', \eta) H_\lambda(\rho, \eta)|$ ,  $|F_\lambda(\rho, \eta)|$  и  $|F_\lambda(\rho', \eta) G_\lambda(\rho, \eta)|$  можно использовать неравенства (35)–(38), полагая в этих неравенствах  $P_{-1/2}(t) = Q_-(t)$ , если  $0 < t < 0,1$ , и  $P_{-1/2}(t) = Q_+(t)$ , если  $t \geq 0$ .

#### 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И АМПЛИТУДЫ ДВУМЕРНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

В настоящем разделе исследуется строение регулярной волновой функции рассеяния  $\Psi^c$ , подчиненной уравнению Шредингера (1). Сначала выводятся представления этой функции через функции Куммера и через функции Кулона  $F_\lambda$ . Затем для амплитуды кулоновского рассеяния  $f^c$  строится и анализируется ряд типа (3), содержащий парциальные фазы  $\delta_\lambda^c$ .

**4.1. Представления волновой функции через функции Куммера.** Физически приемлемое решение уравнения Шредингера (1) в случае упругого рассеяния впервые получено в работе [13] с помощью параболических координат.

Предложим иной способ. Пусть  $C(\eta)$  — некоторый множитель. Подстановкой

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = C(\eta) \exp(ikx) U(\xi), \quad \xi \equiv 2ikr (\sin \varphi/2)^2 = ik(r-x), \quad (49)$$

сведем уравнение Шредингера (1) к гипергеометрическому уравнению (4) с параметрами  $a = -i\eta$  и  $c = 1/2$ . В качестве решения  $U(\xi)$  такого уравнения возьмем функцию Куммера  $\Phi(-i\eta, 1/2, \xi)$ . Множитель  $C(\eta)$  определим равенством

$$C(\eta) = [\Gamma(1/2 + i\eta)/\sqrt{\pi}] \exp(-\pi\eta/2). \quad (50)$$

Используя асимптотику (7) функции  $\Phi(-i\eta, 1/2, \xi)$ , проверим, что только при таком определении этого множителя обсуждаемое решение

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = C(\eta) \exp(ikx) \Phi(-i\eta, 1/2, \xi), \quad (51)$$

$$\Phi(-i\eta, 1/2; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)_n \xi^n}{(1/2)_n n!},$$

уравнения Шредингера (1) в случае  $\rho \equiv kr \rightarrow \infty$ ,  $x \neq r$ , т.е.  $\varphi \neq 0$ , имеет асимптотику

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = \exp\{ikx + i\eta \ln[k(r-x)]\} + r^{-1/2} \exp[ikr - i\eta \ln(2kr)] f^c(\varphi; k, \eta) + O(|\xi|^{3/2}). \quad (52)$$

Обсудим эту асимптотику. Оба ее слагаемых обладают прозрачным физическим смыслом: первое слагаемое описывает линейную волну, распространяющуюся вдоль оси  $OX$  коллинеарно орту  $\mathbf{e}_1$ , второе слагаемое в качестве множителей содержит расходящуюся круговую волну и амплитуду кулоновского рассеяния

$$f^c(\varphi; k, \eta) \equiv \frac{\Gamma(1/2 + i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} (2ik)^{-1/2} [\sin(\varphi/2)]^{-1-2i\eta}, \quad \varphi \neq 0. \quad (53)$$

Вследствие дальнедействующей природы кулоновских сил амплитуды

$$\exp[i\eta \ln(k(r-x))] = [k(r-x)]^{i\eta} \quad \text{и} \quad \exp[-i\eta \ln(2kr)] = (2kr)^{-i\eta}$$

линейной и круговой волн быстро осциллируют в области больших значений их аргументов, кулоновская амплитуда в направлении рассеяния вперед ( $\varphi = 0$ ) не определена, точка  $\varphi = 0$  является существенно особой. Согласно формулам (51) в этой точке при любых  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\eta$  верно тождество  $\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \equiv C(\eta) \exp(ikx)$ .

