Р5-2018-65

Р. М. Ямалеев [*]

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ЧЕРЕЗ ОПЕРАТОРЫ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

* E-mail: yamaleev@jinr.ru

Ямалеев Р. М. Р5-2018-65

Представление решений системы уравнений Риккати
через операторы разделенных разностей

Результаты действия операторов разделенных разностей на степенные и экспоненциальные функции представлены в виде матриц треугольной формы с элементами, зависящими от коэффициентов характеристического полинома. Показано, что в пределе вырожденных значений корней характеристического полинома таблица результатов представляется матрицей Паскаля. Построены функции, инвариантные по отношению к данным операторам, — аналоги экспоненциальной функции. Обобщенная система уравнений Риккати, соответствующая обыкновенному дифференциальному уравнению высокого порядка, и решения этой системы представлены через операторы разделенных разностей.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2018

Yamaleev R. M. P5-2018-65

Representation of Solutions of the System of Riccati Equations
via Operators of Divided Differences

Results of the action of divided difference operators on power and exponential functions are given by triangle matrices with elements depending on coefficients of the characteristic polynomial. It is shown, if distances between nodes are tending to zero, then the triangle matrices transform into the Pascal matrix. Invariant functions with respect to the operators of degenerated divided differences are constructed. The generalized system of Riccati equations corresponding to high-order ordinary differential equations and their solutions are presented via the divided difference operators.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Разделенные разности (далее — РР) относятся к хорошо известным и широко используемым математическим операциям [1]. Такие операции, как конечные разности, q-дифференцирование, являются производными от операции РР.

Важной особенностью этой операции является то, что результат действий РР на степенные ряды (конечные или бесконечные) зависит от коэффициентов характеристического полинома, на корнях которого находятся узлы оператора РР. Если характеристический полином имеет вырожденные корни, что соответствует совпадению узлов РР, то результаты действий операторов РР на степенные функции представляются матрицей Паскаля. Подобно экспоненциальной функции, которая является инвариантом по отношению к операции дифференцирования, для вырожденных операторов РР вводится понятие инвариантной функции.

Особый интерес представляют РР от экспоненциальной функции, поскольку эти функции образуют базис обобщенных тригонометрических функций. В свою очередь, система обобщенных тригонометрических функций составляет базис, на основе которого строятся решения системы уравнений Риккати.

Работа состоит из трех частей. В первой части представлено исчисление разделенных разностей применительно к степенным функциям. Во второй части рассматриваются вырожденные операторы разделенных разностей и их инварианты. В третьей части формулы теории систем обобщенных уравнений Риккати представлены через операторы разделенных разностей.

1. РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ ПОЛИНОМОВ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1.1. Определение операции разделенных разностей. Операция РР имеет различные эквивалентные определения [2], в простейшем случае определение РР имеет вид

$$D_2 f(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \tag{1.1}$$

Эта формула определяет структуру операции РР, зависящей от двух значений переменной и значений функции в этих точках. Обобщение на более высокие порядки удобно формулировать, используя матрицу Вандермонда и детерминант этой матрицы [3].

Пусть аналитическая функция $f(x)$ определена в n узловых точках, соответствующих значениям переменной x_k, $k = 1, \ldots, n$. Образуем векторы

$$\mathbf{v}^k = [x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k]^T, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.2}$$

из которых составим матрицу Вандермонда

$$V_M(x;n) = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \ldots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

с определителем

$$V(x;n) = \mathrm{Det}\,(V_M(x;n)) = \prod_{i>k}(x_i - x_k). \tag{1.4}$$

Образуем вектор из значений функции в заданных точках $x_k, k = 1, \ldots, n$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) := [f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_{n-1}), f(x_n)]^T. \tag{1.5}$$

Заменим вектор $\mathbf{v}^{n-1}$ в матрице Вандермонда $V_m(x;n)$ на вектор $\mathbf{f}(\mathbf{v})$. Таким способом построим матрицу

$$W_M(f;x;n) = \begin{pmatrix} f(x_1) & x_1^{n-2} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ f(x_2) & x_2^{n-2} & \ldots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ f(x_3) & x_3^{n-2} & \ldots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_n) & x_n^{n-2} & \ldots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

с определителем $W(f;x;n) = \mathrm{Det}\,(W_M(f;x;n))$.