Теперь в формулах (51) применим к функции  $\Phi(-i\eta, 1/2, \xi)$  преобразование Куммера (6) и таким образом выведем еще одно представление решения  $\Psi^c$ :

$$\begin{aligned}\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) &= C(\eta) \exp(ikr) \Phi(1/2 + i\eta, 1/2, -\xi) = \\ &= C(\eta) \exp(ikr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2 + i\eta)_n}{(1/2)_n} \frac{(-\xi)^n}{n!}. \quad (54)\end{aligned}$$

Построенное решение (51), (54) уравнения Шредингера (1) удовлетворяет всем принятым в теории рассеяния [2,3] ограничениям на волновую функцию упругого рассеяния. Действительно, такое решение имеет непрерывные производные первого и второго порядка по обоим аргументам  $r$  и  $\varphi$  и обладает физически приемлемой асимптотикой (52), содержащей падающую и рассеянную волны и амплитуду рассеяния (53). Поэтому обсужденное решение считаем физической волновой функцией двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$ .

#### 4.2. Разложение волновой функции по регулярным функциям Кулона.

Докажем, что волновую функцию  $\Psi^c$ , заданную формулами (50) и (54), можно представить через регулярные функции Кулона  $F_\lambda$  и парциальные фазы  $\delta_\lambda^c$  в виде

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda i^\lambda \exp[i\delta_\lambda^c(\eta)] F_\lambda(\rho, \eta) \cos[(\lambda + 1/2)\varphi]. \quad (55)$$

Начнем доказательство. Используем разложение (12) волновой функции  $\Psi^c$ . Любая радиальная компонента  $u_\lambda$  такого разложения является следующим интегралом:

$$u_\lambda(\rho, \eta) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \cos[(2\lambda + 1)\varphi/2] d\varphi. \quad (56)$$

Выразим этот интеграл через функции  $\delta_\lambda^c$  и  $F_\lambda$ , определенные формулами (22) и (24). Для этого функцию  $\Psi^c$ , стоящую под обсуждаемым интегралом, заменим правой частью равенства (54), содержащего ряд Куммера  $\Phi(1/2 + i\eta, 1/2, \xi)$  и множитель  $C(\eta)$ . Этот множитель заменим правой частью равенства

$$C(\eta) = \frac{\Gamma(2\lambda + 2)}{2^\lambda \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 + i\eta)}{\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)} \exp[i\delta_\lambda^c(\eta)] C_\lambda(\eta),$$

которое следует из определений (22) и (50).

После упомянутых выше замен в интеграле (56) подынтегральная функция представится бесконечным рядом с индексом суммирования  $n = 0, 1, \dots$ , а каждое слагаемое этого ряда будет содержать произведение  $[\sin(\varphi/2)]^{2n} \cos m\varphi$  с фиксированным индексом  $m = \lambda + 1/2$ .

Проинтегрируем обсужденный ряд почленно. Для этого сделаем замену  $\varphi \rightarrow 2\varphi$  и используем табличный интеграл [9]

$$\int_0^\pi (\sin 2\varphi)^{2n} \cos 2m\varphi d\varphi = \pi \frac{(-1)^m}{4^n} \frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}, \quad n \geq m, \quad (57)$$

равный нулю в случае  $n < m$ . Затем, применив известные формулы [8]

$$(1/2)_n = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2)} = 2^{-n}(2n-1)!!, \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

сведем полученный ряд к разложению (24) функции  $F_\lambda$  и таким образом покажем, что при любом значении  $\lambda$  имеет место равенство

$$u_\lambda(\rho, \eta) = 2 \iota^{\lambda+1/2} \exp[\iota \delta_\lambda^c(\eta)] F_\lambda(\rho, \eta). \quad (58)$$

Теперь в исходном разложении (12) волновой функции  $\Psi^c$  заменим каждую компоненту  $u_\lambda$  правой частью такого равенства. В итоге получим представление (55).