Разделенная разность порядка n от функции $f(x)$ определяется как отношение детерминантов

$$D_n f(x) = \frac{W(f;x;n)}{V(x;n)}. \tag{1.7}$$

Непосредственно из определения детерминанта матрицы $W_M(f;x;n)$ следуют следующие ограничения для РР от степенной функции:

$$\begin{aligned} D_n x^k &= 1, \quad \text{если} \quad k = n-1, \\ D_n x^k &= 0, \quad \text{если} \quad k < n-1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Определим характеристический полином как многочлен, корни которого суть значения узлов, на которых определена операция разделенных разностей. Пусть $P(X)$ — заданный характеристический полином

$$P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n \tag{1.9}$$

с разделенными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Лемма 1.1. *Степенная функция $f(x) = x^k$, $k > n-1$, заданная при значениях корней характеристического полинома $P(X)$, может быть сведена к многочлену*

$$x_j^k = R_j^m = b_m x_j^m + \ldots + b_0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.10}$$

где $\deg(R_j^m) = \deg(P(X)) - 1$*, а старший коэффициент многочлена определяется с помощью алгоритма* 1.1 [4].

Алгоритм 1.1:

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} a_j b_{i-j}, \quad b_1 = 1, \; b_2 = a_1. \tag{1.11}$$

Теорема 1.1. *Имеет место следующее замечательное тождество, устанавливающее связь между детерминантами $W(x^k;x;n)$ и $V(x;n)$:*

$$W(x^k;x;n) = V(x;n)\; b_k(a_1, \ldots, a_n), \quad k \geqslant n-1, \tag{1.12}$$

где $b_k(a_1, \ldots, a_n)$ — старший коэффициент многочлена R_m.

Доказательство. В матрицу $W_M(x^k;x;n)$ степенная функция входит только при значениях корней характеристического полинома $P(X)$, следовательно, согласно лемме 1.1 функция x^k может быть заменена многочленом R_j^m:

$$W_M(R^m;x;n) = \begin{pmatrix} R_1^m & x_1^{n-2} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ R_2^m & x_2^{n-2} & \ldots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ R_3^m & x_3^{n-2} & \ldots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_n^m & x_n^{n-2} & \ldots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы состоит из суммы определителей

$$\operatorname{Det} W_M(R^m; x; n) = \operatorname{Det} W_M(b_m x^m; x; n) + \ldots + \operatorname{Det} W_M(1; x; n).$$

Только первый определитель этой суммы, содержащий старший член $b_m x^m$ многочлена R^m, не тривиален. Вынося фактор b_m за знак определителя, получим формулу (1.12). □

В простейшем случае при $n = 2$ формула (1.12) выглядит так:

$$u^k - v^k = (u - v) \sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i},$$

т. е. разность двух степенных функций, заданных в переменных u, v, равна разности этих переменных, умноженной на симметрическую комбинацию от этих переменных. Следовательно, отношение указанных разностей есть полностью симметрический полином от двух переменных.

В случае РР третьего порядка данное правило формулируется в том же контексте, где понятие «разница между двумя величинами» заменяется на понятие «разница между тремя величинами», а полностью симметрический полином составляется между тремя величинами. Это понятие вводится естественным образом в рамках свойств матрицы Вандермонда [5]. Чтобы обобщить общепринятую бинарную операцию, называемую «разница между двумя величинами», $[u, v] = u - v$, главное свойство которой выражается формулой

$$[u, v] = [u, d] + [d, v],$$

на три и более величин, представим $[u, v]$ как определитель матрицы

$$[u, v] = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это представление дает подсказку, что определитель матрицы Вандермонда третьего порядка

$$[u, v, w] = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (u - v)(v - w)(w - u) \tag{1.13}$$

может быть принят в качестве определения разницы между величинами u, v, w. Эта формула удовлетворяет основному свойству, а именно по отношению к дополнительной переменной имеет место следующее разложение [6]:

$$[u, v, w] = [u, v, d] + [u, d, w] + [d, v, w]. \tag{1.14}$$

Это тождество доказывается путем раскрытия заведомо тривиального детерминанта:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} u^2 & v^2 & w^2 & d^2 \\ u & v & w & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -[u,v,w]+[u,v,d]+[u,d,w]+[d,v,w] = 0. \quad (1.15)$$

Для $n = 3$ в правой части уравнения (1.12) получим фактор, который может быть представлен как «разница между тремя величинами», а именно:

$$u^k(v-w) + v^k(w-u) + w^k(u-v) = \\ = (u-v)(v-w)(w-u) \sum_{i+l+j=k-2} (v^i w^j u^l), \quad k \geqslant 2. \quad (1.16)$$

Основная теорема теории симметрических многочленов утверждает, что любой симметрический многочлен является многочленом от элементарных симметрических многочленов [7]. С другой стороны, по формулам Виета коэффициенты характеристического полинома с точностью до знака суть значения элементарных симметрических многочленов. Следовательно, результат действия РР-оператора на степенную функцию представляется многочленом от коэффициентов характеристического полинома.

Приведем несколько примеров.

Пример 1:

$$\frac{u^2-v^2}{u-v} = a_1, \quad \frac{u^3-v^3}{u-v} = a_1^2 - a_2, \quad \frac{u^4-v^4}{u-v} = a_1^3 - 2a_1a_2, \qquad (1.17)$$

где a_1, a_2 — коэффициенты полинома

$$P(X) = X^2 - a_1X + a_2. \qquad (1.18)$$

Пример 2:

$$\frac{u^4(v-w)+v^4(w-u)+w^4(u-v)}{(u-v)(v-w)(w-u)} = a_1^2 - a_2,$$
$$\frac{u^5(v-w)+v^5(w-u)+w^5(u-v)}{(u-v)(v-w)(w-u)} = a_3 - 2a_1a_2 + a_1^3, \qquad (1.19)$$

где a_1, a_2, a_3 — коэффициенты полинома

$$P(X) = X^3 - a_1X^2 + a_2X + a_3. \qquad (1.20)$$

Эти результаты запишем в виде табл. 1.

С целью придать этим формулам наиболее удобную форму выведем общую формулу.

Таблица 1.

$n=3$	$f(x)=x^k$
$k=0$	$D(3)f=0$
$k=1$	$D(3)f=0$
$k=2$	$D(3)f=1$
$k=3$	$D(3)f=a_1$
$k=4$	$D(3)f=a_1^2-a_2$
$k=5$	$D(3)f=a_3-2a_1a_2+a_1^3$
$k=6$	$D(3)f=2a_1a_3-3a_1^2a_2+a_2^2+a_1^4$

1.2. Общая формула для разделенных разностей от степенных функций. Пусть $\mathbf{Z}$ обозначает нильпотентную матрицу вида

$$\mathbf{Z} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Построим полином в базисе нильпотентной матрицы $\mathbf{Z}$ следующим образом:

$$F(a;\mathbf{Z};n) = I + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \mathbf{Z}^k. \tag{1.22}$$

Например, матричная форма полинома $F((-a);\mathbf{Z};4)$ выглядит так:

$$F((-a);\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Элементы обратной матрицы $F^{-1}((-a);\mathbf{Z};n)$ вычисляются с помощью алгоритма 1.1. Пользуясь этим алгоритмом, построим табл. 2.

Таблица 2.

$D_n x^{n-1} = b_1 =$	1
$D_n x^{n} = b_2 =$	a_1
$D_n x^{n+1} = b_3 =$	$-a_2 + a_1^2$
$D_n x^{n+2} = b_4 =$	$a_3 - 2a_1a_2 + a_1^3$
$D_n x^{n+3} = b_5 =$	$-a_4 + 2a_1a_3 - 3a_1^2a_2 + a_2^2 + a_1^4$
$\ldots$	$\ldots$
$D_n x^{n+k} = b_{k+2} =$	$\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}a_j b_{i-j}$

Пример 3:

$$F^{-1}(a;\mathbf{Z}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -a_2 + a_1^2 & a_3 - 2a_1a_2 + a_1^3 & -a_4 + 2a_1a_3 - 3a_1^2a_2 + a_2^2 + a_1^4 \\ 0 & 1 & a_1 & -a_2 + a_1^2 & a_3 - 2a_1a_2 + a_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & -a_2 + a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Далее, с помощью той же нильпотентной матрицы образуем полином следующего вида:

$$F(x;\mathbf{Z};n) = I + x\mathbf{Z} + \ldots + x^k\mathbf{Z}^k + \ldots + x^{n-1}\mathbf{Z}^{n-1}. \tag{1.25}$$

В этих обозначениях общий результат действия оператора РР на степенную функцию выражается формулой

$$D_n(x^{n-1}F(x;\mathbf{Z};n)) = (F((-a);\mathbf{Z};n))^{-1}. \tag{1.26}$$

Как видно из формулы (1.26), оператор РР при действии на матрицу $x^{n-1}F(x;\mathbf{Z};n)$, состоящую из степенных функций, переставляет мономы x^{n-1+k} на коэффициенты характеристического полинома a_k и оборачивает полученную матрицу.

Приведем некоторые примеры, поясняющие эту формулу.

Пример 4:

$$D_2\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$D_3\begin{pmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \tag{1.27}$$

$$D_4\begin{pmatrix} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ 0 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 0 & 0 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ 0 & 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

1.3. Операторы разделенных разностей разной разрядности. Образуя матрицу $W_M(f;x;n)$ из матрицы Вандермонда (см. формулу 1.6), мы использовали только одну из n возможностей. Действительно, кроме первого столбца вектором, составленным из значений функции, можно было заменить второй, третий или k-й столбец. Обозначим полученные таким способом матрицы через

$$W_{M,k}(f;x;n), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где индекс k соответствует номеру заменяемого столбца. Полученные таким способом матрицы позволяют ввести систему РР-операторов

$$D_k(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \;\; p = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$D_n(k) = \frac{\mathrm{Det}\,(W_{M,k}(f;x;n))}{\mathrm{Det}\,(V_M(x;n))}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.28}$$