**4.3. Представление амплитуды рассеяния через парциальные фазы.** Докажем, что амплитуду кулоновского рассеяния  $f^c$ , заданную равенством (53), можно представить через парциальные фазы  $\delta_\lambda^c$  в следующем виде:

$$f^c(\varphi; k, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2 \iota \pi k}} \sum_{2\lambda=-1, 1, \dots} \varepsilon_\lambda \{ \exp[2 \iota \delta_\lambda^c(\eta)] - 1 \} \cos[(\lambda + 1/2)\varphi], \quad (59)$$

$$\varphi \neq 0, \pi.$$

Для доказательства применим способ, давно известный в теории рассеяния [5] в случае короткодействующего потенциала. Напомним его основные этапы. Сначала асимптотика полной волновой функции рассеяния в пределе больших расстояний представляется через амплитуду рассеяния. Затем для этой же волновой функции и в том же пределе выводится асимптотическое представление через парциальные фазы рассеяния. Наконец, найденные асимптотики полагаются равными друг другу, и из полученного таким образом соотношения находится представление амплитуды рассеяния через парциальные фазы.

Последуем поясненной выше схеме и уделим пристальное внимание двум особым случаям: рассеянию вперед ( $\varphi = 0$ ) и рассеянию назад ( $\varphi = \pi$ ).

Сначала преобразуем асимптотику (52) функции  $\Psi^c$ . В этой асимптотике перейдем к переменной  $\rho = kr$ , а функцию  $\exp(\iota kx)$  заменим ее известным разложением [7]

$$\exp(\iota kx) = \exp(\iota \rho \cos \varphi) = J_0(\rho) + 2 \sum_{m=1, 2, \dots} \iota^m \cos(m\varphi) J_m(\rho), \quad \rho = kr.$$

В этом разложении положим  $m = \lambda + 1/2$ , а все функции Бесселя  $J_m$  аппроксимируем их известными асимптотиками [7]

$$J_{\lambda+1/2}(\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin(\rho - \pi\lambda/2), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

В результате исходная асимптотика (52) функции  $\Psi^c$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) &\sim \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} (2\rho)^{i\eta} [\sin(\varphi/2)]^{2i\eta} \times \\ &\times \sum_{\lambda=-1,1,3,\dots} i^\lambda \varepsilon_\lambda \sin(\rho - \pi\lambda/2) \cos[(\lambda + 1/2)\varphi] + \\ &+ r^{-1/2} (2\rho)^{-i\eta} \exp(i\rho) f^c(\varphi; k, \eta), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Теперь выведем другое представление асимптотики этой же функции. Для этого используем равенство (55). В нем положим  $\rho \rightarrow \infty$ , а все функции  $F_\lambda$  аппроксимируем по формулам (15). В результате получим искомое соотношение

$$\begin{aligned} \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) &\sim \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda i^\lambda \exp[i\delta_\lambda(\eta)] \times \\ &\times \sin[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] \cos[(\lambda + 1/2)\varphi], \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (61)$$

Итак, для волновой функции  $\Psi^c$  в одном и том же пределе  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \neq 0$ , выведены два разных асимптотических представления: представление (60) через амплитуду рассеяния  $f^c$  и представление (61) через фазы рассеяния  $\delta_\lambda^c$ . Приравняем правые части этих соотношений друг другу, затем применим формулу

$$\sin t = (-i/2) [\exp(it) - \exp(-it)]$$

и, разрешив получившееся уравнение относительно амплитуды, получим равенство

$$\begin{aligned} f^c(\varphi; k, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{2i\pi k}} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda \{ \exp[2i\delta_\lambda^c(\eta)] - 1 \} \cos[(\lambda + 1/2)\varphi] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \{ [1 - (2\rho \sin(\varphi/2))^{2i\eta}] S^+(\varphi) + [1 - (\sin(\varphi/2))^{2i\eta}] (2\rho)^{2i\eta} S^-(\varphi) \}, \end{aligned} \quad (62)$$

где символами  $S^\pm(\varphi)$  обозначены следующие ряды:

$$\begin{aligned} S^\pm(\varphi) &\equiv \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda (\pm 1)^{\lambda+1/2} \cos[(\lambda + 1/2)\varphi] = \\ &= 1 + 2 \sum_{m=1,2,\dots} (\pm 1)^m \cos m\varphi. \end{aligned}$$