Пример 5. В случае матриц третьего порядка имеются следующие возможности:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^2 & f(x_1) & 1 \\ x_2^2 & f(x_2) & 1 \\ x_3^2 & f(x_3) & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & f(x_1) \\ x_2^2 & x_2 & f(x_2) \\ x_3^2 & x_3 & f(x_3) \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Соответственно, получим следующие три определения оператора разделенных разностей:

$$D_3(1) = \frac{1}{V(x;3)} \,\mathrm{Det} \begin{pmatrix} f(x_1) & x_1 & 1 \\ f(x_2) & x_2 & 1 \\ f(x_3) & x_3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3(2) = \frac{1}{V(x;3)} \,\mathrm{Det} \begin{pmatrix} x_1^2 & f(x_1) & 1 \\ x_2^2 & f(x_2) & 1 \\ x_3^2 & f(x_3) & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

$$D_3(3) = \frac{1}{V(x;3)} \,\mathrm{Det} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & f(x_1) \\ x_2^2 & x_2 & f(x_2) \\ x_3^2 & x_3 & f(x_3) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эту алгебраическую систему можно рассматривать как результат решения линейного алгебраического уравнения методом Крамера. В случае матрицы третьего порядка данная система уравнений выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3(1)f(x) \\ D_3(2)f(x) \\ D_3(3)f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Решение этой системы уравнений может быть представлено с помощью сопровождающей матрицы

$$f(E) = I\, D_3(1)f(x) + E\, D_3(2)f(x) + E^2\, D_3(3)f(x). \tag{1.32}$$

Пользуясь этой формулой, найдем представление результата действия операторов $D_n(k)$ на мономы сопровождающими матрицами исходного полинома $P(X)$.

Пример 6:

$$\begin{pmatrix} D_2(2) \\ D_2(1) \end{pmatrix} \bigotimes \;(x \quad x^2) \;= \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = E,$$

$$\begin{pmatrix} D_2(2) \\ D_2(1) \end{pmatrix} \bigotimes \;(x^2 \quad x^3) \;= \begin{pmatrix} -a_2 & a_2 a_1 \\ a_1 & (a_1^2 - a_2) \end{pmatrix} = E^2,$$

$$\begin{pmatrix} D_2(2) \\ D_2(1) \end{pmatrix} \bigotimes \;(x^k \quad x^{k+1}) \;= E_2^k, \quad n = 2;$$

$$\begin{pmatrix} D_3(3) \\ D_3(2) \\ D_3(1) \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix} = E_3,$$

$$\begin{pmatrix} D_3(3) \\ D_3(2) \\ D_3(1) \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & a_1a_3 \\ 0 & -a_2 & a_3 - a_1a_2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 - a_2 \end{pmatrix} = E_3^2,$$

$$\begin{pmatrix} D_3(3) \\ D_3(2) \\ D_3(1) \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} x^k & x^{k+1} & x^{k+2} \end{pmatrix} = E_3^k, \quad n = 3.$$

Обобщение на случай матриц произвольного порядка очевидно. По индукции находим общую формулу:

$$[D_n(n), D_n(n-1), \ldots, D_n(1)]^T \bigotimes [x^k, x^{k+1}, \ldots, x^{k+n-1}] = E_n^k. \quad (1.33)$$

2. ВЫРОЖДЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ И ИХ ИНВАРИАНТЫ

Если интервал между узлами устремить к нулю, то оператор разделенных разностей второго порядка перейдет в обычную производную первого порядка [8]. Для степенной функции имеем

$$D_2(1)x^k|_{x_1=x_2=x} = kx^{k-1}. \quad (2.1)$$

Поскольку результат действия оператора РР на степенную функцию выражается симметрической формой, то при вырождении корней полинома результат находится простым приравниванием корней к данному аргументу функции. Например, для третьего порядка вырождение корней полинома можно записать так:

$$D_3(1)x^k|_{x_1=x_2=x_3=x} = C_k^{k-2}x^{k-2}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.2)$$

Обозначим вырожденный оператор через Dx_n.

В общем случае для степенной функции имеет место следующая формула:

$$Dx_n\, x^k = C_k^{k-n+1}x^{k-n+1}. \quad (2.3)$$

Составим таблицу действий вырожденного оператора РР на степенную функцию (табл. 3).

Таблица 3.

Dx_n	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
Dx_2	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	$6x^5$	$7x^6$	$8x^7$
Dx_3	0	0	1	$3x$	$6x^2$	$10x^3$	$15x^4$	$21x^5$	$28x^6$
Dx_4	0	0	0	1	$4x$	$10x^2$	$20x^3$	$35x^4$	$56x^5$
Dx_5	0	0	0	0	1	$5x$	$15x^2$	$35x^3$	$70x^4$
Dx_6	0	0	0	0	0	1	$6x$	$21x^2$	$56x^3$

В табл. 3 в «шапке» содержатся функции, на которые действуют операторы, расположенные в боковике. На пересечении — в прографке — находится результат. Таким образом, результат действия вырожденного оператора РР на степенную функцию выражается треугольной матрицей Паскаля.

Как известно (см. [9–11]), треугольную матрицу Паскаля можно представить как экспоненциальную функцию от нильпотентной матрицы с натуральным рядом над диагональю. В этих терминах табл. 3 формально можно представить так:

$$\begin{pmatrix} I \\ Dx_2 \\ Dx_3 \\ Dx_4 \\ Dx_5 \\ Dx_6 \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{pmatrix} = \exp\left[x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right]. \tag{2.4}$$

Аналогично экспоненциальной функции, которая инвариантна по отношению к дифференцированию, с помощью степенных рядов можно построить функции, инвариантные по отношению к операции вырожденных разделенных разностей. В случае $n = 3$ имеем пару таких функций:

$$\exp_3^{(1)}(x) = 1 + \frac{x^2}{C_2^0} + \frac{x^4}{C_2^0 C_4^2} + \frac{x^6}{C_2^0 C_4^2 C_6^4} + \ldots, \tag{2.5}$$

$$\exp_3^{(2)}(x) = x + \frac{x^3}{C_3^1} + \frac{x^5}{C_3^1 C_5^3} + \frac{x^7}{C_3^1 C_5^3 C_7^5} + \ldots \tag{2.6}$$

Таким образом, в данном случае можно построить две функции, представленные в форме бесконечного сходящегося ряда, которые переходят сами в себя под действием вырожденного РР-оператора третьего порядка. При $n = 4$ число инвариантных функций равно трем. Они задаются с помощью степенных рядов следующим образом:

$$\exp_4^{(1)}(x) = 1 + \frac{x^3}{C_3^0} + \frac{x^6}{C_3^0 C_6^3} + \frac{x^9}{C_3^0 C_6^3 C_9^6} + \dots,$$
$$\exp_4^{(2)}(x) = x + \frac{x^4}{C_4^1} + \frac{x^7}{C_4^1 C_7^4} + \frac{x^{10}}{C_4^1 C_7^4 C_{10}^7} + \dots, \tag{2.7}$$
$$\exp_4^{(3)}(x) = x^2 + \frac{x^5}{C_5^2} + \frac{x^8}{C_5^2 C_8^5} + \frac{x^{11}}{C_5^2 C_8^5 C_{11}^8} + \dots$$

Аналогичным способом можно построить $n-1$ функцию, инвариантную по отношению к вырожденнему PP-оператору порядка n. Общая формула имеет вид

$$\exp_n^{(m)}(x) = x^{m-1} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{m-1+k(n-1)} \prod_{r=1}^{r=k} \{C_{m-1+r(n-1)}^{m-1+(r-1)(n-1)}\}^{-1},$$
$$m = 1, 2, \dots, n-1. \tag{2.8}$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ЧЕРЕЗ ОПЕРАТОРЫ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$P\left(\frac{d}{d\phi}\right)\Psi = \frac{d^2}{d\phi^2}\Psi - a_1\frac{d}{d\phi}\Psi + a_2\Psi = 0, \quad a_k \in C \tag{3.1}$$

имеет два линейно независимых решения: $g_0(\phi)$, $g_1(\phi)$. Если выбрать начальные значения так, что $g_0(0) = 1$, $g_1(0) = 0$, то отношение этих решений

$$U(\phi) = -\frac{g_0(\phi)}{g_1(\phi)} \tag{3.2}$$

будет удовлетворять уравнению Риккати

$$\frac{d}{d\phi}U = P(U). \tag{3.3}$$

Следует отметить, что структура уравнений (3.1) и (3.3) определяется единым характеристическим полиномом второго порядка:

$$P(X) = X^2 - a_1 X + a_2. \tag{3.4}$$

Уравнение Риккати–Абеля, которое определяется полиномом третьего порядка

$$\frac{d}{d\phi}U = U^3 - a_1U^2 + a_2U - a_3, \tag{3.5}$$

является следующим шагом в обобщении уравнения Риккати.

Для постоянных значений коэффициентов уравнение Риккати–Абеля непосредственно интегрируется. Проводя интегрирование в определенных пределах, приходим к следующей формуле [4]:

$$D_3(1)\log\frac{u-x}{v-x} = \frac{1}{w-v}\int\limits_v^w \frac{du}{u^3 - a_1u^2 + a_2u - a_3}, \tag{3.6}$$

где в левой части оператор РР определен на корнях кубического полинома в подынтегральном выражении.