Для исследования этих рядов используем табличные суммы [9]

$$s^{\pm}(\varphi; a) \equiv 1 + 2 \sum_{m=1,2,\dots} (\pm 1)^m \exp(-ma) \cos m\varphi = \frac{\operatorname{sh}(a)}{\operatorname{ch}(a) \mp \cos \varphi}, \quad a > 0.$$

Заметим, что в пределе  $a \rightarrow 0+$  сумма  $s^+(\varphi; a)$  становится суммой  $S^+(\varphi)$ , а сумма  $s^-(\varphi; a)$  переходит в сумму  $S^-(\varphi)$ . В этом пределе сумма  $s^+(\varphi; a)$  тождественно равна нулю, если  $\varphi \neq 0$ , и расходится при  $\varphi = 0$ ; сумма  $s^-(\varphi; a)$  вырождается в нуль, если  $\varphi \neq \pi$ , и не существует при  $\varphi = \pi$ . Следовательно, обе суммы  $S^{\pm}(\varphi)$  равны нулю на интервалах  $0 < \varphi < \pi$  и  $\pi < \varphi < 2\pi$ ; сумма  $S^+(\varphi)$  терпит разрыв второго рода в точке  $\varphi = 0$ , а сумма  $S^-(\varphi)$  — в точке  $\varphi = \pi$ . Поэтому разложение (62) теряет смысл в точках  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , а при всех остальных значениях угла  $\varphi$  из этого разложения следует представление (59), которое и требовалось доказать.

Стоит отметить, что в работе [14] представление амплитуды  $f^c$  кулоновского рассеяния через парциальные фазы  $\delta_{\lambda}^c$  получено способом, отличным от поясненного выше, а особые случаи  $\varphi \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow \pi$  не исследовались.

## 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Используем интегральные представления (32) радиальных функций Грина  $G_{\lambda}^c$  для вывода интегрального представления кулоновской функции Грина  $G^c$  и представления свободной функции Грина  $G^0$  через функцию Ханкеля  $H_0^{(1)}$ .

Сначала докажем равенство

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta) = -\frac{m_1}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} [\operatorname{th}(u/2)]^{2im} \times \\ \times \exp[\nu(\rho + \rho') \operatorname{ch}(u)] \cos \left\{ 2\sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh}(u) \cos[(\varphi - \varphi')/2] \right\} du. \quad (63)$$

Для этого в разложении (27) функции  $G^c$  заменим все функции  $G_{\lambda}^c$  соответствующими интегралами (32). Затем поменяем порядок суммирования и интегрирования. Получившуюся сумму найдем по известной формуле [8]

$$J_0(t) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(t) \cos(2m\varphi) = \cos(t \sin \varphi)$$

и таким образом завершим доказательство равенства (63).

Обсудим интеграл в правой части этого равенства. Модуль подынтегральной функции не превышает единицу во всей области интегрирования. Поэтому обсуждаемый интеграл сходится на полуинтервале  $0 \leq u < \infty$ . Для доказательства сходимости этого же интеграла на верхнем пределе при любом вещественном аргументе  $\eta$  сначала исследуем случай  $\eta = 0$  и попутно



покажем, что из равенства (63) в этом случае следуют соотношения

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)|_{\eta=0} = G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}) \equiv -i \frac{m_1}{2\hbar^2} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (64)$$

Итак, в исходном интеграле (63) положим  $\eta = 0$ . Тогда подынтегральная функция станет четной относительно замены  $u \rightarrow -u$ . Используя это свойство, заменим исследуемый интеграл половиной интеграла с такой же подынтегральной функцией, но с нижним пределом, равным  $-\infty$ . Затем выполним замену переменной интегрирования  $u$  на переменную  $t$  по формулам

$$t = \exp(u), \quad dt = t du, \quad \text{ch}(u) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right), \quad \text{sh}(u) = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)$$

и для удобства введем функции  $a_{\pm}$  и  $b_{\pm}$  равенствами

$$a_{\pm} \equiv \rho + \rho' \pm 2\sqrt{\rho\rho'} \cos[(\varphi - \varphi')/2], \quad b_{\pm}^2 = a_{\mp}/a_{\pm}.$$