Естественно предположить, что решения уравнения Риккати–Абеля както связаны с системой линейно независимых решений дифференциального уравнения третьего порядка с тем же характеристическим полиномом, что и уравнение Риккати–Абеля. В работах [13, 14] задача взаимосвязи линейно независимых решений y_1, y_2, y_3 дифференциального уравнения третьего порядка с решениями уравнения Риккати–Абеля была в общем виде поставлена и решена. В случае дифференциального уравнения высокого порядка с характеристическим полиномом

$$P(X) = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^k a_k X^{n-k} + \ldots + (-1)^n a_n \tag{3.7}$$

линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{d}{d\phi}\right) g_k(\phi) = 0 \tag{3.8}$$

с начальными условиями $g_0(0) = 1$, $g_k(0) = 0, k = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют системе уравнений [12]

$$\sum_{j=1}^{n} [E]_k^j g_{j-1} = \frac{d}{d\phi}\, g_{k-1}, \tag{3.9}$$

где E — сопровождающая матрица полинома $P(X)$. Система функции $g_k(\phi)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, составляет базис обобщенной тригонометрии. Поскольку сопровождающая матрица E удовлетворяет уравнению

$$P(E) = 0, \tag{3.10}$$

то аналитическая функция от E задается полиномом в $(n-1)$ степени. Для экспоненциальной функции этот полином имеет вид

$$Q(E) = \exp(E\phi) = Ig_0 + Eg_1 + E^2 g_2 + \ldots + E^{n-1} g_{n-1}. \qquad (3.11)$$

При $n = 2$ эта формула редуцируется в формулу Эйлера

$$\exp(E\phi) = g_0(\phi) + E\, g_1(\phi), \qquad (3.12)$$

где явный вид функции $g_0(\phi)$, $g_1(\phi)$ задается линейной комбинацией экспонент:

$$g_1(\phi) = \frac{\exp(x_2\phi) - \exp(x_1\phi)}{x_2 - x_1}, \qquad (3.13\text{а})$$

$$g_0(\phi) = \frac{x_2 \exp(x_1\phi) - x_1 \exp(x_2\phi)}{x_2 - x_1}. \qquad (3.13\text{б})$$

Как видно, формулы (3.13а) и (3.13б) совпадают с определениями РР-операторов второго порядка, действующих на экспоненциальную функцию, т. е.

$$\begin{aligned} D_2(1)\exp(x\phi) &= g_1(\phi), \\ D_2(2)\exp(x\phi) &= g_0(\phi). \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Это общее правило для всех порядков. Например, если характеристический полином задается кубическим полиномом

$$P(E) = E^3 - a_1E^2 + a_2E - a_3, \qquad (3.15)$$

то обобщенные тригонометрические функции компактно выражаются через РР-операторы следующим образом:

$$\begin{aligned} D_3(1)\exp(x\phi_1 + x^2\phi_2) &= g_2(\phi_1,\phi_2), \\ D_3(2)\exp(x\phi_1 + x^2\phi_2) &= g_1(\phi_1,\phi_2), \\ D_3(3)\exp(x\phi_1 + x^2\phi_2) &= g_0(\phi_1,\phi_2). \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Обобщенные тригонометрические функции третьего порядка являются двупараметрическими функциями. Формула (3.11), аналог формулы Эйлера, для экспоненциальной функции от E имеет вид

$$Q(E) = \exp(E\phi_1 + E^2\phi_2) = Ig_0(\phi_1,\phi_2) + Eg_1(\phi_1,\phi_2) + E^2 g_2(\phi_1,\phi_2). \qquad (3.17)$$

Обобщенные тригонометрические функции порядка n зависят от $n-1$ параметра. В терминах РР-операторов эти функции определяются следующей системой уравнений:

$$g_{n-k}(\phi) = D_n(k)\exp(x\phi), \;\; k = 1,\ldots,n, \qquad (3.18)$$

где под ϕ подразумевается набор из $(n-1)$ переменного, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$, при этом экспоненциальная функция имеет вид

$$\exp(x\phi) = \exp(x\phi_1 + x^2\phi_2 + \ldots + x^{n-1}\phi_{n-1}).$$

Функции g_0, g_1 являются прототипами известных тригонометрических функций косинуса и синуса. Отношение функций g_0, g_1

$$U = -\frac{g_0}{g_1} = -G_{01} \tag{3.19}$$

определяет аналог тангенса, который удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dU}{d\phi} = P(U) = U^2 - a_1 U + a_2. \tag{3.20}$$

В общем случае функции $U_k(\phi), k = 1, \ldots, n-1$, находятся из решения алгебраического уравнения

$$Q(U) = 0. \tag{3.21}$$

В качестве примера более подробно рассмотрим случай $n = 4$. Функции U_1, U_2, U_3 определяются из уравнения

$$Q(U) = U^3 + G_2 U^2 + G_1 U + G_0 = 0, \tag{3.22}$$

где

$$G_2 = \frac{g_2}{g_3}, \quad G_1 = \frac{g_1}{g_3}, \quad G_2 = \frac{g_0}{g_3}. \tag{3.23}$$

Полином $Q(U)$ обладает тремя корнями U_1, U_2, U_3, зависящими от трех параметров $\phi = \phi_1$, ϕ_2, ϕ_3.

Из системы эволюционных уравнений (3.9) для обобщенных тригонометрических функций $g_0(\phi)$, $g_1(\phi)$, $g_2(\phi)$, $g_3(\phi)$ можно вывести дифференциальные уравнения для U_1, U_2, U_3. Эта задача была решена в работе [14]. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(U_1)(\partial_3 - a_1\partial_2 + a_2\partial_1)U_1 &= A_3\, P(U_1), \\ \Phi(U_1)(\partial_2 - a_1\partial_1)U_1 &= A_2\, P(U_1), \\ \Phi(U_1)\partial_1 U_1 &= A_1\, P(U_1), \end{aligned} \tag{3.24}$$

где U_1 — одно из решений уравнения (3.24),

$$A_1 = 1, \quad -A_2 = U_2 + U_3, \quad A_3 = U_2 U_3, \quad \Phi(U_1) = (U_1 - U_2)(U_1 - U_3).$$

Путем перестановки индексов получим такие же уравнения для U_2 и U_3.

Коэффициент $G_2(\phi)$ удовлетворяет такой системе уравнений, которую в терминах операторов РР можно записать в следующем виде:

$$-\begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix} G_2(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & -a_2+a_1^2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3(3) \\ D_3(2) \\ D_3(1) \end{pmatrix} P(U). \tag{3.25}$$

На основе вышеприведенных уравнений действие операторов РР на характеристический полином $P(X)$, определенный при $X=U$, может быть переопределено в прозводную первого порядка от коэффициентов полинома $Q(U)$, т. е. $G_k, k=0,\ldots,n-2$:

$$\begin{aligned} \frac{dG_2}{d\phi} &= D_3(1)P(U), \\ \frac{dG_1}{d\phi} &= D_3(2)P(U), \\ \frac{dG_0}{d\phi} &= D_3(3)P(U). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Дифференциальные уравнения (3.24), записанные для каждой из функций U_1, U_2, U_3 отдельно, можно объединить в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\phi_3}U_1 & \partial_{\phi_3}U_2 & \partial_{\phi_3}U_3 \\ \partial_{\phi_2}U_1 & \partial_{\phi_2}U_2 & \partial_{\phi_2}U_3 \\ \partial_{\phi_1}U_1 & \partial_{\phi_1}U_2 & \partial_{\phi_1}U_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U_2U_3 & U_3U_1 & U_1U_2 \\ -U_2-U_3 & -U_3-U_1 & -U_1-U_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Phi(U_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\Phi(U_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\Phi(U_3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(U_1) & 0 & 0 \\ 0 & P(U_2) & 0 \\ 0 & 0 & P(U_3) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Заметим, что произведение двух матриц в правой части уравнения есть ничто иное, как матрица, обратная матрице Вандермонда:

$$
\begin{pmatrix} U_2U_3 & U_3U_1 & U_1U_2 \\ -U_2-U_3 & -U_3-U_1 & -U_1-U_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times
$$
$$
\times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Phi(U_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\Phi(U_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\Phi(U_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U_1 & U_1^2 \\ 1 & U_2 & U_2^2 \\ 1 & U_3 & U_3^2 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.28)
$$

С учетом этого наблюдения перепишем (3.27) так:

$$
\begin{pmatrix} \partial_{\phi_3}U_1 & \partial_{\phi_3}U_2 & \partial_{\phi_3}U_3 \\ \partial_{\phi_2}U_1 & \partial_{\phi_2}U_2 & \partial_{\phi_2}U_3 \\ \partial_{\phi_1}U_1 & \partial_{\phi_1}U_2 & \partial_{\phi_1}U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times
$$
$$
\times \begin{pmatrix} 1 & U_1 & U_1^2 \\ 1 & U_2 & U_2^2 \\ 1 & U^2 & U_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(U_1) & 0 & 0 \\ 0 & P(U_2) & 0 \\ 0 & 0 & P(U_3) \end{pmatrix}. \quad (3.29)
$$

Это уравнение следует интерпретировать как определение матрицы преобразования от переменных $\phi_k, k = 1, \ldots, n-1$, к переменным $U_k, k = 1, \ldots, n-1$.

Равенство детерминантов матричного уравнения приводит к следующей формуле для якобиана:

$$
J\left(\left\|\frac{\partial U_k}{\partial \phi_j}\right\|\right) = \frac{P(U_1)P(U_2)P(U_3)}{V(U;3)}, \quad (3.30)
$$

где $P(U)$ — характеристический полином, $V(U;n)$ — детерминант Вандермонда.