Запишем получившееся представление в виде произведения

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{k}, \eta)|_{\eta=0} = -i \frac{m_1}{4\hbar^2} [I_+(a_+, b_+) + I_-(a_-, b_-)],$$

содержащего табличные интегралы [7]

$$I_{\pm}(a_{\pm}, b_{\pm}) \equiv -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \exp \left[ \frac{i}{2} a_{\pm} \left( t + \frac{b_{\pm}^2}{t} \right) \right],$$

равные соответствующим функциям Ханкеля  $H_0^{(1)}(a_{\pm} b_{\pm})$ . Осталось заметить, что в силу определения функций  $a_{\pm}$  и  $b_{\pm}$  верны равенства  $a_{\pm} b_{\pm} = |\rho - \rho'|$ , и тем самым закончить доказательство представления (64).

Доказанные выше равенства (64) означают, что в случае  $\eta = 0$  интеграл (63) сходится на верхнем пределе. Положим в его подынтегральной функции  $\eta \neq 0$  и  $u \rightarrow \infty$ . В этом пределе множитель  $[\text{th}(u/2)]^{2i\eta}$  сходит к единице. Поэтому в том же пределе исследуемая подынтегральная функция сходится к подынтегральной функции в случае  $\eta = 0$ . Следовательно, интеграл (63) существует при любом  $\eta$ .

Завершим настоящий пункт важными замечаниями. Представление кулоновской функции Грина  $G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)$  в виде однократного интеграла (63) получено впервые. К сожалению, в случае  $\eta \neq 0$  этот интеграл не удалось выразить через элементарные или известные специальные функции. Не увенчались успехом и все попытки найти такое представление, как обратный фурье-образ функции Грина  $\tilde{G}^c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \eta)$ , построенной в работе [15] в импульсном пространстве. Предложенный выше вывод соотношений (64) является альтернативным по отношению к давно известному выводу [16] представления функции  $G^0$  через функцию Ханкеля  $H_0^{(1)}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые получены следующие соотношения: мажорантные оценки (35), (38), (40), (43) всех ( $2\lambda = -1, 1, \dots$ ) радиальных компонент  $G_\lambda^c$  и  $F_\lambda$  функции Грина  $G^c$  и волновой функции  $\Psi^c$  двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы, представления волновой функции  $\Psi^c$  и амплитуды рассеяния  $f^c$  в виде косинус-рядов Фурье (55) и (59), интегральные представления (33) и (63) всех радиальных функций Грина  $G_\lambda^c$  и функции Грина  $G^c$ .

В заключение отметим, что настоящая работа является следующим звеном цепочки недавних исследований [17] двумерного рассеяния квантовой частицы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Saar L. D., DeMille D., Krems R. V., Ye J.* // New J. Phys. 2009. V. 11. P.055049.
2. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
3. *Базь Я. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Т. 3. 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2008.
5. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2, 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
8. *Абарамовиц М., Стигун И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1, 3. М.: Наука, 1981.
10. *Bollé D., Gesztesy F.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1279.
11. *Bellandi Filho J., Caetano Neto E. S.* // Lett. Nuovo Cim. 1976. V. 16. P. 331.
12. *Klarsfeld S.* // Nouvo Cim. A. 1966. V. XLIII. P. 3869.
13. *Lin Q.-G.* // Am. J. Phys. 1997. V. 65. P. 1007.
14. *Jing W., Jinyan Z.* // Science in China. Ser. G. Physics, Mechanics, Astronomy. 2004. V. 47. P. 676.
15. *Dittrich W.* // Am. J. Phys. 1999. V. 67. P. 768.
16. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. N. Y.: McGraw-Hill, 1953.
17. *Путышев В. В.* // ЯФ. 2014. Т. 77. С. 699; ТМФ. 2014. Т. 179. С. 102; ТМФ. 2014. Т. 180. С. 342; ТМФ. 2015. Т. 182. С. 316.

Получено 18 марта 2015 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 10.04.2015.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,69. Уч.-изд. л. 2,03. Тираж 270 экз. Заказ № 58512.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)