Поскольку обратные матрицы в правой части уравнения (3.29) известны, легко находим якобиан обратного преобразования:

$$
\begin{pmatrix} \partial_{u_1}\phi_1 & \partial_{u_1}\phi_2 & \partial_{u_1}\phi_3 \\ \partial_{u_2}\phi_1 & \partial_{u_2}\phi_2 & \partial_{u_2}\phi_3 \\ \partial_{u_3}\phi_1 & \partial_{u_3}\phi_2 & \partial_{u_3}\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{P(U_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{P(U_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{P(U_3)} \end{pmatrix} \times
$$
$$
\times \begin{pmatrix} 1 & U_1 & U_1^2 \\ 1 & U_2 & U_2^2 \\ 1 & U_3 & U_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.31)
$$

Приравнивая детерминанты, находим якобиан обратного преобразования:

$$J\left|\left|\frac{\partial\phi_k}{\partial U_j}\right|\right| = \frac{V(U;3)}{P(U_1)P(U_2)P(U_3)}. \tag{3.32}$$

Матричная форма вышеприведенных уравнений записана так, что обобщение этих результатов на высшие порядки является легко выполнимой задачей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод разделенных разностей находит широкое применение в решении практических задач. Одна из них — приближение многочленами гладких функций, заданных аналитически или наборами точек на плоскости или в пространстве. Эффективность исчисления разделенных разностей третьего порядка при решении такого рода задач показана в работах [15–17].

Исчисление РР имеет следующие характерные особенности.

1. Операторы РР определяются конечным количеством узлов, значения переменных в узловых точках интерпретируются как корни характеристического полинома.

2. Результат действия оператора РР на степенной ряд выражается многочленом от коэффициентов характеристического полинома и представляется треугольной матрицей.

3. Действие оператора РР на экспоненциальную функцию определяет систему обобщенных тригонометрических функций и решения уравнений типа Риккати.

Автор выражает благодарность Н. Д. Дикусару за многократные и плодотворные дискуссии, которые стимулировали работу на данную тему, за помощь в подборе литературы и ценные замечания по тексту рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Boor C.* Divided Differenes // Surv. Approx. Theory 1. 2005. P. 46–69.
2. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. С. 37.
3. *Klinger A.* The Vandermonde Matrix // Amer. Math. Monthly. 1967. V. 74. P. 571–574.
4. *Yamaleev R. M.* Solutions of Riccati–Abel Equation in Terms of Characteristics of General Complex Algebra. JINR Commun. E5-2012-129. Dubna, 2012.
5. *Yamaleev R. M.* Difference between Three Quantities. arXive: 1209.5012va(mat.HO). 2012.
6. *Vein R., Dale P.* Determinants and Their Applications in Mathematical Physics. New York: Springer-Verlag, Inc., 1999.

7. *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. М.: МЦНМО, 2002. 240 с.
8. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, Техн. ун-т, 2002.
9. *Aceto L., Trigiante D.* The Matrices of Pascal and Other Greats // Amer. Math. Monthly. 2001. V. 108. P. 232–245.
10. *Aceto L., Trigiante D.* The Matrices of Pascal and Classical Polynomials. Rendicoti del Circol Matematico in Palermo. Ser. II, Suppl. 68. 2002. P. 219–228.
11. *Yamaleev R. M.* Pascal Matrix Representation of Evolution of Polynomials // Intern. J. Appl. Comput. Math. 2015. V. 1, iss. 4. P. 513–525.
12. *Yamaleev R. M.* Multicomplex Algebras on Polynomials and Generalized Hamilton Dynamics // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 322. P. 815–824.
13. *Yamaleev R. M.* Representation of Solution of n-Order Riccati Equation via Generalized Trigonometric Functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 420, No. 1. P. 334–347.
14. *Yamaleev R. M.* Derivation of the System of Generalized Riccati Equations from the System of Evolution Equations // Asian-Eur. J. Math. 2017. V. 10, No. 4. P. 133–148.
15. *Dikoussar N. D.* Function Parametrization by Using 4-Point Transforms // Comput. Phys. Commun. 1997. V. 99. P. 235–254.
16. *Dikoussar N. D.* Method of Basic Elements // Math. Models Comput. Simulations. 2011. V. 3, No. 4. P. 492–507.
17. *Dikusar N. D.* Higher-Order Polynomial Approximation // Math. Models Comput. Simulations. Pleiades Publishing, Ltd., 2016. V. 8, No. 2. P. 183–200.

Получено 4 декабря 2018 г.

Редактор *Е. В. Григорьева*

Подписано в печать 26.12.2018.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,54. Тираж 220 экз. Заказ № 59580.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/